



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena



Escuela Técnica Superior de  
Ingeniería Agronómica



*Máster Universitario*  
*en Técnicas Avanzadas en Investigación*  
*y Desarrollo Agrario y Alimentario*

**Estudio computacional de la dinámica y el  
control poblacional de plagas mediante el  
software SimKinet**

Autor: Dña. María del Carmen García Onsurbe  
Dirección: D. Antonio Soto Meca  
Codirección: D. Pablo Bielza Lino

Cartagena, a 23 de septiembre de 2020

# ÍNDICE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.</b> .....   | <b>3</b>  |
| 1.1. Descripción del contexto elegido y utilidad del TFM. ....                         | 3         |
| 1.2. Objetivos propuestos. ....  | 3         |
| 1.3. Metodología empleada. ....  | 4         |
| 1.4. Descripción de los capítulos. ....  | 4         |
| <b>CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE.</b> .....  | <b>6</b>  |
| 2.1. Origen del control biológico. ....  | 6         |
| 2.2. Control biológico. ....   | 6         |
| 2.3. Uso de enemigos naturales como herramienta de control biológico. ....             | 8         |
| 2.4. Ventajas, riesgos y limitaciones del control biológico. ....                      | 10        |
| 2.5. Dinámica de poblaciones. ....   | 11        |
| 2.5.1. Modelos matemáticos en la dinámica poblacional. ....                            | 11        |
| <b>CAPÍTULO 3. ASPECTOS MATEMÁTICOS DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES.</b> .....   | <b>15</b> |
| 3.1. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales. ....                                | 15        |
| 3.2. Linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. ....         | 17        |
| 3.3. La Transformada de Fourier. ....  | 18        |
| <b>CAPÍTULO 4. EL MÉTODO DE SIMULACIÓN POR REDES: SIMKINET.</b> .....                  | <b>19</b> |
| 4.1. El Método de Simulación por Redes. ....   | 19        |
| 4.2. Resolución práctica del modelo en red en las ecuaciones de Lotka-Volterra. ....   | 20        |
| <b>CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DE SIMKINET AL ESTUDIO DE LA DINÁMICA POBLACIONAL.</b> ..... | <b>25</b> |
| 5.1. El software SimKinet. ....  | 25        |
| 5.2. Las ecuaciones de Lotka-Volterra. ....  | 25        |
| <b>CAPÍTULO 6. APLICACIONES</b> .....  | <b>31</b> |
| 6.1. <i>Plutella xylostella</i> y <i>Diadegma semiclausum</i> . ....                   | 31        |
| 6.2. Modelo de Lotka-Volterra . ....   | 33        |
| 6.3. Resultados numéricos. ....  | 34        |
| 6.3.1. Provincia de Werugha. ....  | 34        |
| 6.3.2. Provincia de Tharuni. ....  | 38        |
| 6.4. Introducción de fluctuaciones medioambientales en el modelo. ....                 | 41        |
| <b>CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES.</b> .....   | <b>44</b> |
| 7.1. Análisis sobre la consecución de los objetivos propuestos. ....                   | 44        |
| 7.2. Aportación realizada a la investigación. ....                                     | 44        |
| 7.3. Futuras líneas de investigación. ....   | 45        |
| <b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....  | <b>46</b> |

#### RESUMEN:

En este trabajo, se aplica el programa SimKinet al diseño de un modelo con el propósito de simular el modelo Lotka-Volterra aplicado a las densidades de población de la polilla de la col, *Plutella xylostella* y de su exótico parasitoide larvario *Diadegma semiclausum*. La descripción matemática mediante el sistema de ecuaciones diferenciales aplicada a la dinámica del sistema presa-depredador o huésped-parasitoide puede usarse como herramienta para la toma de decisiones en la implementación de estrategias encaminadas al manejo de dichas plagas. El programa puede ser usado como herramienta educacional de laboratorio para la enseñanza de la dinámica en sistemas biológicos, como puede ser el control biológico de plagas. SimKinet está basado en el método de simulación por redes, método basado en el diseño y resolución de un modelo eléctrico equivalente al del problema matemático. Se ha incorporado al modelo un término que simula la influencia tanto de variaciones temporales en la componente ambiental como otra de carácter aleatorio. La comparación con los datos experimentales disponibles para la *Plutella xylostella* muestra una gran concordancia, con lo cual el modelo podría emplearse para la predicción del comportamiento de otras especies, siendo su simplicidad ser extendida a poblaciones similares como la *Tetranychus urticae*.

La simulación se lleva a cabo utilizando el programa informático digital SimKinet con tiempos de cálculo relativamente bajos.

#### ABSTRACT:

In this work, the software SimKinet is applied to the design of a general purpose model for simulating the Lotka–Volterra model applied to the population densities of diamondback moth, *Plutella xylostella* and its exotic larval parasitoid *Diadegma semiclausum*. This differential mathematical model devoted to the description of prey–predator or host–parasitoid system dynamics may be used as tool for decision making in the implementation for such pests' management system strategy. The software can be used as a low cost laboratory educational tool for teaching the dynamics of biological systems, such as biological pest control. Simkinet is based in the Network Simulation Method, which designs and solves an electrical network equivalent to the mathematical problem.

We have incorporated into the mathematical model a term that simulates the influence both temporal variations in the environmental and random component. Comparison with experimental data available for *Plutella xylostella* shows a good agreement, so the modified model could be employed as a predictor for the species behaviour, being its simplicity suitable to be extended to similar populations, such as *Tetranychus urticae*.

Simulation is carried out using the digital computer program SimKinet with relatively low computing times.

## **CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.**

### **1.1. Descripción del contexto elegido y utilidad del TFM.**

El control biológico de plagas, ha sido siempre un tema muy analizado tanto en estudios teóricos como prácticos. Se conoce como lucha biológica en el mundo de la agricultura al conjunto de medios biológicos cuyo fin es prevenir, reducir y eliminar cualquier tipo de plagas bien sean insectos, ácaros o incluso enfermedades que tengan las propias plantas. Se considera un valioso elemento dentro de los programas de producción integrada.

La técnica de control biológico consiste en la utilización de organismos vivos en un cultivo, para de esta forma disminuir la población del “organismo plaga” y, en consecuencia, rebajar el perjudicial efecto que producen.

Dentro de los agentes de control biológico, se incluyen tanto depredadores, como parasitoides, o patógenos. Cuando hablamos de agentes contra las enfermedades de las plantas hablamos de antagonistas.

Dentro de la ecología encontramos una disciplina que se encarga de estudiar los cambios que sufren determinadas poblaciones. Estos cambios pueden ser debidos a distintos aspectos tales como estructura, tamaño, edad, sexo...denominándose a esta disciplina como dinámica de poblaciones.

En el estudio de la dinámica de poblaciones, es muy útil contar con modelos matemáticos o de biología matemática, ya que estos modelos permiten diseñar planes de trabajo óptimos, ya que tienen en cuenta aspectos como la cantidad de alimento que habría que suministrar o la evolución de la plaga-depredador. Los modelos matemáticos son muy útiles ya que estos son capaces de predecir cómo va a evolucionar un sistema. El desarrollo matemático de la dinámica de poblaciones requiere del conocimiento del cálculo diferencial para poder obtener las características más relevantes del problema.

A menudo, estos cálculos pueden resultar muy complejos y se requiere de conocimientos de programación [1]. El método de simulación por redes es un método numérico que hace uso de la analogía eléctrica y de la topología matemática inherente a los circuitos eléctricos con el objetivo de transformar las ecuaciones diferenciales en circuitos eléctricos análogos. Se dice que son análogos ya que la ecuación no pierde sus valores físicos al ser transformada en un circuito. Además, conserva todas sus variables y constantes las cuales pueden ser calculadas al solucionar el circuito mediante un adecuado programa de resolución numérica de circuitos eléctricos, tal como PSpice. En este trabajo el programa SimKinet hará uso de esta estrategia de trabajo haciendo uso del método de simulación por redes y usando para su fin PSpice.

Este método permite al usuario centrarse en el tema y evitar esfuerzos en la matemática del problema. En algunos casos puede suponer simplemente un ahorro de tiempo, pero en otros muchos supondrá continuar o no con el estudio del problema si se carece de habilidad para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales.

Por lo tanto, el método se presenta como una herramienta muy útil en el análisis de fenómenos en cuya descripción matemática aparezcan ecuaciones diferenciales. Además, su aplicabilidad permite recurrir al método para todos aquellos problemas que requieran de la resolución de este tipo de ecuaciones, incluidos los provenientes de otras disciplinas como la química, física o la biología.

### **1.2. Objetivos propuestos.**

En este trabajo se pretende dar a conocer en programa SimKinet y ofrecerlo como herramienta de gran valor para el análisis de problemas donde el conocimiento de la matemática que lo describen no es el objetivo principal. Mediante la explicación teórica del método y la puesta en práctica posterior, se intentará que deje

de ser un programa desconocido con el objetivo de que el futuro usuario, bien estudiante universitario como investigador, pueda aprovecharse de su sencillez, fortaleza y manejo.

Para llevar a cabo dicho proyecto, contextualizaremos y justificaremos el uso de SimKinet en la dinámica de poblaciones. Con diferentes simulaciones, mostraremos una aplicación concreta relacionada con el control biológico y su uso práctico en la dinámica de poblaciones.

Por otra parte, además de servir como presentación de una técnica de resolución, se busca demostrar su aplicabilidad, polivalencia y versatilidad a la hora de resolver problemas de cualquier índole que contengan un conjunto de ecuaciones diferenciales sea cual sea la tipología de estas.

### **1.3. Metodología empleada.**

Para alcanzar los objetivos fijados en el apartado anterior haremos una introducción del contexto en el cual nos encontramos y conoceremos el ámbito en el cual se va a desarrollar el trabajo.

Posteriormente analizaremos todas las características sobre las cuales vamos a aplicar el método de simulación por redes.

Una vez obtenidas las expresiones que definen el comportamiento del sistema biológico, y teniendo en cuenta todas las características del medio en el que se encuentra el sistema, pasaremos a la aplicación de SimKinet.

Una vez sean expuestas las herramientas y conocidas las ecuaciones diferenciales que debemos desarrollar, pasaremos a realizar las simulaciones numéricas del sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra.

A continuación, se mostrará la utilidad de SimKinet aplicándolo en diferentes campos. Para ello, introduciremos el campo de estudio, desarrollaremos la matemática del problema y la transformaremos en circuitos equivalentes mediante el método expuesto en el trabajo.

Con el objetivo de demostrar que los resultados obtenidos mediante SimKinet son correctos se comparará nuestra simulación con los resultados obtenidos por otros métodos, programas o autores.

En resumen, realizaremos simulaciones desde diferentes campos de estudio e implementaremos SimKinet de diversas formas para conseguir los objetivos propuestos a la vez que se mostraremos su utilidad. Además, demostraremos siempre los resultados obtenidos comparándolos con los extraídos de otras técnicas de resolución para poder darles validez.

### **1.4. Descripción de los capítulos.**

El presente trabajo fin de máster se compone de ocho capítulos divididos en sus correspondientes apartados. En el primer capítulo encontramos la introducción al mismo, donde se fijan los objetivos y presentamos la metodología y herramientas que utilizaremos para alcanzarlos.

El segundo capítulo desarrolla el estado del arte y pretende poner en contexto el trabajo al presentar el estudio del control biológico a lo largo de la historia y, más específicamente, en el uso de enemigos naturales. Se muestra al final del capítulo el apartado de los modelos matemáticos que se han ido utilizando históricamente para explicar la dinámica de poblaciones: modelos de Malthus, logístico y Lotka-Volterra.

Cogiendo el relevo de este último apartado, el capítulo tres muestra la matemática asociada al estudio poblacional. Dado que los sistemas presa-depredador están definidos por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, se hace un estudio analítico de estos sistemas con el fin de introducir en los conceptos de puntos de equilibrio y sistemas estables. En el último apartado del capítulo se explicará el concepto de FFT asociada a la transformada de Fourier, algoritmo que nos permitirá descubrir las frecuencias asociadas a las variables presa y depredador.

El capítulo cuatro se introduce el método de simulación por redes de forma teórica, incluyendo un ejemplo práctico del mismo con la finalidad de demostrar su sencilla aplicación. En la elaboración de este ejemplo que corresponde a las ecuaciones de Lotka-Volterra se explica la implementación de los dispositivos eléctricos que van a modelar cada sumando de la ecuación diferencial. Se terminará con el diseño del modelo en red y su implementación posterior vía PSpice para su posterior simulación es este.

En el capítulo cinco empieza con una introducción a las ecuaciones de Lotka-Volterra explicando el origen de estas. A continuación, se explica el funcionamiento del programa SimKinet mediante un ejemplo aplicado a las ecuaciones presa-depredador con la finalidad de mostrar la sencillez del manejo de este.

El capítulo seis va encaminado a realizar a realizar una simulación numérica aplicando el modelo de Lotka-Volterra a las densidades de población de la polilla *Plutella xylostella* y a las de su parasitoide larvario *Diadegma semiclausum*. Esta polilla se ha ido diseminando por todo el mundo hasta llegar a convertirse en una plaga cosmopolita y muy destructiva. El estudio numérico que se realiza con SimKinet es tomado de otro estudio que se llevó a cabo el modelo de Lotka-Volterra[2]realizado en dos provincias de Kenia a través de varios periodos pre y post liberación del parasitoide. Al final del capítulo, con la idea de explicar las fluctuaciones observadas por el estudio experimental de dichos autores[3], en base al estudio de otros investigadores, hemos logrado reproducir y mejorar el estudio computacional acercándonos más a la realidad.

El capítulo siete trata de recoger todas las conclusiones aprendidas a lo largo del trabajo, así como el análisis de los objetivos propuestos y las vías de investigación que quedan abiertas para futuros proyectos sobre el tema expuesto. Ponemos la relevancia en el uso de SimKinet como programa de simulación en cursos universitarios para que los estudiantes puedan utilizarlos desde la perspectiva docente. Así mismo hacemos hincapié en su uso a nivel de investigación tal y como se muestra en el trabajo, recalcando la mejoría en los modelos de Lotka-Volterra al introducir fluctuaciones en el medio ambiente las cuales son implementados en el modelo matemático por dos términos: uno de naturaleza sinusoidal y otro de tipo aleatorio.

Por último, en el octavo capítulo se numeran las referencias utilizadas en el trabajo y las fuentes consultadas que han hecho posible la consecución del mismo.

## **CAPÍTULO 2. ESTADO DEL ARTE.**

### **2.1. Origen del control biológico.**

Charles Valentín Riley (1843-1895) es considerado por antonomasia como el padre del control biológico. Fue un entomólogo nacido en Gran Bretaña, pero estadounidense por adopción. Fue uno de los primeros individuos en utilizar el control biológico de plagas y fue autor de más de 2.400 publicaciones. Creador de la Comisión Entomológica de los Estados Unidos y fue uno de los fundadores de la Asociación Americana de Entomólogos Económicos[4].

Se puede tomar el año 1888 como el año del inicio del control biológico en el mundo, ya que en este año fue cuando se hizo el primer control bien planteado y controlado. Fue un caso sobradamente conocido en el cual Riley propuso la introducción del depredador coccinélido *Rodolia cardinalis* desde Australia a California, con el propósito de controlar en los cítricos el homóptero *Icerya purchasi*. Esta es la razón principal por la cual Riley es conocido como el padre y pionero en el mundo del control poblacional biológico. Si bien hay que puntualizar que ya se sabía que agricultores chinos se habían percatado de que las hormigas eran depredadores naturales de diferentes tipos de plagas para lo cual iban poniendo entre los árboles nidos de estos.

Uno de los primeros autores en sugerir el parasitismo como medida de control ante diferentes plagas fue Erasmus Darwin al observar en el año 1800 como morían las larvas en las hojas del repollo al ser atacadas por una avispa (*Ichneumonidae*).

Las primeras ideas originales se han ido adaptando hasta lo que hoy en día conocemos como control biológico.

### **2.2. Control biológico.**

Se llama control biológico a la utilización de organismos o de sus subproductos o metabolitos, que de forma natural son enemigos de un patógeno o plaga, cuyo fin es limitar o eliminar los efectos perjudiciales que puedan tener tanto en las plantas como en sus subproductos[5].

Hoy en día existen diferentes definiciones para describir el término “control biológico” aunque la definición que más se ha admitido es la que han utilizado de forma tradicional los entomólogos. Estos definen el control de plagas como un procedimiento agrícola de control de plagas que utiliza parásitos, depredadores, herbívoros o cualquier otro medio natural siendo este un importante componente en la gestión integrada de plagas y de máxima importancia económica.

Llegado a este punto es fundamental hacer una diferenciación entre el concepto de control biológico y lo que conoce como control natural.

En el control biológico la base es la misma, la existencia de un organismo que daña al cultivo y un organismo que es su depredador natural. Pero en este caso el hombre no influye sobre el sistema siendo la propia naturaleza la que realiza de forma sabia esa autorregulación. Podemos matizar que en el control natural influyen otros factores muy importantes tales como los factores abióticos del medio.

Pero lamentablemente el control biológico natural sucede en muy pocas ocasiones. El uso y abuso de productos de síntesis química ha destruido los ciclos naturales. El uso de productos de síntesis química ha traído una serie de ventajas, pero también muchos inconvenientes.

A día de hoy, tener control de las enfermedades y plantas por métodos químicos sigue siendo muy necesario, sobre todo para poder mantener una agricultura rentable y con altos rendimientos de cosecha.

La investigación y desarrollo ha permitido lanzar al mercado productos formulados a base de moléculas que proporcionan la activación de los mecanismos de defensa natural de la planta, los elicitors. También se han desarrollado moléculas como los neonicotinoides, moléculas que actúan sobre el sistema nervioso central del insecto. Otra interesante línea es el uso de bacterias, entre ellas las llamadas bacterias quitinolíticas, capaces de degradar la quitina que contiene el exoesqueleto de los insectos[6].

La agricultura siempre ha tenido problemas con las pérdidas de producto tanto en precosecha como en postcosecha. Muchas de estas pérdidas están relacionadas con el ataque de plagas y enfermedades siendo de siempre un gran problema para la agricultura. El hombre ha tenido que luchar continuamente contra ellas, pero el hecho de que hoy en día trabajemos una agricultura intensiva con grandes extensiones de un solo cultivo y sin hacer rotaciones, ha dado lugar a modificaciones en el equilibrio ecológico natural.

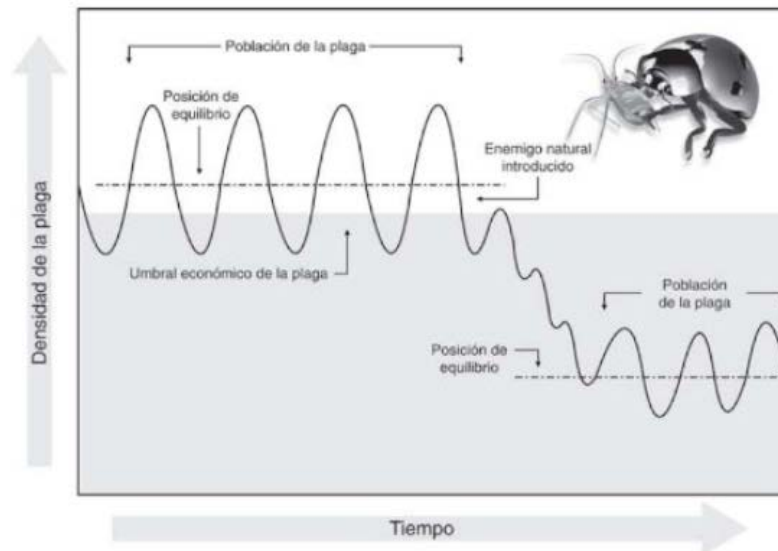
Los agentes químicos tuvieron un lugar muy importante en la agricultura del siglo XX, pero día a día su uso está cada vez más limitado. El uso casi indiscriminado ha traído muchas consecuencias tanto al medio ambiente como al ser humano.

