

Universidad Politécnica de Cartagena

TRABAJO FIN DE CARRERA
Ingeniería de Telecomunicaciones

**ANÁLISIS COMPARATIVO DE DISTRIBUCIONES
TIEMPO-FRECUENCIA APLICABLES AL PROCESADO DE
SEÑAL**

Manuel Nicolás Hernández

Cartagena, Febrero 2016

Director: Juan Morales Sánchez

Dpto. Tecnologías de la Información y las Comunicaciones



RESUMEN.

La finalidad de este proyecto es obtener una comparativa entre diferentes distribuciones tiempo-frecuencia (DTF) aplicables al procesado de señal, profundizando en las distribuciones de la clase cuadrática. Para ello el proyecto se divide en dos partes, una parte teórica donde se estudian las distribuciones tiempo-frecuencia y sus características, y una parte práctica donde se comparan algunas distribuciones tiempo-frecuencia sobre señales arbitrarias, y sobre una señal real que contiene el sonido de un delfín.

En el primer capítulo se verá la importancia de usar distribuciones tiempo-frecuencia con señales no estacionarias. Con este tipo de distribuciones se puede determinar qué frecuencias están presentes en cada instante de tiempo, al establecer una relación entre ambos parámetros. En cambio, esto no es posible con la distribución en tiempo o la distribución en frecuencia, pues dan una visión global de cada parámetro por separado pero no establecen una relación entre el tiempo y la frecuencia.

También se mostrarán todas las posibles propiedades que puede cumplir cualquier distribución tiempo-frecuencia. Estas propiedades permitirán dividir las distribuciones en diferentes clases, según las propiedades que cumpla. Esta primera división permite acotar y obtener una primera selección de posibles distribuciones a utilizar en nuestra aplicación. Algunas de estas clases son la clase cuadrática, la clase afín y la clase hiperbólica.

En el capítulo dos se introducen algunos conceptos que serán importantes durante el resto del proyecto. Entre estos conceptos cabe destacar la señal analítica, ya que es la utilizada en las diferentes distribuciones tiempo-frecuencia, y el principio de incertidumbre, al ser el causante de la relación existente entre eliminación de términos cruzados y resolución obtenida.

En el tercer capítulo se tienen los desarrollos matemáticos con los que se llegaron a diferentes distribuciones, y posteriormente se relacionan todas las distribuciones con la distribución de Wigner-Ville. Este es el origen de la clase cuadrática o de Cohen, y el motivo por el que se le considera a la distribución de Wigner-Ville como prototipo de dicha clase.

La clase cuadrática se estudia en el capítulo cuatro, donde además de la formulación empleada también se verá como los términos cruzados afectan a las distribuciones. Al eliminar los términos cruzados, mediante técnicas de filtrado, se pierden propiedades y resolución, por eso se estudiará el modo de diseñar distribuciones de la clase cuadrática que minimicen la presencia de términos cruzados, y a su vez cumplan con las propiedades deseables.

En el capítulo cinco es donde se realiza un estudio comparativo entre algunas distribuciones de la clase cuadrática. Se empezará analizando dos señales arbitrarias, con el fin de comparar y analizar la capacidad de resolución de cada distribución, junto con la capacidad de eliminar los términos cruzados. En esta parte se podrá ver de forma gráfica la relación entre resolución y términos cruzados, y se verá como las distribuciones que proporcionan un mejor resultado son las que cumplen un compromiso entre ambos aspectos, como la distribución de Born-Jordan.

También se verán los dos casos “extremos”, en los que está por un lado la distribución de Wigner-Ville (WVD) y por el otro el espectrograma. Con la WVD se obtiene una muy buena resolución pero no se eliminan los términos cruzados, mientras que con el espectrograma pasa lo contrario, se eliminan los términos cruzados pero se obtiene una mala resolución.

Finalmente, se acabará el proyecto analizando un archivo de audio que contiene el sonido de un delfín mular. Con el análisis de este archivo de audio se pretende identificar, mediante diferentes distribuciones tiempo-frecuencia, los diferentes tipos de sonidos que emiten este tipo de delfines, es decir, los silbidos, zumbidos y clicks. De esta manera se podrá comparar la capacidad de cada distribución a la hora de analizar señales reales. De hecho, se verá como no todas las distribuciones tiempo-frecuencia empleadas han sido capaces de detectar correctamente los zumbidos, pues presentan dificultades para detectar componentes muy próximas entre sí.

Índice.

RESUMEN.....	III
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Distribución Tiempo-Frecuencia (DTF).....	1
1.1.1. Definición.....	1
1.1.2. Necesidad.....	1
1.1.3. Propiedades.....	3
1.2. Clases de DTFs	10
1.3. Aplicaciones de las DTFs	11
2. Conceptos previos.....	12
2.1. Señal analítica.....	12
2.2. Señales de una componente y de varias componentes.....	13
2.3. Frecuencia instantánea (FI).....	13
2.4. Frecuencia media.....	14
2.5. Retardo de tiempo (TD).....	14
2.6. Retardo de grupo.....	14
2.7. Principio de incertidumbre y producto BT.....	15
3. DTFs fundamentales.....	18
3.1. Distribución de Wigner.....	18
3.2. Distribución de Wigner-Ville.....	19
3.3. Transformada de Fourier en tiempo corto (STFT). Espectrograma.....	22
3.4. Sonograma.....	23
3.5. Distribución Page y Potencia Espectral Instantánea.....	24
3.6. Densidad de energía.....	25
3.6.1. Densidad de energía compleja de Rihaczek.....	25
3.6.2. Densidad de energía real de Levin.....	26
3.7. Relaciones entre DTFs	27
4. DTFs de la clase cuadrática o de Cohen.....	30
4.1. La WVD como distribución prototipo de la clase cuadrática.....	30
4.1.1. Propiedades de la WVD.....	30
4.1.2. Limitaciones de la WVD.....	31
4.1.3. Dominios de definición de la WVD.....	33
4.2. Dominios de definición de la clase cuadrática.....	34
4.3. Dominio de ambigüedad y diseño de DTFs cuadráticas.....	37

4.3.1.	Filtros de núcleo separables.	40
4.3.2.	Propiedades y sus restricciones en el núcleo.	41
4.4.	Principales distribuciones cuadráticas.	43
4.4.1.	Núcleos de las principales distribuciones cuadráticas.	43
4.4.2.	Propiedades de las principales distribuciones cuadráticas.	44
5.	Estudio comparativo de diferentes DTFs cuadráticas.	47
5.1.	Comparación mediante una señal FM lineal simple.	47
5.2.	Comparación mediante una señal FM lineal múltiple.	62
5.3.	Comparación mediante una señal real.	76
5.3.1.	Silbido.	79
5.3.2.	Zumbidos.	92
6.	Conclusiones y líneas futuras.	112
6.1.	Conclusiones.	112
6.1.1.	Esencia del proyecto.	112
6.1.2.	Conocimientos adquiridos.	113
6.1.3.	Dificultades encontradas.	113
6.2.	Líneas futuras.	114
7.	Bibliografía.	115
8.	Apéndices.	116
	Apéndice A. Señal analítica.	116
	Apéndice B: Time-Frequency Toolbox versión 2 (tftb-02).	119

1. INTRODUCCIÓN.

1.1. Distribución Tiempo-Frecuencia (DTF).

1.1.1. Definición.

Una distribución tiempo-frecuencia (DTF) es una representación en la cual se muestra una señal como una función de dos variables, es decir, es una distribución cuyo dominio es el espacio de dos dimensiones (t, f) . Este espacio bidimensional proporciona una perspectiva combinada de las características temporales y espectrales de la señal.

El objetivo básico del análisis tiempo-frecuencia es determinar la concentración de energía de la señal a lo largo del eje de frecuencia para cada instante de tiempo. En un caso ideal, la distribución tiempo-frecuencia debe proveer información directa acerca de las componentes de frecuencia que ocurren para cualquier tiempo dado.

Para cualquier distribución tiempo-frecuencia la sección transversal que se obtiene al ser constante t debe mostrar la frecuencia o frecuencias presentes en el momento t , al igual que la sección transversal que se obtiene al ser constante f debe mostrar los momentos en los que la frecuencia f está presente.

Una DTF no sólo muestra el inicio y fin de tiempos y el rango de frecuencias, sino que también muestra claramente la variación en la frecuencia con el tiempo. Esta variación se puede describir por una función $f_i(t)$, llamada frecuencia instantánea (FI).

Al emplear las distribuciones tiempo-frecuencia hay que tener en cuenta que se tienen diferentes prestaciones en función de la señal que se esté analizando, y por este motivo, la elección de la distribución adecuada debe depender de la aplicación en la que se va a utilizar.

1.1.2. Necesidad.

La distribución tiempo-frecuencia es un tipo de distribución que se aplica a señales con contenido en frecuencia variante con el tiempo, y permite mostrar la forma en la cual se distribuye la energía de la señal en el espacio bidimensional tiempo-frecuencia [1]. Este tipo de distribución surge para solucionar las carencias de los dos tipos de distribuciones clásicas: La distribución en tiempo y la distribución en frecuencia.

La distribución en tiempo es útil porque permite representar una señal $s(t)$ en función del tiempo, y así obtener la energía instantánea de la señal, dada por $|s(t)|^2$, la cual muestra como la energía de la señal $(E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt)$ se distribuye a lo largo del tiempo.

A su vez, la distribución en frecuencia es útil para ver como la energía de la señal se distribuye en el dominio de la frecuencia. Esto es posible ya que mediante una transformada de Fourier (FT), expresada de la forma

$$S(f) = F_{t \rightarrow f}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (1.1)$$

se puede representar cualquier señal $s(t)$ en el dominio de la frecuencia.

La transformada de Fourier es un número complejo, siendo su magnitud el espectro de magnitud y su fase la fase del espectro. El cuadrado de la magnitud del espectro es el espectro de energía,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)S^*(f) df, \quad (1.2)$$

el cual muestra cómo la energía de la señal se distribuye en el dominio de la frecuencia.

En la representación en tiempo y la representación en frecuencia las variables t y f se tratan como mutuamente excluyentes, es decir, para obtener la representación en términos de una variable, la otra variable es "ignorada". Esto es un problema para el análisis de señales no estacionarias, es decir, señales con contenido en frecuencia variante con el tiempo, como en el caso de las tres señales prácticas siguientes:

1. Señal FM sinusoidal: Es una señal que se transmite sobre una portadora de frecuencia modulada. Si la señal moduladora es un tono puro, entonces la frecuencia instantánea de la señal modulada en función del tiempo es de la forma

$$f_i(t) = f_c + f_a \cos[2\pi f_m t + \emptyset] \quad (1.3)$$

donde t es el tiempo, $f_i(t)$ es la expresión de modulación de la frecuencia, f_c es la frecuencia de la portadora, f_a es la desviación de pico de la frecuencia, \emptyset es la fase de la señal moduladora, y la amplitud de la portadora es constante y unitaria.

2. Señal FM lineal: A este tipo de señales también se les llama **señales chirp**, y son señales que tienen una señal sinusoidal de duración total T , cuya frecuencia aumenta de f_0 a $f_0 + B$ o disminuye de f_0 a $f_0 - B$ a un ratio constante $\alpha = B/T$. Si se elige el origen de tiempo de modo que la señal comienza en $t = 0$, la expresión de modulación de la frecuencia se puede escribir de la forma

$$f_i(t) = f_0 \pm \alpha t; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.4)$$

3. Actuación musical: Una nota musical está formada por una serie de "componentes" de diferentes frecuencias, de las que la frecuencia más baja se denomina fundamental y el resto se llaman armónicos. Estas componentes están presentes durante un intervalo de tiempo específico, y puede variar en amplitud durante ese intervalo.

A este tipo de señales prácticas se les llama **señales no estacionarias**, y tienen en común que la frecuencia o "contenido en frecuencia" varía con el tiempo, es decir, hay una relación entre las dos variables f y t . Esta relación no se aprecia en las dos representaciones clásicas, al ser ambas variables excluyentes.

Si se representan estas señales no estacionarias en función del tiempo, puede verse una oscilación de la frecuencia a lo largo del tiempo, pero no se puede obtener una expresión para la variación de la frecuencia con el tiempo. En cambio, si se representan en función de la frecuencia se aprecian todas las frecuencias presentes en la señal, pero no se obtiene información sobre los tiempos de llegada de cada frecuencia.

Estas carencias son las que soluciona la distribución tiempo-frecuencia, indicada por $\rho(t, f)$, ya que las variables t y f no son mutuamente excluyentes, sino que están presentes juntas.

1.1.3. Propiedades.

Quizás lo más importante a la hora de analizar señales mediante distribuciones tiempo-frecuencia sea seleccionar cuál es la distribución tiempo-frecuencia más adecuada para una determinada aplicación, y para ello es necesario examinar si cumple con ciertas propiedades necesarias para dicha aplicación [2].

Existen varias categorías de propiedades ideales de las distribuciones tiempo-frecuencia, las cuales son las siguientes.

1.1.3.1. Invarianza.

Estas propiedades establecen que ciertas operaciones en la señal, como traslación, dilatación, o convolución, se deben preservar también en la DTF. Esto quiere decir que si la señal se cambia de alguna manera, entonces su DTF debería cambiar exactamente en la misma forma.

Las propiedades de esta categoría son:

1. Invarianza al desplazamiento en frecuencia (IF): Esta propiedad establece que si una señal se modula o se desplaza en frecuencia una cantidad f_0 , entonces la DTF de esta señal se debe desplazar f_0 en frecuencia, es decir, si

$$z_r(t) = z(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad (1.5)$$

entonces

$$\rho_{z_r}(t, f) = \rho_z(t, f - f_0) \quad (1.6)$$

2. Invarianza al desplazamiento en tiempo (IT): Esta propiedad establece que si una señal se traslada en tiempo una cantidad t_0 , entonces la DTF de esta señal se debe desplazar t_0 en tiempo, es decir, si

$$z_r(t) = z(t - t_0) \quad (1.7)$$

entonces

$$\rho_{z_r}(t, f) = \rho_z(t - t_0, f) \quad (1.8)$$

3. Invarianza a la escala: Esta propiedad establece que si el eje de tiempo de una señal se comprime por un factor de escala α , entonces el eje de tiempo de la DTF se debe comprimir por el mismo factor α , y su eje de frecuencia se expande por el factor inverso $1/\alpha$, es decir, si

$$z_r(t) = \sqrt{|\alpha|} z(\alpha t) \quad (1.9)$$

entonces

$$\rho_{z_r}(t, f) = \rho_z\left(\alpha t, \frac{f}{\alpha}\right) \quad (1.10)$$

4. Invarianza al desplazamiento hiperbólico: Esta propiedad establece que una DTF idealmente debería ser invariante a cambios hiperbólicos en el retraso de grupo de la señal. Si la transformada de Fourier de la señal sufre un cambio logarítmico en la fase, entonces su retraso de grupo sufrirá un desplazamiento hiperbólico, es decir $\tau_{z_r}(f) = \tau_z(f) + c/f$. De manera que una DTF ideal de una señal modulada en frecuencia logarítmicamente, debe corresponder a la DTF de la señal original pero con un desplazamiento temporal dispersivo igual al cambio hiperbólico en el retraso de grupo. Por lo que si

$$Z_r(f) = Z(f) e^{-j2\pi c \ln f / f_r} \quad (1.11)$$

entonces

$$\rho_{z_r}(t, f) = \rho_z\left(t - \frac{c}{f}, f\right) \quad (1.12)$$

5. Invarianza a la convolución: Si dos señales se convolucionan en tiempo, deben producir el efecto equivalente a convolucionar sus correspondientes *DTFs* en el tiempo, es decir, si

$$z_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)z(\tau)d\tau \quad (1.13)$$

entonces

$$\rho_{z_r}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_h(t - \tau, f)\rho_z(\tau, f) d\tau \quad (1.14)$$

6. Invarianza a la modulación: Si dos señales se modulan en el tiempo, sus transformadas de Fourier se convolucionan en frecuencia, por lo que esta propiedad establece que si dos señales se convolucionan en el dominio de la frecuencia, entonces la DTF de la señal resultante debe ser igual a la convolución en frecuencia de las dos *DTFs*, es decir, si

$$z_r(t) = h(t)z(t) \rightarrow Z_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f - \theta)Z(\theta)d\theta \quad (1.15)$$

entonces

$$\rho_{z_r}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_h(t, f - \theta)\rho_z(t, \theta)d\theta \quad (1.16)$$

1.1.3.2. Distribución estadística o de energía.

Estas propiedades establecen que para poder interpretar una distribución tiempo-frecuencia como una representación bidimensional de la energía de la señal, la DTF debe ser real, no negativa, y tener sus distribuciones marginales iguales a las densidades de energía temporal y espectral de la señal. Además, la DTF debe preservar la energía, media, varianza y otros momentos de alto orden de la densidad de energía temporal y espectral de la señal.

Las propiedades de esta categoría son:

1. Real (RE): Una DTF es real si es igual a su conjugada compleja para todas las señales.

$$\rho_z(t, f) = \rho_z^*(t, f) \quad (1.17)$$

2. No Negativa (NN): Es necesario que una DTF sea no negativa si va a interpretarse como una distribución bidimensional de la energía de la señal.

$$\rho_z(t, f) \geq 0 \quad (1.18)$$

3. **Tiempo marginal (TM):** Si se interpreta la DTF como una distribución de energía de dos dimensiones en el plano tiempo-frecuencia, entonces al integrar la variable de frecuencia debe dar como resultado la energía instantánea de la señal en el dominio del tiempo, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(t, f) df = |z(t)|^2 \quad (1.19)$$

4. **Frecuencia marginal (FM):** Si la DTF es la distribución bidimensional de energía de la señal, entonces al integrar el eje de tiempo debe resultar la función de densidad espectral de energía de la señal, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(t, f) dt = |Z(f)|^2 \quad (1.20)$$

5. **Energía global:** Si la DTF es una distribución de la energía de la señal en todo el plano tiempo-frecuencia, entonces al integrar la DTF se debe obtener la energía total de la señal, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(t, f) dt df = \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df = E_z \quad (1.21)$$

6. **Momentos en tiempo:** Esta propiedad establece que el valor del n-ésimo momento de tiempo de la energía instantánea de la señal, y el n-ésimo momento de tiempo de la DTF deben ser idénticos, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t^n \rho_z(t, f) dt df = \int_{-\infty}^{\infty} t^n |z(t)|^2 dt \quad (1.22)$$

7. **Momentos en frecuencia:** Esta propiedad establece que el valor del n-ésimo momento de la densidad espectral de potencia, y el n-ésimo momento de frecuencia de la DTF deben ser idénticos, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^n \rho_z(t, f) dt df = \int_{-\infty}^{\infty} f^n |Z(f)|^2 df \quad (1.23)$$

1.1.3.3. Análisis de señales.

Estas propiedades surgen de consideraciones necesarias para el procesamiento de señales. Una DTF debe tener el mismo soporte (diferente de cero) que la señal bajo análisis, es decir, igual duración y ancho de banda. Además, para cualquier instante de tiempo t , la frecuencia media debe ser igual a la frecuencia instantánea de la señal; mientras que el centro de gravedad de la DTF en la dirección del tiempo debe corresponder al retraso de grupo de la señal.

Las propiedades de esta categoría son:

1. Soporte finito de tiempo (TS): Si una señal está limitada en tiempo, es decir, si comienza en el instante t_1 y termina en t_2 , entonces una DTF ideal debe comenzar y terminar en el mismo tiempo, es decir, si

$$z(t) = 0, \quad \forall t \notin [t_1, t_2] \text{ con } t_1 < t_2 \quad (1.24)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = 0, \quad \forall t \notin [t_1, t_2] \text{ con } t_1 < t_2 \quad (1.25)$$

2. Soporte finito de frecuencia (FS): Si la transformada de Fourier de una señal es de banda limitada, entonces su DTF debe tener el mismo soporte diferente de cero en la frecuencia, es decir, si

$$|Z(f)| = 0, \quad \forall f \notin [f_1, f_2] \text{ con } f_1 < f_2 \quad (1.26)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = 0, \quad \forall f \notin [f_1, f_2] \text{ con } f_1 < f_2 \quad (1.27)$$

3. Frecuencia instantánea (FI): Esta propiedad establece que el primer momento normalizado en frecuencia de la DTF debe ser igual a la frecuencia instantánea de la señal. Así pues, el valor medio o centro de gravedad en la dirección de la frecuencia, debe corresponder a la frecuencia instantánea, es decir,

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f \rho_z(t, f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(t, f) df} = f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (1.28)$$

donde $\phi(t)$ es la fase de $z(t)$.

4. Retardo de tiempo (TD): Esta propiedad establece que el valor medio normalizado de la DTF o el centro de gravedad en la dirección del tiempo, debe ser igual al retardo de tiempo de la señal.

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \rho_z(t, f) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(t, f) dt} = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} \quad (1.29)$$

donde $\phi(f)$ es la fase de $Z(f)$.

5. Transformada de Fourier: Esta propiedad es equivalente a la propiedad de dualidad de la transformada de Fourier, y establece que la DTF de la señal dual $z(t) = X(t)$ debe ser igual pero con el tiempo y la frecuencia intercambiadas y con la variable de frecuencia negada, es decir, si

$$z(t) = H(t) \rightarrow Z(f) = h(-f) \quad (1.30)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = \rho_h(-f, t) \quad (1.31)$$

1.1.3.4. Localización.

Este conjunto de propiedades se refieren a la localización ideal que debería tener la DTF y sus capacidades de alta resolución. Estas propiedades establecen que si una señal está perfectamente concentrada en tiempo o frecuencia, entonces su DTF también debe estar perfectamente concentrada en el mismo tiempo o frecuencia, respectivamente.

Las propiedades de esta categoría son:

1. Localización en frecuencia: Esta propiedad establece que si la señal es una senoide compleja cuya transformada de Fourier está perfectamente concentrada alrededor de cierta frecuencia f_0 , entonces su DTF debe estar perfectamente concentrada alrededor de esa misma frecuencia, es decir, si

$$Z(f) = \delta(f - f_0) \quad (1.32)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = \delta(f - f_0) \quad (1.33)$$

2. Localización en tiempo: Esta propiedad establece que si la señal es un impulso perfectamente localizado en el tiempo t_0 , entonces su DTF también debe estar concentrada en el mismo tiempo, es decir, si

$$z(t) = \delta(t - t_0) \quad (1.34)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = \delta(t - t_0) \quad (1.35)$$

3. Localización de modulación lineal en frecuencia: Esta propiedad establece que si la transformada de Fourier de la señal es una modulación lineal en frecuencia, entonces su DTF debe estar perfectamente concentrada a lo largo del retraso de grupo lineal de la señal $\tau_z(f) = cf$, es decir, si

$$Z(f) = e^{-j\pi cf^2} \quad (1.36)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = \delta(t - cf) \quad (1.37)$$

4. Localización de modulación hiperbólica en frecuencia: Esta propiedad es útil para analizar señales moduladas en frecuencia con retraso de grupo hiperbólico, y establece que señales con espectro de fase logarítmico deben tener una DTF que sea perfectamente concentrada a lo largo del retraso de grupo hiperbólico, es decir, si

$$Z(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} e^{-j2\pi c \ln\left(\frac{f}{f_r}\right)} \text{ con } f > 0 \quad (1.38)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = \frac{1}{f} \delta\left(t - \frac{c}{f}\right) \text{ con } f > 0 \quad (1.39)$$

5. Convolución con señal modulada en frecuencia: Esta propiedad establece que la DTF de la señal obtenida con la convolución debe ser igual a la DTF de la señal, pero con el eje de tiempo ajustado al cambio dependiente de la frecuencia en el retraso de grupo y ocasionado con la convolución, es decir, si

$$z(t) = \int h(t - \tau) \sqrt{|c|} e^{j\pi c \tau^2} d\tau \quad (1.40)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = \rho_h\left(t - \frac{f}{c}, f\right) \quad (1.41)$$

6. Multiplicación con señal modulada en frecuencia: Esta propiedad establece que la DTF de la señal obtenida tras la multiplicación debe ser igual a la DTF de la señal, pero con el eje de frecuencias modificado de acuerdo al cambio dependiente del tiempo de la frecuencia instantánea de la señal, es decir, si

$$z(t) = h(t) e^{j\pi c t^2} \quad (1.42)$$

entonces

$$\rho_z(t, f) = \rho_h(t, f - ct) \quad (1.43)$$

1.1.3.5. *Productos internos.*

Esta propiedad se conoce como la fórmula de Moyal, o propiedad unitaria, y establece que las *DTFs* deben preservar las proyecciones de la señal, productos internos y métricas, las cuales se usan frecuentemente en detección, síntesis, teoría de aproximación y reconocimiento de patrones. Además establece que si dos funciones base son ortogonales, entonces sus respectivas *DTFs* también deben ser ortogonales.

La única propiedad de esta categoría es:

1. Fórmula de Moyal: Esta propiedad establece que una *DTF* ideal debe preservar los productos internos, por lo tanto es análoga al teorema de Parseval para la transformada de Fourier.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} z(t)h^*(t)dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(t, f)\rho_h^*(t, f)dt df \quad (1.44)$$

1.2. Clases de *DTFs*

Una distribución tiempo-frecuencia puede cumplir a la vez con varias propiedades de las diferentes categorías anteriores, sin embargo no cumplirá con todas las propiedades existentes. Se suele realizar una subdivisión de las distribuciones tiempo-frecuencia de acuerdo a las propiedades que cumplen. De acuerdo con esta subdivisión las principales clases de distribuciones tiempo-frecuencia son:

1. La clase de Cohen (o clase cuadrática): La mayoría de autores actualmente no hacen distinción entre la clase cuadrática o bilineal y la clase de cohen, sin embargo originalmente la clase de Cohen difería de la clase cuadrática en que debía satisfacer los marginales. Las distribuciones de esta clase se ajusta bien al análisis de ancho de banda constante.
2. La clase afín: Esta clase es la que mejor se ajusta para análisis multi-resolución.
3. La clase hiperbólica: Esta clase es útil para señales con retraso de grupo hiperbólico.
4. La clase de potencia: Esta clase es útil para señales con retraso de grupo de potencia.

El agrupar las *DTFs* en clases con propiedades comunes tiene ciertas ventajas. La principal ventaja es la utilidad a la hora de acotar la elección de la *DTF* adecuada para cada aplicación. Otro aspecto positivo es que cada clase de *DTFs* se puede definir

mediante una expresión común, diferenciando cada uno de los miembros de la clase por un “núcleo” distinto dentro de dicha expresión. De esta manera es posible examinar las propiedades de cada DTF estudiando únicamente su núcleo.

1.3. Aplicaciones de las DTFs

Una vez vistas de forma genérica las propiedades de una DTF, es conveniente saber qué propiedades, de las vistas en el apartado 1.1.3, debe cumplir una DTF en las principales aplicaciones. Para ello se debe empezar conociendo cuáles son las aplicaciones más comunes en el uso de DTFs, tal y como se muestran a continuación.

1. Analizar la señal sin procesar en el dominio (t, f) , a fin de identificar sus características, tales como variación en el tiempo, variación de frecuencia, número de componentes, etc.
2. Separar unas componentes de otras y del ruido de fondo, por filtrado en el dominio (t, f) .
3. Analizar las diferentes componentes por separado:
 - Seguimiento de la amplitud instantánea.
 - Seguimiento de la frecuencia instantánea.
 - Seguimiento del ancho de banda instantáneo (propagación de la energía sobre la FI).
4. Elegir un modelo matemático de la señal, que muestre claramente las características significativas, como la FI.

Estas aplicaciones se pueden llevar a cabo utilizando una DTF que sea real (expresión 1.17), que cumpla los marginales de tiempo y frecuencia (expresión 1.19 y 1.20), y que cumpla las propiedades de soporte de tiempo finito (expresión 1.24 y 1.25) y soporte de frecuencia finito (expresión 1.26 y 1.27), junto con las propiedades de frecuencia instantánea (expresión 1.28) y retardo de tiempo (expresión 1.29).

La clase de distribuciones más utilizada en estas aplicaciones es la clase cuadrática, ya que además de estas propiedades cumple muchas otras.

La clase cuadrática es la más conocida, y es muy interesante e importante de estudiar, ya que se usa en la mayoría de aplicaciones de procesamiento de señal. Por eso será la clase en la que se va a profundizar en los próximos apartados del proyecto.

2. Conceptos previos.

En este apartado se van a definir algunos conceptos que son importantes a la hora de estudiar posteriormente las distribuciones tiempo-frecuencia de la clase cuadrática, como el tipo de señales a analizar y algunas de sus características más importantes.

2.1. Señal analítica.

A la hora de analizar una señal mediante una distribución tiempo-frecuencia casi siempre se usa su asociado analítico en lugar de la señal real. Esto es así para poder obtener una frecuencia instantánea inequívoca, ya que el uso de la señal analítica suprime los términos causados por la interacción entre frecuencias positivas y negativas del espectro de la señal, como se explica en el **apéndice A**.

Por este motivo, durante el resto del proyecto, cuando se hable de analizar una señal mediante una distribución tiempo-frecuencia realmente se estará empleando su asociado analítico, dado por $z(t)$, en lugar de la señal real, dada por $s(t)$.

Una señal $z(t)$ se dice que es analítica si y sólo si

$$Z(f) = 0 \text{ para } f < 0 \quad (2.1)$$

donde $Z(f)$ es la transformada de Fourier de $z(t)$.

En otras palabras, una señal analítica no contiene frecuencias negativas, pero sí puede tener una componente espectral a la frecuencia cero (DC) [3].

Está demostrado que una señal

$$z(t) = s(t) + jy(t) \quad (2.2)$$

donde $s(t)$ e $y(t)$ son reales, es analítica con una componente DC real, si y sólo si

$$Y(f) = (-j \operatorname{sgn}(f))S(f) \quad (2.3)$$

donde $S(f)$ e $Y(f)$ son las FTs de $s(t)$ e $y(t)$, respectivamente, y donde

$$\operatorname{sgn}(\xi) = \begin{cases} -1 & \text{si } \xi < 0 \\ 0 & \text{si } \xi = 0 \\ +1 & \text{si } \xi > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Esta relación entre las transformadas de Fourier de $s(t)$ e $y(t)$ se conoce como transformada de Hilbert, y se escribe de la forma

$$y(t) = \mathcal{H}\{s(t)\} \quad (2.5)$$

La transformada de Hilbert introduce un retardo de fase de 90 grados para frecuencias positivas y de -90 grados para frecuencias negativas.

Con esto podemos decir que una señal es analítica con una componente DC real si y sólo si su parte imaginaria es la transformada de Hilbert de su parte real. Esto implica que ahora dada una señal real $s(t)$, se puede construir una señal compleja y analítica de la forma

$$z(t) = s(t) + j\mathcal{H}\{s(t)\} \quad (2.6)$$

A esta $z(t)$ se le denomina señal analítica "correspondiente a" o "asociado con" la señal real $s(t)$. Como ya se ha dicho, será esta $z(t)$ la que se usará al emplear una DTF para analizar cualquier señal real $s(t)$.

2.2. Señales de una componente y de varias componentes.

Una señal de una sola componente, es decir con una sola frecuencia en cualquier instante de tiempo, se describe en el dominio (t, f) por una sola "línea", correspondiente a una región alargada de concentración de energía.

Dicha señal de una sola componente tiene un asociado analítico de la forma

$$z(t) = a(t)e^{j\phi(t)} \quad (2.7)$$

donde $\phi(t)$ es diferenciable, y $a(t)$ (amplitud instantánea) es real y positiva. Si $s(t)$ en sí es real, se puede expresar como

$$s(t) = a(t) \cos \phi(t) \quad (2.8)$$

Una señal de M componentes se puede describir como la suma de M señales de una sola componente.

$$s(t) = \sum_{k=1}^M a_k(t) \cos \phi_k(t) \quad (2.9)$$

2.3. Frecuencia instantánea (FI).

La frecuencia instantánea (FI) de una señal indica la frecuencia dominante de la señal en un momento dado.

En el caso de una señal de una sola componente la frecuencia instantánea será

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f \rho_z(t, f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(t, f) df} \quad (2.10)$$

donde $\phi(t)$ es la fase instantánea de la señal.

La ecuación 2.10 es válida sólo para señales de una sola componente. En el caso de señales de varias componentes se puede tener una frecuencia dominante por cada componente. En dicho caso la frecuencia instantánea no será la suma de la frecuencia instantánea de cada componente, sino que se obtendrá una FI distinta para cada una de ellas.

2.4. Frecuencia media.

Anteriormente se calculó la frecuencia instantánea (FI). Sin embargo, ésta se aplica a un tono o una senoide modulada, mientras que la frecuencia media se aplica al espectro de una señal de corta duración.

Si $z(t)$ es una señal analítica con transformada de Fourier

$$Z(f) = |Z(f)|e^{j\phi(f)} \quad (2.11)$$

Entonces la frecuencia media de $z(t)$ es

$$f_m(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (2.12)$$

Puede verse como la expresión obtenida en el apartado 2.3 para la frecuencia instantánea es igual a esta expresión de la frecuencia media, sin embargo la interpretación física no es la misma, ya que se aplica a señales diferentes.

2.5. Retardo de tiempo (TD).

Al igual que es interesante conocer la frecuencia dominante de la señal en un momento dado (FI), también es interesante conocer el caso contrario o inverso, es decir, el tiempo dominante cuando una frecuencia dada se produce (retardo de tiempo TD).

Si $z(t)$ es una señal analítica con transformada de Fourier $Z(f)$, entonces el retardo de tiempo (TD) de $z(t)$, que viene dado por $\tau_d(f)$ es

$$\tau_d(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} \quad (2.13)$$

donde $\theta(f) = \arg Z(f)$.

2.6. Retardo de grupo.

Si se quiere calcular el retardo de un impulso, entonces se calcula el retardo de tiempo. Sin embargo, si se quiere obtener el retardo de la envolvente de una señal de banda estrecha, entonces es necesario calcular el retardo de grupo.

Para ello, si $z(t)$ es una señal analítica con transformada de Fourier

$$Z(f) = |Z(f)|e^{j\phi(f)} \quad (2.14)$$

Entonces el retardo de grupo (GD) de $z(t)$, que viene dado por $\tau_g(f)$ es

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} \quad (2.15)$$

donde $\phi(f) = \arg Z(f)$.

Puede verse como la expresión del retardo de grupo es igual a la obtenida en el apartado 2.5 para el retardo de tiempo, en cambio, la interpretación física no es la misma, ya que el retardo de grupo no se aplica a un impulso, sino a señales de banda estrecha. En el caso de señales de banda estrecha el retardo de tiempo (TD) será

$$\tau_d(f) = -\frac{1}{2\pi f} \phi(f) \quad (2.16)$$

2.7. Principio de incertidumbre y producto BT.

El principio de incertidumbre está estrechamente relacionado con las propiedades de la transformada de Fourier (TF), las cuales establecen una relación inversa entre el dominio temporal y el frecuencial. Esto implica que si se cambia la descripción temporal de una señal, su representación en el dominio frecuencial cambia de manera inversa, y viceversa. Esta relación inversa impide que se pueda especificar arbitrariamente una señal en ambos dominios, por ejemplo eligiendo la duración y el ancho de banda de una señal.

La duración T de una señal se define como el menor rango de tiempos para el cual $s(t) \neq 0$, y el ancho de banda B de una señal se define como el menor rango de frecuencias para el cual $S(f) \neq 0$.

Sin embargo, con esta definición de B y T debido al principio de incertidumbre no se pueden ajustar ambos parámetros de forma arbitraria, puesto que están relacionados de forma inversa. De hecho, una duración finita implica ancho de banda infinito y viceversa, como se demuestra a continuación.

Una señal limitada en tiempo, de duración T centrada en el tiempo $t = 0$, se puede expresar como

$$s_T(t) = s(t) \text{rect} \left[\frac{t}{T} \right] \quad (2.17)$$

donde el subíndice T indica la duración. La FT de $S_T(t)$ será

$$S_T(f) = S(f) * T \text{sinc}(fT) \quad (2.18)$$

donde $*$ denota convolución. Al ver la expresión anterior de $S_T(f)$ se puede apreciar como el ancho de banda redundante será infinito ya que la sinc tiene una extensión infinita.

En el caso contrario, al tener un ancho de banda finito también se obtiene una duración infinita. Si se tiene una señal con ancho de banda limitado, con un ancho de banda B centrado en el origen, se puede expresar en el dominio de la frecuencia como

$$S_B(f) = S(f) \text{rect} \left[\frac{f}{B} \right] \quad (2.19)$$

Realizando la IFT se obtiene la señal en el dominio del tiempo, la cual se expresa de la forma

$$s_B(t) = s(t) * B \text{sinc}(Bt) \quad (2.20)$$

donde puede verse como la señal tiene una duración infinita, al aparecer de nuevo la sinc.

En realidad cualquier señal práctica debe tener un principio y un fin (duración finita), y un rango de frecuencia dentro del equipo de medición (un ancho de banda finito). Debido al principio de incertidumbre esto no es posible con las definiciones estrictas de B y T , por lo tanto es necesario relajar ambas definiciones para obtener una duración finita y un ancho de banda finito útiles. Esta relajación se puede realizar de diferentes formas:

1. Se podría definir la duración y el ancho de banda como **duración efectiva y ancho de banda efectivo**. En cuyo caso, la duración efectiva será el tiempo en el que se produce una fracción nominal de la energía de la señal, es decir

$$T_e^2 = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt \quad (2.21)$$

donde E_s es la energía de la señal.

Y el ancho de banda efectivo será el rango de frecuencias en el que se produce una fracción nominal de la energía de la señal.

$$B_e^2 = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |S(f)|^2 df \quad (2.22)$$

2. Slepian propuso definiciones de duración y de ancho de banda basadas en la precisión del aparato de detección y medición, de forma que para obtener la duración de Slepian hay que definir un "truncamiento de tiempo" de $s(t)$ con una señal $g(t)$, como el siguiente

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ s(t) & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{si } t > t_2 \end{cases} \quad (2.23)$$

con $t_2 > t_1$, de manera que la duración de $\hat{s}(t)$ es $T_s = t_2 - t_1$. Por lo tanto. la duración de Slepian de $s(t)$ es la duración del menor truncamiento de tiempo $\hat{s}(t)$ que el aparato no puede distinguir de $s(t)$.

La obtención del ancho de banda de Slepian se hace de forma análoga, definiendo en este caso un "truncamiento de frecuencias" de $S(f)$ con una señal $G(f)$ como el siguiente

$$\hat{S}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f < f_1 \\ S(f) & \text{si } f_1 \leq f \leq f_2 \\ 0 & \text{si } f > f_2 \end{cases} \quad (2.24)$$

donde $f_2 > f_1$, de manera que el ancho de banda de $\hat{S}(f)$ según Slepian es $B_s = f_2 - f_1$. Por lo tanto, el ancho de banda de Slepian de $S(f)$ es el ancho de banda de la mayor banda estrecha de la frecuencia de truncamiento $\hat{S}(f)$ que el aparato no puede distinguir de $S(f)$.

Con cualquiera de las definiciones anteriores se puede obtener un ancho de banda finito y una duración finita. Y sea cual sea la definición que se adopte, el producto duración-ancho de banda (BT) será constante para cierto tipo de señales, de manera que si se escala el eje de tiempos por un factor α el eje de frecuencias se escala por el factor inverso $1/\alpha$.

Dado que el producto BT es constante no se pueden elegir ambos parámetros arbitrariamente, ni se puede reducir el producto duración-ancho de banda de manera indefinida.

Para el caso particular de señales de energía infinita, y con la definición de B y T dadas como duración efectiva y ancho de banda efectivo, se cumple que

$$B_e T_e \geq \frac{1}{4\pi} \quad (2.25)$$

Esta relación inversa entre B y T, producida por el principio de incertidumbre, es el motivo por el que en una distribución tiempo-frecuencia no se puede obtener una resolución perfecta. Si se quiere ajustar la resolución en un dominio se tiene que reducir la ventana de filtrado en ese dominio, lo que lleva a una pérdida de resolución en el otro dominio al perder la señal su "localidad".

3. DTFs fundamentales.

En este apartado se va a estudiar la formulación de las principales *DTFs* cuadráticas, y finalmente se verá como, aunque se empleen diferentes enfoques, todas las distribuciones se pueden relacionar con la distribución de Wigner-Ville. Esta relación es la base para la formulación general de la clase cuadrática, que se estudiará en el capítulo 4.

3.1. Distribución de Wigner.

Esta distribución se llama así en honor a Wigner, quién la propuso en 1932 en un contexto de mecánica cuántica [4].

