

**UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA**

**"PROGRAMA D' ENGINYERIA CIVIL"**



**ESCOLA TECNICA SUPERIOR D' ENGINYERS DE CAMINS, CANALS I PORTS  
DEPARTAMENT D' ENGINYERIA HIDRAULICA, MARITIMA I AMBIENTAL**

**TESIS DOCTORAL**

**METODOLOGIA EXPERIMENTAL Y NUMERICA PARA  
LA CARACTERIZACION DEL CAMPO DE PRESIONES  
EN LOS DISIPADORES DE ENERGIA HIDRAULICA.  
APLICACION AL VERTIDO LIBRE EN PRESAS BOVEDA**

**LUIS GERARDO CASTILLO ELSITDIE**

**Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos  
Ingeniero Civil**

**Trabajo realizado como parte  
de los requisitos exigidos para  
obtener el GRADO de DOCTOR**

**Dirigido por:  
Dr. José Dolz Ripollés  
Dr. Juan José Egozcue Rubí**

**Barcelona, Noviembre de 1989**

# TESIS DOCTORAL

## METODOLOGÍA EXPERIMENTAL Y NUMÉRICA PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL CAMPO DE PRESIONES EN LOS DISIPADORES DE ENERGÍA HIDRÁULICA A PIE DE PRESA. APLICACIÓN AL VERTIDO LIBRE EN PRESAS BÓVEDA

Por: Luis Gerardo Castillo Elsitdié .....

### DIRECTORES DE TESIS:

Dr. José Dolz Ripollés .....

Dr. Juan José Egozcue Rubí .....

### TRIBUNAL CALIFICADOR

#### Presidente:

Dr. Luis Berga Casafont .....

#### Vocales:

Dr. Alfonso Alvarez Martínez .....

Dr. Guillermo Gómez Laa .....

Dr. Eugenio Herrero Pérez .....

Dr. Florentino Santos García .....

Acuerda otorgarle la calificación de,

Barcelona, de Febrero de 1990

## PLANTEAMIENTO Y RESUMEN DE LA TESIS

El vertido libre por coronación en presas bóveda es una solución frecuentemente adoptada. La evaluación de las acciones sobre los elementos estructurales de los cuencos disipadores de energía, fundamentalmente debidas al campo de presiones inducido por la macroturbulencia del flujo, es de sumo interés en el análisis de su estabilidad mecánica y por tanto en su diseño. Sin embargo, actualmente esta evaluación sigue presentando dificultades debido a la complejidad de los diferentes aspectos que se deben considerar en el análisis.

La complejidad del flujo tridimensional resultante y las características de anisotropía y no homogeneidad de la turbulencia inducida en las estructuras de disipación de energía, no permite estudiar el flujo por desarrollos analíticos. Por lo tanto, los estudios en modelo hidráulico son la herramienta básica. Uno de los problemas es saber conducir estos estudios en modelo para cuantificar las acciones hidrodinámicas.

En esta tesis se presenta una metodología experimental y numérica que permite caracterizar el campo de presiones en los disipadores de energía hidráulica en caso de vertido libre por coronación.

**La metodología experimental**, incorpora mejoras en los sistemas de medida y de adquisición de datos para obtener los registros de presiones en diferentes puntos de medición del modelo. Así, se ha diseñado y puesto a punto un sistema automatizado de adquisición de datos, que permite muestrear en diferentes puntos o canales de medida a la vez.

Se realiza la comprobación del funcionamiento de los transductores de presión por medio de calibraciones de tipo estático y dinámico. Para la calibración dinámica se utilizaron las técnicas usuales de tratamiento de señales y calibración de sistemas, adaptándolo a las condiciones experimentales.

**La metodología numérica** que se propone para caracterizar al fenómeno aleatorio de las fluctuaciones de presión, se basa en la teoría de los procesos estocásticos. El análisis se realiza en el dominio del tiempo y de la frecuencia. El análisis espectral de las fluctuaciones de presión se realiza por medio de la transformada discreta de Fourier, utilizándose como estimador espectral el método convencional del "periodograma". Este análisis se realiza para los casos univariante y multivariante.

Siete programas (dos de adquisición y cinco de tratamiento) constituyen las herramientas numéricas propuestas, las mismas que permiten un análisis multivariante de varios canales a la vez. Las múltiples posibilidades de cálculo de los programas de tratamiento cubren las necesidades para caracterizar el campo de presiones.

La metodología se aplica a un conjunto de experiencias de vertido libre, comprobándose y completándose leyes ya existentes. Se realiza una unificación de las formulaciones que se utilizan en la actualidad para definir la distribución de presiones dinámicas medias en la zona del impacto del chorro.

Por último, ha sido posible comprobar que las máximas fluctuaciones de presión en el punto de impacto o de estancamiento se alcanzan para valores pequeños de altura de colchón de agua y que estas fluctuaciones de presión en función del cociente (espesor del chorro/altura de colchón) varían en un amplio rango, dependiendo del caudal vertido.

..... **DEDICATORIA**

*A mis padres José y María Luisa,*

*a mi mujer María Luz,*

*y a mis hijos Gino Gerardo y Luis Gerardo.*

## A G R A D E C I M I E N T O S

La realización y culminación de esta Tesis Doctoral se debe al apoyo y participación de muchas personas e instituciones.

Debo un primer agradecimiento a mis Directores, los Doctores José Dolz Ripollés y Juan José Egozcue, Cadráticos de Hidráulica y Matemática respectivamente, quienes dedicaron muchas horas de paciente lectura a los borradores de esta Tesis, así como a las sugerencias y correcciones respectivas. El carácter mismo de la Tesis ha dado lugar a un compromiso entre la "formalidad matemática" y la "práctica ingenieril". No sé si se haya alcanzado un justo equilibrio entre estos dos campos, pero de ser así, el mérito se debe a mis Directores que sugirieron la organización final de la misma.

Un agradecimiento muy especial a María Luz, compañera y colega, quien me ha brindado su amor y comprensión de mujer y madre y una fé ciega incondicional. Muchos de los dibujos de la Tesis fueron delineados por ella, sacrificando sus horas de descanso después de su trabajo profesional.

A mis padres, que han sufrido a la distancia estos cuatro años de mi ausencia de nuestro país Ecuador. Para ellos con el debido amor y agradecimiento y en nombre de todos mis hermanos por habernos inculcado el amor al estudio.

A todos los miembros del Departamento de Hidráulica de esta Escuela, especialmente al Dr. Luis Berga Casafont, quien me incorporó en el Departamento y a los Doctores Manuel Gómez y Juan Pedro Martín; a quienes tuve la suerte de compartir amistad y trabajo, José Polo Ingeniero de Telecomunicaciones con quien dedicamos muchas horas en la calibración y puesta a punto del sistema automatizado de adquisición de datos; Jaime Armengou y Enrique Velasco futuros doctorandos, con Jaime compartí algún tiempo la misma oficina de trabajo y que por tanto estuvo obligado a escuchar diversos tipos de opiniones y comentarios tanto de tipo técnico como personal; con Enrique fuimos compañeros en un curso de Postgrado y desde entonces intercambiamos frecuentemente opiniones de nuestra profesión; Daniel Niñerola Ingeniero Técnico de Telecomunicaciones y Jerónimo Puertas, flamante Ingeniero de Caminos; a las eficientes secretarías Francisca Torrella, María Sánchez y Neus Segre, que siempre me atendieron con gentileza y buen humor; a José Peralta, Juan Pomares y Jaime Ambrós quienes participaron en la construcción de la infraestructura utilizada en esta tesis.

A todos los estudiantes de Especialización y Doctorado, españoles y latinoamericanos, con quienes se comparte las mismas inquietudes, preocupaciones e ilusiones, especialmente a Luis Vives y a mi compatriota Ricardo Andrade Cascante que en un tiempo más terminarán su tesis.

A José Sarrate y Ana Nisarre del Centro de Cálculo de la Escuela, por su buena disposición y amabilidad y por haber soportado tanto tiempo mi presencia.

Al Instituto Ecuatoriano de Recursos Hidráulicos (INERHI) y a la Universidad Central del Ecuador (UC), Instituciones a las que me debo y para las que cumplo esta Comisión de Servicios, al Instituto de Cooperación Iberoamericana (ICI) de quien fui beneficiario de una beca, al Plan de Investigación Electrotécnico (PIE) y a las empresas patrocinadoras de esta línea de investigación FECSA , ENHER, HECSA, ERZ y Fuerzas Eléctricas del Segre.

## ÍNDICE GENERAL

	Pág.
LISTA DE SÍMBOLOS .....	XVIII

### *CAPÍTULO 1*

#### INTRODUCCIÓN

1.1 Consideraciones generales .....	1
1.2 Descripción general de las fluctuaciones .....	2
1.3 Formulación del problema .....	3
1.4 Estado del arte .....	4
1.4.1 Método del comportamiento global .....	6
1.4.2 Medida directa de las fuerzas .....	6
1.4.3 Medida de las presiones .....	6
1.5 Objetivo .....	7
1.6 Desarrollo del trabajo .....	8

## CAPÍTULO 2

### EL VERTIDO LIBRE POR CORONACIÓN EN PRESAS BÓVEDA. DISIPACIÓN DE ENERGÍA Y PRESIONES EN LA SOLERA DEL CUENCO

2.1	Introducción .....	11
2.2	Análisis global de la disipación de energía en el vertido libre .....	15
2.2.1	Características generales del flujo en el cuenco .....	15
2.2.2	Condiciones del flujo en el cuenco .....	20
2.3	Vertido libre .....	23
2.3.1	Características de los aliviaderos .....	23
2.3.2	Fases del vuelo del chorro y efectos de escala .....	28
2.4	Flujo del chorro en el interior del cuenco .....	34
2.5	Impacto contra la solera .....	41
2.5.1	Presión dinámica media en la zona de impacto .....	41

## CAPÍTULO 3

### BASES TEÓRICAS Y METODOLOGÍA NUMÉRICA PARA EL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN EXPERIMENTAL

3.1	Introducción .....	47
3.2	Transformadas de Fourier .....	49
3.2.1	Transformadas de Fourier de parámetro continuo .....	49
3.2.2	Transformadas de Fourier de parámetro discreto .....	50

	Pág.
<b>3.3 Teorema del muestreo</b> .....	53
<b>3.4 Variables aleatorias y procesos estocásticos</b> .....	58
3.4.1 Funciones de autocovarianza .....	61
3.4.2 Procesos estacionarios .....	62
<b>3.5 Densidad espectral de procesos estocásticos</b> .....	65
3.5.1 Análisis univariante .....	69
3.5.2 Análisis multivariante .....	70
3.5.2.1 Procesos estocásticos estacionarios .....	70
3.5.2.2 Los parámetros espectrales bivariados .....	72
3.5.2.3 Interpretación de la “fase y de la coherencia” .....	74
<b>3.6 Métodos de estimación espectral</b> .....	76
3.6.1 Introducción.....	76
3.6.2 Estimador espectral de Blackman y Tukey .....	76
3.6.3 Estimador espectral del Periodograma .....	77
3.6.5 Suavizado espectral.....	84
3.6.6 Estima de la coherencia y de la fase.....	89
<b>3.7 Programas de tratamiento</b> .....	92
3.7.1 Programa “TRANS.FOR” .....	94
3.7.2 Programa “ESP1.FOR” .....	96
3.7.3 Programa “ESP2.FOR” .....	98
3.7.4 Programa “MULTI.FOR” .....	103
3.7.5 Programa “COVARI.FOR” .....	110



**CAPÍTULO 4**

**METODOLOGÍA EXPERIMENTAL UTILIZADA  
PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL CAMPO DE  
PRESIONES. SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS**

4.1	Introducción .....	114
4.2	Equipo experimental .....	116
4.3	Calibración de los transductores de presión.....	121
4.3.1	Calibración estática .....	122
4.3.2	Tratamiento del ruido .....	122
4.3.3	Calibración dinámica .....	125
4.3.3.1	Calibración con respuesta tipo salto .....	126
A)	Caso continuo .....	126
B)	Caso discreto .....	127
4.3.3.2	Calibración con respuesta tipo rampa .....	129
4.3.4	Análisis de las calibraciones y conclusiones .....	132
4.4	Descripción del software del sistema de adquisición de datos .....	136
4.4.1	Programa "MUESTRAS1.PAS" .....	137
4.4.1	Programa "MUESTRAS2.C" .....	137
4.4.1	Programa "KERMIT" .....	138
4.5	Comprobación de la estacionariedad y ergodicidad .....	139
4.6	Ensayos realizados .....	140

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

5.1	Introducción .....	141
5.2	Registros de presiones .....	142
5.3	Análisis de las presiones en el dominio del tiempo y del espacio...145	
	5.3.1 Presión dinámica media en la zona de estancamiento .....	145
	5.3.2 Presiones máxima, mínima y media en función de $h/B$ .....	148
	5.3.3 Presiones y amplitudes máximas en el punto de estancamiento ..	157
	5.3.3.1 Presiones y amplitudes máximas en función de $[h/y_c]$ .....	157
	5.3.3.2 Presiones y amplitudes máximas en función de $[h/Z]$ .....	157
	5.3.3.3 Semiamplitudes máximas en función de $[h/Z]$ .....	160
	5.3.3.3 Semiamplitudes máximas en función de $[h/B]$ .....	160
	5.3.4 Densidad y distribución de probabilidad de las presiones .....	164
5.4	Presiones de fluctuación macroturbulentas .....	169
5.5	Correlaciones temporales y espaciales en la solera del dissipador ...175	
5.6	Análisis de las presiones en el dominio de la frecuencia .....	182
	5.6.1 Densidades espectrales univariantes .....	182
	5.6.2 Densidades espectrales multivariantes .....	186

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES, APORTACIONES Y FUTUROS DESARROLLOS

6.1	Conclusiones y aportaciones .....	203
6.2	Futuros desarrollos .....	205

Pág.

**BIBLIOGRAFÍA** ..... 206

**ANEXO A:**

**SOFTWARE DE ADQUISICIÓN Y TRATAMIENTO DE DATOS**

**ANEXO B:**

**VENTANAS ESPECTRALES**

Pág.

## ÍNDICE DE FOTOGRAFÍAS

1	Transductores de presión .....	117
2	Detalle del cuenco disipador .....	119
3	Panorámica del funcionamiento del modelo.....	119
4	Panorámica del funcionamiento del modelo.....	119
5	Panorámica del sistema de adquisición de datos .....	120
6	Registro de ruido aleatorio .....	138

## ÍNDICE DE CUADROS

2.1	Valores característicos de los chorros turbulentos .....	39
2.2	Efecto de la concentración de aire sobre $(\alpha_a/\alpha_i)$ .....	40
2.3	Parámetros de las presiones medias en la zona de impacto.....	46
3.1	Parámetros de las ventanas de “Blackman-Harris” .....	84
3.2	Características de cálculo de los programas de tratamiento .....	93
3.3	Ficheros de salida del programa TRANS.FOR .....	95
3.4	Ficheros de salida del programa ESP2.FOR .....	100
3.5	Ficheros de salida del programa MULTI.FOR .....	107
3.6	Ficheros de salida del programa COVARI.FOR .....	111
4.1	Parámetros de las ecuaciones de calibración estática .....	123
5.1	Parámetros de las ecuaciones de las presiones dinámicas medias ..	146
5.2	Presión dinámica media en la zona de estancamiento .....	147
5.3	Cálculo de las relaciones $[\bar{P}_s/(v_0^2/2g)]$ y $[h/B]$ .....	149

	Pág.
5.4 Relaciones $[\bar{P}_s/(v_0^2/2g)]$ y $[h/B]$ con Cola y con Tesis .....	152
5.5 Cálculo de $[P_{max}/(v_0^2/2g)]$ , $[P_{min}/(v_0^2/2g)]$ y $[h/B]$ .....	153
5.6 Cálculo de $[P_{max}/Z]$ , $[2A_{max}/Z]$ , $[h/Z]$ y $[h/y_c]$ .....	158
5.7 Cálculo de $[A_{sup}/Z]$ y $[A_{inf}/Z]$ .....	162

### ÍNDICE DE FIGURAS

2.1 Tipología de los disipadores de energía hidráulica .....	12
2.2 Presa de la LLosca del Cavall.....	14
2.3 Magnitudes principales en los disipadores a pie de presa .....	15
2.4 Energía en la base de una caída vertical.....	16
2.5 Curvas de las ecuaciones del momentum.....	18
2.6 Condiciones de flujo en función del calado aguas abajo .....	20
2.7 Relación entre $\beta$ y $y_b/H$ .....	21
2.8 Valores teóricos y experimentales de $y_p$ .....	22
2.9 Sistema de referencia de los ábacos de Lencastre.....	24
2.10 Valores de “S” para perfiles verticales .....	24
2.11 Valores de “S” para perfiles con pendiente 1/1 .....	25
2.12 Valores de “S” para perfiles con contrapendiente 1/1 .....	26
2.13 Coordenadas de referencia para la fórmula de Scimeni .....	27
2.14 Características de un chorro turbulento a través de la atmósfera	29
2.15 Fases del vuelo de un chorro turbulento .....	29
2.16 Resultados experimentales que definen la relación $(Q_{air}/Q)$ .....	32
2.17 Influencia de la escala del modelo en la entrada de aire .....	33

	Pág.
2.18 Zonas de flujo del chorro dentro del colchón de agua .....	34
2.19 Difusión de un chorro en un colchón ilimitado .....	35
2.20 Comportamiento teórico del chorro en un colchón ilimitado .....	36
2.21 Modelo teórico del comportamiento del chorro .....	37
2.22 Coeficiente de difusión K.....	44
3.1 Transformada de Fourier de una señal en tiempo continuo .....	55
3.2 Filtrado teórico.....	56
3.3 Antittransformada de Fourier del filtro rectangular.....	57
3.4 Aproximación directa e indirecta de la densidad espectral .....	78
3.5 Extensión periódica de sinusoides no periódicas .....	79
3.6 Ventana espectral de una ventana temporal rectangular .....	80
3.7 Ventanas temporales de uso común.....	81
3.8 Ventana rectangular.....	81
3.9 Ventana de Hamming.....	82
3.10 Ventana de Blackman.....	82
3.11 Ventana de Blackman-Harris.....	83
3.12 Ventana espectral efectiva.....	85
3.13 Registro de presiones en el modelo hidráulico.....	86
3.14 Densidades espectrales con diferentes ventanas .....	87
3.15 Densidades espectrales con diferentes suavizados .....	88
3.16 Variación de la coherencia en función del suavizado .....	90
3.17 Coherencia y fase de las fluctuaciones de presión .....	91
3.18 Programa TRANS.FOR.....	94

	Pág.
3.19 Programa ESP1.FOR.....	96
3.20 Ejemplo de impresión del programa ESP1.FOR.....	97
3.21 Programa ESP2.FOR.....	98
3.22 Ejemplo de impresión del programa ESP2.FOR.....	99
3.23 Ejemplos de gráficos del programa ESP2.FOR.....	101
3.24 Densidades espectrales y acumuladas .....	102
3.25 Programa MULTI.FOR.....	104
3.26 Ejemplo de impresión del programa MULTI.FOR.....	105
3.27 Impresión del programa MULTI.FOR.....	106
3.28 Ejemplo de gráficos del programa MULTI.FOR.....	108
3.29 Ejemplo de gráficos del programa MULTI.FOR.....	109
3.30 Programa COVARI.FOR.....	110
3.31 Gráficos con programa COVARI.FOR.....	112
3.32 Gráficos con programa COVARI.FOR.....	113
4.1 Modelo del cuenco disipador de energía.....	116
4.2 Sistema de adquisición y tratamiento de datos .....	120
4.3 Esquema del equipo de calibración.....	121
4.4 Curvas de calibración estática.....	124
4.5 Diagrama de respuesta al impulso.....	125
4.6 Calibración con función tipo salto.....	126
4.7 Calibración con función tipo rampa.....	129
4.8 Función tipo bloque.....	130
4.9 Función tipo rampa.....	133
4.10 Densidad de la función tipo rampa.....	133
4.11 Respuesta del transductor Kistler.....	134

	Pág.
4.12 Derivada de la respuesta del transductor Kistler .....	134
4.13 Suavizado de la derivada de la respuesta .....	134
4.14 Módulo de la función de transferencia del transductor .....	135
4.15 Densidades espectrales de las fluctuaciones de presión .....	135
4.16 Sistema de adquisición de datos .....	136
4.17 Registro de presiones de una campaña de ensayos .....	138
4.18 Comprobación de la estacionariedad y ergodicidad .....	139
4.19 Puntos de medida en la solera del cuenco .....	140
5.1 Registros de presiones en diferentes puntos de la solera .....	142
5.2 Registros de presiones en el punto de estancamiento .....	143
5.3 Ampliación de los registros de presiones .....	144
5.4 Análisis de las presiones dinámicas en la zona del impacto .....	145
5.5 Comprobación de la distribución de presiones dinámicas medias	146
5.6 Presiones dinámicas medias $\bar{P}_s$ en función de $[h/B]$ .....	150
5.7 Comparación de $\bar{P}_s$ de Cola con este trabajo .....	151
5.8 Presiones dinámicas máximas $P_{max}$ .....	154
5.9 Presiones dinámicas mínimas $P_{min}$ .....	155
5.10 Presiones dinámicas máxima, media y mínima .....	156
5.11 $[P_{max}/Z]$ en función de $[h/y_c]$ .....	159
5.12 $[2A_{max}/Z]$ en función de $[h/y_c]$ .....	159
5.13 $[P_{max}/Z]$ en función de $[h/Z]$ .....	161
5.14 $[2A_{max}/Z]$ en función de $[h/Z]$ .....	161



	Pág.
5.15 Ajuste individual de $[A_{sup}/Z]-[h/B]$ y $[A_{inf}/Z]- [h/B]$ .....	163
5.16 Ajuste general de $[A_{sup}/Z]-[h/B]$ y $[A_{inf}/Z]- [h/B]$ .....	163
5.17 Densidades y distribuciones de probabilidad en el estancamiento	165
5.18 Densid. y distrib. de probabilidad a la misma escala .....	166
5.19 Densid. y distrib. de probabilidad en la zona de estancamiento	167
5.20 Densid. y distrib. de probabilidad a la misma escala .....	167
5.21 Intensidades de turbulencia $T_p$ .....	171
5.22 Intensidades de turbulencia $T_s$ .....	171
5.23 Ajuste de las intensidades de turbulencia $T_p$ y $T_s$ .....	172
5.24 Presiones de fluctuación cuadrática media .....	174
5.25 Presiones de fluctuación cuadrática media ajustadas .....	174
5.26 Puntos de medida en la losa del cuenco .....	175
5.27 Autocorrelación y crosscorrelación. $Q=6l/s$ ; $h=0.04m$ .....	177
5.28 Autocorrelación y crosscorrelación. $Q=6l/s$ ; $h=0.12m$ .....	178
5.29 Autocorrelación y crosscorrelación. $Q=6l/s$ ; $h=0.20m$ .....	179
5.30 Autoco. y crossco. $Q=6l/s$ ; $h=0.04-0.12-0.20m$ .....	180
5.31 Crosscorrelación. $Q=6l/s$ ; $h=0.04-0.12-0.20m$ .....	181
5.32 Densidades espectrales en el estancamiento. $Q=3-6-8l/s$ .....	184
5.33 Densidades espectrales en estancamiento. $h=0$ y máximas .....	185
5.34 Densidades espectrales multivariantes. $Q=3l/s$ , $h=0.04m$ .....	187
5.34 Densidades espectrales multivariantes. $Q=3l/s$ , $h=0.12m$ .....	188
5.36 Densidades espectrales multivariantes. $Q=3l/s$ , $h=0.20m$ .....	189
5.37 Densidades espectrales multivariantes. $Q=6l/s$ , $h=0.04m$ .....	190
5.38 Densidades espectrales multivariantes. $Q=6l/s$ , $h=0.12m$ .....	191
5.39 Densidades espectrales multivariantes. $Q=6l/s$ , $h=0.20m$ .....	192

	Pág.
5.40 Densidades espectrales multivariantes. $Q=8l/s$ , $h=4\text{cm}$ .....	193
5.41 Densidades espectrales multivariantes. $Q=8l/s$ , $h=12\text{cm}$ .....	194
5.42 Densidades espectrales multivariantes. $Q=8l/s$ , $h=20\text{cm}$ .....	195
5.43 Coherencias máximas y fases. $Q=3l/s$ , $h=4-12-20\text{cm}$ .....	197
5.44 Coherencias máximas y fases. $Q=6l/s$ , $h=4-12-20\text{cm}$ .....	198
5.45 Coherencias máximas y fases. $Q=8l/s$ , $h=4-12-20\text{cm}$ .....	199
5.46 Coherencias máximas y fases. $Q=3-6-8l/s$ , $h=4-12-20\text{cm}$ .....	200
5.47 Coherencias en función de $[h/B]$ . $Q=3-6-8l/s$ ; $h=4-12-20\text{cm}$ .....	202

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_j$ [L]	Amplitud de presión en la frecuencia $j$
$A_{sup}$ [L]	Semiamplitud de presión superior
$A_{inf}$ [L]	Semiamplitud de presión inferior
$2A_{max}$ [L]	Amplitud máxima de presión
$\alpha$ [-]	Coeficiente de energía o de Coriolis
$\alpha_a$ [-]	Angulo exterior de difusión del chorro en el colchón
$\alpha_i$ [-]	Angulo interior de desintegración del núcleo del chorro
$b_c$ [L]	Ancho del chorro a la entrada del colchón
$b$ [L]	Ancho de la zona de influencia del impacto del chorro ( $\bar{P} = \bar{P}_s/2$ )
$b_1$ [L]	Ancho de la zona de influencia aguas arriba (experimental de la Tesis)
$b_2$ [L]	Ancho de la zona de influencia aguas abajo (experimental de la Tesis)

$B$ [L]	Espesor del chorro a la entrada del colchón
$B_p$ [L]	Perímetro del chorro a la entrada del colchón
$\beta$ [-]	Coefficiente del momentum o de Boussinesq
$\beta_f$ [-]	Relación de flujos aire/agua
$\beta_m$ [-]	Relación de flujos aire/agua en modelo
$\beta_p$ [-]	Relación de flujos aire/agua en prototipo
$c(t, t)$ [ $L^2$ ]	Función de autocovarianza
$C$ [-]	Concentración de aire en agua
$C_1$ [-]	Constante de ley de difusión $\sim 0.1085$
$C_{j,k}$ [ $L^2$ ]	Covarianzas multivariadas
$C_v$ [-]	Coefficiente de velocidad
$\hat{c}_N(nT)$ [ $L^2$ ]	Estimador sesgado de la autocovarianza
$\hat{c}_p$ [ $L^2$ ]	Estimador de la autocovarianza del periodograma
$\hat{c}_{xx}(nT)$ [ $L^2$ ]	Estimador insesgado de la autocovarianza
$D$ [-]	Número de caída
$d_1$ [L]	Diámetro de un chorro circular a la entrada del colchón
$\delta_1$ [-]	Angulo de disminución del núcleo interno del chorro en la atmósfera
$\delta_2$ [-]	Angulo exterior de difusión del chorro en la atmósfera
$\delta(t - t_r)$ [L]	Función delta de Dirac

$\Delta H$ [L]	Pérdida de energía
$E$ [L]	Energía total a una profundidad $y$ del colchón
$E_0$ [L]	Energía total a la entrada del colchón ( $y = 0$ )
$f$ [ $T^{-1}$ ]	Frecuencia en Hz
$f_t(x)$ [-]	Función de densidad de probabilidad
$F_t(x)$ [-]	Función de distribución
$F_{pq}$ [-]	Función de distribución conjunta
$F_b$ [-]	Número de Froude en la sección aguas abajo
$F_1$ [-]	Número de Froude en la sección 1
$g$ [ $LT^{-2}$ ]	Aceleración de la gravedad
$\gamma$ [ $ML^{-2}T^{-2}$ ]	Peso específico
$\gamma_x(t, t)$ [-]	Coefficiente de autocovarianza
$h(t)$ [L]	Respuesta al impulso
$H$ [L]	Altura de caída de la presa o del salto
$H_d$ [L]	Carga de diseño sobre la cresta del vertedero
$H_0$ [L]	Energía en la sección 0
$H_1$ [L]	Energía en la sección 1
$ H(\omega) $ [LT]	Módulo de la función de transferencia
$L$ [L]	Longitud del pozo de acumulación en las estructuras de caída

$L_c$ [L]	Longitud del cuenco disipador
$L_d$ [L]	Longitud del pozo de acumulación en las presas bóveda
$L_r$ [L]	Longitud del resalto hidráulico
$L_s$ [L]	Longitud de desintegración del chorro en la atmósfera
$\lambda$ [-]	Escala geométrica del modelo
$m(t)$ [L]	Función tipo bloque (valor medio de una variable aleatoria estacionaria, $E[t] = m(t)$ . capítulo 3)
$N$ [-]	Número de datos de un muestreo
$\eta_A$ [-]	Coefficiente experimental $\sim 0.276$
$P$ [L]	Presión dinámica instantánea
$\bar{P}$ [L]	Presión dinámica media en la solera del cuenco
$\bar{P}_s$ [L]	Presión dinámica media en el punto de estancamiento
$\bar{P}_1$ [L]	Presión dinámica media en el punto 1
$\bar{P}_2$ [L]	Presión dinámica media en el punto 2
$P_{max}$ [L]	Presión dinámica máxima
$P_{min}$ [L]	Presión dinámica mínima
$P'$ [L]	Presión dinámica de fluctuación
$P_x(t)$ [L]	Presión en el punto x y en el instante t
$P_s$ [-]	Medida de probabilidad

$\Phi \quad \Phi' \quad [-]$	Coefficientes de las expresiones de la distribución de la presión dinámica media en la zona del estancamiento
$Q \quad [L^3T^{-1}]$	Caudal de agua
$Q_{air} \quad [L^3T^{-1}]$	Caudal de aire
$q \quad [L^2T^{-1}]$	Caudal unitario
$\Re \quad [-]$	Conjunto de números reales
$R_x(t, t') \quad [L^2]$	Función de autocorrelación
$\rho \quad [ML^{-3}]$	Densidad del agua
$\rho_g \quad [ML^{-3}]$	Densidad de un gas
$\rho_l \quad [ML^{-3}]$	Densidad de un líquido
$\rho_{j,k}(\omega) \quad [-]$	Función coherencia
$r(t) \quad [L]$	Función tipo rampa
$S(\omega) \quad [L^2T^2]$	Densidad espectral distribuida en <i>rad/s</i>
$S(\omega) = S_{j,k}(\omega) \quad [L^2T^2]$	Matriz de densidad espectral
$\hat{S}_{BT}(\omega) \quad [L^2T^2]$	Estimador espectral de Blackman y Tukey
$\hat{S}_p(k\Omega) \quad [L^2T^2]$	Estimador espectral del periodograma
$\check{S}_p(k\Omega) \quad [L^2T^2]$	Suavizado del periodograma
$\sigma \quad [ML^{-1}T^{-2}]$	Tensión superficial interfacial (capítulo 2). Desviación estándar (capítulos 3 y 5)
$\sigma^2 \quad [L^2]$	Varianza o presión de fluctuación cuadrática media

$\sigma_j^2$ [ $L^2$ ]	Varianza de un proceso en la frecuencia $j$
$t$ [ $T$ ]	Unidad de tiempo
$T_p$ [-]	Intensidad de turbulencia con respecto a la carga de velocidad a la entrada del colchón
$T_s$ [-]	Intensidad de turbulencia con respecto a la presión dinámica media en el punto de estancamiento
$\tau$ [ $T$ ]	Retardo temporal de análisis
$t_r$ [ $T$ ]	Tiempo de la primera llegada del incremento de presión en los ensayos de calibración dinámica
$t_v$ [ $T$ ]	Tiempo de apertura de la electroválvula
$T$ [ $T$ ]	Período de muestreo
$\theta$ [-]	Angulo de salida del chorro con respecto a la vertical desde el vertedero
$\theta_{j,k}(\omega)$ [-]	Función fase
$\theta_0$ [-]	Angulo de entrada del chorro con respecto a la horizontal
$U_0$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidad longitudinal media del chorro en el inicio de la aireación
$u(t - t_r)$ [ $L$ ]	Función salto unidad
$u'$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidades de fluctuación longitudinal
$u_f$ [ $LT^{-1}$ ]	Raiz cuadrática media de las velocidades de fluctuación longitudinal
$U_m$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidad ficticia del chorro en el punto de estancamiento
$\mu$ [-]	Medida espectral del proceso



$\mu_g$ [ $L^2T^{-1}$ ]	Viscosidad del gas
$v_b$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidad media en la sección aguas abajo
$v'$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidades de fluctuación lateral
$v_f$ [ $LT^{-1}$ ]	Raiz cuadrática media de las velocidades de fluctuación lateral
$v_r$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidad media relativa líquido-gas
$v_0$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidad media a la entrada del colchón
$v_1$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidad media en la sección 1
$v_{air}$ [ $LT^{-1}$ ]	Velocidad crítica para la entrada de aire en el chorro
$\Omega$ [ $T^{-1}$ ]	Frecuencia en la banda de Nyquist (Conjunto arbitrario. Capítulo 3)
$\Omega_c$ [ $T^{-1}$ ]	Frecuencia fundamental de la banda de Nyquist
$\omega$ [ $T^{-1}$ ]	Frecuencia en <i>rad/s</i>
$\omega_c$ [ $T^{-1}$ ]	Frecuencia de Nyquist
$w_n$ [-]	Ventana temporal
$X(t)$ [ $L$ ]	Vector de procesos estocásticos
$X(\omega)$ [ $LT$ ]	Transformada de Fourier de $x(t)$
$X_N$ [ $LT$ ]	Transformada limitada de Fourier
$x$ [ $L$ ]	Abscisa de los ejes de referencia
$x_n$ [ $L$ ]	Sucesión numérica obtenida en un muestreo
$y$ [ $L$ ]	Ordenada de los ejes de referencia
$y_c$ [ $L$ ]	Calado crítico en una sección rectangular

$y_k$ [L]	Profundidad de desintegración del núcleo central del chorro en el colchón de agua
$y_n$ [L]	Sucesión numérica después de aplicar a la sucesión $x_n$ una ventana temporal $w_n$
$y_1$ $y$ $y_2$ [L]	Calados conjugados del resalto hidráulico
$y_p$ [L]	Calado en el pozo de acumulación
$y_b$ [L]	Calado aguas abajo
$y_{c0}$ [L]	Calado en el punto de incidencia (colchón eficaz)
$Z$ [L]	Altura neta de la presa o salto (conjunto de los números enteros. capítulo 3)

*“Los movimientos de los Cuerpos Celestes,  
a pesar de su gran distancia de la Tierra,  
me han sido más fáciles de entender que  
los del agua, la cual está a mi alcance”*

Galileo Galilei

*“La ocupación más grata a un Ingeniero  
es enseñar a otro Ingeniero”*

J. L. Fernández Casado

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

#### 1.1 Consideraciones generales

En el diseño de presas, especialmente aquellas que generan grandes cargas y/o que están localizadas en ríos con caudales importantes, se asume una especial consideración en la correcta definición del vertedero y del cuenco disipador.