Los productos de síntesis química se acumulan en suelos, agua y alimentos. Por esta razón es importante respetar las dosis, así como los intervalos de seguridad. Otro aspecto importante es utilizar este tipo de productos únicamente en aquellos cultivos en los cuales esté autorizado, pues no todos los productos de síntesis química se pueden utilizar en todos los cultivos.

Además, este tipo de productos tiene una repercusión muy negativa sobre los enemigos naturales ya que les afecta directamente provocando su muerte o reduciendo las poblaciones de especies que les sirven de alimento.

A raíz de estos hechos toman cada vez más importancia otros métodos de control tales como el control biológico. En la agricultura existe cierta tendencia a eliminar totalmente los insectos de los diferentes cultivos. Sin embargo, el control biológico lo que hace es convivir con umbrales que se encuentren por debajo del nivel de daño que sería económicamente admisible. En la Figura 1 podemos ver el efecto de la regulación mediante la introducción de un enemigo natural para el control biológico de una plaga frente a su umbral económico.





**Figura 1.** Efecto de regulación con la incorporación de un enemigo natural para el control biológico de una población de plaga frente a su umbral económico [4].

El control biológico es claramente diferenciable de otras prácticas de control ya que su forma de actuar dependerá de la densidad poblacional. De este modo los enemigos naturales de la plaga irán creciendo destruyendo la población de esta[4].

Es interesante explicar que el control biológico puede también promover de manera natural la biodiversidad en diferentes ecosistemas agrícolas, así como introducir setos, follaje... De esta manera puede promover la existencia de un reservorio natural.

El uso de insectos entomófagos a la hora de regular poblaciones de plagas en la agricultura es muy necesario. De esta forma, a la hora de regular los ecosistemas, el uso de diferentes estrategias como la introducción de depredadores como patógenos y parasitoides ofrece una solución eficiente a este problema.

Es importante recordar que los principios de control biológico pueden ser aplicados en oposición a diferentes organismos plagas tales como insectos, fitopatógenos, ácaros, malezas, ...En este trabajo nos centramos en la utilización del control biológico contra insectos.

### **2.3. Uso de enemigos naturales como herramienta de control biológico.**

Podemos definir el uso de enemigos naturales como la “introducción y establecimiento permanente de una especie autóctona o exótica para el control o supresión, a largo término, de la población de una plaga”[7].

No siempre encontramos a los enemigos naturales en la zona en la cual queremos eliminar la plaga. El procedimiento es la búsqueda de los enemigos naturales y encontrar su origen con el fin de que una vez se hayan recolectado, se puedan enviar a los lugares donde la plaga es exótica y por lo tanto no tiene enemigos naturales.

Normalmente es necesario hacer una cría de enemigos naturales en laboratorio, tanto nativos como exóticos, y posteriormente liberarlos de forma ocasional o repetida. De este modo podemos ir reduciendo la plaga a umbrales donde no sea tan perjudicial para el cultivo[7].

En ciertos casos, los enemigos naturales, ya sean exóticos o nativos, aparecen de forma fortuita creándose de esta manera un factor de mortalidad en la plaga que regula el control biológico.

A este mecanismo se le conoce como “Control biológico fortuito”. Existen diferentes ejemplos de este tipo de control; uno de ellos se dio en África con el himenóptero *Aphytis chrysiphali*. Esta es una avispa parasitoide originaria del mediterráneo la cual se introdujo de manera casual y que ejerce mucho control en la denominada escama roja de los cítricos.

Existen otros de métodos de control los cuales residen en la adopción de prácticas culturales que fomenten la aparición de enemigos naturales. Pero para ello sería necesario eliminar totalmente el uso de productos de síntesis química en el caso de que este tipo productos pueda eliminar tanto la plaga como la fauna auxiliar.

En ocasiones con el objetivo de promover la eficiencia de los enemigos naturales nativos se suele proceder a la modificación de la naturaleza física tanto del campo como de sus alrededores.

Las plagas agrícolas que se regulan mediante el control biológico pertenecen normalmente a la especie de los insectos chupadores pertenecientes al orden Hemiptera. En cuanto a los insectos del suborden Homoptera hay una gran variedad y se incluyen insectos tales como cigarras, moscas blancas, cochinillas , escama algodonosa, pulgones,..[7].

La amenaza por parte de los insectos homópteros en la industria agrícola, especialmente en los cítricos, ha suscitado un creciente interés para su control.

Un problema importante ha sido el uso masivo de pesticidas. Este hecho ha provocado que muchas plagas no tengan enemigos naturales nativos lo cual ha provocado que se hayan tenido que introducir insectos benéficos para ayudar a bajar la población.

Ha costado muchos años y mucho esfuerzo el poder desarrollar el control biológico existiendo aún hoy en día problemas que debemos solventar. Son necesarios varios años para encontrar un enemigo natural adecuado para el control de una determinada plaga. Este hecho es a veces de una gran dificultad pues los agricultores tienden a requerir soluciones urgentes[8].

La mayoría de los insectos parasitoides más importantes que se utilizan para erradicar plagas en sistemas tanto agrícolas como forestales, bien de manera natural o inducida, se pueden clasificar en diferentes órdenes y familias, según se muestra en la Tabla 1 .

| ORDEN         | FAMILIA         | PRINCIPALES PRESAS   |
|---------------|-----------------|--|
| COLEOPTERA    | Coccinellidae   | Áfidos, cochinillas, moscas blancas  |
|               | Melyridae       | Huevos, larvas y adultos de insectos blandos   |
|               | Carabidae       | Larvas y pupas de lepidópteros   |
|               | Staphylinidae   | Huevos y larvas de moscas  |
| HEMIPTERA     | Anthocoridae    | Trips, ninfas de mosca blanca, ácaros y áfidos                                       |
|               | Geocoridae      | Pequeños insectos de diferentes grupos   |
|               | Nabidae         | Áfidos y larvas de lepidópteros  |
|               | Reduviidae      | Áfidos, larvas de lepidópteros y coleópteros   |
|               | Pentatomidae    | Escarabajos y coccinélidos   |
| DIPTERA       | Asilidae        | Langostas, escarabajos y moscas  |
|               | Cecidomyiidae   | áfidos, moscas blancas, trips y ácaros   |
|               | Syrphidae       | Áfidos y pequeñas lavas de lepidópteros  |
| NEUROPTERA    | Crhysopidae     | Áfidos, moscas blancas, ácaros, huevos y larvas de lepidópteros, escarabajos y trips |
| THYSANOPTERA  | Aleoarthripidae | Otros trips, áfidos y ácaros   |
|               | Phlaeothripidae | Ácaros   |
| HYMENOPTERA   | Formicidae      | Depredadores generalistas  |
|               | Vespidae        | Depredadores generalistas  |
| DERMAPTERA    | Forficulidae    | Áfidos, huevos y larvas de lepidópteros  |
| MANTODEA      | Mantidae        | Depredadores generalistas  |
| ODONATA       | Calopterygidae  | Moscas, mosquitos y otros insectos pequeños  |
| PARASITIFORME | Phytoseiidae    | Moscas blancas, trips, araña blanca, araña roja y huevos de lepidópteros             |

**Tabla 1.** Principales órdenes y familias de insectos depredadores [9].

## 2.4. Ventajas, riesgos y limitaciones del control biológico.

El control biológico se presenta como una alternativa muy importante a tener en cuenta a la hora de garantizar sistemas sostenibles. La sociedad tiene cada vez más conciencia ecológica por lo cual los productores tienen en cuenta otras alternativas a la hora de sacar sus cultivos adelante. El control biológico se presenta como una alternativa respetuosa con el medio ambiente, y a la vez rentable.

Conocemos perfectamente que el control de una plaga mediante métodos químicos trae consigo muchos problemas. Además del alto coste de los productos hemos de tener en cuenta el perjuicio para el medio ambiente y para el ser humano. Por estas razones el control biológico se presenta como una alternativa respetuosa con el medio ambiente y además eficaz, sobre todo con el paso del tiempo.

El control biológico presenta varias ventajas frente a los sistemas tradicionales, a continuación, pasamos a describir algunas de ellas:

- Se puede hacer frente a las plagas sin recurrir a productos de síntesis química.
- A largo plazo presenta los mejores resultados y también uno de los métodos más rentables.
- Requiere de inversión inicial, pero a largo plazo resulta el método más rentable.

Pero como cabe esperar, este método también cuenta con ciertos inconvenientes:

- Una de las principales limitaciones que presenta el método es que requiere cierta formación y conocimientos técnicos además de una necesaria planificación del trabajo y el “buen saber hacer” de la persona encargada. En general este método no resulta tan sencillo, como podría ser la aplicación de un químico.

- El método es más lento que la aplicación de plaguicidas, ya que en este caso hemos de esperar a que la especie depredadora se asiente.

## **2.5. Dinámica de poblaciones.**

A lo largo del tiempo, las poblaciones van cambiando por diferentes aspectos, el estudio de dichos factores de cambio, se estudia en la dinámica de poblaciones.

Las poblaciones biológicas sufren una serie de cambios con el tiempo, los cambios son normalmente referidos al tamaño, edad, sexo y otros parámetros importantes, dependiendo de la población a estudiar.

El estudio de la dinámica de poblaciones, tiene gran importancia cuando se trata de evaluar, por ejemplo, las consecuencias que puede tener la acción del ser humano sobre el medio ambiente. En el campo de la investigación, el estudio de poblaciones, también resulta muy útil cuando queremos estudiar diferentes fenómenos biológicos, relacionados con la capacidad reproductiva y control poblacional[10].

En este campo son muy útiles los modelos matemáticos, ya que nos permiten:

- Estudiar las regulaciones de poblaciones plaga-depredador-
- Estudiar la viabilidad de los programas de control biológico.
- Predicción de resultados
- Establecer bases de datos para futuras investigaciones.

En resumen, podemos decir que el estudio de la dinámica de poblaciones, presenta aspectos muy importantes en el campo del control biológico.

### **2.5.1. Modelos matemáticos en la dinámica poblacional.**

Los hábitats contienen especies que pueden interactuar tanto entre sí como con otras especies y con el medio ambiente. La coexistencia de varias especies en su hábitat natural representa por tanto un papel muy importante a la hora de estudiar el equilibrio ecológico. Entre los modelos más destacados están el modelo de Malthus, logístico y el de Lotka-Volterra. Estos modelos explican las interacciones de tipo presa-depredador y se fundamentan en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias[11][12].

Definiremos un modelo matemático como una descripción matemática capaz de explicar el comportamiento de un sistema o fenómeno que se dé en la naturaleza. Para la formulación de un modelo matemático se necesita: (i) identificar las variables que causan los cambios en el sistema. (ii) Establecer las hipótesis que creamos más razonables a la hora de la descripción del sistema. Es importante que se asuman una serie de restricciones en nuestro modelo.

Vamos a describir en función de la su importancia y de modo histórico los modelos matemáticos que se han ido utilizando para explicar las dinámicas poblacionales.

#### **a) Modelo de Malthus.**

Es uno de los primeros modelos matemáticos en la descripción de la dinámica poblacional. Fue propuesto en el año 1798 por el economista inglés Thomas Malthus en su obra "Ensayo sobre el principio de población". La idea de este modelo es considerar el crecimiento de una población proporcional al número de individuos de esa especie, es decir, la tasa de crecimiento es constante para esa especie. Este modelo es simple y poco

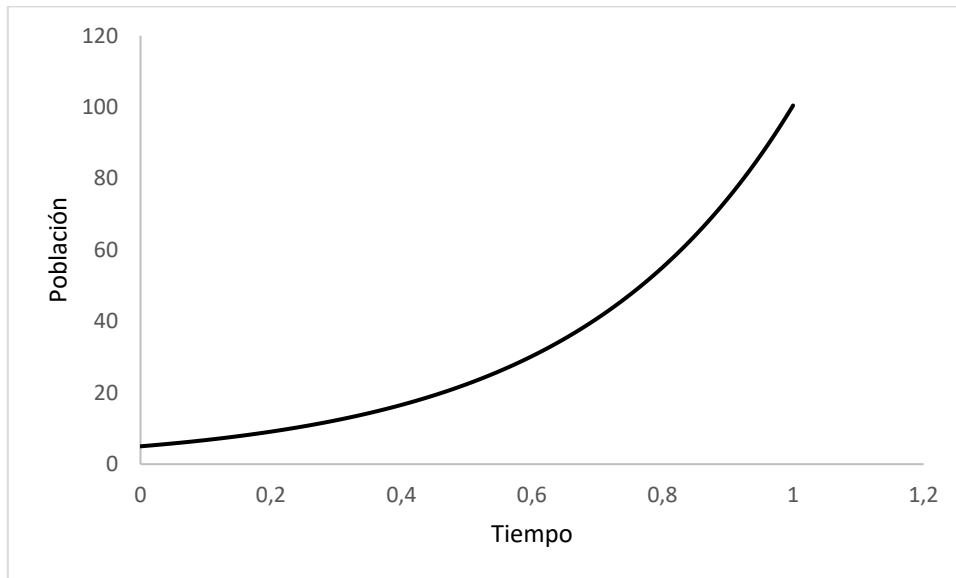
realista ya que la población crecería de manera continua sin control o iría decreciendo hasta su extinción. Sin embargo, el modelo es adecuado para la predicción de poblaciones en tiempos cortos.

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t) \quad (1)$$

La solución analítica del modelo de Malthus es

$$P(t) = P_0 e^{kt} \quad (2)$$

donde  $k$  representa una constante y  $P_0$  el tamaño de la población inicial. En la Figura 2 podemos ver la solución numérica de la ecuación diferencial del modelo de Malthus realizada con SimKinet.



**Figura 2.** Simulación numérica mediante SimKinet [13] de la ecuación diferencial del modelo de Malthus ( $k = 3$ ;  $N_0 = 5$ ).

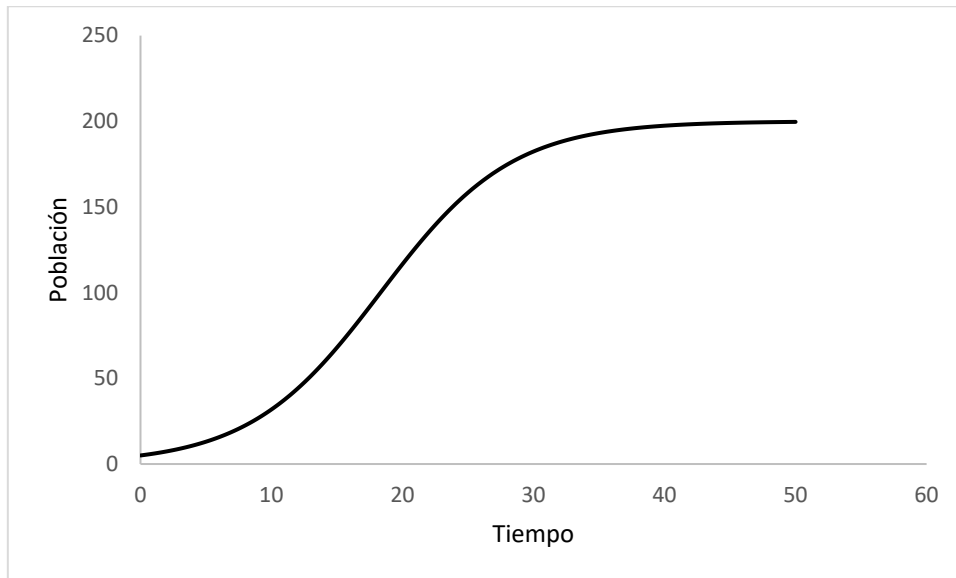
### b) Modelo logístico.

El modelo de Malthus asume que los recursos son ilimitados, hipótesis que es cierta para ciertos intervalos de tiempo en el medio natural. El crecimiento exponencial llevaría a un crecimiento poblacional que llevaría a reducir y llegando incluso agotar los recursos. Por lo tanto, este modelo supone una mejora respecto al modelo anterior ya que implica que la población de una especie crece hasta un cierto valor finito debida a la limitación impuesta por los recursos alimentarios evitando la saturación debido al crecimiento exponencial. Este modelo es típico en ecosistemas biológicos que basan su supervivencia en que tiene tasas de reproducción muy elevadas. Fue propuesto en el año 1838 por el matemático belga Pierre-François Verhulst y tiene la forma de una curva sigmoidea. El crecimiento de la población empieza de forma exponencial seguido de una disminución en el crecimiento el cual está limitado por la capacidad carga (tamaño máximo de una población que el entorno es capaz de mantener) debido a presiones de tipo ambiental [12].

La ecuación que rige el crecimiento logístico es

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2 \quad (3)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  constante positivas. En la Figura 3 podemos ver la solución numérica de esta ecuación realizada con SimKinet.



**Figura 3.** Simulación numérica mediante SimKinet [13] de la ecuación diferencial del modelo logístico ( $\alpha = 0.2$ ;  $\beta = 0.001$ ;  $N_0 = 5$ ).

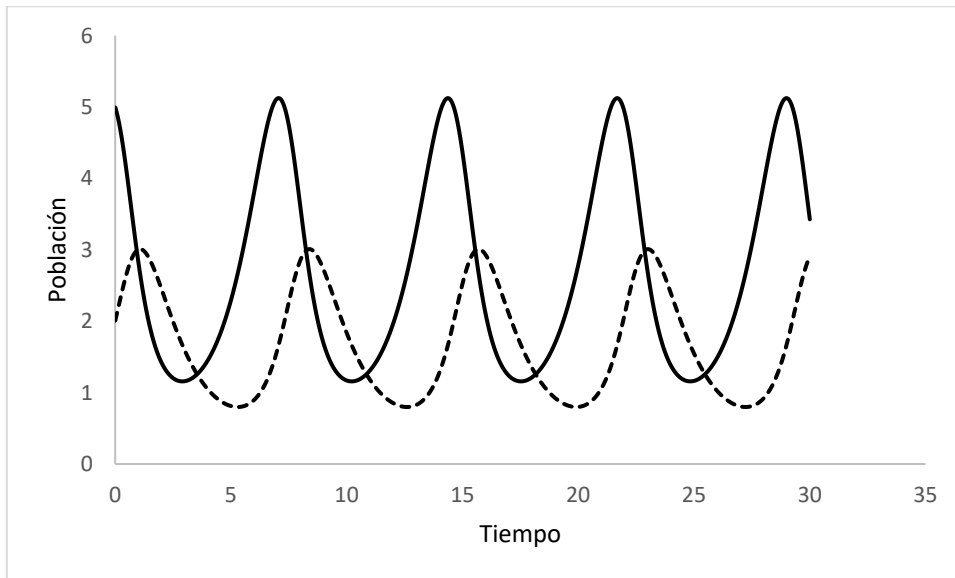
**c) Modelo de Lotka- Volterra.**

En los ecosistemas biológicos no solamente vive una especie. La diversidad de estas induce una competencia por los recursos del medio ambiente. En esta cadena alimenticia existe una cierta jerarquía entre las especies, lo que da lugar a introducir los conceptos de presa y depredador. Las ecuaciones fueron propuestas de forma independiente por el matemático estadounidense de Alfred J. Lotka en 1925 y por el matemático italiano Vito Volterra en 1926. Este modelo matemático está representado por un par de ecuaciones diferenciales de primer orden que representa la dinámica biológica de dos especies las cuales interaccionan entre sí, una como presa y la otra como depredador. Estas ecuaciones se representan como:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y) \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x)$$

donde  $x$  e  $y$  representa la población de la presa y el depredador, respectivamente y  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  son parámetros que describen las interacciones que se dan entre las especies. En la Figura 4 podemos ver una solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de Lotka-Volterra realizada con SimKinet.



