

Referencia:

Gonzalez-Perez, I., Martínez Díaz, M., Fuentes Aznar, A. *Compensación de los errores de alineación provocados por las deflexiones de los ejes en transmisiones de engranajes cónicos espirales diseñadas con distintos tipos de huella de contacto*. Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, Vol. 22, Nº 2, pp. 103-119, 2018.

Compensación de los errores de alineación provocados por las deflexiones de los ejes en transmisiones de engranajes cónicos espirales diseñadas con distintos tipos de huella de contacto

I. González Pérez¹, M. Martínez Díaz¹, A. Fuentes Aznar²

¹ Dpto. de Ingeniería Mecánica, Universidad Politécnica de Cartagena, ignacio.gonzalez@upct.es, mm2@alu.upct.es

² Department of Mechanical Engineering, Rochester Institute of Technology, afeme@rit.edu

Resumen: En el presente trabajo se analiza una metodología para compensar los errores de alineación debidos a las deflexiones de los ejes en transmisiones de engranajes cónicos espirales cuando se transmite una carga nominal o de diseño, considerando cuatro tipos de patrones de contacto: lineal, localizado en la dirección longitudinal, localizado en la dirección del perfil, y localizado en una dirección ajustada diagonal. Para ello se determinan en primer lugar los parámetros de máquina correspondientes al proceso Cyclo-Paloid que permiten diseñar dichos patrones de contacto. A continuación se aplica un proceso iterativo en cada uno de los cuatro diseños. Este proceso iterativo requiere analizar, en cada etapa del proceso, la transmisión con ejes mediante el método de los elementos finitos, para obtener los errores de alineación debidos a la deflexión de los ejes. Los resultados muestran la eficacia de la metodología propuesta para compensar, desde el diseño de las geometrías de las superficies de contacto, las deflexiones de los ejes en los cuatro tipos de patrones de contacto, así como la mayor tolerancia de los diseños con contacto localizado en la dirección del perfil y en la dirección diagonal ajustada a variaciones de la carga de diseño. Se presentan varios ejemplos numéricos.

Palabras clave: Engranajes cónicos espirales, análisis del contacto, compensación de errores de alineación, análisis de tensiones, análisis por elementos finitos.

Abstract: In this paper, a methodology to compensate alignment errors due to shaft deflections for a given design load in spiral bevel gear drives is presented, considering four types of contact pattern, linear and localized in longitudinal, profile and adjusted diagonal directions. Firstly, the machine-tool settings corresponding to a Cyclo-Paloid process are determined to design the mentioned four contact patterns. Secondly, an iterative process for each contact design is required where a finite element analysis provides the alignment errors due to shaft deflections. The results show the efficiency of the proposed methodology to compensate alignment errors from the design of the gear tooth surfaces in the four types of contact pattern, and the larger tolerance in the profile and adjusted diagonal directions designs to variations of the design load. Several numerical examples are presented.

Keywords: Spiral bevel gears, tooth contact analysis, compensation of alignment errors, stress analysis, finite element analysis.

1. Introducción

Las transmisiones de engranajes cónicos espirales son ampliamente utilizadas para transmitir movimiento y potencia entre ejes que se intersectan debido a su gran capacidad de transmisión de potencia y su suavidad en el engrane. La configuración del patrón de contacto y las tensiones de contacto y flexión a lo largo del engrane, si bien vienen condicionadas por el diseño de las superficies de contacto y por los errores de fabricación, también se ven afectadas por las deflexiones de los ejes que soportan los engranajes cuando se transmite una determinada carga. El estudio de cómo afectan estas deflexiones al comportamiento mecánico de las transmisiones de engranajes ha sido objeto de investigación en los últimos años, así como posibles métodos de diseño para compensar las mismas. En [1] se proponen unos modelos de elementos finitos de una transmisión de engranajes cilíndricos rectos con ejes donde éstos se modelizan con elementos sólidos y con elementos barra para comparar las deflexiones provocadas por la carga transmitida en ambos tipos de modelización, no observándose grandes diferencias. En [2] se presenta un método para determinar el factor de distribución de la carga en engranajes cilíndricos rectos que tiene en cuenta la rigidez de los ejes y la posición de los apoyos mediante modelos de

elementos finitos donde los ejes se modelizan con elementos barra. Un método para compensar las deflexiones en engranajes cilíndricos rectos se propone en [3] basado en situar el cortador del piñón en la misma posición relativa que ocuparía la rueda respecto al piñón cuando se transmite la carga nominal o de diseño. La misma idea se aplica en [4] para compensar las deflexiones de los ejes utilizando los errores de alineación provocados por las mismas en el proceso de síntesis local [5] del piñón en una transmisión de engranajes cónicos espirales. Aquí el proceso de rectificado considerado está basado en el conocido en la terminología anglosajona como “face-milling” (proceso no continuo con muela de rectificado cónica). El proceso seguido en [4] es iterativo, analizando los errores de alineación debido a las deflexiones de los ejes en modelos de elementos finitos donde se consideran los engranajes mediante modelos de cinco parejas de dientes y los ejes mediante elementos barra. Dichos errores se utilizan en cada nueva etapa de la iteración para rediseñar las superficies de contacto del piñón teniendo en cuenta que la posición relativa de la rueda es la que viene dada por los errores obtenidos en la etapa anterior de iteración. De esta manera se consigue tener un camino de contacto adecuado para los errores de alineación presentes cuando se transmite la carga nominal o de diseño. En [6] se propone un método de diseño de transmisiones de engranajes cónicas espirales generadas con el proceso Cyclo-Paloid donde se determinan de forma analítica los parámetros de máquina (para posicionar los cortadores de piñón y rueda) que permiten distintas tipologías de patrones de contacto y un método para compensar desde el diseño de las superficies de contacto las deflexiones de los ejes. Dicho método se basa igualmente en situar los cortadores de piñón y rueda teniendo en cuenta que la posición relativa entre ambos engranajes no es la ideal sino la debida a unos errores de alineación dados. Las bases del proceso Cyclo-Paloid se pueden encontrar en [7,8]. Este método de generación es un tipo de proceso conocido en la terminología inglesa como “face-hobbing” (proceso de corte continuo con cortador de cuchillas) con la particularidad de que usa dos cortadores independientes para ambos lados del diente y permite controlar la configuración del patrón de contacto entre piñón y rueda.

Una cuestión latente, no obstante, sigue siendo la tipología de patrón de contacto más adecuada desde el punto de vista del comportamiento mecánico de la transmisión. Si bien el contacto lineal o extendido puede parecer aparentemente más ventajoso, su sensibilidad a los errores de alineación no le favorece. La posibilidad de poder conseguir un patrón de contacto determinado mediante el rediseño de las superficies de contacto en una transmisión con ciertos errores de alineación provocados por las deflexiones de los ejes ofrece otra perspectiva que es la que se pretende investigar en el presente trabajo.

Los objetivos que se plantean son los siguientes:

- (i) Compensar el efecto de las deflexiones de los ejes en el comportamiento mecánico de una transmisión de engranajes cónicos espirales para una carga de diseño o nominal y con diferentes diseños de patrones de contacto: (a) contacto lineal, (b) contacto localizado en la dirección longitudinal, (c) contacto localizado en la dirección del perfil del diente, y (d) contacto localizado en una dirección diagonal ajustada.
- (ii) Comparar el comportamiento mecánico de transmisiones de engranajes cónicos espirales con los diseños compensados de los diferentes patrones de contacto cuando se producen variaciones de la carga nominal o de diseño.

El método de generación de los engranajes cónicos espirales considerado en el presente trabajo es el mismo que el presentado en [6], Cyclo-Paloid, debido a que la cinemática del proceso de generación de piñón y rueda permite diseñar el patrón de contacto deseado de una forma directa sin necesidad de recurrir a procesos de síntesis local o de búsqueda de parámetros de máquina que proporcionen una superficie objetivo. El proceso permite incluso conseguir la acción conjugada entre piñón y rueda (contacto lineal sin errores de transmisión). Permite igualmente conseguir un contacto localizado variando el radio del cortador de las cuchillas internas (aquellas que generan el lado convexo de los dientes) y el radio del cortador de las cuchillas externas (aquellas que generan el lado cóncavo de los dientes), y con el grado de abombamiento del perfil de ambos tipos de cuchillas (usando perfiles circulares o parabólicos). En el primer caso se consigue un camino de contacto en la dirección del perfil del diente por el abombamiento longitudinal de las superficies. En el segundo caso se consigue un camino de contacto en la dirección longitudinal del diente por el abombamiento de las superficies en la dirección del perfil del diente. Combinando ambos tipos de modificaciones se consigue un camino de contacto en una dirección diagonal ajustada entre las dos anteriores.

Para la determinación de los errores de alineación provocados por las deflexiones de los ejes en una transmisión de engranajes cónicos espirales, con cualquiera de los cuatro tipos de patrones de contacto mencionados en el objetivo (i), se usará el mismo procedimiento que el aplicado en [4], lo que exige la aplicación del método de los elementos finitos y la modelización de la transmisión con ejes mediante elementos finitos. Obtenidos dichos errores, se aplicará el procedimiento expuesto en [6] para rediseñar las superficies de contacto y corroborar que, efectivamente, los resultados del análisis por elementos finitos confirman la existencia de los cuatro tipos de patrones de contacto para la carga nominal o de diseño. Finalmente se compararán los cuatro tipos de patrones de

contacto en términos de comportamiento mecánico de la transmisión y sensibilidad frente a variaciones de la carga de diseño o nominal.