La evaluación de las acciones sobre los elementos estructurales del **cuenco disipador de energía**, debido al campo de presiones inducido por la macroturbulencia del flujo, es de sumo interés en el análisis de su estabilidad y diseño.

Sin embargo, actualmente esta evaluación sigue presentando dificultades debido a la complejidad de los diferentes aspectos que deben ser considerados en este análisis.

La **acción destructiva de las presiones de fluctuación macroturbulentas** actuando sobre los **disipadores de energía** es muy evidente y, para llamar la atención hacia la importancia del problema, se citan algunos ejemplos de deterioro:

Presa de **Netzahualcoyotl** (Malpaso) en Méjico [16]; presa de **Tarbela** en Pakistán [17]; presas de **Bratsk**, **Boutcharnisk**, **Pavlovsk**, **Krasnoiarsk** y **Sayano-Sushenskoe** en URSS [42]; presa de **Salto Grande** en Argentina/Uruguay [59]; presa de **Bhakra** en India [103]; presas de **Homa**, **Boneville**, **Chief Joseph**, **Pit 6** y **Pit 7** en USA [105].

Finalmente, de acuerdo al informe preparado por el Comité sobre deterioro de presas, de la "Comisión Internacional de Grandes Presas" (ICOLD) [41], alrededor del 5% del total de casos de deterioro observado en los dispositivos hidráulicos de presas, se debieron a fenómenos asociados a las fluctuaciones de presión.

## 1.2 Descripción general de las fluctuaciones de presión

Los grandes vórtices o remolinos, se asocian con la bajas frecuencias de fluctuación y se determinan por las condiciones de contorno, siendo sus dimensiones del mismo orden que la escala del dominio del flujo [11], [39], [48], [87].

Los remolinos o vórtices más pequeños, se asocian con las más altas frecuencias de fluctuación y con las acciones viscosas [98], [100].

Los grandes vórtices interactúan con el flujo medio definiendo la energía cinética, la cual a su vez gobierna a los pequeños vórtices, que finalmente disipan la energía en una escala donde las acciones viscosas llegan a ser activas; ésto se conoce como el proceso de la disipación de energía en cascada [11], [48], [98].

Las depresiones fluctuantes debidos a los pulsos de baja frecuencia pueden incrementar el riesgo de cavitación, aún cuando los valores de la presión media sean significativamente más altos que la presión de vapor del fluido e incluso mayores que la presión atmosférica [45], [55].

## 1.3 Formulación del problema

La complejidad del flujo tridimensional resultante y la característica anisotrópica y no homogénea de la turbulencia inducida en las estructuras de disipación de energía, no permite estudiar el flujo por desarrollos analíticos. Por lo tanto, los estudios en modelo hidráulico son la herramienta básica.

Uno de los problemas es saber conducir estos estudios en modelo para la cuantificación de las acciones hidrodinámicas que actúan sobre los elementos estructurales de los cuencos disipadores. La mayor dificultad la presentan los efectos de escala, así como la adquisición y tratamiento de la información.

El otro problema es que debido a la naturaleza aleatoria del proceso, no es posible describirlo por medio de una función analítica explícita en el tiempo. Sin embargo, existen buenos procedimientos para caracterizar el fenómeno aleatorio, en una forma cuantitativa, por medio del análisis estocástico.

La función de la densidad espectral determina la distribución de la señal de presión (registrada en el modelo hidráulico) con respecto a las frecuencias, pero no especifica a la señal por sí sola.

Alguna información sobre la forma de la onda de presión se obtiene a partir de la función de distribución de amplitudes y de su derivada, la función de densidad de probabilidad; ambas independientes de la función de densidad espectral.

Las funciones arriba mencionadas (densidad espectral y densidad de probabilidad) caracterizan diferentes aspectos de las fluctuaciones de presión.

Matemáticamente, las **fluctuaciones turbulentas en flujos reales** pueden ser consideradas como un **proceso estocástico, estacionario y ergódico**, descrito por las **funciones de densidad**.

El **análisis espectral** puede realizarse por medio de la **transformada discreta finita de fourier (DFFT)** con la implementación del algoritmo de la **transformada rápida de Fourier (FFT)**.

Un conocimiento más profundo de la **macroturbulencia** se consigue por medio de las **funciones de covarianza**, las que nos definen la **relación de dependencia temporal y espacial** de las **fluctuaciones de presión** en los diferentes puntos de medida.

La **dependencia frecuencial y espacial** se determina por medio del **análisis espectral multivariado**. Así, el grado de **“dependencia”** y **“dirección”** de las **fluctuaciones** se determina por medio de las **funciones coherencia y fase**.

De esta forma, todos los cálculos deben realizarse por medio de programas de ordenador expresamente desarrollados. Se deben calcular y dibujar las **presiones instantáneas y fluctuantes**, las **funciones de densidades espectrales univariadas y multivariadas**, las **funciones de distribución y densidad de probabilidad**; se deben imprimir los **parámetros estadísticos necesarios**, usualmente, **presiones máxima, mínima y media**, **presión de fluctuación cuadrática media (varianza)**, **desviación standard, skew, kurtosis, coeficientes de variación, ancho de banda espectral**, etc, etc.

La **fiabilidad** de la información obtenida por el **modelo hidráulico**, esto es, los datos obtenidos por medio de los **instrumentos de medición (transductores de presión entre otros)**, es fundamental; pues, de esta información dependen los resultados obtenidos en el proceso de tratamiento citado anteriormente.

Por una parte, la **calibración estática y dinámica** de los **transductores de presión** es una **tarea previa obligada** en la realización de cualquier investigación.

Por otra parte, cuando se usa la **DFFT**, se debe analizar la **resolución de la frecuencia** (capacidad para distinguir dos o más señales) y el efecto del **ventaneado implícito** que oscurece y distorsiona las señales más débiles (**“Leakage Espectral”**) [35], [47].

Además, la **adquisición de los datos** debe realizarse atendiendo al **teorema del muestreo** [50], [74], [102], para evitar fenómenos de **“aliasing”** (la **frecuencia de muestreo** debe ser al menos el **doble de la frecuencia a detectar**).

Por último, toda la información se debe obtener por medio de la **automatización del modelo hidráulico**, para lo cual es necesario poner a punto todo el equipo que se precisa (**ordenador, tarjeta de adquisición de datos, transductores de presión, entre otros**) y desarrollar e implementar el **software más adecuado**, para el control de dicho equipo.

## 1.4 Estado del arte

Los hechos anteriores, asociados con la gran variedad de situaciones de flujo que pueden ocurrir en un cuenco disipador de energía, no han permitido la definición de formas generales de diseño.

La mayoría de los estudios que se conocen acerca de las acciones hidrodinámicas, se basan en modelos físicos que son solamente representativos del prototipo específico.

Las amplitudes de fluctuación de la presión bajo la acción de resaltos hidráulicos libres han sido investigados experimentalmente por muchos autores, tales como **Abdul Khader y Elango** [1]; **Akbari**...[2]; **Arruda Camargo** [7]; **Henning** [38]; **Lopardo y Solari** [61]; **Lyatkhér** [62]; **Sánchez y Fuentes** [89]; **Vasiliev y Bukreyev** [107]; **Yuditskii** [115];

**Narasimhan y Bhargava** [68] y **Narayanan** [71] en resaltos sumergidos.

**Akbari**...[2] y **Solari** [95] sobre resaltos hidráulicos forzados.

**Bowers y Tsai** [15] sobre "chute blocks" y **Lopardo**...[59] sobre "baffle piers".

El riesgo sobre la erosión de cavitación en cuencos disipadores debido a las fluctuaciones de presión fueron considerados por **Lopardo**...[56], [58] y **Narayanan** [70].

El estudio de las funciones de covarianzas, así como de las desviaciones standard de las fluctuaciones de presión, en función de la superficie y disposición de la solera, en los disipadores de energía por resalto hidráulico, fueron realizados por **Sánchez y Fuentes** [89]; **Spoljaric**...[96],[97]; y **Yuditskii** [115].

De los estudios de las **fluctuaciones de presión macroturbulentas en los disipadores de energía hidráulica por vertido libre** o según la nomenclatura de **Lencastre** [53], [54] **disipadores de energía para vertederos de lámina libre**, la información disponible a destacar es la siguiente:

**Scimeni** [94], analiza con detalle la forma del vertido a partir de un vertedero de pared delgada y **Lencastre** [54], estudia las características de los aliviaderos y su influencia en el vertido de la lámina.

**Moore** [66], **Bakhmeteff y Feodorov** [9] y **Rand** [86], estudian las características generales del flujo en las estructuras de caída.

**Cola** [19], [20] definió las leyes de difusión (tanto de presión como de velocidad) de un chorro vertical plano, en un colchón de agua de altura finita.

**Hartung y Häusler** [36] resumen la información conocida hasta aquella época (1973) y a partir de ella plantean rangos de validez para las leyes de difusión de chorros planos y circulares, que actúan verticalmente en colchones de agua de altura finita.

**Beltaos** [12], [13]; **Chan...** [18] y **Davanipour y Sami** [24] presentan las leyes de difusión para chorro circular vertical y chorro plano inclinado, con un colchón de altura finita. Estos estudios fueron realizados en modelos de aire.

**Ervine** [28]; **Mc Keogh y Elsayy** [64], estudian el arrastre y mezcla de aire-agua por efecto de la entrada del chorro en el cuenco.

**Ervine y Falvey** [29], estudian los comportamientos turbulento de los chorros de agua, tanto en la caída libre, como su difusión en un colchón de agua.

**Lencastre** [54], analiza las fluctuaciones de presión en los disipadores de energía por vertido libre, a partir de mediciones con transductores de presión. Sintetiza la información existente y determina experimentalmente (combinación de analizadores panorámicos de frecuencias y tratamiento digital rudimentario) información adicional muy valiosa. Sus resultados son parciales y corresponden a un análisis unidimensional.

**Ramos** [85], obtiene resultados unidimensionales pero aún parciales de las presiones, para el caso de chorros cruzados (lámina libre con desague de medio fondo). Falta profundizar en el análisis espectral y la distribución de probabilidad.

**Franzetti** [31], analiza un caso particular y sus resultados corresponden a una sola altura de colchón de agua.

Los trabajos de **Xu Duo y Yu Chang** [114]; **Cui Guang...** [23], actualizan y aportan nuevos conocimientos sobre este tema. La información presentada es muy valiosa, aunque en algunos casos un tanto incongruente y oscura (confusión en la nomenclatura). Sus análisis siguen siendo unidimensionales y falta profundizar en unos casos, y tratar en otros, varios aspectos como el análisis espectral univariado y multivariado.

**Jiang Wenchao y Liang Xingrang** [44] analizan la propagación de las oscilaciones de presión a través de las juntas del disipador de energía. Realizan un buen tratamiento espectral.

**Franzetti y Tanda** [32], analizan las intensidades de turbulencia en las distintas zonas del flujo de un chorro circular, para varias alturas de colchón de agua y considerando el arrastre de aire por efecto de la entrada del chorro al colchón.

Es de destacar, que en algunos de los estudios citados anteriormente, se indica solamente de una forma muy general, el tipo de instrumentación utilizada, la comprobación de su funcionamiento (calibración estática y dinámica), así como, el análisis de la información obtenida; en tanto que en la mayoría de estos estudios, se omite este tipo de comprobaciones.

La herramienta fundamental que nos permite una correcta adquisición y tratamiento de la información es la técnica del "Tratamiento de Señales".



Los estudios de las acciones hidrodinámicas se han realizado, en forma general, adoptando uno de los siguientes métodos:

#### 1.4.1 Método del comportamiento global

Se modelan los elementos estructurales de los cuencos disipadores, su geometría y peso, considerándolos monolíticamente e independientes unos de otros. Este es un método cualitativo.

#### 1.4.2 Medida directa de las fuerzas actuantes sobre los elementos estructurales en estudio

Se determinan las diferentes componentes de las fuerzas hidrodinámicas. No es posible obtener la distribución espacial de estas fuerzas, puesto que el resultado final es equivalente a una acción uniforme sobre las estructuras. Al no conocer el "input" verdadero, no se puede usar un modelo matemático para el análisis estructural del cuenco.

#### 1.4.3 Medida de las presiones en diferentes puntos de la superficie de la estructura

En el que las fuerzas se obtienen por la integración del campo de presiones a lo largo de la superficie. Por lo tanto, conocido el "input" verdadero, se puede realizar el análisis estructural por medio de modelos matemáticos-numéricos, como por ejemplo, con el Método de los Elementos Finitos (FEM) o el Método de los Elementos de Contorno (CEM).

Por consiguiente, de los tres métodos, el más útil es el de las "medidas de presiones". Sin embargo, no conocemos el campo estocástico  $P'(x, y, t)$ , sino solamente  $P'(x_i, y_i, t)$ , donde  $x_i$  y  $y_i$  representan las coordenadas generales de los puntos medidos. De ahí, la necesidad de realizar una descripción estadística de la presión.

Concluimos diciendo, que el conocimiento científico en este campo, es actualmente insuficiente [41], [83], razón por la cual, se justifica el desarrollar esta línea de investigación.

La capacidad de obtener un cuadro mucho más detallado de las acciones de carga hidrodinámica sobre las estructuras, será indudablemente uno de los más significativos desarrollos en la mejora del diseño de los disipadores de energía hidráulica en el futuro [73].

## 1.5 Objetivo

El objetivo principal de estos estudios es llegar a resolver con seguridad y economía, todas las tipologías de estructuras hidráulicas sometidas a la acción de las cargas hidrodinámicas y en particular los disipadores de energía a pie de presa.

Los problemas a resolver son multidisciplinarios, necesitándose por tanto el conocimiento profundo, a más de la Ingeniería Hidráulica, de varias especialidades, como son entre otras, las Técnicas de Sistemas de Automatización, Tratamiento de Señales, Métodos Numéricos e Informáticos, Cálculo Dinámico de Estructuras y de Suelos, Mecánica de Fractura, etc, etc.

Sin embargo, todos los análisis dependerán de la calidad de la información que sea suministrada; es decir del "input" o "acción" de las cargas hidrodinámicas.

Así, los objetivos principales de esta Tesis Doctoral se circunscriben en los siguientes puntos:

**\* Diseñar, poner a punto y contrastar una metodología numérica-experimental para el estudio del campo de presiones en los disipadores de energía hidráulica. Aplicación a un cuenco en el que incide una lámina vertiente.**

**\* Proponer y comprobar en una primera aproximación, formulaciones para el análisis del campo de presiones de los disipadores de energía para el caso del vertido libre en presas bóveda.**

Este trabajo abre una nueva línea de investigación en la Sección de Ingeniería Hidráulica e Hidrológica, del Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y Ambiental, de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, C. y P. de la Universidad Politécnica de Catalunya, encaminado a un estudio más detallado de las cargas hidrodinámicas en los cuencos disipadores de energía a pie de presa en el caso de vertido libre por coronación en presas bóveda. Esta línea de investigación ha sido financiada por el Plan de Investigación Electrotécnico (PIE) y patrocinada por las empresas FECSA, ENHER, HECSA, ERZ y Fuerzas Eléctricas del Segre.

## 1.6 Desarrollo del trabajo

La Tesis se ha dividido en seis capítulos. El **Capítulo 1**, del cual forma parte esta sección, ha tenido la finalidad de formular el problema así como, presentar un “estado del arte general” de la disipación de energía hidráulica y los objetivos propuestos.

- **Capítulo 2.** Se presenta en primer lugar un análisis global de la disipación de energía en la base de las estructuras de caída. Seguidamente, se determina en una forma más detallada las condiciones del flujo en el cuenco disipador por vertido libre, en función del calado aguas abajo. Posteriormente, siguiendo el recorrido del agua, se analiza el vertido libre, la disipación de energía en el aire y por la difusión del chorro en el colchón de agua del cuenco, para finalmente discutir y proponer una unificación de las formulaciones principales de las expresiones más conocidas, que determinan las presiones dinámicas medias en la zona de impacto de la solera.

- **Capítulo 3.** Se revisan las bases teóricas necesarias para la adquisición y tratamiento de la información experimental. Se definen los principales conceptos de variables aleatorias y procesos estocásticos; dándose un especial énfasis a estas definiciones, por ser la base de la metodología numérica propuesta. Se realiza una revisión del método convencional basado en la descomposición de Fourier, ya que constituye la herramienta propuesta para el análisis y tratamiento de señales. Se pone énfasis en los temas que más nos interesan desde un punto de vista práctico, como es el caso del teorema del muestreo que nos permite una correcta adquisición de datos y del método general del periodograma, que nos permite estimar las densidades espectrales univariantes y multivariantes. Finalmente, se presenta un resumen de los principales programas de tratamiento de datos experimentales, desarrollados y propuestos como una herramienta numérica para el estudio del campo de presiones en los disipadores de energía hidráulica.

- **Capítulo 4.** Se presenta la metodología experimental propuesta y se indican las características principales del equipo e instrumentación utilizados. Se comprueban los parámetros de las curvas de calibración de los transductores de presión, por medio de una calibración estática y se analiza la función de transferencia de estos transductores, por medio de una calibración dinámica. Para la calibración dinámica se propone una adaptación de la teoría de las funciones de transferencia con el fin de considerar el efecto de retardo que introduce el equipo utilizado. Seguidamente se presenta un resumen de los programas desarrollados y propuestos para el sistema de adquisición de datos. A continuación, se realiza una comprobación de la hipótesis de estacionariedad y ergodicidad asumida en los procesos estocásticos y finalmente, se describen los ensayos realizados.

- **Capítulo 5.** Se realiza un análisis y discusión de los resultados obtenidos al aplicar la metodología numérica y experimental descritas en los capítulos 3 y 4 respectivamente. Para ello, se comparan los resultados con los propuestos por otros autores, confirmándose en unos casos, complementándose y proponiéndose nuevas leyes en otros casos.

- **Capítulo 6.** Se presenta un resumen de las conclusiones y aportaciones más importantes obtenidos en este trabajo, así como propuestas de futuros desarrollos.

En este trabajo están contenidas tres revisiones bibliográficas. En el capítulo 1, se refiere a la disipación de energía hidráulica en general. En el capítulo 2, se refiere al vertido libre y disipación de energía hidráulica en las presas bóveda. En el capítulo 3, se refiere a las bases teóricas y numéricas del método convencional para el tratamiento de señales.

## CAPÍTULO 2

# EL VERTIDO LIBRE POR CORONACIÓN EN PRESAS BÓVEDA. DISIPACIÓN DE ENERGÍA Y PRESIONES EN LA SOLERA DEL CUENCO

### 2.1 Introducción

Un aspecto muy importante en el diseño de una presa, lo constituyen los órganos de seguridad "vertedero - disipador de energía", que permiten restituir al cauce natural el agua excedente del embalse.

El objetivo de los cuencos disipadores de energía hidráulica es eliminar gran parte de la energía de los flujos de alta velocidad; ya sea por fricción del agua con el aire, con la estructura disipadora o por fricción interna; por lo tanto, limitan las erosiones en el punto de restitución al cauce y proporcionan un régimen de circulación lo más estable posible, aguas abajo de aquel.

En la figura 2.1, se presenta las principales tipologías de los disipadores de energía hidráulica de las presas.

De todas estas tipologías, el vertido libre por coronación en presas bóveda (figura 2.1f), constituye una forma de disipación de energía simple, cómoda y económica. La descarga de los caudales excedentes se realiza al pie de la presa en un colchón de agua, pudiendo ser su fondo el cauce natural del río (caso de roca sana de buena calidad), o una solera de hormigón armado.

El estudio realizado en esta tesis se circunscribe a este tipo de disipador de energía, con solera de hormigón. Su misión consiste en retornar estos caudales excedentes al cauce del río, pero de una forma racional. Para esto, la vena líquida es guiada en un pequeño tramo de su recorrido a partir de la coronación de la presa; posteriormente cae libremente por la atmósfera hasta alcanzar el cuenco disipador, que se encuentra ubicado al pie de la presa y que está constituido por una solera de hormigón y un colchón de agua en donde la vena líquida se difunde.

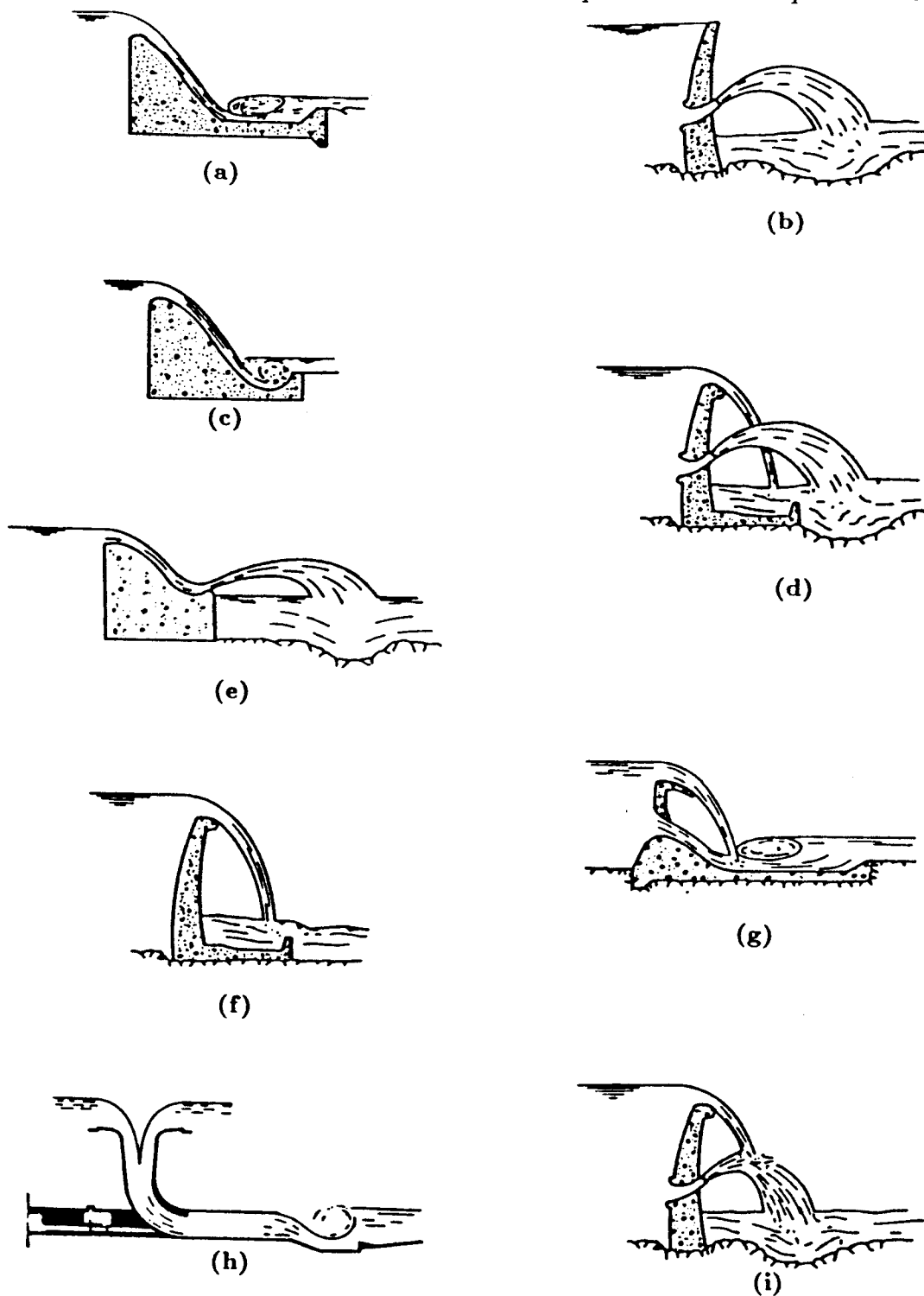


Figura 2.1 Tipología de los Disipadores de Energía Hidráulica de las Presas  
 (a) Por Resalto; (b) Salto de Ski de Medio Fondo; (c) Trampolín Sumergido;  
 (d) Lámina Libre y Medio Fondo; (e) Salto de Ski; (f) Lámina Libre;  
 (g) Lámina Libre y Compuerta de Fondo; (h) En Pozo con terminal de resalto;  
 (i) Chorros Cruzados entre Lámina Libre y Medio Fondo  
 De Lencastre [53]

A continuación se forma un resalto hidráulico ahogado, para posteriormente retornar al cauce del río a través del perfil hidrodinámico de la contrapresa (ver figura 2.2).

Todos los cuencos disipadores de energía, se encuentran sometidos a una fuerte acción erosiva, como consecuencia de las altas velocidades que se obtienen de la transformación de la energía potencial creada por el embalse. Además de estas acciones, se producen altas presiones hidrodinámicas, debido al efecto del impacto y deflexión del chorro turbulento sobre la solera.

De estas dos acciones, es más probable que las posibles erosiones en el cuenco disipador sean causadas por las presiones diferenciales causantes, entre otras cosas, del levantamiento y arrastre de las partículas sólidas, dentro del flujo.

El problema de la erosión de la roca por efecto de un chorro libre se puede evitar protegiéndola con una solera de hormigón. Un sistema de drenaje debajo de la solera forma parte fundamental de este cuenco, ya que controla el desarrollo de las presiones diferenciales, producida por la posible penetración de las presiones dinámicas a lo largo de las fisuras y juntas de la losa y de la roca [27].

Actualmente se presentan dudas a la hora de prever si la caída de un chorro de enorme potencia junto al pie de la presa, provocará erosiones serias en el lecho del río, o dañará la losa de la solera, o si las fluctuaciones de presión hidrodinámica en la zona de la caída del chorro provocará fuertes vibraciones en la cimentación, en el cuerpo de la presa, etc. Por tanto, aún existen muchos problemas por esclarecer en relación a la acción del chorro en el lecho del río, tanto a nivel teórico como práctico [23].

La acción destructiva del chorro sobre el lecho y márgenes es motivada por las presiones hidrodinámicas y a sus fluctuaciones, estrechamente relacionadas con la altura de la presa, el caudal descargado, la posición relativa de los chorros, etc. Así mismo, como es natural, juegan un papel muy importante las características geotécnicas y geológicas del lecho.

En el proyecto del cuenco, problemas importantes a resolver son el determinar las condiciones de acción mecánica del chorro y fijar la altura y longitud del colchón de agua. El diseño de estos cuencos disipadores es de carácter interactivo. Una vez que se define a nivel de prediseño la forma y dimensiones del vertedero y del cuenco disipador (altura del colchón y su longitud), se construye el modelo hidráulico, que determinará las presiones actuantes en solera, cajeros y contrapresa. Seguidamente, teniendo en cuenta dichas presiones y los costes económicos se modifican las dimensiones y geometría del cuenco disipador, al objeto de llegar a una solución adecuada.

Por lo tanto, del estudio del comportamiento hidráulico de estos cuencos se obtiene como resultado unas acciones, que necesita el proyectista para el diseño estructural.

En este capítulo, presentamos en primer lugar un análisis global de la disipación de energía hidráulica en la base de las estructuras de caída, en donde se definen las características generales de la disipación y la geometría del flujo. Seguidamente, se determinan de una forma más detallada, las condiciones del flujo en el cuenco disipador a pie de presa en función del calado aguas abajo.

Posteriormente, siguiendo el recorrido del agua, se analiza el vertido libre, la disipación de energía en el aire y por la difusión del chorro en el colchón de agua del cuenco; para finalmente, discutir las principales fórmulas que determinan las presiones dinámicas medias en la zona de impacto de la solera.

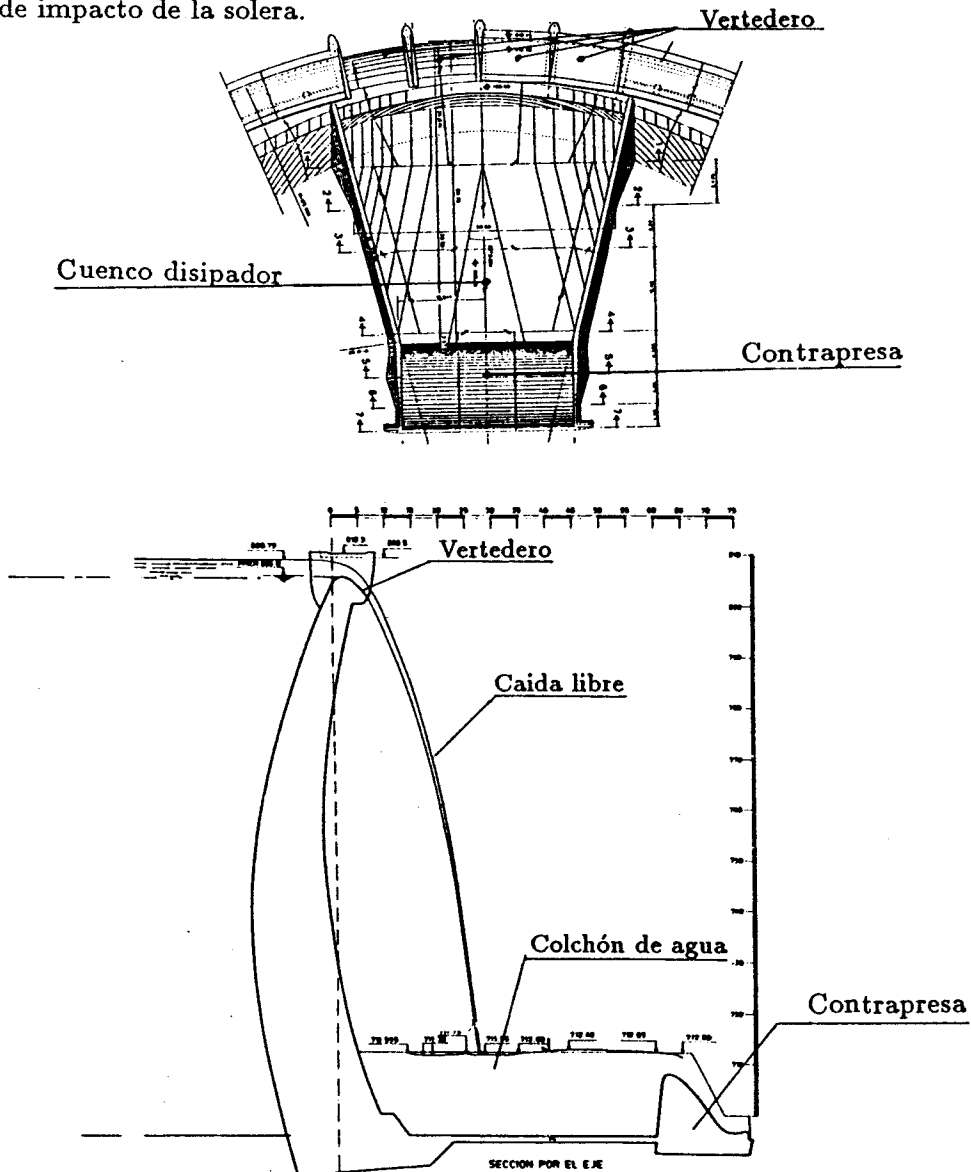


Figura 2.2 Planta y perfil del vertedero de la presa bóveda Llosa del Cavall, con su correspondiente disipador de energía a pie de presa.