**Figura 4.** Simulación numérica mediante SimKinet [13] del sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de Lotka-Volterra ( $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0.6$ ;  $\gamma = 0.8$ ;  $\delta = 0.3$ ;  $x_0 = 5$ ;  $y_0 = 2$ ).

## CAPÍTULO 3. ASPECTOS MATEMÁTICOS DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES

### 3.1. Sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

El estudio de las ecuaciones no lineales es importante ya que muchos fenómenos físicos y biológicos en la naturaleza pueden describirse por este tipo de ecuaciones. A veces se tiende a linealizar el problema, pero sin embargo lo único que conseguimos es buscar soluciones aproximadas o bien describir cómo se comporta el sistema.

Un caso particular de ecuación no lineal de segundo orden es aquella la cual está descrita por la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (5)$$

Esta ecuación puede representar perfectamente la segunda ley de Newton cuando una partícula de 1 kg está sometida a una fuerza que depende de la posición  $x$  de la partícula y de su velocidad  $\frac{dx}{dt}$ . De esta forma el estado de la partícula en cualquier instante está caracterizado por las dos variables  $x$  y  $\frac{dx}{dt}$  que llamaremos fases y estas se representan en un sistema bidimensional que llamaremos el "espacio de las fases".

Realizando el cambio de variable  $y = \frac{dx}{dt}$  nos queda la ecuación diferencial no lineal de segundo orden como dos ecuaciones no lineales ordinarias de primer orden.

$$y = \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$$

De manera general podemos representar el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

Podemos observar que la variable tiempo no aparece en las funciones  $f$  y  $g$ . Diremos que el sistema es autónomo. Dado un instante cualquiera  $t_0$  y un punto del espacio de fases  $(x_0, y_0)$ , existe una única solución del sistema  $x = x(t_0)$  e  $y = y(t_0)$  que pase por ese punto. Estas ecuaciones representan en el espacio de fase lo que denominamos trayectoria del sistema.

Las trayectorias del sistema de ecuaciones (7) no intersecan entre sí. Únicamente en los llamados puntos críticos se da el caso contrario y es justamente en estos donde se cumple que  $f(x_0, y_0) = 0$  y  $g(x_0, y_0) = 0$

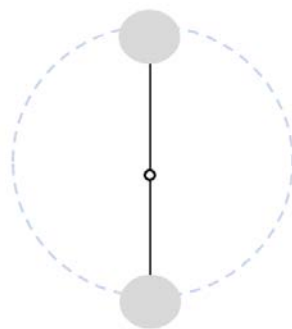
Una característica de los puntos de críticos es que son puntos de equilibrio del sistema al que representan. También podemos enfatizar que las trayectorias cerradas en torno a un punto crítico son soluciones de tipo periódico.

Existen cuatro tipos de puntos críticos para el sistema autónomo (7). Supondremos que las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  son funciones continuas y que las primeras derivadas parciales también lo son. Para encontrar los puntos críticos tenemos que resolver el sistema de ecuaciones  $f(x, y) = 0$  y  $g(x, y) = 0$ . Los puntos críticos son: los nodos, los puntos de silla, los centros o vórtices y los focos o puntos de espiral[14].



Vamos a continuación a describir el concepto de estabilidad tomando como ejemplo el caso de un péndulo. Uno de los puntos más interesantes de un sistema físico son los llamados estados estacionarios. Uno de los aspectos importantes de los puntos estacionarios es la estabilidad o lo que se denomina el grado de permanencia del sistema. Los puntos estacionarios son puntos críticos o de equilibrio del sistema. En el caso del péndulo tenemos dos posibles estados estacionarios. Cuando la masa del péndulo está situada en el extremo superior del péndulo o cuando se encuentra en la parte inferior. Sin embargo, sabemos que dichos puntos presentan una gran diferencia.

El primer caso se trata de un punto inestable ya que bajo ciertas perturbaciones del sistema este tiende a alejarse del punto, sin embargo, en el segundo bajo una pequeña perturbación el sistema tiende a volver a su estado de reposo. Desde un punto de vista intuitivo, podemos decir que un punto de equilibrio será estable si las trayectorias que están cerca de ese punto continuarán estando cerca del él para cualquier tiempo. En la Figura 5 podemos ver los dos puntos de equilibrio que se presentan para el péndulo físico.



**Figura 5.** Puntos de equilibrio del péndulo físico (posición superior inestable; posición inferior estable).

Un aspecto muy importante de los puntos críticos es su clasificación en base a la naturaleza de estos puntos y a su estabilidad. Para resolver sistemas autónomos no lineales deberemos estudiar antes los sistemas lineales ya que es posible estudiar los no lineales estudiando el sistema lineal que lleva asociado.

Sea el sistema autónomo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} &= a_2x + b_2y \end{aligned} \tag{8}$$

Este sistema lineal tiene como punto crítico el  $(0,0)$ . Supongamos que el determinante  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ .

Sabemos por la teoría de las ecuaciones diferenciales que una posible solución al sistema (2) es  $x = Ae^{mt}$  y  $y = Be^{mt}$ , siendo  $m$  la raíz de una ecuación cuadrática que se denomina ecuación auxiliar:

$$m^2 + (a_1 + b_2)m + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

Dependiendo de los valores que tomen las soluciones  $m_1$  y  $m_2$  así será la naturaleza que tendrá el punto crítico. En la siguiente tabla se ilustran las distintas posibilidades[14][15].

| Casos          | CASO 1                          | CASO 2                            | CASO 3                                    | CASO 4           | CASO 5            |
|----------------|---------------------------------|-----------------------------------|---|------------------|-------------------|
| Punto crítico  | Nodo                            | Punto de silla                    | Foco                                      | Nodo             | Centro            |
| $m_1$<br>$m_2$ | Reales, distintas y mismo signo | Reales, distintas y signo opuesto | Complejas conjugadas no imaginarias puras | Reales e iguales | Imaginarias puras |

**Tabla 2.** Naturaleza de los puntos críticos para el sistema lineal autónomo (2).

### 3.2. Linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

Vamos a estudiar ahora la estabilidad mediante la linealización. Supongamos que tenemos el sistema autónomo.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{9}$$

Supongamos que el sistema tiene un punto crítico en  $(x_0, y_0)$  y supongamos que las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  son de clase 1 ( $C^1$ ), es decir, con sus derivadas parciales continuas. Si aproximamos ambas funciones cerca del punto crítico entonces las ecuaciones de los respectivos planos tangentes en dicho punto serán

$$\begin{aligned}f(x, y) &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ g(x, y) &\approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\end{aligned}\tag{10}$$

Dichas ecuaciones pueden ser escritas matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\tag{11}$$

en donde A es la matriz jacobiana del vector  $(f(x, y), g(x, y))^t$ . De esta manera el sistema autónomo (9) puede aproximarse al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\tag{12}$$

De esta las trayectorias calculadas por el sistema lineal cerca del punto crítico  $(x_0, y_0)$  se aproximan al sistema autónomo (9).

A continuación, calculamos los autovalores de la matriz A mediante el polinomio característico. Decir que  $\lambda$  es un valor propio de A es equivalente a expresar que  $Av = \lambda v$  donde  $v$  representa un vector. Esta ecuación

puede ser reescrita como  $(A - \lambda I)v = 0$ , la cual tiene solución siempre que se cumpla que  $\det(A - \lambda I) = 0$ . A este polinomio se le denomina polinomio característico.

| $(x_0, y_0)$               | Nodo asintóticamente inestable | Nodo inestable              | Punto de silla                   | Foco asintóticamente estable                      | Foco inestable                                    |
|----------------------------|--------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|---|---|
| $\lambda_1$<br>$\lambda_2$ | $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$    | $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ | $\lambda_1 < 0$<br>$< \lambda_2$ | $\lambda_1$ complejo y $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ | $\lambda_1$ complejo y $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ |

**Tabla 3.** Naturaleza de los puntos de equilibrio para sistemas no lineales.

### 3.3. La Transformada de Fourier.

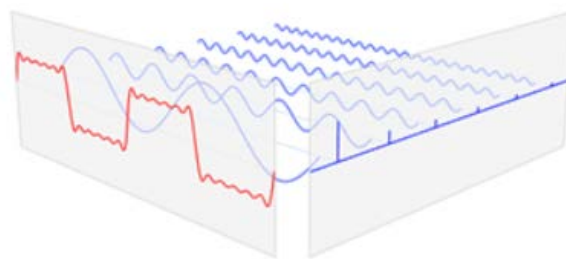
Definimos la transformada de Fourier de una señal en una dimensional o función continua  $f(t)$  como una transformación matemática que nos permite transformar estas señales del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias. Es decir, nos permitirá calcular la contribución de cada valor de la frecuencia en la formación de la señal.

La transformada de Fourier puede ser considerada una aplicación que hace corresponder a una función  $f$  dependiente del tiempo otra  $g$  dependiente de la frecuencia del siguiente modo[16]:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (13)$$

La aplicación de la transformada de Fourier en los campos de la ciencia e ingeniería es muy diversa. Se ha aplicado a procesamiento de señales en telecomunicaciones, en propagación de ondas, en la teoría de probabilidad... En el área de las telecomunicaciones la transformada de Fourier aplicada al procesamiento de las señales electromagnéticas es considerada como la descomposición de estas señales en distintas componentes de frecuencias diferentes. No es sino recoger el espectro de frecuencias de estas señales. En la Figura 6 podemos observar en rojo una señal y en azul las diferentes funciones que la componen. En perspectiva se observan las componentes de la frecuencia correspondientes a esta señal.

La manera más sencilla de definir esta transformada es como el espectro de las frecuencias de una función.



**Figura 6.** Representación gráfica de a transformada de Fourier (Función en el dominio del tiempo (rojo); Función en el dominio de la frecuencia (azul). Se puede observar en forma de picos las frecuencias que componen la función[17].

El objeto de introducir el concepto de transformada de Fourier en este trabajo es para poder entender una de las opciones con las que puede trabajar SimKinet. Este programa utiliza a PSpice como programa de resolución numérica de circuitos eléctricos. Psico dispone de una opción que es la FFT. Este término viene de transformada rápida de Fourier que en inglés es Fast Fourier Transform el cual es un algoritmo que permite el cálculo de la transformada de Fourier discreta y la de su inversa. El ámbito de la FFT es muy diverso aplicándose a campos del filtrado digital y al tratamiento de señales

## **CAPÍTULO 4. EL MÉTODO DE SIMULACIÓN POR REDES: SIMKINET.**

### **4.1. El Método de Simulación por Redes.**

El MESIR es un método numérico basado en la teoría de redes [18] con el que se resuelve gran cantidad de procesos físicos, químicos, ecológicos,...[19][20][1][21][22]. Este trabajo se centrará en la resolución numérica usando el programa SimKinet de las ecuaciones de Lotka-Volterra aplicadas al ámbito del control biológico. Hoy en día es un método numérico que se ha consolidado en las últimas décadas y son muchos los grupos de investigación que siguen este método (Universidades de Granada, Jaén, Murcia y Politécnica de Cartagena). El MESIR se ha mostrado como un método numérico de gran capacidad de cálculo mostrando soluciones de gran precisión y presentando tiempos de computación comparables e incluso menores a los de otros algoritmos de cálculo. La razón reside en la potencia de los algoritmos de cálculo que cada vez se van implementando en los programas de resolución de circuitos eléctricos.

El MESIR es un método que se articula en dos etapas: la primera (i) consiste en la elaboración de un circuito eléctrico (lo que denominamos modelo en red) con la misma identidad topológica que nuestro modelo matemático, incluyendo las condiciones iniciales del problema y sus condiciones de contorno. El segundo (ii) consiste en la resolución numérica mediante un programa de resolución de circuitos eléctricos del modelo en red. En este trabajo emplearemos PSpice[23] por ser precisamente el que utiliza SimKinet como herramienta de cálculo.

Es conveniente recalcar que el MESIR no es ninguno de los procedimientos que se han desarrollado tradicionalmente como una forma de representar analogías entre procesos físicos y ciertos elementos simples en circuitos como condensadores y resistencias. Esta analogía siempre estaba enfocada a términos lineales. En este trabajo vamos a abordar el estudio de problemas de control poblacional a través de las ecuaciones de Lotka- Volterra utilizando términos no lineales que han sido abordados por diferentes autores usando otro tipo de algoritmos numéricos clásicos tales como elementos finitos, volúmenes finitos, ...

La equivalencia formal entre el proceso físico y el modelo en red radica en que ambos se refieren a las mismas ecuaciones discretizadas en el espacio o, lo que es lo mismo, a las mismas ecuaciones referidas tanto al elemento de volumen como a las condiciones de contorno del problema.

Nos planteamos ahora cómo se empieza la elaboración de un modelo en red. El punto de partida para la elaboración del modelo es reticular el medio en celdas elementales o elementos de volumen a los cuales les aplicamos las ecuaciones diferenciales. El resultado es un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas las cuales son el punto de partida para la elaboración del modelo aplicado a cada celda[24]. Una vez realizado este paso, debemos establecer una correspondencia entre las variables del problema y las variables de tipo eléctrico, es decir, tensiones e intensidades, de manera que podamos interpretar el proceso en función de estas.

En función de la geometría del problema así deberemos proceder para la asociación de las celdas del modelo en red de manera que este describa en su totalidad completo al medio físico. Respecto de las condiciones iniciales y las de contorno actuaremos de la misma forma.

En todos los procesos de transporte podemos efectuar la siguiente correspondencia entre lo que serán las variables de flujo y las variables potencial. Las variables potenciales serán aquellas variables que se corresponden con las variables del modelo matemático (el potencial eléctrico puede corresponderse con la temperatura, concentración, población de una especie...). Sin embargo, las variables flujo serán aquellas que representen flujo de calor, flujo de masas, flujos poblacionales... y se corresponden con densidades de corriente eléctricas.

El planteamiento en el que se basa el MESIR es la llamada teoría de redes de Peusner[18], que se fundamenta en la termodinámica de redes. Esta teoría de redes se basa a su vez en la teoría de circuitos mediante una generalización de las variables conjugadas con las cuales trabajará, la intensidad de corriente eléctrica y la diferencia de potencial. Para Peusner el modelo en red representa con exactitud las características matemáticas del proceso al cual está describiendo. Por lo tanto, las variables flujo y fuerza deben satisfacer las leyes de Kirchhoff y de las relaciones entre ambas variables a través del modelo matemático dependerá el tipo de elementos que se implementarán en el circuito. El MESIR es también un método de simulación en el sentido de que necesita de un programa de resolución de circuitos eléctricos.

Sintetizando a modo de resumen, el que un modelo en red sea viable mediante la teoría de redes supone:

- (i) La existencia un modelo en red único para el modelo matemático e independiente del tiempo.
- (ii) La existencia de una magnitud flujo  $j$  que irá asociada a cada rama que conecte dos nodos  $N-N'$ . Estos flujos deben satisfacer la ley de corriente de Kirchhoff (LCK).
- (iii) La existencia de una magnitud  $\phi$  asociada a cada nudo del modelo en red y cuya diferencia  $\phi_N - \phi_{N'} = X_{N-N'}$  se conoce como fuerza y satisface la ley de los voltajes de Kirchhoff (LVK)

Esto es, el método de simulación por redes es un método numérico que se basa en la analogía que hay entre las ecuaciones diferenciales y los circuitos eléctricos. Este método se fundamenta en la transformación de un sistema de ecuaciones diferenciales en una red de circuitos conectados a un nodo común de modo que la solución de esta red de circuitos sea la misma que la solución de la ecuación diferencial. De este modo, si pasamos todos los términos de una ecuación diferencial al primer miembro podemos ver está cómo una serie de sumandos igual a cero. Esta no es sino la ley de corriente de Kirchhoff que se ha comentado anteriormente en el punto (ii). Cada sumando de la ecuación diferencial se puede implementar por un dispositivo eléctrico concreto.

#### 4.2. Resolución práctica del modelo en red en las ecuaciones de Lotka-Volterra.

A modo de ejemplo, vamos a aplicar a las ecuaciones de Lotka-Volterra el método de simulación por redes. Estas ecuaciones rigen la dinámica poblacional entre especies que interactúan en un medio y serán las que usaremos en este trabajo.

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \tag{14}$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

$x$  y  $y$  representan las poblaciones de presa y depredador, respectivamente;  $a$  y  $c$  serán constantes que representan las tasas de crecimiento intrínsecas de la presa y del depredador, respectivamente;  $b$  representa la influencia de la población del depredador sobre la presa y  $d$  representa la influencia de la población de la presa sobre el depredador.

Por ejemplo, si tomamos la ecuación diferencial que rige la densidad poblacional de la presa  $x$ , si pasamos todos los sumandos al primer miembro obtenemos

$$\frac{dx}{dt} - a_1x - b_1y = 0 \tag{15}$$

Esta ecuación matemática la podemos ver como la ecuación de Kirchhoff de los nudos, en donde la suma de todas las intensidades que confluyen en un nodo del circuito debe ser igual a cero. Esto es, las intensidades

que entran a un nodo deben ser igual a las que salen. Es un principio de conservación de la carga eléctrica. Visto esto, si logramos implementar cada sumando por un dispositivo eléctrico con la misma topología matemática, la solución numérica del circuito tiene que ser la misma que la de la ecuación diferencial. Se suelen utilizar mucho a programas para la resolución numérica de circuitos eléctricos. SimKinet usa Pspice como software destinada a la resolución del modelo en red.

La anterior ecuación, desde el punto de vista del MESIR puede considerarse la ley de las corrientes de Kirchhoff (ley de los nudos). Cada término de la esta ecuación puede implementarse por un dispositivo eléctrico de tal manera que mantenga la misma topología matemática del modelo. El primer sumando puede implementarse por un condensador de capacidad unidad. Recordando la expresión de la intensidad que circula por un condensador,  $I_C = C \frac{dV}{dt}$ , donde  $C$  corresponde a la capacidad del condensador y  $V$  es el voltaje respecto a tierra de la variable  $x$ . Tomando  $C$  como la unidad y  $x$  como el voltaje, tenemos que  $\frac{dx}{dt}$  puede ser implementado por un condensador de valor unidad[1].

Los otros dos términos de la ecuación diferencial son implementados por unos dispositivos especiales que contiene PSpice y que son denominados “generadores de intensidad controlados por voltaje”. Estos dispositivos son capaces de asumir cualquier no linealidad del sistema y generan una intensidad cuyo valor está dado por una expresión matemática que depende de los voltajes en otros nodos de la red eléctrica (conjunto de circuitos) que tengamos. Cada sumando es implementado por un generador diferente  $G_{x1}$  y  $G_{x2}$ . De modo que la ecuación (3) puede ser vista como:

$$I_C + I_{G_{x1}} + I_{G_{x2}} = 0 \quad (16)$$

Esta ecuación es interpretada como la ecuación de Kirchoff de los nudos  $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ . De tal manera que la suma de todas las corrientes que confluyan en un nudo, en este caso el nudo  $x$ , es nula. Tomaremos como criterio de intensidades positivas si salen del nudo a tierra y negativas si entran al nudo. Generalizando a un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales, lo único que tenemos que hacer es obtener un sistema de  $n$  circuitos ( uno para cada variable) y conectarlos todos a un nudo común (tierra)[1].

