

# Implementación Eficiente de los Métodos Variacionales de Registro de Imagen

Jorge Larrey, Rafael Verdú, Juan Morales, Pedro J. García y José L. Sancho  
 Grupo de Teoría y Tratamiento de la Señal (GTTS). Departamento de las TIC  
 ETSI Telecomunicación. Universidad Politécnica de Cartagena

## 1. Introducción y antecedentes

El registro de imagen es el proceso mediante el cual obtenemos una estimación óptima de la transformación que relaciona geoméricamente puntos correspondientes entre un par de imágenes [1]. Los métodos de registro de imagen se clasifican habitualmente en dos grandes grupos: métodos *paramétricos*, donde los puntos de referencia (o *landmarks*) juegan un papel importante, y métodos *no paramétricos*, los cuales se basan en la minimización de una medida de distancia que se expresa mediante un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (PDEs). En el campo del registro no paramétrico se han propuesto diversos términos de regularización para sortear el mal condicionamiento del problema, de forma que se dé preferencia a las soluciones más probables o “creíbles”. Estos regularizadores dan lugar a los cuatro métodos de registro clásicos que podemos encontrar en la literatura:

- 1) *Registro elástico*, cuyo regularizador viene dado por el potencial elástico del campo de desplazamiento (i.e., de la transformación que pretendemos estimar).
- 2) *Registro fluido*, basado en un modelo de fluido viscoso para la deformación.
- 3) *Registro por difusión*, dado por la energía de las derivadas de primer orden del campo de desplazamiento.
- 4) *Registro por curvatura*, el cual se basa en una aproximación de la energía de curvatura de las componentes del desplazamiento (i.e., en la energía de las derivadas de segundo orden).

El problema de registro no paramétrico se suele abordar mediante el cálculo de variaciones, de ahí que estos métodos se conozcan también como métodos *variacionales*. En este contexto, la minimización regularizada de la medida de distancia da lugar a las consiguientes ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{u}) + \alpha \mathcal{A}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  es el campo de desplazamiento que se desea estimar,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}; \mathbf{u})$  representa las fuerzas externas que se derivan de la medida de distancia,  $\alpha$  es un escalar positivo que pondera la importancia del regularizador frente a la medida de distancia, y  $\mathcal{A}[\mathbf{u}](\mathbf{x})$  es el operador en derivadas parciales correspondiente al término de regularización que se

haya escogido [2]:

$$\mathcal{A}^{\text{elas}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = -\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) - (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$\mathcal{A}^{\text{fluid}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = -\mu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) - (\lambda + \mu) \nabla \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$\mathcal{A}^{\text{diff}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = -\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\mathcal{A}^{\text{curv}}[\mathbf{u}](\mathbf{x}) = \Delta^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}). \quad (5)$$

Las anteriores PDEs no lineales se pueden resolver numéricamente utilizando una aproximación de  $\mathcal{A}[\mathbf{u}]$  en diferencias finitas, y un algoritmo iterativo de punto fijo o de descenso de gradiente. Algunos intentos para obtener implementaciones rápidas, estables y eficientes en el dominio espacial, sin invertir matrices, se pueden encontrar en [3] y [4], donde se hace uso de la partición de operadores aditivos (AOS) y de esquemas multiescala, respectivamente. En cualquier caso, es habitual que el escenario resultante en el dominio espacial implique una carga computacional elevada, así como considerables requerimientos de memoria.