## 2.2 Análisis global de la disipación energía en el vertido libre

La disipación de energía se produce por el frenado del aire y la emulsión en la caída, por la difusión del chorro en el colchón de agua y durante el chorro de pared. El impacto contra la solera y la contrapresa crea un flujo altamente turbulento con elevada disipación de energía. La energía de impacto contra la contrapresa puede llegar a ser importante, si la longitud del cuenco disipador no es suficiente para albergar el resalto hidráulico correspondiente y por tanto, el chorro de pared incide en la contrapresa con una velocidad elevada.

### 2.2.1 Características generales del flujo en el cuenco

Moore [66], realiza un estudio teórico-experimental de la disipación de energía bidimensional en la base de las estructuras de caída vertical.

Considera a la energía  $H_1$  en la base de la caída, como la suma de la carga de velocidad media  $v_1$ , más el calado promedio del flujo en dicha sección  $y_1$ .

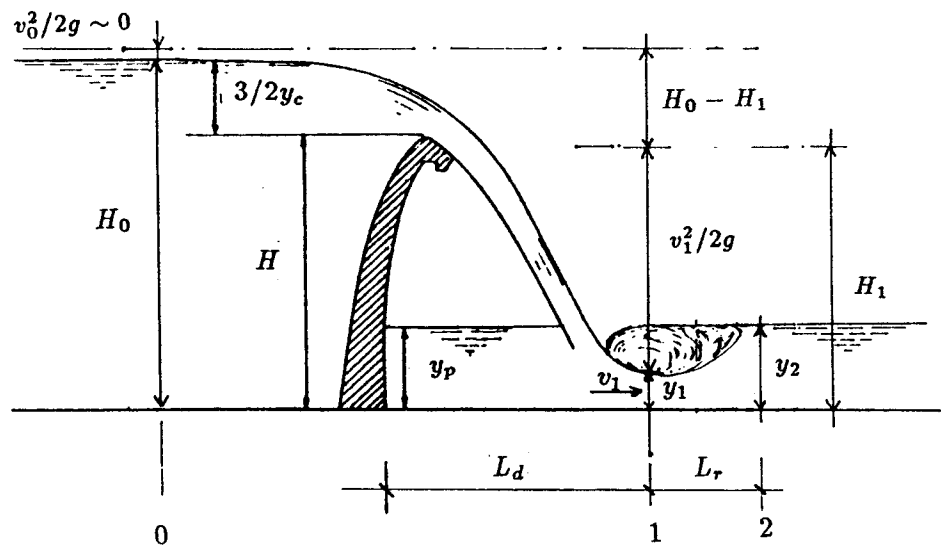


Figura 2.3 Magnitudes principales en los disipadores de energía hidráulica a pie de presa

En la figura 2.4a, se presentan los valores experimentales de  $H_1/y_c$  en función de  $H/y_c$ , confrontándose con los valores obtenidos por la aplicación de la ecuación de la energía sin considerar pérdidas de carga, es decir (ver figura 2.3):

$$H_1 = H + \frac{3}{2}y_c \quad (2.1a)$$

$$H_1 = \frac{H_0}{y_c} = \frac{H}{y_c} + \frac{3}{2} \quad (2.1b)$$

donde:

$y_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ ... Calado crítico en una sección rectangular

$H$ ... Altura de caída

$H_1$ ... Energía total en la base de la caída

$q$ ... Caudal unitario

$g$ ... Aceleración de la gravedad

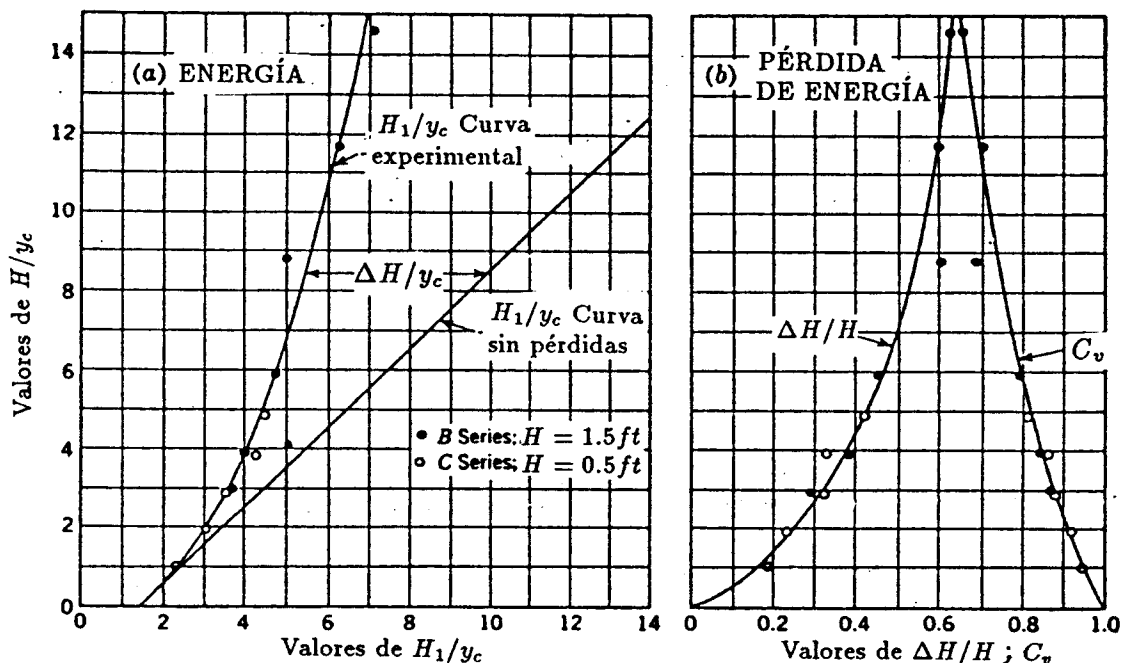


Figura 2.4 Energía en la base de una caída vertical:

(a) Energía teórica y experimental. (b) Pérdida de energía y coeficiente de velocidad  
(De Moore [66])

La diferencia entre las curvas teórica y experimental representa la pérdida de energía dividida por el calado crítico,  $\Delta H/y_c$ .

En la figura 2.4b, se presenta el efecto de  $H/y_c$  sobre la pérdida de energía. Podemos observar que se puede disipar hasta las dos terceras partes de la altura de caída ( $66\%H$ ).

Se consigue incrementar la disipación de energía de un caudal y una altura de caída determinada, aumentando el ancho del vertedero, lo que significa una reducción del calado  $y_c$ .

También en la figura 2.4b, se presentan los valores del coeficiente de velocidad  $C_v$  en función de  $H/y_c$ .

La velocidad media real en la base de la caída se expresa como:

$$v_1 = C_v \sqrt{2g(H_0 - y_1)} \quad (2.2)$$

en donde la energía total en el embalse es  $H_0 = H + 3/2y_c$  (ver figura 2.3).

Si a la ecuación (2.2) le reemplazamos el valor de  $H_0$ , además introducimos la ecuación de continuidad  $v_1 y_1 = \sqrt{g y_c y_c}$  y reordenando los términos, obtenemos la siguiente ecuación cúbica:

$$\left(\frac{y_c}{y_1}\right)^3 - C_v^2 \frac{y_c}{y_1} \left(\frac{2H}{y_c} + 3\right) + 2C_v^2 = 0 \quad (2.3)$$

→ A partir de esta ecuación y teneiendo en cuenta el valor de  $C_v$  (figura 2.4b), se puede calcular  $y_1$ . La energía,  $y_1 + v_1^2/2g$ , puede calcularse teniendo en cuenta la ecuación (2.1). Este procedimiento es menos práctico que el uso de la figura 2.4a, la cual, directamente nos da el contenido de la energía en la base de la caída.

El calado de agua correspondiente al pozo de acumulación  $y_p$  se determina a partir de la aplicación del teorema de la cantidad de movimiento y cuya ecuación resultante es:

$$\left(\frac{y_p}{y_c}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{y_c}\right)^2 + 2\left(\frac{y_c}{y_1}\right) - 3 \quad (2.4)$$

Esta expresión concuerda con los resultados experimentales realizados por Moore [66], tal como puede observarse en la figura 2.5a.

El calado conjugado ( $y_2$ ), se puede calcular a partir de ( $y_1$ ), por medio de la conocida expresión de calados conjugados que para el caso de una sección rectangular:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8F_1^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + 8\left(\frac{y_c}{y_1}\right)^3} - 1 \right] \quad (2.5a)$$

en donde:

$y_1$  y  $y_2$ ... Calados conjugados del resalto hidráulico

$F_1 = v_1/\sqrt{gy_1}$ ... Número de Froude en la sección contraída

Esta expresión se puede poner en la forma:

$$\frac{y_2}{y_c} = \frac{y_1}{2y_c} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8\left(\frac{y_c}{y_1}\right)^3} \right] \quad (2.5b)$$

Moore [66] realiza la comprobación experimental de estas ecuaciones. Se puede observar el buen ajuste de esta comprobación experimental en la figura 2.5b.

El perfil longitudinal del resalto hidráulico producido en la base de una caída es semejante al producido por un chorro horizontal, aunque un poco más inclinado en la zona inicial y cerca de un (20%) más extenso [54], [66].

Para valores del calado aguas abajo superiores al calado  $y_2$  se produce una sumergencia del resalto hidráulico, lo que implica mayores velocidades junto al fondo [66].

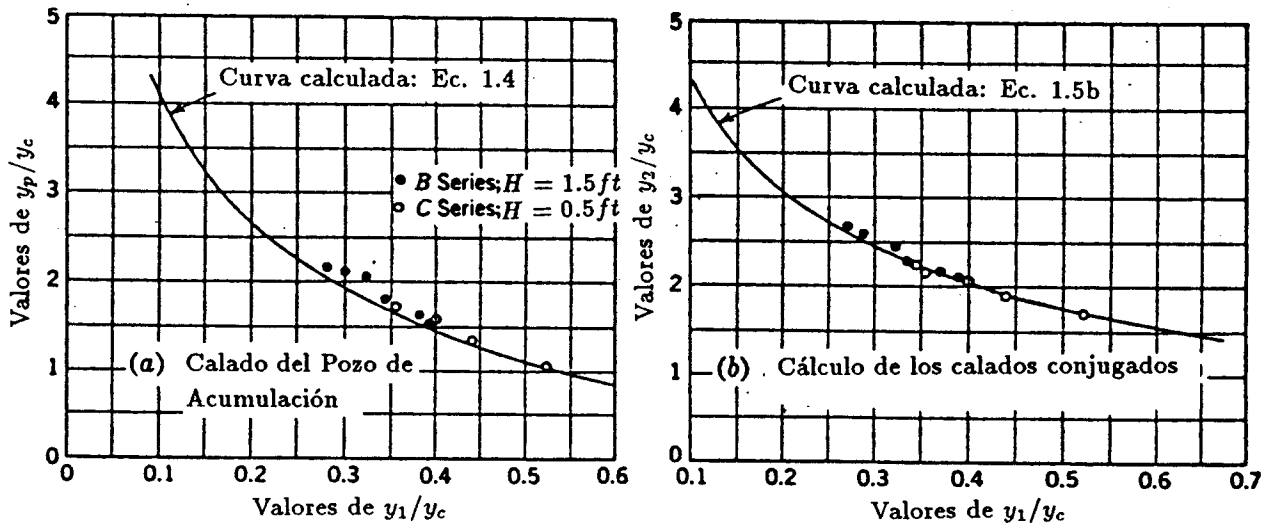


Figura 2.5 Curvas de las ecuaciones del momentum: (a) Calado del pozo de acumulación  $y_p$  (ec.2.4). (b) Calados conjugados  $y_1$  y  $y_2$  (ec.2.5) De Moore [66]

W. Rand [86], basándose en los datos experimentales de Bakhmeteff y Feodoroff [9], Moore [66] y sobre sus propios resultados, encontró que la geometría del flujo en las estructuras de caída se pueden describir como funciones de un parámetro adimensional, denominado número de caída, el cual se define como:

$$D = \frac{q^2}{gH^3} \quad (2.6)$$

En donde:

$D$  ... Número de caída

$q$  ... Caudal unitario

$H$  ... Altura de caída

$g$  ... Aceleración de la gravedad

Estas relaciones geométricas son las siguientes:

$$\frac{L}{H} = 4.30D^{0.27} \quad (2.7b)$$

$$\frac{y_p}{H} = 2.00D^{0.22} \quad (2.7c)$$

$$\frac{y_1}{H} = 0.54D^{0.425} \quad (2.7d)$$

$$\frac{y_2}{H} = 2.66D^{0.27} \quad (2.7e)$$

En donde (ver figura 2.3):

$L$  ... Longitud del pozo de acumulación en las estructuras de caída

$y_p$  ... Calado del pozo de acumulación

$y_1$  y  $y_2$  ... Calados conjugados del resalto hidráulico

La longitud del pozo de acumulación  $L_d$  en las presas bóveda depende a más de la ecuación de caída libre [94], del grado de curvatura de la presa y de la forma del aliviadero [54]. Por tanto, la longitud del cuenco disipador  $L_c$  debe ser igual a la longitud del pozo de acumulación  $L_d$ , más la longitud del resalto hidráulico libre  $L_r = 6.9(y_2 - y_1)$ , así: [ $L_c = L_d + L_r$ ].

Se debe destacar que estos resultados se pueden aplicar solamente a nivel de prediseño; así, podemos definir las dimensiones del modelo hidráulico del prototipo en estudio. Las características y dimensiones finales del cuenco disipador de energía resultarán de los análisis de los resultados de los ensayos realizados en este modelo.

### 2.2.2 Condiciones del flujo en el cuenco en función del calado aguas abajo

Las condiciones de flujo en la solera del cuenco, puede clasificarse de acuerdo al calado aguas abajo  $y_b$ , en tres tipos diferentes (Ver figura 2.6):

**Tipo I:**  $y_b < y_2$

El calado de aguas abajo  $y_b$  es inferior al calado  $y_2$  preciso para crear un resalto. En estas condiciones no se forma un verdadero colchón aguas abajo del punto de caída; sin embargo, aguas arriba de este punto se forma un colchón de agua de espesor  $y_p$ , creando en la zona de caída del chorro un calado  $y_{c0}$ , el cual constituye un colchón eficaz.

**Tipo II:**  $y_b > y_2$

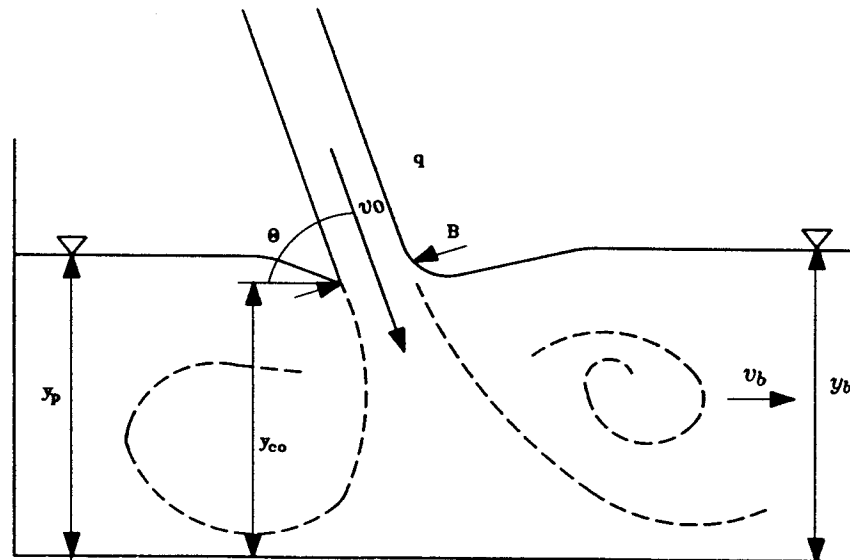
Se forma un resalto hidráulico ahogado de modo que, tanto aguas arriba como aguas abajo del punto de caída, se obtienen colchones de agua verdaderos.

Para obtener este tipo de flujo, se debe verificar que  $y_{c0}/B < 20$ , donde  $B$  es el espesor del chorro a la entrada del cuenco [3] (ver figura 2.6).

**Tipo III:**  $y_{c0}/B > 20$

La inclinación de la superficie libre, aguas arriba y aguas abajo del punto de caída, disminuye rápidamente; la diferencia entre  $y_{c0}$  y  $y_b$  tiende a cero.

En las obras reales, en donde exista o no una solera artificial, suele garantizarse las condiciones de flujo Tipos II o III.



**Figura 2.6** Condiciones de flujo en la solera, de acuerdo al calado aguas abajo  $y_b$   
(De Cui Guang Tao... [23])

Para obtener el calado aguas arriba  $y_p$ , en función del calado aguas abajo  $y_b$  (flujos tipos II y III), se aplica el teorema de la cantidad de movimiento entre estas dos secciones (ver figura 2.6), sumándose un término adicional correspondiente a las fuerzas de resistencia del flujo; esto es:

$$\rho q v_0 \cos \theta_0 + \frac{1}{2} \rho g y_p^2 = \rho q v_b + \frac{1}{2} \rho g y_b^2 + \beta_0 \rho q v_0 \cos \theta_0 \quad (2.8a)$$

Haciendo  $\beta = 1 - \beta_0$  y reordenando, tenemos:

$$\frac{y_p}{y_b} = \sqrt{1 - 2F_b \left[ \left( \frac{v_0}{v_b} \right) \beta \cos \theta_0 - 1 \right]} \quad (2.8b)$$

En donde,  $F_b = v_b^2 / g y_b$  representa el cuadrado del número de Froude en la sección aguas abajo;  $\beta_0$  es un coeficiente al que se le puede atribuir el sentido físico de tomar en cuenta las pérdidas de carga continuas.

Cui Guang Tao... [21], presentan los resultados del cálculo de  $\beta$ , por medio de la ecuación 2.8b), a partir de valores experimentales de  $y_p$ . Estos valores se encuentran entre 0.5 y 0.7, pudiendo considerarse un valor medio de 0.6. Ver figura 2.7

Las expresión 2.8b y la figura 2.7 nos permiten calcular  $y_p$ .

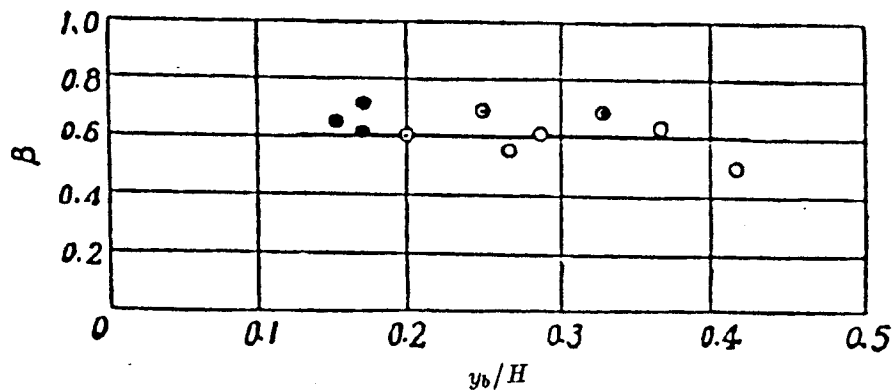


Figura 2.7 Relación entre  $\beta$  y  $y_b/H$   
(De Cui Guang Tao... [21])

La curva de la figura 2.8, corresponde a un valor de  $\beta = 0.6$  y como se ve, los resultados analíticos y experimentales tienen un buen ajuste, para el modelo particular analizado.

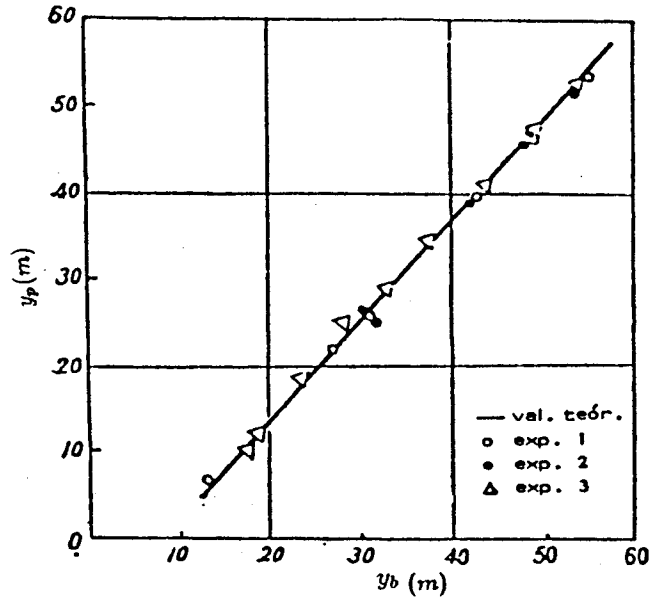


Figura 2.8 Valores teóricos y experimentales de  $y_p$   
(De Cui Guang Tao... [21])

El cálculo de  $y_{c0}$  se realiza utilizando un método aproximado. Para aplicar el teorema de la cantidad de movimiento entre las secciones correspondientes a  $y_{c0}$  y  $y_b$ , es preciso tener en cuenta la influencia de los vórtices, las inclinaciones de la superficie libre correspondientes en esas secciones, así como dos términos adicionales correspondientes a la resistencia del flujo y a la no distribución uniforme de velocidades en la sección de calado  $y_{c0}$

Así, tenemos que:

$$\rho q v_0 \cos \theta_0 + \frac{\rho g y_{c0}^2}{2} + \alpha \rho q v_0 = \beta_0 \rho q v_0 \cos \theta_0 + \rho q v_b + \frac{\rho g y_b^2}{2} \quad (2.9a)$$

En donde  $\beta$  tiene el mismo sentido que en la ecuación 2.8b, en tanto que  $\alpha$ , es un coeficiente que refleja la no distribución uniforme de velocidades. Por tanto:

$$\frac{y_{c0}}{y_b} = \sqrt{1 - 2F_b \left[ \left( \frac{v_0}{v_b} \right) \beta \left( \frac{\alpha}{\beta} + \cos \theta_0 \right) - 1 \right]} \quad (2.9b)$$

El valor de  $y_{c0}$  es muy difícil de determinar experimentalmente, de modo que no se puede obtener  $\alpha$ , en la misma forma que se obtuvo  $\beta$ .

La ecuación (2.9b), se ajusta razonablemente a los datos experimentales, cuando  $\alpha/\beta = 1$  [3], [21].



## 2.3 Vertido libre

En la literatura especializada, este tema contempla dos grandes grupos de estudios: **un primer grupo**, resultante de estudios en modelos reducidos, que producen información muy concreta sobre las características de desagüe de los vertederos y la forma de la lámina vertida; **el segundo grupo**, tiene en cuenta los efectos de escala que difícilmente se evitan en un modelo de laboratorio y por tanto, proponen coeficientes de corrección para ajustar los resultados del estudio en el modelo.

La mayoría de investigadores que analizan los efectos de escala concretan sus estudios sobre los vertederos de trampolín, dado que el vuelo y la velocidad inicial del chorro son de magnitudes considerables. En el caso del vertido libre, los efectos de escala son de menores proporciones; sin embargo, a pesar de que los resultados obtenidos en laboratorio están del lado de la seguridad, es necesario realizar mas estudios, tanto en modelos como en prototipos, para llegar a cuantificar con mayor precisión las acciones actuantes en el cuenco disipador.

### 2.3.1 Características de los aliviaderos y forma de la lámina vertida

Lencastre [54], estudia en modelo el vertido de diferentes formas de aliviaderos en coronación de presas bóvedas. Señala que las diferencias entre modelo y prototipo generan errores no despreciables.

Realiza ensayos en 27 aliviaderos con perfiles propuestos por el U.S. Corps of Engineers [104] y el U.S. Bureau of Reclamation [106], con distintas cargas hidráulicas, con y sin compuertas. Se adjuntan los gráficos de resultados (figuras 2.10 a 2.12), referidos a las siguientes ecuaciones (ver figura 2.9):

$$x = \frac{-tg\theta + \sqrt{tg^2\theta + 2yS}}{S} \quad (2.10a)$$

$$S = \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta} \quad (2.10b)$$

donde:

$g$  . . . aceleración de la gravedad

$v_0$  . . . velocidad inicial de caída

$\theta$  . . . ángulo de salida con respecto a la horizontal

$H$  . . . carga de análisis

$H_d$  . . . carga de diseño

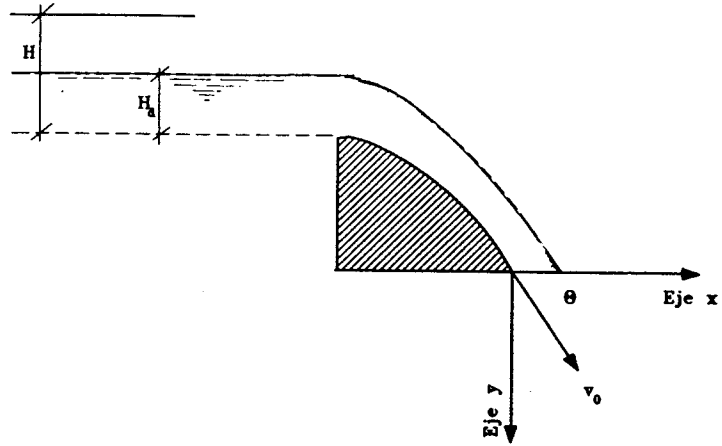


Figura 2.9 Sistema de referencia de los ábacos de diseño de Lencastre [54]

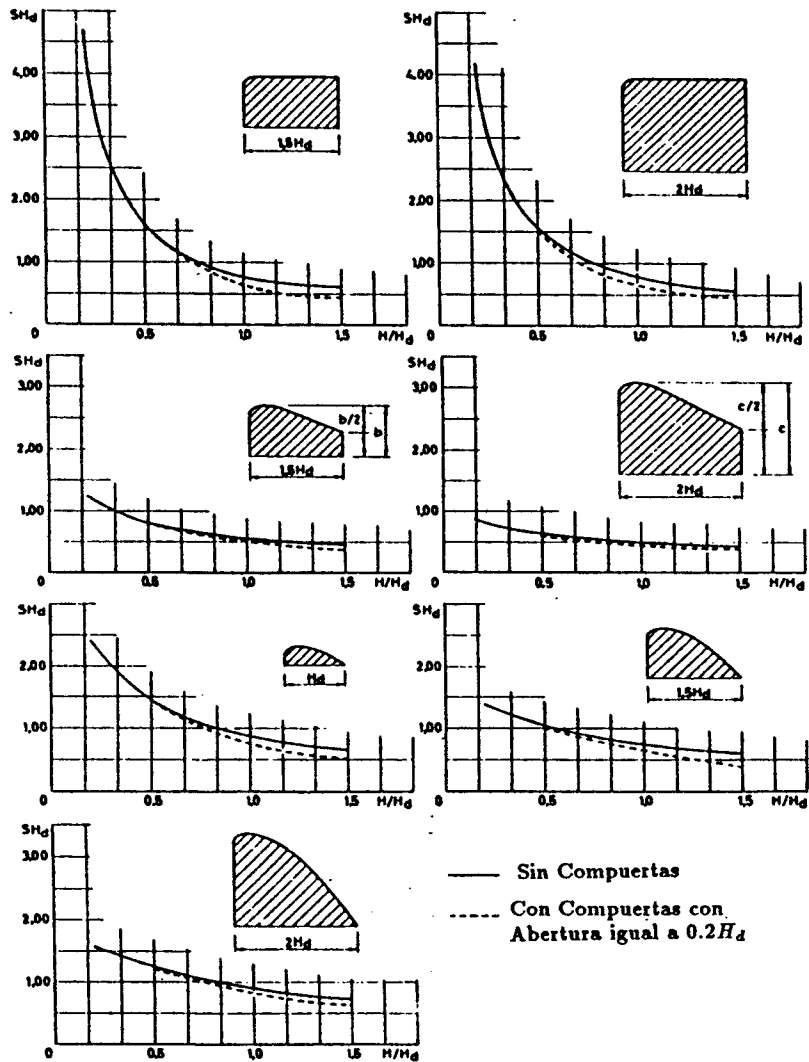


Figura 2.10 Valores de "S" para perfiles con un paramento aguas arriba vertical (De Lencastre [54])

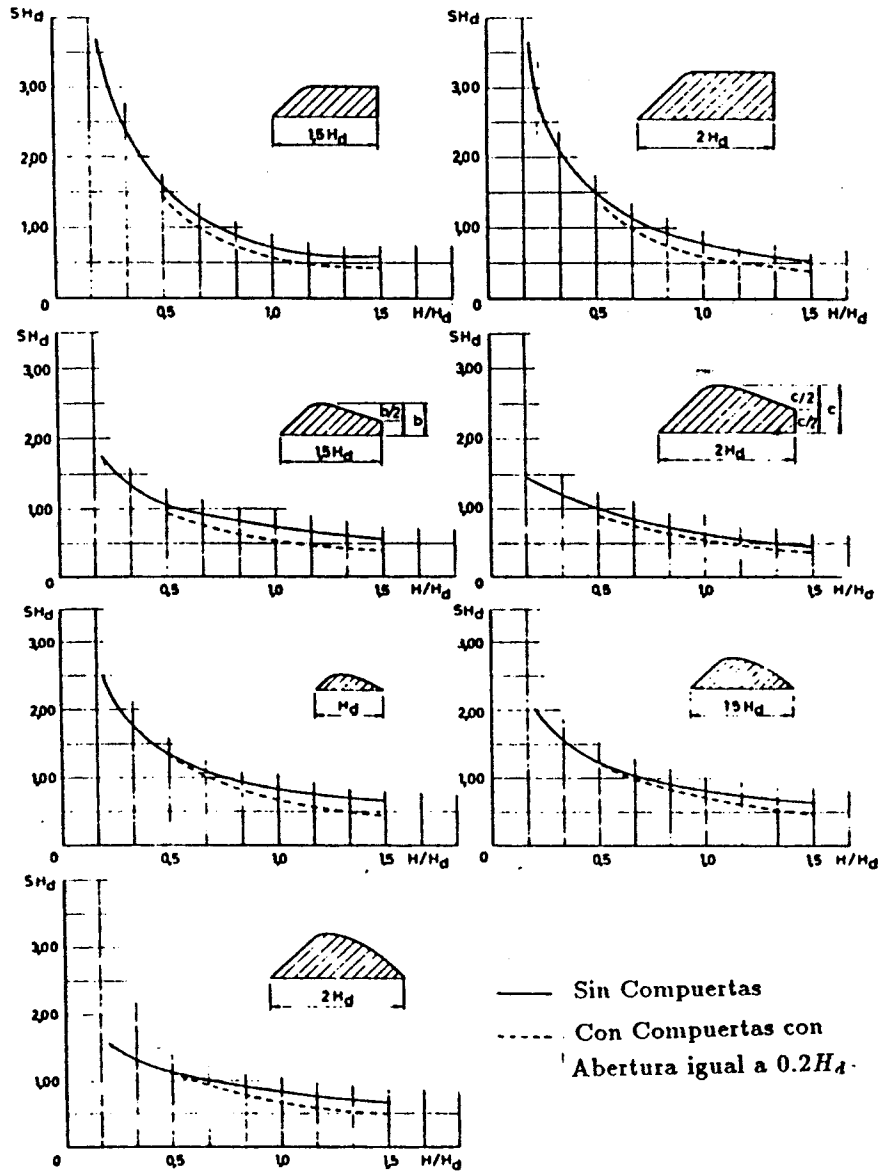


Figura 2.11 Valores de "S" para perfiles con un paramento aguas arriba de pendiente 1/1 (De Lencastre [54])

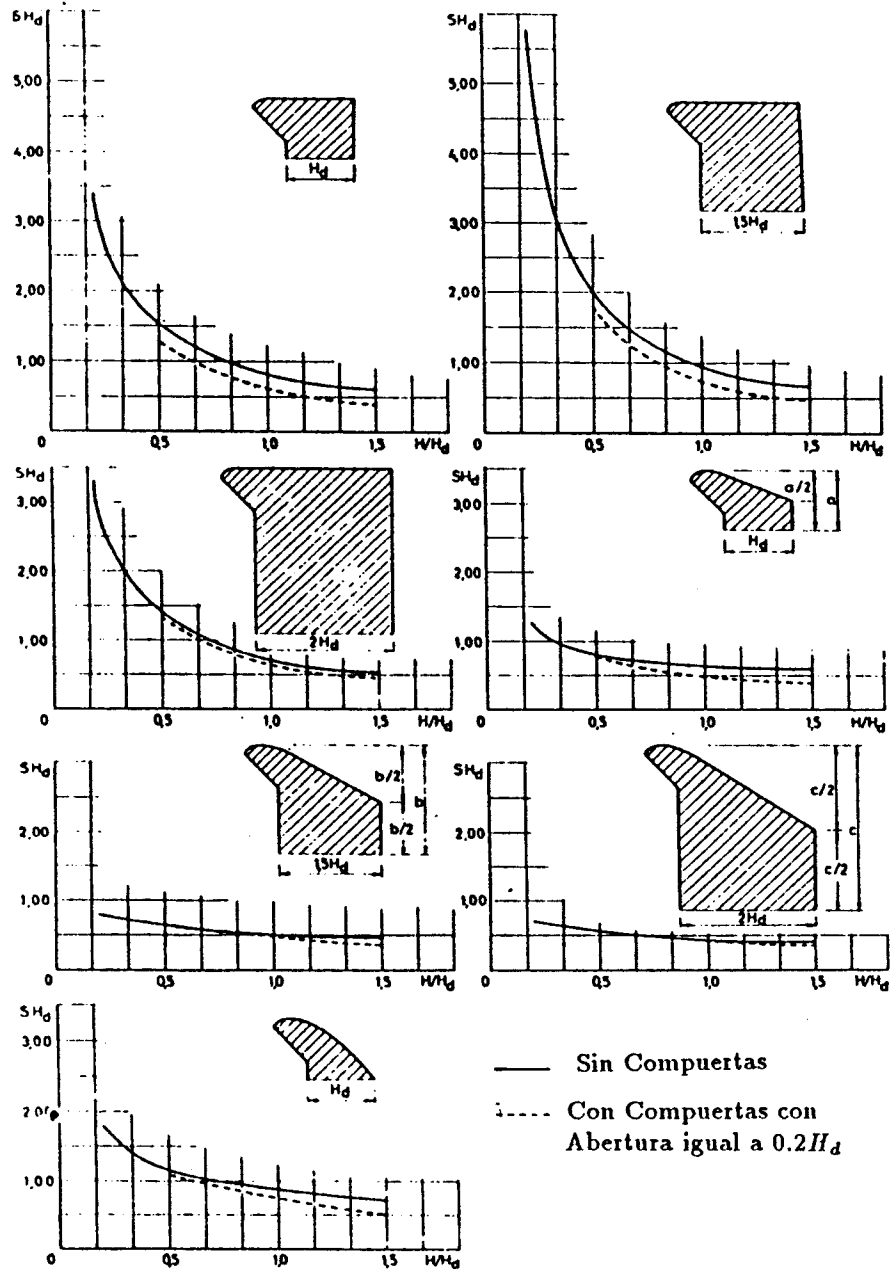


Figura 2.12 Valores de "S" para perfiles con un paramento aguas arriba de contra-pendiente 1/1 (De Lencastre [54])

Scimemi [94], trata con gran detalle la forma del vertido, a partir de un vertedero de pared delgada sin contracción lateral. Expresa la forma del vertido, en función de las siguientes ecuaciones:

**Lado Inferior**

$$y = \left( \frac{x - 0.10}{2.550} \right)^2 + 0.062x - 0.186 \quad ; \quad x > 0.50 \quad (2.11a)$$

**Eje de Lámina**

$$y = \left( \frac{x + 1}{2.155} \right)^{2.33} - 1 \quad ; \quad x > 2.00 \quad (2.11b)$$

**Lado Superior**

$$y = \left( \frac{x - 0.70}{2.420} \right)^2 \quad ; \quad x > 2.40 \quad (2.11c)$$

Donde:  $x = \frac{X}{H}$ ,  $y = \frac{Y}{H}$ , siendo  $X, Y, H$  los valores indicados en la figura 5.13.