En la Figura 7 podemos ver el modelo en red de las ecuaciones de Lotka-Volterra visualizando en los dispositivos eléctricos que implementan los sumandos de la ecuación diferencial las corrientes que circulan por ellos.

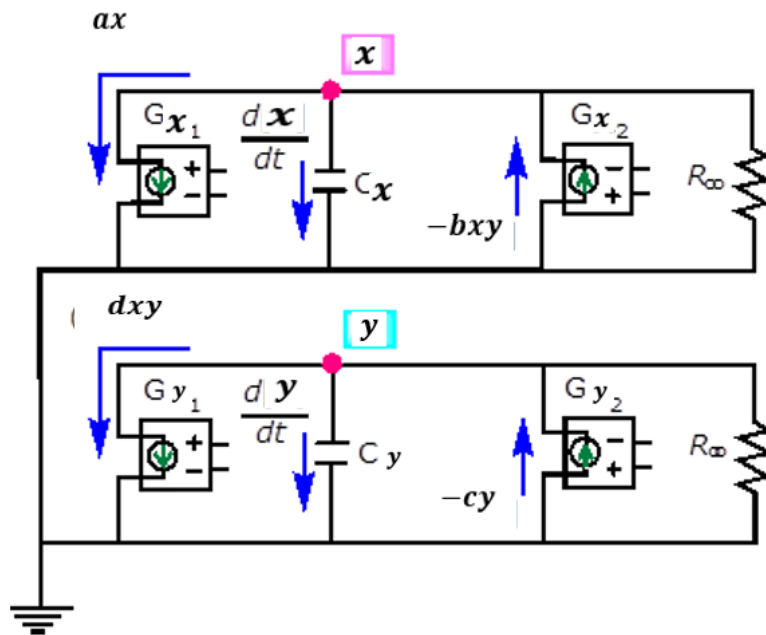


Figura 7. Modelo en red del sistema de Lotka-Volterra.

Al resolver estas ecuaciones con un adecuado programa de resolución de circuitos eléctricos obtenemos la solución del sistema de ecuaciones diferenciales. Vamos a realizar una pequeña simulación utilizando el programa de resolución de circuitos eléctricos PSpice. Si programamos en PSpice (en un fichero de extensión.cir) el modelo en red de la Figura 7. utilizando como parámetros y condiciones iniciales ( $a = 1$ ;  $b = 0.6$ ;  $c = 0.8$ ;  $d = 0.3$ ;  $x_0 = 5$ ;  $y_0 = 2$ ) las de la Figura 3 del capítulo II obtenemos:

```
.PARAM a={1}
.PARAM b={0.6}
.PARAM c={0.8}
.PARAM d={0.3}

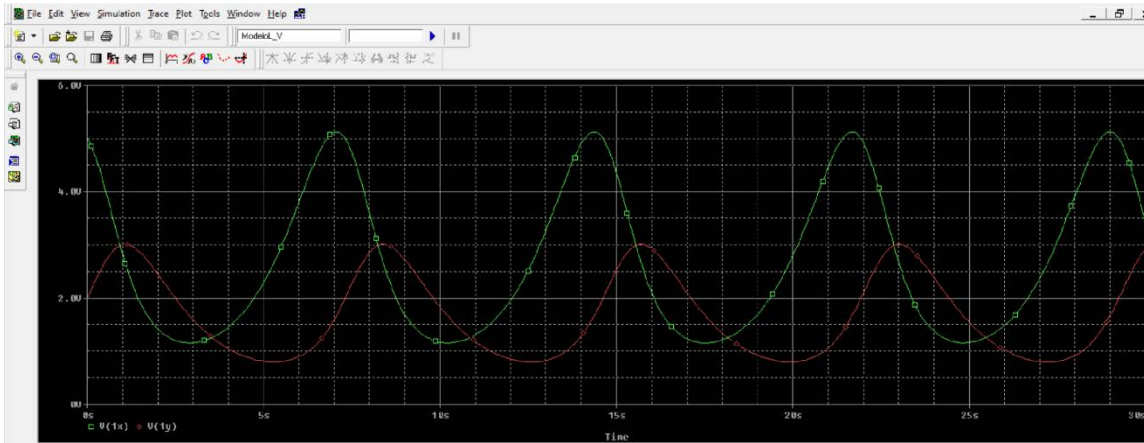
* Ecuacion 1 dx/dt = a*x - b*x*y
Cx 1x 0 {1} IC=5
Rx 1x 0 1E15
Gx1 0 1x Value={a*V(1x,0)}
Gx2 0 1x Value={-b*V(1x,0)*V(1y,0)}

* Ecuacion 2 dy/dt = -c*y + d*x*y
Cy 1y 0 {1} IC=2
Ry 1y 0 1E15
Gy1 0 1y Value={-c*V(1y,0)}
Gy2 0 1y Value={d*V(1x,0)*V(1y,0)}

* Listado de valores
.PRINT TRAN V(1x,0)
.PRINT TRAN V(1y,0)
* Opciones de simulación
.TRAN 0.1 30 0 UIC
.OPTIONS RELTOL 1E-7
.OPTIONS NUMDGT 6
.PROBE
```

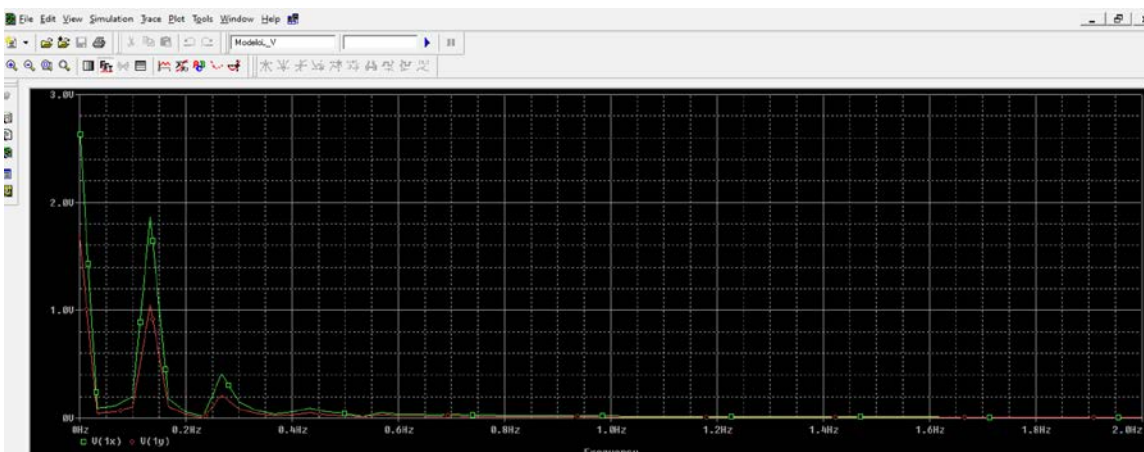
.END

El resultado de la simulación numérica al introducir en PSpice el código se plasma en un fichero de salida .probe al cual podemos pedir voltajes e intensidades en cualquier nudo o dispositivo del sistema. En la Figura 8 se muestra la solución gráfica de nuestra simulación.



**Figura 8.** Entorno gráfico de PSpice en el que se muestran los voltajes  $V(1x)$  y  $V(1y)$  correspondientes a las variables  $x$ (presa) y  $y$  (depredador).

PSpice permite en otras funciones el cálculo de la FFT de una manera sencilla. Para ello dispone de una opción la cual automáticamente te calcula la transformada de Fourier de cualquier señal del circuito, en particular, estaremos interesados en encontrar las frecuencias de las que están compuestas las señales correspondientes a las variables presa y depredador. En la Figura 9 se muestra la FFT para el sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra (4) utilizando como parámetros y condiciones iniciales las mismas que usamos para la Figura 4 del capítulo 2 ( $a = 1$ ;  $b = 0.6$ ;  $c = 0.8$ ;  $d = 0.3$ ;  $x_0 = 5$ ;  $y_0 = 2$ ).



**Figura 9.** Entorno gráfico de PSpice para el algoritmo de la FFT para las variables  $x$ (presa) y  $y$  (depredador).



En el próximo capítulo veremos la solución de este sistema, pero utilizando el programa SimKinet, de manera que el usuario pueda de una manera sencilla y muy intuitiva introducir en SimKinet el sistema de ecuaciones diferenciales.

## CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DE SIMKINET AL ESTUDIO DE LA DINÁMICA POBLACIONAL.

### 5.1. El software SimKinet.

SimKinet [13] es un software creado por un grupo de investigadores del Centro Universitario de la Defensa, con el objeto de que los alumnos e investigadores puedan usarlo sin conocimiento de programación. Aunque es cierto que existen numerosos programas para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales como son Matlab y Mathematica[25][26], es cierto que necesitan de un conocimiento previo de programación así también de conocimiento de algoritmos numéricos. Con el fin de evitar esta vicisitud, SimKinet fue creado en C## como una especie de caja negra donde el usuario fuese guiado en todo momento sin necesidad alguna de ningún conocimiento de programación. El programa dispone de la fortaleza de los algoritmos de programación que lleva consigo el programa PSpice, que es el software que lleva implementado SimKinet para la resolución de circuitos eléctrico.

SimKinet está diseñado para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden aplicadas a la cinética-química. Sin embargo, su uso se puede hacer extensible a otros campos como la física, biología, geología, ... SimKinet usa básicamente dos dispositivos eléctricos para implementar las ODEs: un condensador y un generador de intensidad controlado por tensión. Suele llevar asociada una resistencia infinita en cada circuito para garantizar la continuidad en este.

### 5.2. Las ecuaciones de Lotka-Volterra.

Las ecuaciones de Lotka-Volterra[27][14] son un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden en las cuales se estudia la dinámica poblacional entre varias especies que interactúan entre sí, en las cuales una especie(s) actúa como presa y otra(s) actúa como depredador. De ahí que se denominen ecuaciones presa-depredador. Alfred J. Lotka fue un matemático estadounidense que estudio la dinámica de poblaciones y propuso en el año 1910 el sistema presa-depredador mientras realizaba el estudio de las reacciones autocatalíticas. Mas tarde, en 1920 extiende sus ecuaciones a sistemas orgánicos. Vito Volterra fue un matemático y físico italiano que se interesó por el estudio de la biología matemática presentando en 1926 este sistema de ecuaciones. Ambos llegaron a estas ecuaciones de manera independiente[14].

Las ecuaciones de Lotka-Volterra pueden ser descritas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales[14] aunque dependerá del número de especies y del tipo de interacciones a las cuales estén sometidas estas).

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \tag{17}$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy$$

$x$  y  $y$  representan las poblaciones de presa y depredador, respectivamente.

$a$  y  $c$  representan las tasas de crecimiento intrínsecas de la presa y del depredador, respectivamente.

$b$  representa la influencia de la población del depredador sobre la presa y  $d$  representa la influencia de la población de la presa sobre el depredador.

Vamos a realizar una simulación numérica con el programa SimKinet[13] para luego dar lugar a un estudio matemático sobre la dinámica poblacional estudiando los puntos de equilibrio y los puntos de estabilidad del sistema.

Sea un sistema presa-depredador con los siguientes parámetros:  $a = \frac{2}{3}$ ;  $b = \frac{4}{3}$ ;  $c = d = 1$ . Las condiciones iniciales son  $x_0 = 0.9$  e  $y = 1.8$ [28]. Para introducir las ecuaciones diferenciales en SimKinet, abramos en primer lugar el programa y nos aparecerá una pantalla como la que se muestra en la Figura 10.

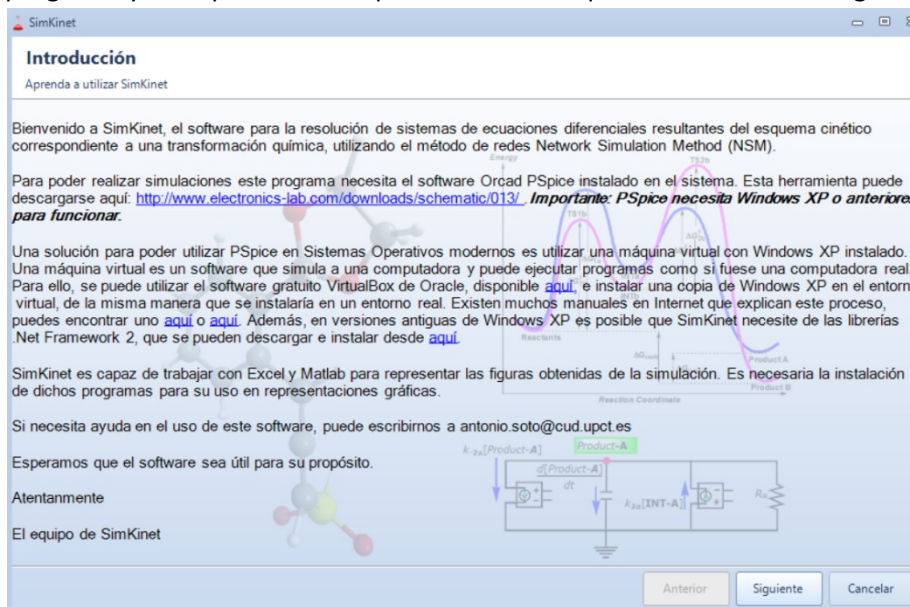


Figura 10. Captura de pantalla de SimKinet (Bienvenida al programa).

El programa nos da la bienvenida y nos hace un pequeño resumen de cómo funciona. Le damos a la tecla “Siguiente”. El sistema nos pedirá que introduzcamos el número de especies químicas (o biológicas como es nuestro caso). Introducimos dos especies y le asignamos las letras  $x$  e  $y$  (Figura 11).

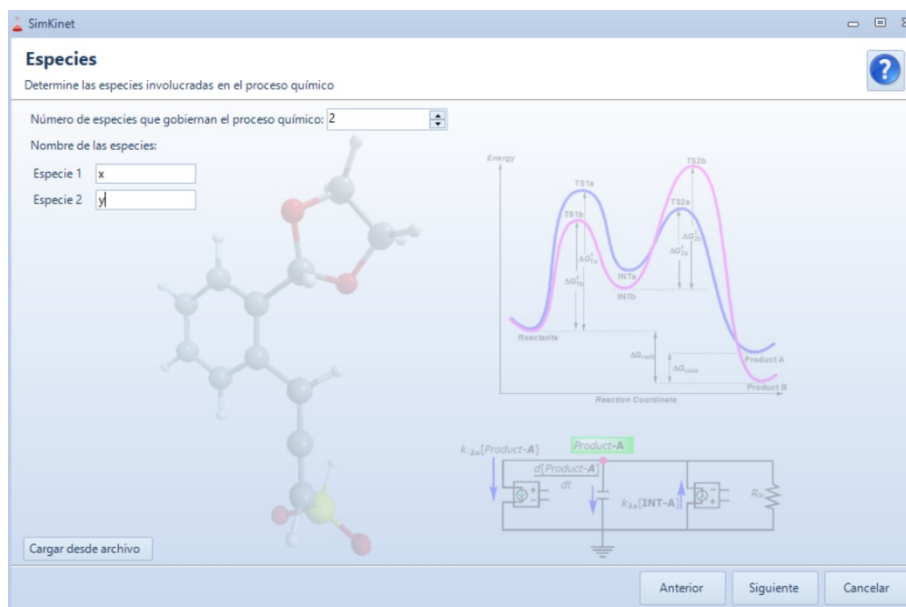


Figura 11. Captura de pantalla de SimKinet (Introducción de las especies).

Le damos a “Siguiente”, y el programa nos pedirá que introduzcamos el número de constantes del sistema y a su vez nos pide nombrarlas y asignarle un valor. Aunque el sistema en todo momento se refiere a especies químicas, es del todo generalizable cualquier otro tipo de especies, como por ejemplo las biológicas (Figura 12).

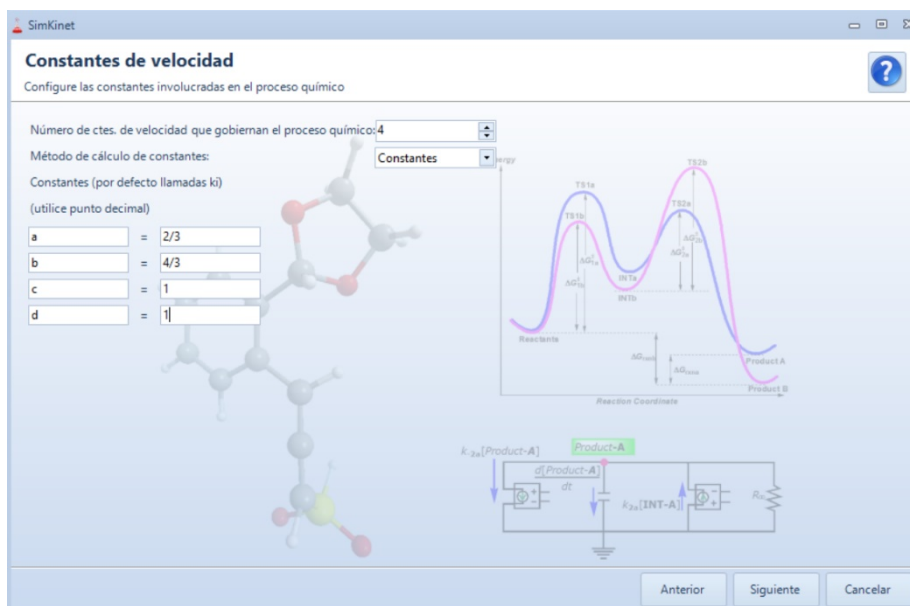


Figura 12. Captura de pantalla de SimKinet (Constantes de velocidad).

Le damos a la tecla “Siguiete” y nos aparece una pantalla donde aparece la primera ecuación diferencial para la variable que hemos introducido en primer lugar, la  $x$ . Vamos incorporando todos los sumandos de manera sencilla ya que el programa te guía en todo momento indicando al usuario cuántas variables y constantes desea introducir. Este únicamente escribe la forma matemática de cada sumando de la ecuación diferencial. Al final el programa te pide que introduzcas la concentración inicial para la variable  $x$  que será en nuestro caso la condición inicial, es decir, la población inicial de la presa (Figura 13).