Para obtener la distribución de Wigner se parte de la idea de que una distribución tiempo-frecuencia, dada por ρ_z , es una función que depende de la frecuencia f y representa una parte del espectro, por lo que se podría decir razonablemente que ρ_z es la TF de una función relacionada con la señal, a la que se llamará señal núcleo y viene dada por $K_z(t, r)$. Por lo tanto se podría escribir la DTF como

$$\rho_z(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{K_z(t, r)\} \quad (3.1)$$

donde las variables t, f y r son el tiempo, la frecuencia y el retardo respectivamente.

Ahora solo habría que encontrar la señal núcleo adecuada. Para ello, Wigner utiliza una señal FM compleja, ya que es el caso más sencillo. Su expresión matemática es

$$s(t) = e^{j\vartheta(t)} \quad (3.2)$$

y su frecuencia instantánea (FI)

$$f_i(t) = \frac{\vartheta'(t)}{2\pi} \quad (3.3)$$

Se sabe que la DTF de $s(t)$ en un momento dado debe ser la función delta en la frecuencia instantánea, de manera que el “espectro instantáneo” se reduce a la TF ordinaria.

$$\rho_z(t, f) = \delta(f - f_i(t)) \quad (3.4)$$

Realizando la transformada inversa de Fourier se tiene

$$K_z(t, r) = F_{r \rightarrow f}^{-1}\{\delta(f - f_i(t))\} = e^{j2\pi f_i(t)r} = e^{j\vartheta'(t)r} \quad (3.5)$$

Ahora se calcula $\varnothing'(t)$. Para ello, por definición se tiene el límite

$$\varnothing'(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varnothing\left(t + \frac{r}{2}\right) - \varnothing\left(t - \frac{r}{2}\right)}{r} \quad (3.6)$$

si se utiliza la aproximación central de diferencias finitas (CFD) se obtiene

$$\varnothing'(t) \approx \frac{1}{r} \left[\varnothing\left(t + \frac{r}{2}\right) - \varnothing\left(t - \frac{r}{2}\right) \right] \quad (3.7)$$

Una vez calculada $\varnothing'(t)$ se obtiene la señal núcleo que se buscaba, y que es

$$K_z(t, r) = e^{j\varnothing\left(t + \frac{r}{2}\right)} e^{-j\varnothing\left(t - \frac{r}{2}\right)} = s\left(t + \frac{r}{2}\right) s^*\left(t - \frac{r}{2}\right) \quad (3.8)$$

Finalmente, se obtiene la expresión de la distribución de Wigner (WD) a partir de la señal núcleo, la cual será

$$\rho_z(t, f) = F_{r \rightarrow f} \left\{ s\left(t + \frac{r}{2}\right) s^*\left(t - \frac{r}{2}\right) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{r}{2}\right) s^*\left(t - \frac{r}{2}\right) e^{-j2\pi fr} dr \quad (3.9)$$

Puede verse en la ecuación 3.9 como la señal interviene dos veces en la obtención de la distribución de Wigner, por eso tanto esta distribución como las que deriven de ella serán consideradas distribuciones cuadráticas.

La aproximación central de diferencias finitas (CFD), utilizada en la expresión 3.7, es válida tanto si \varnothing es lineal (\varnothing' constante) como si es cuadrática (\varnothing' lineal). De manera que, se puede decir que la distribución de Wigner ofrece una estimación "imparcial" de la FI para una señal FM lineal o chirp, ya que \varnothing' se relaciona con la frecuencia instantánea mediante la expresión 3.3.

Mediante esta distribución surgen componentes no esperadas debido a la no linealidad de la WD. Estas componentes son mayores en señales reales debido a la interacción entre los términos de frecuencias positivas y negativas.

3.2. Distribución de Wigner-Ville.

En la distribución de Wigner-Ville se añade a la distribución de Wigner la contribución que Ville obtuvo en 1948 en un contexto de procesamiento de señal.

Ville tuvo en cuenta que una señal puede tener un contenido de frecuencia dependiente del tiempo, y buscó un "espectro instantáneo" que tuviera los atributos de una densidad de energía y satisficiera las condiciones marginales dadas en la ecuación 1.19 y la ecuación 1.20.

Mediante relaciones conocidas de los momentos de una función de densidad de probabilidad y su función característica, Ville pudo demostrar que el uso del analítico asociado en la distribución de Wigner satisfacía estas propiedades deseadas. Además

comprobó que el analítico asociado elimina las interferencias que producía la distribución de Wigner para señales reales de una componente, y reducía las interferencias en señales de varias componentes, como se muestra en el **apéndice A**.

De esta manera, con la contribución de Ville se obtiene la muy conocida distribución de Wigner-Ville, que es la distribución que más propiedades cumple. La expresión de la distribución de Wigner-Ville es

$$\rho_z(t, f) = W_z(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{K_z(t, r)\} = F_{r \rightarrow f}\left\{z\left(t + \frac{r}{2}\right)z^*\left(t - \frac{r}{2}\right)\right\} \quad (3.10)$$

donde $z(t)$, indica que se trata del analítico asociado de la señal real. A la señal núcleo $K_z(t, r)$ se le llama **función de autocorrelación instantánea (FAI)**.

También se puede realizar el cálculo de la distribución de Wigner-Ville en términos del espectro. Para ello además de las variables tiempo (t), frecuencia (f) y retardo (r) se introduce la variable Doppler (v); esta variable representa el desplazamiento en frecuencia al igual que el retardo representa el desplazamiento en tiempo.

Para obtener la distribución de Wigner-Ville en términos del espectro, primero se obtiene la señal núcleo en términos del espectro, de la forma

$$k_z(v, f) = F_{t \rightarrow v}\{W_z(t, f)\} = \iint z\left(t + \frac{r}{2}\right)z^*\left(t - \frac{r}{2}\right)e^{-j2\pi(fr+vt)}dt dr \quad (3.11)$$

A continuación, se resuelve la integral doble mediante el cambio de variable

$$x = t + \frac{r}{2}; \quad y = t - \frac{r}{2}; \quad dt dr = dx dy \quad (3.12)$$

y se obtiene

$$k_z(v, f) = Z\left(f + \frac{v}{2}\right)Z^*\left(f - \frac{v}{2}\right) \quad (3.13)$$

donde $Z(f) = F\{z(t)\}$. A la señal núcleo $k_z(v, f)$ se le llama **función de autocorrelación espectral (FAE)**.

Finalmente, a partir de la función de autocorrelación espectral obtenida 3.13, se tiene la distribución de Wigner-Ville en términos del espectro, cuya expresión es

$$W_z(t, f) = F_{v \rightarrow t}^{-1}\{k_z(v, f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} Z\left(f + \frac{v}{2}\right)Z^*\left(f - \frac{v}{2}\right)e^{j2\pi vt}dv \quad (3.14)$$

Hay que tener en cuenta que para señales prácticas se espera que la señal sea limitada tanto en tiempo como en frecuencia, por eso se asume que la señal $z(t)$ esta enventanada en tiempo y/o frecuencia.

La señal enventanada se expresa de la forma

$$z_w(t) = z(t)w(t - t_0) \quad (\text{tiempo}) \quad (3.15)$$

$$Z_w(f) = Z(f)H(f - f_0) \quad (\text{frecuencia}) \quad (3.16)$$

Para el caso del enventanado en tiempo se obtiene la distribución de Wigner-Ville enventanada o **distribución Pseudo Wigner-Ville (PWVD)**, la cual será

$$W_{z_w}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(r)K_z(t, r)e^{-j2\pi fr} dr \quad (3.17)$$

con

$$g_2(r) = w\left(\frac{r}{2}\right)w^*\left(-\frac{r}{2}\right) \quad (3.18)$$

La distribución Pseudo Wigner-Ville se interpreta como una distribución de Wigner-Ville en tiempo corto, usando una ventana de análisis deslizante. Con esta distribución no se atenúan los términos que oscilan en la dirección del tiempo, pero si los que oscilan en la dirección de la frecuencia, aunque debido al suavizado se pierden propiedades que sí cumplía la distribución de Wigner-Ville.

En el caso del enventanado en frecuencia se obtiene la **distribución de Wigner-Ville filtrada**, la cual será

$$W_{z_H}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(v)Z\left(f + \frac{v}{2}\right)Z^*\left(f - \frac{v}{2}\right)e^{j2\pi vt} dv \quad (3.19)$$

con

$$G_1(v) = H\left(\frac{v}{2}\right)H^*\left(-\frac{v}{2}\right) \quad (3.20)$$

Este tipo de enventanado conlleva un suavizado en la dirección de tiempo pero no en frecuencia, y al igual que antes se pierden propiedades que tenía la distribución de Wigner-Ville.

Se puede combinar el efecto de ambos enventanados mediante la multiplicación en el dominio (v, r) por

$$g(v, r) = G_1(v)g_2(r) \quad (3.21)$$

Con la combinación de estos enventanados se obtiene la **distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada (SPWVD)**, la cual se define como una distribución Pseudo Wigner-Ville con un filtrado adicional en la dirección del tiempo.

La distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada consigue eliminar todas las interferencias o términos cruzados, que se obtienen en una señal de varias componentes con la distribución de Wigner-Ville, sin embargo tiene como inconveniente la pérdida de propiedades y pérdida de la gran resolución que se obtenía con la distribución de Wigner-Ville.

3.3. Transformada de Fourier en tiempo corto (STFT). Espectrograma.

La idea principal de la transformada en tiempo corto es asumir la señal $s(t)$ como estacionaria en una pequeña ventana de tiempo. El cálculo de la transformada consiste en multiplicar la señal $s(t)$ por una ventana de análisis, y posteriormente calcular la transformada de Fourier de la señal enventanada.

Dicho de otro modo, si se considera una señal $s(r)$ y una ventana $w(r)$, cuyas transformadas de Fourier sean $S(f)$ y $W(f)$ respectivamente, se puede obtener el espectro localizado de $s(r)$ en el instante $r = t$. Para ello se multiplica la señal por la ventana centrada en $r = t$, y a continuación se realiza la TF con respecto a r , es decir

$$F_s^w(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{s(r)w(r - t)\} \quad (3.22)$$

A la expresión dada en 3.22 se le llama transformada de Fourier en tiempo corto (STFT), y al cuadrado de esta magnitud se le llama **espectrograma**.

$$S_s^w(t, f) = |F_s^w(t, f)|^2 \quad (3.23)$$

El espectrograma es no lineal, pero la no linealidad se introduce sólo en el último paso, al tomar la magnitud al cuadrado. Esto produce que únicamente aparezcan componentes indeseadas significativas en el caso excepcional de una señal de varias componentes, en la cual las componentes están lo suficientemente juntas como para que los espectrogramas se superpongan.

La ventana de observación $w(r)$ permite la localización del espectro en el tiempo, pero también emborrona el espectro de la frecuencia, de acuerdo con la relación de incertidumbre. De manera que se establece un límite para el área mínima de la ventana tiempo-frecuencia, lo que lleva a buscar un equilibrio entre la resolución en tiempo y la resolución en frecuencia.

Por ejemplo, en una modulación FM si la ventana es grande en comparación con la señal de modulación, la resolución en frecuencia es suficiente para mostrar los tonos de banda lateral ("aspecto multi-componente" de la señal), pero la resolución en tiempo es insuficiente para demostrar la expresión de FM ("aspecto mono-componente"). En cambio, si la ventana es pequeña, comparada con la señal de modulación, la resolución en tiempo es suficiente para demostrar la expresión de FM,

pero la resolución en frecuencia es insuficiente para mostrar los tonos de banda lateral.

El propósito de la ventana es obtener un intervalo de tiempo de la señal durante el cual las características espectrales son casi constantes. Si la ventana es demasiado grande, no logra capturar las variaciones más rápidas del contenido espectral. Si es demasiado pequeña se emborrona la DTF en la dimensión de la frecuencia, sin una mejora proporcional en detalle en la dimensión temporal. Cuanto más rápido sean los cambios en el contenido espectral más corta debe ser la ventana.

Por lo tanto, para una señal de una sola componente y amplitud constante, la duración de la ventana óptima es inversamente proporcional a la velocidad de cambio de la FI. Más precisamente, si la ventana es rectangular y tiene una duración total de Δ , se puede demostrar que el valor

$$\Delta = \sqrt{2} \left| \frac{df_i(t)}{dt} \right|^{-1/2} \quad (3.24)$$

es óptimo, en el sentido de que minimiza el ancho a media altura de la “línea” resultante en el plano (t, f).

Para una señal FM lineal o chirp, la duración de la ventana óptima se simplifica a

$$\Delta = \sqrt{2T/B} \quad (3.25)$$

donde T es la duración de la señal y B es el ancho de banda de la señal.

El uso de esta ventana óptima es un inconveniente porque requiere el conocimiento de la FI, y este conocimiento podría obtenerse sólo para algunos tipos de análisis de tiempo-frecuencia. Por otra parte, si la expresión de la FI no es lineal, como en el caso de una señal modulada con una senoide, la duración óptima de la ventana varía con el tiempo, y aunque es posible variar la longitud de la ventana del espectrograma con el tiempo e incluso con la frecuencia, estos procedimientos tienen un costo en eficiencia computacional.

3.4. Sonograma.

Se ha visto que el espectrograma se concebía como una función de la frecuencia con dependencia de la sincronización de una ventana. El sonograma es el caso inverso, es decir, será una función del tiempo con dependencia de la sintonización de un filtro.

Para ello, se considera una señal $s(t)$ con espectro $S(v)$, y un filtro paso bajo con respuesta al impulso $h(t)$ y función de transferencia $H(v)$. Para extraer la “componente” paso banda de $s(t)$ a la frecuencia $v = f$ se multiplica el espectro de la

señal por la función filtro desplazada, y posteriormente se hace la transformada inversa de Fourier, es decir

$$B_s^H(t, f) = F_{t \rightarrow v}^{-1}\{S(v)H(v - f)\} \quad (3.26)$$

Esta señal puede ser entendida como la salida compleja de un filtro paso banda con frecuencia central +f.

Al cuadrado de esta magnitud se le llama sonograma

$$S_s^{(H)}(t, f) = |B_s^H(t, f)|^2 \quad (3.27)$$

Para el sonograma, el ancho de banda óptimo del filtro paso banda se relaciona con el retardo de tiempo, de la misma manera que la longitud de la ventana óptima del espectrograma se relaciona con la frecuencia instantánea.

Al igual que el espectrograma, el sonograma es no lineal, pero la no linealidad se introduce sólo en el último paso y no da lugar a componentes indeseadas.

El espectrograma y el sonograma son iguales si la función ventana del espectrograma es igual a la respuesta al impulso del filtro. Esto ocurre si

$$h(t) = w(-t) \quad (3.28)$$

3.5. Distribución Page y Potencia Espectral Instantánea.

Este enfoque intenta definir una especie de "espectro de funcionamiento" que tenga en cuenta las variaciones del espectro de la señal cuando aumenta el tiempo t.

Para ello, dada una señal $s(t)$ se puede definir una "transformada corriente" $S_-(t, f)$ como la TF de la señal s hasta el tiempo t, es decir

$$S_-(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{s_t(\theta)\} = \int_{-\infty}^t s(\theta)e^{-j2\pi f\theta} d\theta \quad (3.29)$$

donde $s_t(\theta)$ es una "señal auxiliar" dada por

$$s_t(\theta) = \begin{cases} s(\theta) & \text{si } \theta \leq t \\ 0 & \text{si } \theta > t \end{cases} \quad (3.30)$$

Al igual que el espectro de energía es la magnitud al cuadrado de la FT, el espectro de energía corriente, dado por $e_s(t, f)$, será la magnitud al cuadrado de la transformada corriente, es decir

$$e_s(t, f) = |S_-(t, f)|^2 = S_-(t, f)S_-(t, f)^* \quad (3.31)$$

Si se deriva respecto al tiempo esta expresión, se obtiene la siguiente potencia

$$\begin{aligned} P_s(t, f) &= \frac{\partial}{\partial t} [|S_-(t, f)|^2] \\ &= S_-(t, f) \frac{\partial}{\partial t} [S_-(t, f)^*] + S_-(t, f)^* \frac{\partial}{\partial t} [S_-(t, f)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

es decir,

$$P_s(t, f) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left| \int_{-\infty}^t s(\theta) e^{-j2\pi f \theta} d\theta \right|^2 \right] \quad (3.33)$$

Esta $P_s(t, f)$ es conocida como **Distribución Page** en honor a su descubridor, y al ser la derivada respecto al tiempo de un espectro de energía dependiente del tiempo, podría entenderse como una especie de espectro de potencia dependiente del tiempo.

Se puede obtener la expresión alternativa

$$P_s(t, f) = 2\text{Re}\{s^*(t)S_-(t, f)e^{j2\pi ft}\} = 2\text{Re}\left\{ \int_0^\infty s^*(t)s(t-r)e^{j2\pi fr} dr \right\} \quad (3.34)$$

Además, si $s(t)$ es real se tiene

$$P_s(t, f) = 2 \int_0^\infty s^*(t)s(t-r)\cos(2\pi fr)dr \quad (3.35)$$

Esta distribución puede tomar valores negativos, que son incompatibles con la noción de una distribución de energía, pero perfectamente coherente con la idea de un gradiente de energía como se define en la ecuación 3.33.

3.6. Densidad de energía.

3.6.1. Densidad de energía compleja de Rihaczek.

En busca de una DTF localizada en el tiempo y la frecuencia, Rihaczek consideró la energía de una señal determinista compleja sobre rangos finitos de t y f , e hizo esos rangos infinitesimales, consiguiendo lo que él llamó una densidad de energía compleja.

La energía de una señal compleja $z(t)$, con transformada de Fourier $Z(f)$, es

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) z(t)^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \int_{-\infty}^{\infty} Z^*(f) e^{-j2\pi ft} df dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(t, f) dt df \end{aligned} \quad (3.36)$$

Donde la función de densidad de energía, $R_z(t, f)$, es definida por

$$R_z(t, f) = z(t) Z^*(f) e^{-j2\pi ft} \quad (3.37)$$

A $R_z(t, f)$ se le llama **Distribución de Rihaczek (RD)**. Se puede obtener la expresión alternativa

$$R_z(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) z^*(t-r) e^{-j2\pi fr} dr \quad (3.38)$$

La RD satisface las condiciones marginales

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_z(t, f) df = |z(t)|^2 \quad (3.39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_z(t, f) dt = |Z(f)|^2 \quad (3.40)$$

Si se integran las ecuaciones 3.39 y 3.40 respecto al tiempo y a la frecuencia respectivamente se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(t, f) df dt = \int_{t_1}^{t_2} |z(t)|^2 dt \quad (3.41)$$

$$\int_{f_1}^{f_2} \int_{-\infty}^{\infty} R_z(t, f) dt df = \int_{f_1}^{f_2} |Z(f)|^2 df \quad (3.42)$$

El lado derecho de la ecuación 3.41 es la energía en el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 , mientras que el lado derecho de la ecuación 3.42 es la energía en la banda de frecuencia entre f_1 y f_2 . Estas dos ecuaciones indican que $R_z(t, f)$ puede interpretarse como una densidad de energía en un intervalo de tiempo arbitrario y una arbitraria banda de frecuencia.

3.6.2. Densidad de energía real de Levin.

La distribución Levin (LD) es simplemente la parte real de la Distribución de Rihaczek. De manera que, al tomar la parte real de la RD, ecuación 3.37, se obtiene la distribución de Levin

$$L_z(t, f) = \text{Re}\{z(t) Z^*(f) e^{-j2\pi ft}\} \quad (3.43)$$

O la expresión alternativa

$$L_z(t, f) = \text{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} z(t) z^*(t-r) e^{-j2\pi fr} dr\right\} \quad (3.44)$$

Puesto que la energía es una cantidad real, la parte real de la RD es más significativa que la parte imaginaria o la magnitud. De ahí que un "grafico de la RD" sea por lo general un grafico de la parte real, es decir la LD.

Realmente los picos de la DTF según la RD y la LD no están confinados a la expresión de la FI, ya que presentan muchas características espurias. Por ese motivo, dado que la RD/LD realiza una mala representación para una señal simple, se considera la RD y la LD únicamente como interés teórico.

3.7. Relaciones entre DTFs

Hasta ahora, se han obtenido las diferentes DTFs cuadráticas mediante diferentes enfoques. Sin embargo, si se usa el enfoque de la "señal núcleo" que usaba Wigner en el apartado 3.1, se puede escribir cualquier DTF, dada por $\rho_z(t, f)$, de la forma

$$\rho_z(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{R_z(t, r)\} \quad (3.45)$$

donde $R_z(t, r)$ se obtendrá simplemente tomando la FT inversa de $\rho_z(t, f)$ en relación a la frecuencia. En el caso de la WVD $R_z(t, r)$ es la función de autocorrelación instantánea (IAF), dado por $K_z(t, r)$. En los demás casos, se le podría llamar a $R_z(t, r)$ IAF suavizada. La razón de este nombre se hará evidente a medida que se relacione $R_z(t, r)$ con $K_z(t, r)$ para cada una de las DTFs ya definidas.

Para obtener $R_z(t, r)$, en el caso de un **espectrograma** con función ventana w se puede emplear la notación general siguiente

$$\rho_z(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{z(r)w(r-t)\} [F_{r \rightarrow f}\{z(r)w(r-t)\}]^* \quad (3.46)$$

De manera que, al realizar la IFT ($f \rightarrow r$) para obtener $R_z(t, r)$ se tiene

$$\begin{aligned} R_z(t, r) &= [z(r)w(r-t)] * [z^*(-r)w^*(-r-t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(\lambda)w(\lambda-t)z^*(\lambda-r)w^*(\lambda-r-t)d\lambda \end{aligned} \quad (3.47)$$

Si se realiza la convolución, teniendo en cuenta que $\lambda = u + \frac{r}{2}$ en el dominio de la convolución, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} R_z(t, r) &= \int_{-\infty}^{\infty} w^*\left(t-u+\frac{r}{2}\right)w\left(t-u-\frac{r}{2}\right)z\left(u+\frac{r}{2}\right)z^*\left(u-\frac{r}{2}\right)du \\ &= G(t, r) * K_z(t, r) \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde

$$G(t, r) = w^*\left(t+\frac{r}{2}\right)w\left(t-\frac{r}{2}\right) \quad y \quad K_z(t, r) = z\left(t+\frac{r}{2}\right)z^*\left(t-\frac{r}{2}\right) \quad (3.49)$$

A $G(t, r)$ se le llama **núcleo tiempo-retardo**, y es con lo que hay que convolucionar en tiempo la IAF para obtener la IAF suavizada.

En el caso de la **WVD**, se tiene

$$R_z(t, r) = K_z(t, r) = \delta(t) * K_z(t, r) = G(t, r) * K_z(t, r) \quad (3.50)$$

Por lo que

$$G(t, r) = \delta(t) \quad (3.51)$$

Es un caso trivial en el que no hay diferencia entre la IAF y la IAF suavizada.

En el caso de la **Distribución de Rihaczek (RD)**, se puede escribir

$$\rho_z(t, f) = F_{r \rightarrow f} \{z(t)z^*(t-r)\} \quad (3.52)$$

Si se hace la IFT se obtiene

$$\begin{aligned} R_z(t, r) &= z(t)z^*(t-r) = \delta\left(t - \frac{r}{2}\right) * \left[z\left(t + \frac{r}{2}\right)z^*\left(t - \frac{r}{2}\right)\right] \\ &= \delta\left(t - \frac{r}{2}\right) * K_z(t, r) = G(t, r) * K_z(t, r) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Por lo que

$$G(t, r) = \delta\left(t - \frac{r}{2}\right) \quad (3.54)$$

En el caso de la **Distribución de Levin (LD)**, se toma la parte real de la RD, y se tiene

$$\begin{aligned} \rho_z(t, f) &= \text{Re} \left\{ F_{r \rightarrow f} \{z(t)z^*(t-r)\} \right\} \\ &= \frac{1}{2} F_{r \rightarrow f} \{z(t)z^*(t-r)\} + \frac{1}{2} \left[F_{r \rightarrow f} \{z(t)z^*(t-r)\} \right]^* \end{aligned} \quad (3.55)$$

De manera que, si se toma la IFT se obtiene

$$\begin{aligned} R_z(t, r) &= \frac{1}{2} z(t)z^*(t-r) + \frac{1}{2} z^*(t)z(t+r) \\ &= \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{r}{2}\right) * K_z(t, r) + \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{r}{2}\right) * K_z(t, r) \\ &= \frac{1}{2} \left[\delta\left(t + \frac{r}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{r}{2}\right) \right] * K_z(t, r) = G(t, r) * K_z(t, r) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Por lo que

$$G(t, r) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t + \frac{r}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{r}{2}\right) \right] \quad (3.57)$$

En la **Distribución de Page**, se tiene

$$\rho_z(t, f) = 2\text{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} z^*(t)z(t-\lambda)u(\lambda)e^{j2\pi f\lambda}d\lambda \right\} \quad (3.58)$$

donde $u(t)$ es la función escalón. Si se hace el cambio $r = -\lambda$ se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_z(t, f) &= 2\text{Re} \left\{ F_{r \rightarrow f} \{z^*(t)z(t+r)u(-r)\} \right\} \\ &= F_{r \rightarrow f} \{z^*(t)z(t+r)u(-r)\} \\ &\quad + \left[F_{r \rightarrow f} \{z^*(t)z(t+r)u(-r)\} \right]^* \end{aligned} \quad (3.59)$$

Y al realizar ahora la IFT se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
 R_z(t, r) &= z^*(t)z(t+r)u(-r) + z(t)z^*(t-r)u(r) \\
 &= \left[u(-r)\delta\left(t + \frac{r}{2}\right) + u(r)\delta\left(t - \frac{r}{2}\right) \right] * K_z(t, r) \\
 &= G(t, r) * K_z(t, r)
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Por lo que

$$G(t, r) = u(-r)\delta\left(t + \frac{r}{2}\right) + u(r)\delta\left(t - \frac{r}{2}\right) = \delta\left(t - \left|\frac{r}{2}\right|\right) \tag{3.61}$$

Con todo esto se ha deducido que todas las distribuciones se pueden obtener a partir del método que usaba Wigner de una señal núcleo. Además, todos los núcleos pueden escribirse de una forma común

$$R_z(t, r) = G(t, r) * K_z(t, r) \tag{3.62}$$

donde cada distribución tendrá una $G(t, r)$ diferente. $K_z(t, r)$ es la IAF de la función de Wigner-Ville, por eso a $R_z(t, r)$ también se le llama IAF suavizada.

Si se hace la FT de la IAF suavizada, $R_z(t, r)$, se obtienen las diferentes *DTFs*, las cuales se pueden escribir de la forma

$$\rho_z(t, f) = \gamma(t, f) ** W_z(t, f) \tag{3.63}$$

donde ** indica doble convolución, es decir, convolución en tiempo y en frecuencia. $W_z(t, f)$ es la distribución de Wigner-Ville, y

$$\gamma(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{G(t, r)\} \tag{3.64}$$

es el núcleo tiempo-frecuencia de la DTF escogida.

Con la relación encontrada en la expresión 3.62 y 3.63, se puede decir que todas las distribuciones vistas hasta ahora pueden considerarse como distribuciones de Wigner-Ville suavizadas. Además ambas expresiones son la base de las distribuciones tiempo-frecuencia de la clase cuadrática, como se estudia en el capítulo 4.

4. DTFs de la clase cuadrática o de Cohen.

Se trata de una clase general de DTFs cuyo diseño sigue un procedimiento común, y cuyas propiedades se rigen por leyes comunes. Se trata por lo tanto, de un enfoque generalizado, que permite la definición de las DTFs que están mejor adaptadas a determinados tipos de señales. A las distribuciones de la clase cuadrática se les considera como distribuciones de la clase suavizado de Wigner-Ville (WVDs), donde el suavizado se realiza en el dominio (t, f) por convolución con un "núcleo de tiempo-frecuencia" $\gamma(t, f)$, y en otros dominios por multiplicación y/o convolución con varias transformadas de $\gamma(t, f)$.

4.1. La WVD como distribución prototipo de la clase cuadrática.

Al considerar la clase cuadrática como distribuciones de Wigner-Ville suavizadas, es interesante conocer primero las propiedades y limitaciones de la distribución de Wigner-Ville, puesto que es la distribución prototipo de la clase cuadrática.

Una vez conocidas las características de la distribución de Wigner-Ville se puede generalizar y extender las características a toda la clase cuadrática.

4.1.1. Propiedades de la WVD.

La distribución de Wigner-Ville es ampliamente utilizada debido a su simplicidad computacional, y a que es la distribución que más propiedades deseables satisface. De todas las propiedades vistas en el apartado 1.1.3, la WVD cumple las siguientes:

1. Invarianza al desplazamiento en frecuencia. Ecuaciones 1.5 y 1.6.
2. Invarianza al desplazamiento en tiempo. Ecuaciones 1.7 y 1.8.
3. Invarianza a la escala. Ecuaciones 1.9 y 1.10.
4. Invarianza a la convolución. Ecuaciones 1.13 y 1.14.
5. Invarianza a la modulación Ecuaciones 1.15 y 1.16.
6. Real. Ecuación 1.17.
7. Preservación del marginal en tiempo. Ecuación 1.19.
8. Preservación del marginal en frecuencia. Ecuación 1.20.
9. Preservación de la energía. Ecuación 1.21.
10. Preservación de los momentos de tiempo. Ecuación 1.22.
11. Preservación de los momentos de frecuencia. Ecuación 1.23.
12. Soporte finito de tiempo. Ecuaciones 1.24 y 1.25.
13. Soporte finito de frecuencia. Ecuaciones 1.26 y 1.27.
14. Frecuencia instantánea. Ecuación 1.28.
15. Retardo de tiempo. Ecuación 1.29.
16. Transformada de Fourier. Ecuaciones 1.30 y 1.31.
17. Localización en frecuencia. Ecuaciones 1.32 y 1.33.
18. Localización en tiempo. Ecuaciones 1.34 y 1.35.
19. Localización de modulación lineal en frecuencia. Ecuaciones 1.36 y 1.37.

20. Convolución con señal modulada en frecuencia. Ecuaciones 1.40 y 1.41.
21. Multiplicación con señal modulada en frecuencia. Ecuaciones 1.42 y 1.43.
22. Fórmula de Moyal. Ecuación 1.44.

4.1.2. Limitaciones de la WVD.

A pesar de las muchas propiedades que cumple, la WVD tiene algunos inconvenientes. Puede asumir grandes valores negativos, y presenta características o componentes espurias, llamadas artefactos o términos cruzados, los cuales aparecen a medio camino entre las diferentes componentes de la señal real. La regla general para conocer la situación de estos términos es la siguiente [5]:

“Dos puntos del plano tiempo-frecuencia generan un tercer punto localizado en el punto medio geométrico entre ambos. Además, estos términos oscilan perpendicularmente a la línea que une los dos puntos origen, con una frecuencia proporcional a la distancia que separa los puntos origen”.

Estos artefactos o términos cruzados son el principal problema de la WVD, y aparecen tanto cuando se calcula la WVD sobre una señal FM no lineales, como cuando se calcula sobre una señal FM lineal de varias componentes.

4.1.2.1. Señales FM no lineales de una componente y artefactos interiores.

En el caso de una señal FM lineal o chirp, con asociado analítico $z(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$, la WVD da una representación precisa de la expresión de la FI, porque la aproximación central de diferencias finitas (CFD) de la expresión 3.7 es exacta para $\phi'(t)$.

Al ser la aproximación CFD exacta se tiene una frecuencia instantánea constante $(f_i(t) = \frac{\phi'(t)}{2\pi r})$ y un núcleo de la señal (IAF) que estará en función de r . De manera que, la distribución de Wigner-Ville será

$$W_z(t, f) = W_a(t, f) * \delta(f - f_i(t)) = W_a(t, f - f_i(t)) \quad (4.1)$$

donde

$$k_z(t, r) = k_a(t, r)e^{j2\pi f_i(t)r} \quad y \quad W_a(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{k_a(t, r)\} \quad (4.2)$$

En cambio, en el caso de una señal FM no lineal, la aproximación CFD no es exacta y el núcleo de la señal no depende de r , lo que lleva a la aparición de artefactos interiores, que surgen "dentro" de una sola componente.

Los artefactos causados por expresiones FM no lineales se pueden reducir por inventanado de la IAF en r antes de hacer la FT, lo que lleva a la WVD inventanada. Este procedimiento, sin embargo, causa una pérdida de resolución en frecuencia.

4.1.2.2. Señales multicomponente y artefactos exteriores o términos cruzados.

Si $z(t)$ es una señal de varias componentes, la expansión algebraica de $K_z(t, r)$ contiene términos de productos cruzados que, cuando se hace la transformada de Fourier, dan lugar a características espurias en el WVD. Estos son los artefactos exteriores o términos cruzados, ya que la WVD de la suma de dos señales no es sólo la suma de las WVDs de las señales, sino también de sus distribuciones de Wigner-Ville cruzadas (XWVDs). Es decir, si

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) \quad (4.3)$$

entonces

$$K_z(t, r) = K_{z_1}(t, r) + K_{z_2}(t, r) + K_{z_1 z_2}(t, r)K_{z_2 z_1}(t, r) \quad (4.4)$$

Y haciendo las *FTs* se obtiene

$$W_z(t, f) = W_{z_1}(t, f) + W_{z_2}(t, f) + 2Re\{W_{z_1 z_2}(t, f)\} \quad (4.5)$$

Se puede ver en la expresión 4.5 como efectivamente la WVD de la suma de dos señales es la suma de las WVD de esas señales, más las distribuciones de Wigner-Ville cruzadas (XWVD).

4.1.2.3. Supresión de los artefactos o términos cruzados.

Los términos cruzados pueden hacer la WVD difícil de interpretar, sobre todo si las componentes son numerosas o están cercas unas de otras, y más aún en presencia de ruido.

Por tales razones, los términos cruzados son a menudo considerados como la limitación fundamental en la aplicación de los métodos de tiempo-frecuencia cuadráticos, y el deseo de suprimir los términos cruzados ha llevado a varios enfoques, como los siguientes:

1. Si se multiplica la WVD por el espectrograma, se obtiene la llamada WVD enmascarada, que combina la supresión de términos cruzados del espectrograma con la alta resolución de la WVD.
2. Todas las *DTFs* cuadráticas vistas en el apartado 3 se pueden identificar por un núcleo distinto, incluyendo el espectrograma que suprime términos cruzados. Mediante el análisis de las propiedades del núcleo se puede definir y diseñar *DTFs* que atenúan términos cruzados. Una DTF cuadrática en la que los términos cruzados se atenúan en relación con los auto-términos a menudo se la llama distribución de interferencias reducidas (RID).

A la hora de reducir los términos cruzados hay que tener en cuenta que se pierde resolución debido al principio de incertidumbre, por lo que hay que buscar el equilibrio entre ambos puntos.

4.1.3. Dominios de definición de la WVD.

A lo largo del proyecto se han mencionado las variables t, f, r, v en las distribuciones, junto con algunos dominios como el tiempo-frecuencia (t, f) o el tiempo-retardo (t, r) , sin embargo aun no se ha explicado con profundidad la relación entre los diferentes dominios.

Estos dominios de definición son importantes, ya que en ellos se basa la formulación y el estudio de la clase cuadrática. Por ello, primero se verán la expresión de la distribución de Wigner-Ville en los diferentes dominios, y después se extenderá la formulación a toda la clase cuadrática.

Cada dominio de definición está formado por dos variables de las cuatro posibles, las cuales son t – tiempo, f – frecuencia, r – retardo, v – doppler. Por lo tanto, si se realizan todas las posibles combinaciones de dos variables, se obtienen cuatro dominios de definición, los cuales son:

- ***Dominio tiempo – retardo (t, r) .***
- ***Dominio tiempo – frecuencia (t, f) .***
- ***Dominio doppler – frecuencia (v, f) .***
- ***Dominio doppler – retardo (v, r) o dominio de ambigüedad.***

La utilidad de definir estos cuatro dominios es que están relacionados entre sí mediante transformadas directas o inversas de Fourier, lo cual permite expresar la distribución en el dominio que más convenga, y posteriormente pasar de un dominio a otro mediante transformadas directas o inversas de Fourier.

En el caso de la distribución de Wigner-Ville la expresión en los diferentes dominios se obtiene a partir de la función de auto-correlación instantánea (IAF), la cual se expresa para cualquier señal analítica $z(t)$ como

$$K_z(t, r) = z\left(t + \frac{r}{2}\right) z^*\left(t - \frac{r}{2}\right) \quad (4.6)$$

Se observa que la IAF está dada en el dominio tiempo-retardo (t, r) . A partir de la IAF se puede obtener la distribución de Wigner-Ville, lógicamente dada en el dominio tiempo-frecuencia, haciendo la FT de r a f , por lo que será

$$W_z(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{K_z(t, r)\} \quad (4.7)$$

Partiendo de la WVD, y haciendo la FT de t a v , se obtiene la expresión en el dominio doppler-frecuencia, y la llamada función de auto-correlación espectral (SAF)

$$k_z(v, f) = F_{t \rightarrow v}\{W_z(t, f)\} \quad (4.8)$$

Finalmente, tanto la FT de la IAF de t a v , como la IFT de f a r de la SAF definen la función de ambigüedad (FA)

$$A_z(v, r) = F_{t \rightarrow v}\{K_z(t, r)\} = F_{f \rightarrow r}^{-1}\{k_z(v, f)\} \quad (4.9)$$

Así pues, según las expresiones anteriores se puede pasar la WVD de un dominio a otro realizando la transformada directa o inversa de Fourier. Esta relación entre dominios se puede ver más claramente mediante el esquema de la imagen 1.

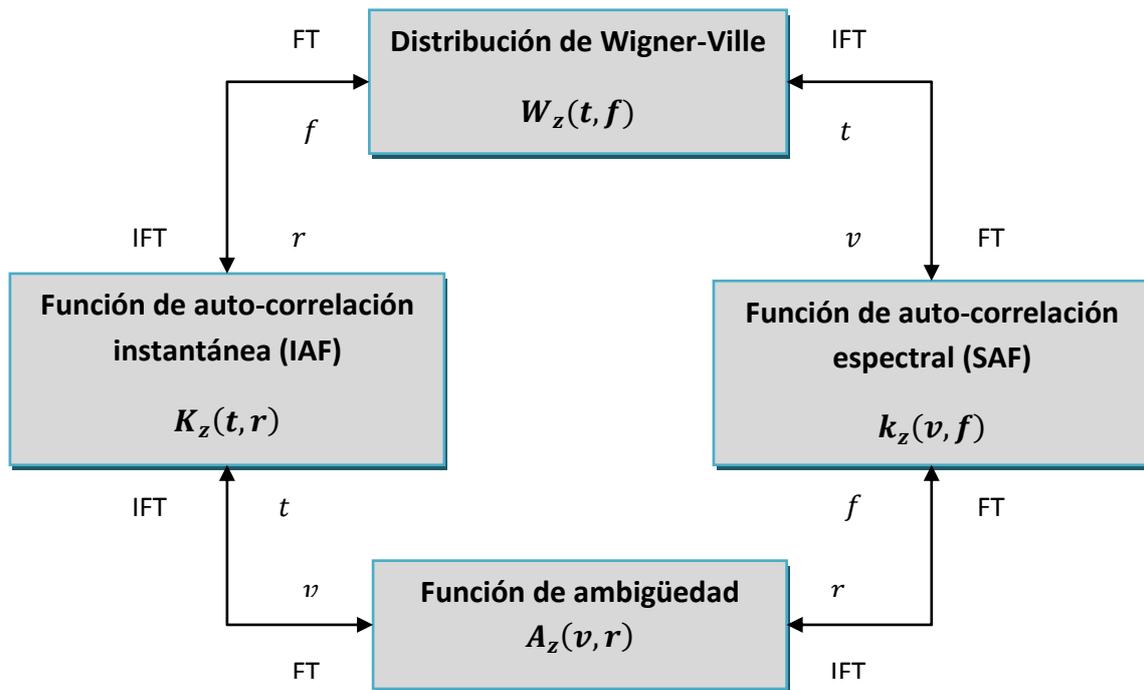


Imagen 1: La WVD en los cuatro dominios de definición.

El hecho de estar relacionados los dominios mediante la FT resulta muy útil, ya que el conocimiento de las propiedades de la FT permite utilizar las características de un método en un dominio y transferirlos a otro dominio.

4.2. Dominios de definición de la clase cuadrática.

La importancia de los cuatro dominios de definición existentes radica en el hecho de poder expresar una distribución en un dominio, y posteriormente pasar de un dominio a otro mediante una sencilla transformada de Fourier.

Como ya se ha dicho, la distribución de Wigner-Ville se considera como una distribución prototipo de toda la clase cuadrática, y esto permite extender los dominios a toda la clase de una forma sencilla. Para ello, se parte de la expresión generalizada de una distribución de la clase cuadrática, es decir, se parte de

$$\rho_z(t, f) = F_{r \rightarrow f}\{R_z(t, r)\} \quad (4.10)$$

Donde $R_z(t, r)$ es la función de auto-correlación instantánea suavizada, obtenida a partir de

$$R_z(t, r) = G(t, r) * K_z(t, r) \quad (4.11)$$

$G(t, r)$ es el núcleo tiempo-retardo, el cual será distinto para cada distribución cuadrática, y $K_z(t, r)$ es la función de auto-correlación instantánea, es decir, $K_z(t, r)$ es la distribución de Wigner-Ville definida en el dominio tiempo-retardo.