Estos resultados son válidos, siempre que no exista efectos de escala en el vertido.

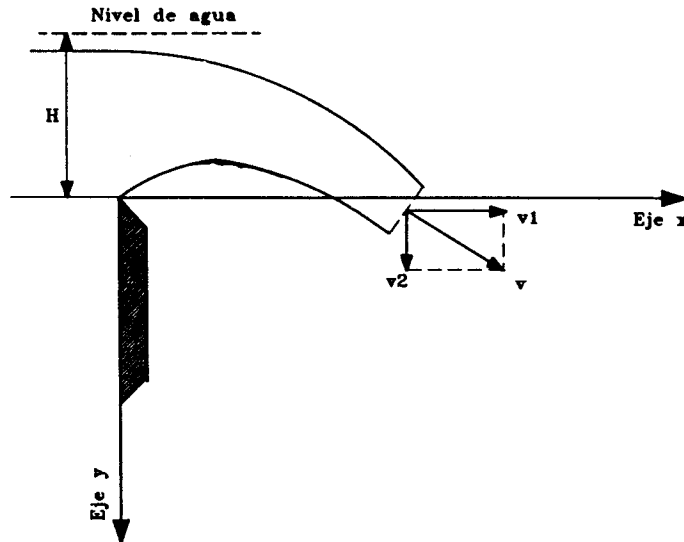


Figura 5.13 Coordenadas de referencia, para las fórmulas de Scimemi

### 2.3.2 Fases del vuelo del chorro a través de la atmósfera y efectos de escala

La caída del agua a través de la atmósfera, se estudia a partir de la teoría de los chorros turbulentos libres [82].

En general, la geometría del chorro que cae libremente se modifica por efecto de la aireación y posterior atomización disminuyendo su núcleo central compacto y aumentando al mismo tiempo la zona de agua atomizada

**Ervine y Falvey [29]**, resumen las características de los chorros turbulentos libres en la siguiente forma (ver figura 2.14):

\* La intensidad de turbulencia inicial (inducida por las condiciones de aproximación del agua del embalse a la presa y la forma del vertedero), determina el ángulo de difusión lateral del chorro. Así, si una partícula de agua en el borde del chorro experimenta una velocidad axial media  $U$ , y una velocidad de fluctuación lateral de raíz cuadrática media  $v_f = \sqrt{v'^2}$ , entonces el ángulo resultante del movimiento es proporcional a  $\tan(v_f/U)$ . Una estimación inicial nos da que:

$$v_f/U_0 \sim 0.4 - 0.5u_f/U_0$$

en donde  $u_f = \sqrt{u'^2}$  es la raíz cuadrática media de las velocidades de fluctuación longitudinal, en tanto que  $U_0$  es la velocidad media longitudinal en el inicio de la aireación.

\* Si se conoce el ángulo exterior de difusión del chorro en el aire  $\delta_2$ , entonces por continuidad, se puede determinar el ángulo interno de disminución del núcleo central del chorro  $\delta_1$ . Este puede ser del orden del 15 - 20% de  $\delta_2$ ; siendo valores típicos de  $\tan\delta_1$  de 1/2 - 1%.

\* La ley de probabilidad de atomización lateral del chorro viene dada aproximadamente por una distribución gaussiana.

\* La longitud de desintegración  $L_s$  del chorro, o rompimiento eventual en caída libre, está dado por la siguiente relación:  $L/d_0 \sim 50 - 100$ ; en donde  $d_0$  es el espesor del chorro al inicio de la aireación. Así pues, en esta distancia el núcleo central del chorro habrá desaparecido completamente.

\* La aireación de la superficie libre ocurrirá, cuando la raíz cuadrática media de las velocidades de fluctuación longitudinal en el borde del chorro sea  $u_f \sim 0.275m/s$ , o la velocidad del chorro  $U \sim 0.275u_f/(u'/U)$

En base a los valores indicados anteriormente, se propone el esquema simplificado de las fases del vuelo de un chorro turbulento a través de la atmósfera el mismo que puede verse en la figura 2.15.

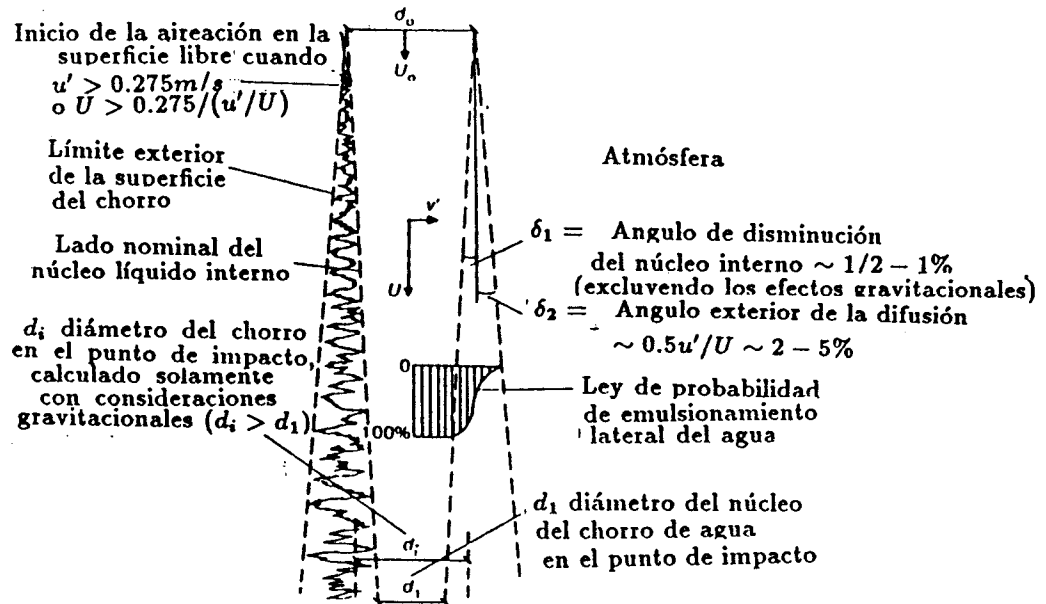


Figura 2.14 Características de un chorro turbulento a través de la atmósfera (De Ervine y Falvey [29])

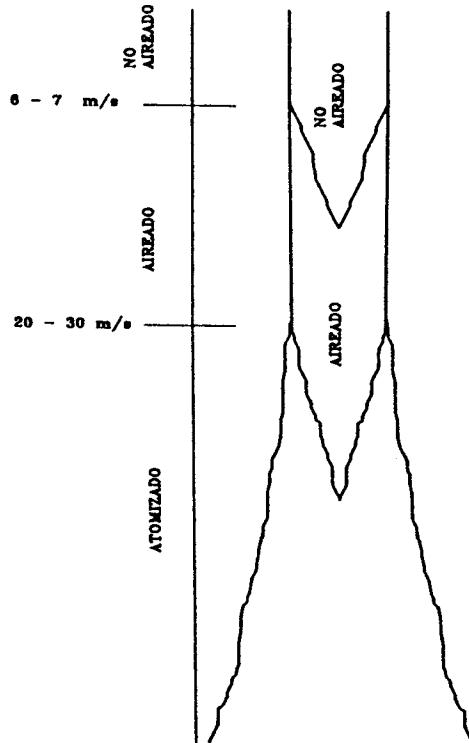


Figura 2.15 Fases del vuelo de un chorro turbulento

A continuación describimos en forma general, las diversas fases del vuelo del chorro a través de la atmósfera (Ver figura 2.15):

#### **Primera Fase: Chorro turbulento no aireado**

En tanto no se inicie la aireación del chorro, se tiene una caída libre de agua con una intensidad de turbulencia, que depende del vertedero y la forma de aproximación al mismo desde aguas arriba.

#### **Segunda Fase: Aireación del chorro**

La velocidad relativa entre el chorro turbulento y el aire aumenta la turbulencia; los esfuerzos provocados por la turbulencia en la superficie del chorro vencen a la tensión superficial, por lo que se introducen burbujas en el chorro. Con una turbulencia inicial baja, esta segunda fase se inicia cuando el chorro alcanza una velocidad de 6 o 7m/s [29].

#### **Tercera Fase: Chorro turbulento aireado**

El chorro, ya aireado, va ganando velocidad. El efecto de introducción del aire en el chorro, apenas elimina energía al flujo.

#### **Cuarta Fase: Atomización del chorro**

La sucesiva aireación y el incremento de velocidad relativa entre el chorro y el aire, llegan a provocar el arranque de gotas de agua. Estas gotas pronto serán frenadas y alcanzarán su velocidad límite de caída libre en el aire. Se puede decir que no afectarán al cuenco dissipador. Sin embargo, algunos investigadores [42], [73], han estudiado este fenómeno, junto con el de las salpicaduras y los definen como efectos nocivos para el funcionamiento de las centrales hidroeléctricas.

El inicio de esta fase se da para velocidades de caída entre 20 y 30m/s [29].

#### **Quinta Fase: Chorro atomizado**

Todo el chorro se ha ido desintegrando y tenemos, en el cuenco, una amplia zona de lluvia.

Ervine y Falvey [29], muestran con claridad la imposibilidad de modelar la rotura del chorro, ya que el criterio de rotura reside en que la energía cinética turbulenta sea mayor que la energía producida por la tensión superficial:

$$\frac{1}{2}\rho v_f^2 > \frac{2\sigma}{R} \quad (2.12)$$



Para una misma intensidad de turbulencia en modelo y prototipo [ $T_u = u_f/U = Kv_f/U$ ],  $v_f$  será distinta, mientras que la tensión superficial interfacial  $\sigma$  y el radio de curvatura  $R$  son los mismos, razón por la cual no se podrá dar la atomización, en puntos semejantes.

Wallis [110], propone el siguiente número adimensional para tratar el arranque de gotas de un líquido por efecto de un gas con velocidad relativa a la superficie del líquido.

$$\pi = \frac{v_r \mu_g}{\sigma} \left( \frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

en donde:

$v_r$ ... velocidad relativa líquido-gas

$\mu_g$ ... viscosidad del gas

$\sigma$ ... tensión superficial líquido-gas

$\rho_g$  y  $\rho_l$ ... densidades del gas y del líquido, respectivamente.

Wallis indica que  $\pi = 2.46 \cdot 10^{-4}$ , es un valor crítico para el inicio del arranque de las gotas en condiciones normales; tratándose de aire y agua ello supone una velocidad relativa de unos 22m/s.

Cuando deseamos estudiar la caída de chorros turbulentos en modelos hidráulicos contruidos con la ley de semejanza de Froude, uno de los aspectos más importantes que se deben analizar es la simulación del estado del chorro en el punto de impacto con el cuenco disipador (grado de aireación y atomización).

En efecto, las propiedades físicas de los chorros en este punto son muy importantes en el análisis del campo de presiones en el cuenco disipador de energía.

Estos aspectos han sido claramente expuestos en algunas investigaciones de laboratorio llevados a cabo en modelos a diferentes escalas.

Lemos y Ramos [52], comparan los resultados obtenidos en dos modelos, contruidos con la ley de similitud de Froude (Escala 1:20 1:50) y encuentran una gran diferencia del comportamiento del chorro. Los valores de las presiones media y máxima fueron alrededor de cuatro veces más bajas en el modelo a escala 1:20.

Un conocimiento claro de los mecanismos de entrada de aire en la caída de los chorros turbulentos aún no ha sido desarrollado.

De acuerdo a Ervine [28], las relación de los flujos de aire/agua ( $Q_{air}/Q$ ), obedece a la siguiente ecuación de tipo experimental (ver figura 2.16):

$$\beta_f = \frac{Q_{air}}{Q} = 0.26 \frac{b}{B_p} \left(\frac{H}{B}\right)^{0.446} \left(1 - \frac{v_{air}}{v_i}\right) \quad (2.14)$$

donde:

$Q_{air}$  Caudal de flujo de aire del chorro en la superficie libre del cuenco dissipador

$Q$  ... Caudal de agua descargada

$B$  ... Espesor del chorro

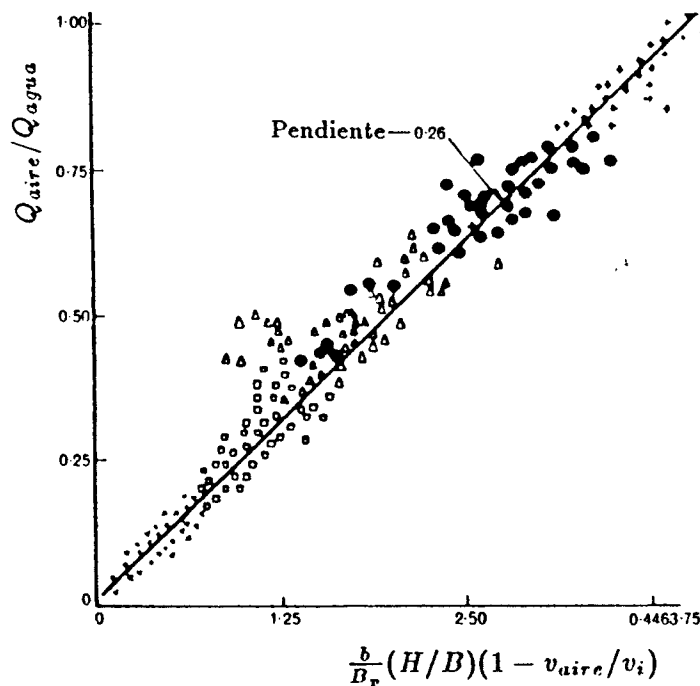
$b$  ... Ancho del chorro

$B_p = 2(b + B)$  ... Perímetro del chorro

$H$  ... Altura de caída o de la presa

$v_i$  ... Velocidad del chorro en el área de impacto

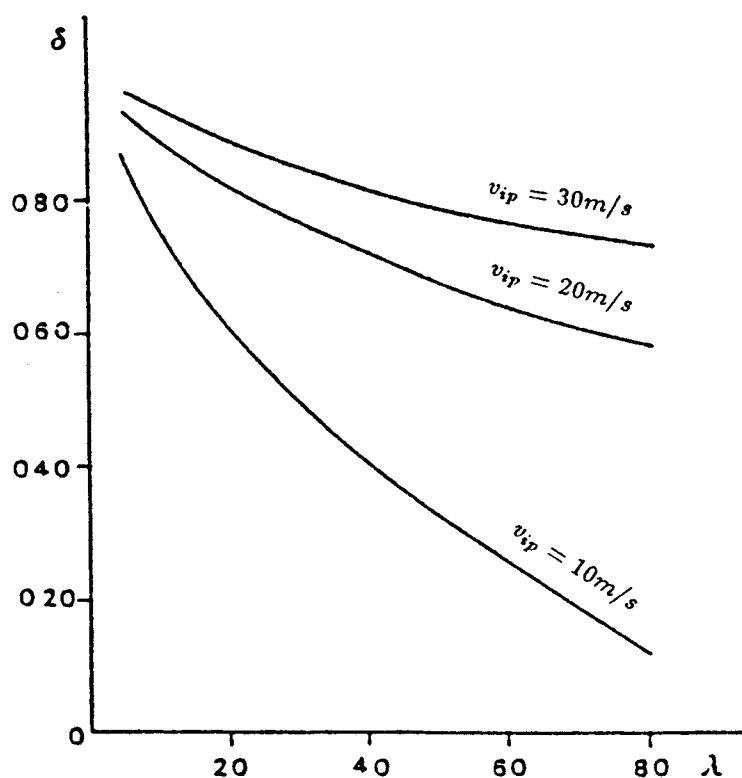
$v_{air}$  ... Velocidad crítica para la entrada del aire



**Figura 2.16** Resultados experimentales que define las relaciones de los flujos de aire y agua ( $Q_{air}/Q$ ), con las características del chorro (De Ervine [28])

Según Ervine [28], la velocidad crítica para la entrada de aire  $v_{air}$  es más o menos constante con el diámetro del chorro, pero varía considerablemente con el incremento del nivel de turbulencia del chorro. Para una intensidad de turbulencia del 3%, el valor de  $v_{air}$  es aproximadamente de  $2.0m/s$ .

La figura 2.17, se obtiene considerando modelos de diferente escala, operados de acuerdo a la ley de similitud de Froude, con diferentes valores de velocidad de chorro en prototipo en el área de impacto, y con la aplicación de la ecuación 2.14.



**Figura 2.17** Influencia de la escala del modelo y la velocidad en el área de impacto en la similitud de la entrada de aire. Relación válida para  $B > 20mm$  (De Ramos [83])

En esta figura,  $\delta$  representa la relación entre  $\beta_m$  y  $\beta_p$ , donde  $m$  y  $p$  corresponde a los valores de modelo y prototipo y  $\lambda$  es la escala geométrica.

Del análisis de la figura 2.17, podemos observar que con modelos de similitud de Froude, el fenómeno de entrada de aire se simula correctamente, solamente con escalas geométrica 1 : 5 o mayores. El valor de la velocidad del chorro en el impacto se debe considerar en la definición de las escalas geométricas.

## 2.4 Flujo del chorro en el interior del cuenco

El flujo del chorro en el interior del cuenco se puede clasificar en forma general, en tres zonas de naturaleza muy diferente (ver figura 2.18):

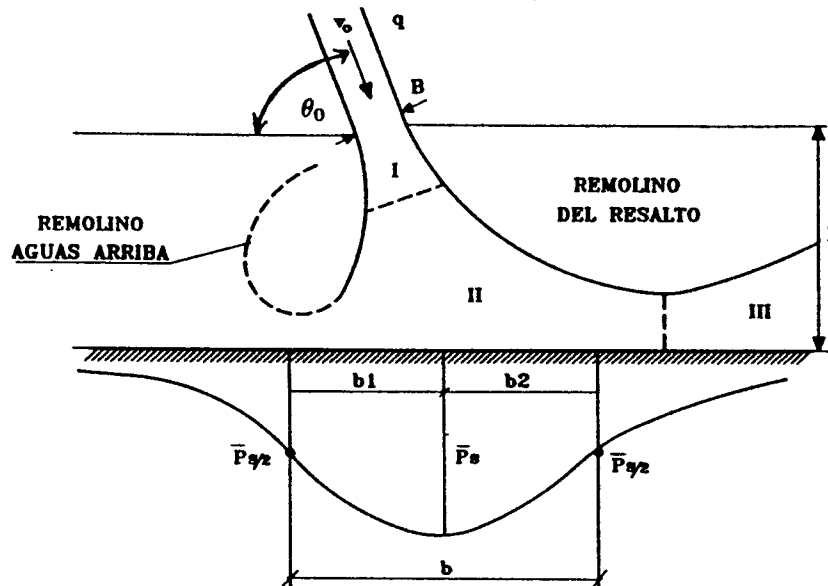


Figura 2.18 Zonas del flujo del chorro dentro del colchón de agua  
(De Xu Duo-Ming... [114])

### Zona I: Zona de lámina libre

En la que el escurrimiento tiene características análogas a la caída libre; presenta un ensanchamiento aproximadamente lineal, con un ángulo mayor que en el aire. En esta zona, debido a la acción de succión de los vórtices se forman ondulaciones a cada lado del chorro.

### Zona II : Zona de choque\*:

En el que las líneas de corriente se deflexan debido a la influencia del fondo, la velocidad disminuye y aparecen presiones y gradientes de presión relativamente elevados junto al fondo. La dispersión del chorro al chocar con el lecho, junto con la mezcla de aire arrastrada al atravesar la atmósfera, produce turbulencia muy acentuada dando origen a grandes fluctuaciones de presión junto al fondo.

### Zona III: Zona de chorro de pared

En esta zona se produce un resalto hidráulico y el escurrimiento en la parte principal de la lámina tiene características de un chorro de pared. A medida que aumenta el calado aguas abajo, la alteración superficial creada en la zona de incidencia del chorro es menor.

\* Los ensayos realizados en esta tesis, se circunscriben a la determinación de las presiones y sus características de fluctuación en la zona II y su entorno más cercano.

La zona I se puede tratar independientemente de la influencia del fondo. En la literatura especializada, el chorro plano se encuentra analizado desde dos puntos de vista: chorro turbulento (independiente de su aireación) y chorro aireado.

En el caso que nos ocupa, la aireación no es despreciable; sin embargo, difícilmente se puede modelar, ya que depende principalmente de los números de Weber y Reynolds. El ángulo de difusión del chorro en el colchón depende del grado de aireación del chorro y de su turbulencia inicial (Ervine y Falvey [29]).

Por otra parte, existe una gran disparidad en el tratamiento que se da al fenómeno: no se distingue aireación de atomización y se mezclan, la aireación proveniente del aire presente en el núcleo del chorro, con la aireación que introduce en el colchón el contorno rugoso del chorro turbulento.

Ervine y Falvey[29], resumen los distintos abanicos de difusión de chorros en el colchón, considerando diferentes características de turbulencia y entrada de aire (Figura 2.19).

El caso (d) es el más parecido a las situaciones del prototipo. Los chorros entrantes en las estructuras hidráulicas, son esencialmente turbulentos-rugosos [ $\sqrt{v'^2}/v \sim 5\%$ ], conteniendo una gran concentración de aire, del orden del 40%.

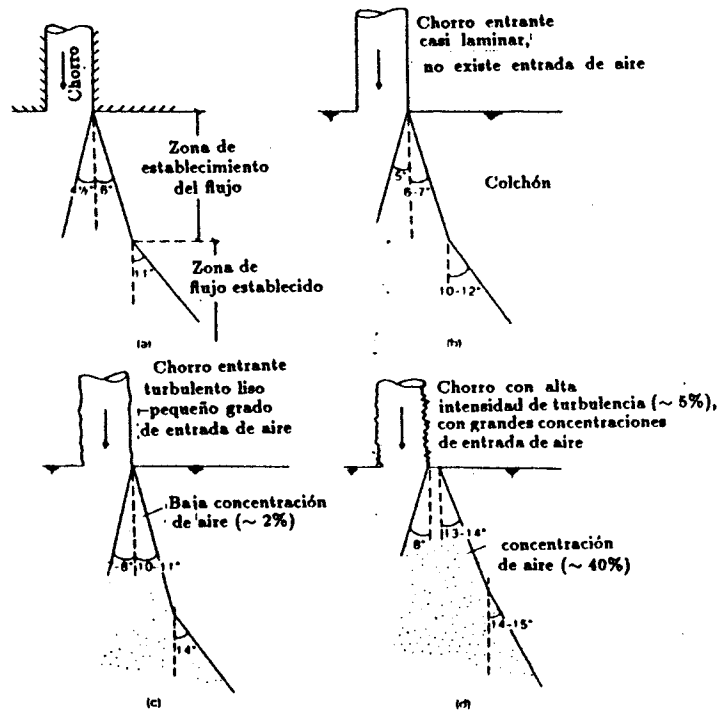


Figura 2.19 Difusión de un chorro en un colchón ilimitado. (a) Chorro sumergido; (b) Chorro casi laminar; (c) Chorro turbulento liso; (d) Chorro altamente turbulento. (De Ervine y Falvey [29])

Hartung y Hausler [36] justifican, en la Zona I, la validez del tratamiento del chorro que penetra en el colchón, como si el mismo fuera de altura infinita. Cuando un chorro se sumerge dentro de un colchón de agua en reposo, éste se dispersa en una forma lineal (ver figura 2.20). La masa de fluido en movimiento se incrementa, porque las partes circundantes inicialmente no perturbadas se ponen en movimiento por efecto del intercambio de cantidad de movimiento con el propio chorro. Dentro del chorro, los contornos del núcleo son lineales y se caracterizan por el hecho de tener la misma velocidad del chorro a la entrada del cuenco así como la misma presión hidrostática del contorno correspondiente. Finalmente, se ha demostrado experimentalmente [54], [82], que la velocidad y distribución de la presión dinámica perpendicular al eje del chorro se ajustan por una curva normal de Gauss.

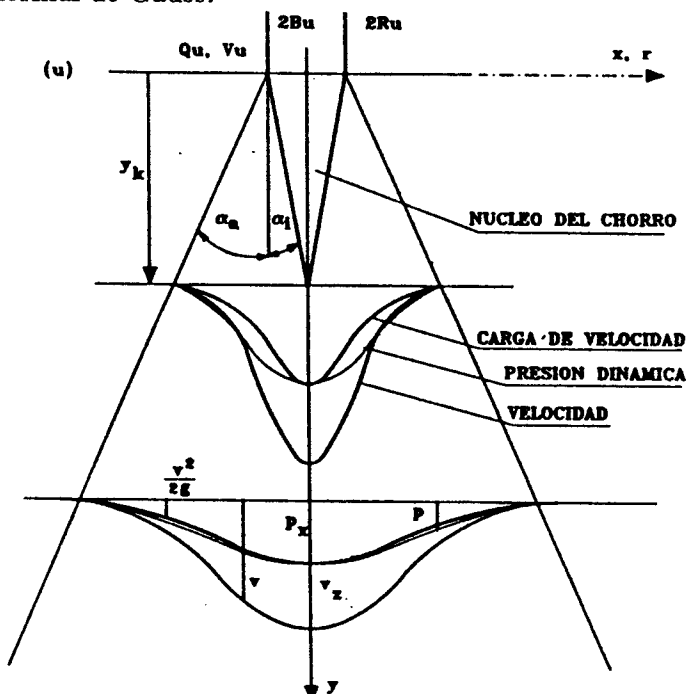


Figura 2.20 Comportamiento teórico del chorro en un colchón ilimitado (De Hartung y Hausler [36])

La longitud  $y_k$  del núcleo del chorro es un valor característico que se define por la tangente del ángulo interno de difusión  $\alpha_i$ . Este ángulo de difusión está entre  $4^\circ$  y  $6^\circ$  [...], dependiendo del número de Reynolds. Sin embargo, tanto para chorros circulares como rectangulares, este ángulo de disminución se puede considerar como  $\text{tg}\alpha_i \sim 0.10$  [36]. Por tanto, podemos afirmar que para alturas de colchón de hasta  $10B_u$ , donde  $B_u$  es el semiancho del chorro a la entrada del cuenco, no se consigue reducir la velocidad del núcleo y por lo tanto, las presiones dinámicas centrales en la solera no se modifican. Solamente se disipa el 20% de la energía que tenía el chorro a la entrada del cuenco.

Hartung [36], ha estudiado experimentalmente la distancia del viaje necesaria para la difusión total de un chorro circular, dentro del colchón de agua y ha determinado que  $y \sim 40R_u$ ; siendo  $R_u$  el radio de la boquilla de la salida del chorro.

Cola [19], [20] hace lo propio, pero en chorros rectangulares y encuentra el valor  $y \sim 80B_u$ ; donde  $B_u$  es el semiancho de la boquilla de salida del chorro.

En la figura 2.21 se indica el modelo teórico del comportamiento del chorro, tanto para chorros rectangulares como circulares.

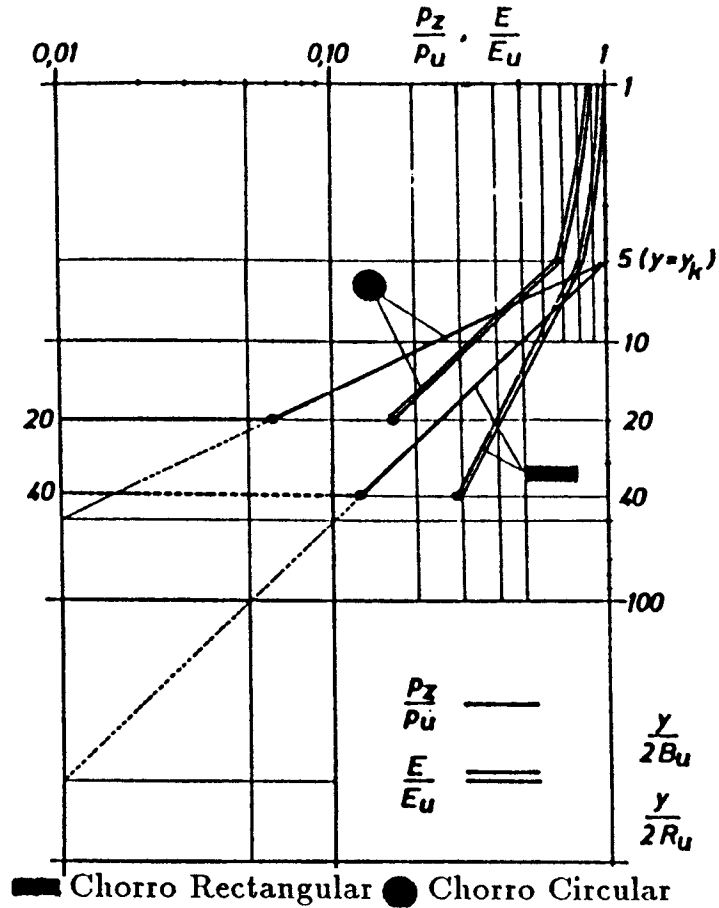


Figura 2.21 Modelo teórico del comportamiento del chorro (De Hartung y Hausler [36])

Donde:

$P_z$ ... Presión en el eje del chorro a una profundidad ( $y$ )

$P_u$ ... Presión en el eje del chorro a la entrada del colchón ( $y = 0$ )

$E$  ... Energía total a una profundidad ( $y$ )

$E_u$ ... Energía total en la entrada del colchón ( $y = 0$ )

Cola[20], propone la siguiente expresión experimental para evaluar la variación de las velocidades longitudinales y transversales, válidas para la Zona I y sin considerar aireación:

$$\frac{v_y}{v_0} = \sqrt{\frac{B}{\sqrt{\pi}C_1 y}} e^{-[1/(2C_1^2)](x/y)^2} \quad (2.15a)$$

Siendo por tanto la velocidad máxima a lo largo del eje del chorro:

$$\frac{v_{ymáx}}{v_0} = \sqrt{\frac{B}{\sqrt{\pi}C_1 y}} \quad (2.15b)$$

donde:

$v_y$ ... Velocidad longitudinal a una distancia  $y$  de la entrada del cuenco.

$v_0$ ... Velocidad del chorro a la entrada del cuenco

$B$  ... Espesor del chorro a la entrada del cuenco ( $B = 2B_u$ )

$C_1$ ... Constante de la ley de difusión en un medio infinito

$$[C_1 = 0.1085 \text{ (Albertson [4])}]$$

$y$  ... Distancia vertical desde la sección de la entrada del cuenco

$x$  ... Distancia horizontal perpendicular al eje del chorro

Cola concluye que para profundidades entre 0 y 0.7 de la altura del colchón de agua  $h$ , medido desde la entrada del chorro en el colchón, la ley de medio infinito (Zona I) es aceptable. A una distancia de  $y = 0.724h$ , se inicia la deflexión del chorro.