## 2. Implementación propuesta

En este trabajo se propone un nuevo enfoque para resolver (1) utilizando la transformada de Fourier  $d$ -dimensional sobre la variable espacial  $\mathbf{x}$ . La traslación de la ecuación de E-L al dominio de la frecuencia da lugar a

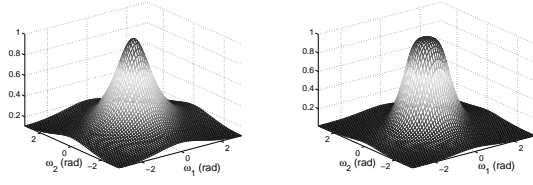
$$\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega}) + \alpha \tilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\omega}) \tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

donde  $\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega})$  representa la  $d$ -FT de las fuerzas externas,  $\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\omega})$  es la  $d$ -FT del campo de desplazamiento, y  $\boldsymbol{\omega}$  es la variable  $d$ -dimensional en el dominio de la frecuencia asociada a  $\mathbf{x}$ . El operador matricial  $\tilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\omega})$  realiza las derivadas espaciales en el dominio de la frecuencia y permite su cálculo por medio de simples productos. Las submatrices que componen  $\tilde{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\omega})$  se definen a continuación para cada uno de los métodos variacionales presentados (véase [5]):

- 1) *Registro elástico*:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{lm}^{\text{elas}}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} 2 \left( (\lambda + 2\mu) (1 - \cos \omega_l) + \mu \sum_{k=1, k \neq l}^d (1 - \cos \omega_k) \right), & l = m, \\ (\lambda + \mu) \sin \omega_l \sin \omega_m, & l \neq m. \end{cases} \quad (7)$$

- 2) *Registro fluido*. El procedimiento consistiría en resolver  $\tilde{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\omega}) + \alpha \tilde{\mathcal{A}}^{\text{fluid}}(\boldsymbol{\omega}) \tilde{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}$ , donde la



(a)  $H(\omega)$  para difusión (b)  $H(\omega)$  para curvatura.

Fig. 1. Espectros de los filtros  $d$ -dimensionales,  $d = 2$ .

incógnita es la velocidad frecuencial  $\tilde{v}(\omega)$  en lugar del desplazamiento frecuencial  $\tilde{u}(\omega)$ :

$$\tilde{A}_{lm}^{\text{fluid}}(\omega) = \tilde{A}_{lm}^{\text{elas}}(\omega). \quad (8)$$

- 3) *Registro por difusión.* En este caso, las componentes del campo de desplazamiento frecuencial son independientes y están desacopladas,  $\tilde{A}_{lm}^{\text{diff}}(\omega) = \mathbf{0}, l \neq m$ :

$$\tilde{A}_{ll}^{\text{diff}}(\omega) = 2 \sum_{m=1}^d (1 - \cos \omega_m). \quad (9)$$

- 4) *Registro por curvatura.* Como en el caso anterior, las componentes de  $\tilde{u}(\omega)$  se encuentran desacopladas,  $\tilde{A}_{lm}^{\text{curv}}(\omega) = \mathbf{0}, l \neq m$ :

$$\tilde{A}_{ll}^{\text{curv}}(\omega) = \left( 2 \sum_{m=1}^d (1 - \cos \omega_m) \right)^2. \quad (10)$$

Si se resuelve (6) mediante un método de paso temporal (*time-marching*) se obtiene un proceso iterativo con una matriz estable:

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}}(\omega, t) + \tilde{\mathbf{f}}(\omega, t) + \alpha \tilde{\mathbf{A}}(\omega) \tilde{\mathbf{u}}(\omega, t) = \mathbf{0}, \quad (11)$$

donde, una vez alcanzado el régimen permanente,  $\partial_t \tilde{\mathbf{u}}(\omega, t) = \mathbf{0}$  y por tanto (11) iguala a (6). Para resolver (11), el tiempo artificial  $t$  se discretiza,  $t = \xi \tau$ , siendo  $\tau$  el paso temporal y  $\xi \in \mathbb{N}$  el índice de la iteración en curso. El esquema iterativo que resulta es un algoritmo de descenso de gradiente en el dominio de la frecuencia:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(\xi)}(\omega) = (\mathbf{I} + \tau \alpha \tilde{\mathbf{A}}(\omega))^{-1} (\tilde{\mathbf{u}}^{(\xi-1)}(\omega) - \tau \tilde{\mathbf{f}}^{(\xi-1)}(\omega)), \quad (12)$$

siendo habitual la inicialización  $\tilde{\mathbf{u}}^{(0)}(\omega) := \mathbf{0}$ .

