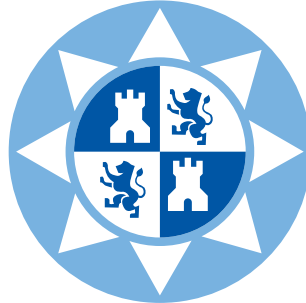


UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



GRADO EN INGENIERÍA EN
SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN

Trabajo Fin de Grado

*Análisis de la reconstrucción morfológica con
elementos estructurantes dependientes de la
orientación para el procesamiento de imágenes
retinográficas*

Asunción Cayuela Hidalgo

10 de julio de 2017

Director: ***Dr. D. Rafael Verdú Monedero***

Agradecimientos

En primer lugar, quería dar las gracias al director de este Trabajo Fin de Grado, el Dr D. Rafael Verdú Monedero por la paciencia, el buen trato y las horas dedicadas a resolver dudas sobre el trabajo durante todos estos meses.

Agradecer también a mis amigos, con los que he compartido cuatro años llenos de risas, muchas horas de esfuerzo, agobios y también momentos de satisfacción.

Por último quería dar las gracias a mi familia y especialmente a mis padres y mi hermano, por el apoyo incondicional que siempre me brindan, muchas gracias.

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción | 1 |
| 2 | Estimación de la orientación | 3 |
| 2.1 | Gradiente | 3 |
| 2.2 | ASG | 4 |
| 2.3 | ASGVF | 5 |
| 2.4 | ASGG | 6 |
| 3 | Operadores morfológicos variantes en el espacio | 11 |
| 3.1 | Caso invariante | 12 |
| 3.2 | Caso variante | 13 |
| 4 | Reconstrucción morfológica variante en el espacio | 17 |
| 5 | Resultados | 21 |
| 5.1 | Tamaño de ventana ASG | 21 |
| 5.1.1 | Cierre morfológico | 22 |
| 5.2 | ASGG | 23 |
| 5.2.1 | ASGVF y ASGG | 24 |
| 5.3 | Dilatación | 25 |
| 5.4 | Reconstrucción morfológica de imágenes retinográficas | 26 |
| 6 | Conclusiones y líneas futuras | 37 |
| | Bibliografía | 39 |

CAPÍTULO 1

Introducción

El procesado de imágenes tiene gran importancia, y de manera especial en el campo de la medicina. En concreto, mediante la retinografía se pueden obtener fotos en color de la retina para poder diagnosticar enfermedades tales como el glaucoma, la retinopatía diabética o el desprendimiento de retina. Además, la retinografía no solo es útil para poder detectar estas enfermedades sino que también nos permite evaluar la evolución de las mismas a lo largo del tiempo.

El procesado de las imágenes se lleva a cabo mediante el filtrado de las mismas, y se puede realizar de manera variante o invariante en el espacio, es decir, en función de si la forma de la máscara depende de la orientación de los contornos de los objetos de la imagen bajo análisis o no. El campo vectorial de orientaciones se define en todos los píxeles de la imagen y puede proporcionar sólo una orientación en cada píxel (métodos de estimación de orientación única) o las orientaciones principales existentes en ese píxel (métodos de estimación de orientación múltiple).

Los métodos de una única orientación muestran buenos resultados en imágenes en las que hay una orientación dominante. Estos métodos están basados en el gradiente y la orientación que proporcionan es la media de las orientaciones existentes en cada píxel. Algunos de estos métodos son, por ejemplo, el tensor de estructura local (*Local Structure Tensor*, LST) [4], el análisis de componentes principales (*Principal Component Analysis*, PCA) [6] y el gradiente promediado al cuadrado (*Average Squared Gradient*, ASG) [3]. Los métodos que consideran más de una orientación son más complejos y están basados, principalmente, en bancos de filtros [8, 1, 11]. En este trabajo vamos

a considerar una única orientación, utilizando el método del gradiente promediado al cuadrado para obtenerla.

Utilizando el campo vectorial de orientaciones se pueden definir filtros que modifican su núcleo en función de la orientación presente en los píxeles de la imagen. Los filtros que se van a utilizar en este trabajo son basados en operadores morfológicos, más concretamente en la dilatación. La morfología matemática es el conjunto de métodos que extraen componentes de la imagen útiles para la representación y descripción de regiones, contornos, estructuras, etc. Está basada en un elemento estructurante que determina las características extraídas.

La dilatación es el proceso mediante el cual los objetos en una imagen binaria se agrandan, siendo el elemento estructurante el que controla la forma de este agrandamiento. El filtro va a realizar la reconstrucción morfológica mediante dilatación geodésica, que consiste en la dilatación de los píxeles de la imagen con un elemento estructurante que varía en el espacio dependiendo de la orientación, hasta conseguir la restauración completa de la imagen.

El trabajo se va a dividir de la siguiente manera: en el capítulo 2 se explicará la estimación de la orientación, en el capítulo 3 se expondrá la formulación de los operadores morfológicos utilizados, el capítulo 4 se centrará en la reconstrucción morfológica y, finalmente, en los capítulos 5 y 6 se comentarán los resultados obtenidos y las conclusiones y líneas futuras, respectivamente.

Estimación de la orientación

En este capítulo se van a estudiar varios métodos para obtener la orientación de los datos en las imágenes. Estos métodos están basados en el gradiente (véase Fig. 2.1).

A continuación se describe el método para la estimación del campo de orientaciones en una imagen. Primero se detalla cómo obtener el gradiente promediado al cuadrado y debido a que en zonas homogéneas el gradiente es nulo, después se explica cómo se extiende este campo vectorial a todos los píxeles, ya que es necesario que la información de la orientación esté definida en toda la imagen.

2.1. Gradiente

El gradiente es un campo vectorial que nos da la dirección en la cual una magnitud varía más rápidamente. El gradiente está basado en la primera derivada, por tanto, este será cero en zonas homogéneas de una imagen. Con el objetivo de extender la información del gradiente a todos los píxeles de la imagen, se obtiene el flujo vectorial de gradiente (*Gradient Vector Flow*, GVF [16, 15]).

Nuestro objetivo es encontrar la orientación de los objetos contenidos en la imagen, para

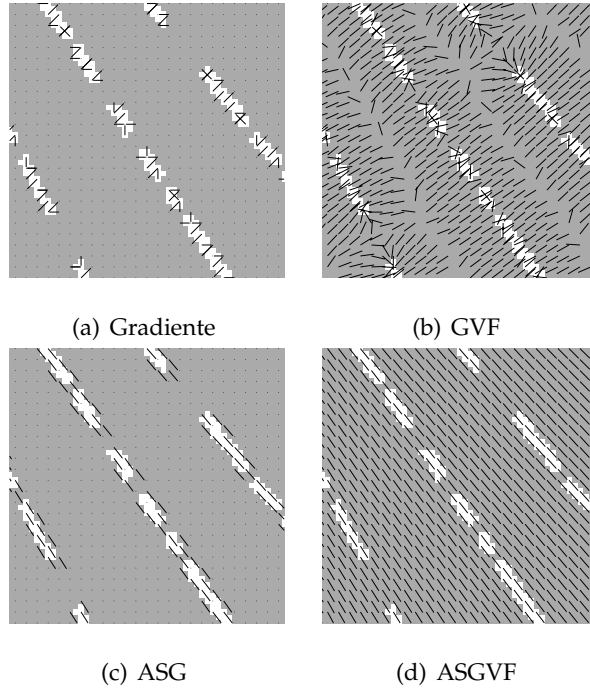


Figura 2.1: Ejemplo gráfico de los campos vectoriales: (a) gradiente de imagen \mathbf{g} , (b) flujo vectorial de gradiente (GVF), (c) gradiente promediado al cuadrado (ASG) \mathbf{d} , (d) flujo vectorial de gradiente promediado al cuadrado (ASGVF) \mathbf{v} .

ello en lugar de utilizar el gradiente se va a emplear el gradiente promediado al cuadrado, que es un campo vectorial que indica la dirección de los contornos de los objetos.

2.2. ASG

El gradiente promediado al cuadrado (*Average Squared Gradient*, ASG) es un campo vectorial que se obtiene al elevar al cuadrado y promediar los vectores de gradiente [3]. Dada una imagen $X(x, y)$, ASG utiliza la siguiente definición de gradiente:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{bmatrix} = \text{sign} \left(\frac{\partial X(x, y)}{\partial x} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial X(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

A continuación el gradiente se eleva al cuadrado (doblando el ángulo y elevando al cuadrado su módulo) y se promedia en un vecindario W

$$\overline{\mathbf{g}}_s = \begin{bmatrix} \overline{g_{s,1}}(x, y) \\ \overline{g_{s,2}}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_W (g_1^2(x, y) - g_2^2(x, y)) \\ \sum_W (2 g_1(x, y) g_2(x, y)) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

El campo direccional es $\mathbf{d} = [d_1(x, y), d_2(x, y)]^\top$, donde su ángulo se obtiene como

$$\angle \mathbf{d} = \frac{\Phi}{2} - \text{sign}(\Phi) \frac{\pi}{2}, \quad (2.3)$$

que está en el rango $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, siendo $\Phi = \angle \overline{\mathbf{g}_s}$, y el módulo de \mathbf{d} , $\|\mathbf{d}\|$, puede mantenerse como el módulo de $\overline{\mathbf{g}_s}$, o la raíz cuadrada de $\overline{\mathbf{g}_s}$ o, en algunas aplicaciones (véase por ejemplo [7]), puede establecerse a la unidad.

Mediante el ASG se obtiene la orientación de los objetos solamente donde existe gradiente, es decir, en las zonas homogéneas no tenemos orientación ya que el gradiente es nulo. Debido a esto, vamos a aplicar el flujo vectorial de gradiente promediado al cuadrado (*Average Squared Gradient Vector Flow*, ASGVF) y el ASG con filtro Gauss para extender la información de la orientación a todos los píxeles de la imagen.

2.3. ASGVF

El campo ASG de una imagen proporciona los vectores con la orientación de los datos en los bordes de los objetos de la imagen (véase Fig. 2.1(c)). Generalmente estos vectores son distintos de cero solo cerca de los bordes de los objetos y, en regiones homogéneas donde el gradiente es cero, el ASG es también cero (véase Fig. 2.1(a) y Fig. 2.1(c)). Para extender la información de la orientación a píxeles donde el gradiente es nulo se va a realizar un proceso de difusión equivalente al GVF que proporcionará el flujo vectorial de gradiente promediado al cuadrado (ASGVF) [14]. Se define el ASGVF como el campo vectorial $\mathbf{v} = [v_1(x, y), v_2(x, y)]^T$ que minimiza el siguiente funcional de energía:

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{D}(\mathbf{v}) + \alpha \mathcal{S}(\mathbf{v}), \quad (2.4)$$

donde \mathcal{D} representa una medida de distancia dada por la diferencia al cuadrado entre el gradiente promediado al cuadrado original y el regularizado, ponderado por el cuadrado del primero,

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_E \|\mathbf{d}\|^2 \|\mathbf{v} - \mathbf{d}\|^2 dx dy, \quad (2.5)$$

siendo E el dominio de la imagen. El término de energía \mathcal{S} determina la suavidad del campo direccional y representa la energía de las derivadas de primer orden de la señal:

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_E \sum_{i=1}^2 \left((\partial_x v_i)^2 + (\partial_y v_i)^2 \right) dx dy. \quad (2.6)$$

Esta formulación variacional produce un campo vectorial \mathbf{v} que es suave donde el ASG es cero (en zonas homogéneas). Cuando el módulo $\|\mathbf{d}\|$ del ASG es pequeño, el valor del funcional de energía depende de la suma de los cuadrados de las derivadas parciales del campo vectorial, esto es, se fuerza al campo a variar lentamente en regiones homogéneas. En la otra situación, cuando el módulo del ASG es grande, el primer término es el que domina en el funcional (2.4) y la energía se minimiza igualando el ASGVF al ASG, produciendo el efecto deseado. La constante α

es un parámetro de la regularización que gobierna el compromiso entre la suavidad y la fidelidad a los datos de la solución.

Usando el cálculo de variaciones, el funcional de energía (2.4) alcanza un mínimo con las ecuaciones de Euler, proporcionando la solución del campo ASGVF.

$$(\mathbf{v} - \mathbf{d})|\mathbf{d}|^2 - \alpha \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver tratando \mathbf{v} como una función dependiente del tiempo y considerando la solución en el estado final (esto es equivalente al método de descenso de gradiente):

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} - \mathbf{d})|\mathbf{d}|^2 - \alpha \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de difusión generalizadas.