Todo esto es válido para colchones de agua:

$$h > 5.2 \frac{B}{(1 - \eta_A)} \quad (2.15c)$$

donde:

$h$  ... Altura del colchón de agua

$\eta_A \simeq 0.276$ ... Coeficiente experimental.

En el cuadro 2.1, se presenta un resumen de las principales propiedades los chorros de sección rectangular y circular.



		Chorro Rectangular	Chorro Circular
	$v_z/v_u$	1	1
	$P_z/P_u$	1	1
$y \leq y_k$	$Q/Q_u$	$1 + 0.414(y/y_k)$	$1 + 0.507(y/y_k) + 0.500(y/y_k)^2$
	$E/E_u$	$1 - 0.184(y/y_k)$	$1 - 0.507(y/y_k) + 0.217(y/y_k)^2$
	$v/v_z$	$e^{-\{\pi/8[1 + (x/B_u)(y_k/y) - (y_k/y)]^2\}}$	$e^{-\{1/2[1 + (r/R_u)(y_k/y) - (y_k/y)]^2\}}$
	$P/P_z$	$e^{-\{\pi/16(x/B_u)^2\}}$	$e^{-\{1/2(r/R_u)^2\}}$
	$v_z/v_u$	$\sqrt{y_k/y}$	$y_k/y$
	$P/P_u$	$y_k/y$	$(y_k/y)^2$
$y > y_k$	$Q/Q_u$	$2.414\sqrt{y/y_k}$	$2y/y_k$
	$E/E_u$	$0.816\sqrt{y_k/y}$	$0.667y_k/y$
	$v/v_z$	$e^{-\{\pi/8[(x/B_u)(y_k/y)]^2\}}$	$e^{-\{1/2[(r/R_u)(y_k/y)]^2\}}$
	$P/P_z$	$e^{-\{\pi/16[(x/B_u)(y_k/y)]^2\}}$	$e^{-\{1/1[(r/R_u)(y_k/y)]^2\}}$

**Cuadro 2.1** Valores característicos de los chorros turbulentos  
(De Hartung y Hausler [36])

En donde:

$y_k$ ...Profundidad de desintegración del núcleo central del chorro

$v_u, P_u, E_u, Q_u$ ...velocidad, presión, energía total y caudal del chorro a la entrada del colchón de agua

$v_z, P_z$ ...carga de velocidad y presión en altura de columna de agua a una profundidad "y" dentro del colchón y en el eje del chorro

$v, P, E, Q$ ...velocidad, presión, energía total y caudal del chorro a una profundidad "y" y a una distancia "x" (ó "r"), desde el eje del mismo.

**Ervine y Falvey**[29], realizando un balance aproximado de la cantidad de movimiento entre la sección del chorro en el punto de impacto con el colchón y la sección de la zona final del flujo establecido  $y_k$ , para el caso de un chorro turbulento libre, circular y vertical; cuantifican el efecto de la concentración de aire sobre el valor de  $[\alpha_a/\alpha_i]$ , donde  $\alpha_a$  y  $\alpha_i$  constituyen los ángulos del núcleo exterior de difusión y del núcleo interno de decrecimiento, respectivamente (ver figura 2.20)

Los resultados se indican en el cuadro 2.2.

Concentración de Aire en la entrada del chorro $C(\%)$	$\alpha_a/\alpha_i$
0	2.333
2	2.370
20	2.500
40	2.720
50	2.880

**Cuadro 2.2** Efecto de la concentración de aire sobre la relación de los ángulos ( $\alpha_a/\alpha_i$ )

De acuerdo a estos autores, para el caso de chorros turbulentos rugosos con altas concentraciones de aire, los valores medidos de  $\alpha_a$  son del orden de  $14^\circ$ . Sin embargo, en estos chorros turbulentos, el ángulo del núcleo interno es del orden de  $\alpha_i = 7^\circ - 9^\circ$ , siendo estos valores superiores a los propuestos por Hartung y Hausler:  $\alpha_i = 4^\circ - 6^\circ$  [36].

Esto tiene implicaciones importantes en la determinación de las presiones en la solera del cuenco disipador puesto que, la profundidad que alcanza el núcleo interno depende de la intensidad de turbulencia y de la concentración de aire en el punto de entrada del chorro.

Así, la capacidad de simular en los modelos de escala de Froude las presiones hidrodinámicas, dependerá de la fiabilidad de reproducción de la concentración media del aire de los chorros en el área de impacto.

Como un comentario final, concluimos que los modelos con similitud de Froude sobreestiman las presiones dinámicas, comparadas con los valores de su prototipo.

Cómo actuar en el modelo para minimizar los efectos de escala, requiere análisis juiciosos en cada caso, ya que no es posible aún definir criterios generales.

## 2.5 Impacto contra la solera

El objetivo de esta tesis es analizar el campo de presiones al que se encuentra sometida la solera del cuenco disipador y ello se hará de dos formas: **Análisis en el Dominio del Tiempo y Análisis en el Dominio de la Frecuencia**. Estos análisis se encuentran desarrollados en el capítulo 5 de esta tesis. Ahora simplemente se presentan y discuten las formulaciones más conocidas para evaluar las presiones dinámicas medias en la zona de incidencia del chorro con la solera.

### 2.5.1 Presión dinámica media en el punto de impacto o de estancamiento y sus proximidades

En la sección anterior se ha introducido el análisis de las presiones en la solera al discutir sobre la disipación en el aire y en el colchón de agua. Ahora analizaremos la distribución de la presión dinámica media en las proximidades del punto de incidencia del chorro con la solera, o punto de estancamiento.

El punto de estancamiento, en el que los valores de las presiones son mayores, sufre un retranque con respecto a la interacción plano central del chorro-solera, dado que las líneas de flujo, en esa zona, son sensiblemente perpendiculares a la solera.

La distribución de las presiones medias  $\bar{P}$  en la solera no es simétrica, debido a que el eje del chorro no es perpendicular a la misma. A la izquierda del punto de estancamiento existe una zona de presión menor que aguas abajo de este punto. Se define el valor  $b$  como un factor de escala que cuantifica el ancho de influencia de la presión en el punto de estancamiento y se determina como el valor de la abscisa  $x$  cuando el valor de la presión es igual a la mitad de la presión media en el punto de estancamiento [ $\bar{P} = \bar{P}_s/2$ ] (ver figura 2.18).

A pesar de que la distribución de presiones no es simétrica, las leyes propuestas por los diferentes autores son de tipo simétrico exponencial, lo cual es una buena aproximación para nuestro caso, ya que el ángulo del chorro a la entrada del cuenco está muy próximo a  $90^\circ$ .

Seguidamente se presentan las principales expresiones propuestas para el cálculo de la presión dinámica media en el punto de estancamiento y su entorno próximo. Todas estas expresiones de tipo experimental se han obtenido con diferentes medios y metodologías. Estas expresiones están propuestas en dos formas generales: unas en función del ancho de influencia del chorro  $b$  y otras en función de la altura del colchón de agua  $h$ .

Con el objeto de realizar una unificación de estas expresiones, transformaremos las expresiones originales a una forma común (siempre que sea posible) y representaremos las formas generales en función de los parámetros resultantes de este análisis.

Por último, en el capítulo 5 de esta tesis se presenta una comparación y comprobación de estas expresiones a partir de mediciones directas y de una hipótesis de cálculo.

**Beltaos** [12], modela con aire el fenómeno del chorro, cuidando de que las condiciones correspondan a flujo incompresible. Sus resultados, se refieren al análisis de las presiones dinámicas medias con flujo desarrollado (Tipo II y Tipo III). Analiza el ángulo de incidencia del chorro en el colchón desde  $[\theta_0 = 20^\circ - 90^\circ]$  (ver figura 2.18).

Para el caso que nos ocupa, valores de  $(\theta_0 \sim 90^\circ)$ , Beltaos propone la siguiente expresión para las presiones dinámicas medias:

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-0.693\eta^2}; \quad \eta = \frac{x}{b} \quad (2.16a)$$

en donde:

$\bar{P}$  ... Presión dinámica media en la solera

$\bar{P}_s$  ... Presión dinámica media en el punto de estancamiento de la solera

$x$  ... Abscisa medida a partir del punto de estancamiento

$b$  ... Ancho de la zona de influencia:  $x = b \sim 0.13h$  (Beltaos [12])

$h$  ... Altura del colchón de agua

Reemplazando los valores característicos indicados, en la ecuación (2.16a), obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-42.01(x/h)^2} \quad (2.16b)$$

**Cola** [19], [20] experimenta con chorros de agua y colchones de altura finita, pero sin considerar la entrada de aire al cuenco. Propone la siguiente expresión para calcular las presiones dinámicas medias:

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-[1/(4C_1^2(1-\eta_A)^2)](x/h)^2} \quad (2.17a)$$

donde:

$C_1$  ... Coeficiente de difusión ( $C_1 \sim 0.1085$ )

$\eta_A \sim 0.276$  ... Coeficiente experimental

$h$  ... Altura del colchón de agua.

Si reemplazamos en la Ecuación (2.17a), los valores de  $C_1$  y  $\eta_A$ , obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-40.51(x/h)^2} \quad (2.17b)$$

Podemos concluir, que las ecuaciones propuestas por Beltaos (2.16b) y por Cola (2.17b) son equivalentes.

Hartung y Hausler [36], dan la siguiente expresión para evaluar las presiones dinámicas medias en la solera, correspondiente a un flujo desarrollado (desintegración del núcleo del chorro):

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-(\pi/16)[(x/B_u)(y_k/h)]^2} \quad (2.18a)$$

donde

$B_u$ ... Semiespesor del chorro a la entrada del colchón

$x$ ... Abscisa medida desde el punto de estancamiento

$y_k$ ... Ordenada medida desde la entrada del chorro en el colchón, a la sección de desaparición del núcleo del chorro (flujo desarrollado).

$h$ ... Altura del colchón de agua

Si tomamos la profundidad mínima propuesta por Hartung y Hausler para que se produzca el flujo desarrollado  $y_k = 5B = 10B_u$ , y reemplazamos en la ecuación (2.18a), obtenemos:

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-19.6(x/h)^2} \quad (2.18b)$$

Esta ecuación se asemejará a las ecuaciones de Beltaos (ec. 2.16b) y de Cola (ec. 2.17b), si la profundidad  $y_k$  es mayor que el valor propuesto por Hartung y Hausler. Si  $y_k = 14.4B_u$  se obtiene que:

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-40.71(x/h)^2} \quad (2.18e)$$

Por lo tanto, el valor de  $y_k = 10B_u$  propuesto por Hartung y Hausler es inferior en un 30% al  $y_k = 14.4B_u$ , necesario para que su ecuación sea equivalente a las ecuaciones propuestas por Beltaos (ec.2.16b) y Cola (ec.2.17b).

Aki [3]\* propone las siguientes expresiones:

$$\frac{U_m}{u_0} = \frac{K}{\sqrt{x/B}} \quad (2.19a)$$

$$\bar{P}_s = \frac{U_m^2}{2g} \text{sen}^2 \theta_0 \quad (2.19b)$$

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-12.56(x/h)^2} \quad (2.19c)$$

donde

$U_m$ ... Velocidad ficticia del chorro en el punto de estancamiento

$u_0$ ... Velocidad del chorro a la entrada del colchón

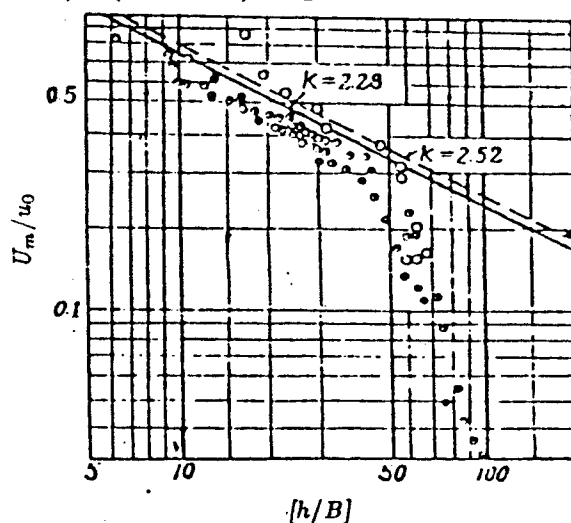
$K$  ... Coeficiente que considera la difusión.

$B$  ... Espesor del chorro a la entrada del colchón

$\theta_0$ ... Angulo de incidencia del chorro

$g$  ... Aceleración de la gravedad ( $g \sim 9.81$ )

En la figura (2.22), se presentan los resultados obtenidos por Aki [3] y por Cui Guang Tao...[23], para obtener los valores del Coeficiente ( $K$ ). En base a estos resultados, proponen valores de ( $K = 2.28$ ) y ( $K = 2.52$ ), respectivamente.



**Figura 2.22** Resultados de los ensayos de Aki y Cui Guang Tao, para determinar el Coeficiente de Difusión  $K$   
De Cui Guang Tao... [23]

\* Nombrado por Cui Guang Tao... [23]

Según Aki [3], la ley de variación de velocidades, dada por la ecuación (2.19a), sólo es aplicable para alturas de colchón de agua dentro del intervalo  $\{y_2, 50B\}$ ; donde  $y_2$  y  $B$  representan el calado conjugado del calado contraído ( $y_1$ ) del chorro (ver figura 2.3) y del espesor del del chorro a la entrada del colchón de agua.

Para valores de  $h/B > 50$ , el amortiguamiento de la velocidad es muy rápida (Ver figura 2.22) y por tanto, el chorro no alcanza el fondo del cuenco.

Podemos observar que la expresión de Aki (2.19c), es diferente a las expresiones de Beltaos (2.16b), Cola (2.17b) y Hartung y Hausler (2.18e) y (2.18b).

Esta disparidad de resultados puede deberse a las diferentes metodologías y condiciones de ensayos realizados por los investigadores chinos y que no son muy conocidas. En la revisión bibliográfica se encontró que el ancho de la zona de influencia propuesta por otros autores chinos es de  $b = 0.23h$  (Xu Duo-Ming y Yu Chang-Zhao [114]).

Para averiguar cuándo la expresión de Aki es equivalente a las anteriores, reemplazamos los valores de la longitud de influencia del chorro  $b$ , propuestos por Beltaos [12]  $b = 0.13h$  y por Xu Duo-Ming... [114]  $b = 0.23h$ , obteniendo las siguientes expresiones:

Para  $[b = 0.13h]$ :

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-0.212(x/b)^2} \quad (2.19d)$$

Para  $[b = 0.23h]$ :

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-0.664(x/b)^2} \quad (2.19e)$$

Como las expresiones (2.19d) y (2.19e) dependen del ancho de influencia del chorro "b" y dado que la diferencia de estos valores propuestos por Beltaos ( $b \sim 0.13h$ ) y Xu-Duo Ming... ( $b \sim 0.23h$ ) son del orden del 43% y que fundamentalmente pueden deberse a las diferentes condiciones de contorno establecidas en los respectivos ensayos, creemos que la distribución de las presiones dinámicas medias en el punto de estancamiento es preferible expresarla en función de la altura del colchón de agua "h".

Podemos concluir que la expresión (2.19e), obtenida a partir de la expresión original propuesta por Aki y puesta en función del factor de escala  $[b = 0.23h]$ , obtenido por Xu Duo Ming... [114]; es equivalente a las expresiones propuestas por "Beltaos, Cola, y Hartung y Hausler [ $y_k = 7.2B$ ]".

Así pues, las ecuaciones de la presión dinámica media en el punto de estancamiento, propuestas por los diferentes autores y analizadas anteriormente, pueden representarse en forma general en dos ecuaciones: una en función del ancho de influencia del chorro "b" y la otra, en función de la altura del colchón de agua "h".

Estas ecuaciones tienen por tanto las siguientes formas generales:

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-\Phi(x/b)} \quad (2.20a)$$

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-\Phi'(x/h)} \quad (2.20b)$$

siendo los parámetros de estas ecuaciones los valores indicados en la cuadro 2.3

AUTOR	$\Phi$	$\Phi'$	$b$	$y_k$
Beltaos	0.693	42.01	$0.13h$	—
Cola	0.685	40.51	$0.13h_{(1)}$	—
Hartung y Hausler	0.331	19.60	$0.13h_{(1)}$	$5B_{(2)}$
	0.688	40.71	$0.13h_{(1)}$	$7.2B_{(4)}$
Aki	0.212	12.56	$0.13h$	—
	0.664	12.56	$0.23h_{(3)}$	—

**Cuadro 2.3** Parámetros de las ecuaciones de cálculo de las presiones dinámicas medias en las proximidades del punto de estancamiento

- (1) Valor obtenido por Beltaos
- <sup>3</sup>(2) Valor obtenido por Xu Duo-Ming
- <sup>2</sup>(3) Valor propuesto por Hartung y Hausler
- (4) Valor propuesto en este trabajo



## CAPÍTULO 3

# BASES TEÓRICAS Y METODOLOGÍA NUMÉRICA PARA EL TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN EXPERIMENTAL

### 3.1 Introducción

Para abordar en forma práctica los temas analizados en los capítulos anteriores, necesitamos de técnicas especiales que nos permitan una correcta adquisición, procesamiento e interpretación, de los datos de laboratorio. Estas técnicas se denominan en forma general como “**Técnicas de Tratamiento de Señales**”.

Existen diversas técnicas de procesamiento de señales y que se han desarrollado para la detección y la estimación.

**La detección** es la técnica que determina si una señal específica está presente en una observación, mientras que con **la estimación** se obtienen los valores de los parámetros que describen la señal.

Para facilitar la detección y la estimación de sistemas de señales, acudimos al análisis armónico de datos de extensión finita. La clásica transformación de Fourier, es el mecanismo por el cual somos capaces de realizar la descomposición frecuencial.

A pesar de las ventajas del uso de la transformada discreta de Fourier (DFT), sobre todo con la implementación del algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT), existen limitaciones inherentes a su funcionamiento (ventanas y suavizado).

En el intento de resolver estas limitaciones, se han desarrollado hace más de una década, algunos procedimientos de estimación espectral alternativos, como los modelos Autoregresivos (AR), Medias móviles (MA), Autoregresivos de medias móviles (ARMA), Descomposición espectral de Pisarenko (PHD), método de máxima verosimilitud (MLM), entre otros [47], [101].

Sin embargo, para bajas relaciones señal-ruido (SNR), los estimadores espectrales modernos no son, a menudo, mejores que el procesamiento convencional FFT [34], [35], [47].

En el caso concreto que nos ocupa, hemos decidido como herramienta de análisis el método convencional FFT, ya que el nivel de información a obtener, es suficiente para nuestros propósitos.

Así pues, en este capítulo se inicia presentando los elementos básicos de las transformadas de Fourier, tanto para parámetro continuo como discreto.

A continuación, se presentan los fundamentos del teorema del muestreo, por medio del cual somos capaces de realizar una correcta adquisición de los datos de laboratorio.

Seguidamente, se presenta una introducción a las variables aleatorias y procesos estocásticos, con el objeto de revisar los conceptos básicos que se manejan en la definiciones de densidad y distribución de probabilidad, así como también de la densidad y distribución espectral.

A continuación, se presenta un subcapítulo dedicado a la revisión de la densidad espectral de procesos estocásticos, tanto para el caso del análisis univariante como multivariante.

Seguidamente se discuten los métodos de estimación espectral convencional, los mismos que nos permiten el cálculo efectivo de las funciones de autocovarianza y densidad espectral, a partir de una realización limitada y discretizada del proceso estocástico real de media nula.

A continuación, se presenta un resumen de las ventanas temporales y espectrales, las mismas que nos permiten una mejora de la estimación espectral, pero a costa de una disminución de la resolución.

En el último subcapítulo se presenta un resumen de los programas de tratamiento de datos, desarrollados paralelamente a la revisión y estudio de la teoría expuesta en este capítulo.

### 3.2 Transformadas de Fourier

El análisis de las frecuencias de los procesos estocásticos, se fundamentan en el concepto de transformación de Fourier. Por lo tanto, a continuación presentamos los elementos básicos de las transformadas de Fourier.

#### 3.2.1 Transformadas de Fourier de parámetro continuo (CFT)

Dada una función  $x(t)$  de cuadrado integrable, es decir, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

es convergente; se define su transformada de Fourier como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.1a)$$

y se restituye la función original  $x(t)$  mediante la transformación inversa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d(\omega) \quad (3.1b)$$

en donde  $\omega$  es la frecuencia en radianes por segundo (*rad/s*).

El par de transformadas de Fourier en función de la frecuencia en Hertz (Hz) ( $\omega = 2\pi f$ ) y abusando del lenguaje tenemos:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (3.2a)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft} df \quad (3.2b)$$

La teoría de transformadas de Fourier de funciones de cuadrado integrable puede consultarse en Goldberg [33] y Papoulis [77].

El módulo cuadrado de la transformada de Fourier  $|X(\omega)|^2$ , se llama a veces espectro de energía de  $x(t)$ .

El teorema de Parseval, expresado como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (3.3)$$

nos define que la energía de una señal en el dominio del tiempo, es igual a la energía de su transformada en el dominio de la frecuencia. Así,  $|X(\omega)|^2$  representa la distribución de la energía como una función de la frecuencia.

Entre las propiedades más importantes de la transformación de Fourier, destaca el comportamiento de la convolución de dos funciones, cuya transformada es el producto de las respectivas transformadas: si definimos la convolución de las funciones  $x$  y  $g$  como

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (3.4)$$

entonces

$$H(\omega) = X(\omega)G(\omega) \quad (3.5)$$

es decir, la convolución de las funciones en el tiempo, corresponde a su producto en el dominio de la frecuencia.

### 3.2.2 Transformadas de Fourier de parámetro discreto (DFT)

En la práctica, las señales se presentan muestreadas a intervalos de tiempo constante,  $T$ , para permitir su posterior tratamiento en un ordenador. En tal caso se obtiene una sucesión numérica producida por el muestreo de  $x(t)$ :

$$\dots, x_0 = x(0), \quad x_1 = x(T), \dots, x_n = x(nT), \dots$$

Conviene en ese caso utilizar el concepto de transformada discreta de Fourier (DFT)  $\tilde{X}(\omega)$ , definida de la siguiente forma:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega n T}; \quad \omega \in [-\omega_c, \omega_c]; \quad \omega_c = \frac{\pi}{T} \quad (3.6a)$$

y su transformada inversa

$$x_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \tilde{X}(\omega) e^{i\omega n T} d\omega \quad (3.6b)$$

Las condiciones de existencia de tales transformaciones se establece en el marco de la teoría de funciones analíticas (ver, por ejemplo, Markushevich [65]).

El par de transformadas de Fourier, en función de la frecuencia en (Hz), vienen definidas por:

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i2\pi f n T} \quad (3.7a)$$

y su transformada inversa

$$x_n = T \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \tilde{X}(f) e^{i2\pi f n T} df \quad (3.7b)$$

Aunque se especifica que  $\tilde{X}$  está definida en  $[-\omega_c, \omega_c]$ , la fórmula (3.6a) define una función periódica de período  $(2\pi/T)$ , hecho que será utilizado frecuentemente, para el cálculo, que se realiza en el intervalo  $[0, 2\omega_c]$ .

La propiedad de la convolución es análoga a la de la transformación de Fourier (ver, por ejemplo, Tretter [102]). Si utilizamos nuevamente las mayúsculas con tilde para designar las transformadas discretas de Fourier, tenemos que la convolución  $\{h_n\}$  de las sucesiones  $\{x_n\}$ ,  $\{g_n\}$

$$h_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_n g_{n-j} \quad (3.8)$$

tiene como transformada

$$\tilde{H}(\omega) = \tilde{X}(\omega)\tilde{G}(\omega) \quad (3.9)$$

También la llamada **Convolución Circular** de las transformadas, goza de la siguiente propiedad:

si definimos

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \tilde{X}(\omega_1)\tilde{G}(\omega - \omega_1)d\omega_1 \quad (3.10)$$

entonces

$$h_n = x_n g_n \quad (3.11)$$

Es decir, que la convolución circular de las transformadas de las secuencias  $x_n$  y  $g_n$ , corresponden a un producto en el dominio del tiempo.

En la ecuación (3.10), se han considerado  $\tilde{X}(\omega)$  y  $\tilde{G}(\omega)$  periódicas, de período  $2\omega_c$ .

No obstante, la transformada discreta de Fourier (3.6a) es impracticable generalmente, ya que sólo se conocerán un número  $N$ , limitado, de puntos de sucesión  $\{x_n\}$ .

Supongamos que conocemos los puntos  $x_0, \dots, x_{N-1}$ , y construimos una nueva sucesión  $\{y_n\}$ , dada por

$$y_n = w_n x_n \quad (3.12)$$

donde  $\{w_n\}$ , conocida con el nombre de ventana temporal, cumple

$$w_n = 0 \quad \text{si } n < 0 \quad \text{ó } n \geq N \quad (3.13)$$

Si  $w_n = 1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ; se dice que  $\{w_n\}$  es una ventana rectangular.

**Definimos como transformada discreta finita de Fourier (DFFT)** de  $\{x_n\}$ , cuando  $\{w_n\}$  es la ventana rectangular y se muestrea a intervalos fijos de frecuencia  $\Omega = 2\pi/NT$ .

Se obtiene, entonces, el par de transformadas limitadas:

$$X_N(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\Omega Tnk}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.14a)$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_N(n\Omega) e^{i\Omega Tnk}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.14b)$$

Debe observarse que  $X_N(k\Omega) = X_N[(k + Nj)\Omega]$ , siendo  $j$  un entero cualquiera.

Por ello, cuando  $k\Omega$  supera  $\omega_c$ , es decir,  $k$  es mayor que  $N/2$ , los valores de  $X_N$  corresponden a las frecuencias negativas dadas por  $(k - N)\Omega$ .

En lo que sigue, adoptamos la notación de (3.14a) y (3.14b), sin mencionar este hecho.

La DFFT (3.14a) tiene la propiedad de convolución:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k g_{n-k} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X_N(j\Omega) G(j\Omega) e^{i\Omega Tjn} \quad (3.15)$$

es decir, la transformada limitada de la convolución de las sucesiones (limitadas), es el producto de las respectivas transformadas limitadas.

Es muy importante observar que el cálculo de la DFFT de  $\{x_n\}$ , equivale a la DFT del producto de  $\{x_n\}$  por la ventana  $\{w_n\}$ ; por lo que las propiedades (3.10) y (3.11) nos indican que, la DFFT es la convolución circular de la DFT de  $\{x_n\}$  con la ventana, circunstancia que es aprovechada en el cálculo para mejorar la precisión de las estimas.

El teorema de Parseval aplicado a la transformada finita discreta de Fourier (DFFT), nos expresa en forma análoga al caso continuo, que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X_N(n\Omega)|^2 \quad (3.16)$$

en donde

$N$ ...Número de datos muestreados

$\Omega$ ...Intervalo de frecuencia

Por lo tanto, la energía de una señal muestreada en el tiempo, es igual a la energía de su DFFT, en la frecuencia; donde  $|X_N(N\Omega)|^2$  representa la distribución de la energía en función de la frecuencia.

### 3.3 Teorema del muestreo\*

Es importante analizar de qué forma las señales en tiempo discreto, se obtienen por un muestreo periódico de las señales en tiempo continuo.

Para esto, consideremos una señal analógica  $x(t)$  cuyos pares de Fourier son:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.14a)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.14b)$$

La secuencia  $x_n = x(nT)$  se obtiene del muestreo periódico de  $x(t)$ , siendo "T" el período de muestreo. El recíproco de T es la frecuencia de muestreo.

Para determinar en qué sentido  $x_n$  representa la señal original  $x(t)$ , conviene relacionar  $X(\omega)$ , la transformada de Fourier de tiempo continuo de  $x(t)$ , con  $\tilde{X}(\omega)$ , la transformada de Fourier en tiempo discreto de la secuencia  $x_n$ .

De la ec.(3.14a), tenemos que:

$$x_n = x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega nT} d\omega \quad (3.15)$$

De la transformada de Fourier en tiempo discreto, también obtenemos la representación:

$$x_n = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \tilde{X}(\omega) e^{i\omega nT} d\omega \quad (3.16)$$

Sin prestar atención a la existencia y convergencia de las integrales; para relacionar las ec.(3.15) y (3.16), es conveniente expresar la ec.(3.15) como una suma de integrales sobre los intervalos de longitud  $\frac{2\pi}{T}$ , así:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{(2r-1)\pi}{T}}^{\frac{(2r+1)\pi}{T}} X(\omega) e^{i\omega nT} d\omega$$

Cambiando de variables, se puede reducir cada término del sumatorio a una integral sobre el rango  $-\frac{\pi}{T}$  a  $\frac{\pi}{T}$ , obteniendo:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X\left(\omega + \frac{2\pi r}{T}\right) e^{i\omega nT} e^{i2\pi r n} d\omega$$

\* Ver Oppenheim y Schaffer [74].

Si intercambiamos el orden del sumatorio y de la integral y notamos que  $e^{i2\pi rn} = 1$  para todos los valores enteros de  $r$  y  $n$ , entonces obtenemos:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left[ \sum_{r=-\infty}^{\infty} X\left(\omega + \frac{2\pi r}{T}\right) \right] e^{i\omega n T} d\omega \quad (3.17)$$

sustituyendo  $\omega_c = \frac{\pi}{T}$ , la ec.(3.17) será:

$$x_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[ \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(\omega + 2r\omega_c) \right] e^{i\omega n T} d\omega$$

la cual es idéntica en forma a la ec.(3.16). Sin embargo, podemos hacer la identificación:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(\omega + 2r\omega_c) \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) relacionan la transformada de Fourier de tiempo continuo, con la transformada de Fourier de una secuencia obtenida por muestreo.

Si representamos  $X(\omega)$  como en la figura (3.1a), entonces  $\tilde{X}(\omega)$  se representará como en (3.1b) si,  $\omega_0/2 > \pi/T$ .

Notemos que si el período de muestreo es muy grande, entonces las versión de  $X(\omega)$  se traslapa. En este caso, las frecuencias superiores de  $X(\omega)$ , se reflejan dentro de las bajas frecuencias en  $\tilde{X}(\omega)$ . Este fenómeno, donde una componente de alta frecuencia de  $X(\omega)$ , se refleja sobre la identidad de una baja frecuencia, se denomina "aliasing".

Si analizamos la figura (3.1c), en donde  $\omega_0/2 < \pi/T$ , es decir, si muestreamos con una relación de al menos el doble que la frecuencia más alta de  $X(\omega)$ , entonces  $\tilde{X}(\omega)$  es idéntico a  $X(\omega)$ , en el intervalo  $(-\pi \leq \omega \leq \pi)$ . En este caso es razonable esperar que  $x(t)$  se recupere desde las muestras  $x(nT)$ , por medio de una fórmula apropiada de interpolación. A esta relación de muestreo se le conoce generalmente como la relación de Nyquist.

Si  $x(t)$  es una función limitada en banda de Nyquist, es decir si  $\omega_0/2 \leq \omega_c$ , donde  $\omega_c = \pi/T$ , o concretamente, si:

$$X(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad |\omega| \geq \omega_c$$

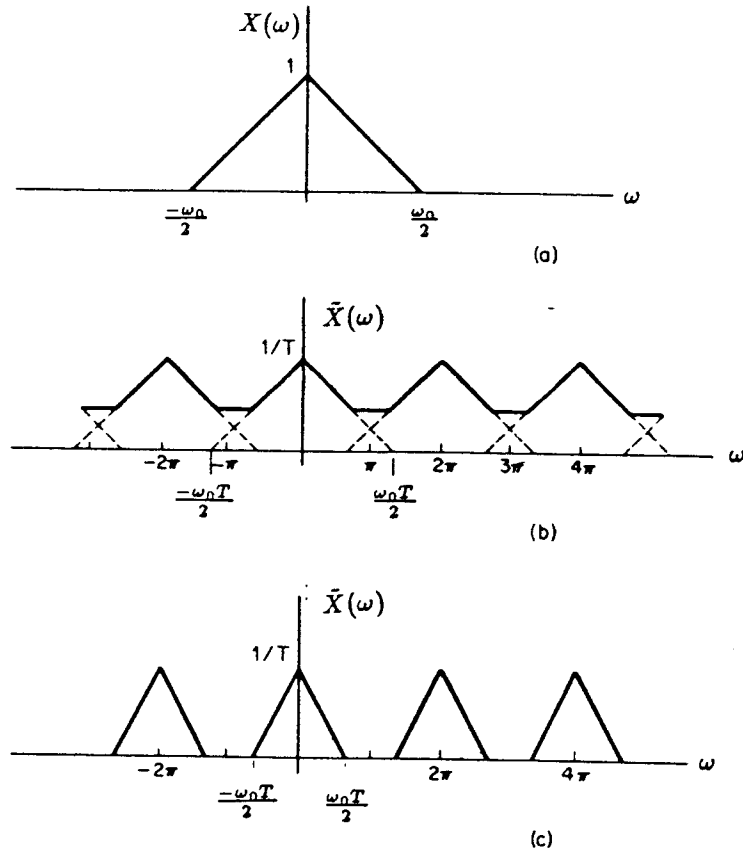
como se indica en la figura (3.1c), entonces:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{T} X(\omega); \quad (-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T) \quad (3.19)$$

donde la antitransformada de Fourier en tiempo continuo es

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.20)$$





**Figura 3.1** (a) Transformada de Fourier de una señal en tiempo continuo

(b) Transformada de Fourier de la señal en tiempo discreto, obtenido por un muestreo periódico  $\omega_0/2 > \pi/T$ ; (c) Igual que (b), pero con  $\omega_0/2 < \pi/T$  (De Oppenheim y Schaffer [74])

Combinando las ec.(3.19) y (3.20), podemos escribir:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} T \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Puesto que:

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-i\omega kT}$$

entonces:

$$x(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) e^{-i\omega kT} \right] e^{i\omega t} d\omega$$

Intercambiando el orden del sumatorio y de la integral,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \left[ \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i\omega(t-kT)} d\omega \right]$$

Evaluando la integral, obtenemos:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\text{sen}[(\pi/T)(t-kT)]}{(\pi/T)(t-kT)} \quad (3.21)$$

y reemplazando el valor  $\omega_c = \pi/T$ , tenemos finalmente que:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{\text{sen}[(\omega_c(t-kT))]}{\omega_c(t-kT)} \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) es una fórmula para recuperar la señal de tiempo continuo  $x(t)$  desde sus muestras. La representación de una señal de tiempo continuo en la forma de la ec.(3.22) es válido solamente para funciones de banda limitada y con un período de muestreo "T" suficientemente pequeño, para que no ocurra el fenómeno de solapamiento o aliasing.