La Figura 1 muestra de forma esquemática la transmisión de engranajes cónicos espirales que será objeto de estudio en el presente trabajo. Ambos engranajes aparecen en voladizo, siendo ésta la situación más desfavorable de desplazamiento del contacto debido a las deflexiones de los ejes. El ángulo entre ejes es de 90° siendo γ_1 y γ_2 los semiángulos de los conos primitivos.

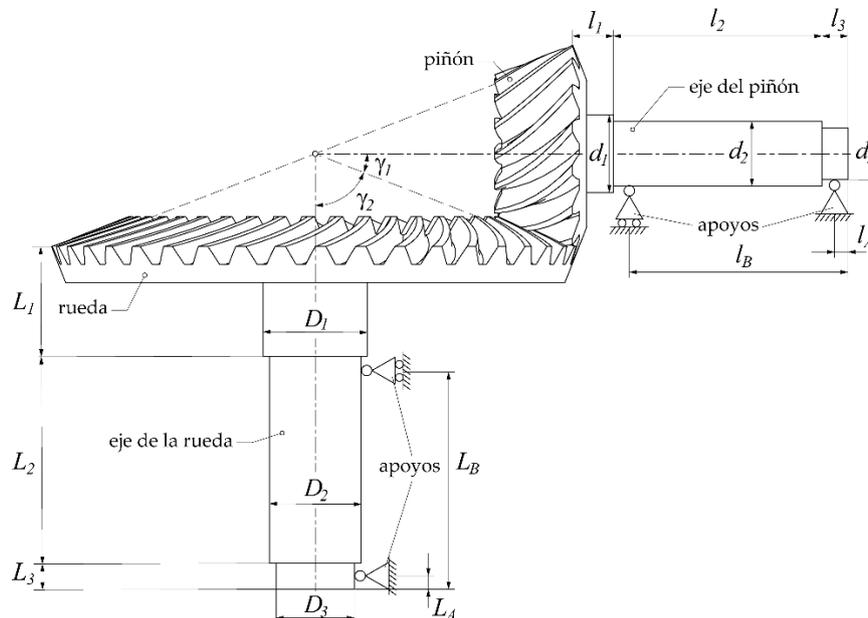


Figura 1: Esquema de la transmisión de engranajes cónicos espirales objeto de estudio.

2. Diseño de los patrones de contacto

La Figura 2 muestra de forma esquemática los parámetros de máquina de un generador clásico de engranajes cónicos donde se observa el doble cortador característico del proceso Cyclo-Paloid. Una descripción más detallada de estos parámetros de máquina aparece en [6,9]. Evidentemente las máquinas de control numérico actuales permiten un control diferente de los movimientos de posicionamiento de engranaje y cortador, pero en esencia es posible reproducir dichos movimientos e introducir dichos parámetros. Obsérvese que este proceso no requiere inclinar el cortador respecto a la plataforma que lo soporta, característico de otros procesos como Cyclo-Cut, Spirac o Spiroflex. Una descripción detallada de la generación de superficies en este tipo de procesos denominados de forma genérica como “face-hobbing” en la terminología inglesa se puede encontrar en [10-12].

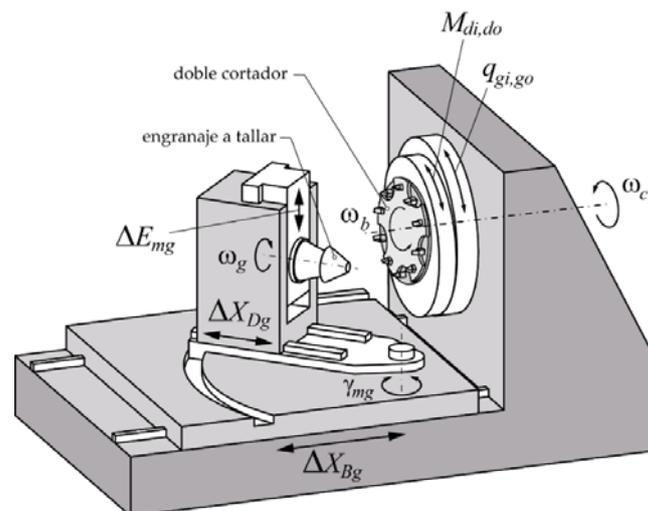


Figura 2: Parámetros de máquina en un generador clásico con cortador para el proceso Cyclo-Paloid.

Aunque la velocidad del doble cortador es única (representada por ω_b en la Figura 2), el doble cortador está formado por dos discos de corte independientes cuyos centros de giro pueden coincidir o pueden ser diferentes.

Los radios r_{ci} y r_{co} de las cuchillas de corte internas y externas (véase la Figura 3) en ambos discos también pueden ser diferentes. Esta funcionalidad evita la necesidad de inclinación del cortador para conseguir localizar el contacto de la transmisión en la dirección de los perfiles de los dientes, lo que se traduce en un abombamiento longitudinal de las superficies de contacto.

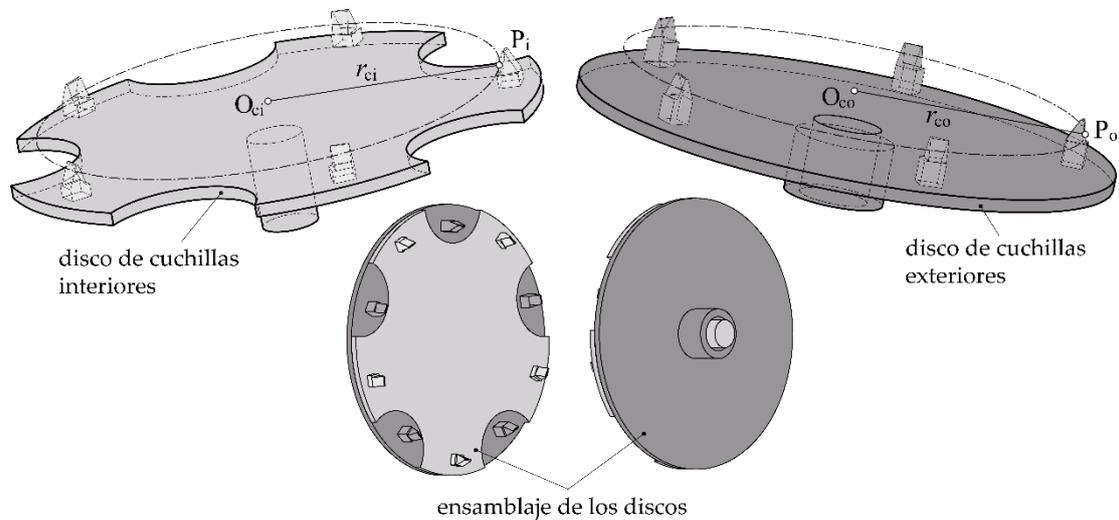


Figura 3: Discos de corte y ensamblaje de los mismos en el proceso Cyclo-Paloid.

Por otro lado, el perfil de las cuchillas permite proporcionar un abombamiento en la dirección del perfil de los dientes. La Figura 4a muestra una cuchilla de corte interior con perfil parabólico, aunque el mismo efecto puede conseguirse con un perfil circular.

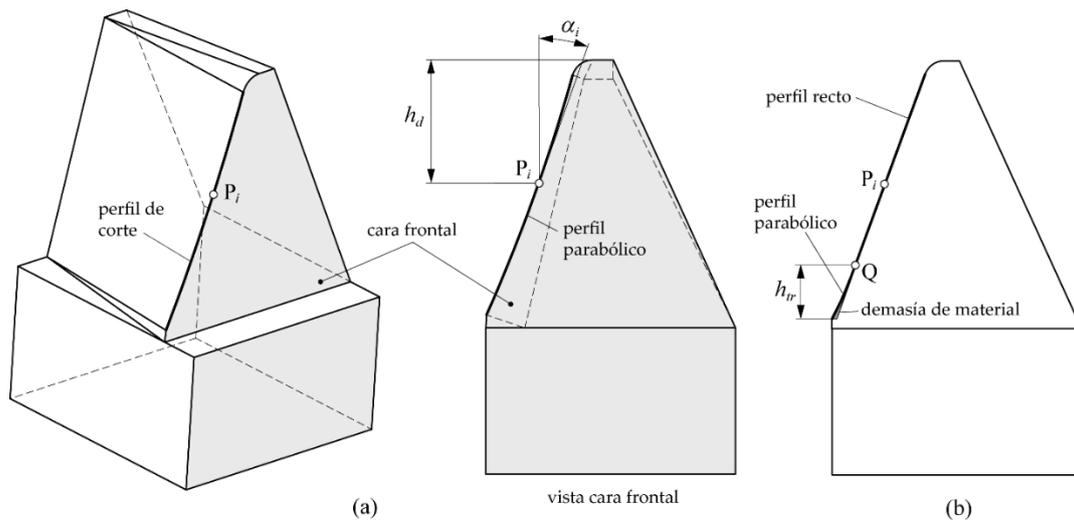


Figura 4: Cuchilla de corte: (a) con perfil parabólico y (b) con perfil recto y demasía de material en la base.