En el caso de los métodos de registro con las componentes desacopladas (i.e., difusión y curvatura), la ecuación que expresa la evolución de la componente  $l$ -ésima del campo de desplazamiento es:

$$\tilde{u}_l^{(\xi)}(\omega) = H(\omega) (\tilde{u}_l^{(\xi-1)}(\omega) - \eta^{-1} \tilde{f}_l^{(\xi-1)}(\omega)), \quad (13)$$

donde  $H(\omega)$  puede entenderse como un filtro paso-bajo  $d$ -dimensional, cuyos valores son los recíprocos de  $1 + \tau \alpha \tilde{A}_{ll}(\omega)$ , siendo siempre menores o iguales que la unidad. Por tanto, la inversión de matriz requerida para resolver (12) se ha convertido en una división punto a punto. La figura Fig.1 muestra los espectros frecuenciales del filtro  $H(\omega)$  para los casos de difusión y curvatura. La suavidad del campo de desplazamiento resultante depende de la frecuencia

TABLA I  
COMPARATIVA DE LA EFICIENCIA (CASOS 2D Y 3D).

Tamaño imágenes	Tiempos dom. espacial	Tiempos dom. frecuencia	ratio calculado
256 × 256	0.127	0.053	2.39
512 × 512	1.063	0.449	2.37
1024 × 1024	4.303	1.844	2.33
64 × 64 × 64	1.698	0.729	2.33
128 × 128 × 128	15.185	5.959	2.55

de corte del filtro paso-bajo, que es mayor para curvatura que para difusión y está relacionada con el orden de la derivada que se está minimizando.

La Tabla I muestra los tiempos medios de una iteración del algoritmo de registro, así como el ratio entre los tiempos, de la implementación más eficiente en el dominio espacial que podemos encontrar en la literatura (basada en la DCT) [6] y la implementación frecuencial aquí propuesta (que podemos programar de forma eficiente haciendo uso de la FFT  $d$ -dimensional). Como puede observarse en la última columna de la tabla, la técnica de registro propuesta presenta una eficiencia algo mayor del doble que la de las técnicas espaciales “clásicas”.

### 3. Conclusiones

En este trabajo, las ecuaciones de E-L para el registro de imagen variacional se han trasladado al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier  $d$ -dimensional. El dominio de la frecuencia permite entender las fuerzas de regularización como un filtrado paso-bajo. Esta aproximación novedosa proporciona una implementación de los métodos de registro más eficiente que las ya existentes. El uso del dominio frecuencial reduce considerablemente la complejidad y los requerimientos de memoria del esquema iterativo global.

### Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el Ministerio de Educación y Ciencia, a través del proyecto TEC2006-13338/TCM.

### Referencias

- [1] B. Zitová and J. Flusser. Image registration methods: a survey. *Image and Vision Computing*, 21:997–1000, 2003.
- [2] B. Fischer and J. Modersitzki. A unified approach to fast image registration and a new curvature based registration technique. *Linear Algebra and its Applications*, 308:107–124, 2004.
- [3] B. Fischer and J. Modersitzki. Fast diffusion registration. *M.Z. Nashed, O. Scherzer (eds), Contemporary Mathematics 313, Inverse Problems, Image Analysis, and Medical Imaging, AMS*, pages 117–129, 2002.
- [4] S. Henn and K. Witsch. Image registration based on multiscale energy information. *Multiscale Modelling and Simulation*, 4(2):584–609, 2005.
- [5] J. Larrey-Ruiz, R. Verdú-Monedero, and J. Morales-Sánchez. A Fourier domain framework for variational image registration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32:57–72, 2008.
- [6] B. Fischer and J. Modersitzki. FLIRT: a flexible image registration toolbox. *LNCIS*, 2717:261–270, 2003.