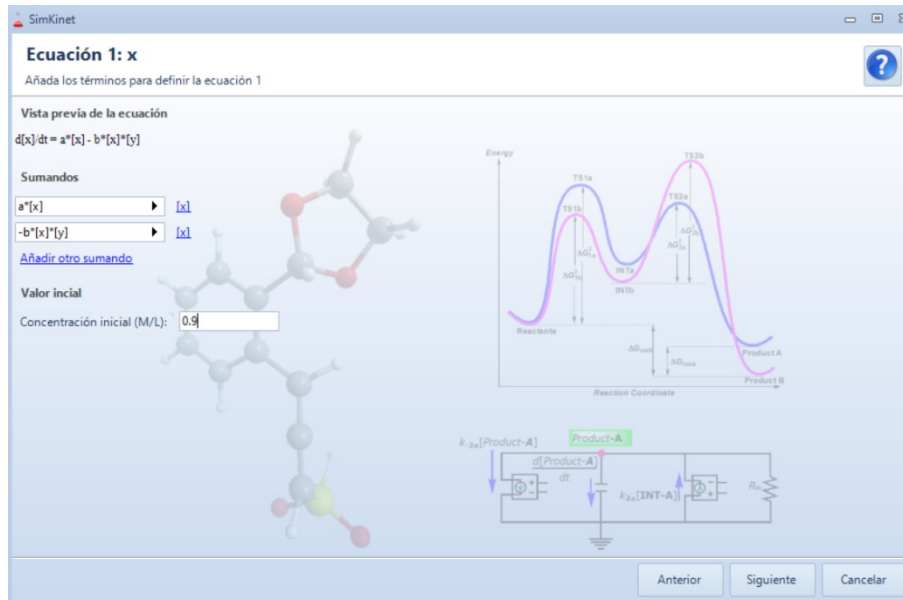
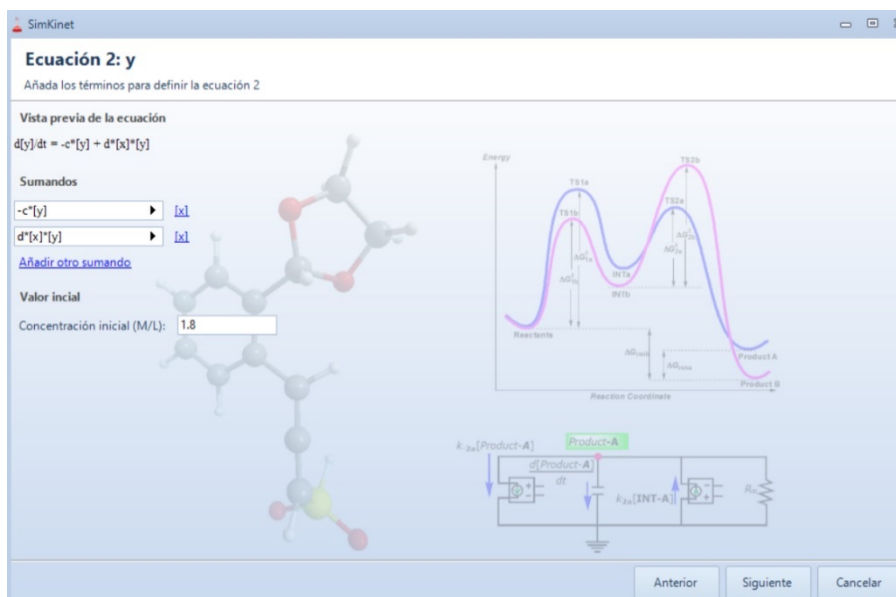


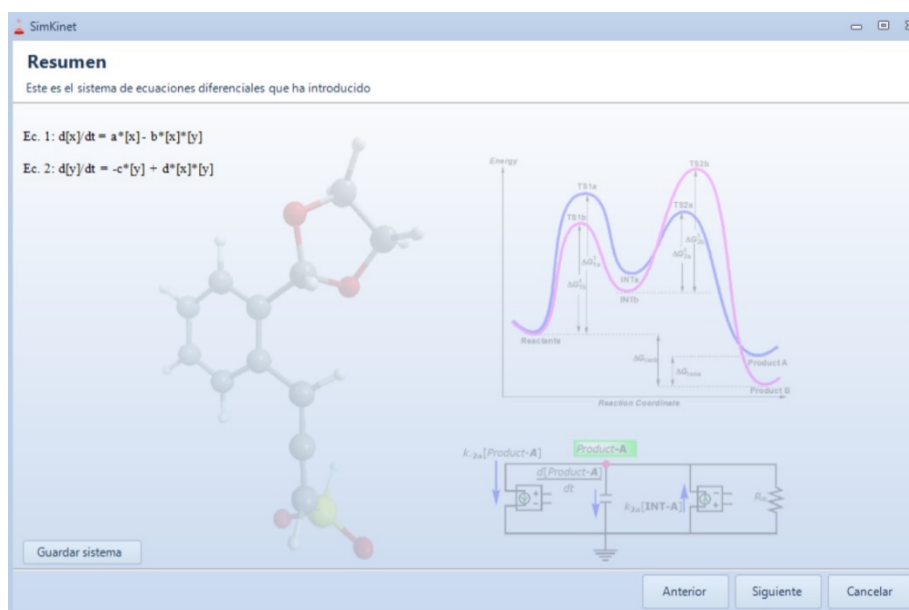
Figura 13. Captura de pantalla de SimKinet (Introducción de los sumandos de la ecuación diferencial de la presa).

Del mismo modo introducimos la ecuación diferencial para el depredador (Figura 14).



**Figura 14.** Captura de pantalla de SimKinet (Introducción de los sumandos de la ecuación diferencial del depredador).

Al darle a “Siguiente”, el programa mostrará en pantalla el resumen de las ecuaciones diferenciales que el usuario ha introducido y le pedirá la opción de guardar en un fichero de extensión .eq la simulación que lleva realizada hasta ese momento (Figura 15). De esta manera el usuario puede ver en un vistazo si las ecuaciones que ha introducido son correctas.



**Figura 15.** Captura de pantalla de SimKinet (Presentación del sistema de ecuaciones diferenciales).

Para finalizar el sistema el sistema nos pedirá que introduzcamos unos parámetros para la simulación: El “Instante final” corresponde al tiempo total de la simulación impuesta al sistema; el “RELTOL” va asociado a la precisión en la simulación; el “tiempo de paso” son los intervalos de tiempo en los cuales va almacenando los valores que toma la variable en un fichero .txt y el “NUMDGT”, asociado al número de dígitos que quiere que aparezca en el fichero anterior .txt de almacenamiento de salida (Figura 16).

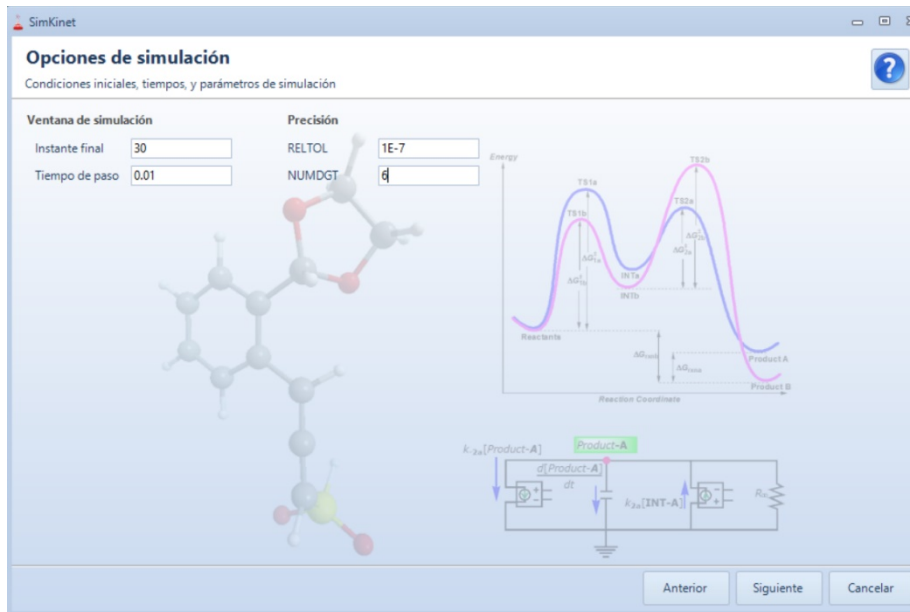


Figura 16. Captura d pantalla de SimKinet (Opciones de simulación).

Al darle a “Siguiente” nos aparecerá una pantalla como la que se muestra en la Figura 17 el código de programación en Pspice[23] y nos da la opción de guardar este fichero. Hay que indicar que el usuario en ningún momento necesita tener conocimiento de esta pantalla. Solo se muestra por si algún usuario que conozca el código de programación quiera tenerlo.

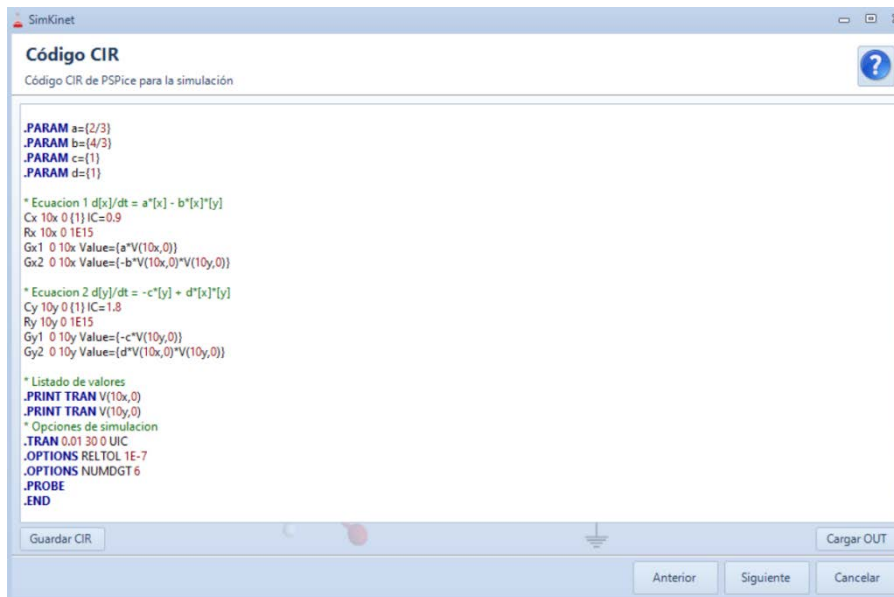
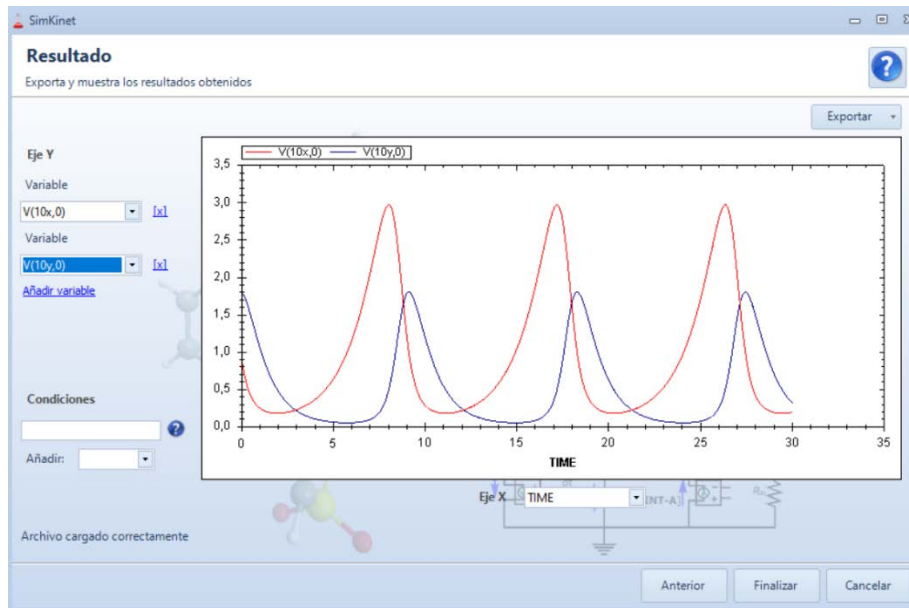


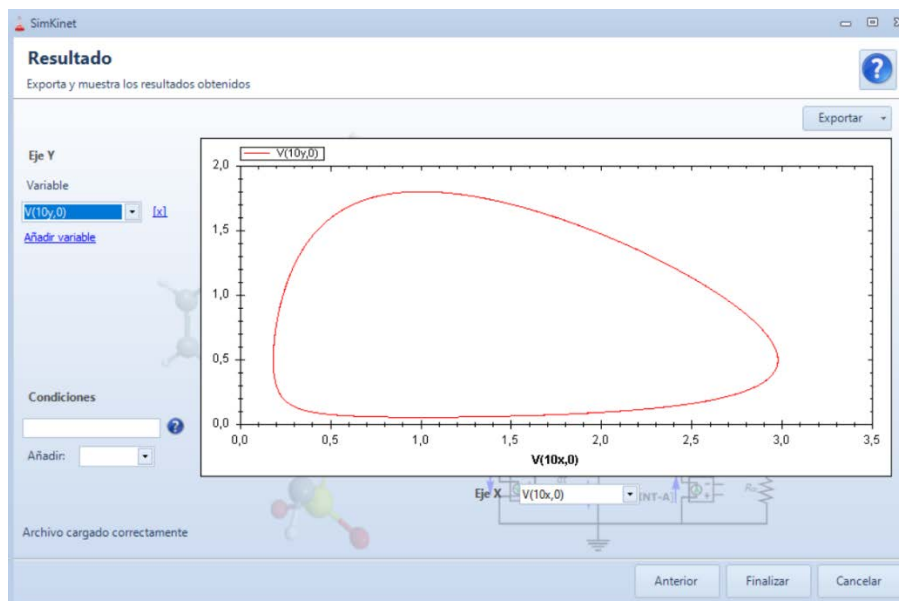
Figura 17. Captura de la pantalla de SimKinet (Código .cir del modelo en red).

El programa tras realizar la simulación pedirá al usuario que introduzca en los ejes x e y las variables dese. En este caso se ha representado en el eje de ordenadas a la presa y al depredador frente al tiempo en el eje de abscisas (Figura 18).



**Figura 18.** Captura de pantalla de SimKinet (Soluciones numéricas de las variables presa y depredador).

Se puede ver el resultado de naturaleza periódica en donde las poblaciones de la presa y depredador están en desfase de manera que cuando una alcanza un valor máximo la otra tiende a un valor pequeño de esta. El programa también permite realizar el diagrama de fases para la presa y el depredador como se muestra en la Figura 19.



**Figura 19.** Captura de pantalla de SimKinet (Diagrama de fase presa-depredador).

De esta manera cualquier usuario del programa de una manera sencilla e intuitiva puede realizar cualquier tipo de simulación numérica sin requerimientos de programación. El tiempo de computación para Pspice puede sacarse del archivo .out que te ofrece PSpice. El tiempo de computación para la simulación que se ha realizado es de 0.16 s lo cual muestra la rapidez de cálculo de los algoritmos implementados en PSpice.

## CAPÍTULO 6. APLICACIONES

### 6.1. *Plutella xylostella* y *Diadegma semiclausum*.

En este capítulo vamos a realizar una simulación numérica aplicando el modelo de Lotka-Volterra a las densidades de población de la polilla *Plutella xylostella* y a las de su parasitoide larvario *Diadegma semiclausum*. La *Plutella xylostella* es conocida como la palomilla dorso de diamante o también como polilla de la col. Esta polilla se ha ido diseminando por todo el mundo y se ha llegado a convertir en una plaga cosmopolita y muy destructiva para cultivos como la col o repollo, el brócoli, coliflor, col de Bruselas[2][29]. En la actualidad es muy difícil de controlar ya que se ha vuelto muy resistente a diversos tipos de insecticidas como de los grupos organofosforados, carbamatos y también piretroides[29]. Hoy en día el control biológico se ha presentado como una de técnicas más eficaces para la identificar el tipo de parasitoide más adecuado, así como la forma de evaluar el nivel de este parasitismo y el manejo al protegerse contra los insecticidas. Los adultos de la polilla *Plutella xylostella* son pequeños, delgados, miden de 8 a 10 mm, tienen un color marrón-grisáceo característico. El nombre con el cual a veces se denominan palomilla dorso de diamante, viene de que el estado de las alas cuando están en reposo se asemeja a una banda color crema-marrón que se va estrechando formando uno o varios diamantes (rombos) de un color claro [30]. Tienden a volar en torno a las hojas en busca de una pareja o bien, buscan un lugar donde depositar los huevos. Suelen pegarse a las hojas y tienden a esconderse en las hendiduras de las yemas. La hembra trascurridos de dos a tres días del post-apareamiento tiende a ovipositar de 18 a 245 huevecillos de un color amarillento. Tiende a poner los huevos solos o en grupo en el envés de las hojas cerca las venas o tallos inferiores.[2][30]. En las Figuras 20 y 21 tenemos dos imágenes de la palomilla dorso de diamante o *Plutella xylostella*.

La eclosión de los huevos suele ocurrir entre los 5 y 10 días dependiendo de la temperatura. Tiene cuatro estados larvarios o etapas de formación. Después de eclosión, las larvas del primer estadio comienzan a minar el tejido esponjoso de la superficie de las hojas y se van alimentando del envés de las hojas ricas en clorofila formando un gran número de pequeños agujeros. El último estadio es el más voraz y empieza a alimentarse del corazón de las plantas jóvenes y la parte inferior de las más maduras. Las plantas que han sido muy dañadas presentan un aspecto atrofiado y tienden a morir en la mayoría de los casos. Un aspecto de defenderse la larva cuando se encuentra en peligro es descolgarse de un hilo de seda y pasado el peligro, vuelve a la planta por el mismo sistema. El ciclo completo desde el huevo hasta el estado adulto varía de 3 a 5 semanas dependiendo de las condiciones climáticas y geográficas.

Entre los enemigos naturales con más efectividad frente a *Plutella xylostella* se encuentran los parasitoides himenópteros pertenecientes a los géneros *Diadegma* y *Cotesia*. La *Diadegma semiclausum* es un endoparasitoide koinobionte solitario de color negro y de longitud entre 5 y 7 mm de longitud (Figura 22). La *Diadegma semiclausum* ataca a los cuatro estados larvarios con preferencia al segundo y tercero. Después de que ocurra la pupación de la larva del huésped, la larva parasitoide termina por comerse al huésped emergiendo como adulto a los cinco días de formarse el capullo.





**Figura 20.** La palomilla dorso de diamante o *Plutella xylostella* [29].



**Figura 21.** Adulto de la palomilla dorso de diamante[29].

El estudio sobre el que se va a realizar las simulaciones tuvo lugar en dos provincias de Kenia , una zona costera, en Werugha, y otra central, en Tharuni y fue llevado a cabo por los autores del artículo “Assessing the impact of biological control of *Plutella xylostella* through the application of Lotka-Volterra model” (Ecological Modelling). Dicho estudio de recolección de datos se llevó durante un periodo de 15 meses antes de la liberación del parasitoide y 36 meses después de esta. Para estas dos áreas en los dos periodos pre y post liberación del parasitoide, los autores del estudio estimaron los parámetros con los que se llevó a cabo el modelo de Lotka-Volterra minimizando una función de pérdida de un conjunto de datos de series temporales tanto teóricos como experimentales. Los autores del estudio siguieron para ello el método multidimensional de Nelder-Mead[2].



**Figura 22.** Adulto de *Diadegma semiclausum* poniendo huevos en la larva dorso de diamante ( *Plutella xylostella*)[31].

Este modelo, según los autores del estudio, estimó una reducción en la población de la *Plutella xylostella*/planta para el estado estacionario de 4.86 a 2.17 (provincia de Werugha) y de 6.11 a 3.76 (provincia de Tharuni) en el tránsito de los periodos pre y post liberación del parasitoide. Este estudio ha servido para restaurar parámetros de modelos no lineales en diferentes zonas de Kenia presentándose como una técnica valiosa y útil. Como conclusión para el estudio, los autores afirman que las ecuaciones de Lotka-Volterra pueden ser utilizadas como una nueva herramienta en la toma de decisiones cuando se vaya a implementar una estrategia del sistema dinámico en el control de plagas.