El núcleo tiempo-retardo $G(t, r)$ de cada distribución también se puede expresar en los cuatro dominios, tal y como se muestra en la imagen 2.

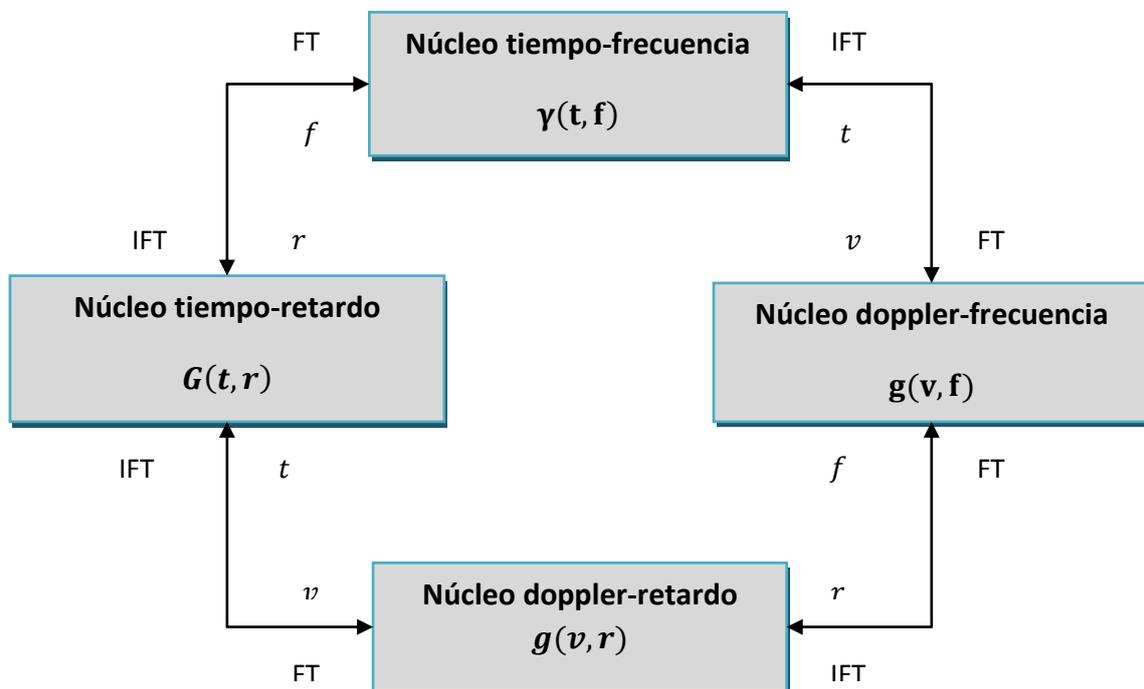


Imagen 2: El núcleo tiempo-retardo, $G(t, r)$, en los cuatro dominios de definición.

De la imagen 2 se saca que $g(v, r)$ será el núcleo doppler-retardo, $g(v, f)$ el núcleo frecuencia-doppler, y $\gamma(t, f)$ el núcleo tiempo-frecuencia.

Finalmente, sólo queda obtener la expresión de una DTF cuadrática en cada dominio de representación. Para ello, basta con realizar una multiplicación o convolución, según el dominio de representación elegido, entre el núcleo de la distribución elegida y la WVD, expresados ambos en el dominio deseado.

La expresión de una DTF cuadrática en el dominio tiempo-retardo es la dada en 4.11. En el dominio doppler-frecuencia la expresión obtenida para una DTF cuadrática es

$$r_z(v, f) = \mathcal{G}(v, f) * k_z(v, f) \quad (4.12)$$

donde $r_z(v, f)$ es la función de auto-correlación espectral (SAF) generalizada, por analogía con la distribución de Wigner-Ville.

En el dominio doppler-retardo se obtendrá la función de ambigüedad generalizada (GAF), o más precisamente **función de ambigüedad filtrada** $\mathcal{A}_z(v, r)$, y será

$$\mathcal{A}_z(v, r) = g(v, r)A_z(v, r) \quad (4.13)$$

Finalmente, la distribución cuadrática se puede escribir en el dominio tiempo-frecuencia en términos de la WVD de la forma

$$\rho_z(t, f) = \gamma(t, f) ** W_z(t, f) \quad (4.14)$$

donde el doble asterisco indica doble convolución, en tiempo y frecuencia.

Las expresiones 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 están relacionadas mediante transformadas de Fourier, y basta con tener la expresión en un dominio para pasarla a otro. Esta relación entre expresiones se ilustra en la imagen 3, donde se muestran las expresiones de una DTF cuadrática en los diferentes dominios de definición.

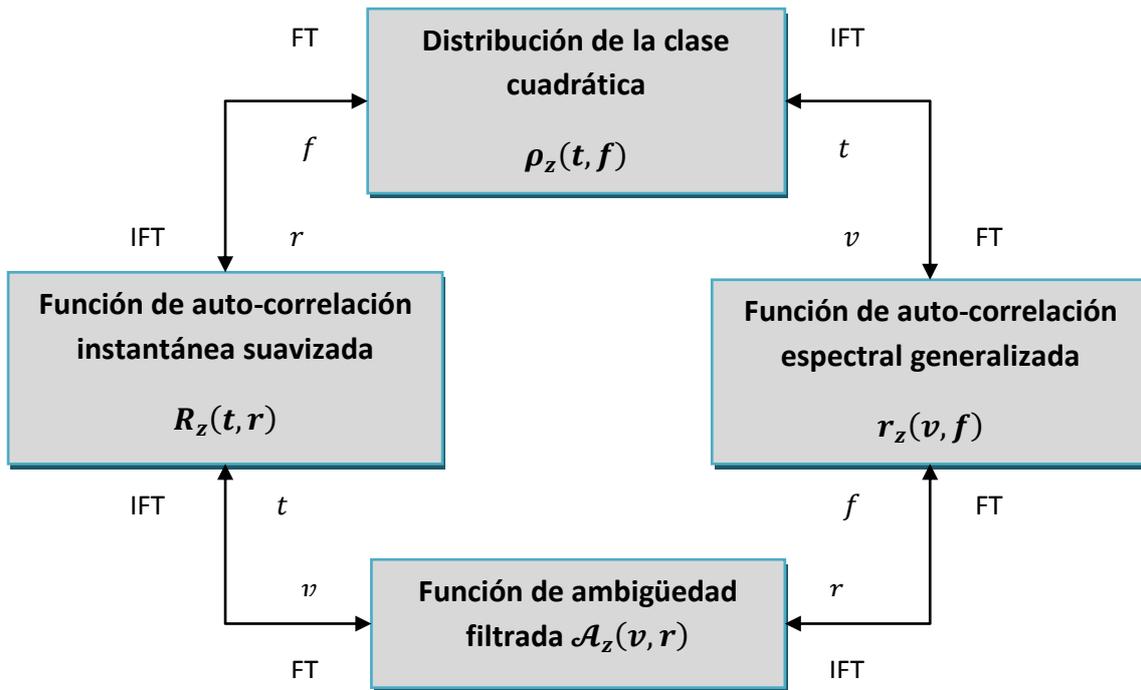


Imagen 3: Distribución de la clase cuadrática en los cuatro dominios de definición.

En las expresiones 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 se ve claramente como se definen las *DTFs* de clase cuadrática en términos de la WVD y el núcleo tiempo-frecuencia. Por esto es por lo que se considera a la WVD como “básica” o “prototipo” de *DTF* cuadrática, y a todas las demás *DTFs* cuadráticas como versiones filtradas o suavizadas de la WVD.

El estudio de la distribución de Wigner-Ville en cada dominio de definición es importante, puesto que se ha visto que el principal problema de la WVD es la presencia de términos cruzados, y puede que uno de estos dominios permita facilitar el diseño de un núcleo que reduzca dichos términos cruzados. Esto ocurre en el dominio de ambigüedad, y por eso es el dominio más importante para el diseño de distribuciones cuadráticas de tipo RID.

4.3. Dominio de ambigüedad y diseño de *DTFs* cuadráticas.

El dominio de ambigüedad es el más importante, ya que proporciona una forma sencilla de tratar el principal problema de las *DTFs* cuadráticas. El dominio de ambigüedad permite filtrar o atenuar los términos cruzados sin que afecten a los auto-términos de la señal [6].

El tratamiento sencillo de las componentes indeseadas en el dominio de ambigüedad se debe a que los términos cruzados del dominio (t, f) son altamente oscilatorios, y su frecuencia de oscilación depende de la distancia existente entre las componentes de la señal, haciendo que en el dominio de ambigüedad (v, r) los términos cruzados tiendan a estar lejos del origen (paso alto).

En cambio, los auto-términos del dominio (t, f) tienden a ser suaves y bien delimitados, de manera que los auto-términos correspondientes al dominio dual (v, r) están concentrado sobre el origen o "atravesan" el origen (paso bajo).

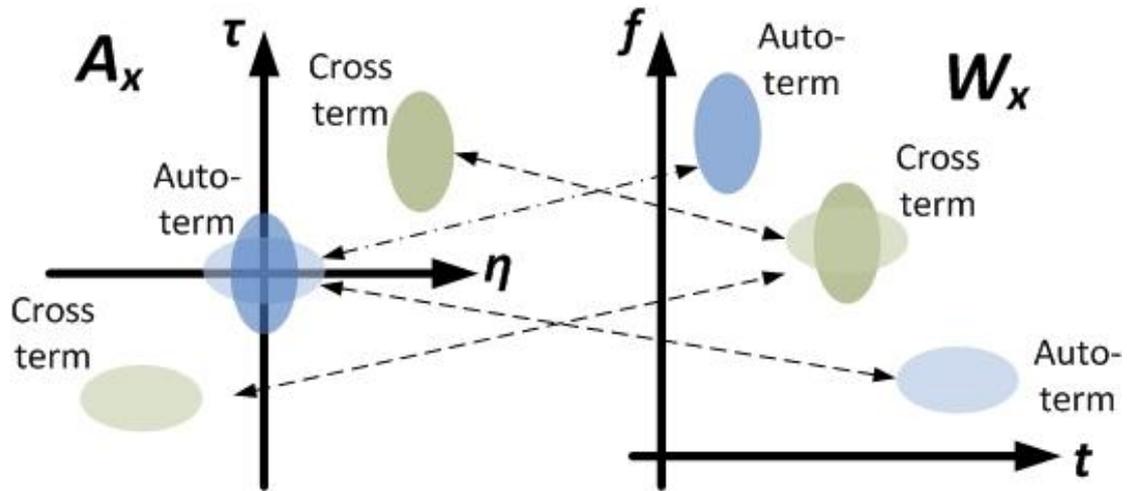


Imagen 4: Componentes de una WVD. Dominio de ambigüedad y dominio tiempo-Frecuencia.

En la imagen 4 se aprecia como en el dominio de ambigüedad de una WVD aparecen los auto-términos sobre el origen, mientras que los términos cruzados están alejados del origen.

Así pues, si se diseña en el dominio de ambigüedad el núcleo $g(v, r)$, de una distribución cuadrática, como un filtro paso bajo bidimensional que ponga menos énfasis en la información lejos del origen, se obtiene una distribución tiempo-frecuencia que atenúa los términos cruzados. Tal y como muestra la imagen 5.

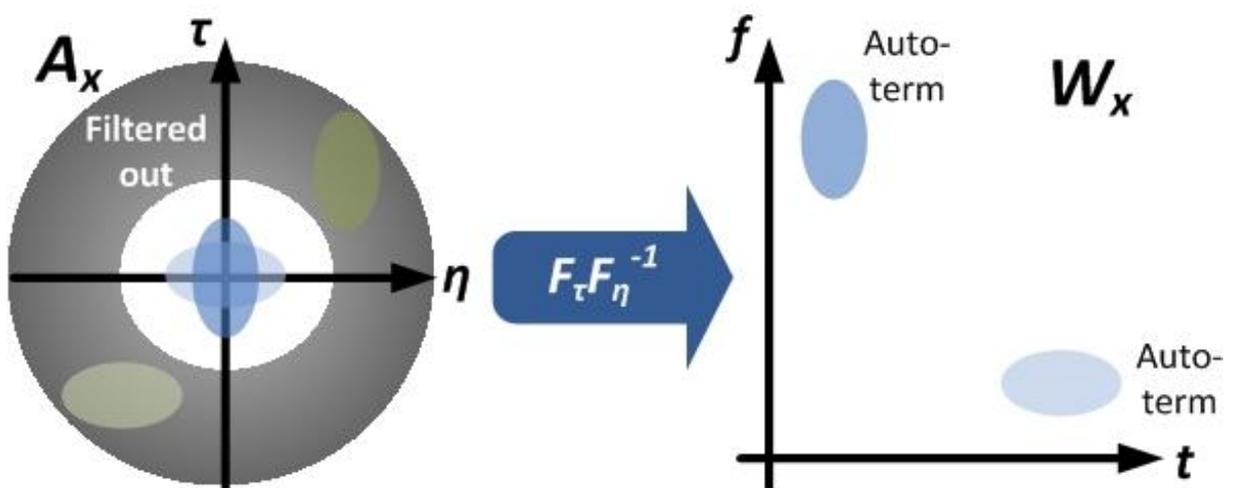


Imagen 5: Filtrado de los términos cruzados en el dominio de ambigüedad.

El único problema que se obtiene tras el filtrado es que la distribución resultante cumplirá menos propiedades que la distribución de Wigner-Ville, y también tendrá una menor resolución debido al principio de incertidumbre.

El diseño de *DTFs* se suele realizar en el dominio de ambigüedad, puesto que el filtrado o suavización es más sencillo e intuitivo, tal y como muestra la imagen 5. Dicho filtrado se realiza mediante la multiplicación del núcleo doppler-retardo con la función de ambigüedad, es decir

$$\mathcal{A}_z(v, r) = g(v, r)A_z(v, r) \quad (4.15)$$

donde la función de ambigüedad se puede escribir en función de la señal de la forma

$$\begin{aligned} A_z(v, r) &= \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{r}{2}\right) z^*\left(t - \frac{r}{2}\right) e^{-j2\pi vt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z\left(t + \frac{r}{2}\right) \left[z\left(t - \frac{r}{2}\right) e^{j2\pi vt} \right]^* dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

La expresión entre corchetes puede obtenerse retrasando $z\left(t + \frac{r}{2}\right)$ en el tiempo por r y desplazando en la frecuencia por v , lo que indica que $A_z(v, r)$ es la correlación de la señal con una versión de ella retrasada en el tiempo y con frecuencia desplazada.

Se puede interpretar la expresión 4.16 como una función de auto-correlación conjunta en tiempo y frecuencia. Este es el motivo por el que se consideran a estas distribuciones como *DTFs* cuadráticas o bilineales, y es que la señal entra dos veces en el cálculo de la DTF.

Una vez realizado el filtrado se puede escribir la DTF cuadrática como la FT 2D de la función de ambigüedad filtrada

$$\rho_z(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(v, r)A_z(v, r)e^{j2\pi(vt-fr)} dv dr \quad (4.17)$$

Mediante la expresión simplificada dada en 4.17 se puede facilitar la implementación de las representaciones tiempo-frecuencia, ya que es posible intercambiar los sumatorios anidados correspondientes a las integrales por operaciones matriciales, e implementar la transformada de Fourier 2D a partir de la transformada rápida de Fourier.

Así pues, a la hora de implementar una RID o DTF cuadrática que reduzca los términos cruzados es mejor diseñar el filtro de núcleo en el dominio de ambigüedad, y utilizar las transformadas de Fourier para ver los efectos en los demás dominios.

Al igual que en el diseño de filtros 1D, las especificaciones del filtro se efectúan en el dominio donde se expresa la operación de filtrado. Por lo tanto, las especificaciones

del filtro se realizan en el dominio de ambigüedad, mediante restricciones en el núcleo doppler-retardo.

Si el núcleo Doppler-retardo $g(v, r)$ tiene la forma separable $G_1(v)g_2(r)$, la multiplicación por este núcleo incluye el efecto combinado de enventanado en tiempo y enventanado en frecuencia.

A la hora de diseñar el filtro de núcleo, o núcleo doppler-retardo, hay que tener en cuenta también las propiedades que debe cumplir la DTF. Para ello, varios autores han demostrado que las propiedades deseables de la DTF son equivalentes a restricciones en el núcleo. La mayoría de estas restricciones se expresan convenientemente en el dominio de ambigüedad.

4.3.1. Filtros de núcleo separables.

Una forma sencilla de diseñar filtros de núcleo para *DTFs* cuadráticas es considerar el caso de núcleo separable [7], es decir

$$g(v, r) = G_1(v)g_2(r) \quad (4.18)$$

donde

$$G_1(v) = F_{t \rightarrow v}\{g_1(t)\} \quad (4.19)$$

y

$$G_2(f) = F_{r \rightarrow f}\{g_2(r)\} \quad (4.20)$$

Para el caso de núcleo separable se obtiene la siguiente función de ambigüedad filtrada

$$\mathcal{A}_z(v, r) = G_1(v)g_2(r)A_z(v, r) \quad (4.21)$$

y la siguiente DTF

$$\rho_z(t, f) = g_1(t) * W_z(t, f) * G_2(f) \quad (4.22)$$

La expresión 4.22 muestra como el diseño del núcleo de filtro se simplifica en gran medida cuando la operación del filtrado 2D se sustituye por dos operaciones sucesivas de filtrado 1D. Además, las dos convoluciones se pueden evaluar en cualquier orden, lo que indica que los factores de dependencia Doppler y dependencia del retardo en el núcleo separable $g(v, r)$ conducen a separar convoluciones en tiempo y frecuencia.

Hay dos casos especiales de este método, y son el caso del núcleo independiente del Doppler (DI) y el núcleo independiente del retardo (LI).

En el caso del núcleo independiente del Doppler se tiene que $G_1(v) = 1$, y se obtiene como resultado un único filtrado 1D que elimina los términos cruzados que varían cuando nos movemos en la dirección de la frecuencia.

En cambio, en el caso del núcleo independiente del retardo se tiene $g_2(r) = 1$, y se obtiene como resultado un único filtrado 1D que elimina los términos cruzados que varían cuando nos movemos en la dirección del tiempo.

4.3.2. Propiedades y sus restricciones en el núcleo.

Con el filtrado en el dominio de ambigüedad se pierden propiedades de la WVD, por lo que es importante conocer que propiedades se pierden y cuales se conservan.

Para ello, al saber que cualquier distribución cuadrática se relaciona con la WVD mediante la expresión

$$\rho_z(t, f) = \gamma(t, f) ** W_z(t, f) \quad (4.23)$$

donde ** indica doble convolucion.

Es posible encontrar condiciones suficientes bajo las cuales ciertas propiedades de la WVD llegan a $\rho_z(t, f)$. Por ejemplo:

- La DTF es real si $\gamma(t, f)$ es real.
- Dado que la convolución en 2D es invariante al desplazamiento, la invariancia del desplazamiento en tiempo y frecuencia se mantiene para cualquier $\gamma(t, f)$ fijada.
- El soporte de tiempo se mantiene para un núcleo DI, que no redistribuye la WVD en el tiempo, mientras que el soporte de frecuencia se mantiene para un núcleo LI, que no redistribuye la WVD en frecuencia.

Así que mediante ciertas condiciones del núcleo $\gamma(t, f)$ se conservan propiedades de la WVD. Si se llevan las condiciones del núcleo $\gamma(t, f)$ al dominio de ambigüedad, se obtienen ciertas restricciones a la hora de diseñar el núcleo de filtro $g(v, r)$.

Así pues, para saber si una DTF cumple unas propiedades basta con analizar el filtro de núcleo, y ver si cumple las restricciones correspondientes a dichas propiedades.

Las tablas 1 y 2 muestran algunas de las propiedades consideradas relevantes en una DTF y sus restricciones equivalentes para los diferentes tipos de núcleos.

Propiedad	Núcleo general	Núcleo Separable
No Negatividad (NN)	$G(t, r)$ es una suma de IAF_s	$g_1(t)g_2(r)$ es una suma de IAF_s
Real (RE)	$g(v, r) = g^*(-v, -r)$	$G_1(v)g_2(r) = G_1^*(-v)g_2^*(-r)$
Covarianza al desplazamiento en Tiempo (CT)	$g(v, r)$ no depende de t	$G_1(v)g_2(r)$ no depende de t
Covarianza al desplazamiento en Frecuencia (CF)	$g(v, r)$ no depende de f	$G_1(v)g_2(r)$ no depende de f
Tiempo Marginal (TM)	$g(v, 0) = 1 \forall v$	$G_1(v)g_2(0) = 1 \forall v$
Frecuencias Marginal (FM)	$g(0, r) = 1 \forall r$	$G_1(0)g_2(r) = 1 \forall r$
Frecuencia instantánea (FI)	$g(v, 0) = cons$ $\frac{dg}{dr} r=0 = 0 \forall v$	$G_1(v)g_2(0) = cons$ $g_2'(0) = 0$
Retardo de tiempo (TD)	$g(0, r) = constante$ $\frac{dg}{dv} v=0 = 0 \forall r$	$G_1(0)g_2(r) = constante$ $G_1'(0) = 0$
Soporte finito de Tiempo (TS)	$G(t, r) = 0$ Si $ r < 2 t $	Solo DI
Soporte finito de Frecuencias (FS)	$G(f, v) = 0$ Si $ v < 2 f $	Solo LI

Tabla 1: Propiedades y sus restricciones en el núcleo equivalentes. Sacado de [4].

Propiedad	Núcleo DI	Núcleo LI
No Negatividad (NN)	Nunca lo cumple	Nunca lo cumple
Real (RE)	$G_2(f)$ es real	$g_1(t)$ es real
Covarianza al desplazamiento en Tiempo (CT)	$g_2(r)$ no depende de t	$G_1(v)$ no depende de t
Covarianza al desplazamiento en Frecuencias (CF)	$g_2(r)$ no depende de f	$G_1(v)$ no depende de f
TM	$g_2(0) = 1$	Solo la WVD
FM	Solo la WVD	$G_1(0) = 1$
FI	$g_2'(0) = 0$	La WVD multiplicada por un escalar
Retardo de Tiempo (TD)	La WVD multiplicada por un escalar	$G_1'(0) = 0$
Soporte finito de tiempo (TS)	Siempre	La WVD multiplicada por un escalar
Soporte finito de frecuencia (FS)	La WVD multiplicada por un escalar	Siempre

Tabla 2: Propiedades y restricciones en el núcleo equivalentes. Parte 2. Sacado de [4].

4.4. Principales distribuciones cuadráticas.

Hasta el momento se ha visto el funcionamiento de las distribuciones cuadráticas, cómo es posible diseñar una distribución cuadrática en base al diseño de un filtro de núcleo en el dominio de ambigüedad, y cómo se puede forzar a que la distribución cumpla unas propiedades mediante restricciones en el núcleo.

Ahora sólo queda ver las características de las principales distribuciones cuadráticas. De esta manera al conocer sus características se podrá elegir fácilmente la distribución más adecuada para la aplicación deseada. Para ello, se empezará viendo los núcleos de las principales distribuciones cuadráticas, y posteriormente se verán las características que cumple cada una de estas distribuciones.

4.4.1. Núcleos de las principales distribuciones cuadráticas.

El núcleo es el que realiza el filtrado en el dominio de ambigüedad para eliminar términos cruzados, con el inconveniente de la pérdida de propiedades y la pérdida de resolución debido al principio de incertidumbre.

En la elección de la distribución adecuada, además del cumplimiento de las propiedades que se deseen, también hay que elegir una buena relación entre resolución y términos cruzados.

En la tabla 3 se pueden ver las *DTFs* cuadráticas más utilizadas en el procesado de señales, así como sus núcleos expresados en diferentes dominios, los cuales llevarán a la obtención de la DTF mediante la expresión dada 4.11 o 4.13. En la tabla se asume que la ventana $w(t)$ es real y par.

Distribución	$g(v, r)$, Dominio de ambigüedad	$G(t, r)$, Dominio tiempo-retardo
Wigner-Ville	1	$\delta(t)$
Levin	$\cos(\pi vr)$	$\frac{1}{2} \left[\delta\left(t + \frac{r}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{r}{2}\right) \right]$
Born-Jordan	$\text{sinc}(2\alpha vr)$	$\frac{1}{ 2\alpha r } \text{rect} \frac{t}{2\alpha r}$
B modificada	$\frac{ \Gamma(\beta + j\pi v) ^2}{\Gamma^2(\beta)}$	$\frac{\cosh^{-2\beta} t}{\int_{-\infty}^{\infty} \cosh^{-2\beta} \xi d\xi}$
WVD enventanada	$w(r)$	$\delta(t)w(r)$
Levin enventanada	$w(r)\cos(\pi vr)$	$\frac{w(r)}{2} \left[\delta\left(t + \frac{r}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{r}{2}\right) \right]$
ZAM	$w(r) \frac{\alpha}{2 r } \text{sinc} \frac{2vr}{\alpha}$	$w(r) \text{rect} \frac{t}{2r/\alpha}$
Rihaczek	$e^{-j\pi vr}$	$\delta\left(t - \frac{r}{2}\right)$
Rihaczek enventanada	$w(r)e^{-j\pi vr}$	$w(r)\delta\left(t - \frac{r}{2}\right)$
Page	$e^{-j\pi v r }$	$\delta\left(t - \left \frac{r}{2}\right \right)$
Choi-Williams	$e^{-v^2 r^2 / \sigma}$	$\frac{\sqrt{\pi\sigma}}{ r } e^{-\pi^2 \sigma t^2 / r^2}$
B	$\frac{ r ^\beta \Gamma(\beta + j\pi v) ^2}{2^{1-2\beta} \Gamma(2\beta)}$	$ r ^\beta \cosh^{-2\beta} t$
Espectrograma	$A_w(v, r)$	$w\left(t + \frac{r}{2}\right) w\left(t - \frac{r}{2}\right)$

Tabla 3: Distribuciones y sus respectivos núcleos en los dominios más utilizados. Sacado de [4].

4.4.2. Propiedades de las principales distribuciones cuadráticas.

Hay multitud de propiedades que se desearía que cumpliera una distribución cuadrática, pero no hay una distribución que cumpla todas las propiedades posibles.

Por eso lo principal es que en una aplicación se prioricen las propiedades necesarias que debe cumplir la distribución para así elegir la más adecuada.

En las tablas 4 y 5 se pueden ver las principales propiedades que cumple cada una de las distribuciones de la tabla 3.

Distribución	Real (RE)	Tiempo Marginal (TM)	Frecuencia Marginal (FM)
Wigner-Ville	Siempre	Siempre	Siempre
Levin	Siempre	Siempre	Siempre
Born-Jordan	Siempre	Siempre	Siempre
B modificada (Núcleo LI)	Siempre		Siempre
WVD enventanada (Núcleo DI)	Siempre	Sujeta a la normalización de la ventana	
Levin enventanada	Siempre	Sujeta a la normalización de la ventana	
ZAM	Siempre	Sujeta a la normalización de la ventana	
Rihaczek		Siempre	Siempre
Rihaczek enventanada		Sujeta a la normalización de la ventana	
Page	Siempre	Siempre	Siempre
Choi-Williams	Siempre	Siempre	Siempre
B (Núcleo separable)	Siempre		
Espectrograma	Siempre		

Tabla 4: Propiedades de las distribuciones vistas en la tabla 3. Parte 1. Sacado de [4].

Distribución	Frecuencia instantánea (IF)	Retardo de tiempo (TD)	Soporte de tiempo (TS)	Soporte de Frecuencia (FS)
Wigner-Ville	Siempre	Siempre	Siempre	Siempre
Levin	Siempre	Siempre	Siempre	Siempre
Born-Jordan	Siempre	Siempre	Sujeta al valor de los parámetros	Sujeta al valor de los parámetros
B modificada (Núcleo LI)		Siempre		Siempre
WVD enventanada (Núcleo DI)	Siempre		Siempre	
Levin enventanada	Siempre		Siempre	
ZAM	Siempre		Sujeta al valor de los parámetros	
Rihaczek			Siempre	Siempre
Rihaczek enventanada			Siempre	
Page	Siempre		Siempre	
Choi-Williams	Siempre	Siempre		
B (Núcleo separable)				
Espectrograma				

Tabla 5: Propiedades de las distribuciones vistas en la tabla 3. Parte 2. Sacado de [4].

5. Estudio comparativo de diferentes *DTFs* cuadráticas.

Una vez visto el funcionamiento de las distribuciones cuadráticas y las características que proporciona cada una de las distribuciones en la teoría, es el momento de ver cómo funcionan en la práctica.

Para ello, a lo largo del presente capítulo se realizará un estudio comparativo, que permitirá ver de manera práctica la capacidad de cada una de las distribuciones, sobre todo en relación a la eliminación de términos cruzados y la resolución obtenida.

Para llevar a cabo el estudio comparativo se utilizará una toolbox de MatLab, específicamente la time-frequency toolbox (tftb-02) [8]. Esta toolbox es un software libre que nos proporciona las funciones necesarias para realizar este estudio comparativo, y cuyas características se explican en el **apéndice B**.

Para llevar a cabo la comparación de las diferentes distribuciones cuadráticas se van a usar tres señales diferentes, las cuales son:

1. Señal FM lineal simple (Chirp): Esta señal de una sola componente se utilizará en primer lugar, ya que es el caso más sencillo. De esta manera se podrá comprobar a la vez el correcto funcionamiento de la toolbox que utilizamos.
2. Señal FM lineal múltiple: Este señal será la combinación lineal de tres señales FM lineales diferentes. Es una señal algo más compleja al estar formada por varias componentes, esto pondrá a prueba las distribuciones a la hora de diferenciar entre las componentes originales y los términos cruzados que aparezcan.
3. Señal acústica real: Este es un caso práctico, en el que se ponen a prueba las distribuciones en un caso real. Se analizará un archivo de audio que contiene el sonido de un delfín. El objetivo será detectar correctamente los diferentes tipos de sonidos que emiten los delfines, y comprobar si todas las distribuciones son capaces de detectar los sonidos correctamente.

5.1. Comparación mediante una señal FM lineal simple.

En este primer apartado se analizará con diferentes distribuciones una señal FM lineal simple, es decir, de una sola componente. Para ello se ha elegido arbitrariamente una señal lineal cuya frecuencia instantánea varía de 20Hz a 260Hz en un intervalo de 1 segundo.

A la hora de llevar a cabo el análisis de la señal mediante una distribución tiempo-frecuencia se va a utilizar su asociado analítico, ya que de esta manera, como se comentó en el apartado 3.2, se evitan componentes indeseadas para señales de una sola componente, producidas por la interacción de las frecuencias positivas y negativas de la señal, tal como se muestra en el **apéndice A**.

Si se representa la señal en un pequeño periodo de tiempo que permita ver la variación de la señal, por ejemplo durante 200ms, se obtiene la imagen 6.

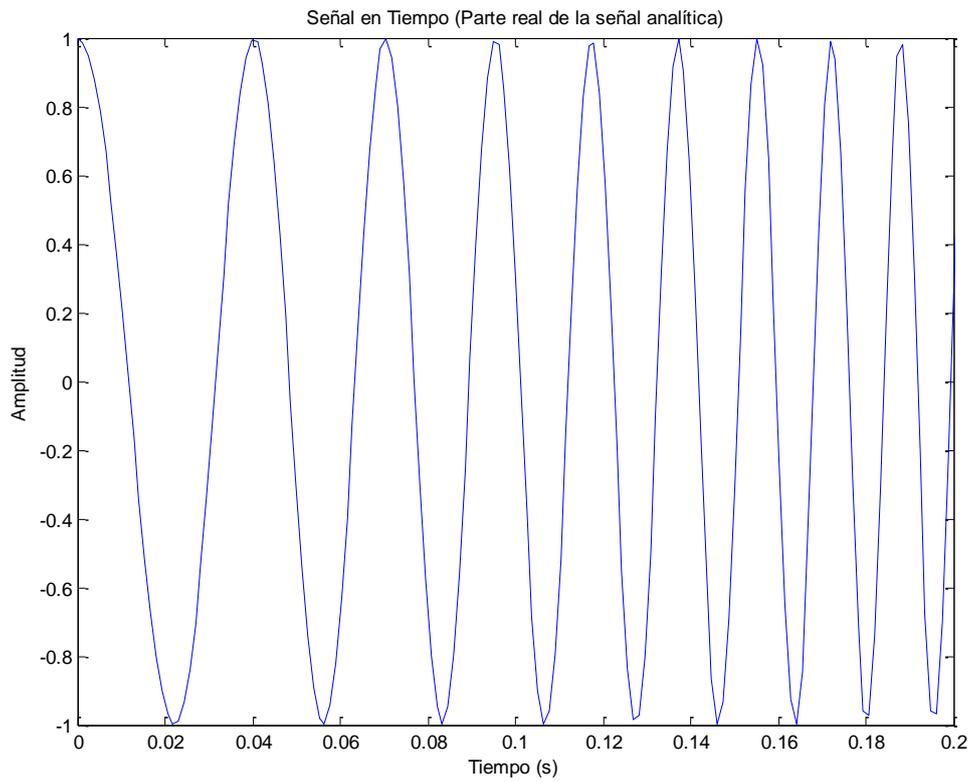


Imagen 6: Señal FM lineal simple en función del tiempo.

Puede verse claramente en la representación temporal de la imagen 6 como la frecuencia varia con el tiempo, tratándose por lo tanto de una señal FM, sin embargo no puede obtenerse cuál es la frecuencia presente en cada instante de tiempo.

Si se representa el espectro del asociado analítico, puesto que es el que se utiliza para llevar a cabo el análisis, se obtiene la imagen 7.

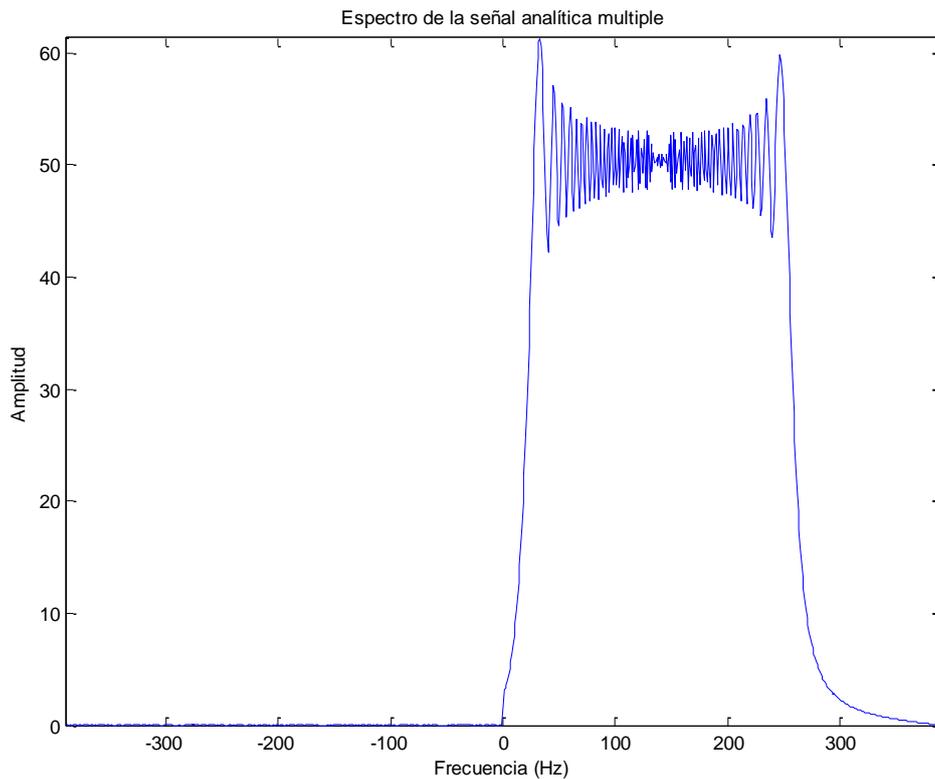


Imagen 7: Espectro analítico de la señal FM lineal simple.

En la representación de la imagen 6 pueden verse claramente todas las frecuencias presentes en la señal (de 20 a 260Hz), al igual que se aprecia como se trata de una señal analítica, al no presentar frecuencias negativas. Sin embargo, mediante el espectro no se puede precisar en que instante de tiempo está presente cada frecuencia.

Por esto es por lo que es necesario emplear una distribución tiempo-frecuencia (DTF) para señales no estacionarias, ya que con una DTF se podrá relacionar cada frecuencia con los instantes de tiempo en los que aparece.

Así pues, ahora se va a iniciar el estudio comparativo, y se van a obtener diferentes distribuciones tiempo-frecuencia de esta señal. A los niveles de gris de todas las representaciones se le aplica un logaritmo, para así diferenciar mejor las diferentes componentes.

Utilizando la Distribución de Wigner-Ville se obtiene el resultado de la imagen 8.

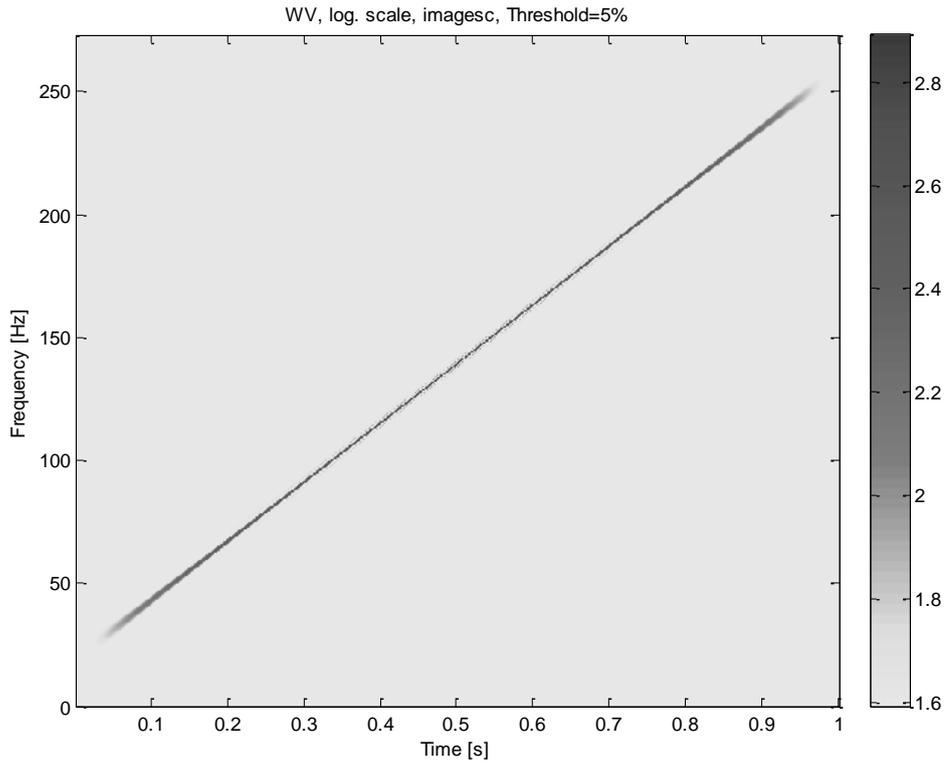


Imagen 8: Distribución de Wigner-Ville de una señal FM lineal simple.

En la imagen 8 se puede ver como la distribución de Wigner-Ville muestra perfectamente la frecuencia instantánea de la señal, y es posible obtener cual es la frecuencia presente en cada instante de tiempo. Además, la representación no presenta ningún término cruzado ni demás componentes indeseadas, por lo que podría obtenerse la expresión de la frecuencia instantánea de forma unívoca.

Con la distribución Pseudo Wigner-Ville se obtiene este otro resultado de la imagen 9.