Reemplazando las derivadas parciales por sus aproximaciones discretas se llega a la solución iterativa del ASGVF,

$$\mathbf{v}_\zeta = \mathbf{v}_{\zeta-1} + \Delta t \mathbf{f}_{\zeta-1} - \frac{1}{\eta} \mathbf{k} * \mathbf{v}_\zeta, \quad (2.9)$$

donde se ha tomado el subíndice ζ como la iteración actual y $\zeta - 1$ como la iteración anterior. Las fuerzas externas son $\mathbf{f} = (\mathbf{v} - \mathbf{d})|\mathbf{d}|^2$, $\eta = \frac{1}{\alpha \Delta t}$ y \mathbf{k} es un operador que realiza la aproximación discreta de las derivadas espaciales de ∇^2 . La iteración se realiza de manera más eficiente en el dominio de la frecuencia, haciendo la DFT (*Discrete Fourier Transform*) [13]

$$\mathbf{V}_\zeta = \mathbf{V}_{\zeta-1} + \Delta t \mathbf{F}_{\zeta-1} - \frac{1}{\eta} \mathbf{K} \mathbf{V}_\zeta, \quad (2.10)$$

donde \mathbf{V}_ζ , $\mathbf{V}_{\zeta-1}$ y $\mathbf{F}_{\zeta-1}$ son las transformadas de Fourier de las señales \mathbf{v}_ζ , $\mathbf{v}_{\zeta-1}$ y $\mathbf{f}_{\zeta-1}$, respectivamente. \mathbf{K} es el muestreo del espectro $\mathbf{K}(\omega_1, \omega_2)$ que contiene la representación frecuencial de las derivadas discretas en el dominio espacial y viene dada por:

$$\mathbf{K}(\omega_1, \omega_2) = 4(2 - \cos \omega_1 - \cos \omega_2)^2 \quad (2.11)$$

Entonces, (2.10) puede ser reescrita como:

$$\mathbf{V}_\zeta = \mathbf{H}(\mathbf{V}_{\zeta-1} + \Delta t \mathbf{F}_{\zeta-1}), \quad (2.12)$$

siendo \mathbf{H} es un filtro paso bajo que está relacionado con $\mathbf{K}(\omega_1, \omega_2)$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{H}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\eta}{\eta + \mathbf{K}(\omega_1, \omega_2)}. \quad (2.13)$$

2.4. ASGG

Como alternativa al ASGVF, en este trabajo se propone un filtro de Gauss para suavizar y extender los valores del campo ASG. El filtro que se usa para obtener el ASGVF es un filtro

paso bajo que minimiza la energía de las derivadas de la señal. La respuesta de este filtro en el dominio del tiempo tiene forma de sinc, presentando lóbulos negativos que afectan al filtrado de la imagen. Esta es la razón por la que se ha decidido sustituir este filtro por uno gaussiano. El filtro gaussiano reduce la energía de las componentes de altas frecuencias. Su único parámetro es σ , el cual controla el alcance espacial. El filtro Gauss se define mediante la siguiente ecuación:

$$g[\mathbf{n}] = g[n_1, n_2] = \frac{1}{\phi} \cdot e^{-\left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (2.14)$$

siendo ϕ una constante tal que $\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} g[n_1, n_2] = 1$.

De la misma manera que en el ASGVF, el campo vectorial que se quiere obtener es $\mathbf{v} = [v_1(x, y), v_2(x, y)]^T$, que minimiza el funcional de energía:

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \mathcal{D}(\mathbf{v}) + \alpha \mathcal{S}(\mathbf{v}), \quad (2.15)$$

donde \mathcal{D} representa una medida de distancia dada por la diferencia al cuadrado entre el gradiente promediado al cuadrado original y el extendido, ponderado por el cuadrado del primero,

$$\mathcal{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_E \|\mathbf{d}\|^2 \|\mathbf{v} - \mathbf{d}\|^2 dx dy, \quad (2.16)$$

siendo E el dominio de la imagen. El término de energía \mathcal{S} determina la suavidad del campo direccional, pero ahora es distinto respecto al que teníamos en el ASGVF, y representa la energía de las componentes de alta frecuencia de \mathbf{v} :

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = \int_E \kappa * \mathbf{v} dx. \quad (2.17)$$

siendo κ un operador que proporciona las altas frecuencias de la señal que filtra:

$$\kappa(x) = g(x) e^{j \frac{\pi x}{T}}. \quad (2.18)$$

Esta formulación variacional produce un campo vectorial \mathbf{v} que es suave donde el ASG es cero (en zonas homogéneas). Cuando el módulo $\|\mathbf{d}\|$ del ASG es pequeño, el valor del funcional de energía depende de las altas frecuencias, por lo tanto, para que se minimice la energía habrá que hacer que las componentes de altas frecuencias sean mínimas. Así se consigue que el campo se vaya extendiendo suavemente. En la otra situación, cuando el módulo del ASG es grande, el primer término es el que domina en el funcional (2.15) y la energía se minimiza igualando el ASGG al ASG.

El campo ASGG se puede calcular mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, ya que el funcional de energía (2.15) alcanza un mínimo con las mismas.

$$(\mathbf{v} - \mathbf{d})|\mathbf{d}|^2 - \alpha \mathbf{k} \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

donde la constante α es un parámetro que controla el compromiso entre la suavidad y la fidelidad a los datos de la solución.

Para resolver estas ecuaciones se va a tratar la señal bidimensional discreta $\mathbf{v} = \mathbf{v}[\mathbf{n}, t] = \mathbf{v}[n_1, n_2, t]$ como una función dependiente del tiempo:

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{f} - \alpha \cdot \mathbf{k} * \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

que en su situación final y estable coincide con (2.19).

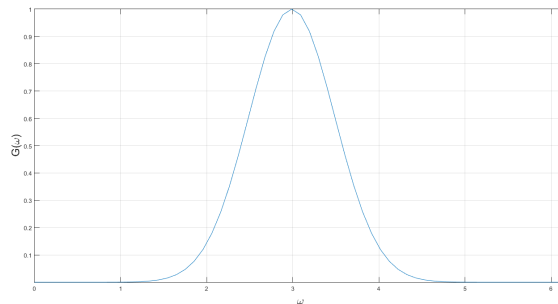
Los términos de esta ecuación son las fuerzas externas \mathbf{f} y el filtro paso alto \mathbf{k} que reduce las componentes de la señal de frecuencias, representado en la Figura 2.2(b), que identificamos como:

$$\mathbf{f} = (\mathbf{v} - \mathbf{d})|\mathbf{d}|^2, \quad (2.21)$$

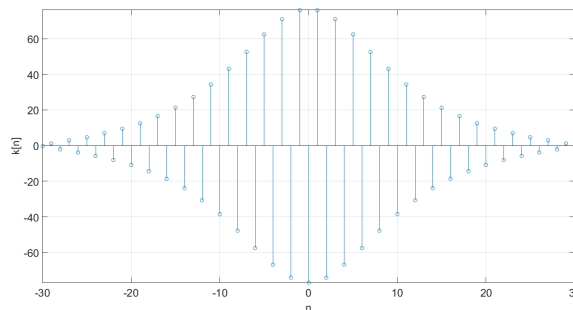
$$\mathbf{k}[\mathbf{n}] = TF^{-1} \left\{ \frac{\mathbf{G} - 1}{\mathbf{G} \Delta t \alpha} \right\}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{G} = TF \{g[\mathbf{n}]\}. \quad (2.23)$$

y donde \mathbf{G} se corresponde con la transformada de Fourier del filtro gaussiano definido en la ecuación (2.14) (Figura 2.2(a)).



(a) $\mathbf{G}(\omega)$



(b)

Figura 2.2: (a) Respuesta frecuencial \mathbf{G} (ecuación 2.23), $\sigma = 2$, (b) Respuesta espacial $\mathbf{k}[n]$ (ecuación 2.22), utilizando $\alpha = 100000$.

Sustituyendo \mathbf{v}_t por su aproximación discreta en la ecuación (2.20), resulta:

$$\frac{\mathbf{v}_{\zeta+1} - \mathbf{v}_{\zeta}}{\Delta t} + \mathbf{f}_{\zeta} - \alpha \cdot \mathbf{k} * \mathbf{v}_{\zeta+1} = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

donde se ha tomado el subíndice ζ como la iteración actual y $\zeta + 1$ como la iteración siguiente. Al hacer la transformada de Fourier se obtiene la siguiente ecuación en el dominio frecuencial:

$$\frac{\mathbf{V}_{\zeta+1} - \mathbf{V}_{\zeta}}{\Delta t} + \mathbf{F}_{\zeta} - \alpha \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\zeta+1} = \mathbf{0}. \quad (2.25)$$

donde \mathbf{V}_{ζ} , $\mathbf{V}_{\zeta+1}$ y \mathbf{F}_{ζ} son las transformadas de Fourier de las señales \mathbf{v}_{ζ} , $\mathbf{v}_{\zeta+1}$ y \mathbf{f}_{ζ} , respectivamente. Tenemos que despejar $\mathbf{V}_{\zeta+1}$ para conseguir la ecuación iterativa que se va a implementar, entonces operando sobre la ecuación (2.25),

$$\mathbf{V}_{\zeta+1} = \frac{\mathbf{V}_{\zeta}}{1 - \Delta t \alpha \mathbf{K}} - \frac{\Delta t \mathbf{F}_{\zeta}}{1 - \Delta t \alpha \mathbf{K}}. \quad (2.26)$$

El filtro de Gauss está relacionado en el dominio de la frecuencia con el filtro \mathbf{K} de la siguiente forma:

$$\mathbf{G} = \frac{1}{1 - \Delta t \alpha \mathbf{K}} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{K}}{\eta}}, \quad (2.27)$$

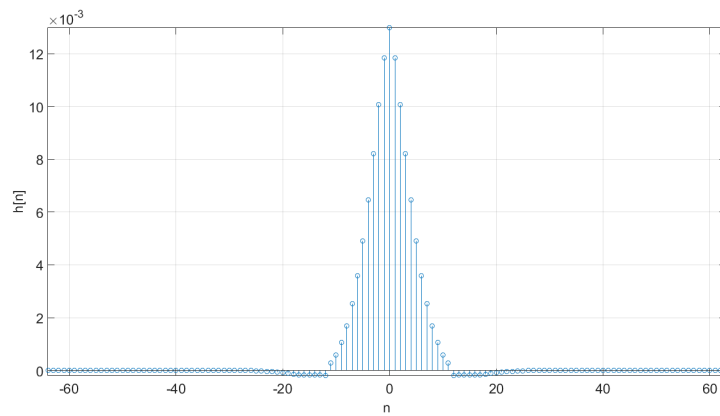
donde $\eta = (\Delta t \alpha)^{-1}$, pudiendo reescribir la ecuación (2.26) como:

$$\mathbf{V}_{\zeta+1} = \mathbf{G} \mathbf{V}_{\zeta} - \Delta t \mathbf{G} \mathbf{F}_{\zeta} \quad (2.28)$$

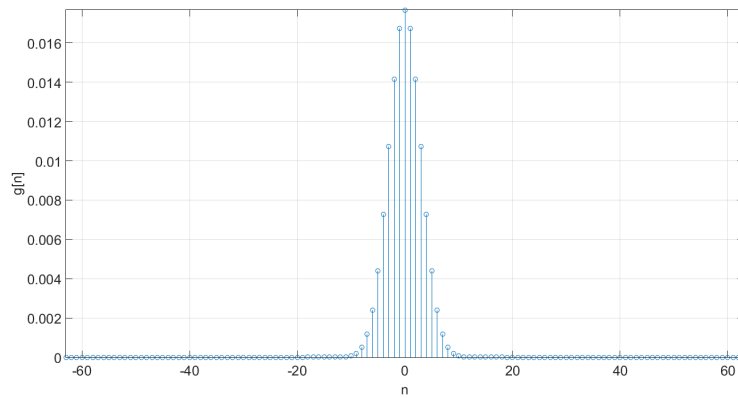
Si calculamos la transformada de Fourier inversa de la ecuación (2.28) obtenemos la equivalente en el dominio del espacio, que es la que se ha implementado:

$$\mathbf{v}_{\zeta+1} = \mathbf{g} * \mathbf{v}_{\zeta} - \Delta t \cdot \mathbf{g} * \mathbf{f}_{\zeta}. \quad (2.29)$$

En la Figura 2.3 se han representado los filtros utilizados en el proceso iterativo de los métodos ASGVF (2.3(a)) y ASGG (2.3(b)) donde se puede apreciar que el del ASGVF presenta pequeños lóbulos negativos que hacen inviable su uso para regularizar el gradiente porque genera cambios de signo ficticios en la fase. Para el filtro de Gauss hemos escogido un valor de $\sigma = 3$. La Figura 2.3(a) corresponde con la transformada de Fourier inversa del filtro \mathbf{H} de la ecuación (2.13) y la Figura (2.3(b)) es el filtro \mathbf{g} de la ecuación (2.29).



(a) Filtro h del proceso iterativo en ASGVF.



(b) Filtro g del proceso iterativo en ASGG.

Figura 2.3: Filtro en el dominio del tiempo para los distintos métodos de extensión del campo ASG.

Operadores morfológicos variantes en el espacio

La morfología matemática es una metodología de procesamiento de imágenes no lineal útil para resolver eficientemente muchas tareas de análisis de imágenes. Se basa en un elemento estructurante que no es más que un conjunto que determina las características de la operación morfológica realizada a la imagen [12].

Las dos operaciones principales son la erosión y la dilatación. El valor dilatado de un píxel es el máximo valor de la imagen en la ventana definida por el elemento estructurante. La erosión es el operador dual, siendo el valor erosionado de un píxel el mínimo valor de la imagen en la ventana definida por el elemento estructurante.