## 6.2. Modelo de Lotka-Volterra .

Este modelo es uno de los muchos modelos matemáticos dedicados a describir la dinámica en sistemas presa-depredador o también, en sistemas huésped-parasitoide. Las interacciones entre las poblaciones de la polilla *Plutella xylostella* y de su parasitoide larvario *Diadegma semiclausum* se han descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden [2]:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x - \beta_1 x^2 - \gamma_1 xy \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha_2 y - \beta_2 y^2 + \gamma_2 xy$$

$$x(0) = x_0 \geq 0, \quad y(0) = y_0 \geq 0$$

donde la variable  $x(t)$  representa el tamaño de la población de la polilla *Plutella xylostella* en un tiempo  $t$ ;  $y(t)$  representa el tamaño de la población del parasitoide larvario *Diadegma semiclausum* para un tiempo  $t$ ;  $\alpha_1$  es la tasa de crecimiento de la polilla *Plutella xylostella*;  $\alpha_2$  es la intensidad de mortalidad de la población parasitoide;  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son los coeficientes de autorregulación de ambas poblaciones y  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son los coeficientes de interacción de las dos poblaciones.  $x_0$  y  $y_0$  son las poblaciones iniciales de las dos poblaciones.

El estudio teórico del modelo ha demostrado dos regímenes distintos. Una en la cual el depredador es eliminado para todos los valores iniciales que introduzcamos en el tamaño de la población ( $\alpha_1 \gamma_2 > \alpha_2 \beta_1$ ) y otro donde se produce la estabilización de ambas poblaciones en un estado estable, el cual es único y distinto de cero[32]. El estado estacionario o de equilibrio del sistema se produce bajo la condición en que las derivadas de las poblaciones son nulas. Este estado está dado por la expresión:

$$\bar{x} = \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_2 + \beta_1 \beta_2} \quad \bar{y} = \frac{\alpha_1 - \beta_1 \bar{x}}{\gamma_1} \quad (19)$$

|            | Werugha                             |                                       | Tharuni                             |  |                                       |
|------------|-------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|--|---------------------------------------|
|            | Antes de la liberación (66 semanas) | Después de la liberación (98 semanas) | Antes de la liberación (66 semanas) | Después de la liberación (104 semanas) | Después de la liberación (88 semanas) |
| $\alpha_1$ | 27.76                               | 27.76                                 | 27.63                               | 27.63                                  | 27.63                                 |
| $\alpha_2$ | 33.28                               | 1.80                                  | 58.6                                | 74.18                                  | 58.67                                 |
| $\beta_1$  | 1.40                                | 1.40                                  | 0.98                                | 0.98                                   | 0.98                                  |
| $\beta_2$  | 2.04                                | 0.43                                  | 1.10                                | 375.25                                 | 26.77                                 |
| $\gamma_1$ | 35.14                               | 145.19                                | 40.69                               | 242.98                                 | 72.27                                 |
| $\gamma_2$ | 7.07                                | 0.95                                  | 9.68                                | 29.51                                  | 19.56                                 |
| $x_0$      | 1.91                                | 8.48                                  | 5.25                                | 11.58                                  | 9.70                                  |
| $y_0$      | 0.05                                | 0.15                                  | 1.58                                | 0.05                                   | 0.04                                  |

**Tabla 4.** Parámetros del modelo de Lotka-Volterra estimados en base a criterios estadísticos de una serie empírica temporal de la polilla de diamante y su parasitoide *Diadegma semiclausum*, antes y después de la liberación en Werugha y Tharuni (Kenia)[2].

### 6.3. Resultados numéricos.

Las dos ecuaciones diferenciales fueron introducidas en SimKinet tal y cómo se describió en el capítulo anterior. Las simulaciones numéricas se realizaron introduciendo el siguiente parámetro de precisión  $\text{Reltol}=10^{-7}$ . El tiempo de simulación fue de 0.06 s

#### 6.3.1. Provincia de Werugha.

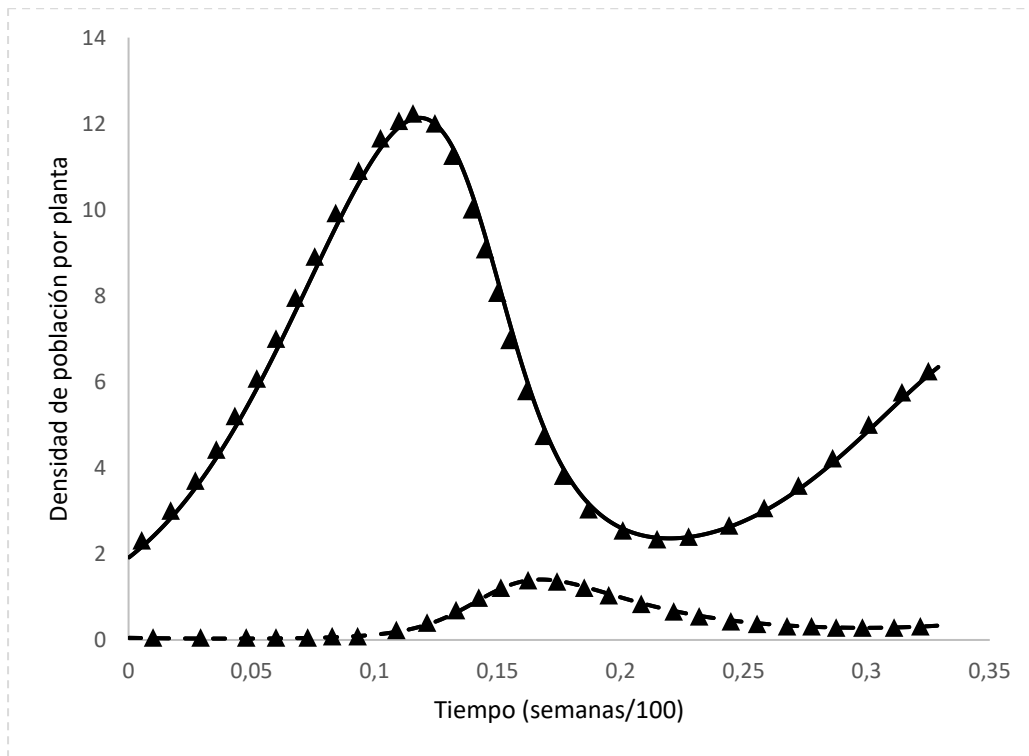
Los valores de los parámetros que se han utilizado en la modelización del sistema se recogen en la Tabla 4. En la Figura 23 podemos comparar los resultados obtenidos en la provincia de Werugha antes de la liberación (66 semanas) mediante el programa SimKinet y el método numérico utilizado por los autores del estudio. Mientras los autores utilizan un algoritmo de Runge-Kutta de 4<sup>º</sup> orden con un tiempo de paso fijo de 0.01, SimKinet hace uso de la gran potencialidad de sus algoritmos de cálculo. SimKinet hace uso del programa de simulación eléctrica PSpice, el cual emplea un sofisticado algoritmo Gear2 y trapezoidal[1][13]. Como se puede ver en la Figura 23 la comparación entre ambos métodos es satisfactoria, mostrando únicamente pequeñísimas diferencias las cuales se atribuyen al uso por parte del método de Runge-Kutta de tiempos de paso fijos, a diferencia de PSpice el cual utiliza un tiempo de paso variable el cual numéricamente es mejor[1]. El tiempo de computación en SimKinet para esta simulación fue de 0.06 s.

Como se puede observar de la Figura 23 el modelo matemático que se ha empleado predice una trayectoria oscilatoria la cual empieza con una función de creciendo monótonamente desde un valor de 1.91, el cual corresponde al tamaño de población inicial de *Plutella xylostella*. El primer máximo local lo alcanza a 12.14 *Plutella xylostella* /planta a partir del cual la gráfica empieza a descender hasta alcanzar el primer mínimo local en 2.36 *Plutella xylostella* /planta. La gráfica empieza a comportarse de modo oscilatorio.

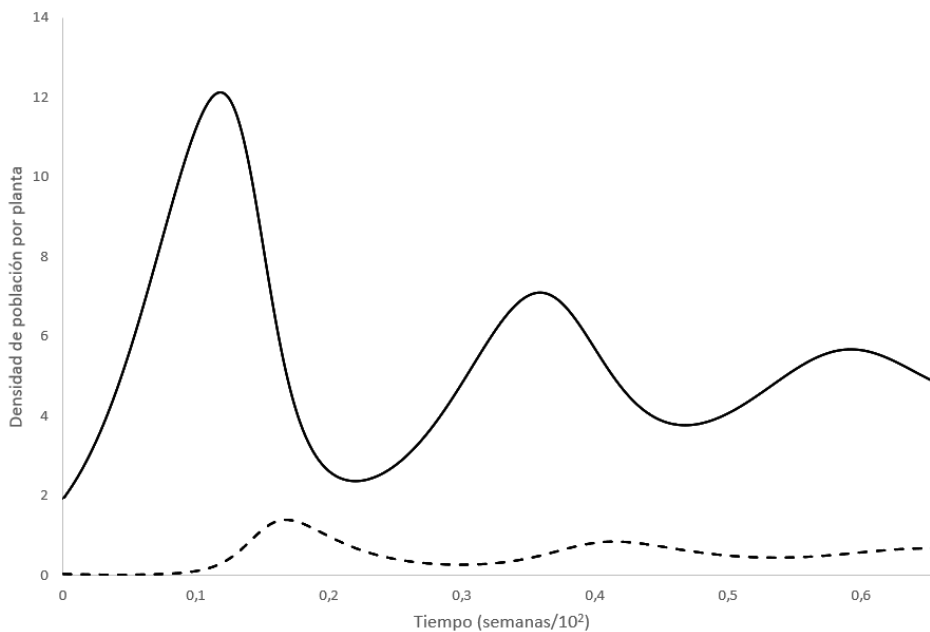
Respecto al comportamiento descrito por la población parasitoide sigue un comportamiento creciente desde 0.05 *Diadegma semiclausum* /planta y alcanza su primer máximo local en 1.4 *Diadegma semiclausum* /planta descendiendo hasta el valor mínimo de 0.28/planta.

En la Figura 24 se muestra la simulación numérica con para el escenario de Werugha antes de la liberación para un tiempo cuasiestacionario.

Nos preguntamos si el comportamiento oscilatorio implica un movimiento periódico único. Es decir, cómo es posible identificar si el sistema biológico fluctúa en el tiempo siguiendo un patrón de periodo único o multiperiodo. Aquí usamos una herramienta que nos proporciona el programa SimKinet a partir del corazón de este, Pspice. Al abrirse Pspice podemos pedir a este la transformada de Fourier de las variables población de la presa y el depredador. La transformada de Fourier nos proporcionara las frecuencias fundamentales asociadas a cada variable.

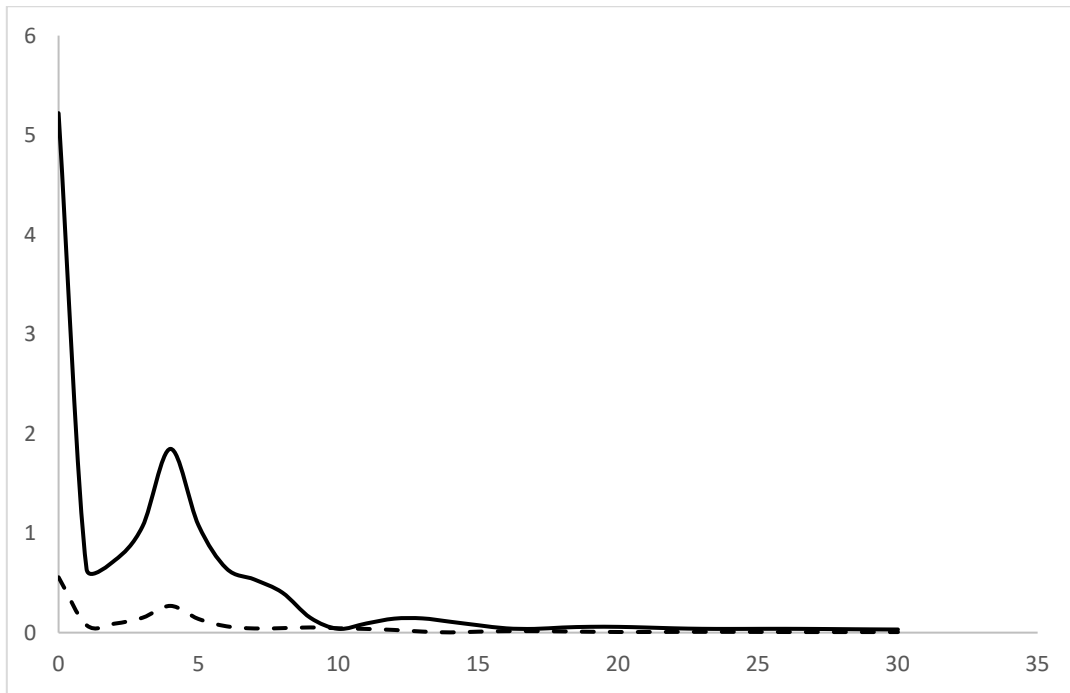


**Figura 23.** Comparación numérica entre SimKinet (— *Plutella xylostella*, - -*Diadegma semiclausum*) y solución autores[2] (Runge-Kutta 4º orden ▲) para el escenario en Werugha antes de la liberación a las 33 semanas.



**Figura 24.** Simulación numérica con SimKinet (— *Plutella xylostella*, - -*Diadegma semiclausum*) para el escenario de Werugha antes de la liberación a las 66 semanas.

Se puede observar en la Figura 25 hay una frecuencia fundamental para las dos especies de valor  $f=4$  Hz. Lo cual lleva a determinar un periodo de 0.25, que corresponde a 25 semanas. Sin embargo, esta frecuencia no es única ya que aparecen frecuencias secundarias de 13 Hz para la *Plutella xylostella* y de 9 Hz para la *Diadegma semiclausum*. Se puede observar que incluso aparecen frecuencias de órdenes superiores.



**Figura 25.** Transformada de Fourier para el escenario de Werugha antes de la liberación a las 66 semanas.

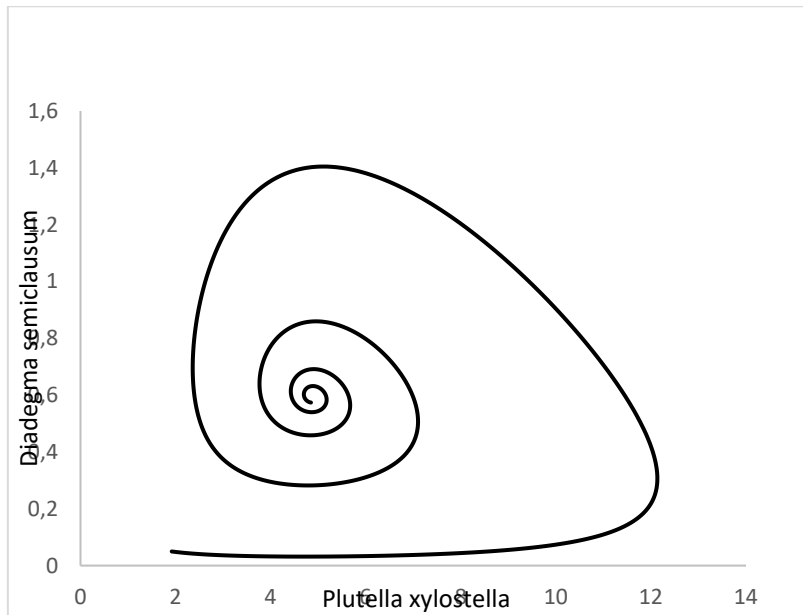
Con la idea de evaluar el tipo de estabilidad que tiene el sistema que estamos estudiando vamos a representar el diagrama de fases. Como se ha descrito anteriormente en el capítulo III del trabajo al describir la estabilidad de los sistemas no lineales autónomos, mediante el cálculo de los valores propios de la matriz Jacobiana, se ha realizado un programa en Mathematica con el fin de obtener dicha matriz jacobiana y sus autovalores. La matriz jacobiana para el escenario que estamos estudiando es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (20)$$

siendo los valores propios para los parámetros del problema (Tabla 1):

$$\lambda_1 = -4.02 + 26.72 \mathbf{i}, \quad \lambda_2 = -4.02 - 26.72 \mathbf{i}$$

Al darse el caso de que  $\lambda_i$  es complejo y  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ , se trata de un foco asintóticamente estable tal y como aparece en el diagrama de fases. En la Figura 26 podemos comprobar la naturaleza de la cual nos informa el estudio de la estabilidad para para el escenario de Werugha antes de la liberación a las 66 semanas.



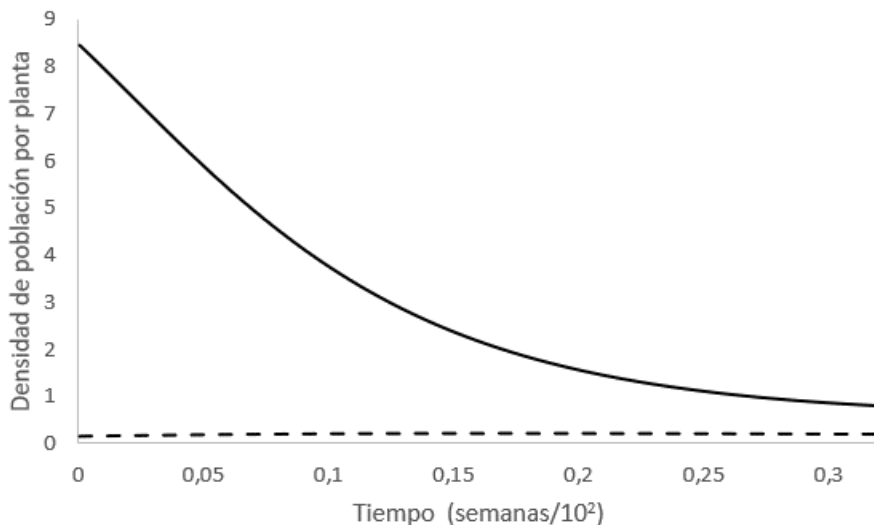
**Figura 26.** Diagrama de fases para el escenario de Werugha antes de la liberación a las 66 semanas.