Independientemente del patrón de contacto que se diseñe, es importante evitar el contacto en la arista de cabeza. Para ello será necesario incorporar en el perfil de las cuchillas una demasía de material con la que eliminar más material de la superficie del diente. La Figura 4b muestra el perfil de una cuchilla con demasía en la base y que permite eliminar material cerca de la cabeza del diente, evitando el contacto en la arista de cabeza. Dos parámetros controlan esta demasía de material en la cuchilla. La altura h_{tr} y el coeficiente de parábola a_{tr} . En estudios anteriores en engranajes cilíndricos rectos y helicoidales [13] se ha verificado que para cada valor de altura h_{tr} existe un valor óptimo de a_{tr} que minimiza las tensiones de contacto. El valor de h_{tr} en principio puede elegirse al azar siempre y cuando: (i) no disminuya el grado de recubrimiento de la transmisión a valores inferiores a la unidad, lo que en una transmisión de engranajes cónicos espirales es prácticamente imposible debido al grado de recubrimiento longitudinal, y (ii) no afecte de manera importante a la formación de la huella de contacto o a la función de errores de transmisión.

La determinación de un patrón de contacto de referencia que implique la existencia de acción conjugada entre piñón y rueda requiere investigar el valor que han de tomar los parámetros de máquina representados en la Figura 2 tanto en la generación del piñón como en la generación de la rueda. Esta determinación se presenta en [6]. La Figura 5 muestra los cuatro patrones de contacto objeto de estudio en el presente trabajo:

- (a) La Figura 5a muestra el patrón de contacto de referencia dado por un contacto lineal sin errores de transmisión sin carga. Este patrón se consigue cuando no se aplica ningún tipo de abombamiento a las superficies. Los radios verifican la condición $r_{ci}=r_{co}$ y se usan perfiles rectos en las cuchillas de corte de ambos engranajes.
- (b) La Figura 5b muestra el contacto localizado en la dirección longitudinal cuando se aplica un abombamiento en el perfil de las cuchillas de corte. Los radios verifican la condición $r_{ci}=r_{co}$ y se usan perfiles parabólicos en las cuchillas de corte del piñón y perfiles rectos en las cuchillas de corte de la rueda.
- (c) La Figura 5c muestra el contacto localizado en la dirección del perfil de los dientes cuando se aplica un abombamiento en la dirección longitudinal de los dientes en piñón y rueda. Los radios verifican la condición $r_{ci}\neq r_{co}$ y se usan perfiles rectos en las cuchillas de corte de piñón y rueda.
- (d) La Figura 5d muestra el contacto localizado en una dirección ajustada entre las dos anteriores. Los radios verifican la condición $r_{ci}\neq r_{co}$ para conseguir el abombamiento en la dirección longitudinal, y por otro lado se aplican perfiles parabólicos en las cuchillas de corte del piñón y perfiles rectos en las cuchillas de corte de la rueda.

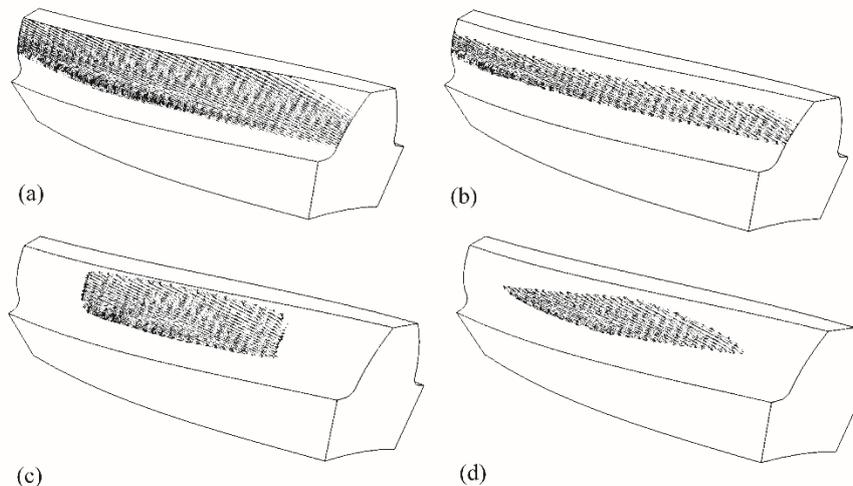


Figura 5: Diseño de diferentes tipos de patrones de contacto: lineal en (a), localizado en (b), (c) y (d).

Los patrones de contacto de la Figura 5 se han obtenido aplicando un algoritmo de análisis del contacto que considera las superficies de contacto de los dientes como superficies rígidas y determina la huella a partir de un espesor de película ficticio de 0,0065 mm. De esta manera, todas aquellas regiones de las superficies de los dientes de piñón y rueda cuya distancia sea superior a dicho espesor de película no formarán parte de la huella de contacto. Este método se aplica en cada una de las posiciones angulares del piñón, rotando en cada una de ellas la rueda para acercar las superficies de los dientes de ésta hasta encontrar el contacto con las superficies de los dientes del piñón. El algoritmo considera las distancias entre tres parejas de superficies, tres del piñón y tres de la rueda, y analiza un número determinado de posiciones angulares del piñón a lo largo de dos ciclos de engrane. Este algoritmo está basado en el trabajo presentado en [14] para una pareja de dientes y más tarde extendido a tres parejas de dientes en [15].

3. Metodología para la compensación de errores de alineación

La metodología a utilizar parte de una configuración dada de los ejes de la transmisión como la mostrada en la Figura 1. La compensación de los errores de alineación debidos a las deflexiones de los ejes es un proceso iterativo que requiere en cada etapa rediseñar las superficies de los dientes de piñón y rueda. Dicho proceso puede descomponerse en los siguientes pasos o etapas:

- Paso 1: Diseño de la transmisión que proporciona un determinado patrón de contacto (véase la Figura 5) bajo condiciones ideales de no errores de alineación. Esta etapa está bien documentada en el trabajo [6].
- Paso 2: Construcción del modelo de elementos finitos sobre el diseño anterior en el que se tienen en cuenta las dimensiones de los ejes y la posición de los apoyos, así como las condiciones de contorno que aportan éstos. El modelo de elementos finitos se muestra en la Figura 6 (una versión simplificada del mismo para ilustrar los elementos de forma más clara). Se trata de un modelo cuyas características (tipo de elementos y condiciones de contorno) están definidas de forma extensa en [4] y no se describen aquí.

- Paso 3: Determinación de los errores de alineación en la transmisión debido a las deflexiones de los ejes bajo la carga nominal o de diseño. El procedimiento aplicado es similar al expuesto en [4]. Estos errores vienen representados por el error en la distancia entre ejes ΔE , el error de posición axial del piñón ΔA_1 , el error de posición axial de la rueda ΔA_2 y el error en el ángulo de cruce entre ejes $\Delta \gamma$ (véase [6] para una ilustración de estos errores). Para cada tipo de error, su valor se obtiene como una media aritmética de los valores obtenidos a lo largo de todas las posiciones de contacto consideradas en los dos ciclos de engrane.
- Paso 4: Rediseño de las superficies de los dientes de piñón y rueda a partir de los errores determinados en el paso anterior utilizando el procedimiento propuesto en [6].

Una vez rediseñada la transmisión se vuelven a repetir los pasos del 2 al 4. El proceso acaba cuando la diferencia entre cada uno de los errores (ΔE , ΔA_1 , ΔA_2 y $\Delta \gamma$) obtenidos en el paso 3 del último rediseño, y su homólogo obtenido en el mismo paso 3 en un rediseño anterior, es menor a un valor de referencia fijado previamente para cada tipo de error. En definitiva, cuando se observa convergencia de los errores de alineación.

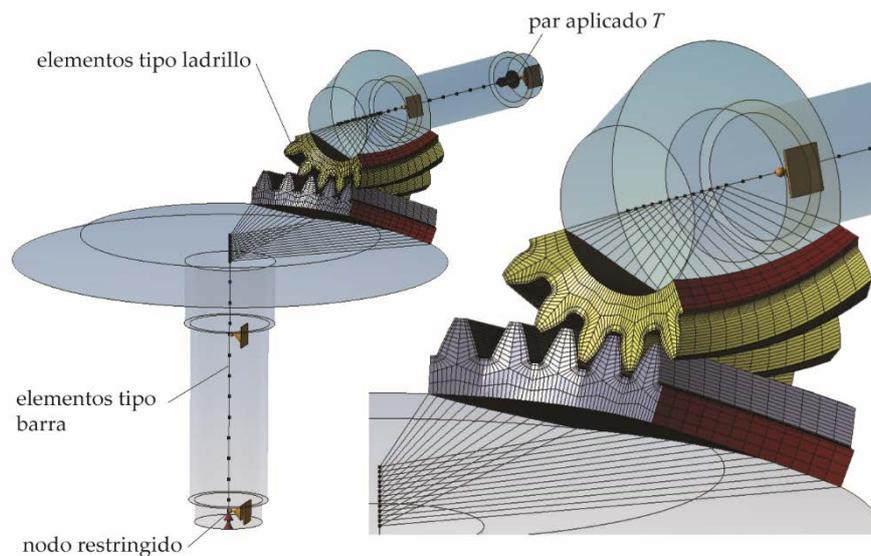


Figura 6: Ilustración esquemática del modelo de elementos finitos con ejes.