En la morfología matemática euclidiana el par de operadores duales dilatación $(f \oplus b)(x)$ y erosión $(f \ominus b)(x)$ de una imagen $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vienen dadas por [10, 2, 5]:

$$\begin{cases} \delta_b(f)(x) = (f \oplus b)(x) = \sup_{y \in E} \{f(y) + b(y - x)\}, \\ \varepsilon_b(f)(x) = (f \ominus b)(x) = \inf_{y \in E} \{f(y) - b(y + x)\}, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es la función estructurante que determina el efecto del operador. La función estructurante desempeña un papel similar al núcleo en el filtrado lineal clásico mediante convolución. Al permitir valores infinitos, se debe considerar la convención adicional para expresiones ambiguas: $f(y) + b(x - y) = -\infty$ cuando $f(y) = -\infty$ o $b(x - y) = -\infty$, y que $f(y) - b(y + x) = +\infty$ cuando $f(y) = +\infty$ o $b(y + x) = -\infty$. Notamos fácilmente que ambos

son invariantes ante desplazamientos en el espacio E espacial ("horizontal") y en el espacio $\overline{\mathbb{R}}$ de la intensidad de la imagen (vertical), es decir,

$$f(x) \mapsto f_{(y,\alpha)}(x) = f(x - y) + \alpha, \quad (3.2)$$

con $y \in E$ y $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces

$$\delta_b(f_{(y,\alpha)})(x) = \delta_b(f)(x - y) + \alpha. \quad (3.3)$$

La teoría del filtrado morfológico se basa en los operadores apertura $(f \circ b)(x)$ y cierre $(f \bullet b)(x)$, obtenidos respectivamente por la composición del producto erosión-dilatación y dilatación-erosión usando la misma función estructurante, es decir,

$$\begin{cases} \gamma_b(f)(x) = (f \circ b)(x) = ((f \ominus b) \oplus b)(x) = \sup_{z \in E} \inf_{y \in E} \{f(y) - b(y - z) + b(z - x)\}, \\ \varphi_b(f)(x) = (f \bullet b)(x) = ((f \oplus b) \ominus b)(x) = \inf_{z \in E} \sup_{y \in E} \{f(y) + b(z - y) - b(x - z)\}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Con el fin de tener una mejor visión del efecto de la apertura y el cierre de una función, vamos a reescribir $(f \circ b)(x)$ de la siguiente forma:

$$\gamma_b(f) = \bigvee \left\{ b_{(y,\alpha)} \mid (y,\alpha) \in E \times \overline{\mathbb{R}}, b_{(y,\alpha)} \leq f \right\}, \quad (3.5)$$

donde \bigvee denota el supremo. Por lo tanto, en el espacio del producto $E \times \overline{\mathbb{R}}$ el subgrafo de la apertura es generado por la envolvente superior de la función de forma $b(x - y) + \alpha$ trasladada horizontal y verticalmente bajo la función f . En otras palabras, la función $(f \circ b)(x)$ puede ser vista como el supremo de las partes invariantes de f recorridas por b . Respecto al cierre $(f \bullet b)(x)$, se obtiene una interpretación dual geométrica similar:

$$\varphi_b(f) = \bigwedge \left\{ \check{b}_{(y,\alpha)} \mid (y,\alpha) \in E \times \overline{\mathbb{R}}, \check{b}_{(y,\alpha)} \geq f \right\}, \quad (3.6)$$

donde \bigwedge denota el ínfimo y $\check{b}(x) = -b(-x)$. Esta expresión corresponde a las partes invariantes de f barridas por la función estructurante simétrica horizontal y vertical \check{b} [5].

Dependiendo de si se mantiene o no el mismo elemento estructurante para toda la imagen, se pueden dar dos casos: invariante y variante en el espacio. A continuación se explicarán ambos.

3.1. Caso invariante

El marco más comúnmente estudiado se basa en funciones de estructura plana, llamadas elementos estructurantes. Concretamente, sea B un conjunto booleano definido en el origen, es decir, $B \subseteq E$ o $B \in \mathcal{P}(E)$, que define la "forma" de la estructura, la función estructurante asociada se da por:

$$b(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in B, \\ -\infty & \text{si } x \in B^c, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde B^c es el conjunto complementario de B en $\mathcal{P}(E)$. Por lo tanto, la erosión plana ($f \ominus B$) y la dilatación plana ($f \oplus B$) pueden ser calculadas respectivamente por los filtros de máximos y mínimos deslizantes,

$$\begin{cases} \delta_B(f)(x) = (f \oplus B)(x) = \sup_{y \in B} \{f(x - y)\} = \bigvee_{y \in B} f(x - y), \\ \varepsilon_B(f)(x) = (f \ominus B)(x) = \inf_{y \in B} \{f(x + y)\} = \bigwedge_{y \in B} f(x + y). \end{cases} \quad (3.8)$$

En la Fig. 3.1 se muestra cómo se lleva a cabo una dilatación en una imagen binaria, sólo siendo necesarios la imagen (Fig. 3.1(a)) y el elemento estructurante (Fig. 3.1(b)) que se va a utilizar, y obteniendo como resultado la imagen dilatada con la forma de dicho elemento (Fig. 3.1(c)).

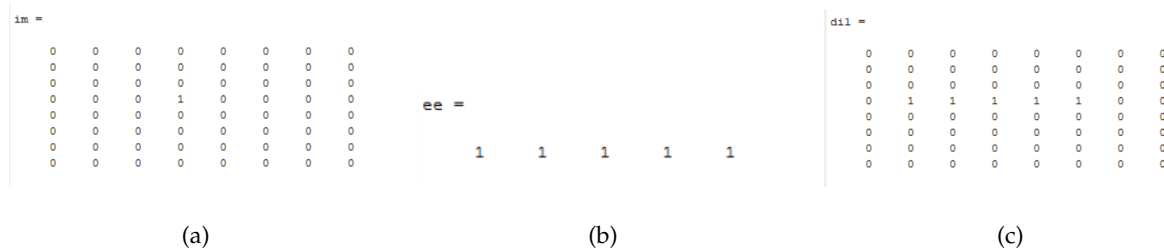


Figura 3.1: Dilatación de imagen binaria: (a) Imagen, (b) Elemento estructurante 5×1 , (c) Imagen dilatada.

3.2. Caso variante

Tradicionalmente, las funciones estructurantes (elementos estructurantes) han sido invariantes a la traslación, aplicando la función b (o el mismo conjunto B , es decir, la misma forma y orientación) en todos los píxeles de la imagen. En los últimos años, se ha propuesto la noción de operadores morfológicos adaptativos [9] basada en el uso de elementos estructurantes adaptativos, que cambian su forma y orientación sobre el espacio E , de acuerdo con las características locales de la imagen.

En el caso de los operadores morfológicos planos adaptativos en el espacio euclídeo E , la función estructurante admisible $b(x, y)$ está asociada a un elemento estructurante adaptativo variante en el espacio, denotado por $\mathcal{A}(X)$. El mapeo de \mathcal{A} asigna un subconjunto posiblemente diferente de E a cada punto x del espacio E según las características locales de la imagen, de modo que la correspondiente función estructurante admisible se define como

$$b(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in \mathcal{A}(x), \\ -\infty & \text{si } y \in \mathcal{A}^c(x). \end{cases} \quad (3.9)$$

Las expresiones de la dilatación y erosión adaptativas de f por $\mathcal{A}(x)$ se expresan como:

$$\delta_{\mathcal{A}(x)}(f)(x) = \bigvee_{y \in \mathcal{A}^T(x)} f(y), \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{\mathcal{A}(x)}(f)(x) = \bigwedge_{y \in \mathcal{A}(x)} f(y). \quad (3.11)$$

donde el conjunto traspuesto $\mathcal{A}^T(x)$ se define por la relación

$$y \in \mathcal{A}^T(x) \iff x \in \mathcal{A}(y), \quad (3.12)$$

o usando la función estructurante admisible:

$$y \in \mathcal{A}^T(x) \text{ si } b(y, x) = 0.$$

Los operadores $\delta_{\mathcal{A}(x)}$ y $\varepsilon_{\mathcal{A}(x)}$ son adjuntos una vez que se utiliza el mismo elemento $\mathcal{A}(x)$ en el mapeo [9]. Por lo tanto, la apertura y el cierre planos adaptativos se pueden definir, respectivamente, como

$$\gamma_{\mathcal{A}(x)}(f) = \left(\delta_{\mathcal{A}(x)} \circ \varepsilon_{\mathcal{A}(x)} \right) (f) = \bigvee \{ \text{Cyl}_{\alpha}^T(x) \mid \text{Cyl}_{\alpha}^T(x) \leq f \}, \quad (3.13)$$

$$\varphi_{\mathcal{A}(x)}(f) = \left(\varepsilon_{\mathcal{A}(x)} \circ \delta_{\mathcal{A}(x)} \right) (f) = \bigwedge \{ \text{Cyl}_{\alpha}^T(x) \mid \text{Cyl}_{\alpha}^T(x) \geq f \}, \quad (3.14)$$

donde $\text{Cyl}_{\alpha}^T(x)$ es un cilindro de base $\mathcal{A}(x)$ y altura α y $\text{Cyl}_{\alpha}^T(x)$ es el complemento de un cilindro de base $\mathcal{A}^T(x)$ y altura α .

Centrándonos en imágenes bidimensionales, $E \subset \mathbb{R}^2$, se considera un kernel de forma elíptica $\mathcal{E}^{\theta, a, b}$ para ser utilizado por los filtros adaptativos variantes en el espacio propuestos. En el caso de los campos vectoriales que tienen en cuenta solamente una única orientación en cada píxel, el elemento estructurante se define como

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{E}^{\theta(x), a(x), b(x)}, \quad (3.15)$$

donde $\theta(x)$, $a(x)$ y $b(x)$ son, respectivamente, la orientación, el semi-eje mayor y el semi-eje menor de la elipse $\mathcal{E}^{\theta, a, b}$ centrada en el píxel x . El valor de $\theta(x)$ está dado por el campo de orientación, mientras que los valores de $a(x)$ y $b(x)$ pueden ser proporcionados por el valor absoluto de este campo vectorial.

En el caso variante el elemento estructurante se posiciona en cada píxel con el ángulo que nos proporciona el campo de orientación de la imagen. Por ello es necesario obtener previamente dicho campo vectorial. A continuación se van a describir los pasos a seguir para llevar a cabo una dilatación variante en una imagen retinográfica.

Se trata de una imagen RGB (Fig. 3.2(a)), de la cual nos interesa solamente la componente verde (Fig. 3.2(b)) para realizar el procesamiento. En la imagen, las venas son de tono oscuro por lo que se le hace el negativo (3.2(c)) a la imagen para que queden de tono claro y poder realizar

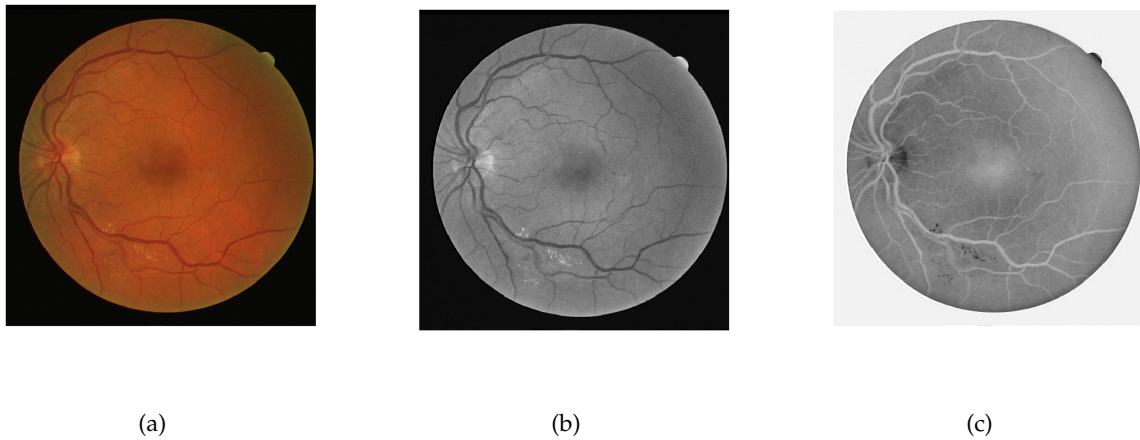


Figura 3.2: (a) Imagen original, (b) Componente verde, (c) Negativo de la componente verde.

la dilatación. El primer paso es obtener el campo ASG de la imagen con un tamaño de ventana adecuado, en nuestro caso hemos escogido $m = 11$. En la Fig. 3.3(a) está representado el campo vectorial del ASG normalizado, para poder observar mejor la orientación en todos los píxeles de la imagen.

El siguiente paso es extender el campo ASG. El campo ASG sólo nos proporciona la orientación en los bordes de los objetos en la imagen, es decir, en las zonas homogéneas este campo es nulo. Por ello se utiliza un filtro de Gauss que extiende la orientación del ASG a las zonas homogéneas (Fig. 3.3(b)). Se ha utilizado un filtro Gauss con $\sigma = 1,5$.

Por último, solo nos queda definir las matrices que mapean la longitud y la anchura del elemento estructurante orientado. En este caso ha sido una línea de longitud $l = 9$.

En la Fig. 3.4 se muestran la imagen original (Fig. 3.4(a)) junto con el resultado de realizar la dilatación variante en el espacio con un elemento estructurante lineal cuya orientación depende de los contornos de la imagen (Fig. 3.4(b)).