El punto de equilibrio de este sistema podemos identificarlo fácilmente con SimKinet. Está situado en las coordenadas  $(x_0, y_0) = (4.85, 0.57)$ , valores que coinciden exactamente con los calculados matemáticamente:

$$\bar{x} = \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\gamma_1}{\gamma_1\gamma_2 + \beta_1\beta_2} = 4.87$$

$$\bar{y} = \frac{\alpha_1 - \beta_1\bar{x}}{\gamma_1} = 0.59$$

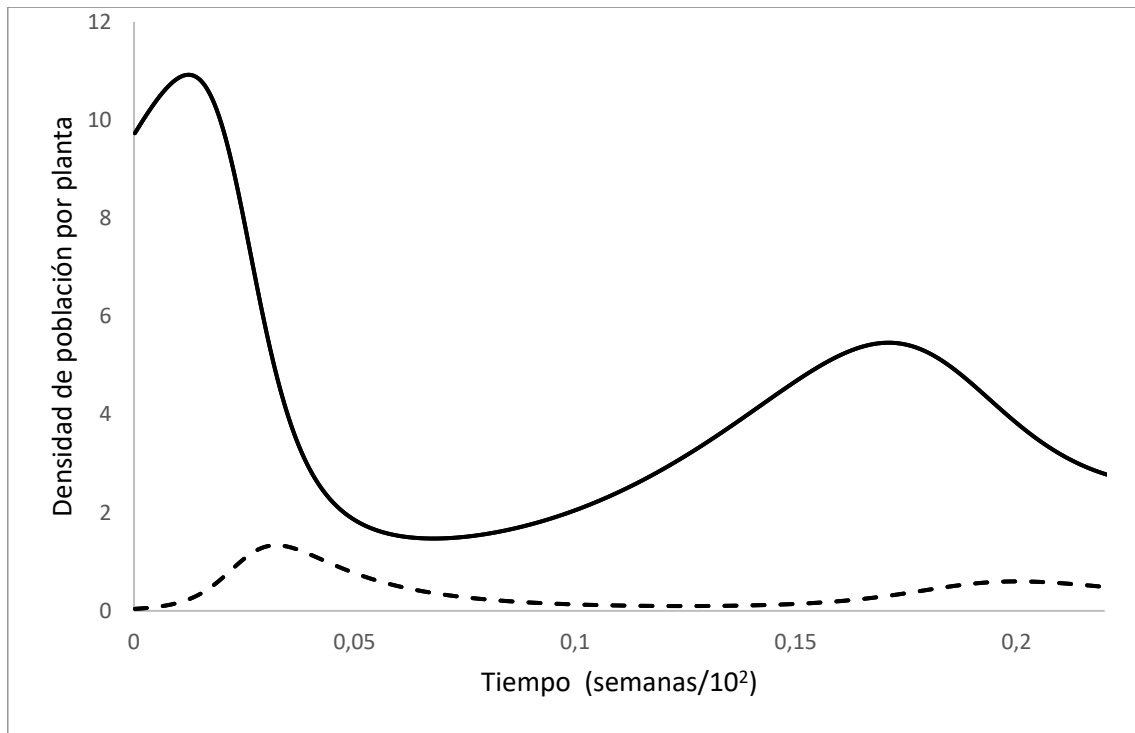
Respecto al escenario en la provincia de Werugha después de la liberación (98 semanas), el modelo matemático, en base a las simulaciones numéricas efectuadas con SimKinet (Figura 27), predijo una disminución monótona de la población de *Plutella xylostella* la cual empieza con un valor inicial de 8.48, tal y como se recoge en la tabla tendiendo a estabilizarse la población en 0.77. La población del parasitoides *Diadegma semiclausum* empezó a oscilar lentamente empezando por una población inicial de 0.15 y aumentando hasta alcanzar un máximo en 0.23 a partir del cual empieza a descender hasta un valor de 0.20 a las 98 semanas.



**Figura 27.** Predicción del modelo de Lotka-Volterra mediante SimKinet de la población de la polilla del dorso de diamante, *Plutella xylostella* (—) y su parasitoides exótico, *Diadegma semiclausum*(- -) en el escenario de Werugha después de la liberación del parasitoides .

### 6.3.2. Provincia de Tharuni

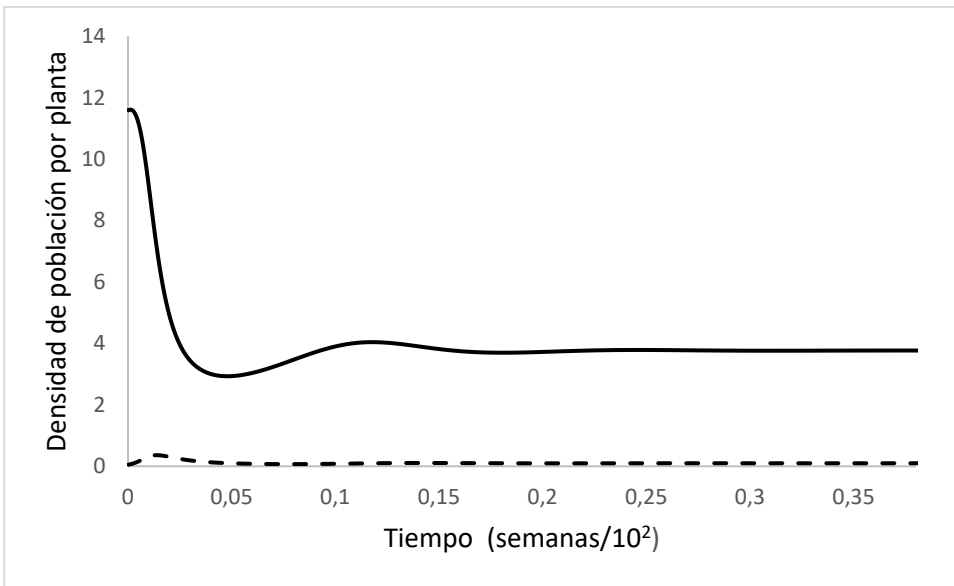
Para el caso de la provincia de Tharuni se puede hacer el mismo estudio. El modelo matemático antes de la liberación del parasitoide vía SimKinet revela una trayectoria de tipo oscilatorio empezando por una población inicial de *Plutella xylostella* de 5.25 (Figura30(3a)). Este alcanza su primer mínimo en 2.63 *Plutella xylostella* /planta. A continuación, empieza a ascender monótonamente hasta en valor de 10.01 a partir del cual empieza de nuevo a descender alcanzando su segundo mínimo en 3.96 *Plutella xylostella*/planta. Este comportamiento oscilatorio se va a repetir a lo largo del tiempo. Respecto al parasitoide *Diadegma semiclausum* puede verificarse un comportamiento oscilatorio, pero de menor amplitud que la *Plutella xylostella*. La gráfica empieza con un valor inicial de 1.58 parasitoides/planta descendiendo hasta un valor mínimo de densidad de 0.15 a partir del cual aumenta de manera monótona hasta alcanzar su primer máximo local en 1 parasitoide planta. La gráfica describirá un movimiento oscilatorio a lo largo del tiempo. Después de la liberación de la *Diadegma semiclausum*, el modelo matemático vía SimKinet predijo, tal y como se muestra en la Figura 28, que partiendo del valor inicial de 9.7 *Plutella xylostella* /planta el sistema evolucionaría de manera oscilatoria alcanzando el primer máximo local en 10.92 y descendiendo hasta alcanzar un valor de 1.50. A las 22 semanas (88 después– 66 antes) la población de *Plutella xylostella* es de 3.45. El mismo comportamiento oscilatorio se muestra en el análisis de la *Diadegma semiclausum*.



**Figura 28.** Predicción del modelo de Lotka-Volterra mediante SimKinet de la población de *Plutella xylostella* (—) y de su parasitoide exótico, *Diadegma semiclausum*(- -) en el escenario de Tharuni después de la liberación del parasitoide (22 semanas)

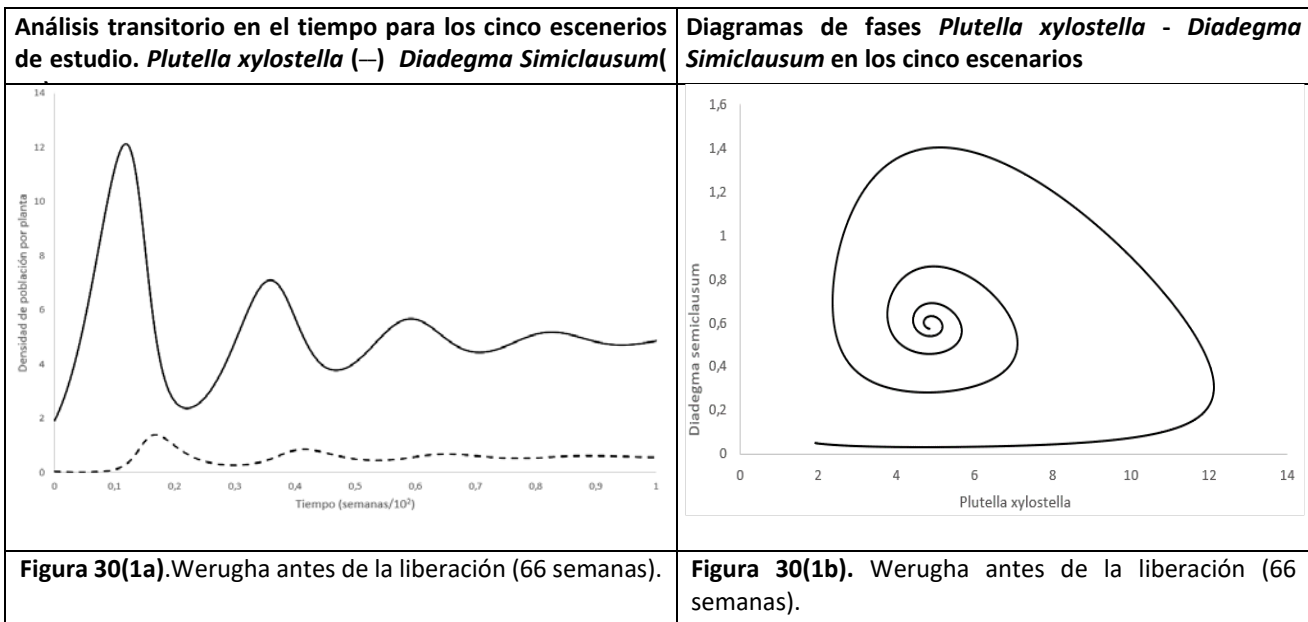
El quinto escenario que ocurre a las 104 semanas después de la liberación del parasitoide (que correspondería a un tiempo de 104 semanas menos las 66 semanas a partir de las cuales se empieza a inicializar el tiempo igual a 38 semanas), la densidad de población disminuye del valor inicial de 11.58 estabilizándose en un valor estacionario de 3.77. El parásito *Diadegma semiclausum* aumenta hasta alcanzar un valor de 0.36 estabilizándose en un valor estacionario de 0.09. La Figura 29 muestra la simulación numérica realizada con SimKinet para este escenario a las 38 semanas de la liberación del parasitoide. Todos

los resultados numéricos que hemos descrito se corresponden con los que presentan los autores en su estudio[2].

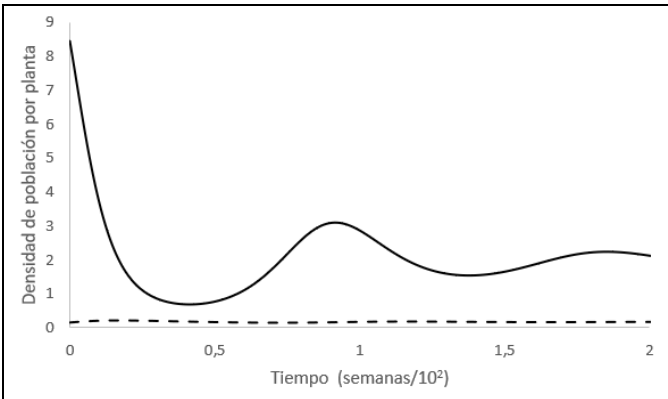


**Figura 29.** Predicción del modelo de Lotka-Volterra mediante SimKinet de la población de *Plutella xylostella* (—) y de su parasitoide exótico, *Diadegma semiclausum*(- -) en el escenario de Tharuni después de la liberación del parasitoide (38 semanas).

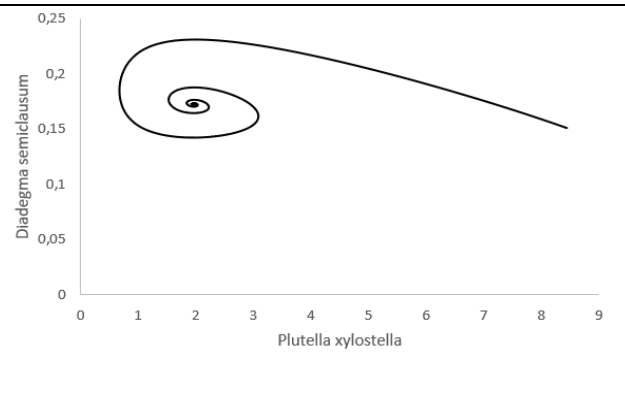
A continuación, se mostrará en la Figura 30 las distintas simulaciones en los cinco escenarios del trabajo para estados cuasi-estacionarios:



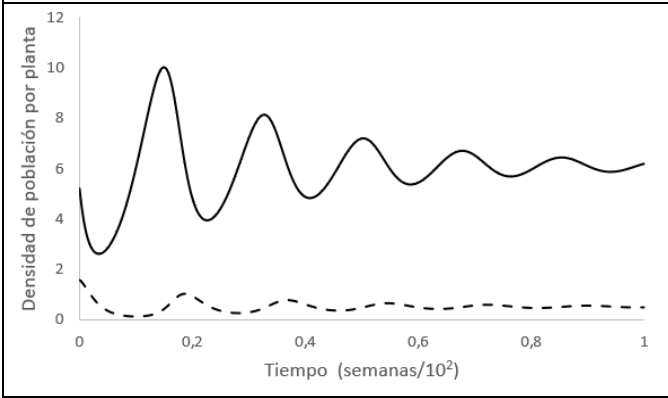




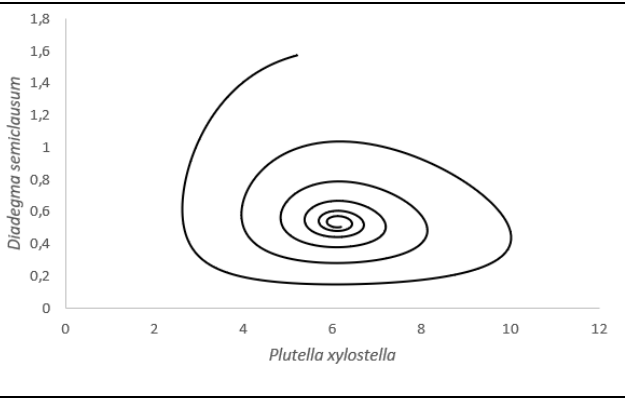
**Figura 30(2a).** Werugha después de la liberación (98 semanas).



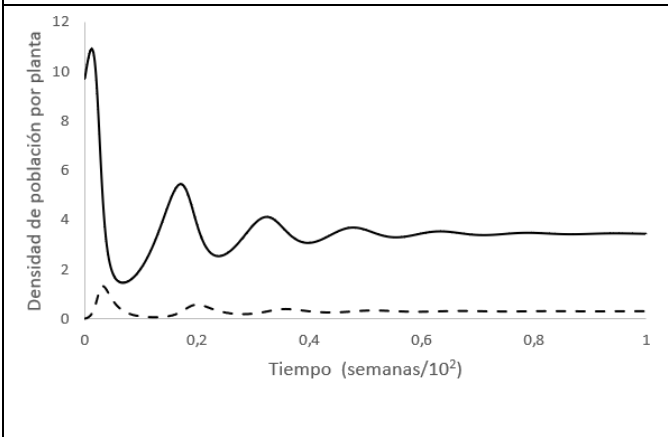
**Figura 30(2b).** Werugha después de la liberación (98 semanas).



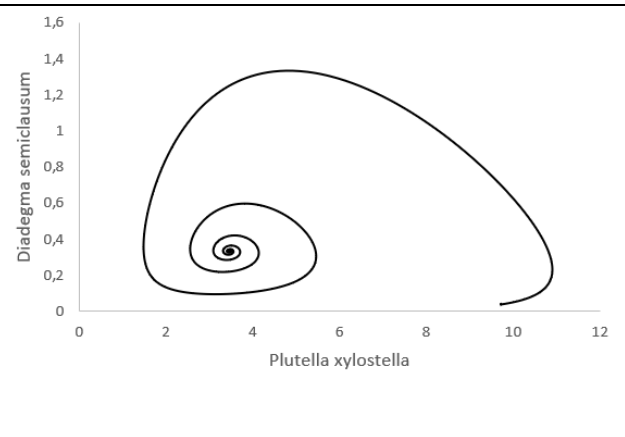
**Figura 30(3a).** Tharuni antes de la liberación (66 semanas).



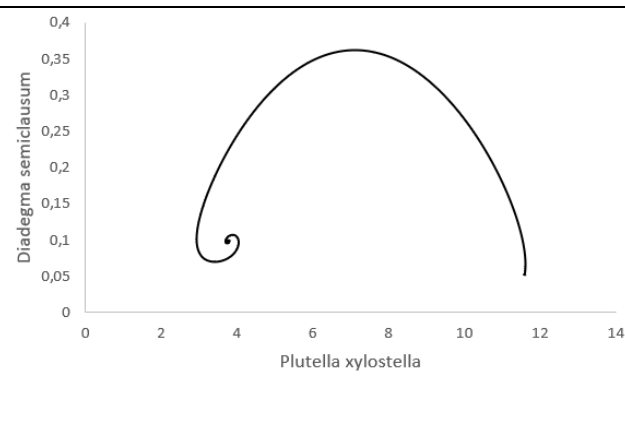
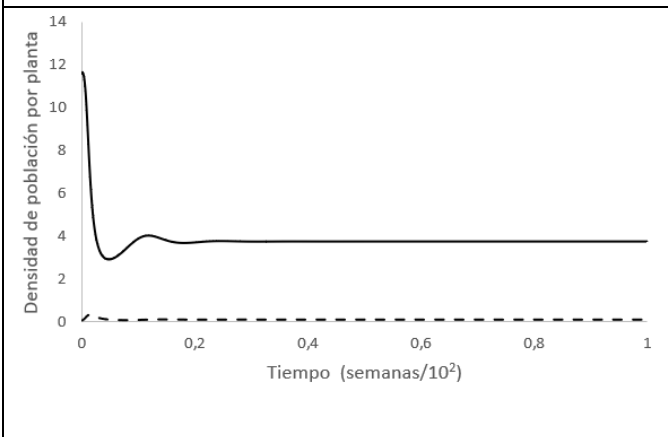
**Figura 30(3b).** Tharuni antes de la liberación (66 semanas).



**Figura 30(4a).** Tharuni después de la liberación (88 semanas).



**Figura 30(4b).** Tharuni después de la liberación (88 semanas).



**Figura 30(5a).** Tharuni después de la liberación (104 semanas).

**Figura 30(5b).** Tharuni después de la liberación (104 semanas).

**Figura 30.** Análisis transitorios para los cinco escenarios (densidad de población y diagramas de fase).

#### 6.4. Introducción de fluctuaciones medioambientales en el modelo.

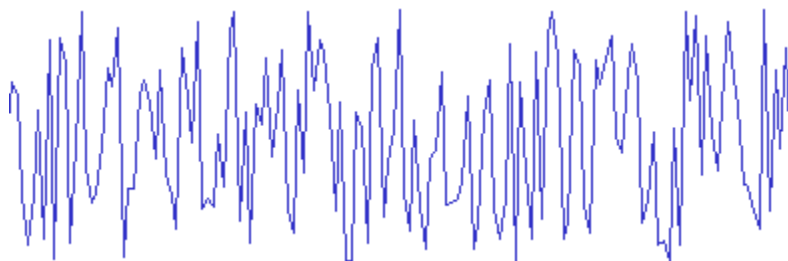
Con el fin de determinar las fluctuaciones que se observan en las condiciones medio ambientales se ha sugerido introducir una función de carácter aleatorio  $h(t)$ [3]. Sin embargo, considerar un modelo puramente aleatorio no tiene en cuenta, por ejemplo, la periodicidad debido a las variaciones estacionales anuales en las condiciones ambientales. Por tanto, debemos considerar que esa función  $h(t)$  debe tener un comportamiento periódico. Este carácter periódico no explica la naturaleza aleatoria de oscilaciones observadas. Incluso puede ser que en algunos casos las variaciones sinusoidales puedan conducir al caos en el sistema, de modo que estas oscilaciones puedan ser consideradas caóticas en vez de aleatorias[3]. En los últimos años están siendo muchos los investigadores que están introduciendo términos de fluctuación debidos a efectos medioambientales en sus modelos matemáticas para una correcta caracterización de la dinámica poblacional de las especies[3][33][34][35][36].