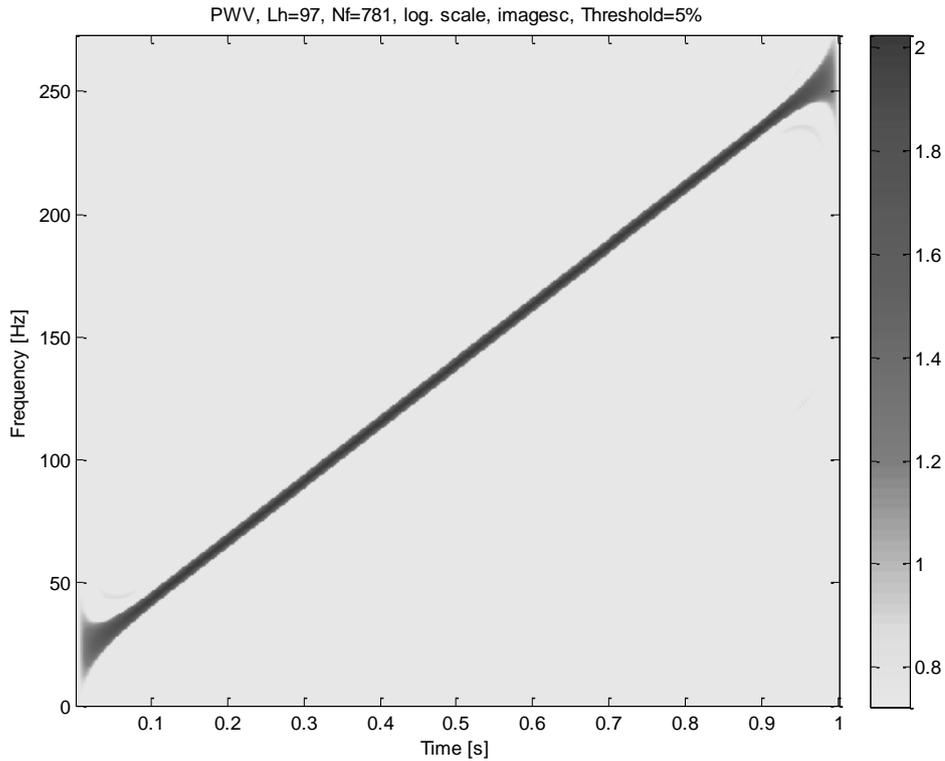


Imagen 9: Distribución de Pseudo Wigner-Ville de una señal FM lineal simple.

Con la distribución de Pseudo Wigner-Ville se obtiene el mismo resultado que con la distribución de Wigner-Ville, y al igual que anteriormente es posible obtener la expresión para la frecuencia instantánea y la frecuencia presente en cada instante de tiempo.

La mayor diferencia observada es que la resolución es peor, es decir, la línea obtenida para la frecuencia lineal es más gruesa. Al perder resolución se aumenta la incertidumbre, lo que lleva a aumentar el error que se puede cometer a la hora de determinar el valor de la frecuencia en un instante dado.

Con la distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada se obtiene la imagen 10.

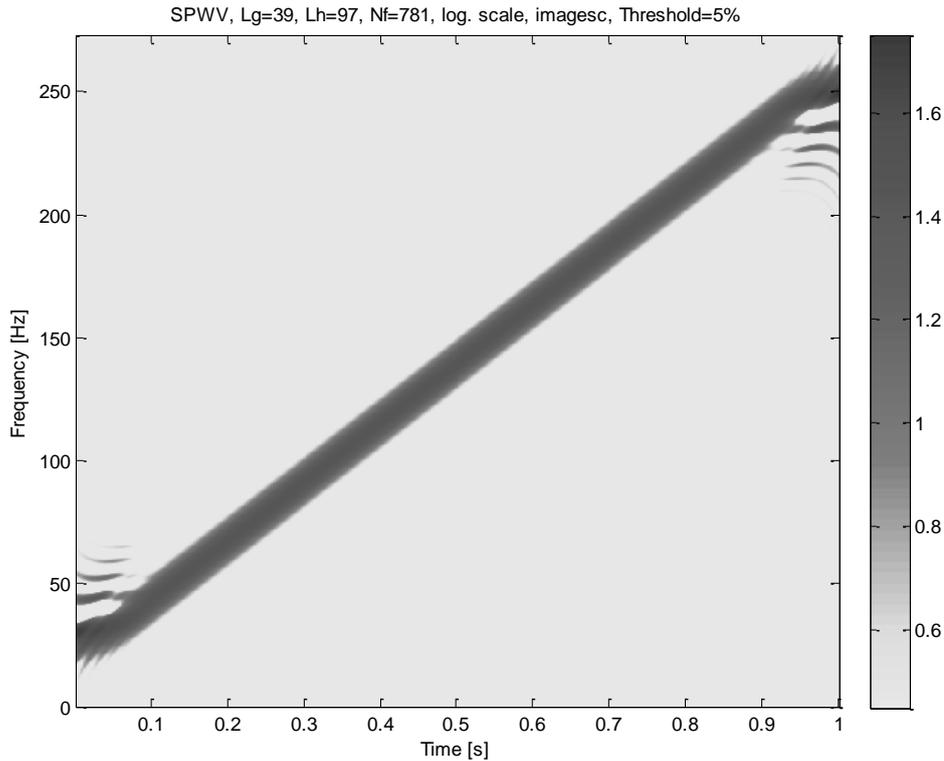


Imagen 10: Distribución de Pseudo Wigner-Ville suavizada de una señal FM lineal simple.

Al igual que en las distribuciones anteriores el resultado obtenido es satisfactorio, en relación a que a partir de la imagen 10 se puede saber, con un cierto margen de error, cuál es la frecuencia presente en cada instante de tiempo, y es posible obtener una expresión para la frecuencia instantánea de la señal.

En cambio, hay una gran pérdida de resolución, ya que la línea obtenida para la frecuencia lineal es aun más gruesa que en la distribución Pseudo Wigner-Ville, y sobre todo que en la distribución de Wigner-Ville. Esto se debe a que se realiza un filtrado que llevaría a la eliminación de términos cruzados, pero al no tener esta señal términos cruzados, lo que se obtiene es una pérdida de resolución sin necesidad, ya que no se obtiene ningún beneficio.

Utilizando el Espectrograma se obtiene el resultado de la imagen 11.

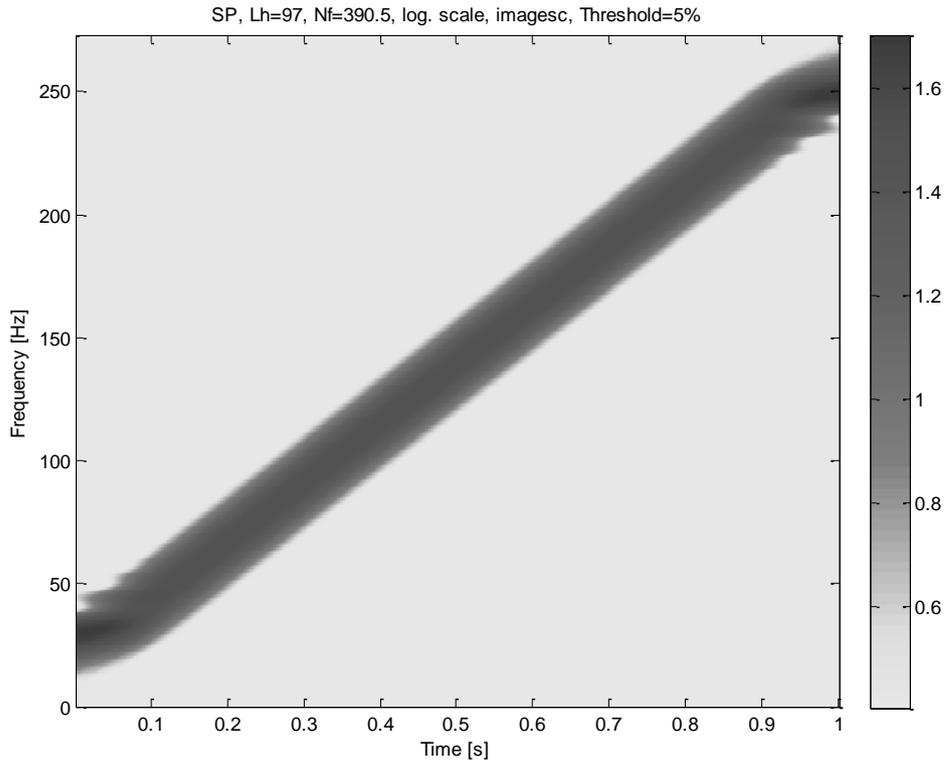


Imagen 11: Espectrograma una señal FM lineal simple.

El espectrograma al igual que en los casos anteriores permite saber cuál es la frecuencia presente en cada instante de tiempo y obtener una expresión para la frecuencia instantánea. En cambio, viendo la imagen 11 se aprecia como el error que se podría cometer es muy grande, ya que la resolución obtenida es mucho menor que en los casos anteriores, y por lo tanto el grosor de la frecuencia lineal mayor.

Al ser la resolución tan baja, y por lo tanto el error que se puede cometer demasiado grande, sería mejor utilizar con señales de este tipo cualquiera de las distribuciones anteriores, en lugar de emplear el espectrograma.

El resultado obtenido con la distribución de Rihaczek se muestra en la imagen 12.

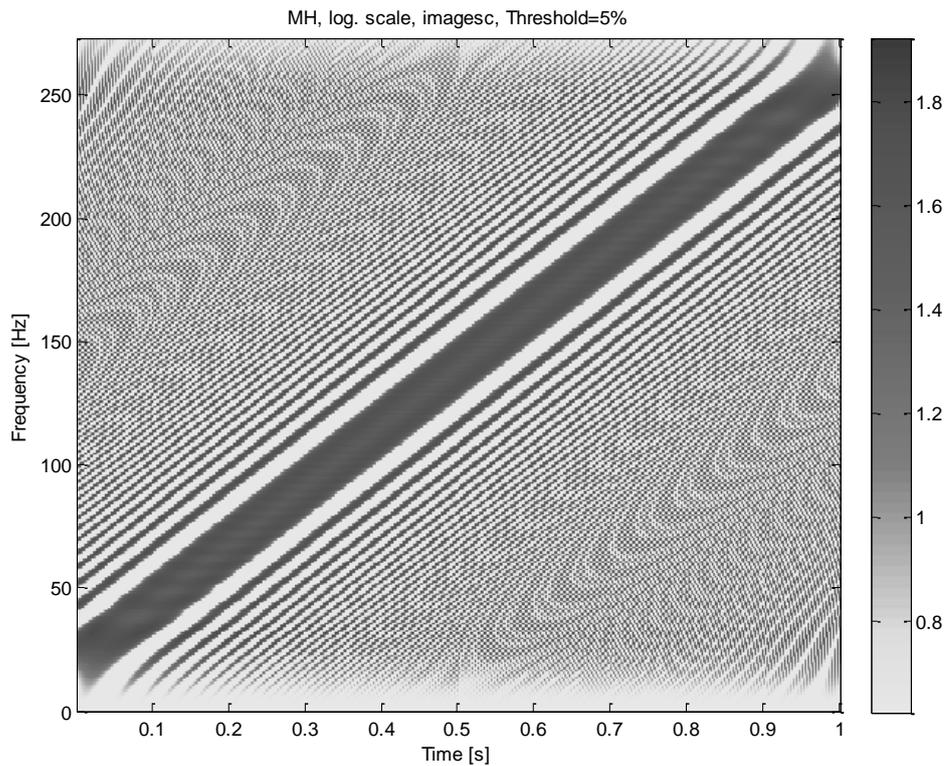


Imagen 12: Distribución de Rihaczek de una señal FM lineal simple.

Con esta distribución se puede ver claramente como el resultado es bastante malo, pues aparecen multitud de términos cruzados y componentes indeseadas, lo que puede llevar a cometer un error en la obtención de las diferentes componentes de la señal. Este es el motivo por el cual la distribución de Rihaczek es solamente de interés teórico, ya que hasta para una señal simple se obtiene un resultado pobre.

Utilizando la distribución de Born-Jordan se obtiene el resultado de la imagen 13.

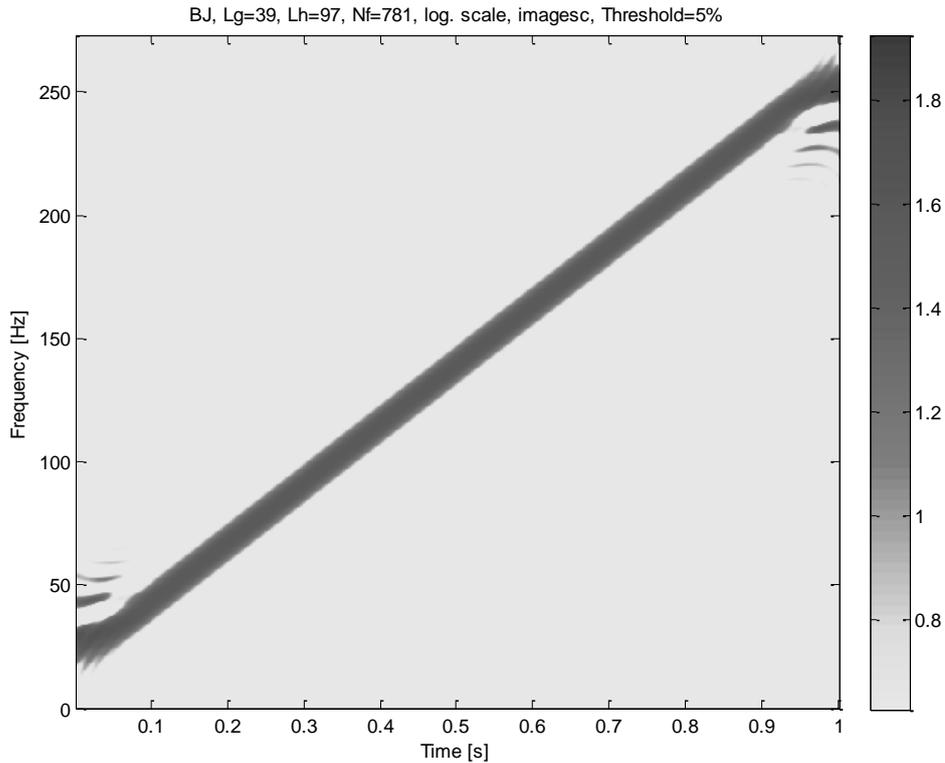


Imagen 13: Distribución de Born-Jordan de una señal FM lineal simple.

Con la distribución de Born-Jordan, al contrario que anteriormente con la distribución de Rihaczek, sí que se puede obtener una expresión para la frecuencia instantánea, ya que no presenta ningún término cruzado para este tipo de señal. Además, se puede ver como la resolución obtenida en esta distribución es bastante mejor que la obtenida con el espectrograma en la imagen 11. Sin embargo, para esta señal simple, la distribución de Wigner-Ville aun presenta una mejor resolución.

Con la distribución de Choi-Williams se tiene resultado mostrado en la imagen 14.

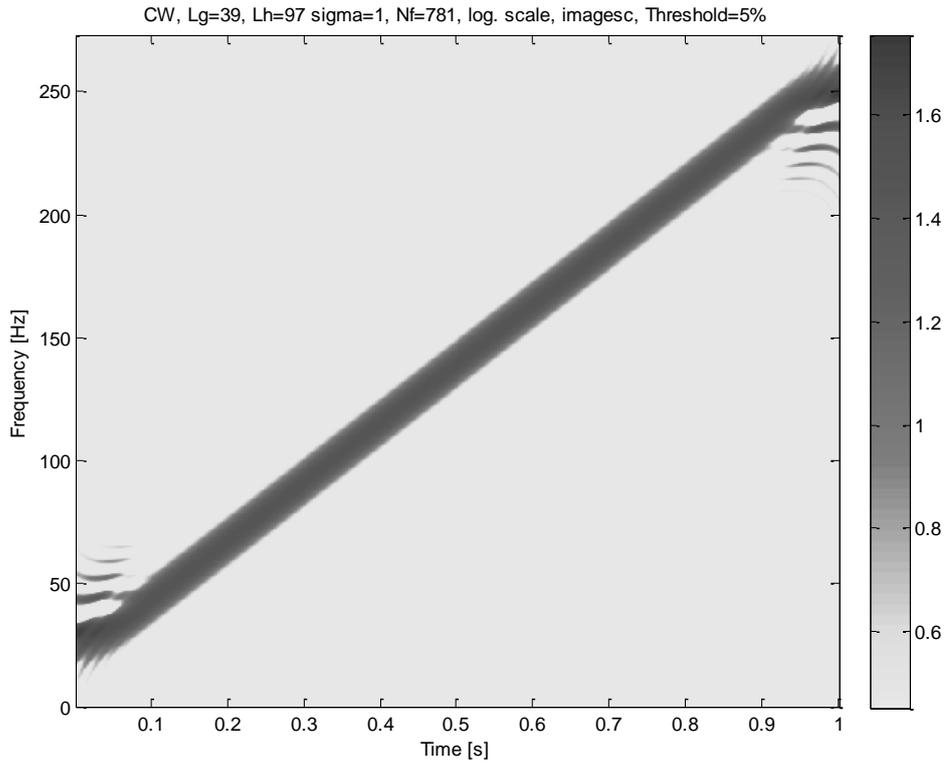


Imagen 14: Distribución de Choi-Williams de una señal FM lineal simple.

El resultado obtenido es bastante similar al obtenido con la distribución de Born-Jordan en la imagen 13, ya que a partir de esta distribución se puede obtener una expresión para la frecuencia instantánea con una resolución e incertidumbre semejante a la distribución anterior.

Utilizando la distribución de Page se obtiene la imagen 15.

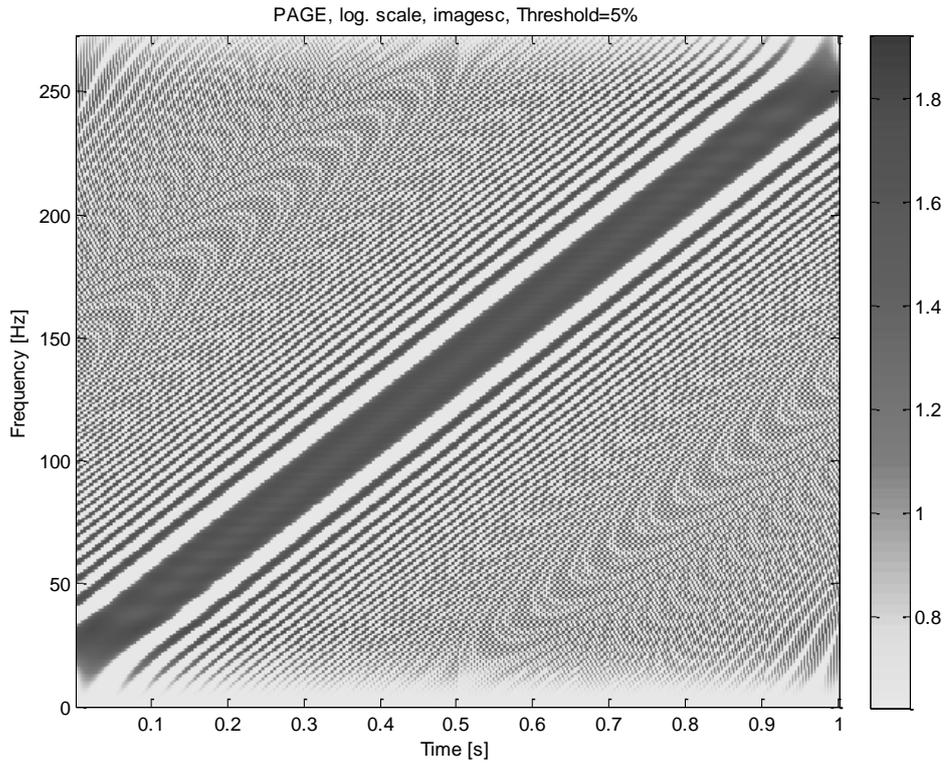


Imagen 15: Distribución Page de una señal FM lineal simple.

Con la distribución Page se obtiene un resultado que presenta multitud de términos cruzados y componentes indeseadas, siendo el resultado similar al obtenido con la distribución de Rihaczek en la imagen 12, e igualmente malo.

Con la distribución de Pseudo Page, la cual realiza un eventanado de la distribución anterior, se tiene la imagen 16.

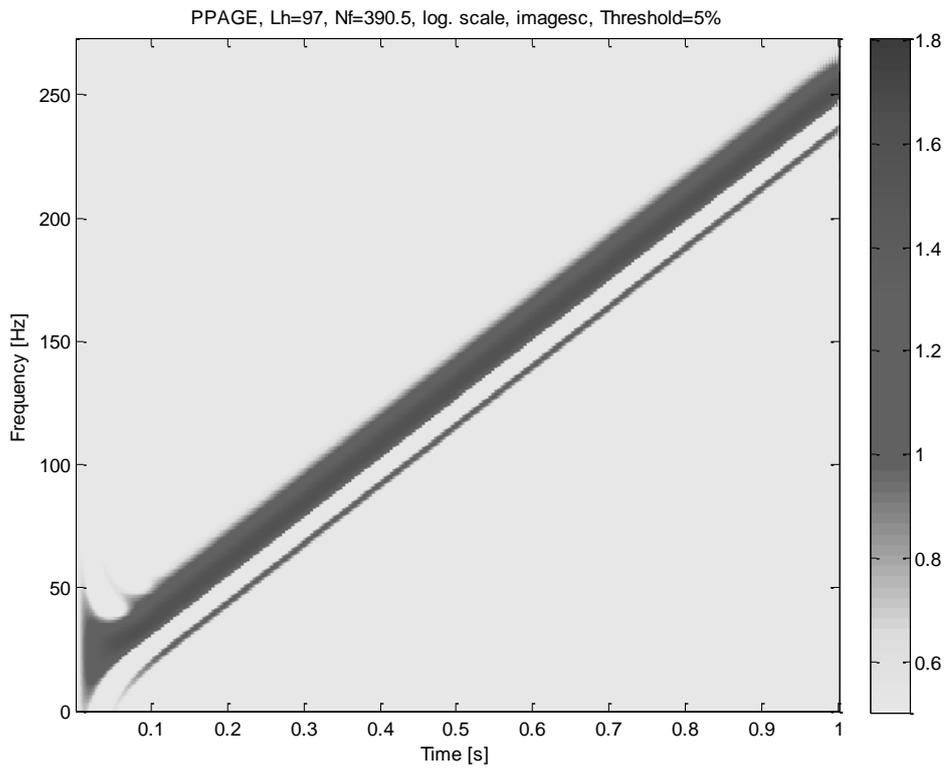


Imagen 16: Distribución Pseudo Page de una señal FM lineal simple.

Con la distribución Pseudo-Page ya se obtiene un mejor resultado que en el caso anterior. Puede verse como se han eliminado todos los términos cruzados salvo uno, lo cual permite ver la frecuencia presente en cada instante de tiempo y obtener una expresión para la frecuencia instantánea de la señal. Sin embargo, aún puede identificarse el término cruzado que aparece como otra componente de la señal, y por lo tanto podría interpretarse de manera errónea que la señal tiene dos componentes en lugar de una.

Con la Distribución ZAM se obtiene la imagen 17:

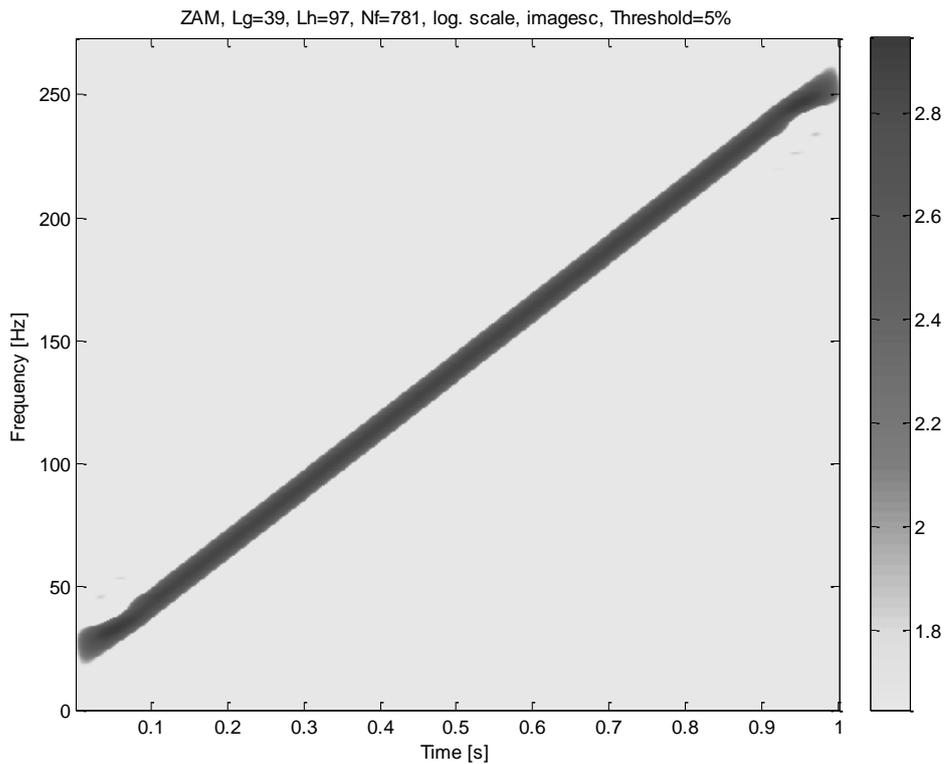


Imagen 17: Distribución ZAM de una señal FM lineal simple.

El resultado de la imagen 17 es bastante bueno, ya que presenta una resolución algo mayor que la que se tiene con la distribución de Born-Jordan en la imagen 13. Además, se puede obtener una expresión para la frecuencia lineal. Sin embargo, para esta señal de una sola componente, sigue siendo mejor la resolución obtenida con la distribución de Wigner-Ville.

Si utilizamos las denominadas distribuciones RID, los resultados son los siguientes.

Al utilizar como filtro de núcleo una ventana de Bessel se tiene el resultado de la imagen 18.

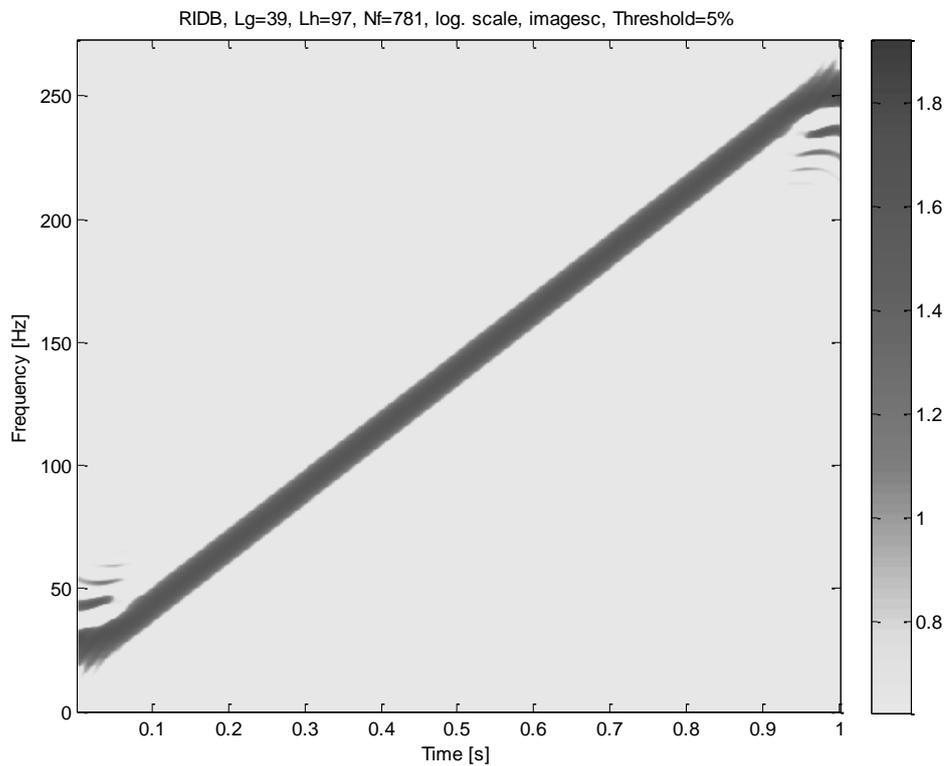


Imagen 18: Distribución RID con ventana de Bessel de una señal FM lineal simple.

Se observa en la imagen 18 como se obtiene un buen resultado, con una resolución muy similar a la que muestra la distribución ZAM. Tras ver la imagen se aprecia la característica de que aparecen unas pequeñas componentes al inicio y al final de la frecuencia instantánea, que sin embargo no llevan a confusión ya que son de muy corta duración.

Si se emplea una ventana binomial como filtro de núcleo se obtiene la imagen 19.

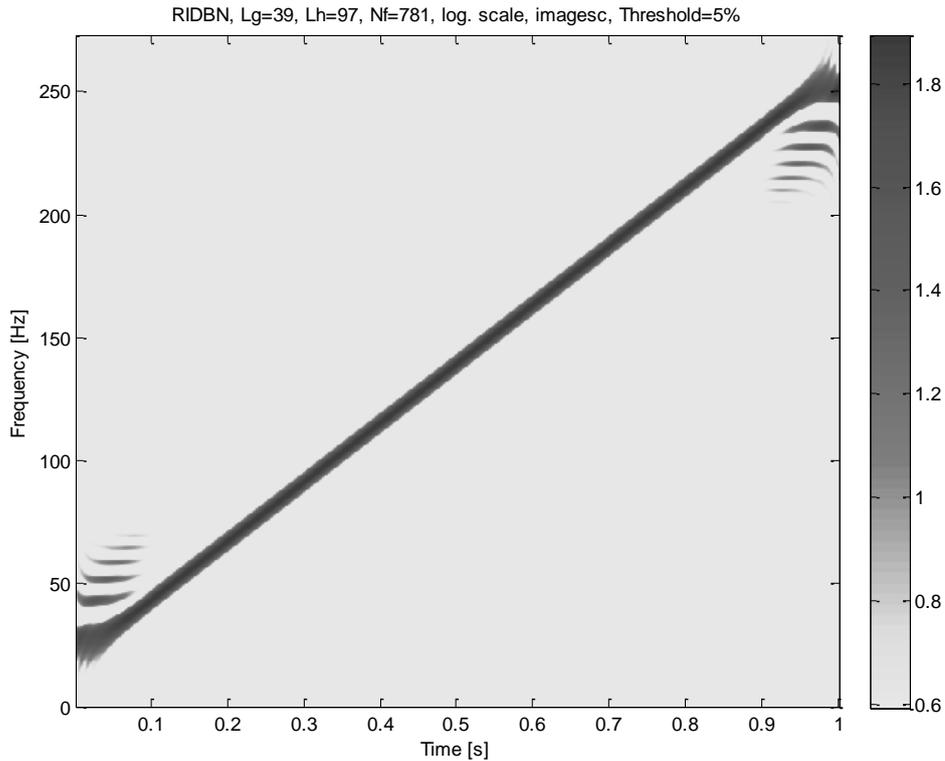


Imagen 19: Distribución RID con ventana binomial de una señal FM lineal simple.

Al usar en este caso la ventana binomial se tiene una mejor resolución que utilizando la RID con ventana de Bessel. En cambio, esta mejora de resolución implica un aumento del número de componentes al inicio y al final de la frecuencia instantánea de la señal, que no llegan a durar lo suficiente como para inducir a error y determinar que también son componentes de la señal.

Tras el análisis, de una señal FM lineal de una única componente, se puede sacar como conclusión que hay dos factores distintivos entre las distribuciones, la presencia de términos cruzados y la diferente resolución obtenida para cada una de las distribuciones.

La presencia de términos cruzados se resume de la tabla 6.

Distribución	Términos cruzados
Rihaczek	Si
Page	Si
Pseudo Page	Si
RID con ventana Bessel	No
RID con ventana Binomial	No
Wigner-Ville	No
Pseudo Wigner-Ville	No
Pseudo Wigner-Ville suavizada	No
Espectrograma	No
Born-Jordan	No
Choi-William	No
ZAM	No

Tabla 6: Relación entre distribuciones y presencia de términos cruzados para señales de una sola componente.

En la tabla 6 se ve que en las tres primeras distribuciones aparecen términos cruzados, y por lo tanto proporcionan un mal resultado para este tipo de señales. Con las demás distribuciones en cambio se obtiene un buen resultado al no presentar componentes indeseadas, aunque en algunas distribuciones como las RID, Born-Jordan o Choi-Williams sí que aparecen unos pocos términos cruzados al inicio y al final de la frecuencia instantánea, pero no de manera significativa.

Al observar la resolución de cada distribución hay dos distribuciones que destacan por motivos opuestos: la distribución de Wigner-Ville al proporcionar una resolución mucho mejor que las demás, y el espectrograma por ofrecer la peor resolución de todas las distribuciones. Las demás distribuciones están en una situación intermedia y con resoluciones similares entre ellas. Se pueden destacar la distribución Pseudo Wigner-Ville y la RID con ventana binomial por tener resoluciones más próximas a la distribución de Wigner-Ville que las demás.

5.2. Comparación mediante una señal FM lineal múltiple.

En este apartado se va a utilizar una señal FM lineal múltiple con una duración de 1s, la cual será combinación lineal de varias señales FM lineales. Se ha escogido arbitrariamente que la señal esté formada de 3 componentes. La primera será una señal FM lineal que varía de 20Hz a 260Hz en un intervalo de 1 segundo, la segunda varía de 20Hz a 60Hz en el mismo intervalo de 1s y la última señal variará de 100Hz a 200Hz desde el instante $t_1=100\text{ms}$ hasta el instante $t_2=700\text{ms}$.

A continuación se realizará el análisis de esta señal mediante las diferentes distribuciones, y para ello es necesario emplear el asociado analítico de la señal original. Al igual que en la sección anterior se aplica un logaritmo a la escala de gris de las distribuciones, para resaltar las diferentes componentes y los términos cruzados que puedan aparecer.

Utilizando la distribución de Wigner-Ville se obtiene el resultado mostrado en la imagen 20.

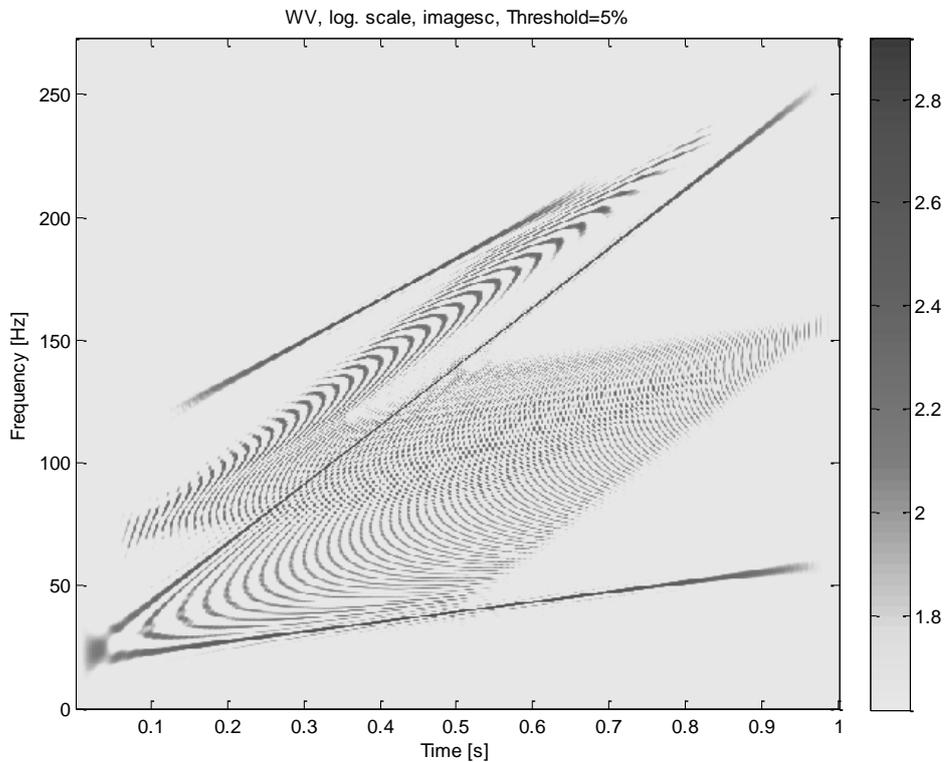


Imagen 20: Distribución de Wigner-Ville de la señal FM lineal de varias componentes.

Para el caso de una señal FM lineal múltiple, con la distribución de Wigner-Ville se pueden ver las frecuencias presentes a lo largo del tiempo con una buena resolución. Sin embargo, también aparecen multitud de términos cruzados. La presencia de los términos cruzados puede inducir error, ya que se puede interpretar que la señal tiene ciertas frecuencias que en realidad no están presentes.

En el caso de la distribución Pseudo Wigner-Ville se obtiene la imagen 21.

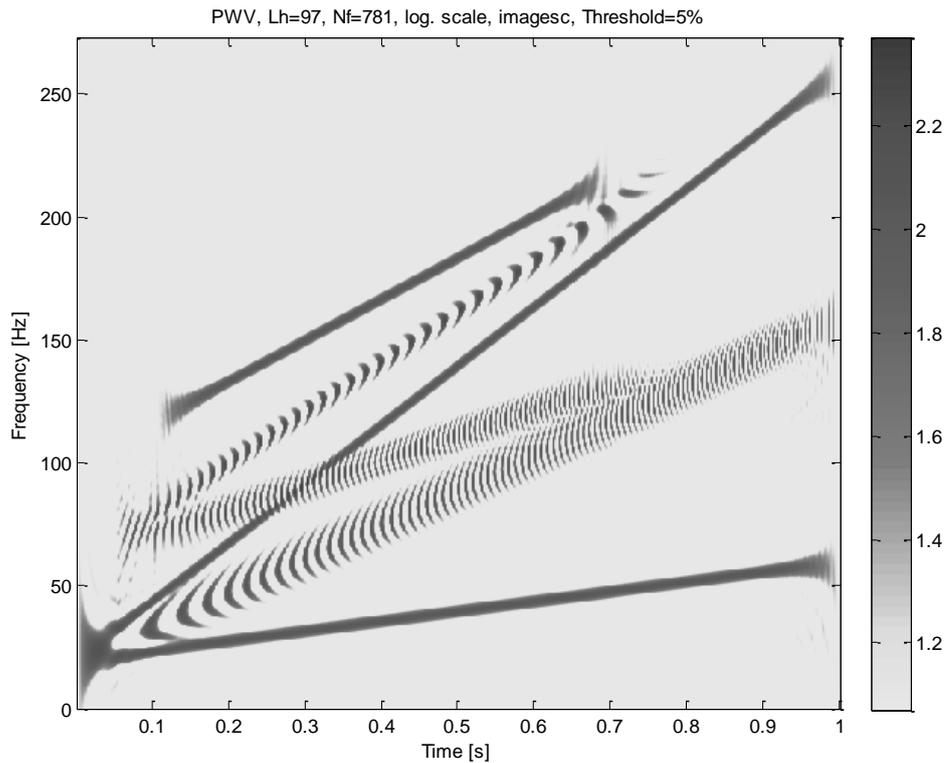


Imagen 21: Distribución Pseudo Wigner-Ville de la señal FM lineal de varias componentes.

En la imagen 21, al utilizar la distribución Pseudo Wigner-Ville (PWVD) se reduce los términos cruzados en relación a la distribución de Wigner-Ville. Sin embargo elimina únicamente los términos cruzados que varían en la dirección de la frecuencia, y aún se puede cometer error al estar presentes los términos cruzados que varían en la dirección del tiempo. El filtrado que realiza la distribución PWVD implica una pérdida de resolución, y el resultado obtenido puede llegar incluso a ser más confuso, puesto que, como puede verse en la imagen 21, los términos cruzados tienen una tendencia lineal, la cual podría interpretarse como frecuencias presentes en la señal, en lugar de interpretarse como términos cruzados.

Empleando la distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada se obtiene el resultado de la imagen 22.

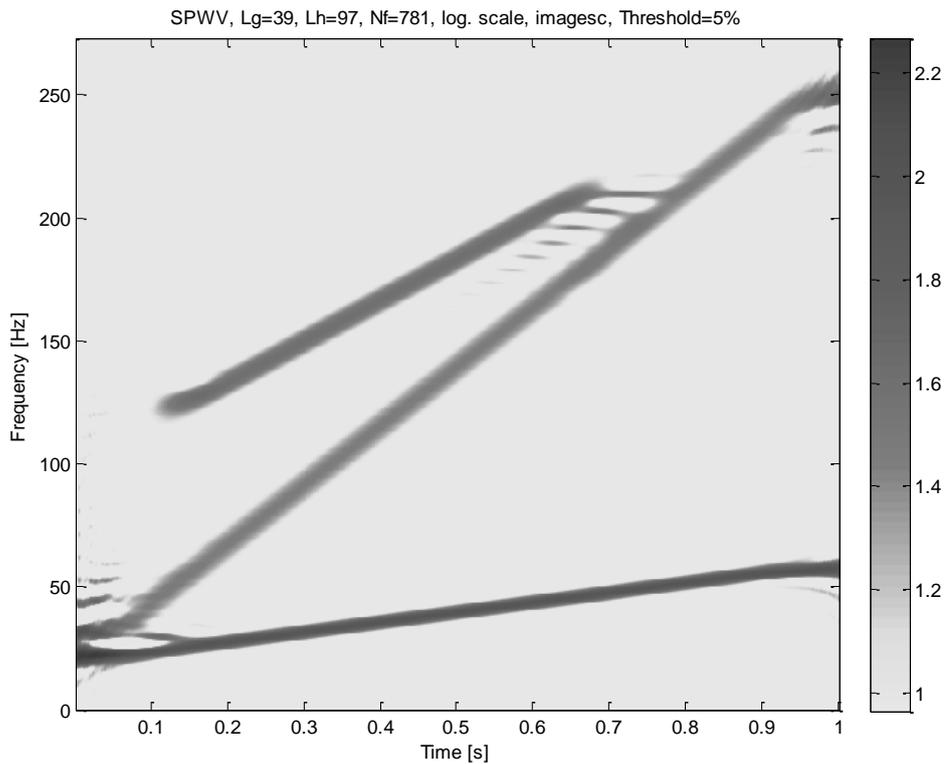


Imagen 22: Distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada de la señal FM lineal de varias componentes.

La distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada (SPWVD) añade un filtrado en la dirección del tiempo a la distribución Pseudo Wigner-Ville. Se aprecia en la imagen 22 como el resultado obtenido es satisfactorio, ya que se tiene una representación limpia de términos cruzados, y se muestran únicamente las frecuencias que realmente están presentes en la señal. Así pues, pueden obtenerse las diferentes expresiones de las frecuencias instantáneas, pero con un grado de incertidumbre, debido a la pérdida de resolución producida por los suavizados.

En los puntos donde las componentes están más próximas entre sí se observa que aparecen unos pequeños términos cruzados, pero no son muy significativos en comparación con las componentes reales de la señal.

La imagen 23 muestra el resultado obtenido con un Espectrograma.

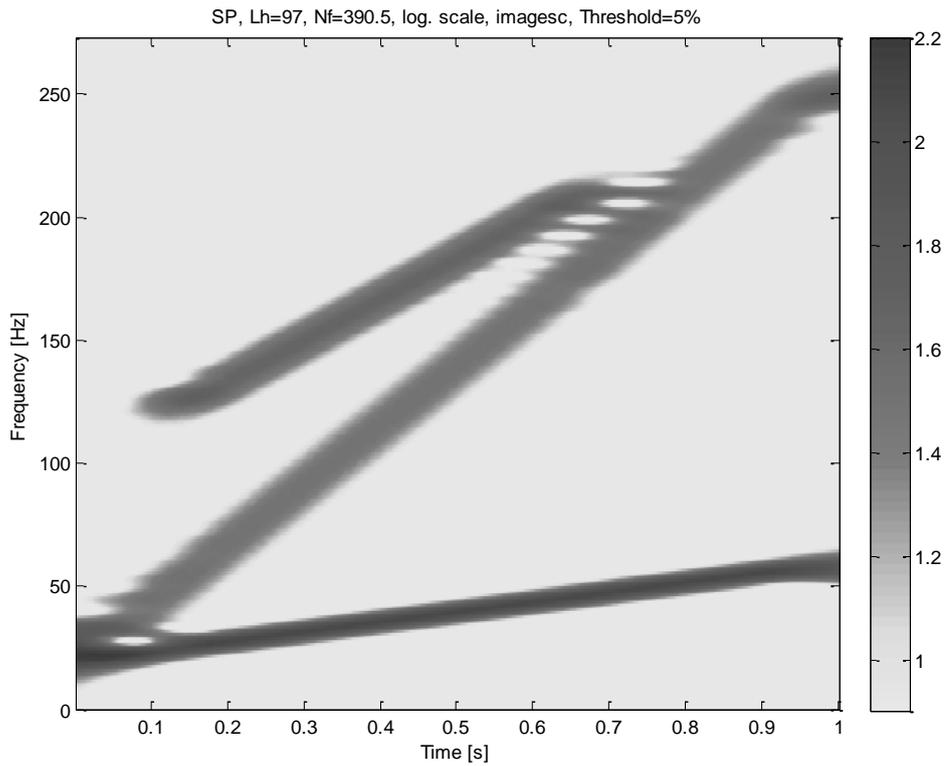


Imagen 23: Espectrograma de la señal FM lineal de varias componentes.

Con el espectrograma se obtiene un buen resultado en relación a los términos cruzados, y es que los elimina completamente salvo en los puntos donde las componentes están muy próximas entre sí. Esta eliminación de los términos cruzados viene a costa de una pérdida de resolución, lo que puede llevar a incrementar el error cometido a la hora de determinar las expresiones de las frecuencias instantáneas de las diferentes componentes.

Al emplear la distribución de Rihaczek el resultado que se obtiene es el mostrado en la imagen 24.

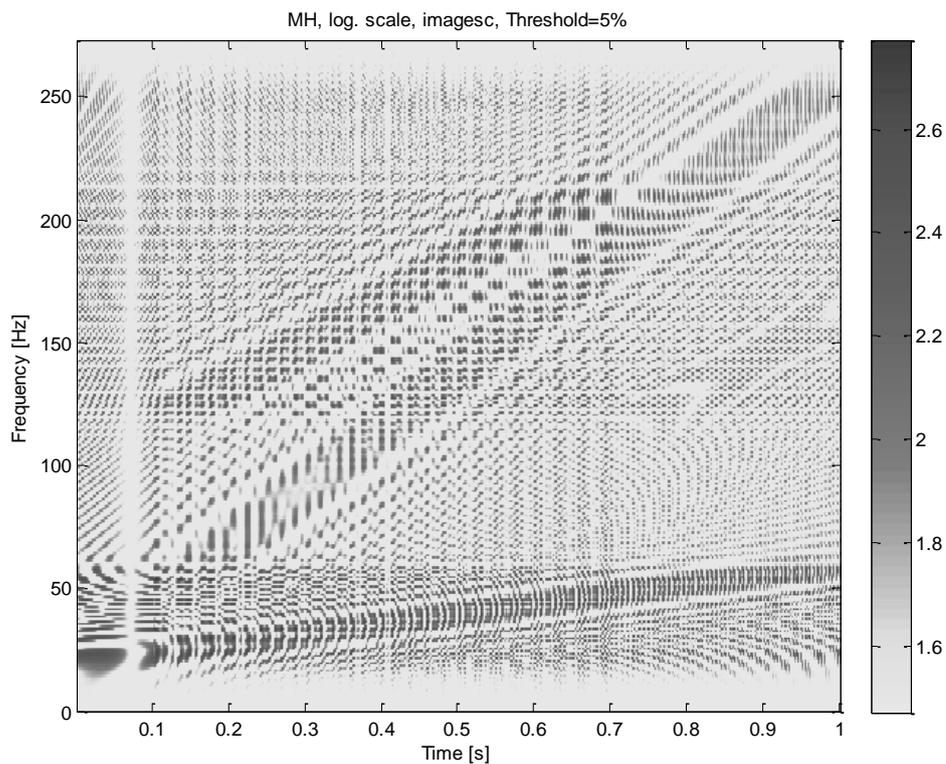


Imagen 24: Distribución de Rihaczek de la señal FM lineal de varias componentes.

Si con una señal simple el resultado obtenido con la distribución de Rihaczek era malo, con esta señal de múltiples componentes es aún peor. De manera que, debido a la alta presencia de términos cruzados y demás componentes indeseadas, no puede obtenerse ninguna conclusión de la imagen 24.

Si se usa la distribución de Born-Jordan se tiene el resultado de la imagen 25.

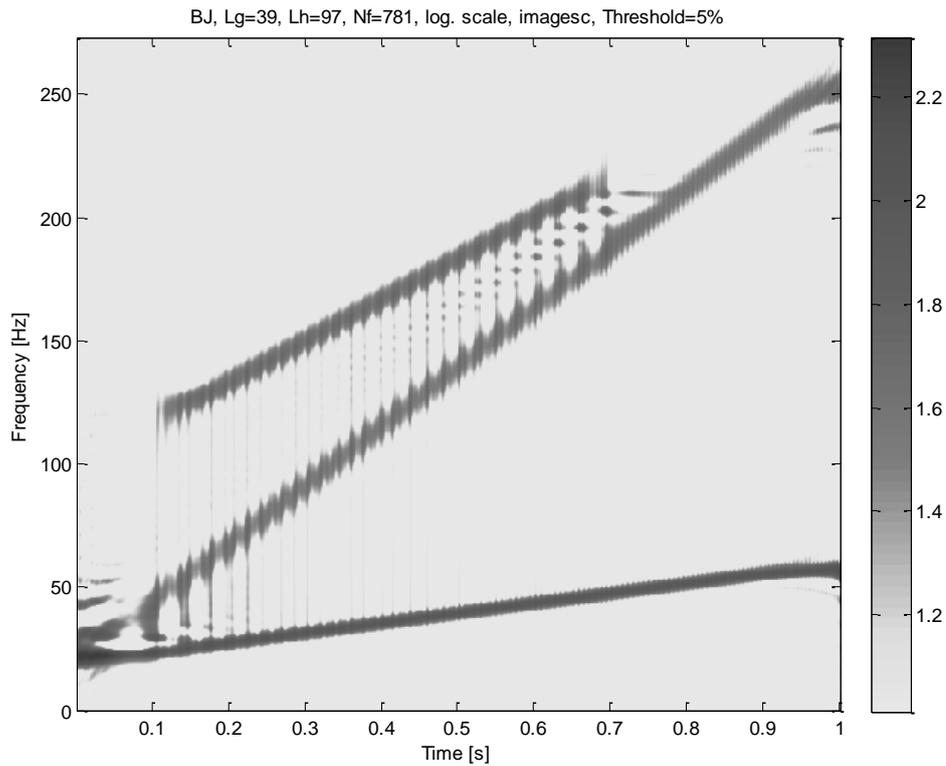


Imagen 25: Distribución de Born-Jordan de la señal FM lineal de varias componentes.

Con la distribución de Born-Jordan se obtiene un buen resultado, ya que elimina los términos cruzados, dejando solamente unos pocos en los puntos donde se aproximan las diferentes componentes. Además, se obtiene una buena resolución, la cual es mejor que la obtenida con el espectrograma y la distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada.

Con la distribución de Choi-Williams se obtiene la imagen 26.

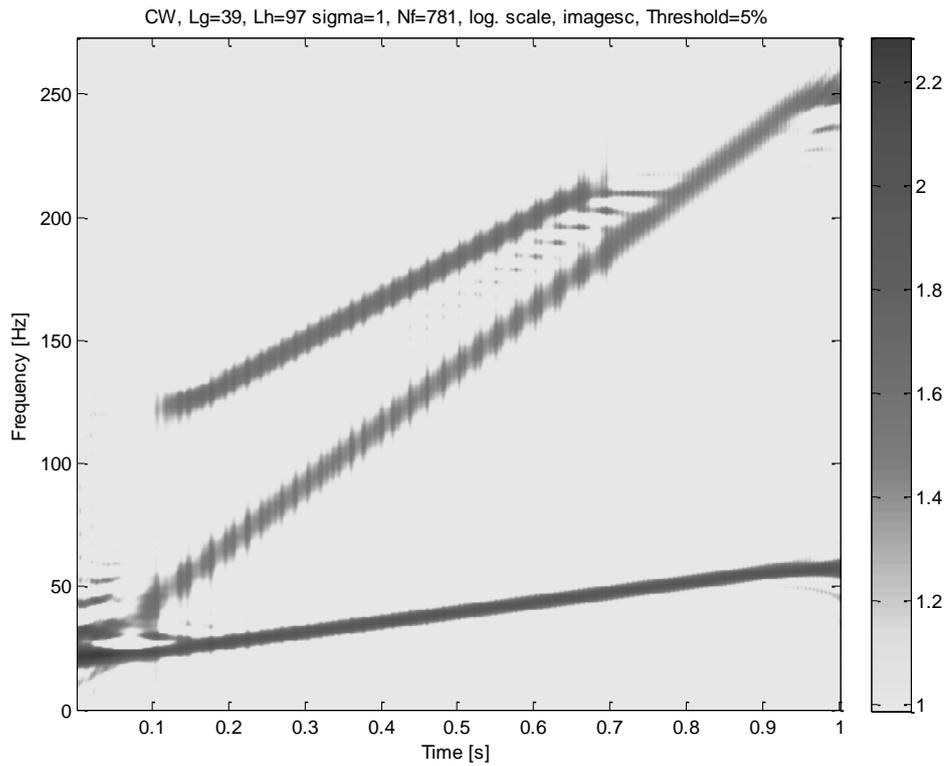


Imagen 26: Distribución de Choi-Williams de la señal FM lineal de varias componentes.

Con la distribución de Choi-William se obtiene un resultado bueno y bastante similar a la distribución de Born-Jordan, ya que también está libre de términos cruzados y la resolución obtenida es prácticamente la misma.

Utilizando la distribución de Page se tiene el resultado de la imagen 27.

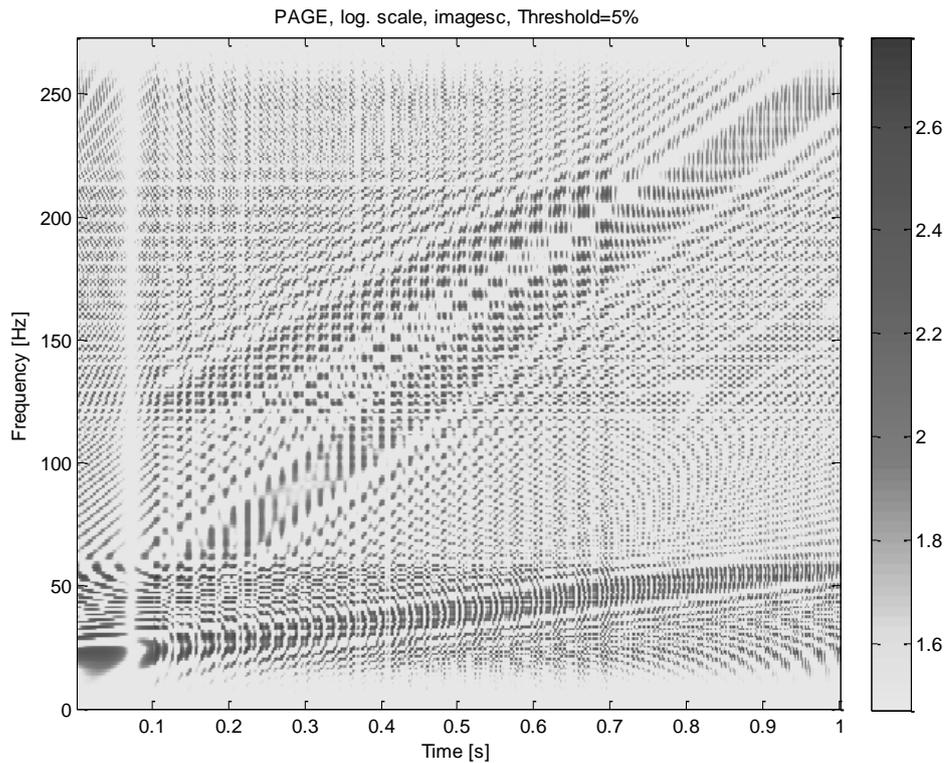


Imagen 27: Distribución Page de la señal FM lineal de varias componentes.

Con la distribución Page, al igual que con la distribución de Rihaczek, ya se obtenía un mal resultado con una señal simple, y con esta señal con múltiples componentes el resultado es aún peor, debido a la alta presencia de componentes indeseadas.

Con la distribución Pseudo Page se obtiene este otro resultado mostrado en la imagen 28.

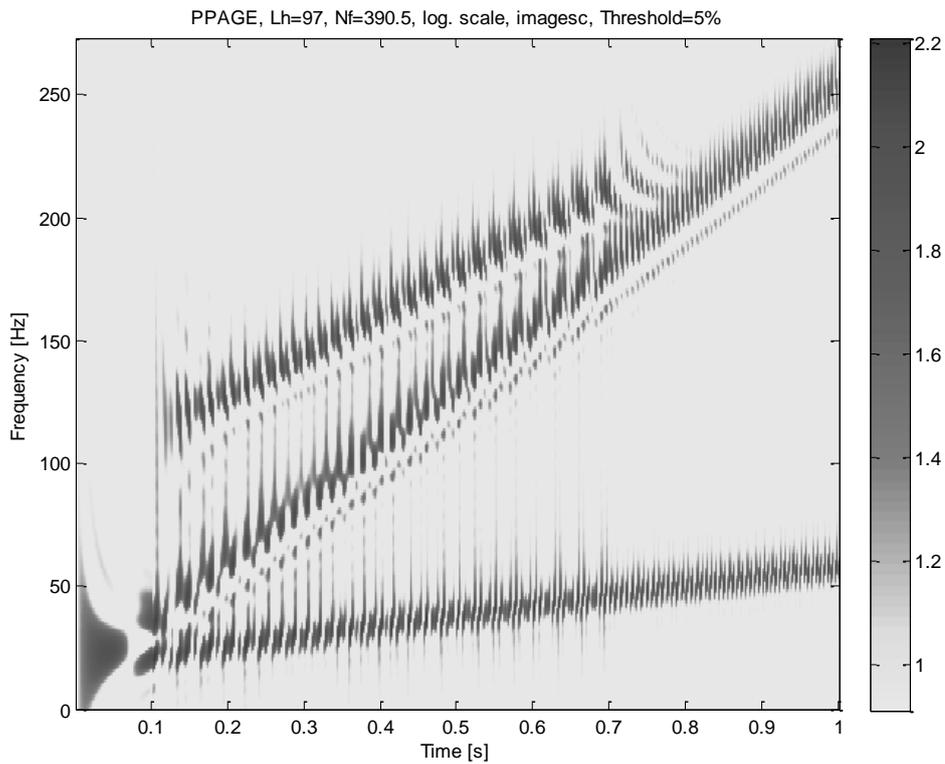


Imagen 28: Distribución Pseudo Page de la señal FM lineal de varias componentes.

Con esta distribución se realiza un suavizado en la distribución de Page, la cual era necesaria para obtener un resultado aceptable. Puede verse como el resultado obtenido es mucho mejor que con la distribución de Page. Sin embargo no llega a ser tan bueno como con otras distribuciones, al presentar aun bastantes términos cruzados.

Si se emplea la Distribución ZAM se obtiene la imagen 29.

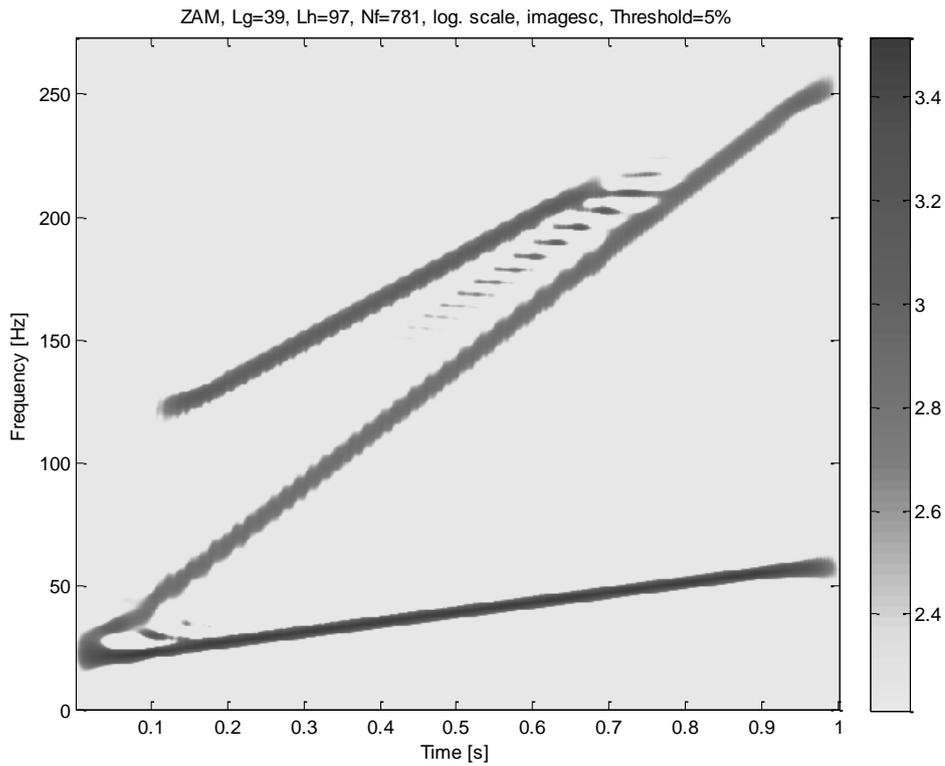


Imagen 29: Distribución ZAM de la señal FM lineal de varias componentes.

Con esta distribución puede verse como el resultado es bastante bueno, ya que elimina los términos cruzados y a su vez obtiene una buena resolución. Observando la imagen 31 se puede apreciar como la buena resolución obtenida se debe a que no se eliminan completamente todos los términos cruzados, ya que aún puede verse la presencia de algunos de ellos en los puntos donde las componentes están muy próximas entre sí. Esta no eliminación completa de los términos cruzados tiene la ventaja de la mejora de la resolución obtenida en relación a las distribuciones anteriores.

Si se utiliza una RID con ventana de Bessel se obtiene la imagen 30.

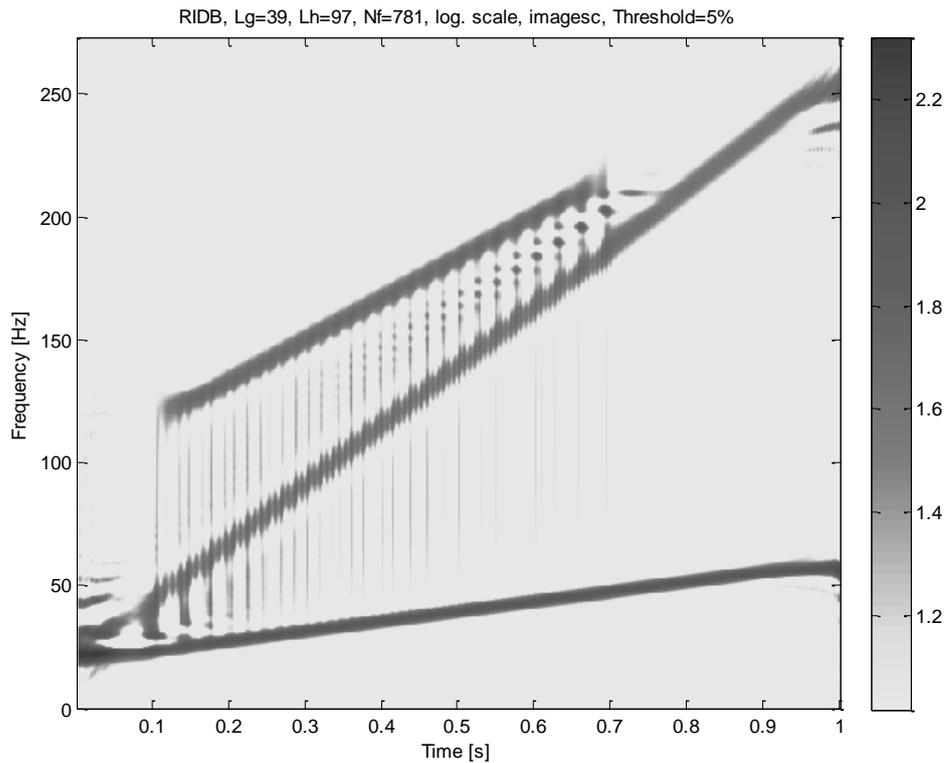


Imagen 30: RID con ventana de Bessel de la señal FM lineal de varias componentes.

El resultado obtenido con una RID utilizando la ventana de Bessel es bueno, ya que aunque no elimina completamente los términos cruzados; los que aparecen son pequeños y no inducen a error. Además, se obtiene una buena resolución, debido también a que no elimina completamente todos los términos cruzados. Sin embargo hay un buen compromiso entre eliminación de los términos cruzados y resolución.

Si se utiliza una RID con ventana binomial se obtiene el resultado de la imagen 31.

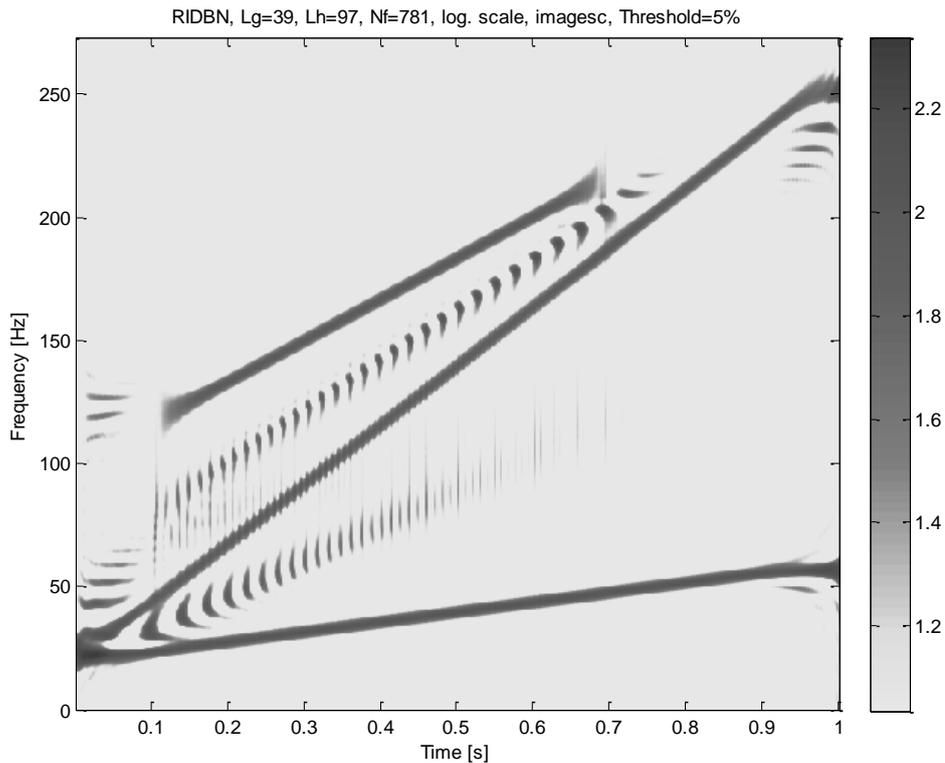


Imagen 31: RID con ventana Binomial de la señal FM lineal de varias componentes.

Si se emplea una ventana Binomial se observan diferencias respecto a la imagen 30, donde se empleaba una ventana de Bessel, y es que la resolución ha aumentado, pero también lo ha hecho la presencia de los términos cruzados. En este caso, sí puede haber confusión en la obtención de las expresiones de las frecuencias instantáneas, ya que al haber más términos cruzados es más fácil interpretarlos como frecuencias de la señal. Por lo tanto, en este caso el compromiso entre resolución y términos cruzados no es tan bueno como el de la imagen 30 donde se usaba una ventana de Bessel.

Al emplear una señal con varias componentes hay más distribuciones, respecto al apartado 5.1, que presentan términos cruzados significativos, como puede verse en la tabla 7:

Distribución	Términos cruzados
Wigner-Ville	Si
Pseudo Wigner-Ville	Si
Rihaczek	Si
Page	Si
Pseudo Page	Si
RID con ventana Binomial	Si
Pseudo Wigner-Ville suavizada	No
Espectrograma	No
Born-Jordan	No
Choi-William	No
ZAM	No
RID con ventana Bessel	No

Tabla 7: Relación entre distribuciones y presencia de términos cruzados para señales de varias componentes.

Si nos fijamos en la resolución de cada distribución ocurre lo mismo que con la señal de una sola componente, y es que con la distribución de Wigner-Ville se obtiene la mejor resolución, mientras que con el espectrograma la peor, estando las demás distribuciones en un punto intermedio entre ambas. Sin embargo, en este caso se observa que las distribuciones que ofrecen una mejor resolución también presentan términos cruzados, lo que lleva a la conclusión de que la mejor distribución para este tipo de señales será la que tenga un mejor compromiso entre resolución y términos cruzados, es decir, la distribución que proporcione una mejor resolución y tenga únicamente términos cruzados pequeños para que no induzcan a cometer un error a la hora de determinar las componentes de la señal.

Al observar los términos cruzados presentes en las diferentes distribuciones se puede sacar como conclusión que estos aparecen en el punto medio comprendido entre dos componentes de la señal, por lo que cuantas más componentes tenga una señal más términos cruzados aparecerán. También se aprecia que estos términos cruzados son más marcados cuando las componentes están más próximas, lo que hace que aparezcan restos de ellos cuando se intenta obtener una buena resolución.

Finalmente, si se comparan las conclusiones de las dos señales diferentes analizadas hasta ahora (apartado 5.1 y 5.2), se puede ver como la distribución de Rihaczek y la distribución de Page no aportan nada, ya que proporcionan un mal resultado para las dos señales, solamente tienen interés teórico. A su vez, la distribución Pseudo Page también da un mal resultado para ambas señales, en comparación con las demás distribuciones. Por eso, a partir de ahora no se utilizarán estas distribuciones en el resto de la comparativa, pues ya se ha demostrado que son una mala elección.

5.3. Comparación mediante una señal real.

En este último apartado se va a analizar un archivo de audio de un *tursiops truncatus* comúnmente llamado delfín mular, y se tratará de identificar a partir de ese archivo los diferentes tipos de sonidos que emiten estos cetáceos, los cuales son tres [9]:

1. Silbidos: Son sonidos tonales de frecuencia modulada, es decir, son sonidos en los que aparece una única frecuencia modulada en el tiempo, aunque en varias ocasiones suelen aparecer armónicos. Los silbidos emitidos por los delfines normalmente se encuentran en un rango de frecuencias comprendidos entre los 2 y los 15kHz, aunque se han registrado silbidos de más de 20kHz.

Los silbidos los utilizan los delfines, y otros cetáceos, como forma de comunicación social. Hay silbidos muy parecidos entre diferentes especies, por lo que para distinguir una especie de otra no basta con unos segundos de audio, sino que hay que observar el patrón general de los silbidos durante un tiempo para identificar cada especie.

De entre todos los silbidos hay uno característico, y es el llamado silbido “firma”. Cada ejemplar tiene su propio silbido “firma” mediante el que se le puede identificar. De manera que parece servir como identificador individual, como ocurre con los nombres propios en los humanos.

2. Zumbidos: Al igual que los silbidos estos sonidos también se utilizan para la comunicación social, pero en este caso no son sonidos continuos sino pulsados. Los zumbidos se emiten con intervalos cortos entre pulsos, y son sonidos de un amplio espectro, de manera que cubren un gran rango de frecuencias. En el caso del delfín mular los zumbidos se emiten en intervalos cortos, con pulsos de duración comprendida entre 100 y 200 μ s, y frecuencias inferiores a 20kHz.

En general, los zumbidos tienen una alta repetición, de hasta más de 300 pulsos por segundo. De manera que los cetáceos lanzan pulsos tan rápidamente que no les da tiempo a recibir ningún eco. Por esto es por lo que se cree que los zumbidos son utilizados para comunicación social.

3. Clicks: Los clics, al igual que los zumbidos, son sonidos pulsados que cubren un amplio rango de frecuencias. En cambio, al contrario que los zumbidos los clicks se utilizan para la ecolocalización. En particular, un delfín mular emite clicks en el rango de los ultrasonidos, con frecuencias comprendidas entre los 18 y los 150kHz [10]. Mientras que la duración de un pulso está entre los 50 y 130 μ s.

Los clicks y los zumbidos se pueden confundir al ser ambos sonidos de naturaleza pulsada. Sin embargo, estos sonidos tienen algunas características que los diferencian. Los clicks al usarse para la ecolocalización son sonidos direccionales y de mayor intensidad que los zumbidos. Además, los clicks se emiten en intervalos más largos, con una media de 30 clicks por segundo, pues esperan a recibir un eco antes de mandar otro.

La ecolocalización es una habilidad que han desarrollado los cetáceos, la cual les permite localizar y diferenciar objetos mediante la transmisión de ondas sonoras de alta frecuencia, y escuchando e identificando los ecos que reciben de las ondas reflejadas por dichos objetos. Por lo tanto, es un mecanismo que les permite “ver” y conocer su entorno por medio de la emisión de sonidos.

En base al rango de frecuencias en el que se emiten los tres tipos de sonidos, se deduce que sólo se podrá identificar dos de ellos en el archivo de audio, dado que los clicks del delfín mular se emiten en el rango de los ultrasonidos, concretamente entre 18 y 150kHz.

La representación en el tiempo del archivo de audio se muestra en la imagen 32. Mientras que el espectro del asociado analítico se aprecia en la imagen 33.

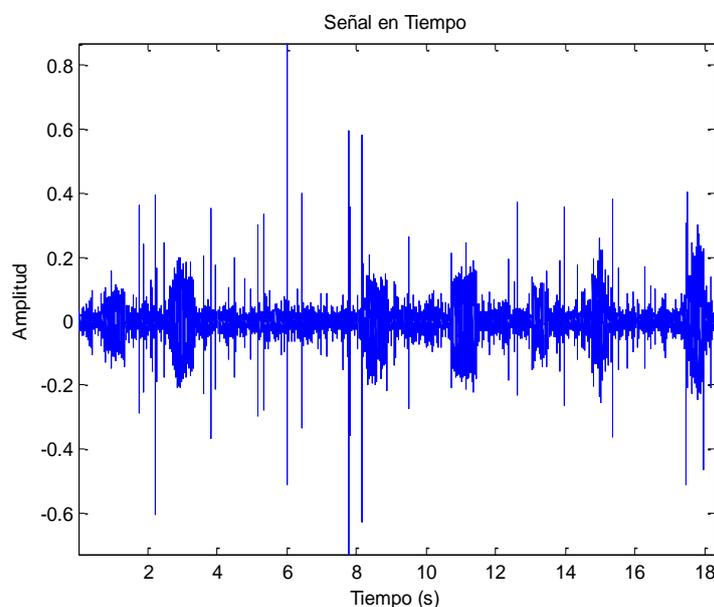


Imagen 32: Audio de un delfín mular en función del tiempo.

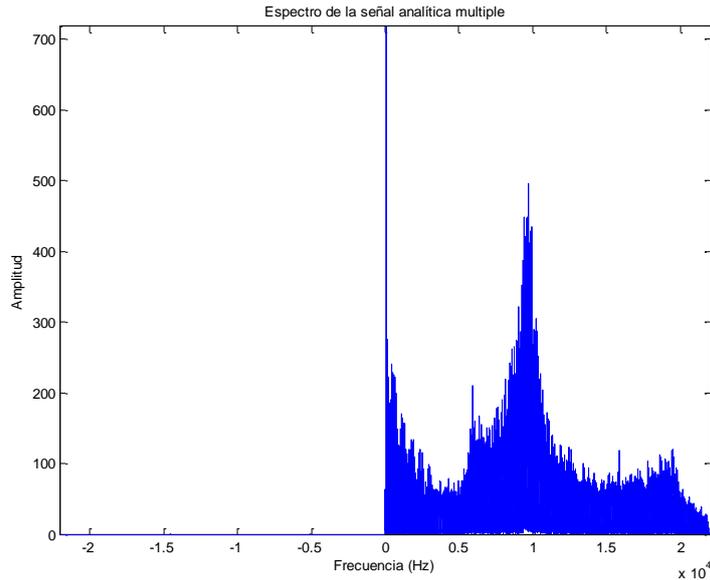


Imagen 33: Espectro del asociado analítico del audio de un delfín mular.

La frecuencia de muestre de este archivo .wav es de 44.2kHz, lo que proporciona una frecuencia máxima de unos 22.1kHz, tal y como se aprecia en la imagen 33. Al ser la frecuencia máxima de 22.1kHz se confirma que efectivamente no aparecerán los clicks en el análisis, al ser emitidos en frecuencias de los ultrasonidos con frecuencias entre los 18kHz y los 150kHz.

Para procesar el archivo ha sido necesario trocearlo y analizar cada trozo por separado. El tamaño elegido para procesar cada trozo es de 4096 muestras, ya que es el mayor tamaño potencia de 2 (para mayor velocidad de computación) que no excede la capacidad de memoria.

El tener que procesar un archivo a trozos no es un problema, y de hecho, el procesado en tiempo real se realiza a trozos. En este caso, el tamaño escogido para procesar cada trozo es muy pequeño, lo que impedirá visualizar un silbido completo de una sola vez.

La necesidad de tener que utilizar trozos tan pequeños sí es un problema, y puede acarrear graves consecuencias en el caso de procesado en tiempo real. Al tratarse de trozos muy pequeños el tiempo de adquisición de cada trozo es mínimo, y el tiempo de procesado de cada trozo será mayor que el tiempo de adquisición, lo que llevará a una pérdida de muestras. En este caso, al disponer desde el principio de todas las muestras no se tendrá ese problema, sin embargo se tiene un arduo trabajo por delante al disponer de muchos trozos.

El tener que utilizar trozos tan pequeños puede deberse a la versión de Matlab utilizada, a la toolbox o al ordenador. En este proyecto se utiliza la versión de Matlab R2009a, la toolbox es la time-frequency toolbox [8] y las características del ordenador son 4GB de RAM, procesador Intel core 2 Duo p8400 y Windows Vista de 32 bits.

Para llevar a cabo la comparativa, primero se ha procesado el archivo mediante el espectrograma, y se han identificado los dos sonidos esperados. La decisión de utilizar el espectrograma a la hora de identificar los sonidos se debe a que, aunque es la distribución que proporciona una peor resolución, también es la que mejor elimina los términos cruzados. De esta manera se esperaba minimizar el riesgo de error a la hora de detectar las diferentes componentes de los sonidos del delfín mular.

Una vez se han identificado los sonidos del delfín mular se ha empleado un trozo de cada sonido para comparar en un caso real las diferentes distribuciones.

5.3.1. Silbido.

En el apartado 5.3 ya se han comentado las características de los silbidos. En base a esas características, se sabe que para identificar un silbido hay que encontrar un sonido tonal modulado con una frecuencia comprendida entre los 2kHz y los 15kHz, aunque pueden aparecer armónicos a frecuencias superiores.

Tras analizar el archivo de audio con el espectrograma, y con el conocimiento previo de las características de los silbidos de un delfín mular, se ha conseguido identificar varios sonidos de este tipo.

Un ejemplo representativo de un silbido completo puede verse desde la imagen 34 a la 41. En cada imagen se muestra el espectrograma de un trozo del silbido completo emitido por el delfín mular.

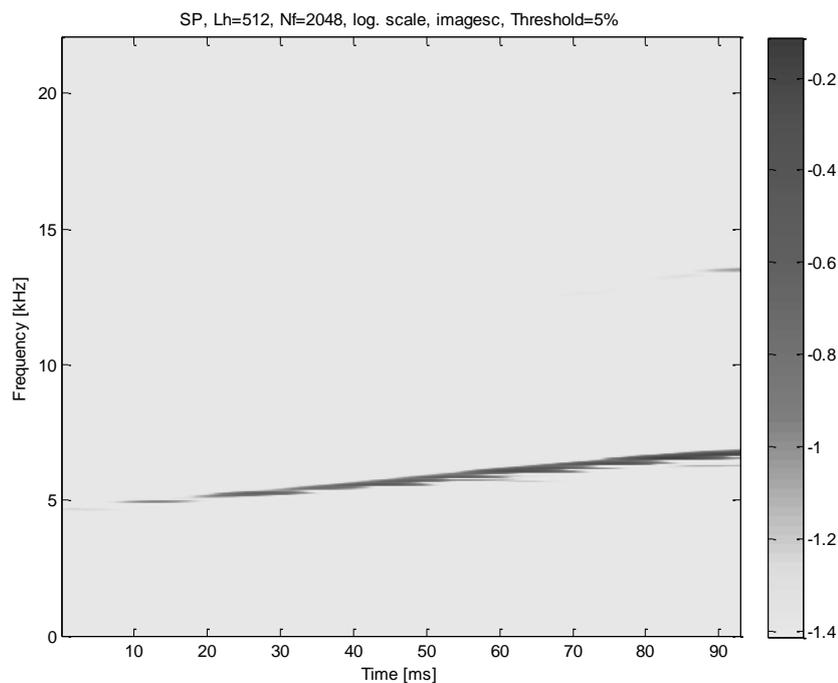


Imagen 34: Espectrograma de un silbido de delfín mular. Trozo 1.