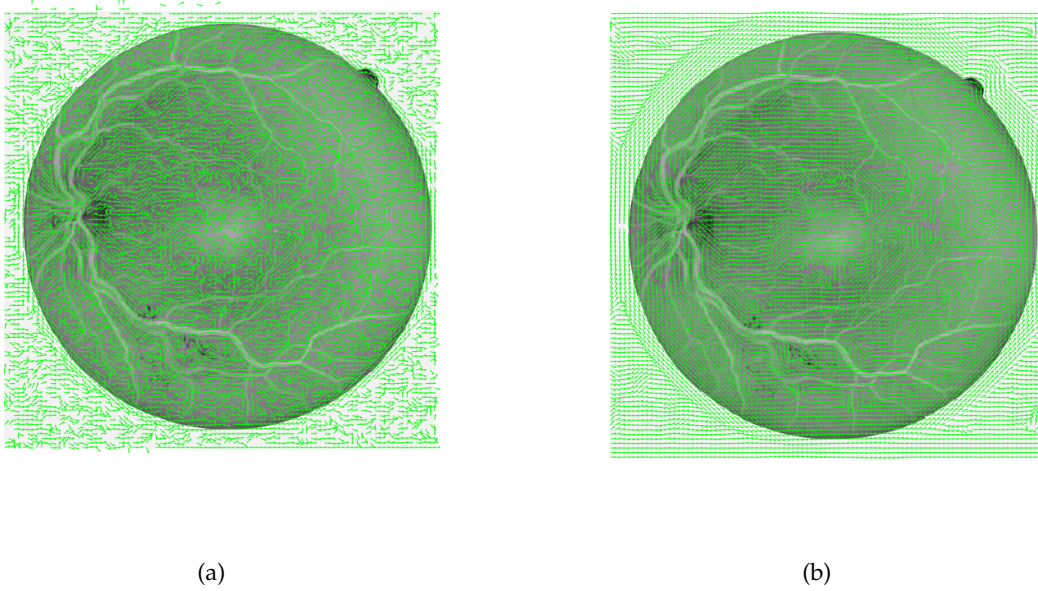


Figura 3.3: Campo con orientación normalizado (a) ASG, (b) ASGG.

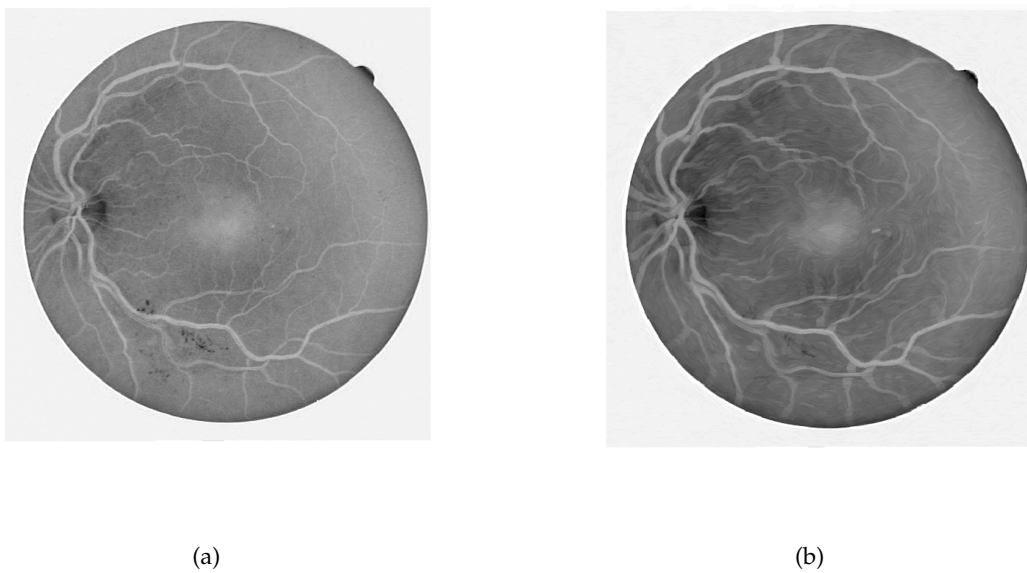


Figura 3.4: (a) Negativo de la componente verde, (b) Dilatación variante en el espacio.

Reconstrucción morfológica variante en el espacio

La reconstrucción morfológica implica dos imágenes y un elemento estructurante. Una imagen es el marcador (F), que es el punto de partida de la reconstrucción y la otra imagen es la máscara (G), que es la que restringe la transformación. Además, por definición, el marcador debe de ser igual o menor que la máscara.

En este trabajo nos vamos a centrar en la reconstrucción morfológica mediante dilatación geodésica. La dilatación geodésica consiste en dilatar el marcador con la forma del elemento estructurante y luego restringirla con la máscara a que quede igual o por debajo de ésta:

$$D_G^{(1)}(F) = (F \oplus B) \cap G \quad (4.1)$$

Es decir, primero inicializamos la imagen dilatada (D) al marcador:

$$D_G^{(0)}(F) = F \quad (4.2)$$

Entonces, la dilatación de tamaño n será:

$$D_G^{(n)}(F) = D_G^{(1)}[D_G^{(n-1)}(F)] \quad (4.3)$$

Este proceso se lleva a cabo las veces necesarias hasta que se alcanza una situación estable,

tal que

$$D_G^{(k)}(F) = D_G^{(k+1)}(F) \quad (4.4)$$

siendo k el número de iteraciones, y quedando la reconstrucción $R_G^{(D)}(F) = D_G^{(k)}(F)$

Partiendo de un marcador (Fig. 4.1(b)) y con una máscara (Fig. 4.1(a)) si se realiza una dilatación geodésica (Ec. (4.1)), se puede observar cómo antes de restringir (Fig. 4.1(c)), el marcador dilatado sobrepasa los límites de la máscara, siendo necesaria la restricción para que la imagen dilatada permanezca por debajo de la imagen a reconstruir (Fig. 4.1(d)). En la Figura 4.1 sólo se ha mostrado la primera iteración de la reconstrucción, siendo necesarias 3 iteraciones más para reconstruir la imagen completamente. El marcador F se ha representado junto con los bordes de la imagen G para enfatizar que $F \leq G$.

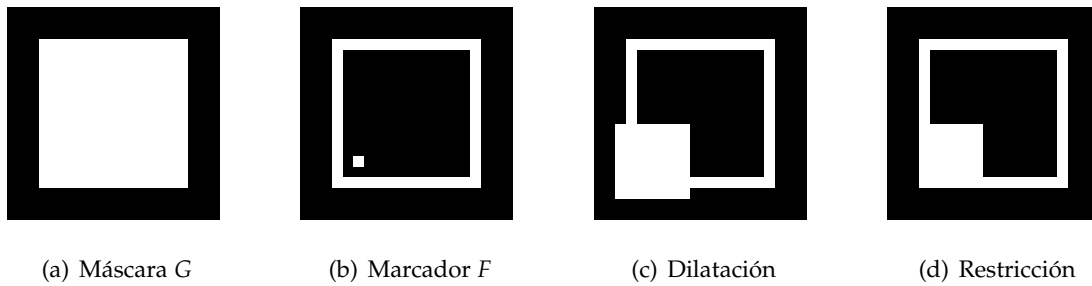


Figura 4.1: Dilatación geodésica con un elemento estructurante cuadrado 7×7

A continuación, se va a llevar a cabo la reconstrucción morfológica de una imagen binaria de tres formas distintas: con el elemento estructurante invariante en el espacio, con el elemento estructurante variante en el espacio y con el elemento estructurante variante de forma y en el espacio.



Figura 4.2: Máscara (G) y marcador (F)

En la Figura 4.3 se ha representado la reconstrucción geodésica de un triángulo (máscara G , Fig. 4.2(a)), partiendo de un marcador (F) representado en la Fig. 4.2(b). Se observa que las imágenes han sido representadas con los bordes del triángulo para poder visualizar mejor la restricción de la máscara. En este ejemplo se ha utilizado un elemento estructurante isotrópico 5×5 y han sido necesarias 30 iteraciones para completar la reconstrucción.

Seguidamente, se ha realizado la reconstrucción morfológica mediante dilatación geodésica con un elemento estructurante dependiente de la orientación. En este caso se ha usado un elemento estructurante anisotrópico, siendo éste un rectángulo 7×3 . En la Figura 4.3(e)-4.3(h) se han representado varias iteraciones, pudiéndose observar cómo el crecimiento de la reconstrucción empieza pegado a los bordes y de ahí va creciendo, esto es debido a que el elemento se ajusta al borde gracias al campo de orientaciones que se le ha proporcionado. Además, el número de iteraciones que se necesitan para la reconstrucción total es menor que en el caso invariante, siendo en el caso variante 7 iteraciones menos (23 en total).

Finalmente, se ha llevado a cabo la reconstrucción morfológica mediante dilatación geodésica variante en el espacio y con un elemento estructurante que varía de forma (Figura 4.3(i)-4.3(l)). El elemento es una línea $l = 15$ en los bordes y en un vecindario de dos píxeles, un rectángulo 7×3 cerca de los bordes (entre los píxeles tercero y sexto alejados de los bordes) y un cuadrado 5×5 en el resto de la imagen (zonas homogéneas). Este caso es el más óptimo ya que sólo son necesarias 13 iteraciones para realizar la reconstrucción de la imagen.

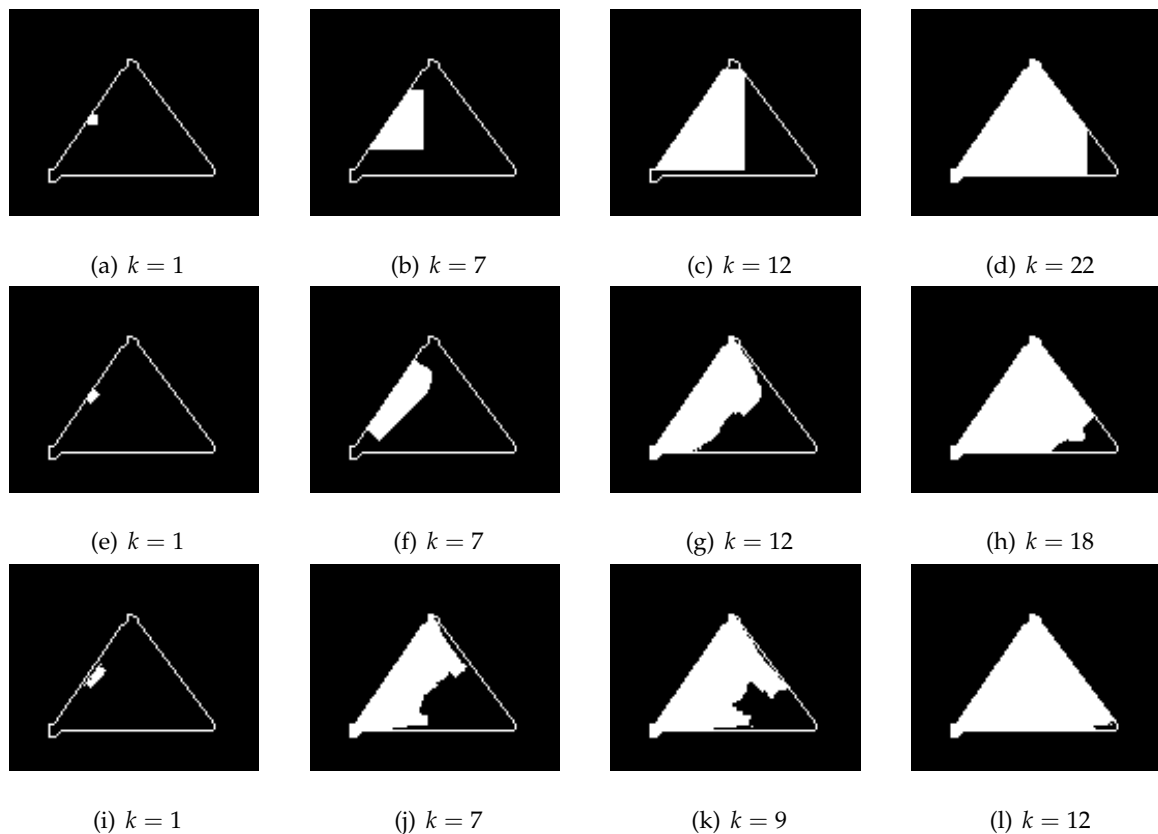


Figura 4.3: Reconstrucción morfológica mediante dilatación geodésica: (a)-(d) invariante en el espacio, (e)-(h) variante en el espacio dependiente de la orientación, (i)-(l) elemento estructurante variante en el espacio y de forma.

El objetivo final de este trabajo es el análisis de la reconstrucción morfológica mediante dilatación geodésica con elementos estructurantes dependientes de la orientación en imágenes retinográficas. Durante ese proceso hay varios parámetros y métodos (el tamaño de ventana para el ASG, la extensión de la orientación a todos los píxeles, el elemento estructurante a utilizar...) que son influyentes en el resultado final. A continuación, serán analizados.

5.1. Tamaño de ventana ASG

El tamaño del vecindario en el que se promedia para obtener vectores con la orientación se puede variar dependiendo de los objetivos buscados. Un tamaño de ventana grande hace el promedio con la información del gradiente al cuadrado de muchos píxeles lo cual interesa en las zonas homogéneas o con ruido, en cambio, para zonas con curvatura, por ejemplo, un tamaño demasiado grande puede hacer que ésta no se tenga en cuenta. Por ello, es importante la correcta elección de este parámetro.