Por lo tanto, parece apropiado estudiar los sistemas de Lotka-Volterra con una función aleatoria  $h(t)$  que contenga algún tipo de periodicidad oculta, o una función periódica que contenga algún tipo de desorden aleatorio. En este trabajo nos centraremos en la primera opción, y elegiremos una función

$$h(t) = \lambda \sin vt + \xi(t) \quad (21)$$

donde  $\xi(t)$  representa la contribución de ruido blanco de media gaussiana cero.

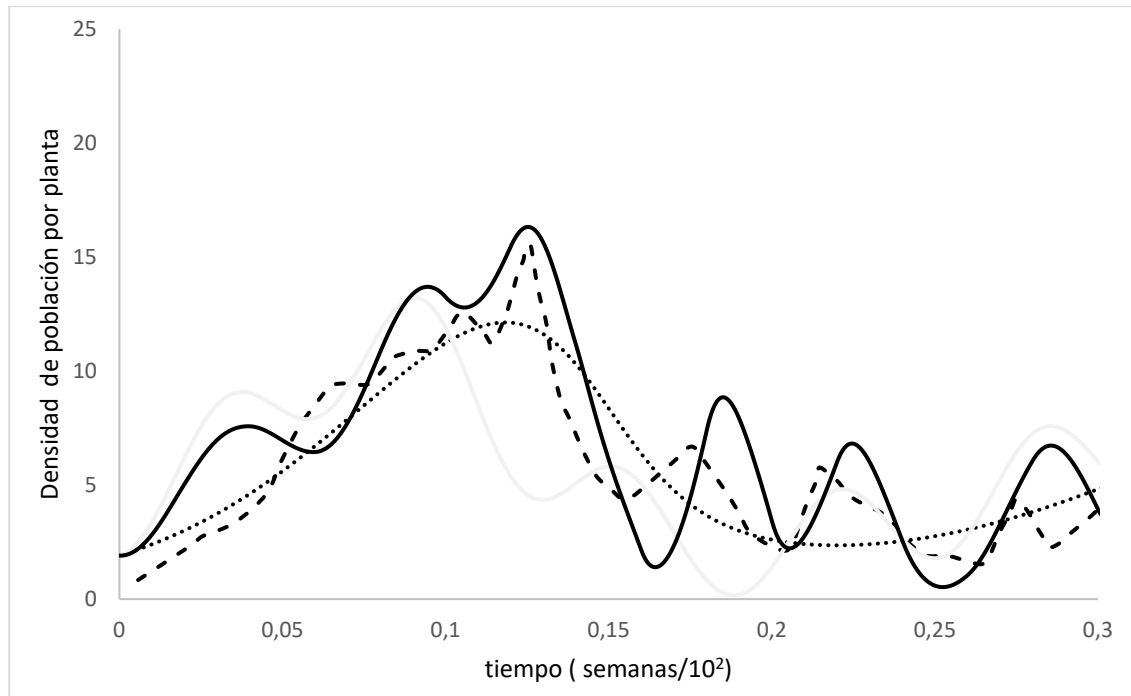
El ruido blanco es un tipo de señal de carácter aleatorio cuya característica es que la distancia entre los valores de la señal para dos tiempos cualesquiera no guarda ningún tipo de correlación estadística. Si se realiza la densidad espectral de potencia (parámetro que nos informa de la distribución de la energía en función de la frecuencia) se observa que su valor es cero, lo cual indica que la señal contiene todas las frecuencias y todas tienen la misma potencia[37]. En la Figura 31 podemos ver el aspecto que presenta una señal en forma de ruido blanco.



**Figura 31.** Onda en forma de ruido blanco[37].

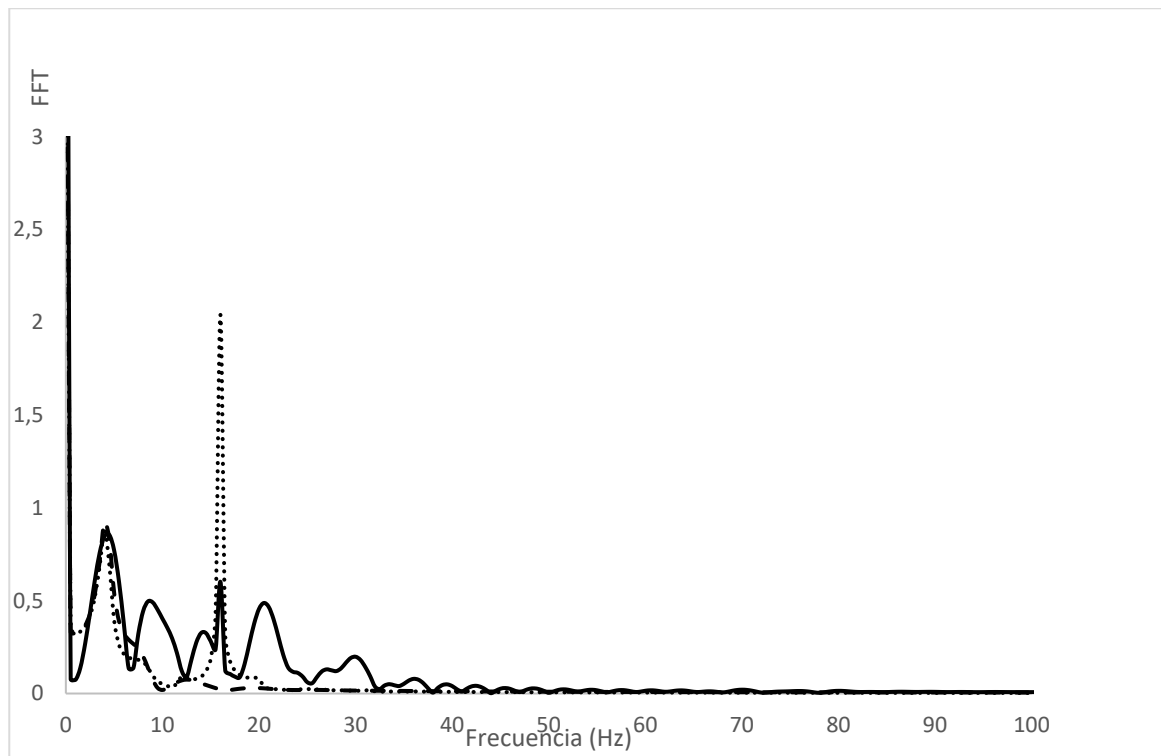
Con el objeto de intentar acercarnos a más a la realidad física y acercarnos a los valores experimentales hemos realizado una simulación numérica para el caso de Werugha antes de las 66 semanas y hemos introducido esta función. Como se puede observar en la Figura 32 el modelo modificado de Lotka-Volterra mediante la función  $h(t)$  se ajusta más a los valores experimentales lo cual supone una mejora al modelo clásico introducido por los autores.

Simulación numérica mediante SimKinet para la población de *Plutella xylostella* en el escenario en Werugha antes de la liberación a las 33 semanas (... Modelo teórico; --- Datos experimentales; — Modelo teórico incluyendo fluctuaciones)



**Figura 32.** Simulación numérica mediante SimKinet para la población de *Plutella xylostella* en el escenario en Werugha antes de la liberación a las 33 semanas (... Modelo teórico; --- Datos experimentales; — Modelo teórico incluyendo fluctuaciones).

Como se puede observar en la Figura 33, el modelo de Lotka-Volterra presenta una frecuencia natural asociada de 4.05Hz. Al incorporar a dicho modelo el término sinusoidal de la fluctuación, aparece otra frecuencia característica a los efectos medio ambientales de valor 16.01 Hz. Si añadimos aparte de la aportación sinusoidal, términos de ruido aleatorio vemos que aparecen frecuencias que caracterizan a términos de carácter aleatorio. Vemos que el modelo representa más exactitud a la realidad y a los datos experimentales que aportan los autores del estudio[2], lo cual supone una mejora y aportación añadida a este trabajo.



**Figura 33.** FFT para la población de *Plutella xylostella* en el escenario en Werugha antes de la liberación a las 33 semanas (— Modelo teórico incluyendo fluctuaciones; ... Modelo teórico incluyendo término sinusoidal; --- Modelo incluyendo términos sinusoidal y ruido).

## **CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES.**

### **7.1. Análisis sobre la consecución de los objetivos propuestos.**

Concluido este trabajo vamos a realizar una valoración sobre los objetivos que nos hemos planteado al comienzo de este. Por esto, vamos a realizar un repaso de las metas que nos propusimos y analizaremos el grado de consecución de los objetivos.

El planteamiento del TFM iba dirigido a aplicar el software informático SimKinet al estudio del control biológico. Para esto dimos a conocer el corazón de este programa que era el MESR, herramienta de cálculo numérico capaz de realizar una analogía eléctrica entre un problema físico y un sistema de ecuaciones diferenciales. La explicación del método e introducción al programa SimKinet sirven como guía para todos aquellos que quieran comenzar a aplicar este procedimiento.

Con el fin de darle una aplicación de carácter práctica al trabajo, se han reproducido a la vez que se ha mejorado un estudio sobre control biológico realizado en el país de Kenia, en dos provincias distintas, una costera, Werugha, y otra central, Tharuni. Para ello se ha simulado numéricamente el modelo de Lotka-Volterra aplicado a las densidades de población de la polilla *Plutella xylostella* y a las de su parasitoide larvario *Diadegma semiclausum*.

Los resultados numéricos fueron comparados con los ofrecidos por otros autores utilizando algoritmos de cálculo diferentes y se contrastaron con el programa Mathematica para dar validez a nuestra técnica numérica.

La similitud de los resultados da validez y efectividad al método y otorga una gran fiabilidad en los valores obtenidos.

Respecto a los objetivos que nos habíamos planteado al principio del trabajo, en la aplicación didáctica vemos que no son necesarios muchos conocimientos de programación ni de cálculo diferencial. La interfaz gráfica que dispone SimKinet es capaz de guiar de una manera muy intuitiva al usuario al introducir cada ecuación diferencial ya que es el programa mismo el que te va pidiendo introducir ordenadamente todos las constantes, condiciones iniciales y opciones de simulación. El usuario en ningún momento debe conocer ninguna sintaxis de programación como ocurre en otros programas. Es este motivo por lo que se muestra como una herramienta muy útil en la enseñanza universitaria.

Al realizar el trabajo en el ámbito de la dinámica poblacional aplicada al control biológico, reforzamos la aplicabilidad tanto del método numérico como del software en el ámbito agrícola.

### **7.2. Aportación realizada a la investigación.**

Como se ha comentado en el presente trabajo, el MESIR ha sido aplicado con éxito por muchos autores lo cual lo ratifica el número elevado de publicaciones en prestigiosas revistas al respecto. Las cualidades y ventajas del método lo demuestran con la fácil implementación de un modelo matemático en un modelo de red formado por circuitos eléctricos acoplados entre sí. En este trabajo se ha demostrado la sencillez del manejo y su utilidad al aplicar el estudio de la dinámica de sistemas no lineales al control biológico de plagas mediante el software SimKinet.

Así mismo se ha reproducido en base a estudios teóricos y experimentales la dinámica asociada al control poblacional de la polilla la *Plutella xylostella* en dos regiones de Kenia aproximándonos con exactitud a los valores experimentales, a diferencia de los autores del estudio los cuales no incorporan fluctuaciones que describan tanto cambios ambientales como otros de carácter periódico como son los cambios estacionales.

### **7.3. Futuras líneas de investigación**

La investigación que se ha desarrollado a lo largo de todo el trabajo ha conseguido alcanzar los objetivos que nos habíamos propuesto al principio de este. Sin embargo, quedan muchas áreas que explorar donde podamos aplicar el método. El estudio de las fluctuaciones (tipo y causas) es un tema de gran interés que debe seguir estudiándose. La aplicación del simulador a casos reales que se den en la agricultura española nos parece de interés para la comunidad científica para poder así predecir comportamientos futuros que se puedan dar en el control biológico.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Caravaca, P. Sanchez-Andrada, A. Soto, and M. Alajarin, "The network simulation method: A useful tool for locating the kinetic-thermodynamic switching point in complex kinetic schemes," *Phys. Chem. Chem. Phys.*, vol. 16, no. 46, pp. 25409–25420, Nov. 2014, doi: 10.1039/c4cp02079k.
- [2] H. E. Z. Tonnang, L. V. Nedorezov, H. Ochanda, J. Owino, and B. Löhr, "Assessing the impact of biological control of *Plutella xylostella* through the application of Lotka-Volterra model," *Ecol. Modell.*, vol. 220, no. 1, pp. 60–70, Jan. 2009, doi: 10.1016/j.ecolmodel.2008.09.002.
- [3] A. Naess, M. F. Dimentberg, and O. Gaidai, "Lotka-Volterra systems in environments with randomly disordered temporal periodicity," *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, vol. 78, no. 2, p. 021126, Aug. 2008, doi: 10.1103/PhysRevE.78.021126.
- [4] C. I. N. Estrada, *Control biológico de insectos. Un enfoque agroecológico*, Editorial. 2008.
- [5] L. Serrano Carreón and E. Galindo Fentanes, "Control biológico de organismos fitopatógenos: un reto multidisciplinario," *Rev. la Acad. Ciencias.*, vol. Vol. 58, no. 1, pp. 77–88.
- [6] A. F. C. Beatriz Díaz, Víctor Rubio Susan, "Control biológico de plagas y enfermedades de los cultivos.," in *Biotecnología y medioambiente*, pp. 291–306.
- [7] R. L. Ridgways. B.Vinson, *BIOLOGICAL CONTROL BY AUGMENTATION OF NATURAL ENEMIES*. New York: Plenum Press, 1976.
- [8] M. J. SAMWAYS, "Bacterial pest management in Brazil.," *Outl.Agric.*, vol. 10, pp. 78–84.
- [9] M. B. N. B. S. RINCÓN, "1 Insectos Benéficos. Guía para su Identificación," *Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias (INIFAP)*, p. 73, 2010.
- [10] R. V. S. Rodríguez, "Dinámica de poblaciones," in *MANEJO DE PLAGAS EN PALTOS Y CÍTRICOS*, Colección., M. de A. Instituto de Investigaciones Agropecuarias, Ed. Chile, 2011, pp. 99–104.
- [11] I. de J. May Cen, "(PDF) MODELOS DE DINÁMICA POBLACIONAL EN ECOLOGÍA," *REVISTA DEL CENTRO DE GRADUADOS E INVESTIGACIÓN. INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MÉRIDA. Vol. 32 NÚM. 60. MAR. , 2016.*  
[https://www.researchgate.net/publication/308796404\\_MODELOS\\_DE\\_DINAMICA\\_POBLACIONAL\\_EN\\_ECOLOGIA](https://www.researchgate.net/publication/308796404_MODELOS_DE_DINAMICA_POBLACIONAL_EN_ECOLOGIA) (accessed Aug. 28, 2020).
- [12] A. R. GONZÁLEZ, *ECOLOGÍA APLICADA DISEÑO Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO*. 2005.
- [13] M. Caravaca Id, P. Sanchez-Andrada Id, and A. Soto-Meca, "SimKinet: A free educational tool based on an electrical analogy to solve chemical kinetic equations," 2019, doi:

10.1371/journal.pone.0213302.

- [14] G. F. Simmons and S. G. Krantz, *Ecuaciones diferenciales teoría, técnica y práctica*. México D.F.. México: McGraw-Hill Interamericana, 2007.
- [15] L. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Calculo Variacional*. Editorial URSS, 1994.
- [16] T. M. Apostol, *Análisis matemático*. Reverte, 1996.
- [17] “Transformada de Fourier - Wikipedia, la enciclopedia libre.”  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada\\_de\\_Fourier](https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier) (accessed Aug. 28, 2020).
- [18] L. Peusner, “The principles of network thermodynamics: theory and biophysical applications,” *Entropy, Lincoln, Massachusetts*, 1987.
- [19] J. Zueco, F. Alhama, and C. F. G. Fernández, “Analysis of laminar forced convection with network simulation in thermal entrance region of ducts,” *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 43, no. 5, pp. 443–451, May 2004, doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2003.10.007.
- [20] A. Soto Meca, F. Alhama, and C. F. González Fernández, “An efficient model for solving density driven groundwater flow problems based on the network simulation method,” *J. Hydrol.*, vol. 339, no. 1–2, pp. 39–53, Jun. 2007, doi: 10.1016/j.jhydrol.2007.03.003.
- [21] F. G. Bellver, M. C. Garratón, A. Soto Meca, J. A. V. López, J. L. G. Guirao, and M. Fernández-Martínez, “Applying the Network Simulation Method for testing chaos in a resistively and capacitively shunted Josephson junction model,” *Results Phys.*, vol. 7, pp. 813–822, 2017, doi: 10.1016/j.rinp.2017.01.041.
- [22] I. Alhama, F. Alhama, and A. Soto Meca, “The network method for a fast and reliable solution of ordinary differential equations: Applications to non-linear oscillators,” *Comput. Electr. Eng.*, vol. 38, no. 6, pp. 1524–1533, Nov. 2012, doi: 10.1016/j.compeleceng.2012.05.008.
- [23] Microsim Corporation Fairbanks, “PSPICE.” Irvine, CA., 1994.
- [24] J. H. Montijano and I. Research Signpost (Trivandrum, *Network simulation method*. Research Signpost, 2002.
- [25] MathWorks Cleve Moler, “MATLAB.” .
- [26] I. Wolfram Research, “Mathematica.” Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2020, [Online]. Available: <https://www.wolfram.com/mathematica>.
- [27] E. Holzbecher, *Environmental modeling: Using matlab®*, vol. 9783642220425. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [28] Wikipedia, “Lotka–Volterra equations,” *Wikimedia Foundation, Inc.* .
- [29] Luis Miguel Monroy, “PALOMILLA DORSO DE DIAMANTE (*Plutella xylostella* L.): BIOLOGÍA Y CONTROL,” *Infoagro Systems, S.L.*
- [30] “*Plutella xylostella* Diamond back moth,” *Koppert Biological Systems*.



<https://www.koppert.com/>.

- [31] PestNet, “Pacific Pests and Pathogens.” <https://www.pestnet.org/>.
- [32] P. J. Wangersky, “Lotka-Volterra Population Models,” *Annu. Rev. Ecol. Syst.*, vol. 9, no. 1, pp. 189–218, Nov. 1978, doi: 10.1146/annurev.es.09.110178.001201.
- [33] M. F. Dimentberg, “Lotka-Volterra System in a Random Environment,” *Phys. Rev. E*, no. 3, p. 65, 2002, doi: 10.1103/PhysRevE.65.036204.
- [34] L. Zu, D. Jiang, D. O’Regan, and B. Ge, “Periodic solution for a non-autonomous Lotka-Volterra predator-prey model with random perturbation,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 430, no. 1, pp. 428–437, Oct. 2015, doi: 10.1016/j.jmaa.2015.04.058.
- [35] Y. Takeuchi, N. H. Du, N. T. Hieu, and K. Sato, “Evolution of predator-prey systems described by a Lotka-Volterra equation under random environment,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 323, no. 2, pp. 938–957, Nov. 2006, doi: 10.1016/j.jmaa.2005.11.009.
- [36] Y. Wang, S. Liu, H. Li, and D. Wang, “On the spatial Julia set generated by fractional Lotka-Volterra system with noise,” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 128, pp. 129–138, Nov. 2019, doi: 10.1016/j.chaos.2019.07.044.
- [37] “Ruido blanco - Wikipedia, la enciclopedia libre.” [https://es.wikipedia.org/wiki/Ruido\\_blanco](https://es.wikipedia.org/wiki/Ruido_blanco) (accessed Aug. 26, 2020).