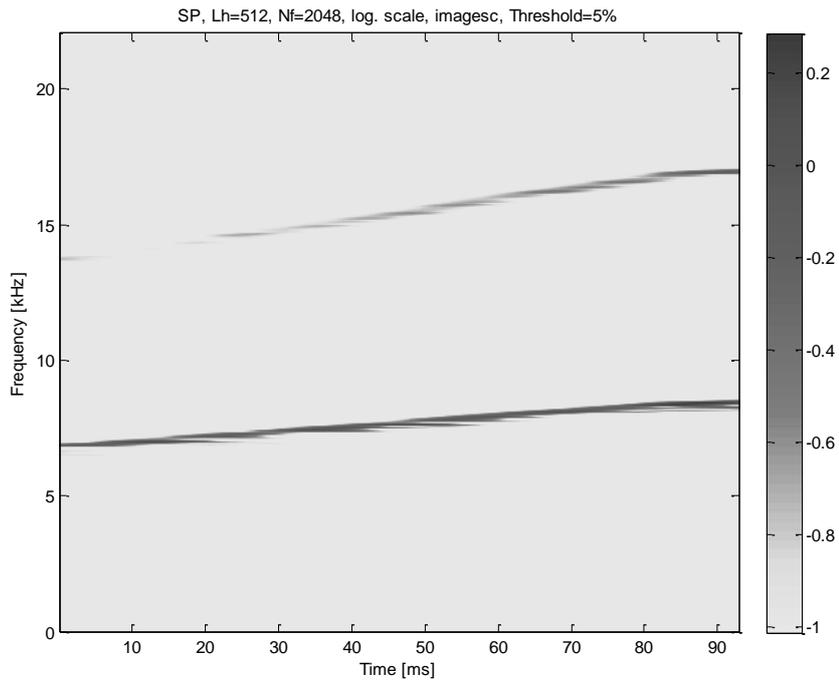


Imagen 35: Espectrograma de un silbido de delfín mular. Trozo 2.

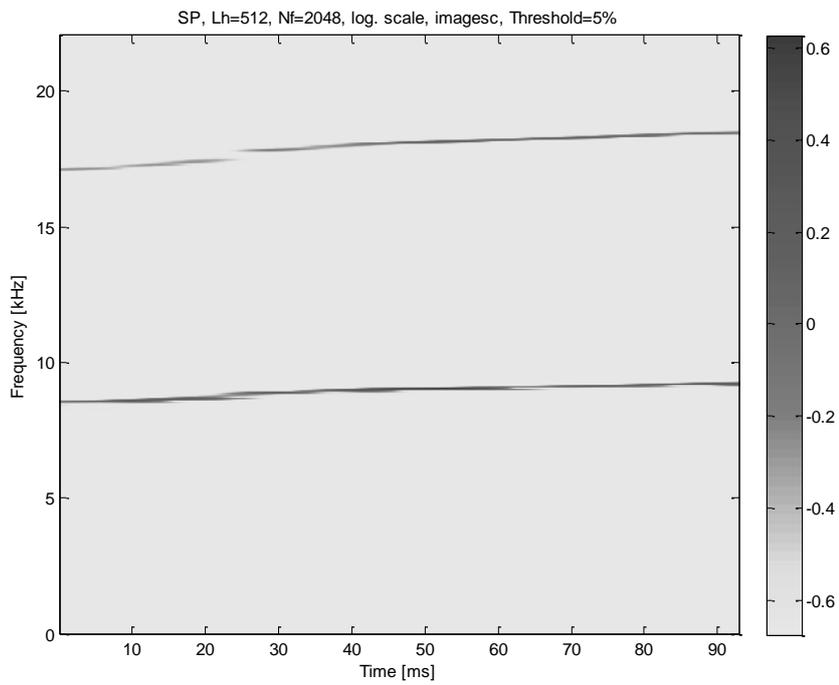


Imagen 36: Espectrograma de un silbido de delfín mular. Trozo 3.

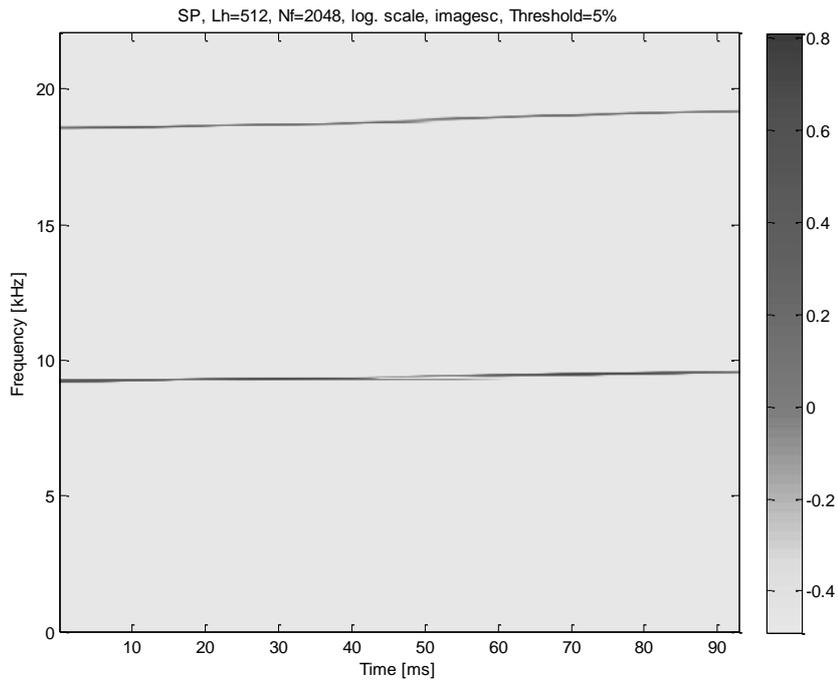


Imagen 37: Espectrograma de un silbido de delfín mular. Trozo 4.

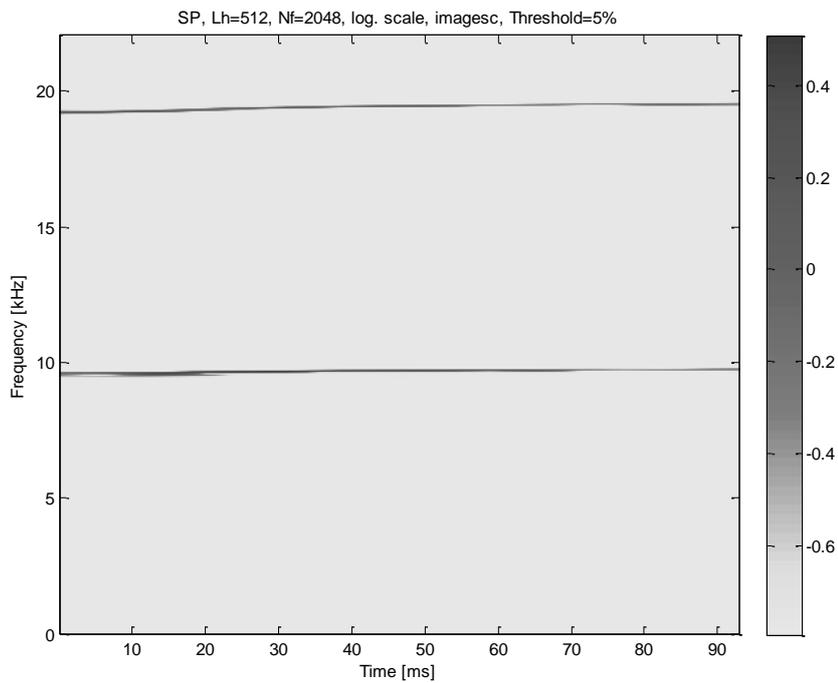


Imagen 38: Espectrograma de un silbido de delfín mular. Trozo 5.

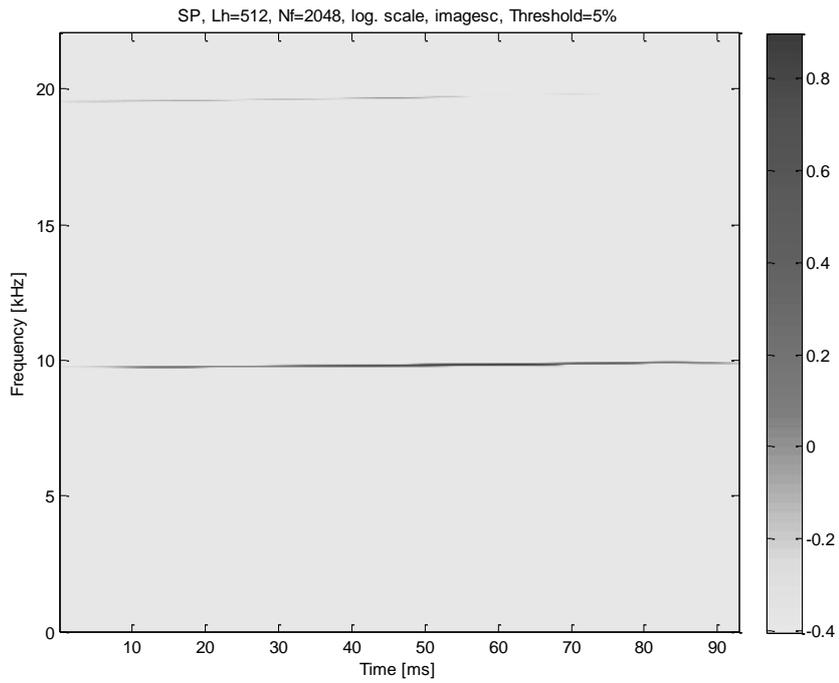


Imagen 39: Espectrograma de un silbido de delfín mular. Trozo 6.

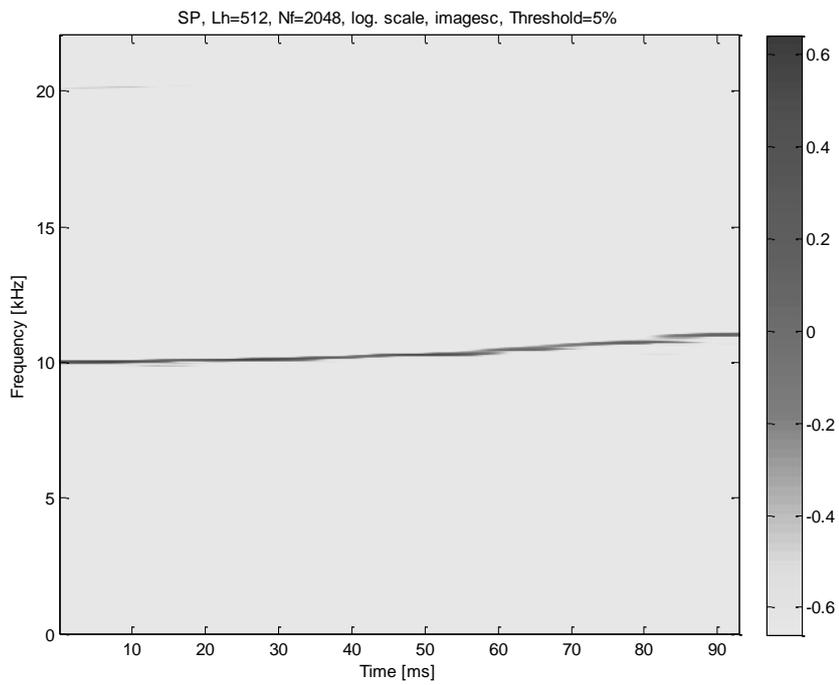


Imagen 40: Espectrograma de un silbido de delfín mular. Trozo 7.

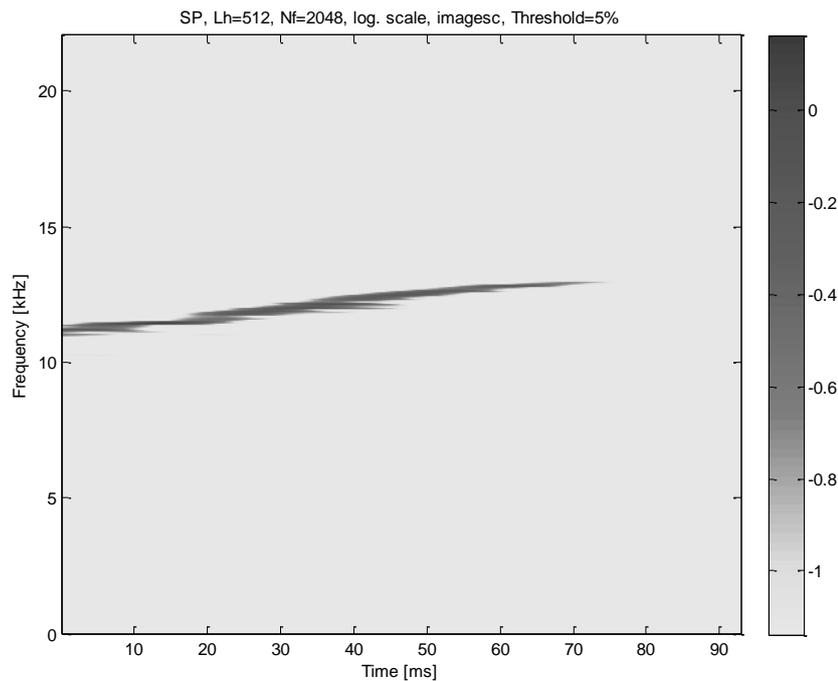


Imagen 41: Espectrograma de un silbido de delfín mular. Trozo 8.

En el espectrograma de la imagen 34 se aprecia como empieza a emitirse una primera componente modulada, que se corresponde con una señal FM lineal que empieza en 5kHz, y que irá creciendo hasta acabar en 13kHz, tal y como se ve en la imagen 41.

En la imagen 35 se puede ver como a los 14kHz empieza a emitirse otra componente modulada, cuya frecuencia es en todo momento el doble que la frecuencia de la primera componente. Además, la intensidad de esta componente es menor que la de la primera, e incluso llega a desaparecer en algunos puntos, como se puede ver en la imagen 39. Por lo tanto, se puede concluir que la primera componente corresponde a una frecuencia fundamental, mientras que la segunda componente corresponde al primer armónico.

Tras analizar las imágenes de la 34 a la 41 se ve que se trata de un sonido con frecuencia modulada comprendida entre los 5kHz y los 15kHz, tal y como se esperaba. Esto lleva a concluir que efectivamente se trata de un silbido.

A continuación, para continuar con la comparativa, se va a procesar un trozo del silbido anterior con las demás distribuciones, concretamente el trozo 2 mostrado en la imagen 36. Se ha elegido este trozo para ver si se detecta el primer armónico, y para comprobar si aparecen términos cruzados entre la frecuencia fundamental y el primer armónico.

Con la distribución de Wigner-Ville se observa el resultado de la imagen 42.

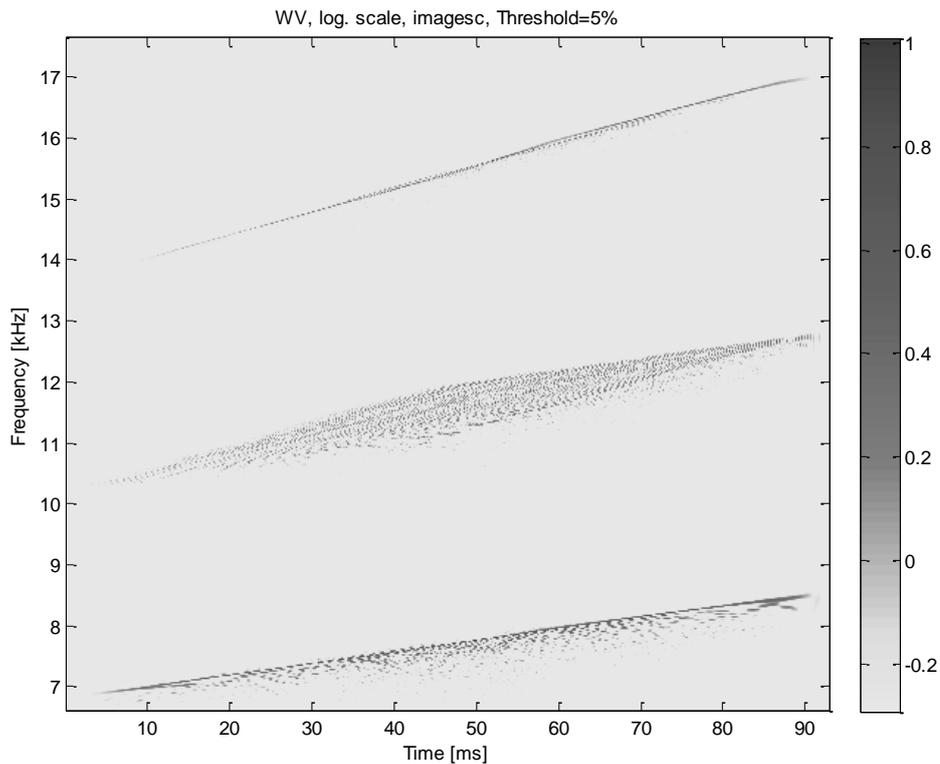


Imagen 42: Distribución de Wigner-Ville de un silbido de delfín mular.

En la imagen 42 se aprecia la presencia de varias componentes. Aparece una componente lineal que empieza en 7kHz y otra que empieza en 14kHz, mientras que en un punto intermedio entre ambas aparecen términos cruzados.

Al haber dos componentes podrían tratarse de dos silbidos diferentes. Sin embargo, tras haber analizado anteriormente el silbido con el espectrograma se sabe que la componente cuya frecuencia empieza en 7KHz es la frecuencia fundamental, y la componente cuya frecuencia empieza en 14KHz es el primer armónico.

El resultado obtenido con la WVD, imagen 42, tiene una mejor resolución que la obtenida con el espectrograma en la imagen 35. Esta mayor definición lleva a poder obtener la expresión de la frecuencia fundamental con una mayor precisión. El problema de la WVD está en que presenta multitud de términos cruzados a mitad de distancia entre la frecuencia fundamental y el armónico.

Si se emplea la distribución Pseudo Wigner-Ville (PWVD) se obtiene la imagen 43.

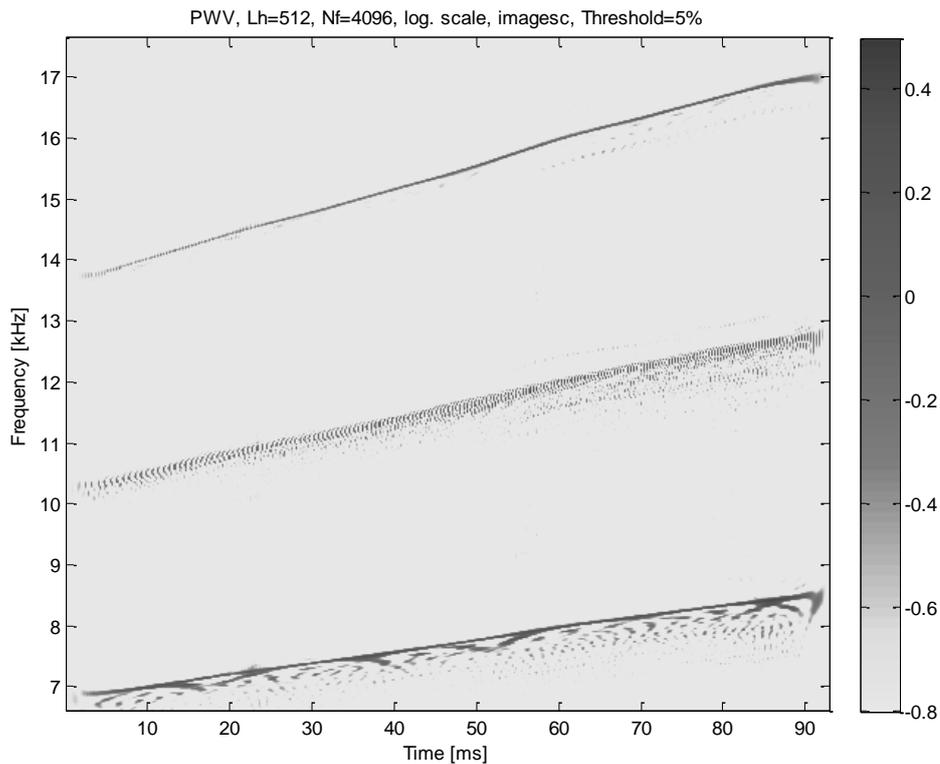


Imagen 43: Distribución Pseudo Wigner-Ville de un silbido de delfín mular.

En este caso se ha reducido la cantidad de términos cruzados que aparecían en la distribución de Wigner-Ville. Sin embargo, esto no impide que se puedan seguir cometiendo errores a la hora de determinar las frecuencias presentes en el silbido. Además, la reducción de los términos cruzados ha implicado un aumento de la incertidumbre o pérdida de resolución, aunque sin llegar a ser demasiado significativa.

En la imagen 44 se observa el resultado obtenido con la distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada (SPWVD).

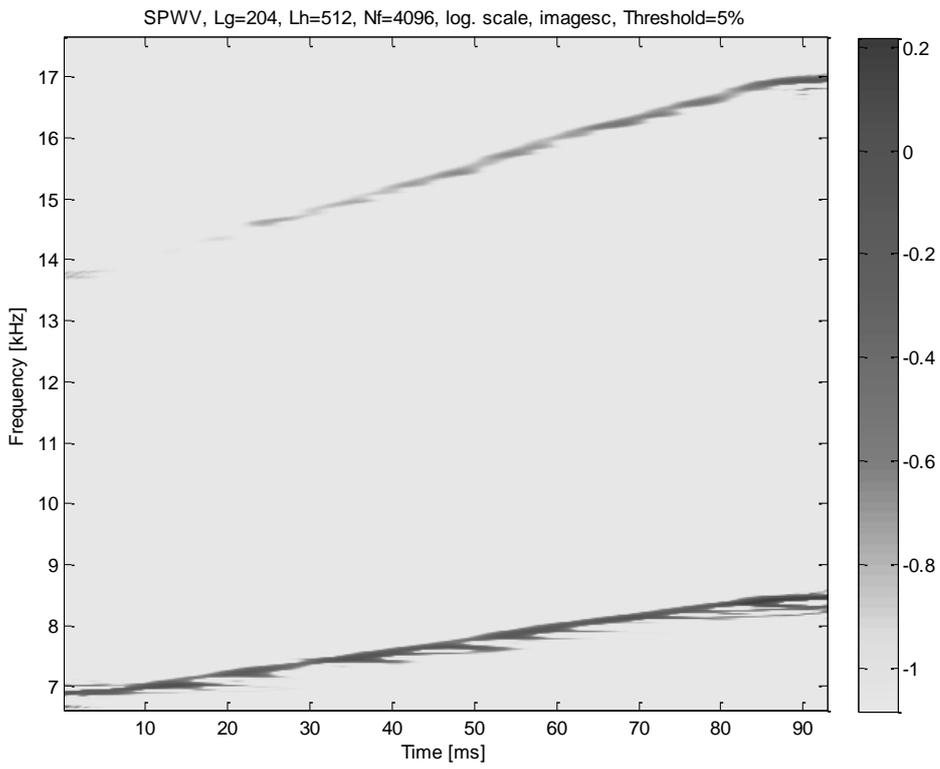


Imagen 44: Distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada de un silbido de delfín mular.

En la imagen 44 se aprecia como en este caso sí que se han eliminado los términos cruzados completamente, y sólo aparece la frecuencia fundamental y el armónico. También se observa como se ha reducido la resolución al haber aumentado el grosor de las líneas. Sin embargo, a pesar de la pérdida de resolución respecto a la WVD, el resultado es bastante mejor que el que se obtenía con el espectrograma.

Con la distribución de Born-Jordan se obtiene la imagen 45.

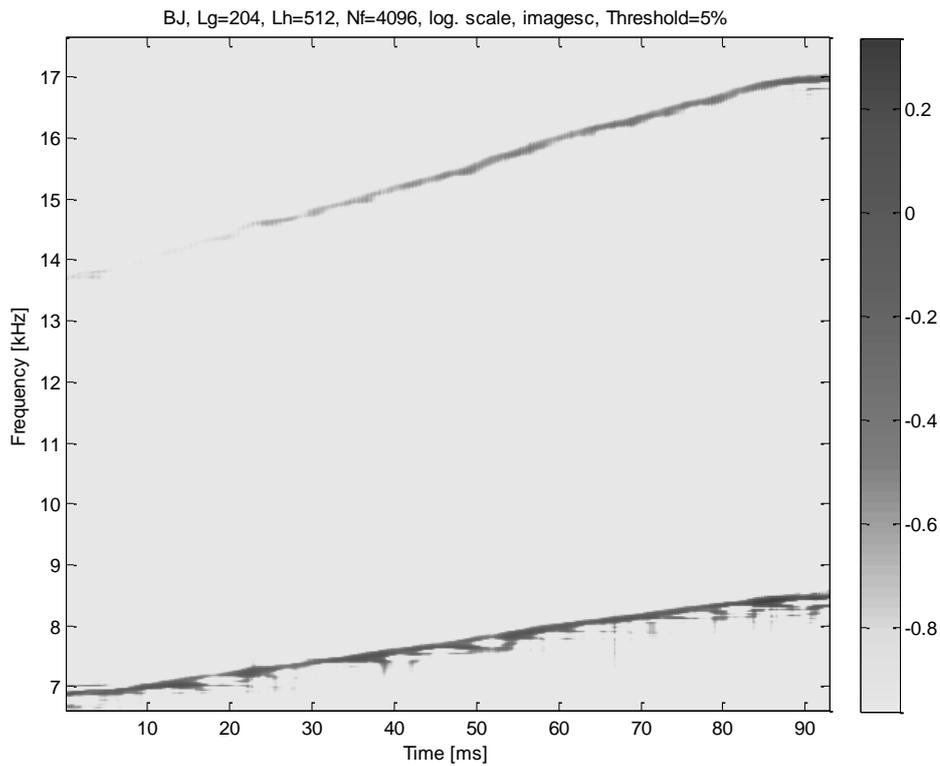


Imagen 45: Distribución Born-Jordan de un silbido de delfín mular.

En este caso, con la distribución de Born-Jordan, se obtiene un resultado muy similar al obtenido con la SPWVD, puesto que al eliminarse todos los términos cruzados sólo aparece la frecuencia fundamental y el armónico con prácticamente la misma resolución.

Si se emplea la distribución Choi-William se obtiene un resultado muy similar al anterior, como se muestra en la imagen 46.

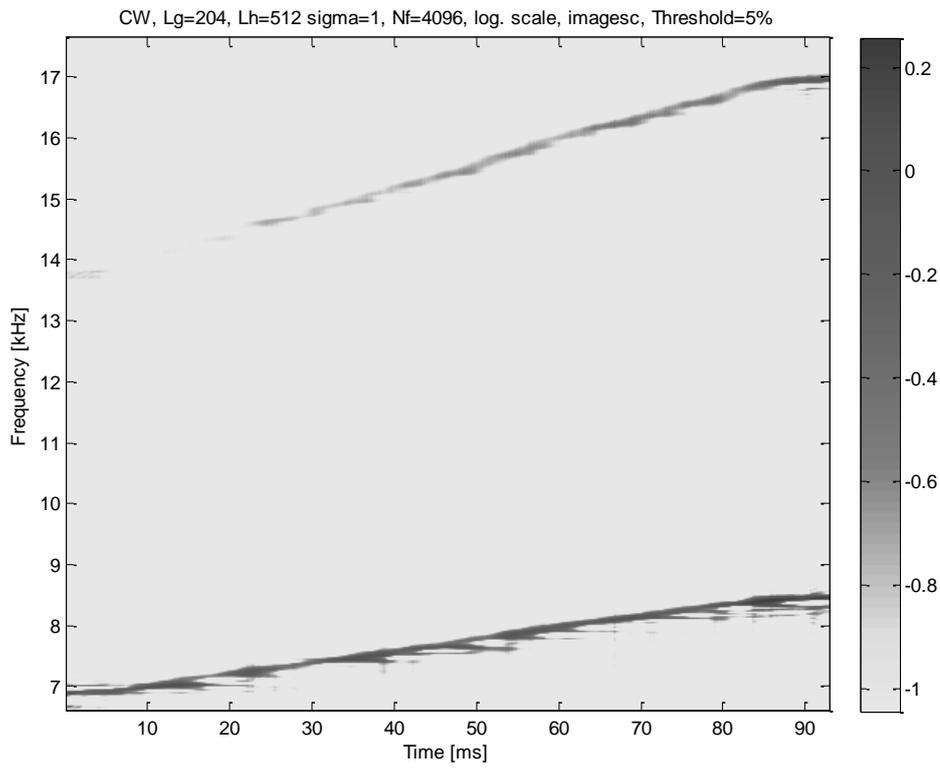


Imagen 46: Distribución Choi-William de un silbido de delfín mular.

Al igual que en el caso anterior, con la distribución Choi-Williams se consigue eliminar todos los términos cruzados que aparecían en la WVD a costa de una pérdida de resolución.

Si se utiliza la distribución ZAM se obtiene el resultado de la imagen 47.

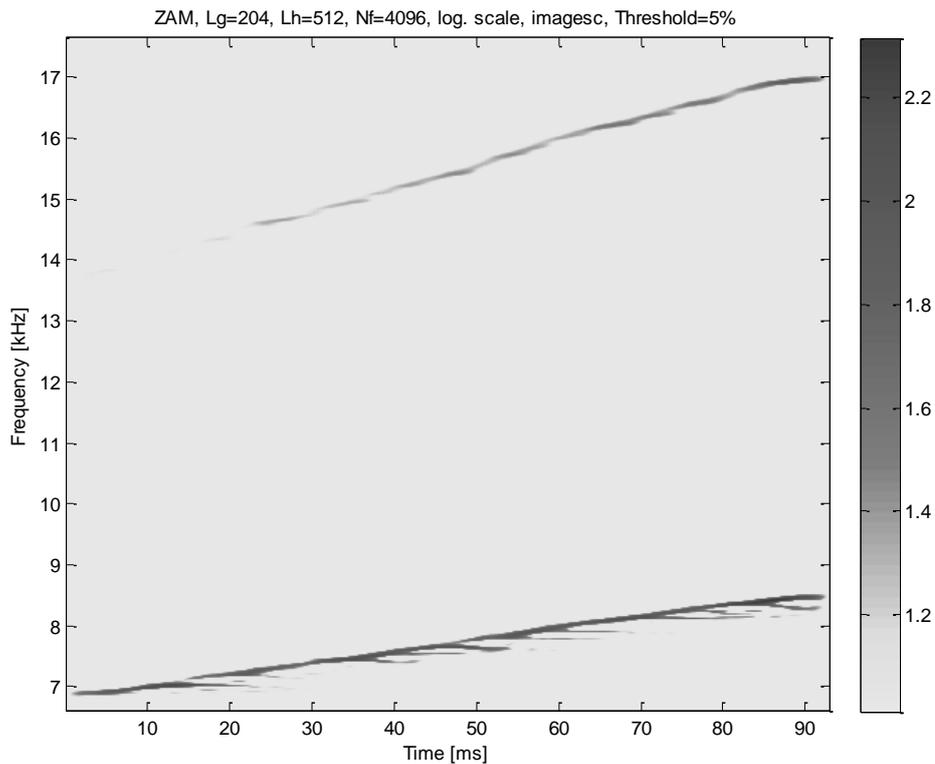


Imagen 47: Distribución ZAM de un silbido de delfín mular.

Con la distribución de ZAM se consigue eliminar los términos cruzados con una pequeña mejora en la resolución respecto a las distribuciones de Choi-Williams y de Born-Jordan. Por lo tanto parece que el resultado obtenido con esta distribución es algo mejor que en los casos anteriores.

En la imagen 48 se muestra el resultado obtenido al utilizar una RID con ventana de Bessel.

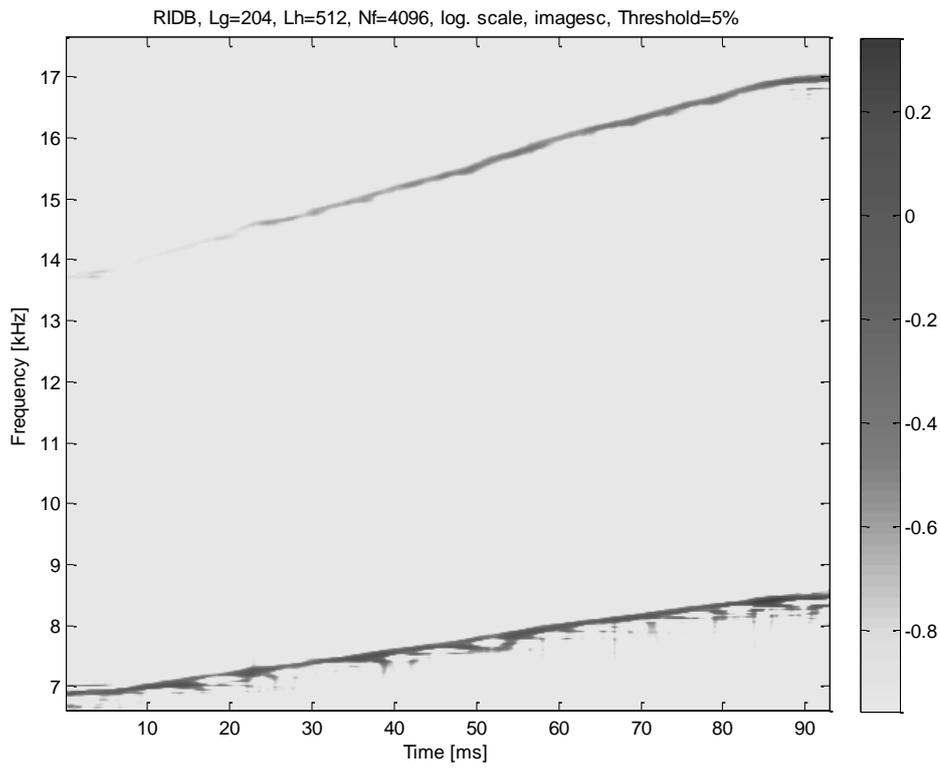


Imagen 48: RID con ventana de Bessel de un silbido de delfín mular.

Con esta RID en la que se usa una ventana de Bessel se obtiene un resultado similar al obtenido con la distribución Born-Jordan y Choi-William, ya que se tiene prácticamente la misma resolución tras eliminar los términos cruzados.

Si se utiliza una RID con ventana Binomial se tiene el resultado de la imagen 49.

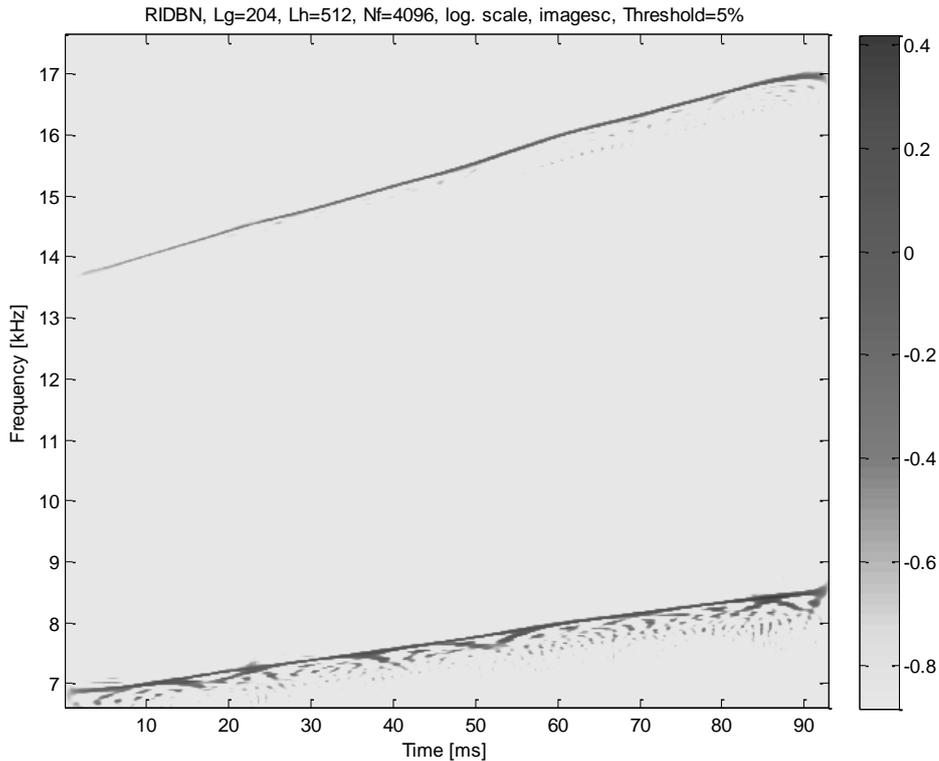


Imagen 49: RID con ventana Binomial de un silbido de delfín Mular.

En esta RID, en la que se usa una ventana Binomial, se obtiene una pequeña mejora respecto a la RID con ventana de Bessel, ya que además de eliminar los términos cruzados, al comparar las imágenes 48 y 49 se aprecia una mejora en la resolución.

Así pues, tras analizar este trozo de silbido con todas las distribuciones se puede asegurar que efectivamente se trata de un silbido, ya que se ha obtenido el mismo resultado con todas las distribuciones. De hecho, en todas las distribuciones se detecta perfectamente la frecuencia fundamental y el armónico del silbido con una resolución muy similar, salvo en la distribución de Wigner-Ville y la Pseudo Wigner-Ville donde se mejora la resolución a costa de presencia de términos cruzados.

Finalmente, tras visualizar varios silbidos con el espectrograma se puede asegurar que los silbidos de un delfín mular son unos sonidos con una frecuencia modulada que varía entre los 5kHz y los 15kHz, y cuya duración es variable entre silbidos, con duraciones observadas entre 1s y 1.5s. Además, en varias ocasiones también aparece el primer armónico de la frecuencia fundamental.

5.3.2. Zumbidos.

Tal y como se explico en el apartado 5.3, los zumbidos son sonidos pulsados y de amplio espectro, con frecuencias inferiores a 20kHz en el caso del delfín mular. Estos sonidos se emiten en ráfagas de pulsos, con una duración del pulso comprendida entre los 50 y los 200 μ s.

Tras analizar el archivo de audio con el espectrograma no se encontraron sonidos con las características de los zumbidos. En cambio, sí que se encontró un sonido con características diferentes a las de los silbidos y los zumbidos. Para confirmar que se trataba de un sonido completamente diferente se observo con otras distribuciones, como la Born-Jordan, y lo que se obtuvo era un sonido con las características de un zumbido. De manera que se dedujo que el espectrograma no era capaz de detectar correctamente los zumbidos.

Un ejemplo del resultado erróneo que se obtenía con el espectrograma al analizar un zumbido es el mostrado en la imagen 50.

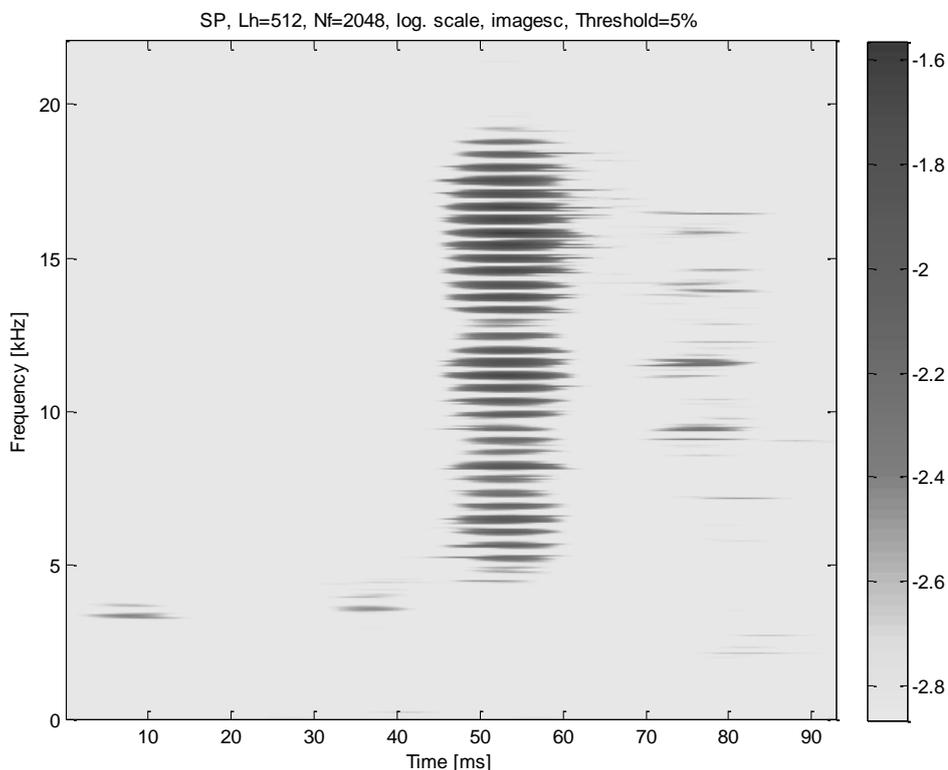


Imagen 50: Espectrograma de un zumbido de delfín mular.