En la Figura 5.1 se ha representado por un lado una imagen con el campo vectorial de orientaciones ASG sobreimpreso, y por otro, el coseno del ángulo de este campo de orientaciones para dos tamaños de ventana diferentes. Se observa como para un tamaño de ventana grande la orien-

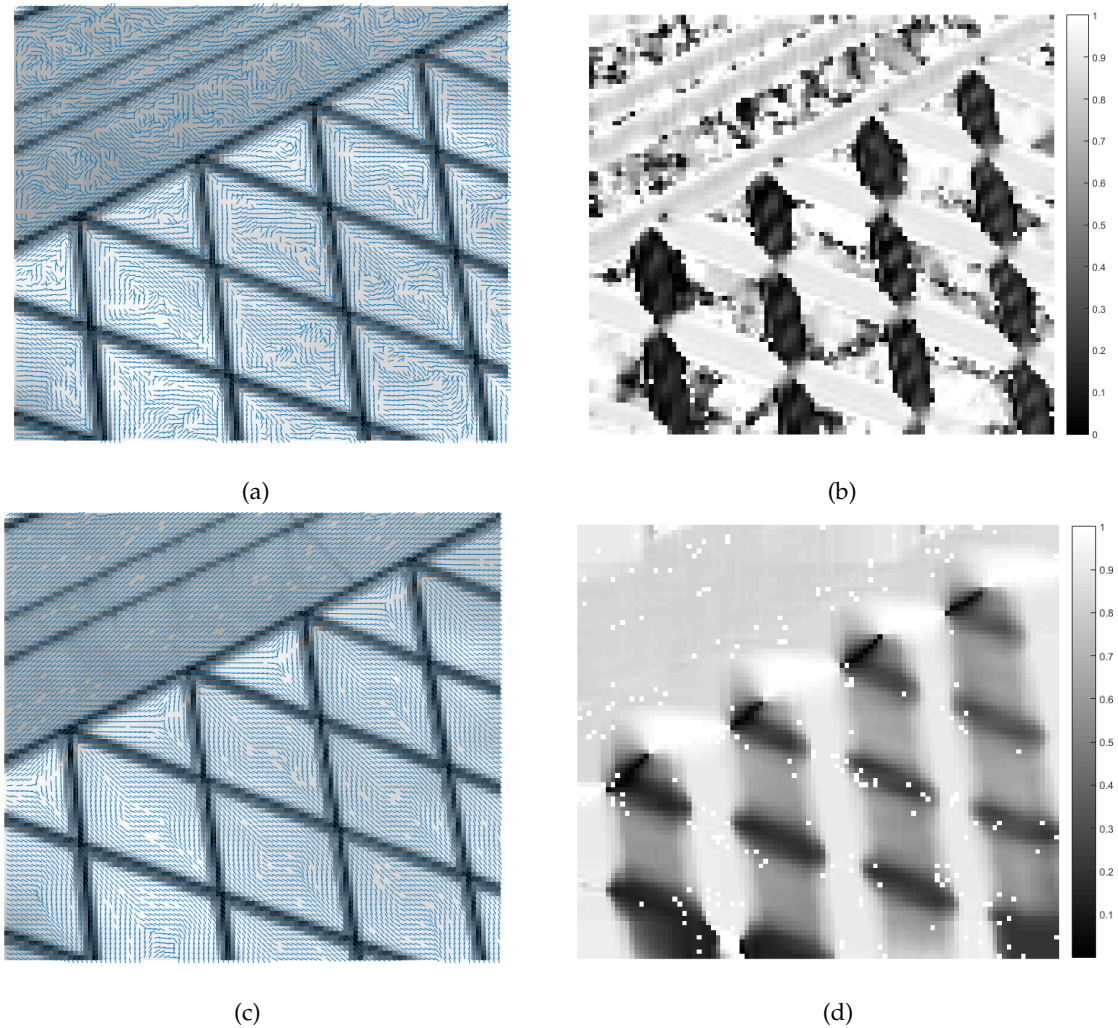


Figura 5.1: Resultados del campo ASG normalizado y del coseno del ángulo para distintos tamaños de ventana cuadrada de lado m : (a)-(b) $m = 3$, (c)-(d) $m = 15$.

tación en los cruces se difumina, ya que al promediar en tantos píxeles se toma la orientación predominante. Además, si observamos el ángulo, se aprecia como se va suavizando el ángulo conforme aumenta el tamaño de la ventana de promedio. Se debe puntualizar que el campo vectorial ASG impreso sobre la imagen está normalizado, es decir, en realidad este campo sólo nos da información de la orientación en los contornos de los objetos de la imagen, en las zonas homogéneas es nulo (véase Figura 5.2).

5.1.1. Cierre morfológico

Se va a procesar la imagen de una célula segmentada, haciéndole un cierre morfológico variante en el espacio (Ecuación (3.13)) con distintos elementos estructurantes. El cierre morfológico consiste en realizar primero la dilatación y luego la erosión con el mismo elemento estructurante,

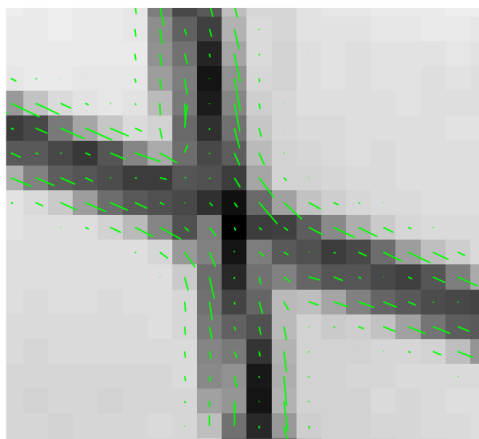


Figura 5.2: Campo ASG para una ventana cuadrada $m = 3$.

consiguiendo así que los elementos oscuros más pequeños que el elemento estructurante utilizado desaparezcan. El objetivo del procesado de esta imagen es que las zonas del contorno subjetivo de la célula se junten. Para ello, se va a analizar la influencia del tamaño de la ventana donde se va a hacer el promedio para calcular el campo ASG. En la Fig. 5.3 se ha representado la imagen con el campo vectorial ASGG con un valor $\sigma = 2$ superimpreso para tres valores de ventana distintos, pudiéndose apreciar como para un valor de ventana mayor el campo de orientación queda más regularizado, adaptándose mejor a las zonas de la célula que queremos juntar.

Tras la obtención del campo vectorial de orientaciones regularizado se realiza el cierre morfológico con dos elementos estructurantes rectangulares diferentes, uno 15×5 y otro 25×5 . En las Figura 5.4 se compara el cierre con ambos elementos estructurantes dependientes de la orientación para tres valores de ventana del ASG distintos ($m=15, 45$ y 75). La imagen que estamos analizando es de gran tamaño, 775×1001 , ésta es la razón por la cual los elementos escogidos son grandes, para poder unir las estructuras de la célula. Con el elemento estructurante mayor (25×5) más zonas oscuras son eliminadas, además, se puede observar como con un tamaño de ventana mayor el elemento se ajusta mejor a los bordes de la célula realizando un cierre de la imagen más preciso.

5.2. ASGG

En este capítulo se van a analizar cómo influyen los parámetros de este método en los resultados obtenidos, además, se comparará con el otro método de regularización, el ASGVF.

El parámetro principal que controla el ancho de banda del filtro Gauss es la desviación

estándar σ (como se explicó en el capítulo 2, ecuación (2.14)), pero también hay que tener en cuenta el tamaño de filtro que estamos escogiendo. Por muy grande que cojamos σ , si el tamaño de filtro es pequeño suavizará el ángulo en menos iteraciones pero no eliminará el posible ruido en las zonas homogéneas en las imágenes que no son sintéticas. En cambio, un tamaño demasiado grande puede hacer que dos valores próximos sean tomados como uno sólo (por el gran tamaño) y se filtre, perdiendo información sobre la orientación. Por lo tanto, la elección del tamaño del filtro y de σ son dependientes de la imagen que se quiera procesar.

Se debe tener en cuenta que antes de comenzar el proceso de regularización el ángulo se dobla, ya que para el filtrado adaptativo se necesita la orientación, no la dirección. Por ello, el ángulo representado en las Figuras 5.5 y 5.6 va de -180° a 180° . Al terminar la regularización el ángulo vuelve a ser desdoblado.

En la Figura 5.5 se muestra la influencia de estos dos parámetros en los resultados del ASGG. Se han utilizado dos valores de sigma distintos: en la columna de la izquierda $\sigma = 1$ y en la columna de la derecha $\sigma = 3$. Se ha representado el ángulo inicial (Figura 5.5(a)) y el ángulo tras una primera iteración para tres valores diferentes de tamaño de filtro. Se puede observar como el suavizado del ángulo aumenta notablemente cuanto mayores son estos dos parámetros, siendo necesarias muchas menos iteraciones, aunque pudiendo perder información.

En la Figura 5.6 se muestra el ángulo y el módulo del campo vectorial que se está calculando en cada iteración. Se ha utilizado un $\sigma = 1$ y un tamaño de filtro 13×13 . Nuestro método va filtrando cada píxel y seguidamente restaura el valor máximo del mismo, así se consiguen preservar los valores iniciales donde hay información de orientación (en la imagen original). Por ello, el módulo del ángulo no varía prácticamente, mientras que el campo vectorial sí lo hace.

5.2.1. ASGVF y ASGG

Los dos métodos propuestos para extender el campo ASG, son el ASGVF y el ASGG. Los parámetros que controlan la regularización son η y σ , respectivamente.

Para realizar la comparación se ha representado el ángulo con el campo vectorial de orientaciones sobreimpreso (Figura 5.7). Se ha decidido que para poder visualizar mejor el ángulo se va a representar el coseno del mismo en vez de el ángulo en si. La explicación de este hecho es que lo que se tiene en cuenta es la orientación, no la dirección, por lo que 90° es lo mismo que -90° , siendo más difícil de visualizar ya que el ángulo de las zonas blancas y negras es el mismo. Sin embargo, si lo que se representa es el coseno, los píxeles con orientación tanto 90° como -90° serán representados como $\cos 90^\circ = 0$, es decir, en color negro.

La imagen a analizar es binaria y sintética, por otro lado, se ha usado una ventana cuadrada de valor $m = 9$ para calcular el campo ASG. Para realizar el análisis se han escogido 4 valores de η para el método ASGVF y otros 4 valores de σ para el método ASGG. El parámetro η (ecuación (2.13)) es proporcional al ancho de banda del filtro paso bajo que utiliza, por lo que un η más pequeño filtra más, quedándose el campo de orientaciones más suavizado. Viendo la Figura 5.8 se aprecia la influencia de este parámetro, siendo necesario un valor muy pequeño ($\eta \leq 0,01$) para obtener buenos resultados para esta imagen. Además, en la tercera columna está representado el coseno del ángulo, donde se puede ver como el comportamiento del filtro no es bueno para valores altos de η . En cambio, si nos fijamos en la Figura 5.9, el método que utiliza el filtro de Gauss presenta mejores resultados que el ASGVF, para los distintos valores de σ . Este parámetro controla la regularización, consiguiendo un campo más suavizado cuando el parámetro σ aumenta.

El hecho de representar en la primera columna la imagen con el campo vectorial sobreimpreso sin normalizar y en la segunda normalizado es para explicar que aunque parezca que cuando no está normalizado no hay campo en las zonas homogéneas, sí que lo hay. Es decir, en la imagen normalizada aparecen todos los vectores del mismo tamaño, esto es porque al calcular el módulo y dividir el campo por el mismo se consigue un ángulo mayor (porque el módulo es muy pequeño), llegando a la conclusión de que en las zonas homogéneas el campo es casi nulo.

5.3. Dilatación

En esta sección se va a realizar una comparación entre la dilatación variante (Ecuación (3.10)) y la invariante (Ecuación (3.8)) en el espacio para ver la influencia que tiene el uso de la orientación en los resultados que se obtienen.

En la Figura 5.10 está representada la imagen de un tejido celular de tamaño 256×256 , sobre la que se han realizado distintas dilataciones. Para el cálculo del campo de orientación se utiliza el ASG con un tamaño de ventana $m = 9$ y para extender este campo a todos los píxeles de la imagen se ha utilizado el ASGG con $\sigma = 1,5$.

En las dilataciones invariantes se ha escogido un elemento estructurante isotrópico mientras que en las dilataciones variantes el elemento es anisotrópico. Se ha intentado que los elementos estructurantes sean del mismo número de píxeles (3×3 y 9×1) o similares (5×5 y 7×3) para que la comparación sea lo más precisa posible. Además, también se ha realizado una dilatación variante en el espacio con un elemento estructurante que varía su forma (Figura 5.10(b)), siendo una línea $l = 9$ en los bordes y en un vecindario de dos píxeles, un rectángulo 7×3 cerca de los bordes (entre los píxeles tercero y cuarto alejados de los bordes) y un cuadrado 5×5 en el resto de la imagen (zonas homogéneas).

Observando los resultados, se aprecia claramente como, en las imágenes dilatadas con el elemento estructurante variante en el espacio (Figuras 5.10(d) y 5.10(f)), al orientarse dicho elemento en la forma del tejido las zonas oscuras prevalecen aún después de dilatar la imagen mientras que si nos fijamos en las imágenes dilatadas de forma invariante (Figuras 5.10(c) y 5.10(e)) estas zonas oscuras de la imagen son dilatadas en la ventana del elemento estructurante y acaban convirtiéndose en zonas brillantes.

5.4. Reconstrucción morfológica de imágenes retinográficas

Finalmente, tras haber analizado todos los parámetros influyentes, se han realizado varias reconstrucciones morfológicas, variantes e invariantes en el espacio, de una imagen binaria de la retina de tamaño 584×565 .