4. Resultados

Los datos básicos de la transmisión de engranajes cónicos espirales con la que se van a diseñar diferentes patrones de contacto se muestran en la Tabla 1 y corresponden al mismo ejemplo considerado en [6]. En este trabajo se ampliará el estudio para considerar los cuatro tipos de patrones de contacto y estudiar el rebaje de cabeza óptimo que minimiza las tensiones de contacto en los diseños con contacto lineal y contacto en la dirección del perfil. Además se analizarán mediante el método de los elementos finitos los distintos diseños y se aplicará el procedimiento expuesto en la sección anterior para conseguir compensar las deflexiones de los ejes en los cuatro diseños. Los datos de la configuración de los ejes y posición de los apoyos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 1: Datos básicos de la transmisión.

Dato	Valor
Relación de transmisión de referencia	2,5
Ángulo entre ejes [°]	90,0
Potencia de entrada en el piñón [kW]	100,0
Velocidad de giro del piñón [rpm]	2000,0
Número de calidad AGMA	8
Radio del cortador [mm]	75,0
Número de grupos de cuchillas	5

Tabla 2: Configuración de los ejes de la transmisión (ver Figura 1).

Datos del eje del piñón [mm]	Datos del eje de la rueda [mm]
$l_1=15,624$	$L_1=42,292$
$l_2=80,0$	$L_2=80,0$
$l_3=10,0$	$L_3=10,0$
$l_A=5,0$	$L_A=5,0$
$l_B=85,0$	$L_B=85,0$
$d_1=30,0$	$D_1=40,0$

$$\begin{array}{cc} d_2=25,0 & D_2=35,0 \\ d_3=20,0 & D_3=30,0 \end{array}$$

Aplicando la directrices de la norma de diseño ANSI/AGMA 2005-D03 [16] se determinan los parámetros de diseño de piñón y rueda mostrados en la Tabla 3 a partir de los datos básicos de la transmisión mostrados en la Tabla 1. Este procedimiento aparece explicado detalladamente en [16] y ha sido aplicado con anterioridad en [6].

Tabla 3: Datos de diseño de piñón y rueda.

Dato	Piñón	Rueda
Número de dientes	$N_1=16$	$N_2=41$
Semiángulo del cono primitivo [°]	$\gamma_1=21,318$	$\gamma_2=68,682$
Ángulo de espiral medio [°]	$\psi_m=35,0$	
Dirección de la espiral	a izquierdas	a derechas
Módulo transversal exterior [mm]	$m_{ot}=4,874$	
Módulo normal medio [mm]	$m_{mn}=3,397$	
Distancia media del cono primitivo [mm]	$A_m=91,266$	
Ancho de cara [mm]	$F_w=32,0$	
Adendo exterior [mm]	$a_{o1}=3,397$	$a_{o2}=3,397$
Dedendo exterior [mm]	$b_{o1}=4,077$	$b_{o2}=4,077$
Semiángulo del cono de cabeza [°]	$\gamma_{F1}=21,318$	$\gamma_{F2}=68,682$
Semiángulo del cono de raíz [°]	$\gamma_{R1}=21,318$	$\gamma_{R2}=68,682$
Adendo cordal normal medio [mm]	$a_{c1}=3,497$	$a_{c2}=3,412$
Distancia cordal normal media del espesor del diente [mm]	$t_{n1}=5,271$	$t_{n2}=5,276$

Los parámetros de máquina y variables del cortador correspondientes a los patrones de contacto que se muestran en la Figura 5 se muestran en las Tablas 4, 5, 6, y 7, respectivamente, para el contacto lineal y los contactos localizados (en las direcciones longitudinal, del perfil y ajustada diagonal). Estos parámetros se determinan de acuerdo a la metodología expuesta en [6] y la descripción realizada en la Sección 2.

Tabla 4: Parámetros básicos de cortador y máquina para contacto lineal.

Dato	Piñón	Rueda
Radio del cortador en las cuchillas interiores [mm]	$r_{ci}=75,0$	$r_{ci}=75,0$
Radio del cortador en las cuchillas exteriores [mm]	$r_{co}=75,0$	$r_{co}=75,0$
Tipo de perfil	recto	recto
Ángulo de presión de las cuchillas [°]	20,0	20,0
Rebaje de cabeza	sí	sí
Altura de rebaje en la base de las cuchillas interiores [mm]	$h_{tr}=1,36$	$h_{tr}=1,36$
Altura de rebaje en la base de las cuchillas exteriores [mm]	$h_{tr}=1,36$	$h_{tr}=1,36$
Coefficiente de parábola en el perfil de rebaje de las cuchillas interiores [mm^{-1}]	$a_{tri}=0,01$	$a_{tri}=0,0075$
Coefficiente de parábola en el perfil de rebaje de las cuchillas exteriores [mm^{-1}]	$a_{tro}=0,01$	$a_{tro}=0,0075$
Distancia radial interior [mm]	$M_{di}=86,280$	$M_{di}=86,249$
Distancia radial exterior [mm]	$M_{do}=86,280$	$M_{do}=86,249$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas interiores [°]	$q_{1i}=49,879$	$q_{2i}=49,887$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas exteriores [°]	$q_{1o}=49,879$	$q_{2o}=49,887$
Posicionamiento vertical del engranaje [mm]	$\Delta E_{m1}=0,0$	$\Delta E_{m2}=0,0$
Posicionamiento radial del engranaje [mm]	$\Delta X_{D1}=0,0$	$\Delta X_{D2}=0,0$
Posicionamiento longitudinal de la plataforma base del engranaje	$\Delta X_{B1}=0,0$	$\Delta X_{B2}=0,0$
Posicionamiento angular de la plataforma base del engranaje [°]	$\gamma_{m1}=21,318$	$\gamma_{m2}=68,682$
Relación de giro engranaje-cabezal portaherramientas	$m_{1c}=2,750710$	$m_{2c}=1,073448$
Relación de giro engranaje-cortador	$m_{1b}=0,317460$	$m_{2b}=0,123417$

Tabla 5: Parámetros básicos de cortador y máquina para contacto localizado en la dirección longitudinal.

Dato	Piñón	Rueda
Radio del cortador en las cuchillas interiores [mm]	$r_{ci}=75,0$	$r_{ci}=75,0$
Radio del cortador en las cuchillas exteriores [mm]	$r_{co}=75,0$	$r_{co}=75,0$
Tipo de perfil	parabólico	recto
Ángulo de presión de las cuchillas [°]	20,0	20,0
Coefficiente de parábola en el perfil de las cuchillas interiores [mm^{-1}]	$a_{pi}=0,0015$	$a_{pi}=0,0$
Coefficiente de parábola en el perfil de las cuchillas exteriores [mm^{-1}]	$a_{po}=0,0015$	$a_{po}=0,0$
Rebaje de cabeza	no	no
Distancia radial interior [mm]	$M_{di}=86,280$	$M_{di}=86,249$
Distancia radial exterior [mm]	$M_{do}=86,280$	$M_{do}=86,249$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas interiores [°]	$q_{1i}=49,879$	$q_{2i}=49,887$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas exteriores [°]	$q_{1o}=49,879$	$q_{2o}=49,887$
Posicionamiento vertical del engranaje [mm]	$\Delta E_{m1}=0,0$	$\Delta E_{m2}=0,0$
Posicionamiento radial del engranaje [mm]	$\Delta X_{D1}=0,0$	$\Delta X_{D2}=0,0$

Posicionamiento longitudinal de la plataforma base del engranaje	$\Delta X_{B1}=0,0$	$\Delta X_{B2}=0,0$
Posicionamiento angular de la plataforma base del engranaje [°]	$\gamma_{m1}=21,318$	$\gamma_{m2}=68,682$
Relación de giro engranaje-cabezal portaherramientas	$m_{1c}=2,750710$	$m_{2c}=1,073448$
Relación de giro engranaje-cortador	$m_{1b}=0,317457$	$m_{2b}=0,123415$

Tabla 6: Parámetros básicos de cortador y máquina para contacto localizado en la dirección del perfil.

Dato	Piñón	Rueda
Radio del cortador en las cuchillas interiores [mm]	$r_{ci}=75,0$	$r_{ci}=75,0$
Radio del cortador en las cuchillas exteriores [mm]	$r_{co}=75,5$	$r_{co}=75,5$
Tipo de perfil	recto	recto
Ángulo de presión de las cuchillas [°]	20,0	20,0
Rebaje de cabeza	sí	sí
Altura de rebaje en la base de las cuchillas interiores [mm]	$h_{tr}=1,36$	$h_{tr}=1,36$
Altura de rebaje en la base de las cuchillas exteriores [mm]	$h_{tr}=1,36$	$h_{tr}=1,36$
Coefficiente de parábola en el perfil de rebaje de las cuchillas interiores [mm ⁻¹]	$a_{tri}=0,01$	$a_{tri}=0,0075$
Coefficiente de parábola en el perfil de rebaje de las cuchillas exteriores [mm ⁻¹]	$a_{tro}=0,01$	$a_{tro}=0,0075$
Distancia radial interior [mm]	$M_{di}=86,218$	$M_{di}=86,187$
Distancia radial exterior [mm]	$M_{do}=86,348$	$M_{do}=86,318$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas interiores [°]	$q_{1i}=49,895$	$q_{2i}=49,903$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas exteriores [°]	$q_{1o}=50,218$	$q_{2o}=50,226$
Posicionamiento vertical del engranaje [mm]	$\Delta E_{m1}=0,0$	$\Delta E_{m2}=0,0$
Posicionamiento radial del engranaje [mm]	$\Delta X_{D1}=0,0$	$\Delta X_{D2}=0,0$
Posicionamiento longitudinal de la plataforma base del engranaje	$\Delta X_{B1}=0,0$	$\Delta X_{B2}=0,0$
Posicionamiento angular de la plataforma base del engranaje [°]	$\gamma_{m1}=21,318$	$\gamma_{m2}=68,682$
Relación de giro engranaje-cabezal portaherramientas	$m_{1c}=2,750710$	$m_{2c}=1,073448$
Relación de giro engranaje-cortador	$m_{1b}=0,317460$	$m_{2b}=0,123417$

Tabla 7: Parámetros básicos de cortador y máquina para contacto localizado en una dirección ajustada diagonal.