En el espectrograma de la imagen 50 se aprecia la presencia de cuatro pulsos diferentes. Si nos fijamos en cada pulso se aprecia una duración comprendida entre 10 y 15ms. En cambio, las frecuencias emitidas y el ancho de banda de cada pulso son diferentes para cada ráfaga.

Está claro que las características de la imagen 50 no coinciden con las de un zumbido, ya que se esperaban pulsos de una duración máxima de $200\mu\text{s}$, y no de 15ms .

A continuación se analiza el mismo zumbido con el resto de distribuciones para ver qué distribuciones son capaces de detectar un zumbido correctamente y cuáles no.

Al analizar este sonido con la distribución de Wigner-Ville se obtiene la imagen 51.

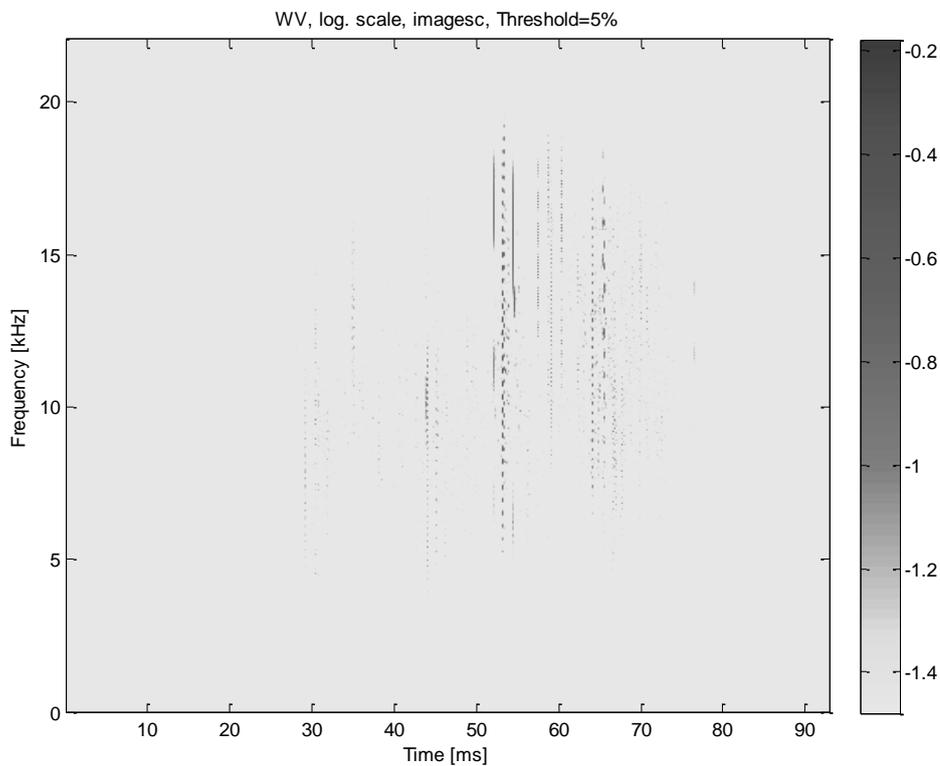


Imagen 51: Distribución de Wigner-Ville de un zumbido de delfín mular.

Con la WVD aparece un resultado completamente diferente al obtenido con el espectrograma. El resultado se apreciará mejor si se hace zoom sobre la zona de interés, tal y como se observa en la imagen 52.

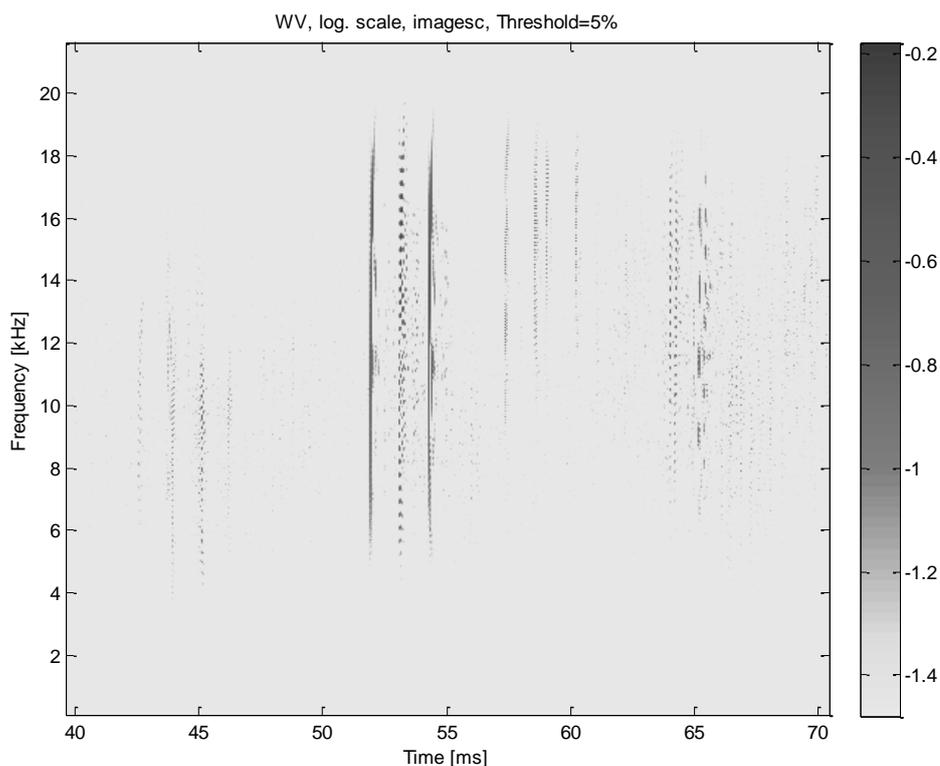


Imagen 52: Distribución de Wigner-Ville de un zumbido de delfín mular. Zoom en la zona de interés.

En la figura 52 puede verse mejor como lo que se obtiene son pulsos con un amplio ancho de banda y con duraciones muy cortas, coincidiendo con las características esperadas de un zumbido. Esto indica que efectivamente se trata de un zumbido que el espectrograma no era capaz de detectar correctamente. Sin embargo, al tratarse de la distribución de Wigner-Ville se puede asegurar que muchas de las frecuencias presentes son términos cruzados, por eso es necesario emplear las demás distribuciones antes de sacar más conclusiones.

Con la distribución Pseudo Wigner-Ville se obtiene la imagen 53.

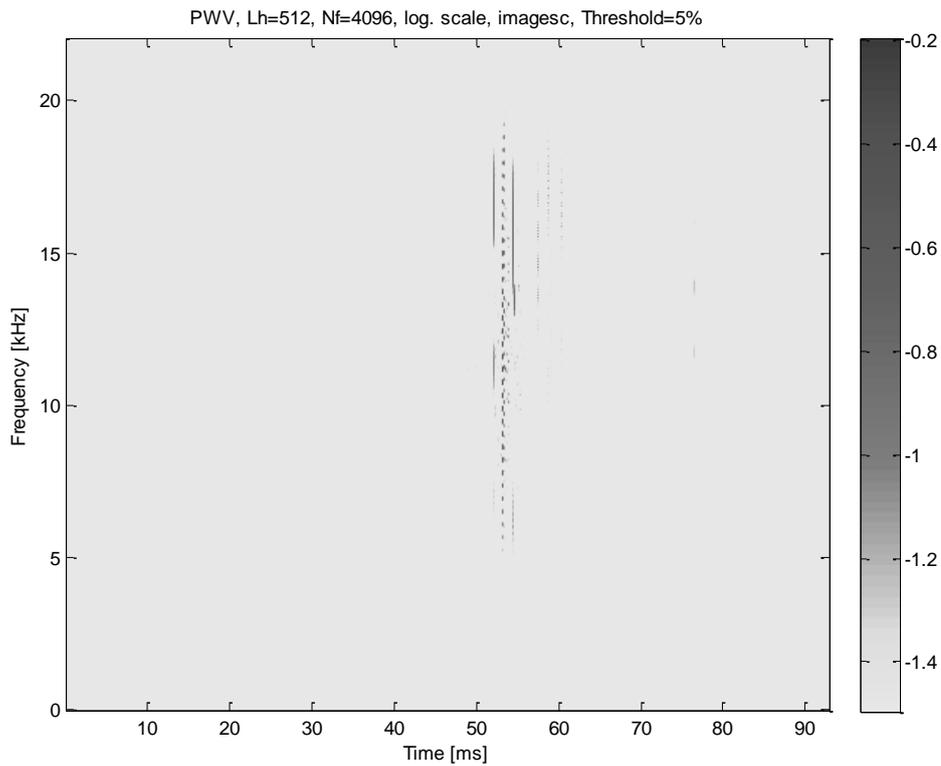


Imagen 53: Distribución Pseudo Wigner-Ville de un zumbido de delfín mular.

En la imagen 53 se han eliminado muchos términos con respecto a la imagen 51. Esto se ve de forma más detallada en la imagen 54, donde se ha hecho zoom en la zona de interés.

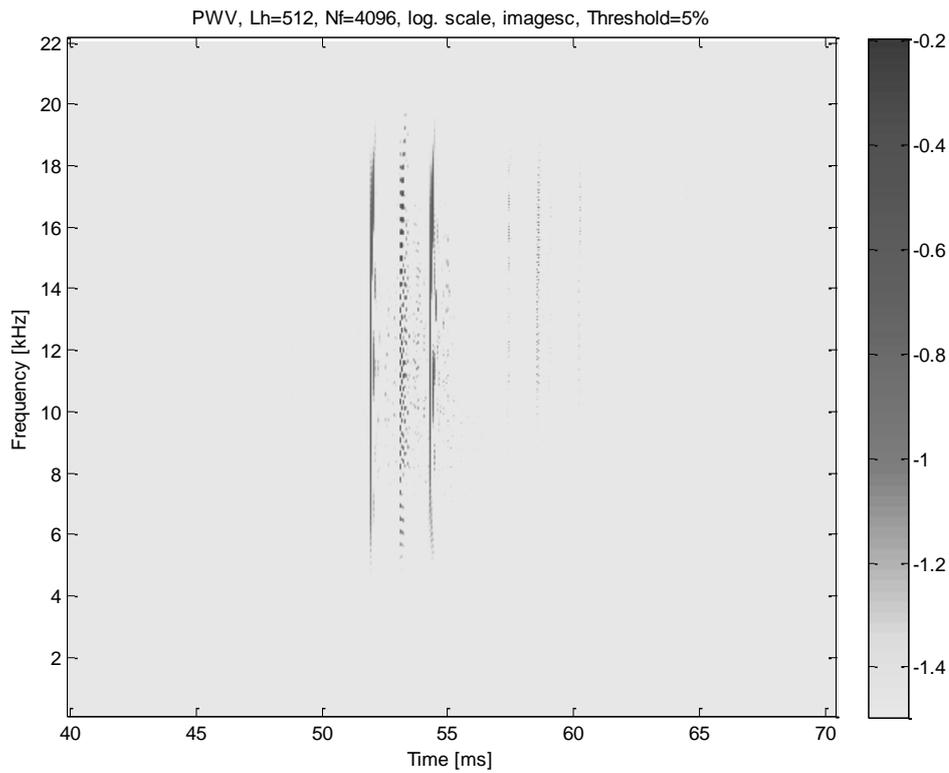


Imagen 54: Distribución Pseudo Wigner-Ville de un zumbido de delfín mular. Zoom en la zona de interés.

Con esta distribución pseudo Wigner-Ville se ha conseguido eliminar multitud de términos cruzados en diferentes instantes de tiempo, los cuales sí aparecían en la distribución de Wigner-Ville. Con esta eliminación de términos cruzados se aprecia, en la imagen 54, como la cantidad de pulsos es menor que las observadas en la imagen 52. Dado que la distribución Pseudo Wigner-Ville no elimina completamente los términos cruzados es necesario utilizar las demás distribuciones antes de sacar más conclusiones.

Con la distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada se obtiene la imagen 55.

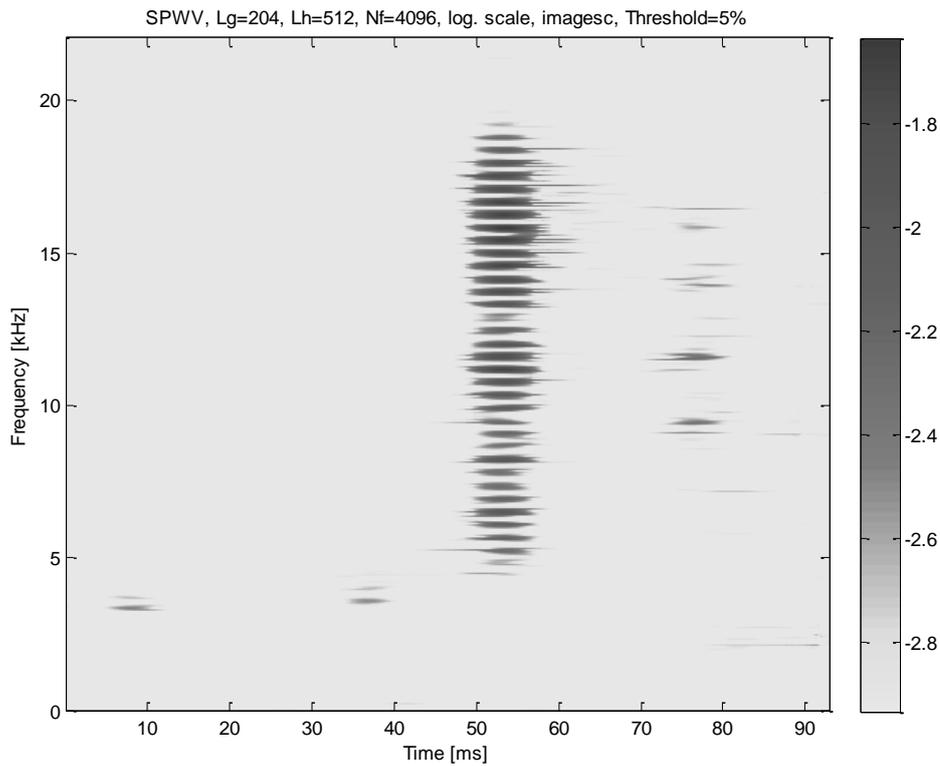


Imagen 55: Distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada de un zumbido de delfín mular.

Con esta otra distribución se obtiene un resultado diferente al obtenido con la distribución Pseudo Wigner-Ville, pero similar al obtenido con el espectrograma. Así pues, se deduce que esta distribución tampoco es capaz de detectar correctamente los zumbidos.

Con la distribución de Born-Jordan se tiene el resultado de la imagen 56.

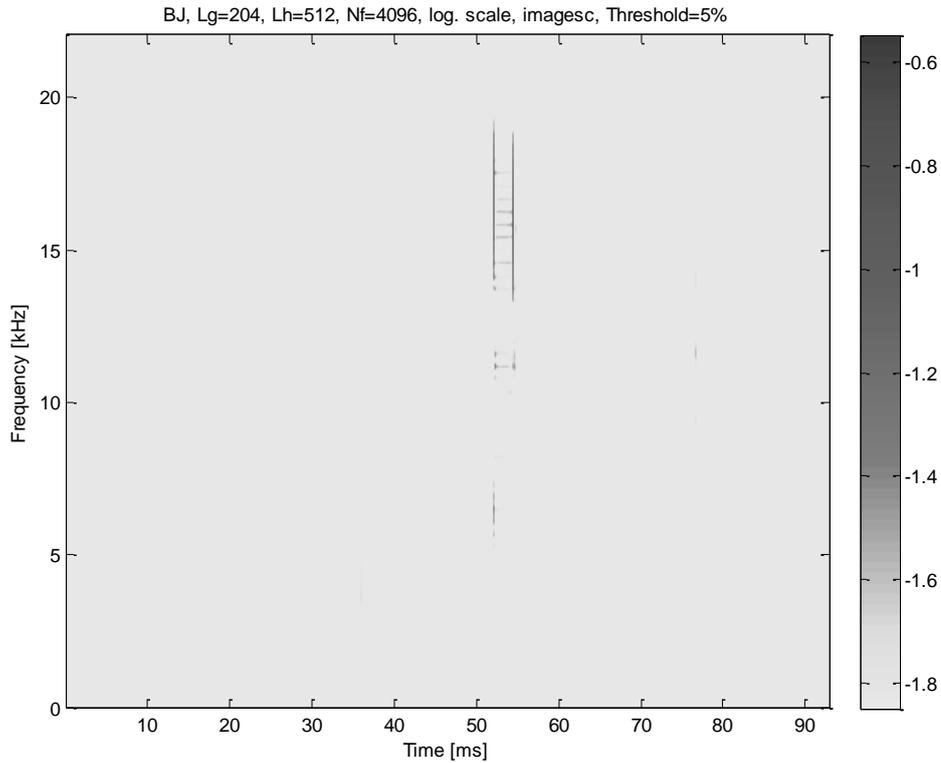


Imagen 56: Distribución Born-Jordan de un zumbido de delfín mular.

Esta distribución sí que es capaz de detectar correctamente los zumbidos, no como la distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada y el espectrograma. Además, mejora el resultado obtenido con la distribución de Pseudo Wigner-Ville, al eliminar completamente todos los términos cruzados y obtener únicamente las frecuencias e instantes de tiempo presentes en la señal. Este resultado puede verse mejor al hacer zoom, tal y como muestra la imagen 57.

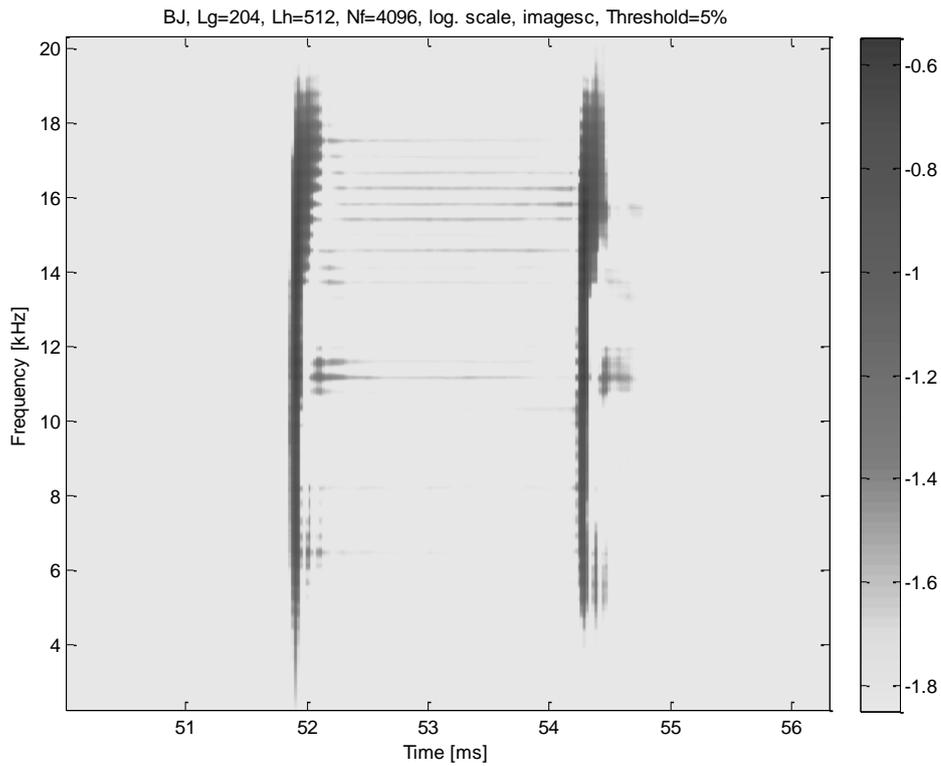


Imagen 57: Distribución Born-Jordan de un zumbido de delfín mular. Zoom en la zona de interés.

En la figura 57 se observa como finalmente sólo se emiten dos pulsos. Los pulsos son de muy corta duración, y presentan prácticamente todas las frecuencias. También se aprecia la presencia de unos pequeños términos cruzados entre ambos pulsos, pero no influyen en la detección de los pulsos. En la imagen 58 se ha hecho zoom sobre un pulso para ver cuál es su duración.

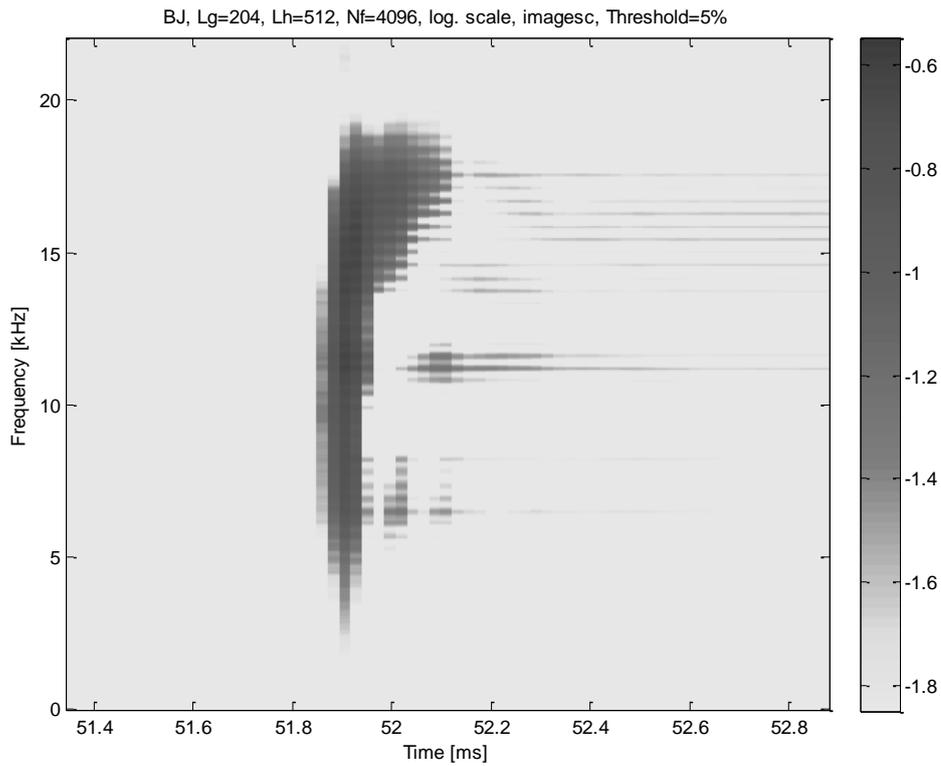


Imagen 58: Distribución Born-Jordan de un pulso de un zumbido de delfín mular.

Según se observa en la imagen 58 la duración del pulso es de unos $100\mu\text{s}$ en la parte más estrecha y de unos $200\mu\text{s}$ en la parte más ancha del pulso. Así pues, se puede decir que efectivamente se trata de un zumbido en el cual se han emitido solamente dos pulsos. Los pulsos son de amplio espectro, con frecuencia que van de 3kHz a 20kHz y una duración comprendida entre los 100 y $200\mu\text{s}$.

Con la distribución Choi-Williams se obtiene la figura 59.

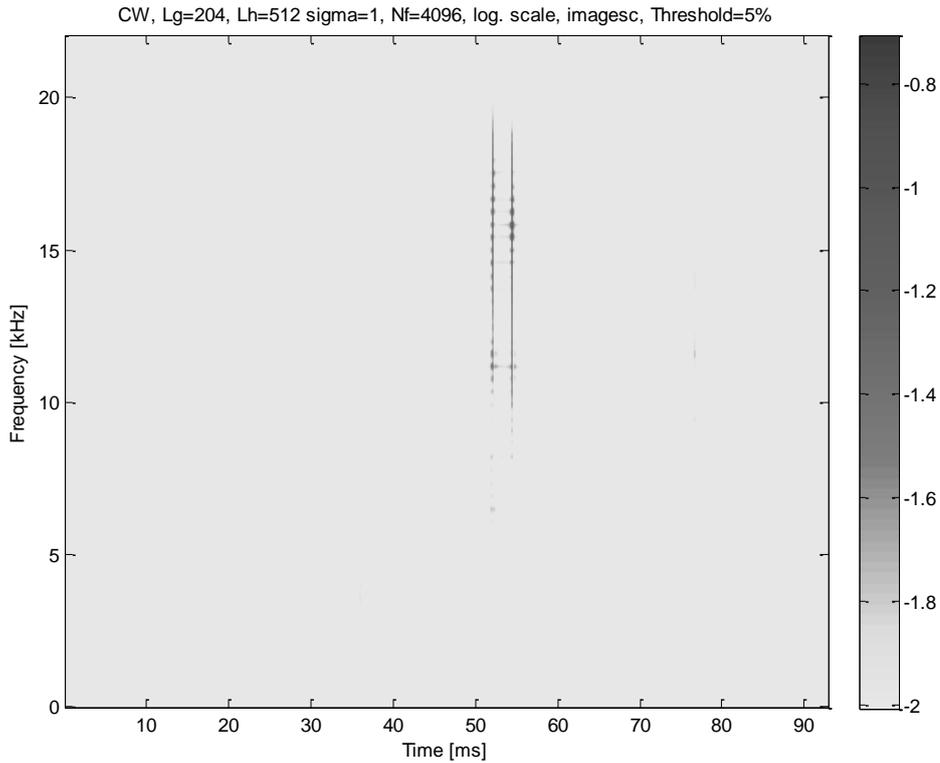


Imagen 59: Distribución Choi-William de un zumbido de delfín mular.

Al igual que con la distribución de Born-Jordan, con la distribución de Choi-Williams también se pueden detectar correctamente los zumbidos. Si se hace zoom sobre la zona de interés de la imagen 59 se obtiene la imagen 60.

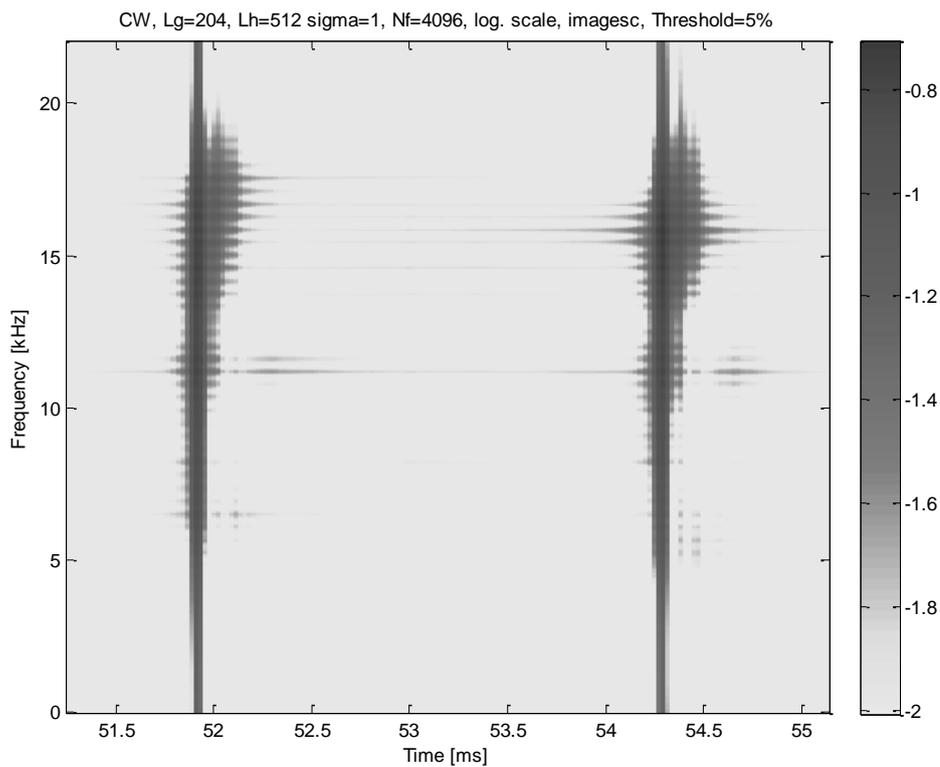


Imagen 60: Distribución Choi-William de un zumbido de delfín mular. Zoom sobre la zona de interés.

Al igual que con la distribución de Born-Jordan, en la imagen 60 se observa como únicamente se emiten dos ráfagas. Sin embargo, al hacer zoom, con la distribución de Choi-Williams se observa que el pulso de cada ráfaga se emite en todas las frecuencias inferiores a 22kHz, mientras que con la de Born-Jordan no se apreciaban frecuencias superiores a 20kHz e inferiores a 3kHz.

Con la distribución ZAM el resultado obtenido es el mostrado en la imagen 61.

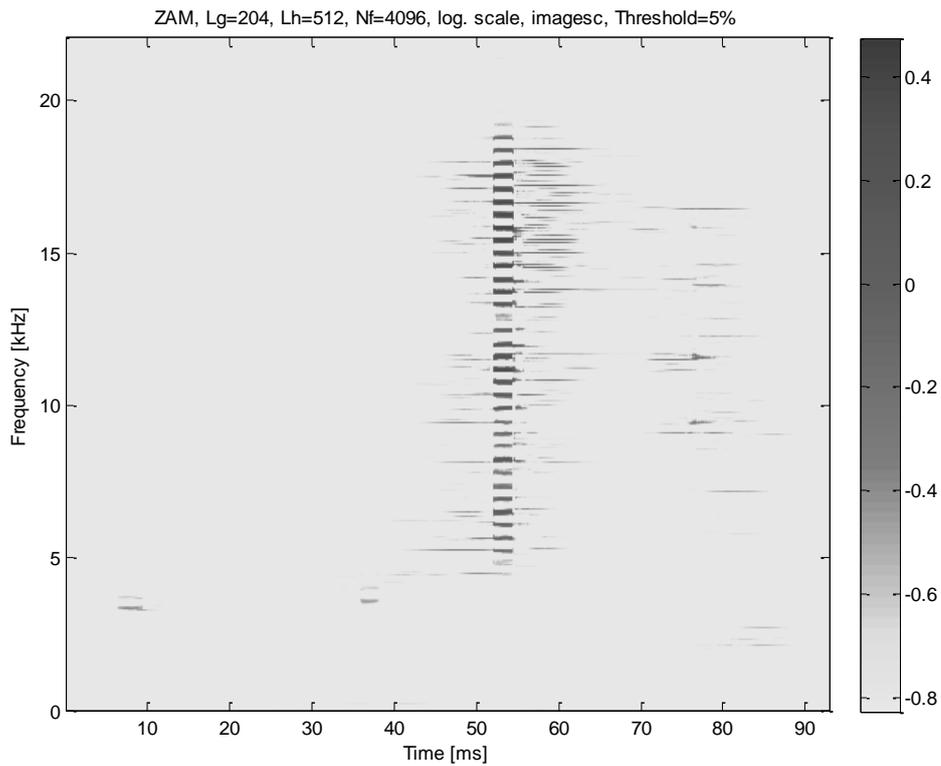


Imagen 61: Distribución ZAM de un zumbido de delfín mular.

Con esta distribución parece que, al igual que con el espectrograma y con la distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada, no se consigue detectar bien este tipo de sonidos. En este caso aparece una única ráfaga de 2ms en el lugar donde deberían aparecer dos ráfagas de $100\mu\text{s}$.

Utilizando una RID con ventana de Bessel se obtiene la figura 62.

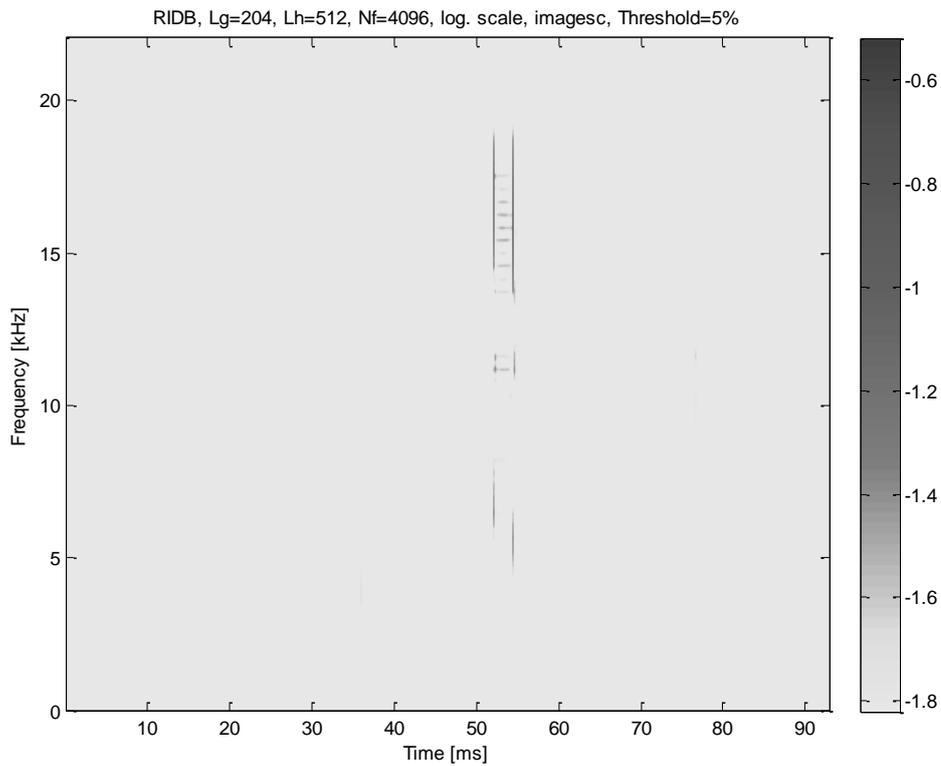


Imagen 62: RID con ventana de Bessel de un zumbido de delfin mular.

Con esta RID si que se detecta correctamente el zumbido, el cual se puede ver mejor en la imagen 63 tras hacer zoom.

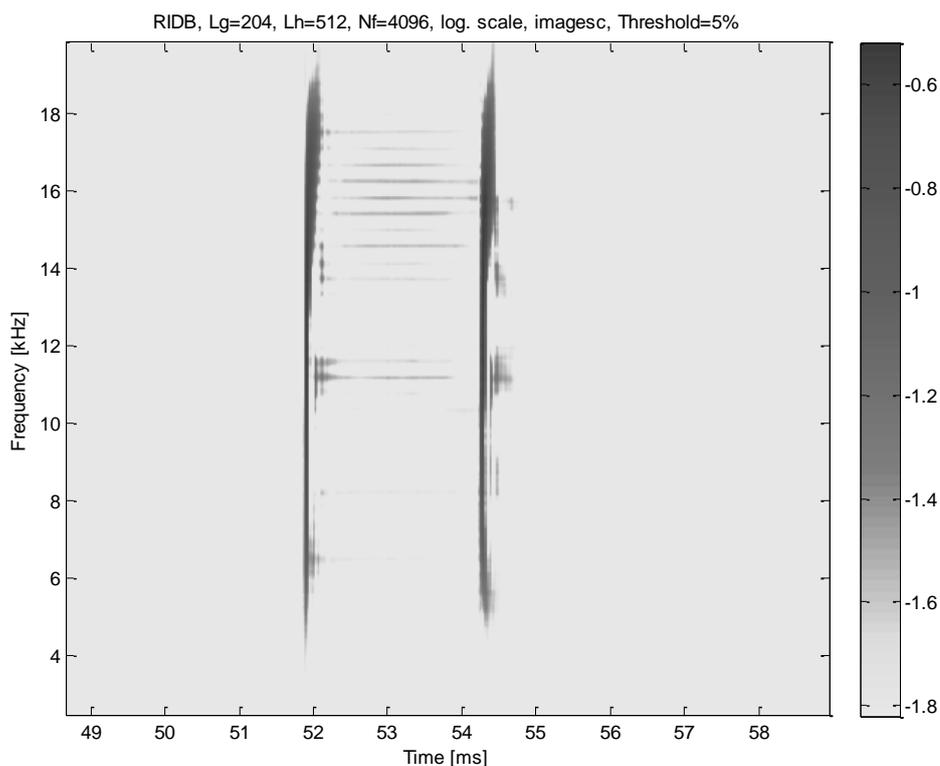


Imagen 63: RID con ventana de Bessel de un zumbido de delfín mular. Zoom en la zona de interés.

Se puede ver en la figura 63 como se detectan correctamente los dos pulsos, y también se observa como aparecen en medio unos términos cruzados que no se han eliminado completamente. Si observamos con más detalle estos términos cruzados vemos que tienen una similitud con el resultado obtenido en el caso del espectrograma y otras distribuciones similares. Esto lleva a teorizar que el error cometido por dichas distribuciones, y el motivo por el que no se detectaba correctamente el zumbido, es porque se obtenían términos cruzados con una mayor intensidad y duración que impedía detectar la presencia de pulsos tan cortos y próximos entre sí.

Utilizando una RID con ventana Binomial se obtiene el resultado de la imagen 64.

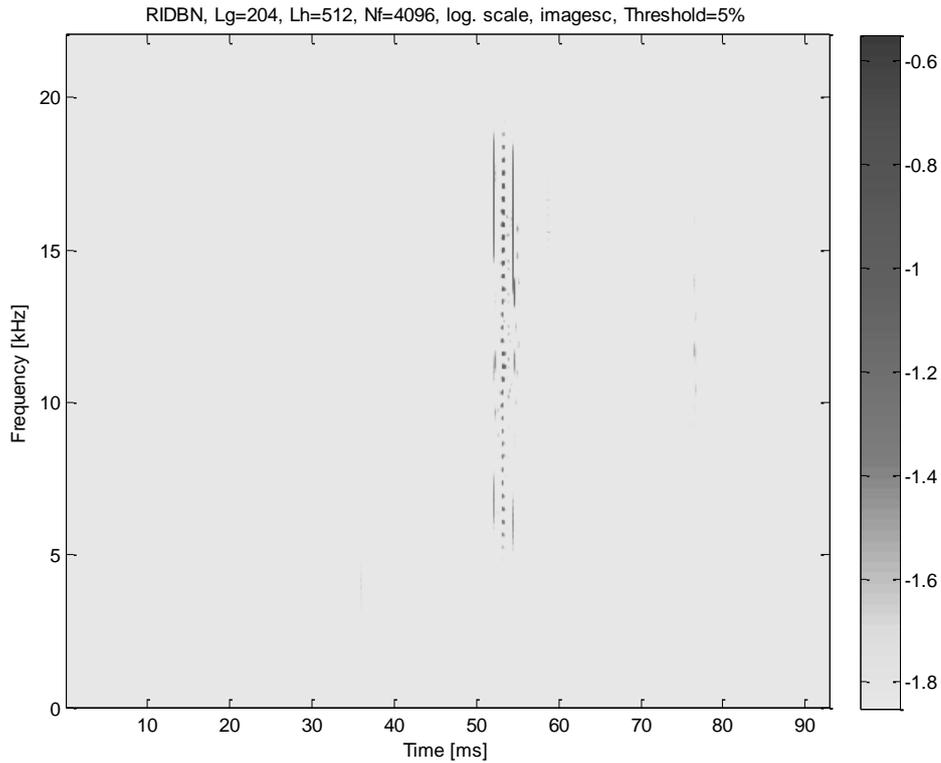


Imagen 64: RID con ventana Binomial de un zumbido de delfín mular.

Viendo la representación de la imagen 64 se puede deducir que esta RID es capaz de detectar correctamente el sonido, pero no es capaz de eliminar completamente los términos cruzados, ya que hay presentes unos términos cruzados con bastante intensidad entre las dos ráfagas. Esto puede verse mejor ampliando en la imagen 65, tras hacer zoom.

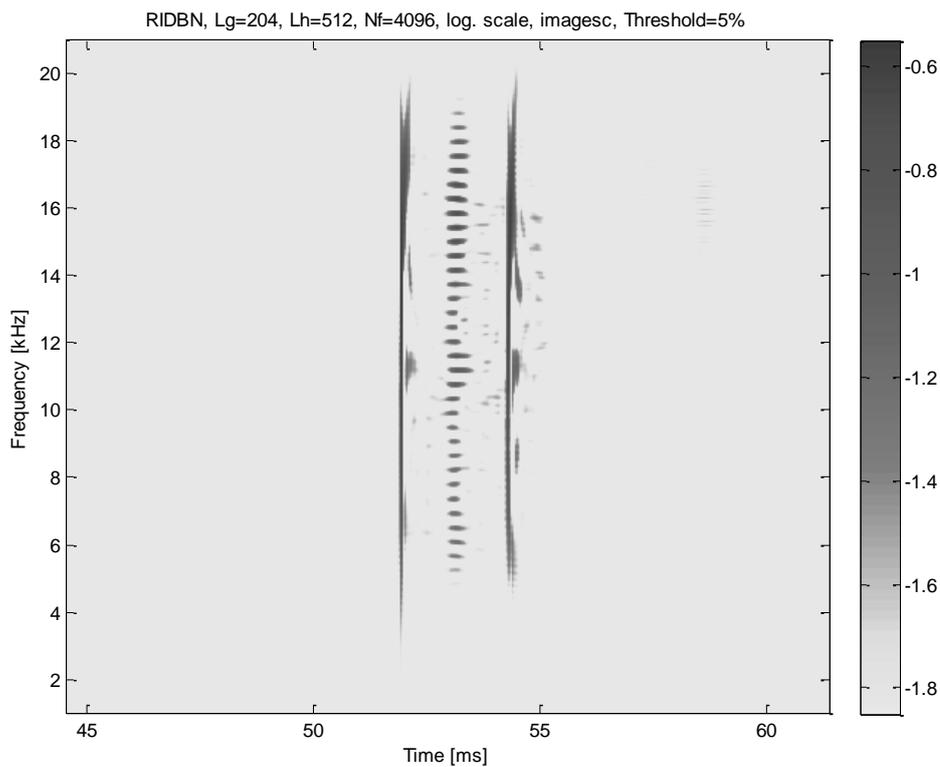


Imagen 65: Ampliación de una RID con ventana binomial de un zumbido de delfín mular.