La reconstrucción morfológica se va a hacer mediante la dilatación geodésica, para ello hacemos uso de una función que se ha implementado en Matlab que realiza la dilatación variante en el espacio. Esta función no está optimizada, debido a esto, si en vez de medir el coste en número de iteraciones midiéramos el coste en términos de tiempo el caso variante en el espacio no sería mejor que el invariante, que se calcula en milisegundos. Por ello, la comparativa que se muestra en la Tabla 5.1 hace referencia al número de iteraciones que son necesarias para que se alcance la estabilidad y la reconstrucción se de por terminada.

| Elemento estructurante | variante | invariante |
|------------------------|----------|------------|
| 9×1 | 125 | 377 |
| 3×3 | | |
| 5×3 | 194 | 377 |
| 3×3 | | |
| 7×3 | 128 | 196 |
| 5×5* | | |
| 9×3 | 104 | 190 |
| 5×5 | | |

Tabla 5.1: Comparación caso variante e invariante

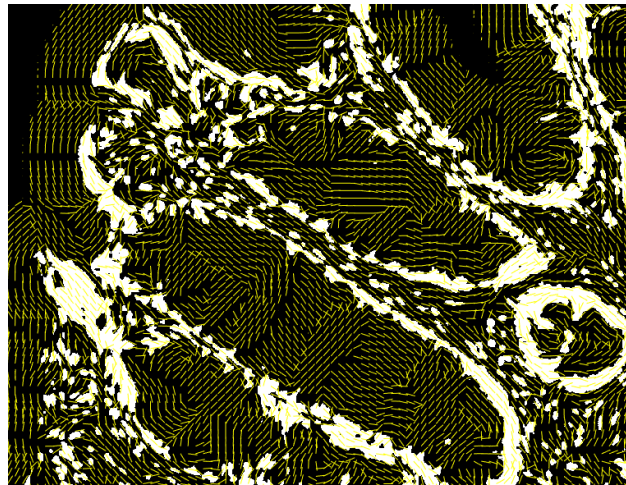
Para hacer la comparativa lo más exacta posible, en la elección de los elementos estructurantes se han escogido elementos isotrópicos para las reconstrucciones invariantes y elementos rectangulares con el mismo número (o lo más cerca posible) de píxeles para las variantes dependientes de la orientación.

La orientación que se ha utilizado en los casos en los que el elemento estructurante varía en

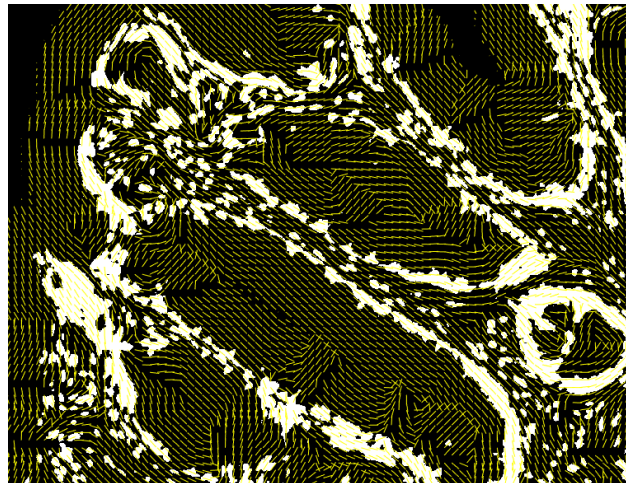
el espacio se ha obtenido con un tamaño de ventana de ASG $m = 7$ y para la extensión del campo a todos los píxeles se ha usado el ASGG con $\sigma = 1,5$ y $k = 30$ iteraciones.

El elemento estructurante $5 \times 5^*$ es un cuadrado de lado 5 al que se le eliminan los 4 píxeles de las esquinas (véase Figura 5.11).

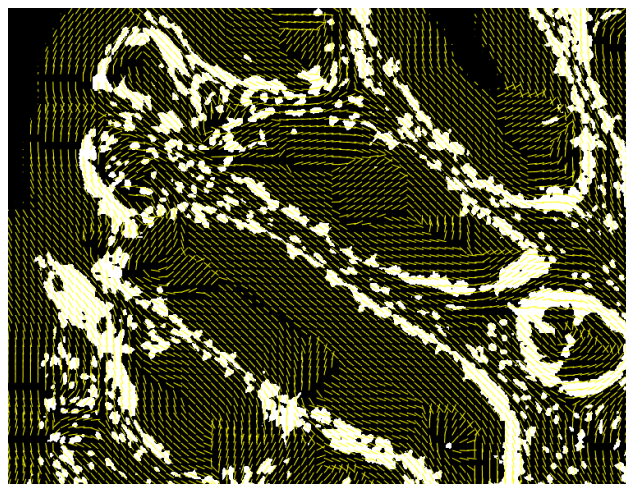
Sobre estos resultados obtenidos, se debe puntualizar que en la reconstrucción con el elemento estructurante 9×1 ésta no se consiguió completamente a causa de que al ser el elemento una línea hay zonas a las que no puede llegar, quedándose incompleta, como se muestra en la Fig. 5.12. Además en la Figura 5.12(a) se ha representado con un punto rojo el inicio de la reconstrucción.



(a) $m = 15$



(b) $m = 45$



(c) $m = 75$

Figura 5.3: Campo ASGG con $\sigma = 2$ para distintos tamaños de ventana cuadrada del ASG.

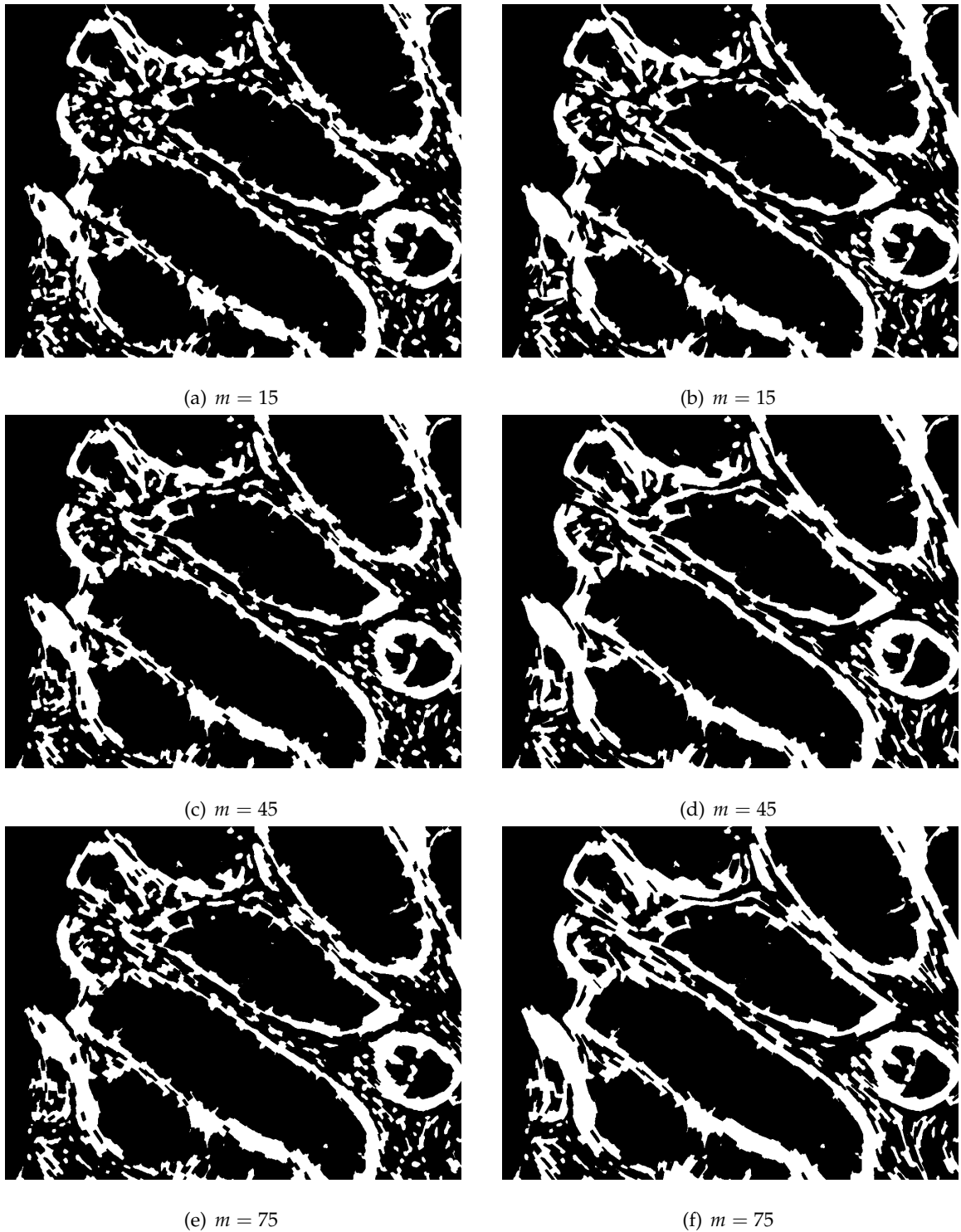


Figura 5.4: Comparativa cierre morfológico con elemento estructurante variante para distintos tamaños de ventana cuadrada del ASG: en la primera columna el elemento es 15×5 y en la segunda columna es 25×5 .

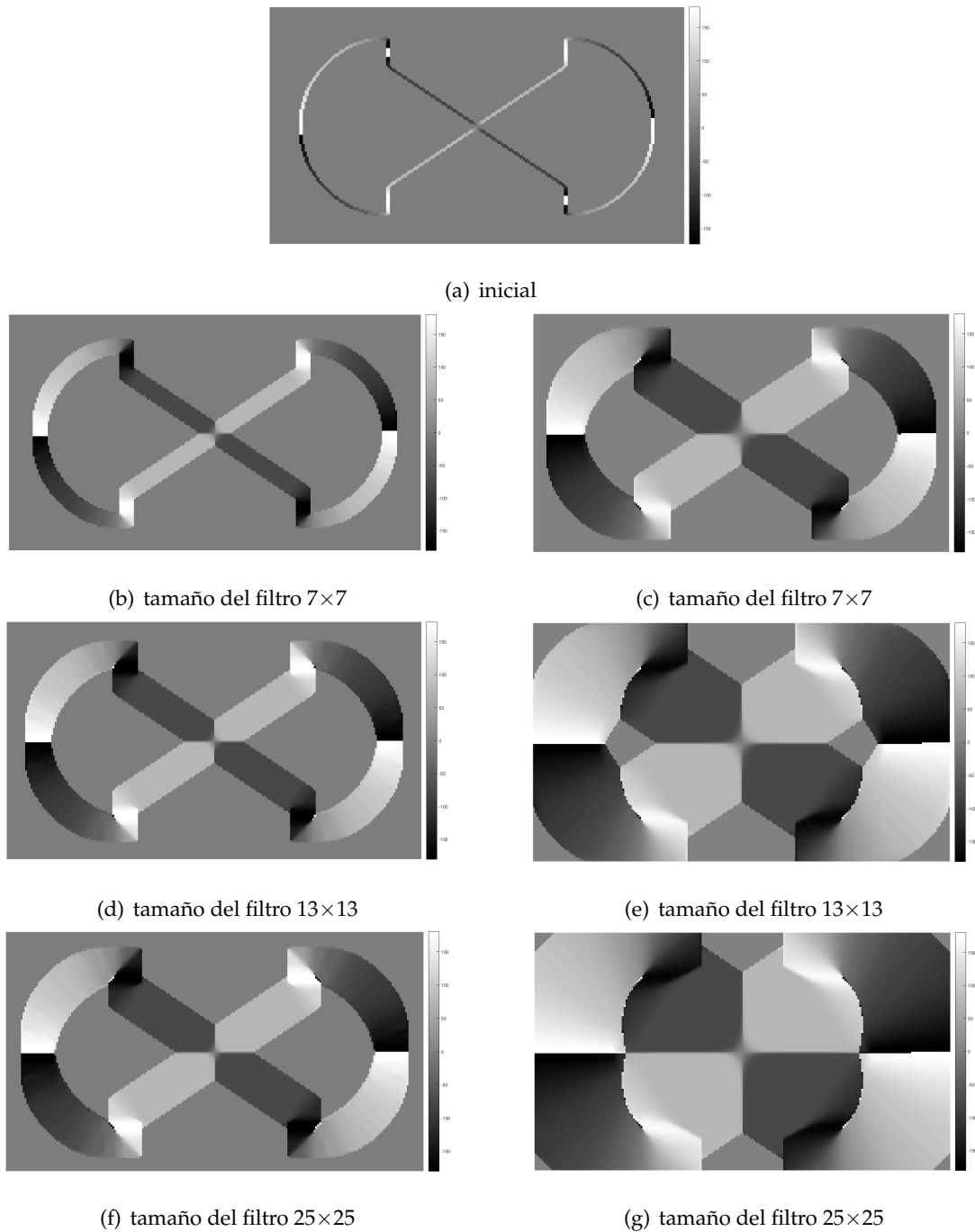


Figura 5.5: Análisis de la influencia de los parámetros σ y tamaño del filtro del ASGG: en la primera columna $\sigma = 1$ y en la segunda $\sigma = 3$.