Dato	Piñón	Rueda
Radio del cortador en las cuchillas interiores [mm]	$r_{ci}=75,0$	$r_{ci}=75,0$
Radio del cortador en las cuchillas exteriores [mm]	$r_{co}=75,5$	$r_{co}=75,5$
Tipo de perfil	parabólico	recto
Ángulo de presión de las cuchillas [°]	20,0	20,0
Coefficiente de parábola en el perfil de las cuchillas interiores [mm ⁻¹]	$a_{pi}=0,0015$	$a_{pi}=0,0$
Coefficiente de parábola en el perfil de las cuchillas exteriores [mm ⁻¹]	$a_{po}=0,0015$	$a_{po}=0,0$
Rebaje de cabeza	no	no
Distancia radial interior [mm]	$M_{di}=86,218$	$M_{di}=86,187$
Distancia radial exterior [mm]	$M_{do}=86,348$	$M_{do}=86,318$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas interiores [°]	$q_{1i}=49,896$	$q_{2i}=49,903$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas exteriores [°]	$q_{1o}=50,218$	$q_{2o}=50,226$
Posicionamiento vertical del engranaje [mm]	$\Delta E_{m1}=0,0$	$\Delta E_{m2}=0,0$
Posicionamiento radial del engranaje [mm]	$\Delta X_{D1}=0,0$	$\Delta X_{D2}=0,0$
Posicionamiento longitudinal de la plataforma base del engranaje	$\Delta X_{B1}=0,0$	$\Delta X_{B2}=0,0$
Posicionamiento angular de la plataforma base del engranaje [°]	$\gamma_{m1}=21,318$	$\gamma_{m2}=68,682$
Relación de giro engranaje-cabezal portaherramientas	$m_{1c}=2,750710$	$m_{2c}=1,073448$
Relación de giro engranaje-cortador	$m_{1b}=0,317460$	$m_{2b}=0,123417$

Los modelos de elementos finitos considerados tienen un total de 164370 nodos con 135638 elementos. Los elementos considerados en los modelos de piñón y rueda son elementos ladrillo tipo C3D8I [17] de primer orden, con comportamiento mejorado para la flexión. Los elementos considerados en los ejes son elementos barra B31 [17]. El tipo de algoritmo considerado para el análisis del contacto es el de superficie esclava en las superficies de contacto del piñón y superficie maestra en las superficies de contacto de la rueda.

4.1. Determinación del rebaje de cabeza óptimo

Los valores de altura de rebaje h_{tr} y coeficiente de parábola del perfil parabólico de rebaje a_{tr} (véase la Figura 3b) del diseño con patrón de contacto lineal (véase la Figura 5a y la Tabla 4) se obtienen tras un análisis comparativo de las tensiones de contacto a lo largo de dos ciclos de engrane. En dicho análisis se consideran diferentes valores del coeficiente a_{tr} para un mismo valor de altura h_{tr} . El valor de h_{tr} se fija en 1,36 mm siguiendo las directrices explicadas en la Sección 2. En este caso se ha optado por tomar $h_{tr} = 0,4m_{mn}$. Los valores considerados de a_{tr} han sido 0,0025 mm⁻¹, 0,0050 mm⁻¹, 0,0075 mm⁻¹, 0,0100 mm⁻¹, 0,0125 mm⁻¹, repitiendo los mismos valores para piñón y rueda. La Figura 7 muestra la evolución de la máxima tensión de Von Mises en los modelos de piñón y rueda. En este estudio se han considerado modelos de elementos finitos de cinco parejas de

dientes pero sin incluir los ejes de la transmisión. Los dos ciclos de engrane distribuidos en 41 posiciones de contacto permiten detectar la periodicidad de la evolución de las tensiones de contacto.

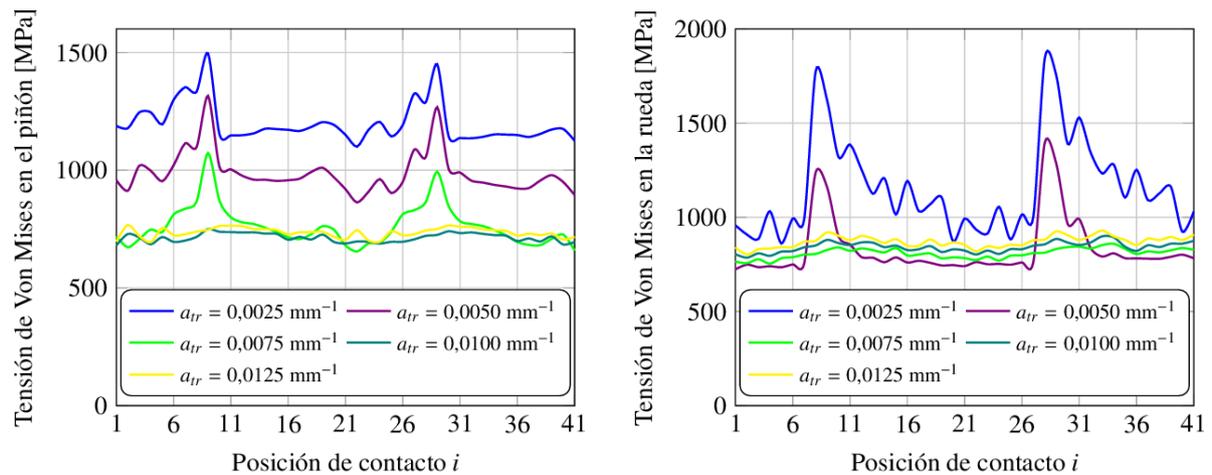


Figura 7: Evolución de la tensión máxima de Von Mises en los modelos de piñón (izquierda) y rueda (derecha) en dos ciclos de engrane para distintos niveles de rebaje en cabeza.

Los valores óptimos de mínima tensión a lo largo del engrane se alcanzan con $a_{tr} = 0,0100 \text{ mm}^{-1}$ en el piñón y $a_{tr} = 0,0075 \text{ mm}^{-1}$ en la rueda y éstos son los valores que se han considerado en la Tabla 4 para el diseño con contacto lineal y en la Tabla 6 para el diseño con contacto localizado en la dirección del perfil del diente. Los diseños con contacto localizado en la dirección longitudinal y en la dirección diagonal ajustada carecen de este problema de tensiones en las aristas de cabeza.

4.2. Compensación de las deflexiones de los ejes en el diseño con contacto lineal

A continuación se aplica la metodología expuesta en la Sección 3 al diseño mostrado en la Tabla 4. El proceso iterativo irá proporcionando diferentes geometrías de piñón y rueda a las que se designarán como P_1R_1 , P_2R_2 , ..., y así sucesivamente, siendo el diseño de las geometrías P_iR_i el definido por los datos de la Tabla 4. En cada diseño P_iR_i se realiza un análisis por el método de los elementos finitos para obtener los errores de alineación debidos a las deflexiones de los ejes según el procedimiento expuesto en [4]. Se aplica entonces el procedimiento propuesto en [6] para determinar los parámetros de máquina de un nuevo diseño $P_{i+1}R_{i+1}$ que permite centrar el camino de contacto para los errores de alineación obtenidos en el análisis del diseño P_iR_i . El proceso se repite hasta que se observa convergencia en los errores de alineación. La Tabla 8 muestra la evolución de los errores de alineación durante seis iteraciones (la forma en que se miden estos errores se ilustra en [6]). La Figura 8 muestra dicha variación y confirma la existencia de convergencia en todos los tipos de error.

Tabla 8: Evolución de los errores de alineación para distintos diseños con contacto lineal.