Un muestreo adecuado no altera la señal original, ya que en las muestras se encuentra toda la información de dicha señal. Si la señal no es limitada en banda, tenemos que prevenir el solapamiento de las frecuencias altas en las de baja frecuencia.

Cuando se trata de analizar señales que han sido obtenidas mediante algún sistema de registro, es corriente hacer la hipótesis de que las frecuencias superiores a un cierto  $\omega_0$  no han sido registradas. En tal caso, el intervalo de muestreo adecuado de tal señal sería  $T_0 = \pi/\omega_0$ .

Para reducir la señal a una equivalente limitada en banda, en teoría, el filtrado de la señal consiste en multiplicar la transformada discreta de la señal, por una función  $\tilde{U}(\omega)$ , cuyo valor en el intervalo  $[-\omega_0, \omega_0]$  será (ver figura 3.2):

$$\tilde{U}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in [-\omega_c, \omega_c] \\ 0, & \text{si } \omega \notin [-\omega_c, \omega_c] \end{cases} \quad (3.23)$$

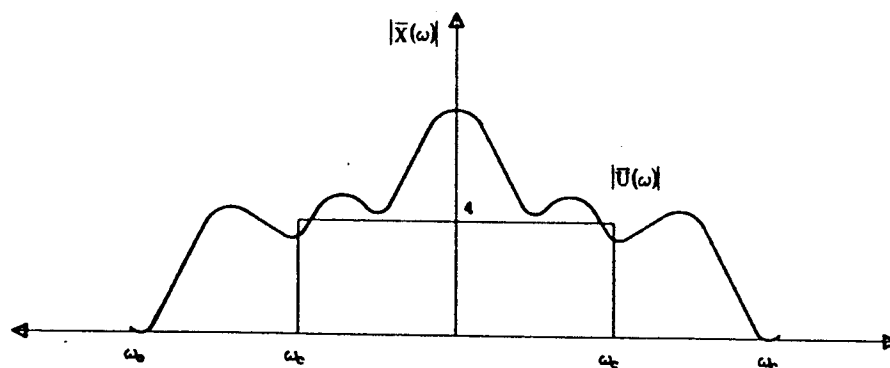


Figura 3.2 Filtrado teórico, multiplicación de  $\tilde{X}(\omega) \cdot \tilde{U}(\omega)$

Puesto que el producto de las transformadas discretas, equivale a una convolución temporal, para efectuar esta operación bastaría realizar la convolución de los datos con la antitransformada de Fourier de  $\tilde{U}(\omega)$ . (ver figura 3.3).

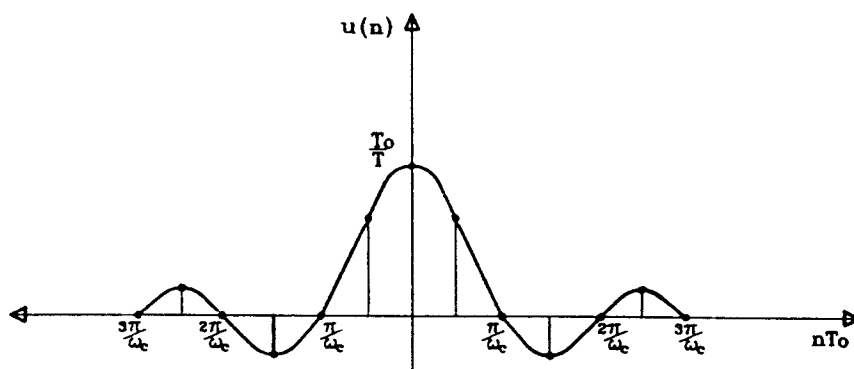


Figura 3.3 Antitransformada de Fourier del filtro rectangular  $\tilde{U}(\omega)$   
(De Egozcue [26])

Por lo tanto:

$$u_n = \frac{T_0}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \tilde{U}(\omega) e^{i\omega n T_0} d\omega = \frac{\text{sen}(\omega_c n T_0)}{\pi n} \quad (3.24)$$

y la señal filtrada sería:

$$g_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{\text{sen}[\omega_c(n-k)T_0]}{\pi(n-k)} \quad (3.25)$$

La operación (3.25) no es finita y, por tanto, no se puede realizar en la práctica. Si se trunca la serie de Fourier de la función  $\tilde{U}(\omega)$ , cuyos coeficientes son los  $u_n$  (3.24), se obtiene una aproximación de  $\tilde{U}(\omega)$ . No obstante, esta aproximación tiene fluctuaciones importantes en las proximidades de los puntos  $-\omega_c, \omega_c$  que hacen poco conveniente la aproximación. Este fenómeno de fluctuación se conoce con el nombre de Gibbs y se debe a la convergencia no uniforme de la mencionada serie de Fourier.

Por esta razón se suele acudir a filtros más cómodos que exijan un número limitado de operaciones, aunque su transformada  $\tilde{U}(\omega)$  no sea rectangular.

Cuanto mejor aproxime  $\tilde{U}(\omega)$  a la función rectangular, mayor será la prevención contra el solapamiento de frecuencias. Para un estudio completo sobre filtros, puede consultarse Oppenheim y Schafer [74], Koopmans [50] y Tretter[102].

### 3.4 Variables aleatorias y procesos estocásticos

Definimos a  $\Omega$  como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Estrictamente el espacio muestral de un experimento estadístico es una pareja  $(\Omega, \mathfrak{F})$ , donde:

- i)  $\Omega$  es un conjunto arbitrario
- ii)  $\mathfrak{F}$  es una sigma algebra ( $\sigma$ -algebra) de  $\Omega$

Los elementos de  $\Omega$  son llamados puntos muestrales. Cualquier conjunto  $B \subset \mathfrak{F}$  se conoce como un suceso. Decimos que un suceso  $B$  ocurre si el resultado del experimento corresponde a un punto en  $\mathfrak{F}$ . Además, nos referimos a cada punto del  $\sigma$ -algebra como un suceso simple o elemental.

Si  $\Omega$  contiene un número numerable de puntos, llamamos a  $(\Omega, \mathfrak{F})$  un espacio muestral discreto.

Si  $\Omega$  es un conjunto no numerables, entonces  $(\Omega, \mathfrak{F})$  es un espacio muestral no-numerable. En particular, si  $\Omega$  es un subconjunto de  $\mathfrak{R}^n$ , donde  $\mathfrak{R}$  es el conjunto de números reales, entonces  $(\Omega, \mathfrak{F})$  es un espacio muestral continuo.

Sea  $(\Omega, \mathfrak{F})$  un espacio muestral. Una función de conjunto  $P_{\mathfrak{F}}$  definida sobre  $\mathfrak{F}$  es llamada una medida de probabilidad, si satisface los siguientes puntos:

- i)...  $P_{\mathfrak{F}}(B) \geq 0$  para todo  $B \in \mathfrak{F}$
- ii).  $P_{\mathfrak{F}}(\Omega) = 1$
- iii)  $\{B_j\}$ ,  $B_j \in \mathfrak{F}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  una sucesión disjunta de conjuntos.

Si  $B_j \cap B_k = \emptyset$  para  $j \neq k$

Entonces:  $P(\bigcup_1^{\infty} B_j) = \sum_1^{\infty} P(B_j)$

Llamamos  $P_{\mathfrak{F}}(B)$  la probabilidad del suceso  $B$ . Evidentemente,  $P_{\mathfrak{F}}(\emptyset) = 0$ .

Si  $P_{\mathfrak{F}}(B) = 0$ , entonces  $B$  es un suceso con probabilidad cero o suceso nulo.

A  $\{\Omega, \mathfrak{F}, P_{\mathfrak{F}}\}$  se le conoce como un espacio de probabilidad.

Una función  $X$ , finita y de valor único, con imagen de  $\Omega$  dentro de  $\mathfrak{R}$ , se dice **Variable Aleatoria**, si la imagen inversa de  $X$  de todos los Borelianos en  $\mathfrak{R}$  son sucesos, es decir

$$X^{-1}(A) = \{\omega : B(\omega) \subset A\} \subset \mathfrak{F} \text{ para todo } A \subset \mathfrak{R} \quad (3.26a)$$

donde  $B$  es un conjunto Boreliano del subconjunto  $\mathfrak{R}$ .

Equivalentemente, decimos que  $X$  es una variable aleatoria si y solamente si por cada  $\alpha \in \mathfrak{R}$

$$\{\omega : X(\omega) \leq \alpha\} \equiv \{X \leq \alpha\} \quad (3.26b)$$

es un elemento de  $\mathfrak{F}$  (es un suceso).

Como es evidente, la definición de una variable aleatoria involucra el concepto de probabilidad, solamente cuando  $P_{\mathfrak{F}}$  está definido en  $\mathfrak{F}$ .

Consideremos\* una familia de variables aleatorias dependientes de un parámetro  $(t)$ . El parámetro  $(t)$  puede ser entero o real. **Esta familia de variables aleatorias ordenadas según el sentido creciente de  $(t)$  constituye un proceso estocástico.** Si el parámetro  $(t)$  pertenece al conjunto de los enteros  $(t \in Z)$  se dice que el proceso es de parámetro discreto, mientras que si  $(t \in \mathfrak{R})$  se dice que es de parámetro continuo.

Para matizar mejor la definición de proceso estocástico, consideremos el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathfrak{F}, P_{\mathfrak{F}})$ , donde como ya se vió,  $\Omega$  es un conjunto arbitrario,  $\mathfrak{F}$  es una sigma-álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  o conjunto de sucesos, y  $P_{\mathfrak{F}}$  es una probabilidad definida sobre  $\mathfrak{F}$ . **Se llama proceso estocástico a una función medible  $(P_{\mathfrak{F}})$  que a cada elemento de  $\Omega$  le asocia una sucesión de números reales (función real en el caso de parámetro continuo) de índice  $t \in Z$ .**

Si consideramos un cierto  $t$  entero se obtiene la variable aleatoria

$$X(t) : \{\Omega, \mathfrak{F}, P_{\mathfrak{F}}\} \longrightarrow \mathfrak{R} \quad (3.27)$$

El proceso estocástico se denota como  $\{X(t) \ t \in Z\}$  o abreviadamente  $X(\cdot)$ . A la imagen de  $\omega \in \Omega$  se denota por  $x(t; \omega)$  y se le denomina realización de  $X(t)$ .

La medida de probabilidad  $P_{\mathfrak{F}}$  puede describirse cómodamente mediante la función de distribución asociada a cada una de las variables del proceso. Así, la variable aleatoria  $X(t)$  tendrá asociada la distribución  $F_t(x)$ . Para definir  $F_t(x)$  basta considerar  $\mathfrak{R}$  como nuevo espacio de probabilidad con la sigma-álgebra de los conjuntos borelianos  $B(\mathfrak{R})$ .

Consideremos la semi-recta  $A = \{x \in \mathfrak{R}, \ x \leq a\}$ ,  $A \subset \mathfrak{R}$ , entonces se define

$$F_t(a) = P_{\mathfrak{F}}[X^{-1}(t)(A)] = P[X(t) \leq a] \quad (3.28)$$

donde  $P$  representa una probabilidad definida en la sigma-álgebra de los borelianos  $B(\mathfrak{R})$ .

\* Ver Ash-Gardner [8]

Si la distribución es absolutamente continua puede hallarse la densidad de probabilidad  $f_t(x)$  tal que

$$f_t(x) = \frac{d}{dx}F_t(x) \quad (3.29)$$

A continuación, definiremos los momentos de las variables aleatorias  $X(t)$ . Entre ellos nos interesa destacar:

#### La Media

$$m(t) = E[X(t)] = \int_{\mathfrak{R}} x dF_t(x) = \int_{\mathfrak{R}} x f_t(x) dx \quad (3.30)$$

siempre y cuando existan las integrales indicadas y la densidad en la última de ellas.

#### La Varianza

Se expresa en las mismas condiciones, como

$$\begin{aligned} Var[X(t)] &= E[|X(t) - m(t)|^2] = \int_{\mathfrak{R}} |x - m(t)|^2 dF_t(x) = \\ &= \int_{\mathfrak{R}} |x - m(t)|^2 f_t(x) dx \end{aligned} \quad (3.31)$$

#### La Covarianza

Se define entre dos variables aleatorias del mismo espacio de probabilidad. Previamente se necesita definir la distribución conjunta de las dos variables aleatorias. Concretando para el caso de dos variables  $X(p)$  y  $X(q)$ : sean las dos semirrectas  $A = \{x_p \in \mathfrak{R}; x_p \leq a\}$ ,  $B = \{x_q \in \mathfrak{R}; x_q \leq b\}$ , se define la distribución conjunta como:

$$F_{pq}(a, b) = P_{\mathfrak{R}}[X^{-1}(p)(A), X^{-1}(q)(B)] = P[x_p \leq a, x_q \leq b] \quad (3.32)$$

y la covarianza será:

$$\begin{aligned} Cov[X(p), X(q)] &= E[(X(p) - m(p))(X(q) - m(q))] = \\ &= \int_{\mathfrak{R}^2} (x_p - m(p))(x_q - m(q)) dF_{pq}(x_p, x_q) = \\ &= \int_{\mathfrak{R}^2} (x_p - m(p))(x_q - m(q)) f_{pq}(x_p, x_q) dx_p dx_q \end{aligned} \quad (3.33)$$

siempre que existan las mencionadas integrales.

Para definir las medias y varianzas de las variables aleatorias complejas, basta con considerar la linealidad de las integrales indicadas en (3.31) y (3.32) respecto a la multiplicación por complejos. De esta forma si  $V(\cdot) = X(\cdot) + iY(\cdot)$ , se definen:

$$E[V(t)] = m(t) = E[X(t)] + iE[Y(t)] \quad (3.34)$$

$$Cov[V(p), V(q)] = E[(V(p) - m_v(p))(V(q) - m_v(q))^*] \quad (3.35)$$

### 3.4.1 Función de autocovarianza

Consideremos el espacio vectorial sobre los complejos,  $C$ , de las variables aleatorias con media y varianza definidas y que llamaremos  $L^2(P)$ .

Al espacio  $L^2(P)$  se le puede dotar de un producto escalar

$$X, Y \in L^2(P) \quad \langle X, Y \rangle = E[X, \bar{Y}] \quad (3.36)$$

con el que constituye un espacio de Hilbert (de ahí el nombre  $L^2(P)$ ).

Las variables de  $L^2(P)$  de media nula constituyen un subespacio que llamaremos  $L_0^2(P)$ , y en el que el producto escalar se expresa ahora

$$X, Y \in L_0^2(P) \quad \langle X, Y \rangle = Cov[X, Y] \quad (3.37)$$

Se dice que el proceso  $X(\cdot)$  es de  $L^2(P)$  si todas sus variables son de ese espacio, y análogamente con  $L_0^2(P)$ .

**El concepto fundamental que permite desarrollar la teoría de los procesos estocásticos de  $L_0^2(P)$  es el de la función de autocovarianza,  $c(t, t')$  definida por:**

$$\forall t, t' \in Z \quad c(t, t') = Cov[X(t), X(t')] \quad (3.38)$$

Las principales propiedades de la función de autocovarianza para procesos de  $L_0^2(P)$ , se enuncian a continuación:

#### A.- Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\forall t, t' \in Z \quad |c(t, t')|^2 \leq c(t, t)c(t', t') \quad (3.39)$$

#### B.- Definición no-negativa

$$\forall n \in Z^+ \quad \forall (t_j \quad j = 1, \dots, n) \in Z \quad \forall (a_j \quad j = 1, \dots, n) \in C$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j \bar{a}_k c(t_j, t_k) \geq 0 \quad (3.40)$$

Si la desigualdad de (3.42) se cumple estrictamente, se dice que  $c$  es definida positiva.

#### C.- Hermiticidad

$$\forall t, t' \in Z \quad c(t, t') = c(t', t) \quad (3.41)$$

**TEOREMA\***

Si  $[c(t, t') \ t, t' \in Z]$  es una función que cumple la propiedad hermítica (3.41) y es definida no-negativa (3.40), entonces existe un proceso de  $L^2(P)$  cuya función de autocovarianza coincide con  $c(t, t')$ . Más específicamente, existe un proceso normal \*\* cuya función de autocovarianza coincide con  $c(t, t')$ .

**3.4.2 Procesos estacionarios**

Son una clase de los procesos en  $L^2(P)$ . Como indica la palabra estacionario, estos procesos tienen propiedades que no dependen del origen de numeración de las variables aleatorias.

Se distinguen dos tipos de procesos estacionarios: unos responden a un concepto "amplio" y a otro incluido en el anterior más "estricto".

**A) Definición de proceso estacionario en sentido estricto**

Sea un proceso de  $L^2(P)$  complejo  $V(\cdot) = X(\cdot) + iY(\cdot)$  y sea  $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}$  la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias  $X(t_1), \dots, X(t_n)$   $Y(t_1), \dots, Y(t_n)$ .

Se dice que  $V(\cdot)$  es estrictamente estacionario si:

$$\forall n \in Z^+ \quad \forall k \in Z \quad F_{t_1, t_2, \dots, t_n} = F_{t_1+k, t_2+k, \dots, t_n+k} \tag{3.42}$$

Esta definición expresa la independencia de todas las propiedades estadísticas del proceso respecto del origen del parámetro.

Esta definición es demasiado estricta en la práctica pues, en general, este tipo de estacionariedad es muy difícil de comprobar a partir de las realizaciones del proceso.

Por otra parte, en las aplicaciones suele bastar con definir una estacionariedad de segundo orden o de  $L^2(P)$  mucho menos exigente.

**B) Definición de proceso estacionario de segundo orden o estacionario débil**

Sea  $X(\cdot)$  un proceso estocástico complejo de  $L^2(P)$ ; se dice que es estacionario de segundo orden si la media y la autocovarianza cumplen:

$$\forall t, t' \in Z \quad m(t) = m(t') = m; \quad c(t, t') = c'(t - t') \tag{3.43}$$

Donde  $c'$  es una función compleja de una sola variable.

Es decir, la media es constante y la autocovarianza solo depende de la diferencia entre  $t$  y  $t'$ , lo que viene a decir que la media y la covarianza no dependen del origen del parámetro del proceso.

\* Teorema de Ash-Gadner [8]

\*\* Todo conjunto de variables del proceso es conjuntamente normal



Lógicamente la estacionaridad estricta implica la estacionaridad de segundo orden, pero, ciertamente, no al contrario; así, la estacionaridad de segundo orden no obliga a que la distribución de todas las variables del proceso sea la misma.

En el caso de que el proceso sea normal, ambos tipos de estacionariedad son equivalentes, puesto que las variables aleatorias normales tienen determinada su distribución por sus dos primeros momentos.

A continuación se da una versión de las propiedades de la autocovarianza para procesos estacionarios de segundo orden:

$$\forall t \in Z \quad |c(t)| \leq c(0) \quad (3.44)$$

$$c(0) \in \mathfrak{R} \quad c(0) \geq 0 \quad (3.45)$$

$$\forall t \in Z \quad c(t) = c(-t) \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \forall n \in Z^+ \quad \forall (t_j, \quad j = 1, \dots, n) \in Z \quad \forall (q_j, \quad j = 1, \dots, n) \in C \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_j q_k c(t_j - t_k) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Entonces, para un proceso estacionario de segundo orden, la densidad de primer orden  $f_t(x)$  llega a ser una distribución universal, la cual es absolutamente independiente del tiempo. Así, todos los promedios basados sobre ésta (en particular la media y la varianza), llegan a ser constantes independientes del tiempo. Para la densidad de segundo orden  $f_{t,t'}(x, x')$ , será invariante y deberá ser función solamente del incremento del tiempo  $\tau = t - t'$ . Por lo tanto, todos los promedios basados sobre ésta (autocorrelación, covarianza y coeficiente de correlación) también son solamente función de  $\tau$ . Así, para un proceso de segundo orden:

**a) Media**

$$E[X(t)] = m = \text{constante} \quad (3.48)$$

Además que

$$E[|X(t)|^2] < \infty \quad (3.49)$$

**b) Varianza**

$$\sigma_X^2(t) = E[|X(t) - m|^2] = \text{constante} = \sigma_X^2 < \infty \quad (3.50)$$

c) **Autocovarianza**

$$c_X(t, \tau) = E\{[X(t) - m][X(t - \tau) - m]\} = c_X(\tau) \quad (3.51)$$

Notar que

$$c_X(0) = \sigma_X^2 = \text{constante} \quad (3.52)$$

d) **Autocorrelación**

$$R_X(t, t') = E[X(t)X(t + \tau)] = R_X(\tau) \quad (3.53)$$

Notar que

$$R_X(0) = E[|X(t)|^2] \quad (3.54)$$

e) **Coefficiente de Autocorrelación**

$$\gamma_x(t, t') = \frac{c_X(\tau)}{\sigma_X^2} = \gamma_x(\tau) \quad (3.55)$$

Evidentemente:

$$\gamma_x(0) = \frac{c_X(0)}{\sigma_X^2} = 1 \quad (3.56)$$

### 3.5 Densidad espectral de procesos estocásticos \*

En las aplicaciones de tipo ingenieril, es corriente suponer que la señal dato forma parte de una realización de un proceso estocástico estacionario. En este caso, el objetivo es realizar el análisis de frecuencias de tal proceso, mediante la densidad espectral o bien mediante el espectro de potencia.

**El análisis de frecuencias de funciones complejas se realiza a través de las series de Fourier, si la función es periódica y a través de las transformadas de Fourier, si la función es de cuadrado integrable.**

Por ejemplo, si una función compleja  $x(t)$  tiene período  $T$  y cumple ciertas condiciones (Apostol [5]), puede representarse mediante la serie de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi f_k t} \quad ; \quad f_k = \frac{k}{T} \quad (3.57)$$

Y se suele decir que la frecuencia  $f_k$  participa en  $x(t)$  con una amplitud  $|c_k|$  y una fase  $\arg(c_k)$ . Los coeficientes de Fourier  $c_k$  constituyen el análisis de frecuencias de  $x(t)$ .

En forma semejante, si  $x(t)$  es una función compleja de cuadrado integrable (Goldberg [33]), puede representarse por:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad (3.58)$$

La función transformada de Fourier  $X(f)$  constituye el análisis de frecuencias en este caso y su interpretación intuitiva no es más que la generalización, por paso al continuo de  $f$ , de la serie de Fourier (3.57). No obstante, deben advertirse algunos cambios cualitativos, incluso a nivel intuitivo; por ejemplo, para una frecuencia dada  $f$ , el valor  $|X(f)|$  no representa una amplitud en el mismo sentido que en (3.57). Si fuera una amplitud, la sustitución del valor  $x(f_0)$  por cero debería alterar la función  $x(t)$  en (3.58) y, sin embargo, las propiedades elementales de la integral de Lebesgue (Kolmogoroff-Fomin [49]), indican que  $x(t)$  no sería alterada.

Es importante observar que funciones tan sencillas y usuales como las senoides, no tienen representación del tipo (3.57) en el sentido usual de la transformada de Fourier y es necesario acudir a la teoría de distribuciones (Schwartz [93]), para poder aplicar transformadas de Fourier a este caso.

De la misma forma que para funciones de parámetro real  $t$ , puede definirse frecuencia cuando el parámetro es discreto; pero conviniendo de que las frecuencias de una sucesión, cuyo intervalo de muestreo es  $T$ , sólo pueden estar contenidas en el intervalo  $[-1/2T, 1/2T]$ , llamado corrientemente banda de frecuencias de Nyquist. La frecuencia  $f_0 = 1/2T$  se llama frecuencia de corte o de Nyquist.

\* Ver Egozcue [25]

Consideremos ahora el proceso cíclico de parámetro discreto

$$x(t) = \sum_{j=1}^n A_j e^{i2\pi f_j T t} \quad (3.59a)$$

en donde las amplitudes se distribuyen normalmente e independientemente entre sí:

$$A_j \sim N(0, \sigma_j^2) \quad ; \quad j = 1, \dots, n \quad (3.59b)$$

$$Cov(A_j, A_k) = \delta_{jk} \quad ; \quad j, k = 1, \dots, n \quad (3.59c)$$

Se observa que las posibles realizaciones del proceso  $X(\cdot)$  son combinaciones lineales de exponenciales complejas de frecuencias  $f_j$ . Por ello es lógico decir, que la frecuencia del sumando  $j$  de (3.59a) es  $f_j$ .

El hecho de que las realizaciones fueran periódicas, nos ha permitido identificar las frecuencias presentes en el proceso con las de sus realizaciones. No obstante, los procesos estacionarios no tienen por qué tener realizaciones periódicas: las realizaciones serán, en general, sucesiones acotadas de valores complejos, con lo que ni siquiera será posible utilizar la transformada de Fourier para analizarlas.

Dos ideas intuitivas pueden conducir a la solución del problema: la **primera**, que todo proceso estacionario de  $L^2(p)$  puede aproximarse por procesos cíclicos como (3.59a); la **segunda**, que la función de autocovarianza "conserva" las frecuencias del proceso.

La **primera idea** se formula mediante el teorema de representación espectral y la **segunda** se relaciona con el teorema de Herglotz.

Comencemos por calcular la función de autocovarianza del proceso  $X(\cdot)$  (3.59a). Un simple cálculo indica que la autocovarianza es

$$c(t) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 e^{i2\pi f_j T t} \quad (3.60)$$

en donde  $\sigma_j^2$  son la varianzas del proceso para cada una de las frecuencias  $f_j$ .

En (3.60) se observa que las frecuencias contenidas en el proceso  $X(\cdot)$ , son las mismas que están presentes en la función de autocovarianza  $c(t)$ . Si esta idea tiene generalización a procesos que no tengan la expresión (3.60), cabe sustituir el análisis de frecuencias de procesos estacionarios, por el análisis de frecuencias de sus funciones de autocovarianza.

Para motivar lo dicho expresaremos la autocovarianza (3.60) a partir, de la transformada de Fourier-Stielges (Apostol [5]) de una función que llamaremos distribución espectral.

Sea la función escalón  $U_j(f) = 0$  si  $f < f_j$ ; y  $U_j(f) = 1$  si  $f \geq f_j$ .

Definimos la función escalonada en el intervalo  $I_0 = [-f_0, f_0)$ , donde  $f_0 = 1/2T$ ; entonces

$$F(f) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{T} \sigma_j^2 U_j(f) \quad (3.61)$$

que por ser monótona creciente puede ser considerada como la distribución de una cierta medida  $\mu$  (Kolmogoroff-Fomin [49]).

Basta para ello tomar como medida de un intervalo semiabierto  $(f_1, f_2] \subset I_0$ ,

$$\mu\{(f_1, f_2]\} = F(f_2) - F(f_1) \quad (3.62)$$

Puede demostrarse que la definición de la medida puede extenderse a cualquier conjunto boreliano de  $I_0$  (Ash-Gardner [8]).

Si se toma transformada de Fourier de la medida  $\mu$  (Ash-Gardner [8]) o de Fourier-Stieltjes de su distribución  $F$  (Apostol [5]), se obtiene

$$T \int_{I_0} e^{i2\pi T f t} d\mu(f) = T \int_{I_0} e^{i2\pi T f t} dF(f) = \sum_{j=1}^n e^{i2\pi T f_j t} \sigma_j^2 \quad (3.63)$$

Es decir, la función de distribución  $F$  tiene como antitransformada de Fourier-Stieltjes, la función de autocovarianza del proceso cíclico (3.59a). **A la función  $F$  se le llama distribución espectral y a  $\mu$ , medida espectral del proceso  $X(\cdot)$ .**

Observemos que la medida  $\mu$  es discreta y sólo tiene peso en los puntos  $f_j$ , por lo que dada la medida espectral  $\mu$  (o en su lugar la distribución  $F$ ), conocemos cuáles son las frecuencias presentes en  $c(t)$ , y siguiendo nuestra idea inicial, representa el análisis de frecuencias del proceso cíclico (3.59a).

Estas propiedades de los procesos cíclicos pueden ser extendidas a todos los procesos estacionarios de  $L^2(p)$  y así lo expresa el teorema de Herglotz (Ash-Gardner [8]).

### TEOREMA DE HERGLOTZ

Una función  $c(t)$  compleja y que cumple la propiedad hermitica  $c(t) = c(-t)^*$ , es una función de autocovarianza de un proceso estacionario de  $L^2(p)$ ,  $X(\cdot)$ , si y sólo si existe una medida  $\mu$  (con distribución asociada  $F$ ) definida en  $I_0$ , tal que

$$c(t) = T \int_{I_0} e^{i2\pi Tft} d\mu(f) = T \int_{I_0} e^{i2\pi Tft} dF(f) \quad (3.64)$$

### DEFINICIÓN de medida y distribución espectral

Si  $X(\cdot)$  es un proceso estacionario de  $L^2(p)$  con función de autocovarianza  $c(t)$ , la medida  $\mu$  y su distribución  $F$  que cumplen (3.64), son la medida y distribución espectrales del proceso  $X(\cdot)$ . Si la medida  $\mu$  es absolutamente continua, se define la densidad espectral  $S(f)$  que cumple

$$S(f) = \frac{d}{df} F(f) \quad ; \quad F(f) = \int_{-f_0}^f S(y) dy \quad (3.65)$$

En una primera interpretación de la distribución espectral, conviene saber que:

$$c(0) = \sigma_{x(\cdot)}^2 = TF(f_0) = T \int_{-f_0}^f S(f) df \quad (3.66)$$

que indica que las unidades de  $TF(f_0)$  o de las integrales de la densidad espectral por  $T$ , son unidades de varianza del proceso. Por ello las áreas bajo la densidad espectral por  $T$  pueden interpretarse como la parte de la varianza del proceso asociadas al intervalo de frecuencias que contiene dicha área y que además coincide con la medida espectral del mismo intervalo.

En las aplicaciones, a la función  $TS(f)$  se le llama densidad espectral de potencia, debido a que si  $X(\cdot)$  tiene unidades de una velocidad entonces, la varianza es proporcional a la energía cinética.

El término espectro de potencia es algo impropio, puesto que el espectro del proceso  $X(\cdot)$  responde mejor a aquellas frecuencias presentes en el proceso.

### DEFINICIÓN de espectro de un proceso

Sea  $X(\cdot)$  un proceso estacionario de  $L^2(p)$  y  $\mu$  la medida espectral asociada. Un punto  $f_1 \in I_0$  pertenece al espectro de  $X(\cdot)$ , si para cualquier intervalo abierto contenido en  $I_0$  y que contenga el punto  $f_1$ , tiene medida según  $\mu$  no nula.

Se dice que un proceso tiene espectro discreto cuando éste lo constituyen puntos aislados del intervalo  $I_0$ . Un ejemplo de ello son los procesos cíclicos como el (3.59a); que teniendo espectro discreto, no tiene densidad espectral. No obstante, simbólicamente se escribe:

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \delta(f - f_j) \quad (3.67)$$

la misma que nos indica que la varianza se acumula en los puntos  $\delta$  de Dirac.

### 3.5.1 Análisis univariante

En lo que sigue, restringimos el estudio a los procesos que contienen densidad espectral. No distinguiremos la notación del proceso estocástico de las realizaciones del mismo. Supondremos además que nuestros datos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  están muestreados con intervalo  $T$ , y proceden de una realización del proceso  $x(t)$ , que supondremos de media nula:  $E[x(t)] = 0$ . El operador  $E$  representa el valor esperado de una variable aleatoria.

Como hemos visto, el análisis de las frecuencias de procesos estacionarios no puede hacerse directamente a partir de sus realizaciones, pues estas funciones no tienden a cero para tiempos grandes y, como consecuencia no existen integrales o series de tipo (3.1a) ó (3.6a). Esta dificultad se solventó definiendo la función de autocovarianza (3.64).