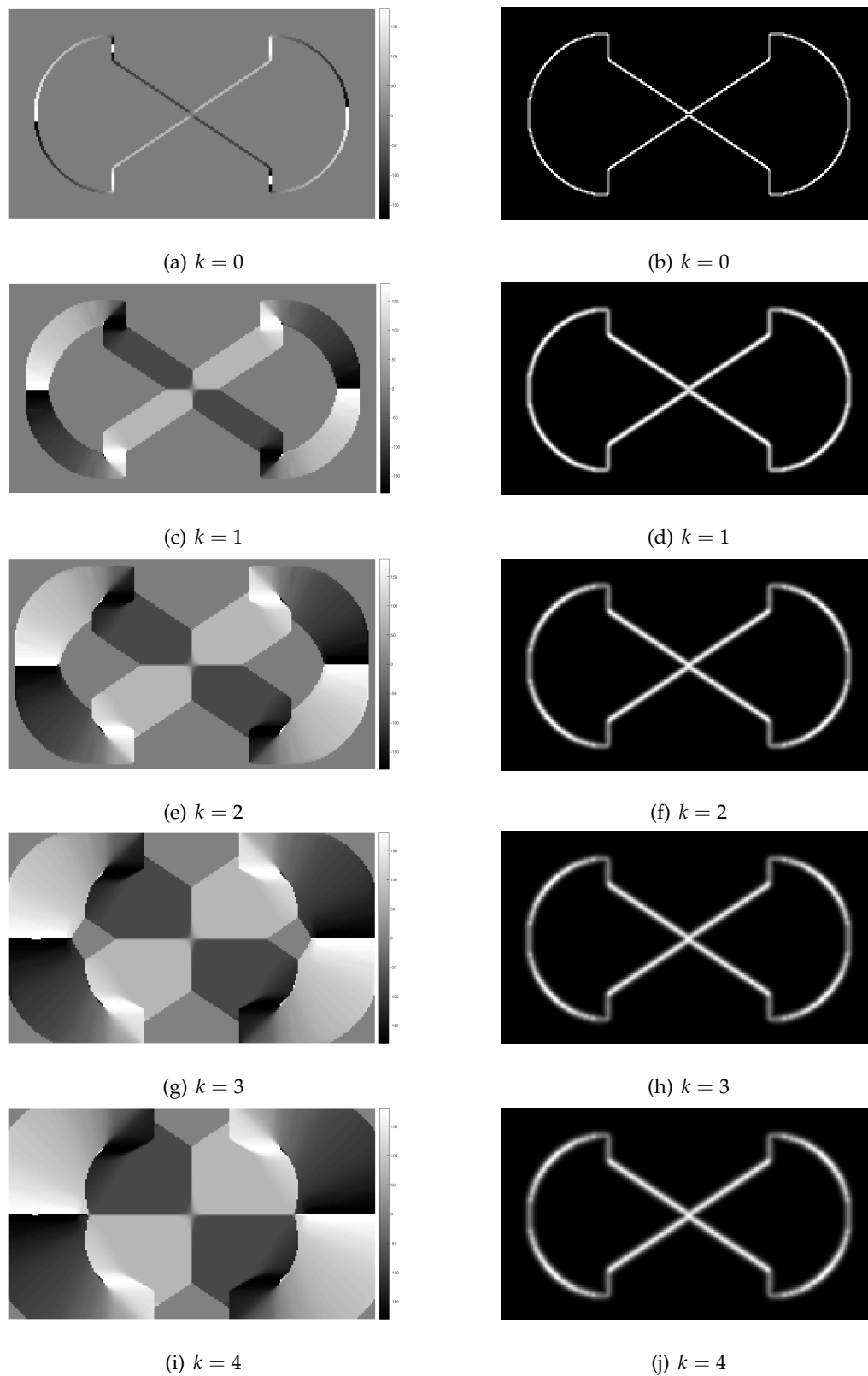
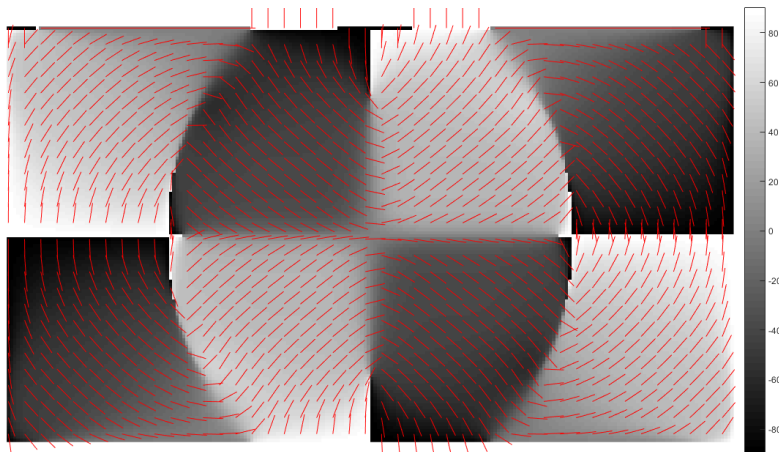
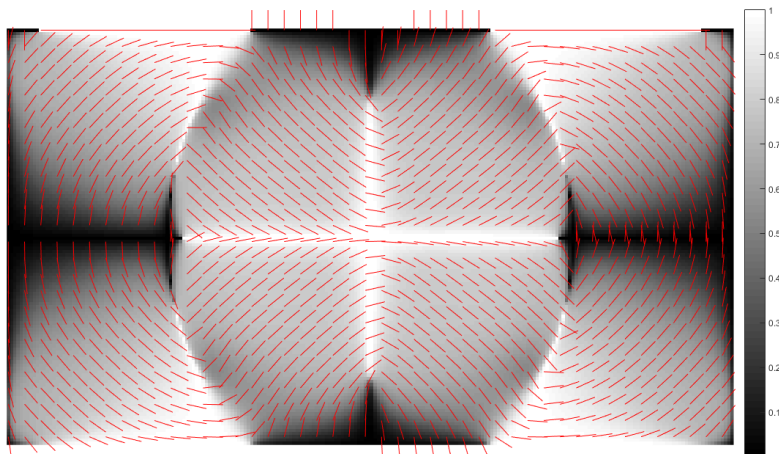


Figura 5.6: Evolución de la regularización del ángulo de orientación con el número de iteraciones mediante el método ASGG: en la columna de la izquierda se representa el ángulo y en la columna de la derecha está representado el módulo.



(a) Ángulo ($^{\circ}$)



(b) Coseno del ángulo (rad)

Figura 5.7: Ángulo con el campo vectorial sobreimpreso.

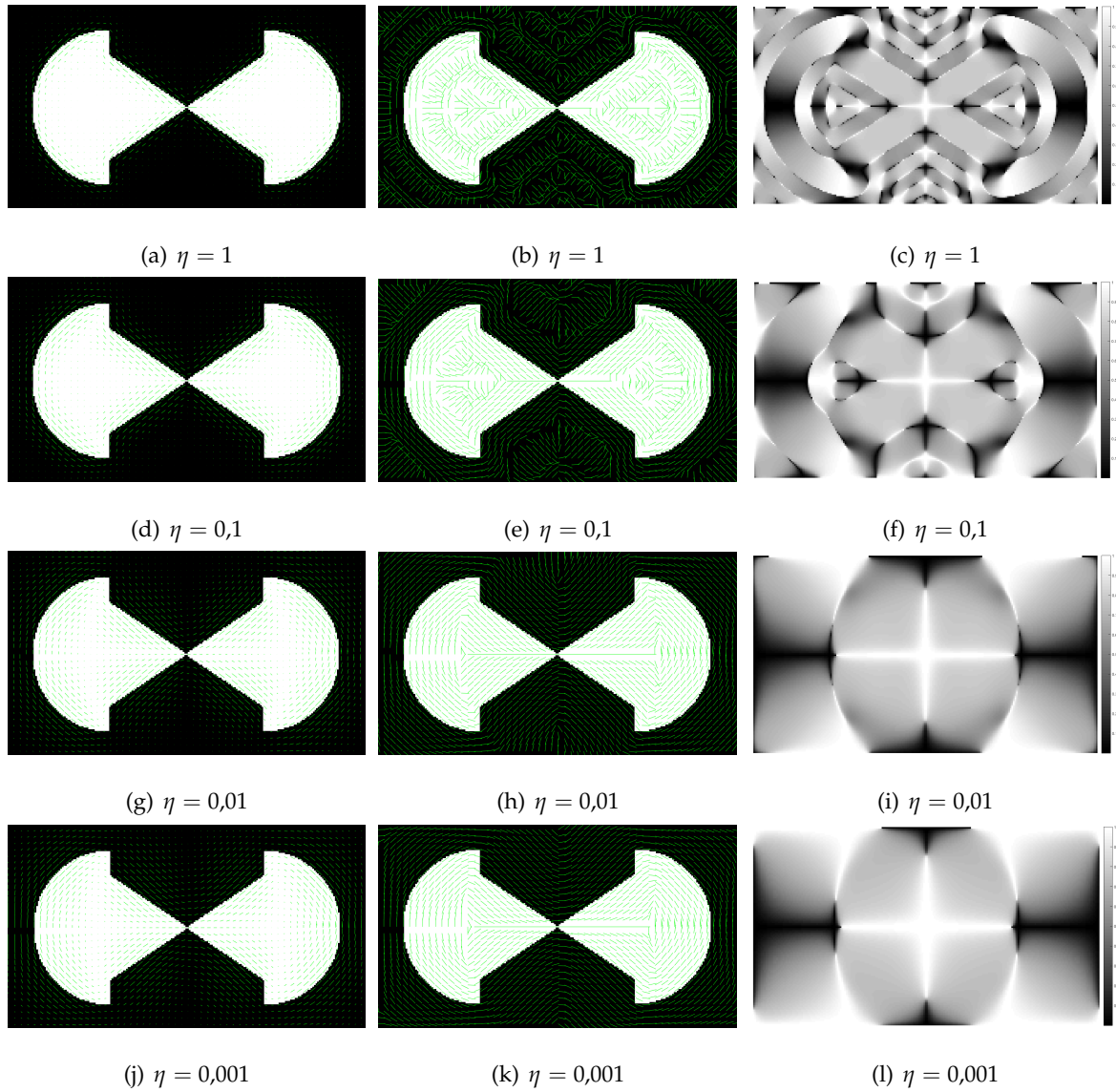


Figura 5.8: Análisis del parámetro η del ASGVF: en la primera columna está representada la imagen con el campo de orientaciones sobrepuesto para diferentes valores de η , en la segunda columna está representado este mismo campo pero normalizado a todos los píxeles, mientras que en la tercera columna se ha representado el coseno del ángulo de la orientación también para los diferentes valores de η .

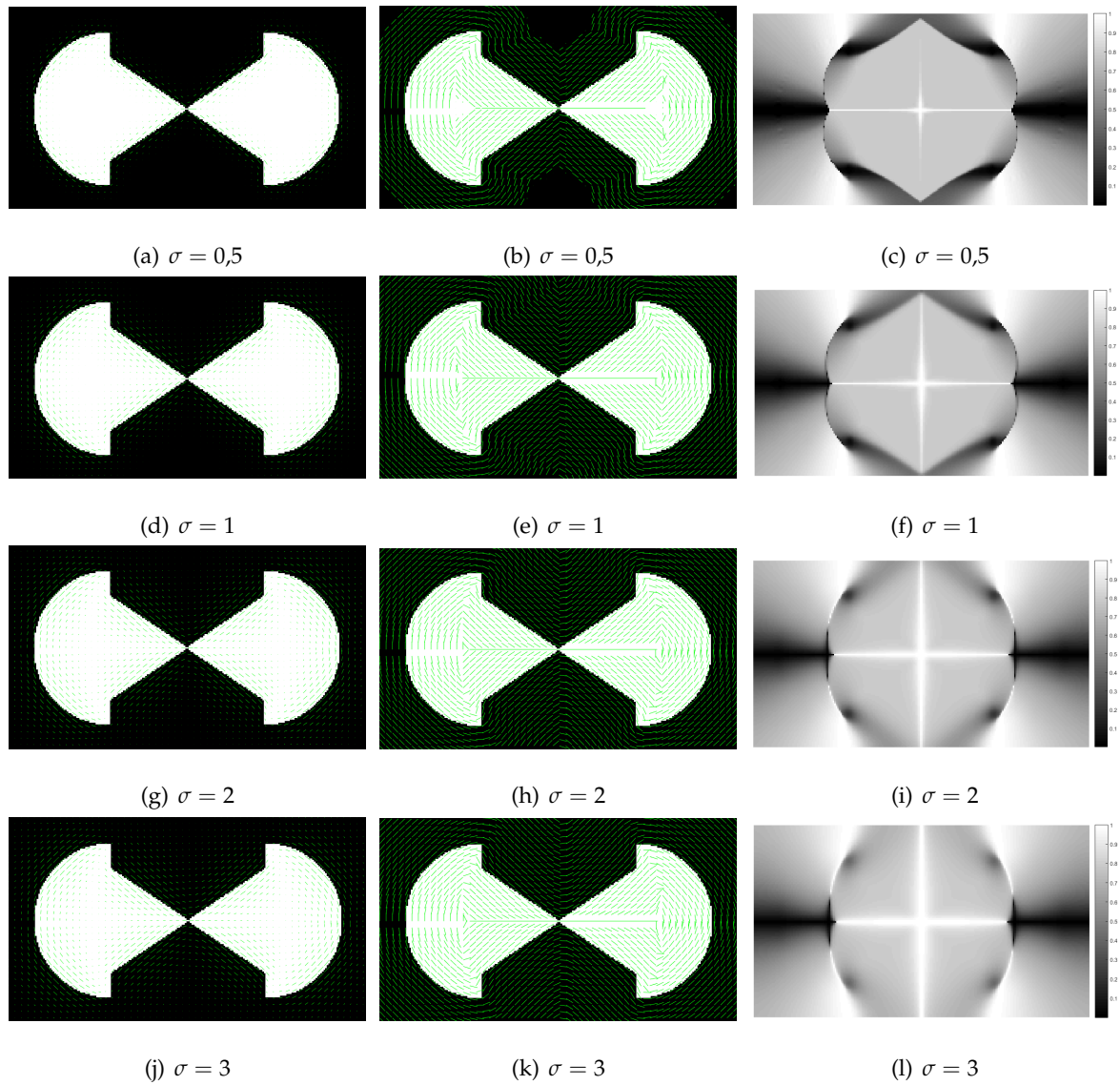
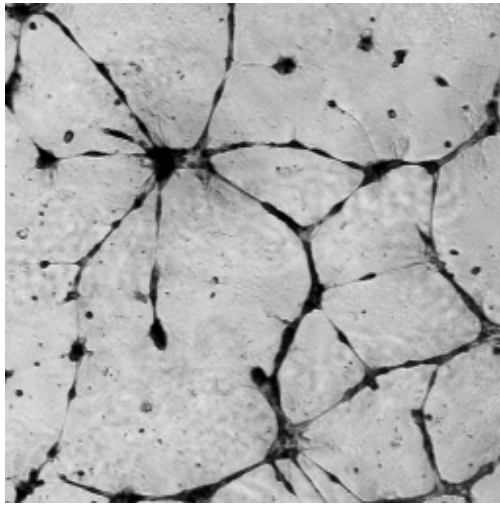
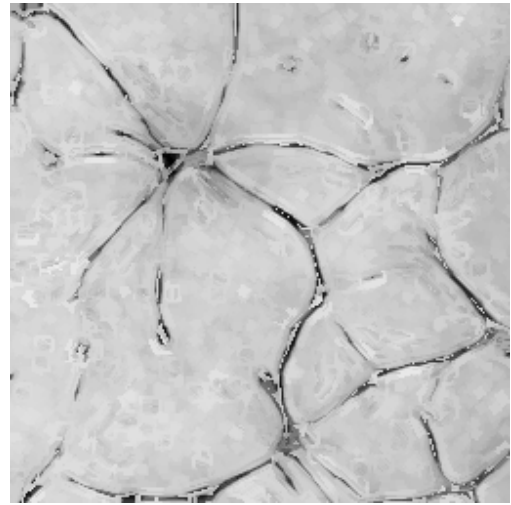