Diseño de la geometría	Distancia mínima entre ejes	Desplazamiento axial en el piñón	Desplazamiento axial en la rueda	Ángulo de cruce entre ejes
	ΔE [mm]	ΔA_1 [mm]	ΔA_2 [mm]	$\Delta \gamma$ [°]
P_1R_1	0,552127	-0,318134	0,604423	-0,061001
P_2R_2	0,625818	-0,311311	0,622133	-0,074921
P_3R_3	0,661969	-0,306492	0,626590	-0,080735
P_4R_4	0,680324	-0,304005	0,628707	-0,083648
P_5R_5	0,689687	-0,302736	0,629775	-0,085129
P_6R_6	0,694470	-0,302088	0,630319	-0,085884
P_7R_7	0,696914	-0,301758	0,630597	-0,086270

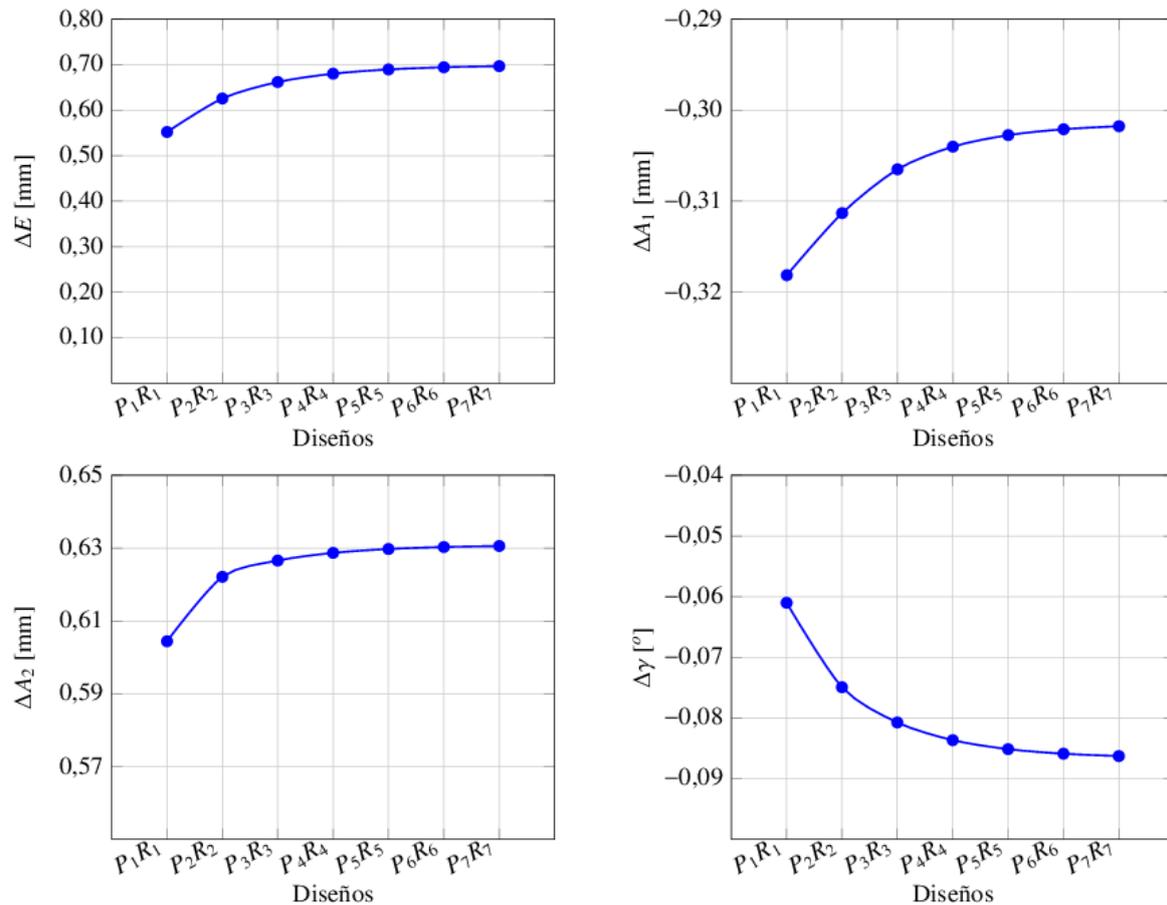


Figura 8: Evolución de los errores de alineación para distintos diseños con contacto lineal.

La Tabla 9 muestra los parámetros de máquina para el diseño P₇R₇ y que compensa las deflexiones de los ejes, centrando el camino de contacto cuando se transmite la carga nominal o de diseño.

Tabla 9: Parámetros básicos de máquina para el diseño P₇R₇ con contacto lineal.

Dato	Piñón	Rueda
Distancia radial interior [mm]	$M_{di}=86,280$	$M_{di}=86,249$
Distancia radial exterior [mm]	$M_{do}=86,280$	$M_{do}=86,249$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas interiores [°]	$q_{1i}=49,879$	$q_{2i}=49,887$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas exteriores [°]	$q_{1o}=49,879$	$q_{2o}=49,887$
Posicionamiento vertical del engranaje [mm]	$\Delta E_{m1}=0,694$	$\Delta E_{m2}=0,0$
Posicionamiento radial del engranaje [mm]	$\Delta X_{D1}=-0,302$	$\Delta X_{D2}=0,630$
Posicionamiento longitudinal de la plataforma base del engranaje [mm]	$\Delta X_{B1}=0,0$	$\Delta X_{B2}=0,0$
Posicionamiento angular de la plataforma base del engranaje [°]	$\gamma_{m1}=21,306$	$\gamma_{m2}=68,608$
Relación de giro engranaje-cabezal portaherramientas	$m_{1c}=2,752109$	$m_{2c}=1,073994$
Relación de giro engranaje-cortador	$m_{1b}=0,317615$	$m_{2b}=0,123478$

La prueba de esta compensación de los errores de alineación se ilustra en la Figura 9, donde se muestra la evolución de las tensiones de contacto en el modelo del piñón a lo largo de dos ciclos de engrane para los siete diseños. En todos los casos el par T aplicado es el mismo.

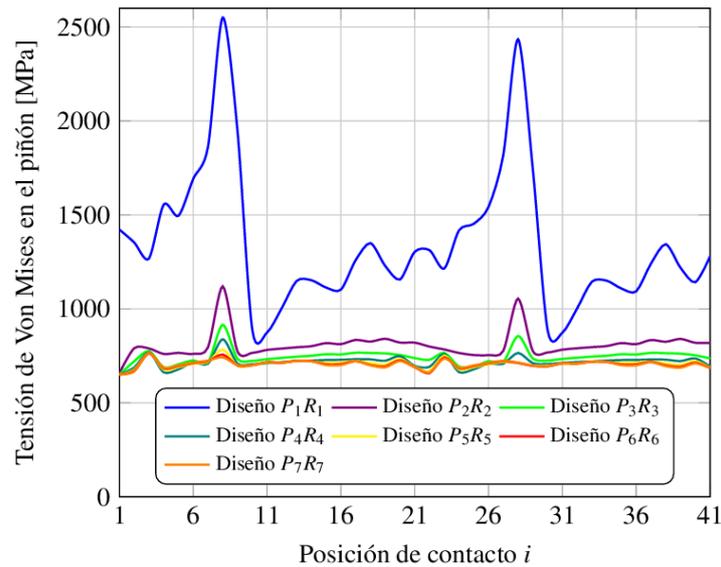


Figura 9: Evolución de las tensiones de contacto de Von Mises en el modelo del piñón en los siete diseños.

Las tensiones tan elevadas para el diseño 1 (P_1R_1) se debe a que la huella de contacto se desplaza totalmente a los bordes de las superficies de los dientes como consecuencia de la deflexión de los ejes. En la primera iteración la compensación de los errores de alineación ya tiene un efecto importante en el nivel de las tensiones de contacto, que se reducen drásticamente con el diseño 2 (P_2R_2).

Si sobre el diseño P_7R_7 se realiza un análisis del contacto (TCA) para distintos estados de desalineación, se observa cómo el contacto se centra para el estado de desalineación correspondiente a la carga nominal o de diseño. Si se designa por D el estado de desalineación definido en la última fila de la Tabla 8, $D \equiv \{\Delta E = 0,696914\text{mm}, \Delta A_1 = -0,301758\text{mm}, \Delta A_2 = 0,630597\text{mm} \text{ y } \Delta \gamma = -0,086270^\circ\}$ y que corresponde a la carga de diseño T sobre el diseño P_7R_7 , la evolución de la huella de contacto para distintos estados de desalineación ($0,2D$, $0,4D$, $0,6D$, $0,8D$, $1,0D$) muestra cómo ésta se va centrado conforme se alcanza el estado de desalineación D . La Figura 10 muestra la evolución de la huella de contacto sobre una proyección axial de la superficie de contacto del diente del piñón.

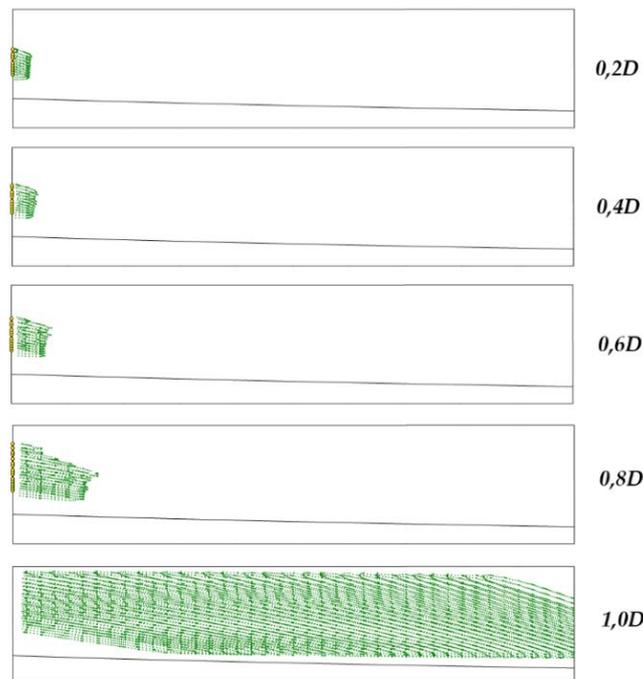


Figura 10: Evolución de la huella de contacto para el diseño con contacto lineal P_7R_7 y para distintos grados de desalineación ($0,2D$, $0,4D$, $0,6D$, $0,8D$, $1,0D$).