Por este motivo, se define la densidad espectral, como la transformada de Fourier de la autocovarianza; así, en el caso continuo el par de transformadas son:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) e^{-i\omega t} dt = S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (3.68a)$$

$$c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f t} df \quad (3.68b)$$

y en el caso discreto, operando sobre los enteros el par de transformadas son:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{-i\omega n T} = S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{-i2\pi f n T} \quad (3.69a)$$

$$c(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega) e^{i\omega n T} d\omega = T \int_{-f_c}^{f_c} S(f) e^{i2\pi f n T} df \quad (3.69b)$$

donde las frecuencias de corte o de Nyquist son:

$$\omega_c \left( \frac{\text{rad}}{s} \right) = \frac{\pi}{T}$$

$$f_c \text{ (Hz)} = \frac{1}{2T}$$

### 3.5.2 Análisis multivariante\*

Los procesos físicos que varían con el tiempo, requieren más que una medida para describir adecuadamente su comportamiento. Así, la posición o estado del proceso en cada instante de tiempo, será representado por un vector de medidas dependientes del tiempo, llamado una serie de tiempo multivariado o vector multivariante.

Consideraremos solamente aquellos modelos de series de tiempo multivariados, para los cuales sus componentes son series de tiempo univariados y que poseen densidad espectral de potencia.

#### 3.5.2.1 Procesos estocásticos estacionarios débiles multivariados

Sea el conjunto  $\{x_j(t); j = 1, 2, \dots, p; -\infty < t < \infty\}$  una familia de variables aleatorias reales en el mismo espacio de probabilidad. Para que el vector de procesos estocásticos

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ \dots \\ x_p(t) \end{pmatrix}; \quad (-\infty < t < \infty) \quad (3.70)$$

sea un proceso estocástico estacionario débil multivariado, se exige que la función de distribución conjunta de todos los procesos  $x_j(t)$  que lo componen, sea invariante por cambios de origen de tiempo. Nótese que no es suficiente que cada uno de los procesos sea por sí solo estacionario.

Si el vector multivariado es real y de media nula, entonces

$$E[\mathbf{X}(t)] = \begin{bmatrix} E(x_1(t)) \\ E(x_2(t)) \\ \dots \\ \dots \\ E(x_p(t)) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.71)$$

Se define la **función de covarianza multivariada**  $\mathbf{C}(\tau)$  como la matriz de funciones cuyas componentes son

$$C_{jk}(\tau) = E[x_j(t)x_k^*(t - \tau)] \quad (3.72a)$$

en donde (\*) significa conjugación compleja, y que en el caso de valores reales, tenemos que

$$\mathbf{C}(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t - \tau)] \quad ; \quad \mathbf{C}(\tau) = \mathbf{C}^*(-\tau) \quad (3.72b)$$

en donde,  $\mathbf{x}^T(t - \tau)$  constituye el vector transpuesto de  $\mathbf{x}(t - \tau)$  en el caso real y transposición hermítica en el caso complejo.

\* Ver Koopmans [50]



Para que la función de covarianza corresponda a un proceso estacionario débil o de segundo orden, debe cumplir con las hipótesis definidas en la sección (3.4.2), las mismas que se resumen a continuación:

(i)  $E[x_j(t)] = m_j; \quad j = 1, 2, \dots, p$

las constantes  $m_j$ , pueden suponerse igual a cero, si se reemplaza cada proceso por el residuo  $[x_j(t) - m_j]$ .

(ii)  $E[x_j(t + \tau)x_k(t)] = C_{j,k}(\tau); \quad (-\infty < t, \tau < \infty); \quad (1 \leq j, k \leq p)$

esto es, las covarianzas dependen de  $\tau$ , el retardo entre los argumentos de tiempo, pero no dependen de  $t$ .

Quando  $j = k$ , estamos en la condición de estacionaridad de covarianza univariante o autocovarianza

Quando  $j \neq k$ , estamos en la condición de estacionaridad de covarianza propiamente dicha o cross-covarianza

Una aplicación de la inecuación de Schwarz nos conduce a que

$$|C_{j,k}(\tau)| \leq (C_{j,j}(0)C_{k,k}(0))^{1/2} \quad ; \quad (-\infty < \tau < \infty) \quad (3.73)$$

consecuentemente, todas las funciones de covarianza son finitas. Además, realizando un cambio de variables se demuestra que:

$$C_{j,k}(-\tau) = C_{k,j}(\tau) \quad (3.74)$$

Así, aunque las autocovarianzas son funciones pares, como se concluyó en la sección 3.5.4; las funciones de cross-covarianza no son funciones pares.

Se definen las **densidades espectrales multivariadas**, como la transformada discreta de Fourier de las covarianzas de cada componente:

$$S_{j,k}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C_{j,k}(\tau)e^{-i\omega\tau T} \quad (3.75)$$

donde

$S_{j,j}(\omega)$ ...Densidad espectral real univariada

$S_{j,k}(\omega)$ ...Densidad espectral cruzada o cross-densidad espectral

De la definición (3.75) y de la desigualdad de Schwarz, se deduce que:

$$|S_{j,k}(\omega)| \leq (S_{j,j}(\omega)S_{k,k}(\omega))^{1/2} \quad (3.76)$$

Es fácil comprobar que  $S_{j,j}(\omega)$  es una función real, puesto que  $C_{j,j}(\tau)$  es par, mientras que  $S_{j,k}(\omega)$ ,  $j \neq k$ , es en general, compleja, dado que  $C_{j,k}(\tau)$  no es par.

### 3.5.2.2 Los parámetros espectrales bivariados

El parámetro fundamental de segundo orden es la matriz de “densidad espectral”:

$$S(\omega) = [S_{j,k}(\omega)] \quad (3.77)$$

Recordemos que nos interesa las interrelaciones entre pares de componentes de las series  $x_j(t)$  y  $x_k(t)$ . Estas relaciones se determinan, por los tres parámetros bivariados  $S_{j,j}(\omega)$ ,  $S_{k,k}(\omega)$  y  $S_{j,k}(\omega)$  para cada  $j \neq k$ . Tomamos a “ $j$ ” y “ $k$ ” como índices arbitrarios.

Estos parámetros nos ofrecen la información disponible en la correlación entre  $x_j(t)$  y  $x_k(t)$ , en la forma más común.

Definiremos dos sistemas de parámetros de representación, en función de las dos representaciones estándar de números complejos.

#### A) Representación cartesiana

La representación cartesiana de los números complejos, nos conduce a:

$$S_{j,k}(\omega) = c_{j,k}(\omega) - iq_{j,k}(\omega) \quad (3.78)$$

donde las funciones reales  $c_{j,k}(\omega)$  y  $q_{j,k}(\omega)$  se denominan **densidad cospectral (cospectrum)** y **cuadratura espectral (quadspectrum)**, respectivamente.

Notar que el símbolo “ $c$ ” en este caso, representa el cospectrum y no la covarianza, como ha venido representando en las secciones precedentes. El signo menos(-) en la ec.(3.78) es consecuencia de la selección de signo en el exponente de la representación espectral en (3.69b):

$$C_{j,k}(n) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega nT} S_{j,k}(\omega) d\omega = T \int_{-f_c}^{f_c} e^{i2\pi f nT} S_{j,k}(f) df \quad (3.79a)$$

así, en todos los casos de interés práctico, estas expresiones pueden ser invertidas, para dar:

$$S_{j,k}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{j,k}(n) e^{-i\omega nT} = S_{j,k}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{j,k}(n) e^{-i2\pi f nT} \quad (3.79b)$$

por tanto, podemos escribir que:

$$C_{j,k}(n) = \frac{C_{j,k}(n) + C_{j,k}(n)}{2} + \frac{C_{j,k}(n) - C_{j,k}(n)}{2} \quad (3.80)$$

siendo el primer término del lado derecho una función par y el segundo término, una función impar.

Basándonos en (3.75) e identificando los parámetros reales e imaginarios, obtenemos que:

$$c_{j,k}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos \omega n T \left\{ \frac{C_{j,k}(n) + C_{j,k}(-n)}{2} \right\} \quad (3.81a)$$

$$q_{j,k}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sen \omega n T \left\{ \frac{C_{j,k}(n) - C_{j,k}(-n)}{2} \right\} \quad (3.81b)$$

Estas expresiones juegan un papel muy importante en el cálculo de los estimadores cross-espectrales.

Notemos que los parámetros reales  $c_{j,k}(\omega)$ ,  $q_{j,k}(\omega)$ ,  $S_{j,j}(\omega)$ ,  $S_{k,k}(\omega)$ , son equivalentes al sistema original de parámetros espectrales bivariados.

## B) Representación polar

La representación polar de los números complejos, nos conduce a otro sistema de parámetros espectrales, así:

$$S_{j,k}(\omega) = |S_{j,k}(\omega)| e^{i\theta_{j,k}(\omega)} \quad (3.82)$$

y se define a

$$\rho_{j,k}(\omega) = \frac{|S_{j,k}(\omega)|}{(S_{j,j}(\omega)S_{k,k}(\omega))^{1/2}} \quad (3.83)$$

Las funciones  $\theta_{j,k}(\omega)$  y  $\rho_{j,k}(\omega)$  se llaman la **fase** [fase de  $x_j(t)$  sobre  $x_k(t)$ ] y **coherencia**, respectivamente.

La función:

$$\gamma_{j,k}(\omega) = \frac{S_{j,k}(\omega)}{(S_{j,j}(\omega)S_{k,k}(\omega))^{1/2}} \quad (3.84)$$

se denomina **coherencia compleja**.

La coherencia, satisface la ecuación:

$$0 \leq \rho_{j,k} \leq 1 \quad (3.85)$$

siempre que la relación (3.83) esté bien definida (densidades no nulas).

En frecuencias para las cuales  $S_{j,j}(\omega)S_{k,k}(\omega) = 0$ , definimos  $\rho_{j,k}(\omega) = 0$

Se ve fácilmente que,  $\rho_{j,k}(\omega)$ ,  $\theta_{j,k}(\omega)$ ,  $S_{j,j}(\omega)$ ,  $S_{k,k}(\omega)$ , constituyen un sistema de parámetros espectrales, equivalentes al sistema original.

Estos parámetros se obtienen desde las densidades espectrales, cospectrum y cuadspectrum, por medio de las siguientes relaciones:

$$\rho_{j,k}(\omega) = \left( \frac{c_{j,k}^2(\omega) + q_{j,k}^2(\omega)}{S_{j,j}(\omega)S_{k,k}(\omega)} \right)^{1/2} \quad (3.86)$$

y

$$\theta_{j,k}(\omega) = -\text{Arctan} \left( \frac{q_{j,k}(\omega)}{c_{j,k}(\omega)} \right) \quad (3.87)$$

siempre que  $C_{j,k}(\omega) > 0$ . Si  $C_{j,k}(\omega) < 0$  basta sumar  $\pi$  en la ecuación (3.87). El signo menos(-) nuevamente resulta del hecho que  $q_{j,k}(\omega) = -\Im S_{j,k}(\omega)$ .

La "fase" y la "coherencia" son, quizás los parámetros más útiles para medir las relaciones entre  $x_j(t)$  y  $x_k(t)$ , dado que, los valores de estas funciones pueden ser interpretados cuantitativamente.

### 3.5.2.3 Interpretación de la "fase y de la coherencia"

Consideremos dos procesos cíclicos (complejos)

$$x_r(t) = \sum_{j=1}^n A_{rj} e^{i\omega_j t} \quad ; \quad r = 1, 2 \quad (3.88)$$

donde  $A_{rj}$  son variables aleatorias complejas incorrelacionadas entre sí de media nula y varianzas  $\sigma_{rj}^2$ ;  $n$  es un número entero arbitrario.

Es fácil comprobar que la función de autocovarianza es

$$C_{rr}(\tau) = \sum_{j=1}^n \sigma_{rj}^2 e^{i\omega_j \tau} \quad (3.89)$$

y la cross-covarianza

$$C_{12}(\tau) = \sum_{j=1}^n v_j e^{i\omega_j \tau} \quad (3.90)$$

siendo  $Cov(A_{1j}, A_{2j}) = v_j$ .

Estos procesos no tienen densidad espectral pero su distribución espectral es una función escalonada con saltos en cada una de las  $\omega_j$  de magnitud  $2\pi\sigma_{rj}^2$  para cada uno de los procesos  $r = 1, 2$ . Las inexistentes densidades espectrales pueden idealizarse como se indicó en (3.67):

$$S_r(\omega) = 2\pi \sum_{j=1}^n \sigma_{rj}^2 \delta(\omega - \omega_j) \quad ; \quad r = 1, 2 \quad (3.91)$$

$$S_{12}(\omega) = 2\pi \sum_{j=1}^n v_j \delta(\omega - \omega_j) \quad (3.92)$$

en donde la densidad se acumula en los puntos  $\delta$  de Dirac.

Si se intenta calcular la coherencia, obtenemos que en los puntos  $\omega = \omega_j$ , para  $j = 1, \dots, n$

$$\rho_{12}(\omega_j) = \frac{|v_j|}{\sigma_{1j}\sigma_{2j}} \quad (3.93)$$

siendo nula en los demás puntos.

si ponemos  $v_j = |v_j|e^{i\theta_j}$ , donde  $\theta_j$  representa la fase en  $\omega = \omega_j$ ; expresando  $A_{rj} = |A_{rj}|e^{i\varphi_{rj}}$  y teniendo en cuenta que:

$$v_j = E[A_{1j}A_{2j}^*] = E[A_{1j}e^{i\omega_j t}(A_{2j}e^{i\omega_j t})^*] = E[|A_{1j}||A_{2j}|]E[e^{i\varphi_{1j}}e^{-i\varphi_{2j}}]$$

entonces

$$v_j = |v_j|E[e^{i(\theta_{12}(\omega_j))}] \quad ; \quad \theta_{12}(\omega_j) = \varphi_{1j} - \varphi_{2j} \quad (3.94)$$

deducimos de (3.94) que  $\rho_{12}(\omega_j)$  es el coeficiente de correlación, constante en el tiempo, entre los procesos  $A_{rj}e^{i\omega_j t}$  con  $r = 1, 2$ ; mientras que  $\theta_j$  representa su desfase medio.

En la medida que todo proceso estacionario de  $L^2$  puede aproximarse por modelos cíclicos (Ash-Gardner [8], Koopmans [50]); esta interpretación se mantiene válida.

Esto es, en este caso, la función fase es simplemente, la diferencia en fase de las dos series en la frecuencia  $\omega$  o, más precisamente, la fase de  $x_j(t)$  sobre  $x_k(t)$  en  $\omega$ .

Es razonable esperar que el coeficiente de coherencia tenga propiedades de valor absoluto de un coeficiente de correlación, en una frecuencia  $\omega$ . En particular, los valores extremos, cero y uno, corresponderán a una ausencia de correlación y al máximo grado de correlación posible, respectivamente.

**El coeficiente de correlación mide el grado de "asociación lineal" entre dos variables aleatorias.** Esto es, el cuadrado del coeficiente de correlación representa la parte de varianza de una variable aleatoria que puede ser explicada linealmente (por regresión lineal) por la otra. Se usa el término "asociación" antes que "dependencia", ya que una alta correlación no necesariamente indica una relación causal entre las variables aleatorias.

Similarmente, el término "regresión" se usa para describir una relación directa de una variable aleatoria con otra. Esto es, mientras hablamos de asociación entre  $x_1$  y  $x_2$ , las variables se tratan en igual condición. En cambio, cuando hablamos de regresión lineal de  $x_1$  y  $x_2$ , pensamos de  $x_1$  como la variable dependiente y, de  $x_2$  como la variable independiente, con alguna clase de relación funcional; en este caso lineal. Esta distinción marca la diferencia entre correlación y regresión.

Por tanto, el coeficiente de coherencia, mide el grado de "asociación lineal" entre las series de tiempo  $x_j(t)$  y  $x_k(t)$ . Por ello decimos que la coherencia en una frecuencia  $\omega$ , es el coeficiente de correlación entre la parte del proceso 1 que corresponde a la frecuencia  $\omega$  y la misma del proceso 2; la fase representa el desfase medio entre las partes asociadas a la frecuencia  $\omega$  en el proceso 1 y el 2. También se dice que la coherencia en  $\omega$  es la parte de densidad de varianza del proceso 1 en la frecuencia  $\omega$ , que se puede obtener por filtrado lineal o regresión lineal sobre el proceso 2.

### 3.6 Métodos de estimación espectral

#### 3.6.1 Introducción

En las secciones anteriores se han definido los conceptos básicos del análisis de las frecuencias; es necesario ahora plantear los problemas de cálculo efectivo de las funciones de autocovarianza y densidad espectral, a partir de una realización limitada y discretizada del proceso estocástico real de media nula  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ .

Las dos técnicas más usuales de estimación espectral, denominadas convencionales o no paramétricas son:

- El estimador de la Densidad Espectral de Potencia, basado sobre la aproximación indirecta de la densidad espectral, a partir de un estimador de autocovarianza y que fue popularizado por Blackman y Tukey [14].

- Estimador basado sobre la aproximación directa de la densidad espectral, por medio del algoritmo de la FFT y que típicamente se le conoce como **periodograma**.

#### 3.6.2 Estimador espectral de Blackman y Tukey ( $\hat{S}_{BT}$ )

En esencia, consiste en estimar la función de autocovarianza, prolongarla con valores nulos y finalmente obtener la estima del espectro de potencia por simple transformación discreta de Fourier; así:

$$\hat{S}_{BT}(\omega) = \sum_{n=-M}^M \hat{c}_{xx}(n) e^{-i\omega nT} = \hat{S}_{BT}(f) = \sum_{n=-M}^M \hat{c}_{xx}(n) e^{-i2\pi f nT} \quad (3.95)$$

donde  $\hat{c}_{xx}(n)$  es un estimador de la autocovarianza de la serie de datos.

No obstante la aparente sencillez del método, aparecen una serie de cuestiones que convierten este método convencional en una técnica delicada.

Antes de definir el estimador de la autocovarianza, imaginemos que la realización ilimitada del proceso  $\dots, x_{-1}, x_0, \dots, x_N, \dots$ , ha sido multiplicada por una ventana temporal  $\{w_n\}$  (3.13), que pudiera ser rectangular o no. Si en  $y_n = x_n w_n$ , la ventana aplicada es la rectangular; la sucesión  $\{y_n\}$  no es más que la  $\{x_n\}$  completada con ceros fuera de los datos conocidos. Por motivos que se expondrán más adelante, no se suele tomar la ventana rectangular.

Como estimador de la autocovarianza del proceso suele tomarse  $\hat{c}_{xx}(n)$  en (3.95), igual a

$$\hat{c}_N(nT) = \hat{c}_N(-nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{k+n} y_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-n} y_{k+n} y_k \quad (3.96)$$

expresión directamente basada en la extrapolación nula que se ha realizado de los datos.

Nótese que el número de retardos  $n = 0, 1, \dots, M$  ( $M < N$ ), puede ser como máximo el número de datos, pero en general se calculan menos que ese número. Esa es la diferencia fundamental con el método del periodograma que se expone a continuación.

Una de las propiedades más destacables del estimador  $\hat{c}_N$  es que es sesgado, es decir:

$$E[\hat{c}_N(nT)] = c(nT)r(nT) \quad (3.97)$$

donde  $c(nT)$  es la verdadera autocovarianza del proceso y  $r$  representa el efecto de la ventana

$$r(nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1-n} w_{k+n} w_k \quad (3.98)$$

Cuando la ventana es rectangular,  $r(nT) = (N - |n|)/N$ , que es diferente de la unidad si  $n \neq 0$ , y (3.97) no coincide con  $c(nT)$  salvo para  $n = 0$ ; no obstante, el estimador (3.96) para ventana rectangular, es asintóticamente centrado, pues tomando el límite en (3.96) con  $N \rightarrow \infty$ , el valor esperado tiende a  $c(nT)$ . Puede, además, demostrarse que cuando  $N \rightarrow \infty$ , la varianza del estimador tiende a cero; es, por tanto, un estimador consistente (Tretter [102]).

Un estimador no sesgado de la autocovarianza es:

$$\hat{c}_{xx}(nT) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n-1} y_{k+n} y_k \quad (3.99)$$

$$\text{para } (0 \leq n \leq M); \quad M \leq N - 1$$

Determinándose el estimador de retardo negativo, a partir del estimador de retardo positivo como

$$\hat{c}_{xx}(nT) = \hat{c}_{xx}(-nT) \quad (3.100)$$

en concordancia con la propiedad de simetría de la función de autocovarianza de un proceso estacionario.

Sin embargo, tanto Jenkins-Watts [43] y Parzen [78], [79]; para sistemas de datos finitos, sugieren el uso del estimador sesgado de la autocovarianza (3.96), ya que se consigue un menor error cuadrático medio que con (3.99).

### 3.6.3 Estimador espectral del PERIODOGRAMA

Este estimador es un método directo y constituye una versión moderna del periodograma de Schuster [91], [92].

Usando la notación del apartado anterior  $y_n = w_n x_n$ , partiendo de una expresión equivalente al estimador sesgado de la autocovarianza (3.96) y considerando todos los retardos posibles, tenemos que:

$$\hat{c}_P(nT) = \hat{c}_P(-nT) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_{n-k} y_k \quad ; \quad z_n = y_{-n} \quad (3.101)$$

cuya transformada discreta de Fourier de (3.101), discretizada en los puntos  $k\Omega$ , con  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  y  $\Omega = 2\pi/NT$ ; puede expresarse a partir de (3.8) y (3.9) como:

$$\hat{S}_N(k\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_P(nT)e^{-i\Omega Tkn} = \frac{1}{N} \tilde{Z}(k\Omega) \tilde{X}(k\Omega) \quad (3.102a)$$

$$\hat{S}_P(k\Omega) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-i\Omega Tkn} \right] \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_{-j} e^{-i\Omega Tkj} \right] \quad (3.102b)$$

$$\hat{S}_P(k\Omega) = \left| \frac{1}{N} Y_N(k\Omega) \right|^2 ; \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.103)$$

donde  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{Z}$  representan las transformadas discretas de  $\{y_n\}$  e  $\{z_n\}$ ;  $Y_N$  la transformada limitada de  $\{y_n\}$ ; o lo que es lo mismo, de  $x_n$  después de aplicar la ventana  $\{w_n\}$ .

Nótese que si  $k > N/2 = k_o$ ,  $k\Omega > \pi/T$ ; es decir se obtienen puntos fuera de la banda de Nyquist. La periodicidad de la función  $\hat{S}_P$ , nos permite identificar los valores  $\hat{S}_P(k\Omega) = \hat{S}_P((k_o - k)\Omega)$ , que corresponden a las frecuencias negativas.

Si representamos por  $\tilde{R}(\omega)$  la transformada discreta de  $\{r(nT)\}$ , fácilmente se llega (Tretter [102]) a que

$$E[\hat{S}_P(\omega)] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \tilde{R}(\lambda) S(\omega - \lambda) d\lambda \quad (3.104)$$

Es decir, el valor esperado del periodograma, es igual al verdadero valor de la densidad espectral, convolucionada circularmente con la función  $\tilde{R}(\omega)$ , que depende solo de la ventana temporal.

En general, los estimadores espectrales  $\hat{S}_{BT}$  y  $\hat{S}_P$  no son idénticos. Sin embargo, si se usa el estimador sesgado de autocovarianza (3.96) y se calcula con tantos retardos como muestras de datos menos uno se disponga ( $M=N-1$ ), entonces el estimador de BT y el estimador del periodograma, conducen a idénticos resultados numéricos [76]. Así, el periodograma se puede considerar como un caso especial del procedimiento del estimador de BT.

En la figura 3.4 se representa la aproximación directa e indirecta para obtener la densidad espectral y la densidad espectral de potencia, respectivamente, de una señal  $x(t)$ .

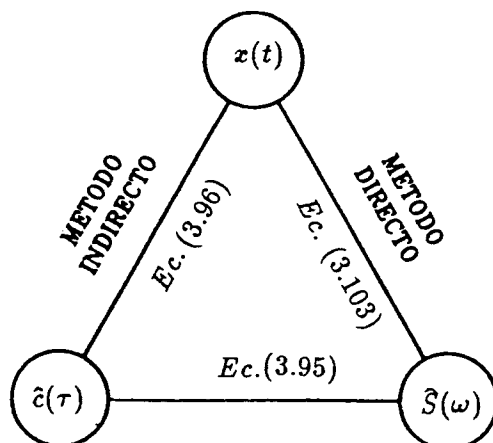


Figura 3.4 Aproximación directa e indirecta para obtener la densidad espectral



### 3.6.4 Ventanas temporales y espectrales

Como ya hemos analizado en la sección 3.3.2 (ecuaciones 3.12 y 3.13), la transformada discreta de Fourier (DFT) se convierte en transformada discreta finita de Fourier, cuando la señal  $x(t)$  se muestrea a intervalos fijos de tiempo  $T$  y se utiliza una ventana temporal rectangular.

Por otra parte, en la sección 3.6.3 (ecuaciones 3.101 a 3.104) se concluyó, que el valor esperado del periodograma  $\hat{S}_P(\omega)$ , es igual a la convolución circular entre la densidad espectral verdadera  $S(\omega)$  y la función resultante de la transformada de Fourier de la ventana temporal  $\tilde{R}(\omega)$ .

Si la potencia real de una señal está concentrada en un ancho de banda estrecho, la operación de convolución propagará la potencia dentro de las regiones de frecuencia adyacente. Este fenómeno, denominado "leakage" es una consecuencia del ventaneado implícito inherente en el cálculo del periodograma.

El "leakage", tiene un impacto perjudicial sobre la estimación espectral y la detectabilidad de las componentes sinusoidales [81], [99], [101].

Una aproximación intuitiva del "leakage", es que las señales con frecuencias diferentes al sistema base, no son periódicas en la ventana de observación. La extensión periódica de una señal que no se registre con su período natural, exhibirá discontinuidades en los extremos de observación (ver figura 3.5).

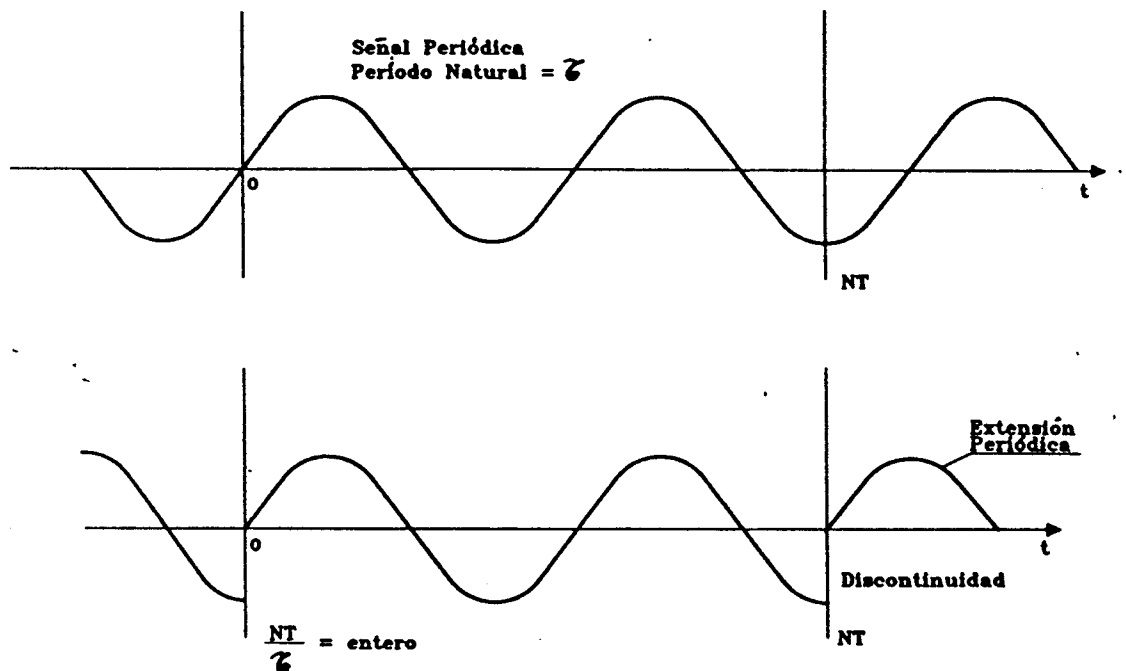


Figura 3.5 Extensión periódica de sinusoides no periódicas en el intervalo de observación

Los efectos del “leakage” se pueden reducir por la selección de ventanas de ponderación no uniforme; sin embargo, la resolución o diferencia de frecuencias entre dos máximos espectrales que son identificados por el estimador, es siempre proporcional a  $\frac{1}{NT}$  (Hz).

Las características deseables de una ventana temporal (ver figura 3.6) son que:

- El lóbulo central de  $\tilde{R}$  sea estrecho, lo cual, en general, sólo se obtiene aumentando el número de muestras.
- Los lóbulos laterales de  $\tilde{R}$  se amortiguen rápidamente, lo que solo se consigue a costa de ensanchar el lóbulo central.

Ateniéndose a estas características, se han diseñado ventanas que mejoran considerablemente a la ventana rectangular. Entre ellas cabe citar las de Hann, Hamming, Bingham, Blackman, Blackman-Harris, Kaiser, Bartlett, etc, que pueden verse referenciadas en Blackman-Tukey [14], Tretter [102] y Harris [35].

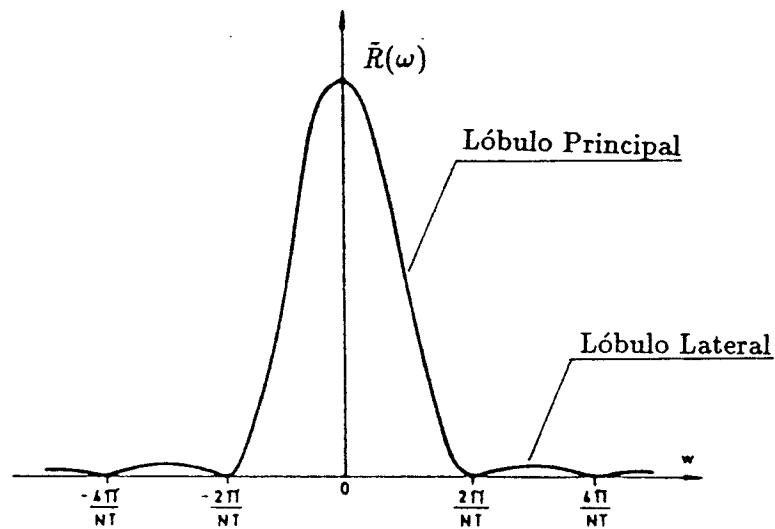


Figura 3.6 Ventana espectral correspondiente a la ventana temporal rectangular

En la figura 3.7, se pueden observar algunos ejemplos de ventanas clásicas que son de uso común.