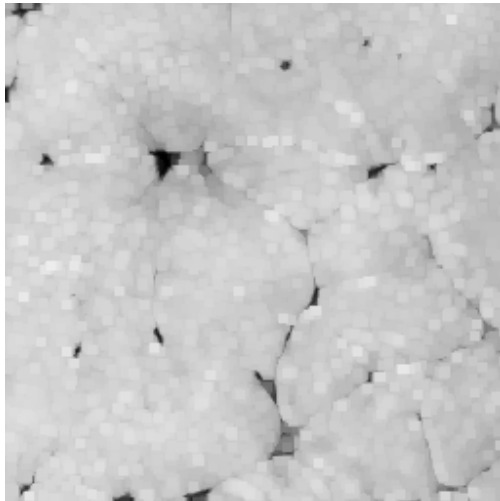
Figura 5.9: Análisis del parámetro σ del ASG con filtro Gauss: en la primera columna está representada la imagen con el campo de orientaciones sobrepuesto para diferentes valores de σ , en la segunda columna está representado este mismo campo pero normalizado a todos los píxeles, mientras que en la tercera columna se ha representado el coseno del ángulo de la orientación también para los diferentes valores de σ .



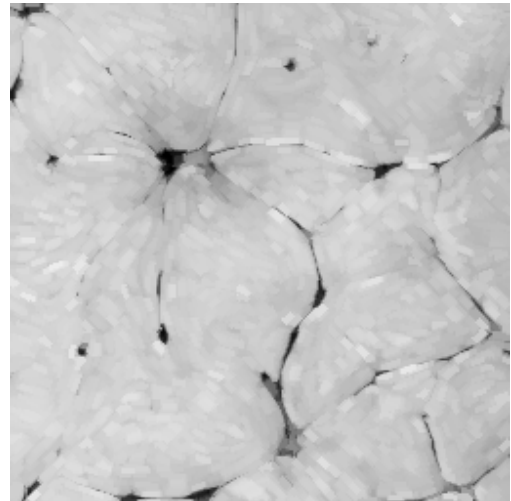
(a) Imagen original



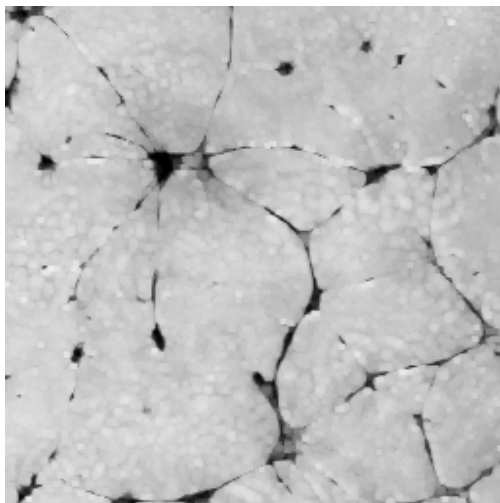
(b) Elemento variante



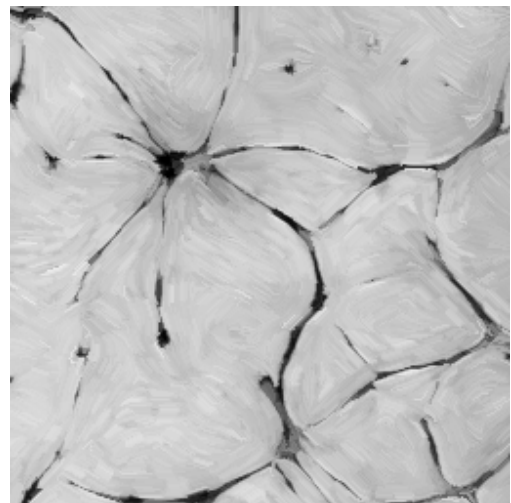
(c) Invariante 5x5



(d) Variante orientado 7x3



(e) Invariante 3x3

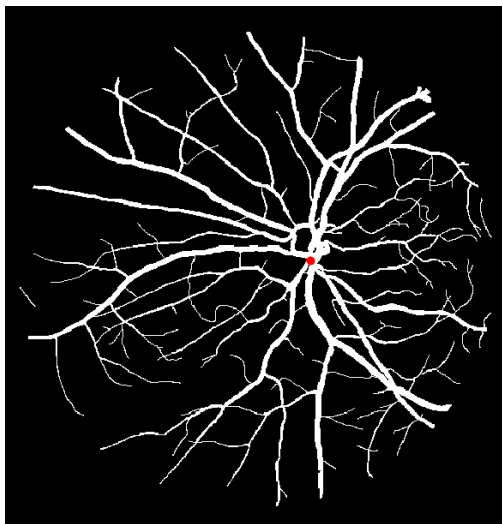


(f) Variante orientado 9x1

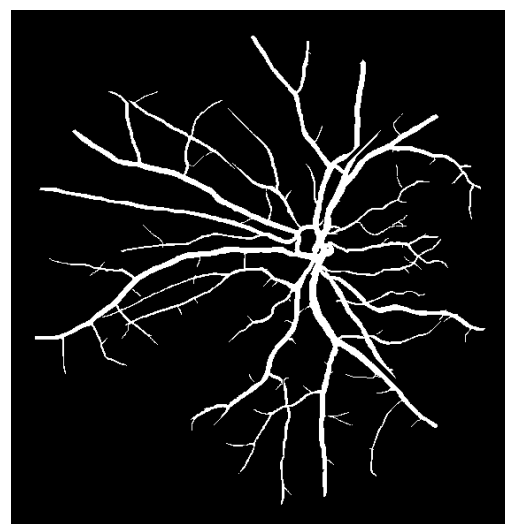
Figura 5.10: Comparativa de la dilatación variante e invariante con distintos elementos estructurantes: (b) el elemento variante que cambia de orientación y de forma.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Figura 5.11: Elemento estructurante $5 \times 5^*$



(a)



(b)

Figura 5.12: Reconstrucción morfológica: (a) Imagen retina original, (b) Imagen reconstruida con elemento estructurante 9×1 .

Conclusiones y líneas futuras

Tras analizar los resultados que se han obtenido, las conclusiones que se pueden extraer de este trabajo son:

1. El tamaño de ventana sobre el que se realiza el promedio al calcular el campo ASG debe ser escogido en relación al tamaño de la imagen que se va a analizar y en función del objetivo que se quiera conseguir, es decir, en la imagen de la célula sobre la que se realiza el cierre morfológico tiene que ser grande para poder unir las zonas deseadas, en cambio, en el análisis de las imágenes de la retina la ventana debe de ser pequeña para que se tengan en cuenta correctamente las zonas de curvatura de las venas.
2. El método de extensión del campo ASG con filtro Gauss ha presentado mejores resultados que el método ASGVF ya que el filtro que éste último utiliza hace que los lóbulos negativos de la respuesta al impulso provocan cambios de fase, lo cual no es coherente. Además, se ha visto la influencia de los parámetros σ y tamaño del filtro a la hora de llevar a cabo la extensión de la orientación.
3. Antes de realizar la reconstrucción morfológica se ha estudiado la influencia de la orientación en los resultados, llevando a cabo una dilatación en una imagen de un tejido celular. Los mejores resultados se han obtenido en la imagen dilatada con el elemento estructurante variante de forma y de orientación en el espacio. Además, de cara a las imágenes dilatadas

obtenidas, se puede decir que para el procesado de esta imagen la mejor elección es la de un elemento estructurante lineal, para preservar mejor las estructuras de la imagen.

4. En el capítulo 4 se ha expuesto un simple ejemplo en el que se demuestra que el uso de la orientación y de elementos variantes optimiza enormemente el proceso de reconstrucción morfológica, reduciendo notablemente el número de iteraciones necesarias.
5. Para finalizar, analizando los resultados de las reconstrucciones morfológicas de la imagen de la retina, se puede concluir de manera global que el uso de la orientación hace que el elemento estructurante se adapte mejor a la estructura de la imagen, haciendo que la reconstrucción sea más eficaz. Respecto al elemento estructurante a utilizar, los elementos lineales y de mayor longitud han presentado mejores resultados (menos iteraciones), siendo la mejor elección para la reconstrucción de la imagen retinográfica.

A partir de estas conclusiones, se plantean las siguientes líneas futuras:

1. Optimizar la función que realiza la dilatación variante en el espacio dependiente de la orientación para que no tarde tanto tiempo en realizar la operación y así poder extender el estudio a imágenes en escala de grises.
2. Hacer uso de más de una orientación, es decir, obtener múltiples orientaciones en los píxeles en los que pueda haber líneas que se cruzan, esquinas o uniones (también conocidas como intersecciones en X, L e Y respectivamente), para adaptar mejor el elemento estructurante a usar por los filtros.

Bibliografía

- [1] Josef Bigün and J. M. Hans du Buf. N-folded symmetries by complex moments in gabor space and their application to unsupervised texture segmentation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 16(1):80–87, 1994.
- [2] H.J.A.M. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Advances in electronics and electron physics: Supplements. Academic Press, 1994.
- [3] Michael Kass and Andrew Witkin. Analyzing oriented patterns. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 37(3):362–385, 1987.
- [4] H. Knutsson. Representing local structure using tensors. *Proc. of the 6th Scandinavian Conference of Image Analysis*, pages 244–251, 1989.
- [5] Álvaro Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, and Jesús Angulo. Adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field dependent on image local features. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pages–, 2017.
- [6] K.V. Mardia and P.E. Jupp. *Directional Statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2009.
- [7] P. Perona. Orientation diffusions. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(3):457–467, 1998.
- [8] Pietro Perona. Deformable kernels for early vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17:488–499, 1991.

- [9] J.B.T.M. Roerdink. Adaptivity and group invariance in mathematical morphology. In *Image Processing (ICIP), 2009 16th IEEE International Conference on*, pages 2253–2256, Nov 2009.
- [10] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology: Theoretical Advances*, volume II. Academic Press, London, 1988.
- [11] Eero P. Simoncelli and Hany Farid. Steerable wedge filters for local orientation analysis. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(9):1377–1382, 1996.
- [12] Pierre Soille. *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*. Springer-Verlag, 2 edition, 2003.
- [13] R. Verdú-Monedero, J. Larrey-Ruiz, and J. Morales-Sánchez. Frequency implementation of the Euler-Lagrange equations for variational image registration. *Signal Processing Letters, IEEE*, 15:321–324, 2008.
- [14] Rafael Verdú-Monedero, Jesús Angulo, and Jean Serra. Anisotropic morphological filters with spatially-variant structuring elements based on image-dependent gradient fields. *IEEE Trans. Image Processing*, 20(1):200–212, January 2011.
- [15] C. Xu and J. L. Prince. Generalized gradient vector flow external forces for active contours. *Signal Processing*, 71(2):131–139, 1998.
- [16] C. Xu and J. L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Trans. Image Processing*, 7(3):359–369, 1998.