En esta ampliación de la imagen 64 puede verse mejor la presencia de los términos cruzados entre las dos ráfagas. Con esta RID que utiliza la ventana Binomial se aprecian más términos cruzados y con mayor intensidad que la anterior RID, que utilizaba la ventana de Bessel. Sin embargo la duración de los términos cruzados en este caso es menor.

Con los resultados obtenidos de las diferentes distribuciones se ve como hay distribuciones capaces de detectar bien este tipo de sonido mientras que otras no lo son. El motivo es que se trata de un sonido con pulsos muy próximos entre sí y de duración muy corta, y tal y como se vio en el apartado 5.2 en los puntos donde las componentes están más próximas entre sí aparecen términos cruzados con mayor intensidad. Así pues, las distribuciones que no eliminan completamente los términos cruzados impiden detectar correctamente los pulsos al estar muy próximos entre sí.

Finalmente, tras analizar este sonido con todas las distribuciones que podían detectarlo, se ha podido comprobar que se trata de un zumbido, el cual está formado por dos pulsos que tienen un gran ancho de banda y una duración comprendida entre los 100 y 200 μ s.

Al comparar diferentes zumbidos se ha encontrado que hay una gran variedad de ellos, en el que cada zumbido tiene un ancho de banda y número de pulsos diferente. Esta

variedad de zumbidos confirma que los delfines lo usan para la comunicación, y que cada zumbido se corresponde con una vocalización diferente. Para mostrar esto se va a representar un ejemplo en el que se emiten varios zumbidos a la vez. Para ello se utilizará únicamente el espectrograma, para ver el resultado cuando no se detectan las diferentes ráfagas, y la distribución Born-Jordan, ya que es la distribución con la que se ha obtenido un mejor resultado con este tipo de sonidos.

Un ejemplo en el que se muestran varios zumbidos con el espectrograma es el que se muestra en la imagen 66.

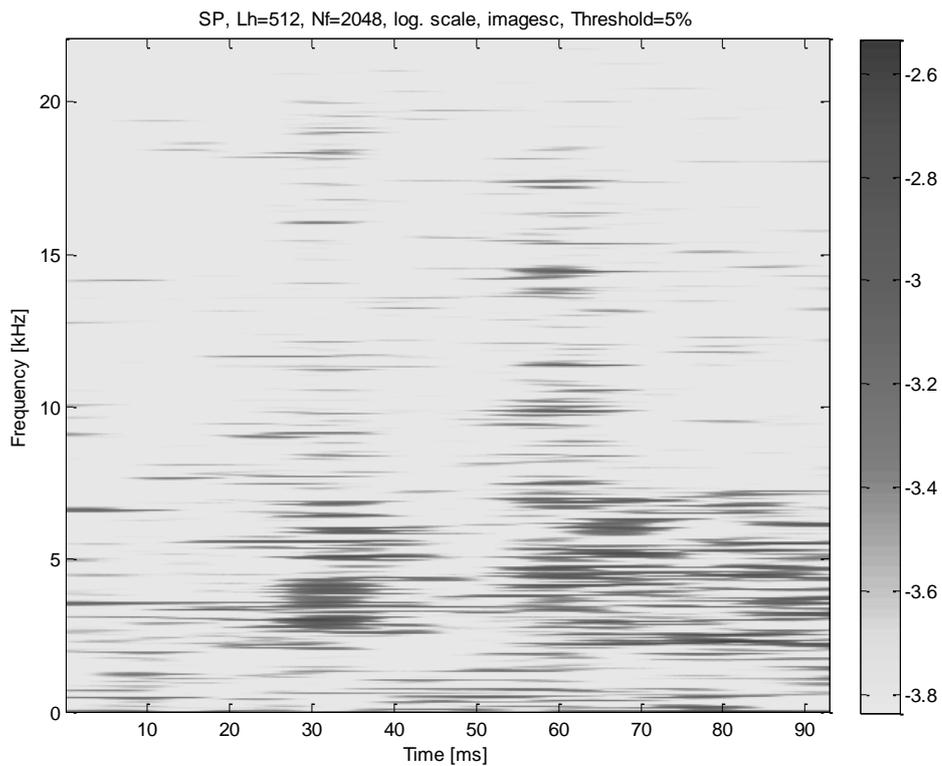


Imagen 66: Espectrograma de un segundo zumbido de un delfín mular.

En el espectrograma de la imagen 66 se observa la emisión de diferentes zumbidos, los cuales se corresponden con diferentes vocalizaciones del delfín mular. Sin embargo, con el espectrograma se aprecia un cierto desorden en el que se entremezclan las frecuencias en diferentes instantes de tiempo. Esto es porque el espectrograma no detectaba correctamente este tipo de sonidos, en los que los pulsos están muy próximos entre sí.

Al emplear la distribución de Born-Jordan se obtiene el resultado mostrado en la imagen 67.

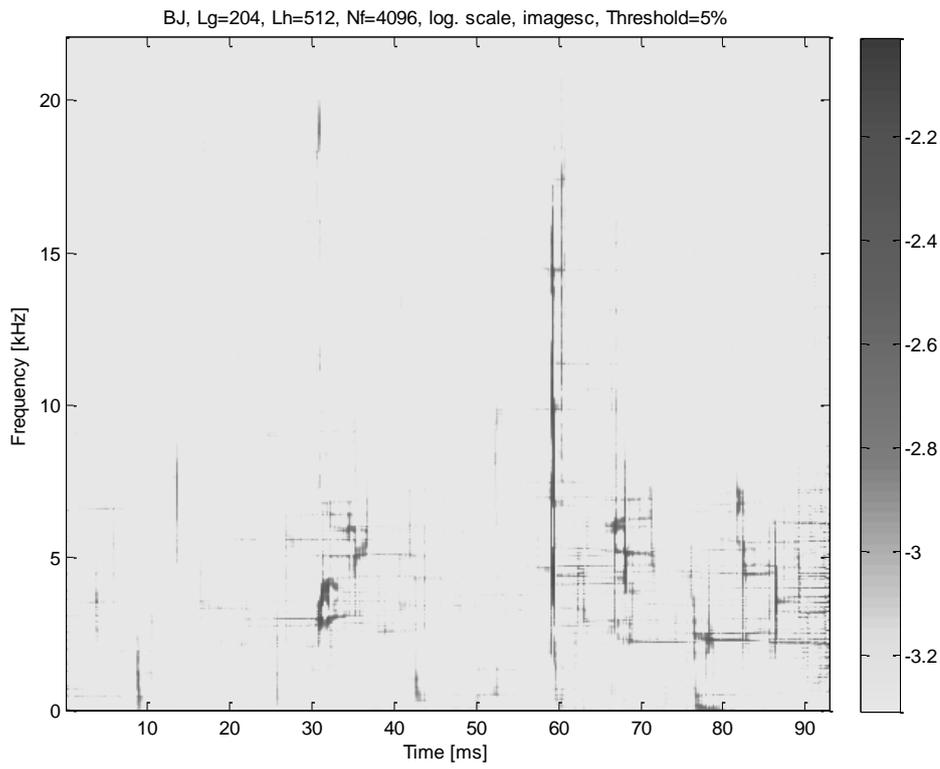


Imagen 67: Distribución Born-Jordan de un segundo zumbido de un delfín mular.

En este caso sí que se distinguen los diferentes zumbidos y los instantes de tiempo en los que se emiten. Puede observarse en la imagen 67 como no todos los pulsos tienen el mismo ancho de banda. Esto se puede ver mejor en la figura 68, donde se hace zoom sobre la zona en la que se concentra la mayor parte de zumbidos.

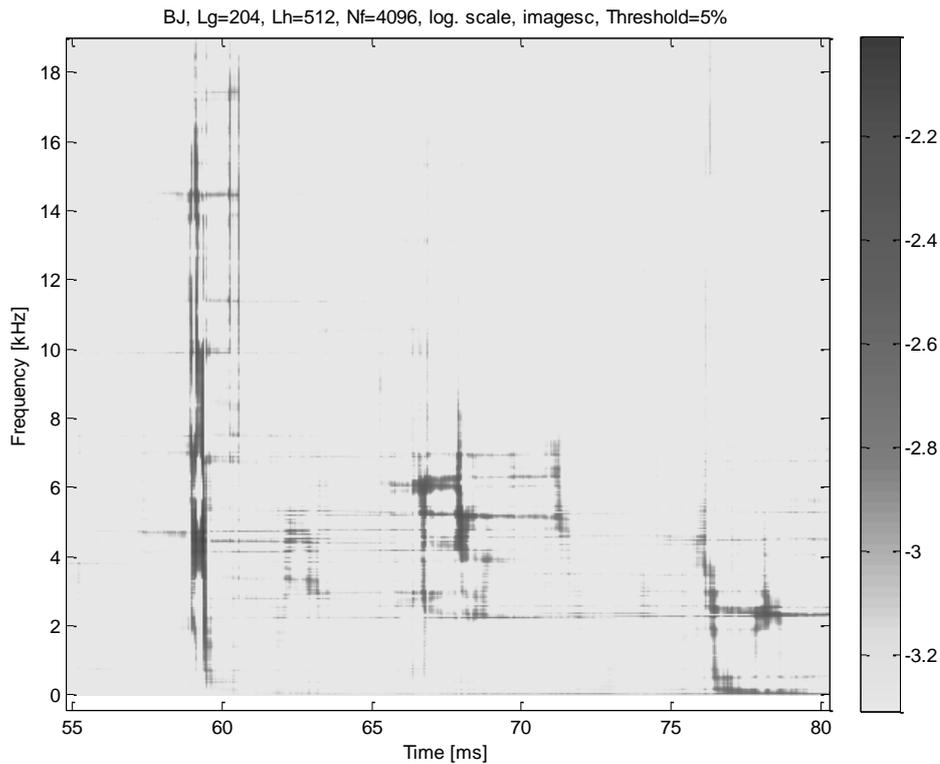


Imagen 68: Distribución Born-Jordan de un segundo zumbido de un delfín mular. Zoom en la zona de interés.

En la figura 68 se aprecia mejor la presencia de varios zumbidos, y se puede ver como las diferentes vocalizaciones tienen diferentes anchos de banda y diferentes distancia entre cada pulso.

Finalmente, es conveniente mostrar los resultados y conclusiones obtenidos tras analizar el archivo de audio y detectar los diferentes sonidos del delfín mular. Para ello, la tabla 8 muestra en la segunda columna qué distribuciones detectan el silbido sin presentar términos cruzados, y en la tercera columna muestra qué distribuciones han detectado correctamente el zumbido.

Distribución	Silbido→Detección sin términos cruzados	Zumbidos→Detección correcta
Wigner-Ville	No	Sí, pero con multitud de términos cruzados
Pseudo Wigner-Ville	No	Sí, pero con varios términos cruzados
Pseudo Wigner-Ville suavizada	Si	No
Espectrograma	Si	No
Born-Jordan	Si	Sí
Choi-William	Si	Sí
ZAM	Si	No
RID con ventana Bessel	Si	Sí
RID con ventana Binomial	Si	Sí, pero con unos pocos términos cruzados

Tabla 8: Detección correcta de un zumbido de delfín mular.

Tras ver la tabla 8 se deduce que en el análisis de los silbidos únicamente presentan términos cruzados las mismas distribuciones que los presentaban en el apartado 5.2, de manera que tanto la distribución de Wigner-Ville como la Pseudo Wigner-Ville tienen el inconveniente de que siempre presentan términos cruzados y pueden llevar a problemas a la hora de detectar correctamente las componentes de una señal, salvo si se trata de una señal de una sola componente como en el apartado 5.1.

En el análisis de los zumbidos hay varias distribuciones que no los detectan correctamente al no ser capaces de detectar componentes que están muy próximas entre sí. De hecho, en la tabla 8 se aprecia como las únicas distribuciones que detectan un zumbido sin presencia de términos cruzados son la distribución de Born-Jordan, la de Choi-William y la RID con ventana de Bessel.

6. Conclusiones y líneas futuras.

6.1. Conclusiones.

6.1.1. Esencia del proyecto

A lo largo de este proyecto se ha podido ver como las distribuciones tiempo-frecuencia son una buena técnica para analizar señales no estacionarias, ya que proporcionan información de cómo varía la frecuencia a lo largo del tiempo, permitiendo así clasificar, modelar, determinar parámetros y detectar patrones de dichas señales.

Se ha profundizado sobre las distribuciones de la clase cuadrática o de Cohen, y se ha demostrado porque se considera a la distribución de Wigner-Ville como prototipo de esta clase de distribuciones. Además, también se ha encontrado una expresión matemática (4.10) común para toda la clase cuadráticas, la cual puede expresarse en cuatro dominios de definición.

El problema de las distribuciones cuadráticas son los términos cruzados. Se ha mostrado como los términos cruzados pueden reducirse al utilizar el asociado analítico, en cambio, para eliminarlos es necesario utilizar técnicas de filtrado, como las vistas en el apartado 4.3. El filtrado se realiza sobre la distribución de Wigner-Ville, y el tipo de filtrado utilizado determina la distribución obtenida.

El problema de emplear técnicas de filtrado sobre la distribución de Wigner-Ville está en la pérdida de algunas propiedades, junto con la reducción de la alta resolución que tiene la distribución de Wigner-Ville en el dominio tiempo-frecuencia.

Para solventar la pérdida de propiedades se ha estudiado un método que garantiza que, para una aplicación dada, las distribuciones tiempo-frecuencia cumplan con las propiedades deseables. El método consiste en diseñar el núcleo tiempo-retardo teniendo en cuenta ciertas restricciones, como las vistas en la tabla 1 y 2. En general, por cada propiedad que se desea conservar se debe cumplir con una restricción en el núcleo de filtrado.

La reducción de la gran resolución que tiene la distribución de Wigner-Ville se debe al principio de incertidumbre, y se aprecia a lo largo del apartado 5. Durante la comparativa se ha observado una clara relación entre la resolución obtenida y la cantidad de términos cruzados eliminados.

En un extremo estaría la WVD que obtiene la mejor resolución posible a cambio de no eliminar los términos cruzados, y en el otro extremo estaría el espectrograma que elimina todos los términos cruzados a cambio de obtener la peor resolución. Mientras tanto, las demás distribuciones están en un punto intermedio, proporcionando algunas de ellas un buen compromiso entre eliminación de términos cruzados y resolución obtenida.

Al final del apartado 5.2, en la tabla resumen 7, y al final del apartado 5.3, en la tabla resumen 8, se muestran los resultados obtenidos en la comparativa y un análisis sobre ellos. Se ve que las distribuciones que mejor resolución tienen son las que presentan términos cruzados, como la WVD. En cambio, otras distribuciones como las RID o la Born-Jordan son las que mejor resultado dan, pues con ellas se obtiene un buen compromiso entre eliminación de términos cruzados y resolución obtenida.

A la hora de poner a prueba las diferentes distribuciones en un caso real, con el sonido de un delfín, se ha apreciado otra clara diferencia entre las distribuciones, y es la capacidad de detectar componentes muy próximas entre sí. Esta característica es importante para ciertas aplicaciones, tal y como se ha podido comprobar en la comparativa cuando no todas las distribuciones han sido capaces de detectar los zumbidos del delfín correctamente.

6.1.2. Conocimientos adquiridos.

A lo largo del proyecto se ha conocido el funcionamiento de las distribuciones tiempo-frecuencia, y se han visto las diferencias entre las diferentes distribuciones de la clase cuadrática. Como resultado se puede afirmar que no existe la “mejor distribución”, es decir, una distribución que sirva para todos los casos, sino que la elección de una u otra distribución va a depender no sólo de cuál es la señal a analizar, sino también de cuál es el objetivo que se quiere conseguir en la aplicación.

Para la elección adecuada de la distribución, lo importante es conocer lo mejor posible tanto las posibilidades que ofrece cada distribución como las limitaciones que presenta. En general, la distribución adecuada para cada aplicación será la que cumpla con las propiedades deseables, y proporcione, a su vez, un buen compromiso entre eliminación de términos cruzados y resolución obtenida.

Para elegir la distribución adecuada se ha aprendido a comprobar si una distribución cumple con las propiedades deseables. Para ello basta con analizar el núcleo tiempo-retardo, y comprobar si cumple con las restricciones adecuadas.

6.1.3. Dificultades encontradas.

A la hora de poner a prueba las distribuciones tiempo-frecuencia en un caso real ha sido necesario analizar el archivo de audio mediante la técnica de procesado a trozos, lo cual es muy común para el procesado en tiempo real. Sin embargo, ha sido necesario utilizar trozos demasiado pequeños (4096 muestras) para no exceder la capacidad de la memoria.

Tal y como se comentó durante el apartado 5.3, en la página 79, la necesidad de utilizar trozos tan pequeños puede deberse a la versión de Matlab utilizada, a la toolbox o al ordenador empleado.

Al tener que usar trozos tan pequeños no se han podido visualizar los silbidos enteros, ni se han podido analizar patrones de los zumbidos emitidos por el delfín. Pero esto son pequeños problemas en comparación con lo que podría haber ocurrido si se estuviese trabajando con procesado en tiempo real.

En el caso de un procesado en tiempo real con trozos tan pequeños el tiempo de adquisición de cada trozo sería mucho menor que el tiempo de procesado, lo que llevaría a una pérdida considerable de muestras, junto con unos resultados completamente erróneos.

6.2. Líneas futuras.

El desarrollo de técnicas de procesamiento basadas en distribuciones tiempo-frecuencia es motivo de profundas investigaciones, de forma que aparecen continuamente nuevos métodos para analizar señales. Actualmente se está empezando a utilizar cada vez en más aplicaciones, como biomedicina, estudios acústico de cetáceos, análisis de señales sísmicas, etc.

Como líneas futuras de investigación se proponen las siguientes:

- Tras ver las dificultades que se podrían encontrar al realizar un procesado en tiempo real sería interesante profundizar en este tema, y desarrollar una aplicación que realice un procesado en tiempo real. Para ello se podría optar por desarrollar la aplicación en C en lugar de Matlab, para así reducir el tiempo de procesado de las señales.
- Podrían emplearse técnicas de reconocimiento de patrones con los sonidos de delfines y otros cetáceos. De esta manera se podría conseguir distinguir las especies a partir de los sonidos que emiten, lo cual sería útil a la hora de estudiar acústicamente el fondo marino de un lugar. Además, también se podrían obtener diferencias entre individuos criados en cautividad, y los criados libremente.
- Dado que los cetáceos y otros animales que utilizan la ecolocalización, como los murciélagos, emiten frecuencias en el rango de los ultrasonidos (frecuencias superiores a los 20kHz) podría ser interesante analizar las prestaciones de las diferentes distribuciones en todo el rango de frecuencias, y no limitarse únicamente al espectro audible. Esto podría ser importante para el estudio de la contaminación acústica y su influencia en las especies acuáticas.
- Para obtener un conocimiento más profundo sobre las distribuciones tiempo-frecuencia sería importante realizar un estudio sobre otras técnicas de representación tiempo-frecuencia, como las transformadas wavelet, y posteriormente comparar los resultados con los obtenidos aquí para las distribuciones de la clase cuadrática.

7. Bibliografía.

- [1] L. Cohen. *Time-frequency distributions-a review*. Proceedings of the IEEE, 1989, DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/5.30749>
- [2] Andrés Felipe Quiceno Manrique. *Análisis Tiempo-Frecuencia por métodos no paramétricos orientado a la detección de patologías en bioseñales*, capítulo 2. Universidad Nacional de Colombia, 2009.
- [3] Leon Cohen. *Time Frequency Analysis: Theory and Applications*. Prentice Hall PTR, 1995.
- [4] Boualem Boashash. *Time Frequency Signal Analysis and Processing-A Comprehensive Reference*. Elsevier, 2003.
- [5] Auger, F.; Flandrin, P.; Gonçalvès, P.; Lemoine O.: *Time-frequency toolbox for use with MATLAB: Reference Guide*. CNRS Francia, 1997.
- [6] F.Hlawatsch, G.F. Boudreaux-Bartels. *Linear and Quadratic Time-Frequency Signal Representations*. IEEE SP Magazine, 1992.
- [7] Maria Sandsten. *Time-Frequency Analysis of Non-Stationary Process. An Introduction*. Lund University, 2013.
- [8] Auger, F.; Flandrin, P.; Gonçalvès, P.; Lemoine O.: *Time-Frequency Toolbox for use with MATLAB*. CNRS Francia, 1996. <http://tftb.nongnu.org/>.
- [9] Chicote, C.A; Castellote M. (2013) *Manual del Técnico de Acústica Pasiva para operaciones Off-shore generadoras de ruido en aguas españolas*. Fundación Biodiversidad y SUBMON, 1ª edición, 2013
- [10] Fundación Ibérica. Animales de España y Portugal: Especies, ecosistemas, artículos... <http://www.faunaiberica.org/?page=delfin-mular>.

8. Apéndices.

Apéndice A. Señal analítica.

En este apéndice se pretende demostrar como el uso del asociado analítico de una señal real elimina los términos cruzados causados por la interacción entre frecuencias positivas y negativas.

Para ello se emplea la señal de una sola componente que se utilizaba en el apartado 5.1 de la comparativa, es decir, la señal arbitraria que estaba formada solamente por una frecuencia lineal que variaba de 20Hz a 260Hz en un intervalo de 1s. Se escoge esta señal porque no presenta términos cruzados con ninguna distribución al emplear la señal analítica.

Si se emplea la señal original (real) en la distribución de Wigner-Ville se obtiene la imagen 69, la cual será la distribución original de Wigner.

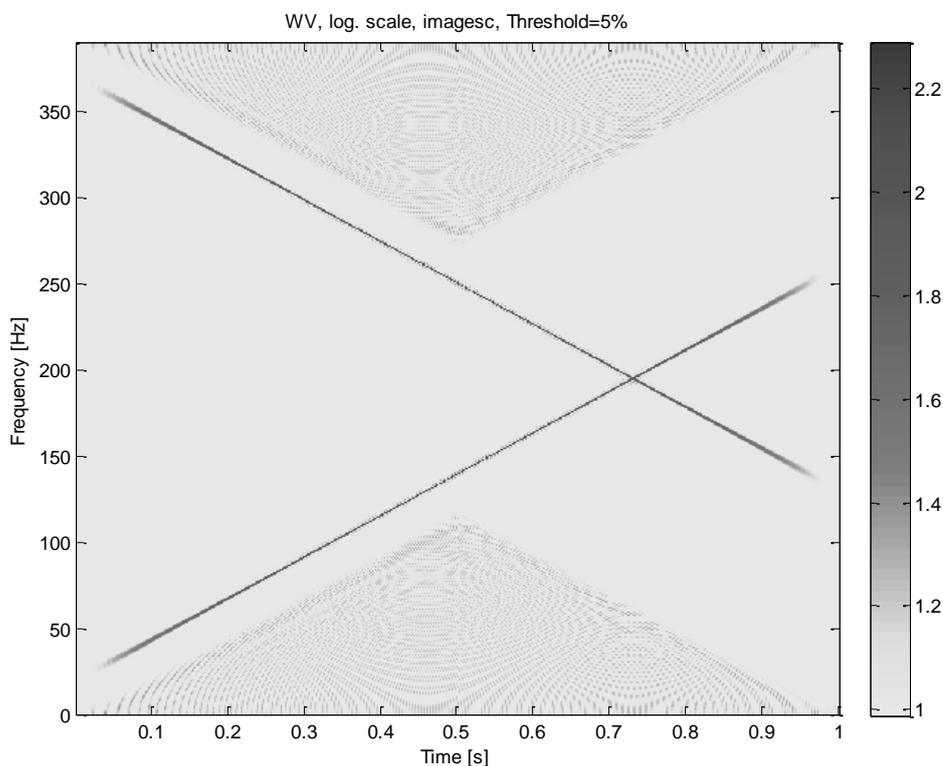


Imagen 69: Distribución de Wigner-Ville con una señal real de una sola componente.

Efectivamente se puede ver en la imagen 69 como aparecen multitud de términos cruzados por el simple hecho de utilizar la señal real en lugar de la señal analítica.

Si se emplea la distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada, para ver si esta distribución consigue eliminar todos los términos cruzados al utilizar una señal real en lugar del analítico asociado, se obtiene la imagen 70.

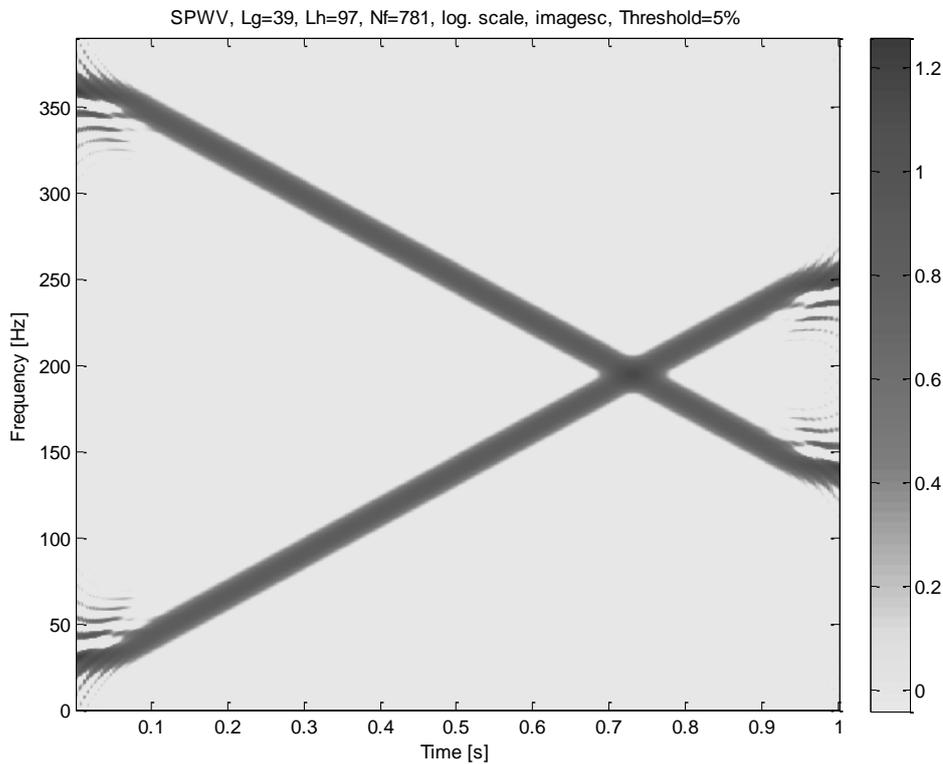


Imagen 70: Distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada con una señal real de una sola componente.

Se puede ver en la imagen 70 como, aunque se han eliminado multitud de términos cruzados, sigue apareciendo una componente indeseada. De hecho esta componente tiene la característica de que invierte el eje de frecuencias, proporcionando una componente adicional, con la misma pendiente que la componente real, pero de signo contrario.

Estas dos distribuciones no son las únicas que presentan términos cruzados al usar la señal real en lugar del asociado analítico, de hecho todas las distribuciones presentan términos cruzados al usar la señal real, aunque se trate de una señal de una sola componente.

Si se emplea la distribución de Wigner-Ville utilizando el asociado analítico de la señal real, entonces sí que se eliminan todos los términos cruzados y se obtiene únicamente la componente de la señal real. Esto puede verse en la imagen 71.

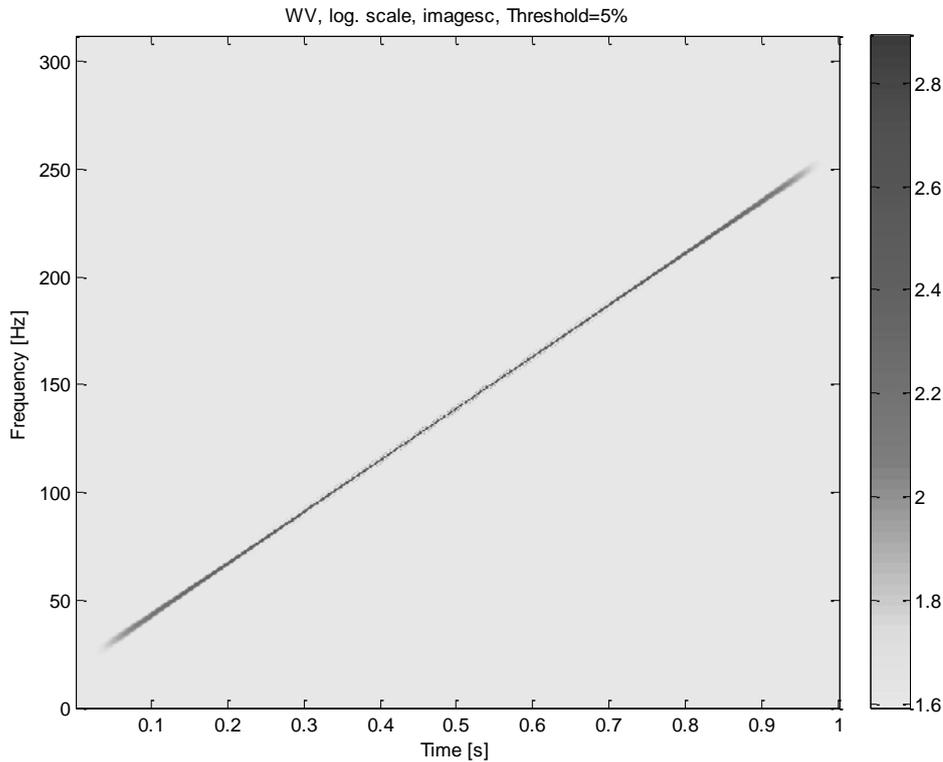


Imagen 71: Distribución de Wigner-Ville empleando el asociado analítico de una señal real de una sola componente.

Así pues, al comparar la imagen 69 y 71 se comprueba que el uso del asociado analítico elimina los términos cruzados producidos por la interacción entre las frecuencias positivas y negativas.

Concretamente, en el caso de la distribución de Wigner-Ville si la señal es de una sola componente se eliminarán todos los términos cruzados, ya que los únicos que aparecen se deben a la interacción entre frecuencias positivas y negativas. En cambio, si la señal tiene varias componentes solamente se reducirá la cantidad de términos cruzados, pues en este caso también están presentes los términos cruzados producidos por la interacción entre las diferentes componentes.

Apéndice B: Time-Frequency Toolbox versión 2 (tftb-02).

La time-frequency toolbox es un software libre que proporciona a MatLab multitud de funciones para poder analizar señales mediante distribuciones tiempo-frecuencia.

Para analizar una señal lo primero que se necesita es dicha señal. Esta toolbox dispone de funciones para poder generar señales según su amplitud instantánea (exponencial, gaussiana, triangular, etc.) o según su frecuencia instantánea (lineal, hiperbólica, sinusoidal, etc.). Además tiene otras funciones para añadir ruido a la señal generada previamente, o para generar señales específicas como ASK, FSK, etc.

En cuanto a las distribuciones disponibles, esta toolbox tiene distribuciones bilineales, tanto de la clase de Cohen (cuadrática) como de la clase afín, pero en este proyecto sólo se emplean las funciones de la clase de Cohen ya que son las más utilizadas en el procesado de señal. Aunque el número de distribuciones de la clase de Cohen puede ser infinito (se pueden crear infinitos núcleos) y no todas pueden estar en la toolbox, sí que se dispone de una gran variedad de estas distribuciones, y están presentes la mayoría de las distribuciones más importantes y conocidas. Las distribuciones que tiene la toolbox y de las cuales se emplean algunas de ellas en el análisis comparativo son las siguientes:

1. Distribución de Wigner-Ville (WVD).
2. Distribución Pseudo Wigner-Ville (PWVD).
3. Distribución Pseudo Wigner-Ville suavizada (SPWVD).
4. Espectrograma.
5. Distribución de Rihaczek.
6. Distribución de Born-Jordan.
7. Distribución de Choi-William.
8. Distribución de Page.
9. Distribución Pseudo Page.
10. Distribución ZAM.
11. Distribución RID con ventana de Bessel.
12. Distribución RID con ventana de Hanning.
13. Distribución RID con ventana de Binomial.
14. Distribución RID con ventana de Triangular.

Para realizar el análisis de una señal mediante una de estas distribuciones se piden varios parámetros, de los cuales los más comunes son:

1. X: Ésta es la señal a analizar, que debería ser el asociado analítico para minimizar los términos cruzados.
2. T: El instante de tiempo en segundos. Por defecto va de 1 al tamaño de X.
3. N: Numero de frecuencias. Por defecto es el tamaño de X.

4. G: Ventana de suavizado en el tiempo, con $G(0)=1$. Por defecto es una ventana de Hamming de tamaño $N/10$.
5. H: Ventana de suavizado de frecuencia con $H(0)=1$, dada en el dominio del tiempo. Por defecto es una ventana de Hamming de tamaño $N/4$.

Y los parámetros que se devuelven son los siguientes:

1. TFR: Los valores de la distribución.
2. T: El vector con los instantes de tiempo en segundos.
3. F: Vector con los valores normalizados de frecuencias.

Si no se asigna ningún parámetro de salida, se ejecuta directamente la representación de la distribución.

Una vez que se tiene la señal y se procesa con la distribución deseada se obtiene la grafica correspondiente junto con la ventana mostrada en la imagen 72.

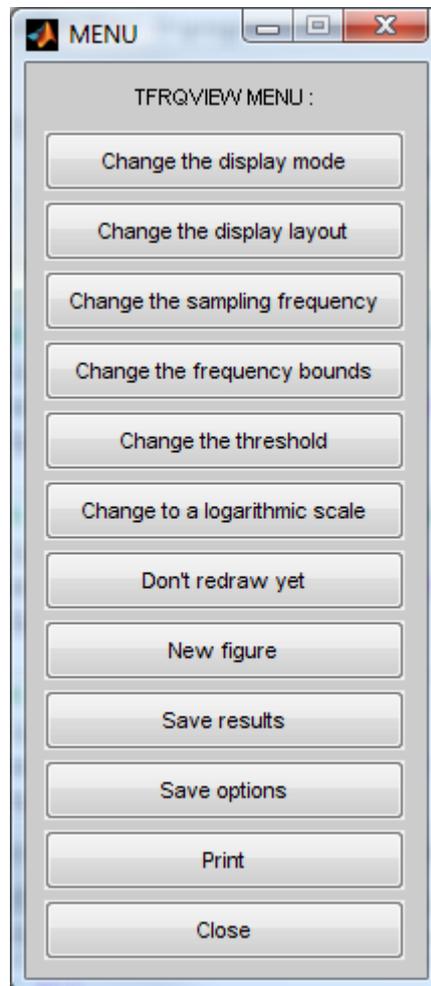


Imagen 72: Menú genérico de una distribución tiempo-frecuencia.

La ventana de la imagen 72 muestra las funciones que se pueden realizar una vez obtenida la representación tiempo-frecuencia, y se pueden destacar las siguientes opciones:

1. La opción “*Change the display mode*” permite cambiar el tipo de visualización de la representación de entre las opciones mostradas en la imagen 73.

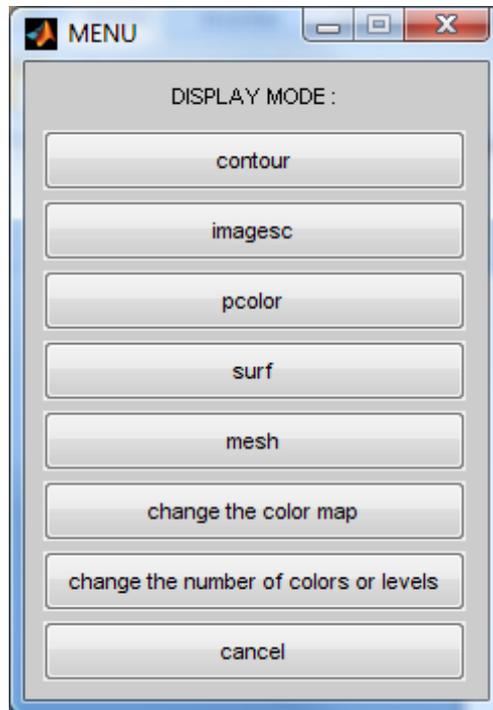


Imagen 73: Menú con los tipos de display de una distribución tiempo-frecuencia.

De esta manera pueden cambiarse tanto los colores como el tipo de representación, pasando de una representación en 2D a una en 3D. De todas las opciones posibles en este proyecto se ha escogido utilizar “*imagesc*” para ver en 2D la relación entre tiempo y frecuencia, y mediante los niveles de gris las amplitud correspondientes.

2. La opción “*Change the display layout*” permite añadir subplot, de entre las opciones mostradas en la figura 74.

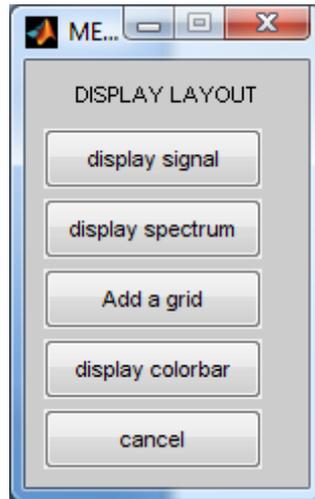


Imagen 74: Menú con los subplot de una distribución tiempo-frecuencia.

Como se observa en la imagen 74, con los subplot es posible añadir y visualizar tanto la representación en tiempo como el espectro de la señal en una misma figura.

3. La opción “*Change the sampling frequency*” permite cambiar la frecuencia de muestreo. Esta opción es muy importante, ya que por defecto la frecuencia de muestreo utilizada en cualquier distribución es de 1Hz, y por lo tanto la representación inicial muestra un rango de frecuencias normalizado, que va desde 0 a 0.5. Al cambiar la frecuencia de muestreo a la adecuada se visualiza la representación con los ejes de tiempo y frecuencia adecuados.
4. La opción “*change the frequency bounds*” permite cambiar los límites de frecuencia, por si se quiere estudiar una banda de frecuencias más pequeña. Es una forma de hacer zoom a lo largo del eje de frecuencia. Cabe destacar que los límites de frecuencia se deberán establecer en una frecuencia normalizada, y por lo tanto deberán estar comprendidos entre 0 y 0.5.

De acuerdo a lo anterior, si se quiere obtener una representación entre f_{max} y f_{min} hay que obtener sus frecuencias normalizadas equivalentes mediante la expresión B.1

$$f_{normalizada} = \frac{f_{original}}{f_s} \quad (B.1)$$

5. La opción “*Change the theshold*” permite cambiar el umbral o nivel mínimo de la representación tiempo-frecuencia, el cual por defecto es el 5% del máximo. Con esta opción se puede variar el umbral para conseguir que las componentes de

menor intensidad, que por lo general son componentes indeseadas debidas al ruido, no aparezcan dibujadas en la representación tiempo-frecuencia.

6. La opción "*Change to a logarithmic scale*" permite cambiar la representación de los niveles de gris a una escala logarítmica. Esto es importante para mostrar una mayor definición y resaltar las componentes de la señal, sobre todo las componentes con menor potencia y que no se aprecian bien. Esta opción es la que se usa en todas las representaciones de la comparativa, ya que se quería resaltar todas las componentes, hasta los términos cruzados más pequeños, para ver más fácilmente las diferencias entre las distribuciones.

Las demás opciones de la imagen 72 son simplemente para crear nuevas figuras y para guardar o copiar la imagen.

Además de las funciones y características vistas en este apéndice la toolbox dispone de muchas otras que podrían ser interesantes para el procesado de señales en tiempo-frecuencia, las cuales pueden verse en la guía de la toolbox [5], junto con unas demos con ejemplos de las funciones de la toolbox.

Se puede, por ejemplo, estimar la frecuencia instantánea de una señal de una sola componente, el retardo de grupo, la frecuencia media, el ancho de banda, calcular los marginales y energía de una representación tiempo-frecuencia, etc.