4.3. Compensación de las deflexiones de los ejes en el diseño con contacto localizado en la dirección longitudinal

Un estudio similar al realizado con el diseño anterior se presenta en este diseño con contacto localizado en la dirección longitudinal. Tras un total de seis iteraciones, se llega a los parámetros básicos de máquina que se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10: Parámetros básicos de máquina para el diseño P₇R₇ con contacto localizado en dirección longitudinal.

Dato	Piñón	Rueda
Distancia radial interior [mm]	$M_{di}=86,280$	$M_{di}=86,249$
Distancia radial exterior [mm]	$M_{do}=86,280$	$M_{do}=86,249$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas interiores [°]	$q_{1i}=49,879$	$q_{2i}=49,887$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas exteriores [°]	$q_{1o}=49,879$	$q_{2o}=49,887$
Posicionamiento vertical del engranaje [mm]	$\Delta E_{m1}=0,694$	$\Delta E_{m2}=0,0$
Posicionamiento radial del engranaje [mm]	$\Delta X_{D1}=-0,302$	$\Delta X_{D2}=0,630$
Posicionamiento longitudinal de la plataforma base del engranaje	$\Delta X_{B1}=0,0$	$\Delta X_{B2}=0,0$
Posicionamiento angular de la plataforma base del engranaje [°]	$\gamma_{m1}=21,306$	$\gamma_{m2}=68,607$
Relación de giro engranaje-cabezal portaherramientas	$m_{1c}=2,752113$	$m_{2c}=1,073995$
Relación de giro engranaje-cortador	$m_{1b}=0,317615$	$m_{2b}=0,123478$

La Figura 11 muestra la evolución de la huella de contacto para distintos estados de desalineación D , correspondiente este estado D a los valores de error de alineación debido a las deflexiones de los ejes cuando se transmite la carga de diseño o nominal en el diseño P₇R₇, $D=\{\Delta E=0,696917\text{mm}, \Delta A_1=-0,301403\text{mm}, \Delta A_2=0,630543\text{mm}$ y $\Delta\gamma=-0,086514^\circ\}$. En este caso se ha representado, en color rojo, el camino de contacto correspondiente a los puntos de mínima distancia.

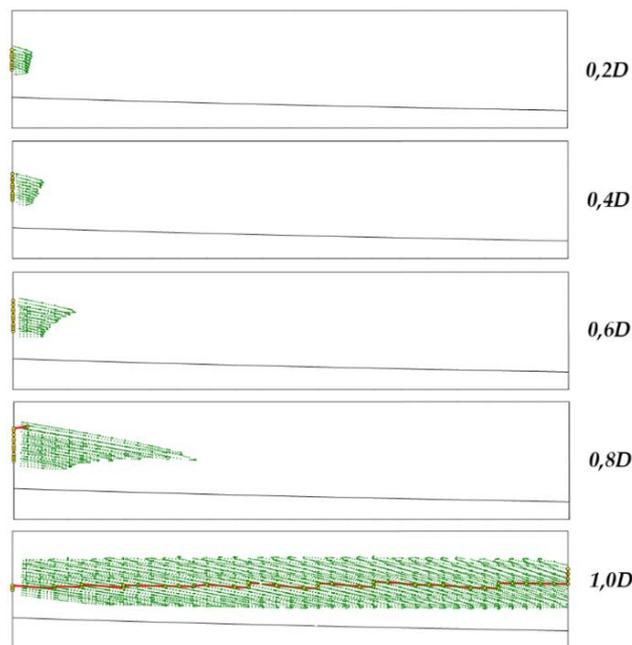


Figura 11: Evolución de la huella de contacto para el diseño con contacto localizado en la dirección longitudinal P₇R₇ y para distintos grados de desalineación (0,2D, 0,4D, 0,6D, 0,8D, 1,0D).

4.4. Compensación de las deflexiones de los ejes en el diseño con contacto localizado en la dirección del perfil

La Tabla 11 muestra los parámetros básicos de máquina del diseño con contacto localizado en la dirección del perfil P₇R₇ y que se ha obtenido tras un proceso iterativo con un total de seis iteraciones. La Figura 12 muestra la evolución de la huella de contacto en dicho diseño para distintos niveles de error de alineación. El nivel de errores de alineación correspondiente a la carga de diseño viene dado en este caso por $D=\{\Delta E=0,691974\text{mm}, \Delta A_1=-0,301477\text{mm}, \Delta A_2=0,629519\text{mm}$ y $\Delta\gamma=-0,085977^\circ\}$.

Tabla 11: Parámetros básicos de máquina para el diseño P₇R₇ con contacto localizado en dirección del perfil.

Dato	Piñón	Rueda
Distancia radial interior [mm]	$M_{di}=86,218$	$M_{di}=86,187$
Distancia radial exterior [mm]	$M_{do}=86,348$	$M_{do}=86,318$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas interiores [°]	$q_{1i}=49,895$	$q_{2i}=49,903$

Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas exteriores [°]	$q_{10}=50,218$	$q_{20}=50,226$
Posicionamiento vertical del engranaje [mm]	$\Delta E_{m1}=0,690$	$\Delta E_{m2}=0,0$
Posicionamiento radial del engranaje [mm]	$\Delta X_{D1}=-0,302$	$\Delta X_{D2}=0,629$
Posicionamiento longitudinal de la plataforma base del engranaje [mm]	$\Delta X_{B1}=0,0$	$\Delta X_{B2}=0,0$
Posicionamiento angular de la plataforma base del engranaje [°]	$\gamma_{m1}=21,307$	$\gamma_{m2}=68,608$
Relación de giro engranaje-cabezal portaherramientas	$m_{1c}=2,752105$	$m_{2c}=1,073992$
Relación de giro engranaje-cortador	$m_{1b}=0,315170$	$m_{2b}=0,122525$

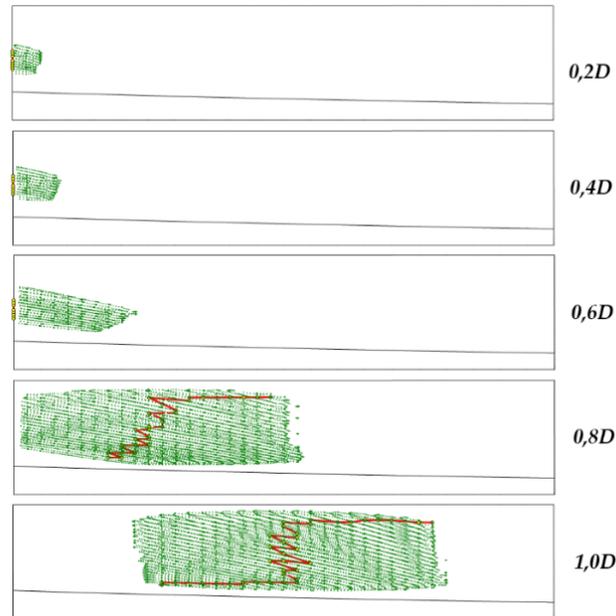


Figura 12: Evolución de la huella de contacto para el diseño con contacto localizado en la dirección del perfil P₇R₇ y para distintos grados de desalineación (0,2D, 0,4D, 0,6D, 0,8D, 1,0D).

4.5. Compensación de las deflexiones de los ejes en el diseño con contacto localizado en una dirección ajustada diagonal

La Tabla 12 muestra los parámetros básicos de máquina para este diseño tras un proceso iterativo con seis iteraciones. La Figura 13 muestra la evolución de la huella de contacto para distintos niveles de error de alineación D , siendo éste el correspondiente a la carga de diseño o nominal $D=\{\Delta E=0,692005\text{mm}, \Delta A_1=-0,301150\text{mm}, \Delta A_2=0,629373\text{mm}$ y $\Delta\gamma=-0,086123^\circ\}$.

Tabla 12: Parámetros básicos de máquina para el diseño P₇R₇ con contacto localizado en dirección diagonal.

Dato	Piñón	Rueda
Distancia radial interior [mm]	$M_{di}=86,218$	$M_{di}=86,187$
Distancia radial exterior [mm]	$M_{do}=86,348$	$M_{do}=86,318$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas interiores [°]	$q_{1i}=49,895$	$q_{2i}=49,903$
Ángulo del cabezal portaherramientas en las cuchillas exteriores [°]	$q_{1o}=50,218$	$q_{2o}=50,226$
Posicionamiento vertical del engranaje [mm]	$\Delta E_{m1}=0,690$	$\Delta E_{m2}=0,0$
Posicionamiento radial del engranaje [mm]	$\Delta X_{D1}=-0,301$	$\Delta X_{D2}=0,629$
Posicionamiento longitudinal de la plataforma base del engranaje [mm]	$\Delta X_{B1}=0,0$	$\Delta X_{B2}=0,0$
Posicionamiento angular de la plataforma base del engranaje [°]	$\gamma_{m1}=21,306$	$\gamma_{m2}=68,608$
Relación de giro engranaje-cabezal portaherramientas	$m_{1c}=2,752108$	$m_{2c}=1,073993$
Relación de giro engranaje-cortador	$m_{1b}=0,315170$	$m_{2b}=0,122526$

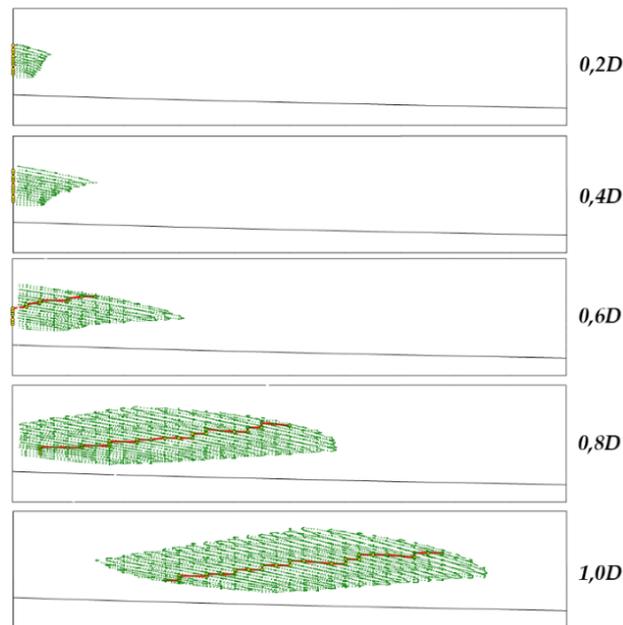


Figura 13: Evolución de la huella de contacto para el diseño con contacto localizado en la dirección diagonal P₇R₇ y para distintos grados de desalineación (0,2D, 0,4D, 0,6D, 0,8D, 1,0D).

4.6. Comparación de resultados

La Figura 14 muestra una comparación de los diseños P₇R₇ con los cuatro tipos de patrones de contacto, tanto para el caso en el que el par transmitido es el nominal como para el caso en el que el par transmitido es un 80% del nominal. Para el primer caso se observa que el contacto lineal proporciona los valores menores de tensión de Von Mises en el modelo del piñón a lo largo de los dos ciclos de engrane, debido a la mayor extensión del área de contacto frente a los otros tipos de patrones de contacto. Sin embargo, cuando la carga transmitida es menor (un 80% del par nominal en el caso representado a la derecha en la Figura 14), el contacto lineal tiene el peor comportamiento, siendo el contacto en la dirección del perfil y en la dirección diagonal ajustada los que mejores resultados ofrecen.

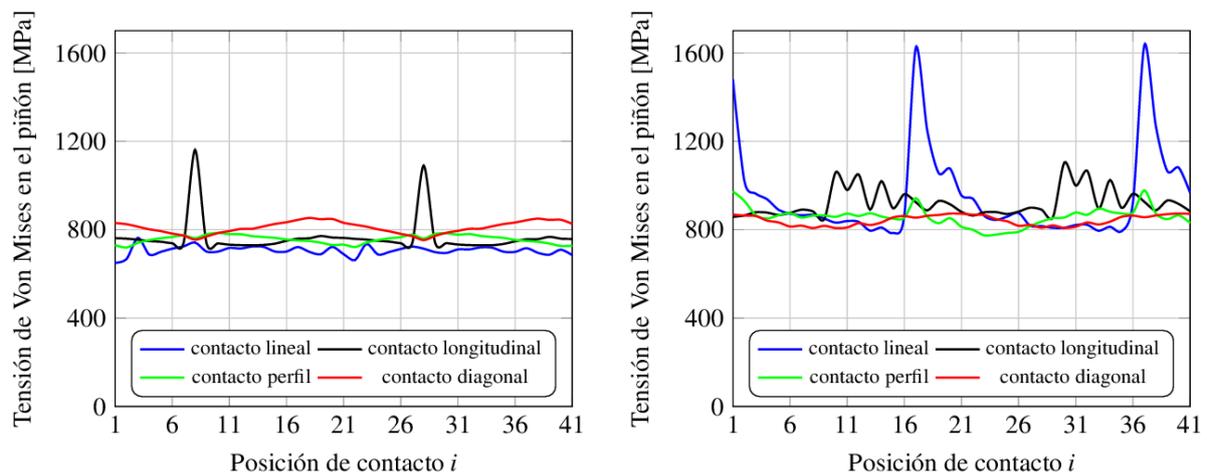


Figura 14: Evolución de la tensión máxima de Von Mises en el modelo del piñón para el 100% del par nominal (izquierda) y el 80% del par nominal (derecha) en los cuatro tipos de patrones de contacto en los diseños P₇R₇.

5. Conclusiones

Los resultados muestran que la metodología propuesta en [6] para compensar las deflexiones de los ejes en los diseños de transmisiones de engranajes cónicos espirales con el proceso Cyclo-Paloid funciona para los cuatro tipos de patrones de contacto. Los resultados muestran además que los patrones de contacto localizado en la dirección del perfil y en la dirección diagonal presentan una mayor tolerancia a las variaciones en la carga de diseño o nominal, ya que para estados de nivel 0,8D los patrones de contacto se encuentran dentro de las superficies de contacto, lo que no ocurre para los patrones con contacto lineal y con contacto localizado en la

dirección longitudinal. Cuando el nivel de error de alineación es del orden de $0,6D$ o menor, los patrones de contacto no son satisfactorios en ninguno de los casos de estudio, aunque estos niveles corresponden a valores de carga muy inferiores a la de diseño en los que se espera un nivel de tensiones también menor.

6. Referencias

- [1] Roda-Casanova V., Iserte-Vilar J.L., Sánchez-Marín F.T., Fuentes-Aznar A., González-Pérez I., “Development and comparison of shaft-gear models for the computation of gear misalignments due to power transmission”, *Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences*, Washington DC, Estados Unidos (2011)
- [2] Roda-Casanova V., Sánchez-Marín F. T., González-Pérez I., Iserte J.L., Fuentes A., “Determination of the ISO face load factor in spur gear drives by the finite element modeling of gears and shafts”, *Mechanism and Machine Theory* **65**, 1-13 (2013)
- [3] González-Pérez I., Roda-Casanova V., Fuentes A., “Modified geometry of spur gear drives for compensation of shaft deflections”, *Meccanica* **50**, 1855-1867 (2015)
- [4] Fuentes A., Ruiz-Orzáez R., González-Pérez I., “Compensation of errors of alignment caused by shaft deflections in spiral bevel gear drives”, *Mechanism and Machine Science* **34**, 301-319, Springer, Izhevsk, Rusia (2016)
- [5] Litvin F. L., Fuentes A., *Gear Geometry and Applied Theory, second edition*, Cambridge University Press, New York (2004)
- [6] González-Pérez I., Fuentes-Aznar A., “Analytical determination of basic machine-tool settings for generation of spiral bevel gears and compensation of errors of alignment in the cyclo-paloid system”, *International Journal of Mechanical Sciences* **120**, 91-104 (2017)
- [7] Krumme W., *Klingelberg-Spirackegelräder: Berechnung, Herstellung und Einbau*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg (2013)
- [8] Lelkes M., Marialigeti J., Play D., “Numerical determination of cutting parameters for the control of klingelberg spiral bevel gear geometry”, *Journal of Mechanical Design Transaction* **124**, 761-771 (2002)
- [9] González-Pérez I., Fuentes-Aznar A., “Comparison of Cyclo-Paloid and Cyclo-Cut cutting methods for generation of spiral bevel gears”, *Proceedings of the ASME 2017 International Design Engineering Conferences*, Cleveland, Estados Unidos (2017)
- [10] Fan Q., “Computerized modeling and simulation of spiral bevel and hypoid gears manufactured by gleason face hobbing process”, *Journal of Mechanical Design* **128**, 1315-1327 (2006)
- [11] Vimercati M., “Mathematical model for tooth surfaces representation of face-hobbed hypoid gears and its application to contact analysis and stress calculation”, *Mechanism and Machine Theory* **42**, 668-690 (2007)
- [12] Shih Y.P., Fong Z.H., Lin G., “Mathematical model for a universal face hobbing hypoid gear generator”, *Journal of Mecanical Design Transaction ASME* **129**, 38-47 (2007)
- [13] Fuentes-Aznar A., Ruiz-Orzáez R., González-Pérez I., “Comparison of spur, helical and curvilinear gear drives by means of stress and tooth contact analyses”, *Meccanica* **52**, 1721-1738 (2017)
- [14] Sheveleva G.I., Volkov A.E., Medvedev V.I., “Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears”, *Mechanism and Machine Theory* **42**, 198-215 (2007)
- [15] Fuentes A., Nagamoto H., Litvin F.L., González-Pérez I., Hayasaka K., “Computerized design of modified helical gears finished by plunge shaving”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **199**, 1677-1690 (2010)
- [16] ANSI/AGMA Standard 2005-D03, “Design manual for bevel gears”, American National Standard, Alexandria (Virginia), 2003
- [17] Dassault Systemes Simulia Corporation, “ABAQUS/Standard User’s Manual”, Providence, Rhode Island, 2010.