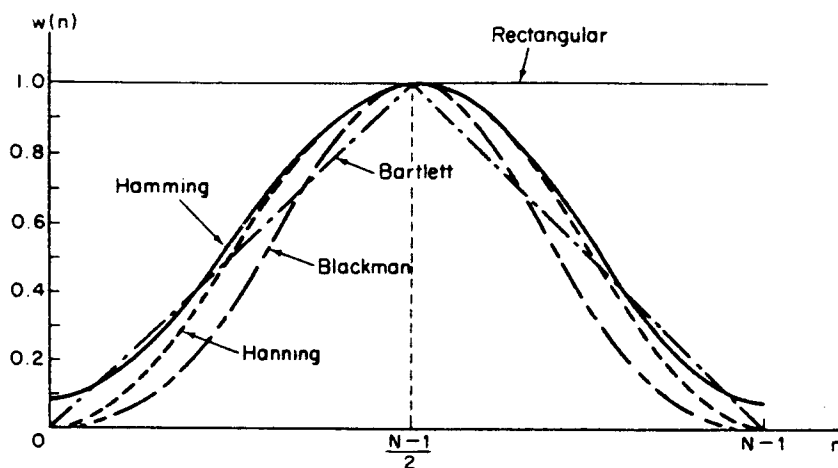


Figura 3.7 Ventanas temporales de uso común  
(De Oppenheim y Schafer [74])

A continuación, se especifica las ecuaciones temporales y frecuenciales de las ventanas rectangular, Hamming, Blackman y Blackman-Harris:

A) VENTANA RECTANGULAR

$$w(n) = 1 \quad ; \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (3.105a)$$

$$W(\omega) = e^{-i\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\text{Sen}[\frac{N}{2}\omega]}{\text{Sen}[\frac{1}{2}\omega]} \quad (3.105b)$$

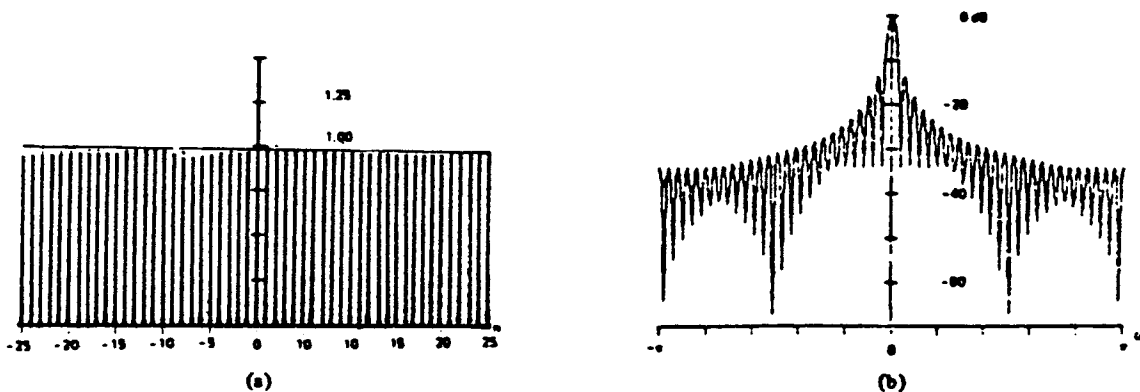
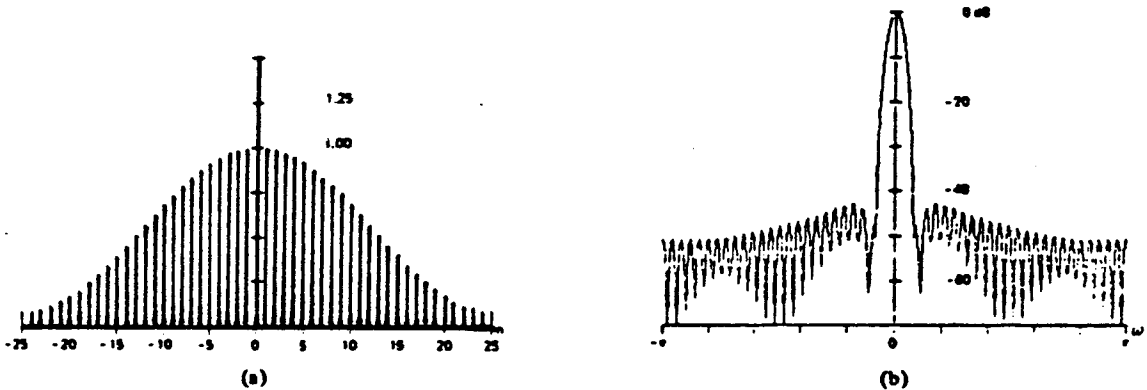


Figura 3.8 Ventana rectangular. (a) Temporal; (b) Espectral  
(De Harris [35])

**B) VENTANA DE HAMMING**

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right); \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.106a)$$

$$W(\omega) = \alpha D(\omega) + 0.5(1-\alpha)\left[D\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + D\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)\right] \quad (3.106b)$$



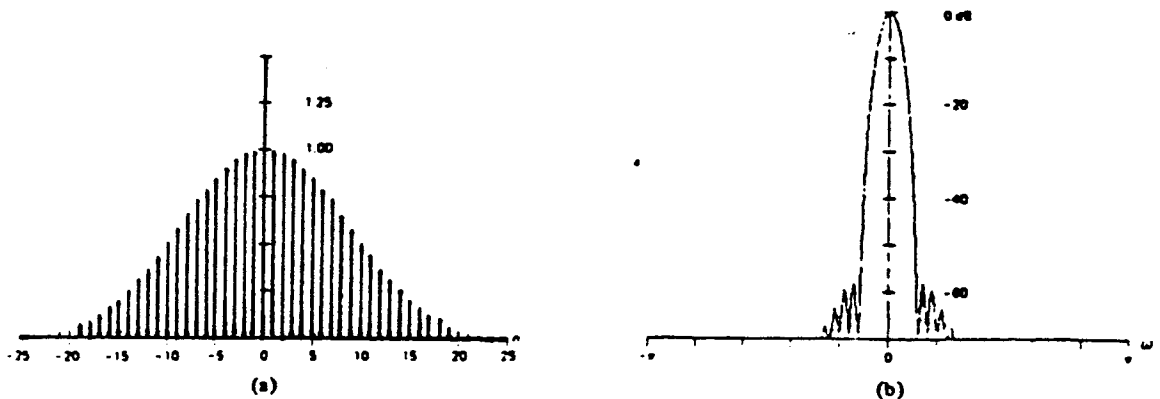
**Figura 3.9** Ventana de Hamming. (a) Temporal; (b) Espectral  
(De Harris [35])

**C) VENTANA DE BLACKMAN**

$$w(n) = 0.42 - 0.50 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right); \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.107a)$$

$$W(\omega) = \sum_{m=0}^{N/2} (-1)^m \frac{a_m}{2} \left[ D\left(\omega - \frac{2\pi}{N}m\right) + D\left(\omega + \frac{2\pi}{N}m\right) \right] \quad (3.107b)$$

$$\sum_{m=0}^{N/2} a_m = 1.0 \quad (3.107c)$$



**Figura 3.10** Ventana de Blackman. (a) Temporal; (b) Espectral  
(De Harris [35])

Puesto que estas ventanas son simétricas, sus fases correspondientes son lineales.

Las ventanas espectrales (transformada de Fourier de las ventanas temporales), se representan en unidades de decibelios (db). Recordemos que el decibelio es una unidad de medida de relación entre dos magnitudes o niveles ( $N(db) = 20 \log \frac{A_2}{A_1} = 20[\log A_2 - \log A_1]$ ).

El ancho del lóbulo central de la ventana rectangular es el más estrecho de todas las ventanas. Sin embargo, el nivel del primer lóbulo lateral está a solamente  $-13db$  por debajo del pico principal, resultando por esto, oscilaciones de considerable tamaño (fenómeno de Gibbs).

Algunos investigadores (Kaiser[46], Harris[34], Dolph[35], Barcion[10], etc) han realizado estudios de optimización de las ventanas, con el objeto de encontrar los parámetros que maximicen la energía en el lóbulo principal y minimicen el nivel de los lóbulos laterales.

Harris [34], [35], aplica una técnica de búsqueda del gradiente a la ventana de Blackman y encuentra las ventanas, para las cuales con 3 y 4 parámetros se consigue un mínimo nivel del lóbulo lateral. A esta familia de ventanas le denominó "Ventana de Blackman-Harris".

Esta ventana se define como:

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)^2 - a_3 \cos\left(\frac{2\pi}{N}3n\right) \quad (3.108)$$

$$(0 \leq n \leq N - 1); \quad n \in Z$$

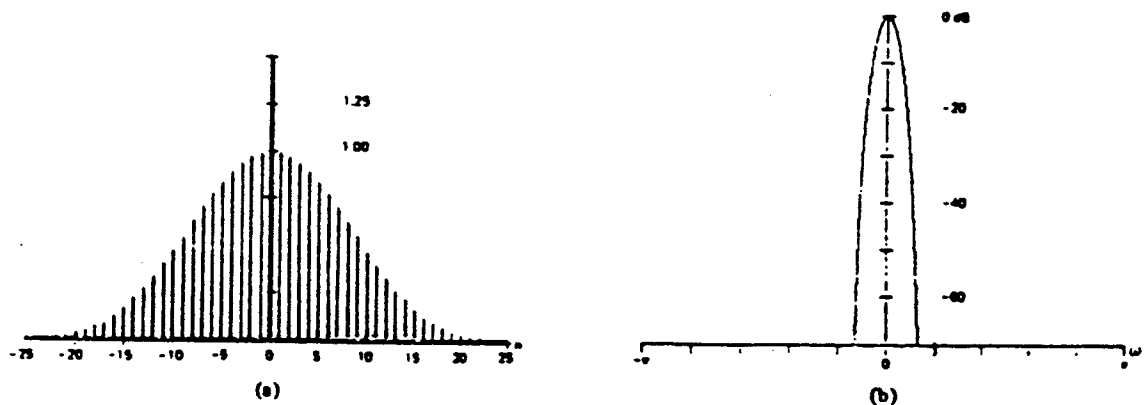


Figura 3.11 Ventana de Blackman-Harris. (a) Temporal; (b) Espectral  
(De Harris [35])

Los parámetros principales de la familia de ventanas Blackman-Harris, se indican en el cuadro 3.1.

Parámetros	3-térm. (-67dB)	3-térm. (-61dB)	4-térm. (-92dB)	4-térm. (-74dB)
$a_0$	0.42323	0.44959	0.35875	0.40217
$a_1$	0.49755	0.49364	0.48829	0.49703
$a_2$	0.07922	0.05677	0.14128	0.09392
$a_3$	—	—	0.01168	0.00183

**Cuadro 3.1** Parámetros de la familia de ventanas "Blackman-Harris"  
(De Harris [35])

Del artículo de Harris [35], resumimos las principales conclusiones sobre las ventanas:

- Para la detección de máximos espectrales múltiples, la ventana empleada tiene un efecto considerable. Las mejores ventanas son las que poseen un lóbulo central áltamente concentrado (en punta) y un nivel de lóbulo lateral muy deprimido (nivel mínimo).

- Las ventanas tienen muy poco efecto en la detección de la energía.

- La frecuencia de resolución está limitada por la duración de los registros disponibles y es independiente de las características de los datos. La mayor resolución se obtiene con la ventana rectangular, a costa de grandes efectos de "leakage".

La ventana de Blackman-Harris de 4términos, es igual a la de Keiser-Bessel de 4términos [35], [46]. Sin embargo, la ventana de Blackman-Harris se define por coeficientes que se generan fácilmente; por esta razón, es más atractiva para efectos de programación.

Una discusión más detallada sobre las características de las ventanas se puede ver en el anexo A de esta tesis.

### 3.6.5 Suavizado espectral

Al estudiar la varianza del periodograma (ec. 3.103) como estimador de la densidad espectral, se obtiene (Tretter [102]) que ésta es proporcional al cuadrado del valor de la densidad espectral, lo cual hace del periodograma un estimador inconsistente. No obstante, existen procedimientos que permiten reducir la varianza de la estima, siempre a costa de reducir considerablemente la resolución, es decir, la capacidad de separar máximos espectrales próximos. De tales métodos, los más utilizados consisten en:

- Suavizar el periodograma
- Dividir la señal en varios segmentos, para los que se obtiene el periodograma, realizando el promedio de ellos posteriormente (Welch [111]).

Ambos procedimientos dan resultados similares; el primero resulta cómodo en su programación y es conveniente en señales poco estacionarias; mientras el segundo puede economizar tiempo de ordenador en señales largas y estacionarias.

El suavizado del periodograma suele realizarse a partir de (3.103), definiendo:

$$\check{S}(k\Omega) = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L \hat{S}_P[(k+j)\Omega]; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.109)$$

donde se considera a  $\hat{S}_P(\omega)$  como función periódica de período  $2\omega_c = \frac{2\pi}{T}$ .

Con este promedio se obtiene una reducción en la varianza del nuevo estimador de la densidad espectral  $\hat{S}_P$ , inversamente proporcional al número de puntos de promediado  $2L+1$ . Al mismo tiempo se efectúa una paralela pérdida de resolución: si el valor esperado del periodograma era el dado por (3.104), el nuevo estimador tiene el valor esperado de la misma forma sustituyendo la ventana espectral  $\check{R}(\omega)$ , por (figura 3.12):

$$\check{R}(\omega) = \frac{1}{2L+1} \sum_{j=-L}^L \bar{R}(\omega + j\Omega); \quad \Omega = \frac{2\pi}{NT} \quad (3.110)$$

El aumento en la anchura del lóbulo central de la ventana espectral redundará evidentemente en la correspondiente pérdida de resolución. Así, no pueden darse reglas para la determinación de  $L$ , cuyo valor debe fijarse a partir de los objetivos propuestos en el análisis: resolución contra fiabilidad.

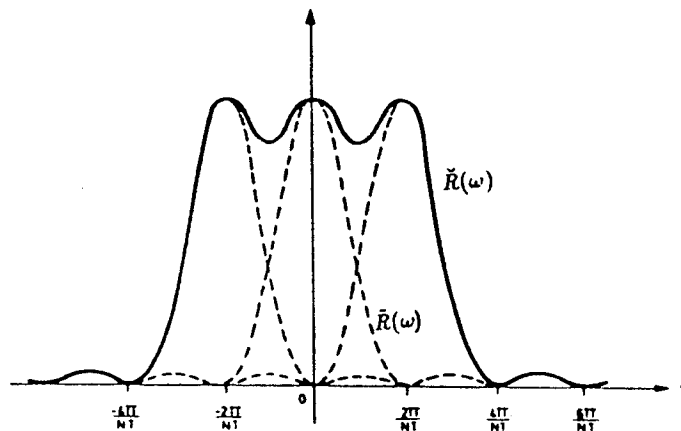


Figura 3.12 Ventana espectral efectiva después de realizar un suavizado del periodograma con  $L=1$   
De Egozcue [26]

En la figura 3.13, se presentan los registros de las presiones instantáneas y fluctuantes correspondientes al punto de impacto de un chorro, en el modelo del dissipador de energía hidráulica a pie de presa. La altura de caída es de  $H=1.72\text{m}$ , el caudal  $Q=8\text{l/s}$ , la altura del colchón de agua  $h=0.20\text{m}$ .

La frecuencia de muestreo es de  $20\text{muestras/s}$  ( $T=0.05\text{s}$ ), lo que equivale a una frecuencia en la banda de Nyquist de  $10\text{Hz}$ . El tiempo de muestreo es de  $120\text{s}$ , obteniéndose un total de  $2400$  datos.

En las figuras 3.14 y 3.15, se indican las densidades espectrales, calculadas con tres tipos de ventanas temporales: Rectangular, Hamming y Blackman-Harris. A cada ventana se le aplica tres tipos de suavizado: sin suavizado, con tres puntos y con cinco puntos.

El análisis de estos y otros resultados, se discuten en el capítulo 5 de esta tesis, en el marco de las aplicaciones de estas herramientas, a los dissipadores de energía hidráulica a pie de presa.

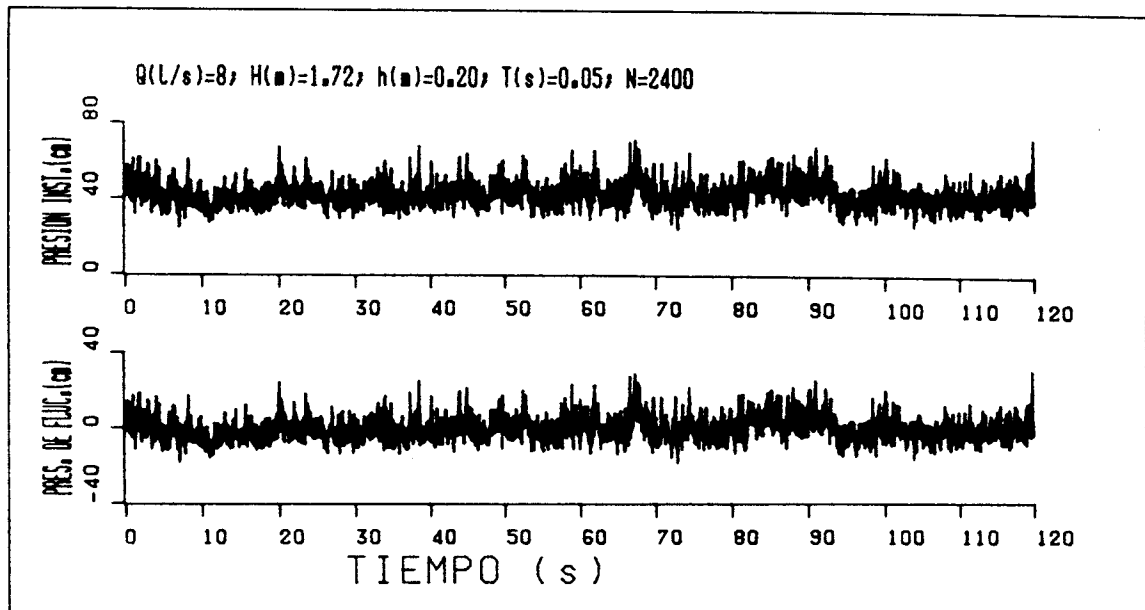
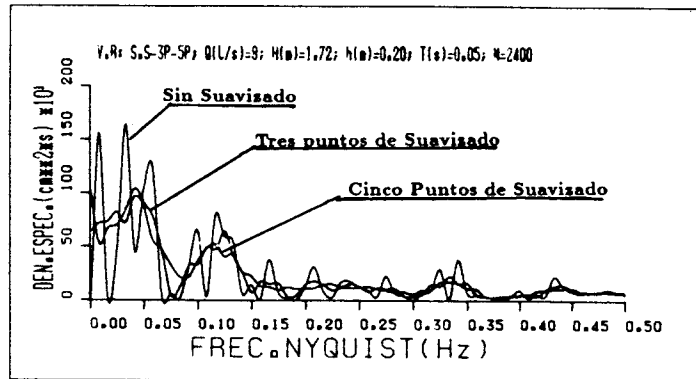
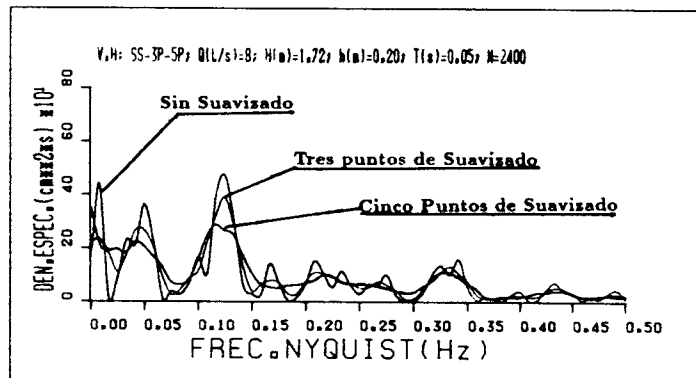


Figura 3.13 Registros de presiones de los ensayos del modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa: (a) Presión instantánea. (b) Presión de fluctuación.

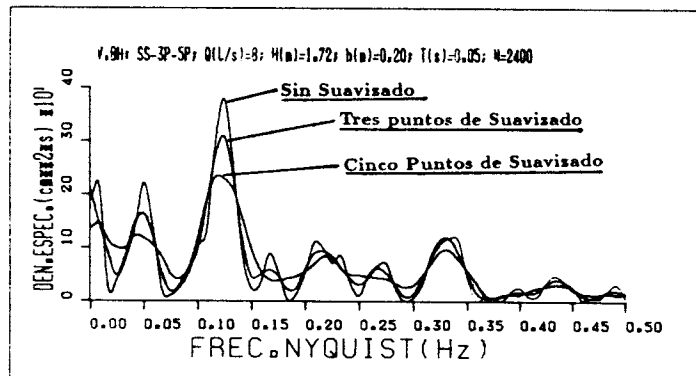




(a)

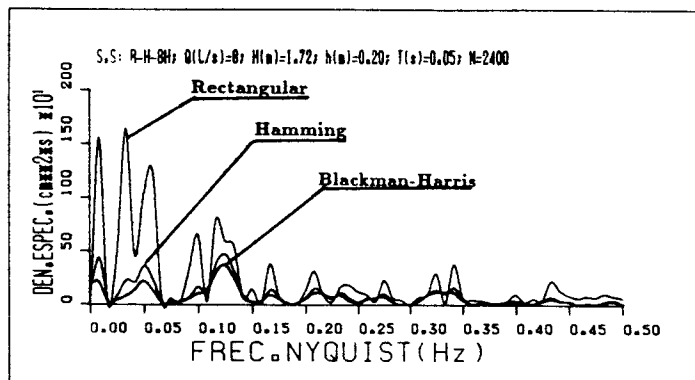


(b)

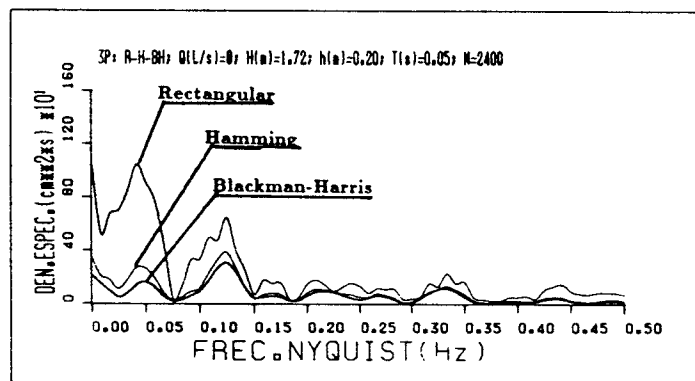


(c)

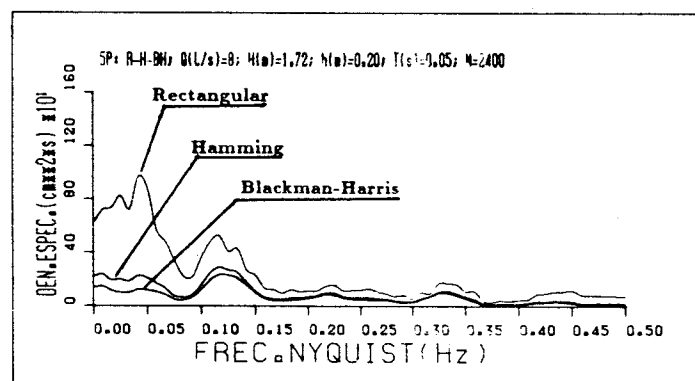
**Figura 3.14** Densidades espectrales de las fluctuaciones de presión, registrados en el modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa: (a) Con ventana rectangular. (b) Con ventana de Hamming. (c) Con ventana de Blackman-Harris.



(a)



(b)



(c)

**Figura 3.15** Densidades espectrales de las fluctuaciones de presión, registrados en el modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa: (a) Sin suavizado. (b) Con tres puntos de suavizado. (c) Con cinco puntos de suavizado.

### 3.6.6 Estima de la coherencia y de la fase

Al igual que en el caso de la densidad espectral univariante, es necesario definir los estimadores de cálculo de la densidad espectral multivariante, que como sabemos, en último término, corresponde a estimar la coherencia y fase.

Se define el estimador espectral multivariante, como al producto cruzado entre las transformadas discretas finitas de Fourier (DFFT) de las realizaciones de los procesos aleatorios de cada componente; es decir:

$$\hat{S}_{j,k}(l\Omega) = \frac{1}{N} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_j(m) e^{-ilmT\Omega} \right] \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_k(m) e^{-ilmT\Omega} \right]^* \quad (3.111a)$$

$$\hat{S}_{j,k}(l\Omega) = \frac{1}{N} \tilde{X}_j(l\Omega) \tilde{X}_k^*(k\Omega) \quad (3.111b)$$

Donde:

$\tilde{X}_j$ ... DFFT de la serie  $x_j$

$\tilde{X}_k^*$ ... Conjugada compleja de la DFFT de la serie  $x_k$

$\Omega = \frac{2\pi}{NT}$ ... Frecuencia fundamental de la banda de Nyquist

$N$  ... Número de datos de cada serie

Al calcular la coherencia directamente con la ec.(3.83), se obtiene siempre que  $\rho_{j,k}(\omega) = 1$ . Esto se debe a que los elementos de la matriz de densidad espectral  $S_{j,k}$ , se estiman por medio de las ecuaciones (3.111).

Por lo tanto, la inecuación de Schwarz aplicada a las densidades espectrales ec.(3.45), se convierte en una identidad. Así:

$$|S_{j,k}(\omega)| \leq (S_{j,j}(\omega) S_{k,k}(\omega))^{1/2} \quad (3.112a)$$

$$|S_{j,k}(\omega)| \equiv (S_{j,j}(\omega) S_{k,k}(\omega))^{1/2} \quad (3.112b)$$

Este hecho, frecuentemente no aclarado en los textos y artículos especializados en el tema, puede provocar estimas erróneas de la coherencia.

La coherencia estimada depende del suavizado del estimador espectral. Así, para un estimador sin suavizado, la coherencia es igual a uno; para un suavizado de tres puntos, la coherencia disminuye considerablemente en las frecuencias no correlacionadas y se mantiene muy alta, en las frecuencia correlacionadas.

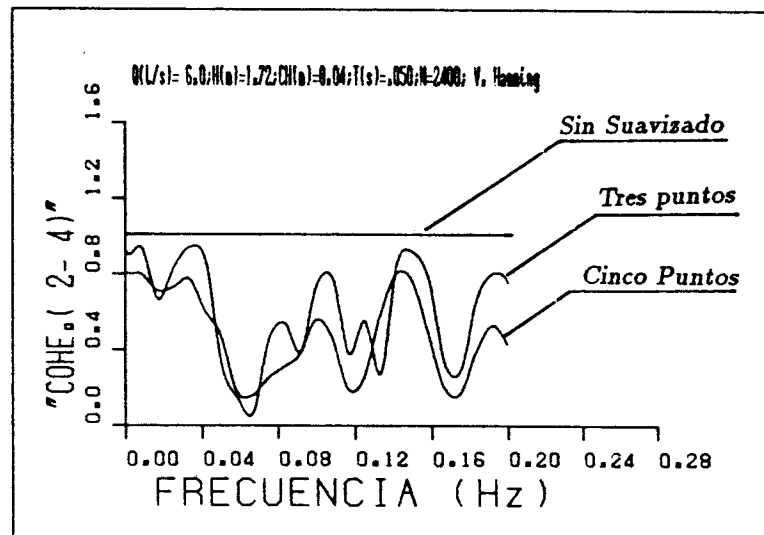
Para un suavizado de cinco puntos, la coherencia alta se marca más nítidamente en las zonas de frecuencia correlacionadas, al igual que tiende a una coherencia igual cero, en las zonas de frecuencia sin correlación. Este orden de cosas, aumentan con el incremento de puntos de suavizado del estimador de densidad espectral.

Por lo tanto, en la lógica del programa se invirtió el orden de operaciones de las subrutinas, realizando primero el suavizado de los estimadores espectrales, y calculando a partir de aquí, las coherencias correspondientes. Esto se explica con detalle en el anexo A de esta tesis, en la exposición del programa MULTI.FOR.

De esta forma, el nivel de coherencia que nos servirá de referencia para juzgar si los procesos están o no correlacionados, dependerá del fenómeno que estemos analizando, pues, como hemos observado, este nivel está en función del número de puntos de suavizado.

El algoritmo de cálculo del suavizado, es el mismo que para el caso univariante (ec. 3.109).

En la figura No. 3.16 se compara la coherencia calculada con cero, tres y cinco puntos de suavizado, de los registros en dos puntos de medición, de las fluctuaciones de presión turbulenta del modelo de disipación de energía hidráulica a pie de presa.

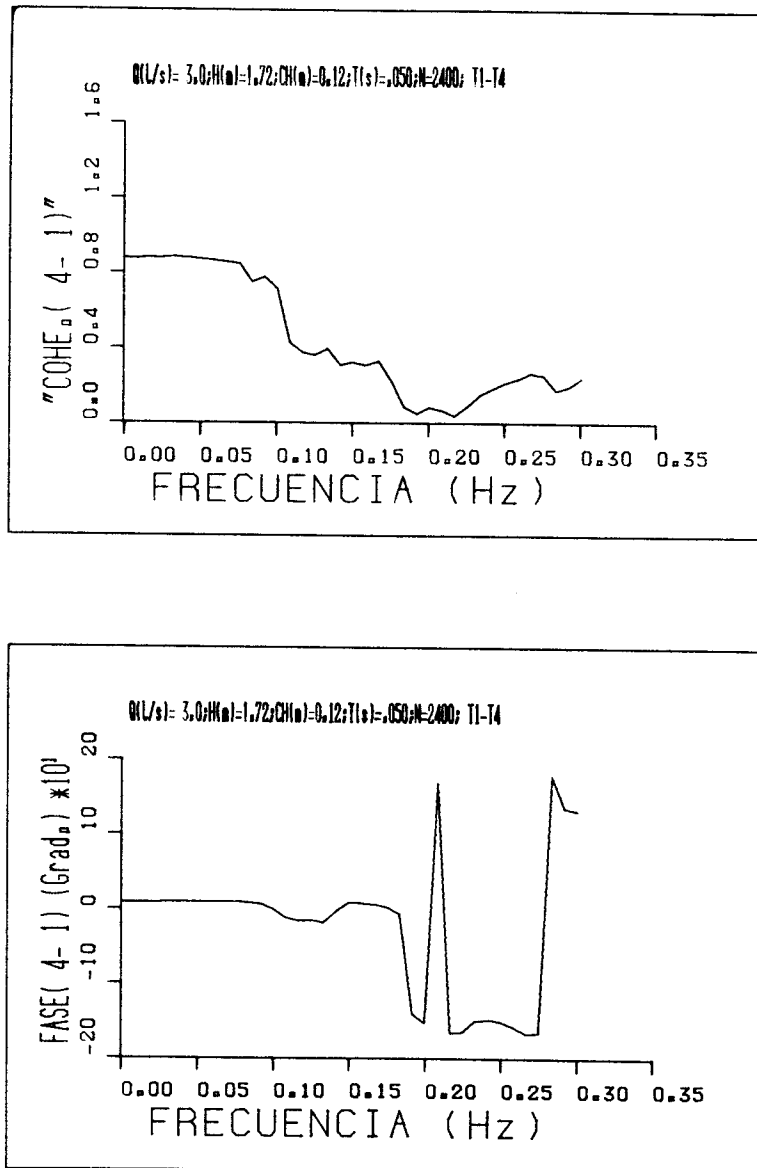


**Figura 3.16** Coherencia(0-3-5 puntos de suavizado) de las fluctuaciones de presión turbulenta en dos puntos( $s=0.10m$ ) de la losa del disipador de energía hidráulica a pie de presa

$$q = 43 \frac{l}{szm}; H = 1.72m; h = 0.12m.$$

En la figura No. 3.17 se indican la coherencia y fase con 21 puntos de suavizado, entre dos puntos de medida, separados 0.10m en la base del dissipador de energía hidráulica a pie de presa.

Las discusiones sobre estos y otros resultados, se analizan en el capítulo 5 de esta tesis.



**Figura 3.17** (a) Coherencia y (b) Fase de las fluctuaciones de presión turbulenta, aplicado una ventana de Hamming y un suavizado de 21 puntos, correspondiente a dos puntos ( $s=0.10m$ ) de la losa del dissipador de energía hidráulica a pie de presa  $q = 43 \frac{l}{sm}$ ;  $H = 1.72m$ ;  $h = 0.12m$

### 3.7 Programas de tratamiento

Una vez que se obtienen los datos de las presiones en los ensayos del cuenco disipador, es necesario para el tratamiento de esta información, programar varios paquetes de software, los mismos que nos permiten abordar con rapidez y seguridad, la caracterización del campo de presiones.

A continuación se explica sucintamente los cinco programas generales (TRANS.FOR, ESP1.FOR, ESP2.FOR, MULTI.FOR y COVARI.FOR), los mismos que fueron desarrollados paralelamente a la revisión y estudio de la teoría expuesta en este capítulo. Los diagramas de flujo, listados, explicación de las subrutinas, manual de usuario y ejemplos de uso, se encuentran en el anexo A de esta tesis.

Estos programas están escritos en lenguaje "Fortran 77" y tienen una misma estructura, con el objeto de uniformizar y generalizar su uso en el análisis y tratamiento de las presiones, obtenidos en los modelos hidráulicos del laboratorio.

Todos los programas son interactivos con el usuario, a través de la pantalla del ordenador, accediendo a la lectura de los datos, en el fichero especificado, con un mismo formato de lectura de tipo entero (I4). Estos ficheros de datos constan de  $[N + 12]$  enteros, en donde "N" es el número de datos registrados por cada transductor de presión, en tanto que los doce enteros adicionales, contienen información general, sobre cada tipo de ensayo.

Estos doce primeros enteros de los ficheros de datos, están ordenados de la siguiente forma: tensión máxima (TM), tensión mínima (TN), número de niveles de cuantización (NC), período de muestreo (T), número de datos (N), caudal de ensayo (Q), altura de caída (H), colchón de agua (CH), número de canal (LC), abscisa del transductor (XT), ordenada del transductor (YT) y ordenada al origen de la ecuación de calibración del transductor (OR).

Por tanto, cada programa está organizado de acuerdo a la mejor conveniencia de registro de los datos en laboratorio. Además, los resultados relevantes se graban en ficheros específicos y los resultados para gráficos se almacenan en los ficheros respectivos, pero de tal forma, que se pueden graficar directamente con el programa "SCRUVY", del Sistema del Centro de Cálculo de la E.T.S.I de Caminos de Barcelona.

En el cuadro 3.2, se resumen las principales propiedades y posibilidades de cálculo, de estos programas.

CARACTERÍSTICAS	TRANS	ESP1	ESP2	MULTI	COVARI
<b>VALORES ESTADÍSTICOS</b>					
P.máx. , P.media y P.mín.			X	X	X
Varianza y Desv. Estándar			X	X	
Kurt., Sekew, Coef. Variac.			X	X	
Frecuencia Pico y Media			X		
Ancho de Banda Espectral			X		
Diez primeras Frec. predom.				X	
<b>FUNCIONES PRINCIPALES</b>					
Presión Instantánea (PI)	X	X		X	X
Presión Fluctuante (PF)		X	X	X	X
Derivada (PI)	X				
Derivada (PI) suavizada	X				
Función rampa	X				
Derivada Función rampa	X				
Función de Transferencia(FT)	X				
Derivada (FT)	X				
Densidad Espec. Univariante		X	X	X	
Dens. Espec. Multivariante				X	
Vent. Esp.Hamming y Black- Ha.		X	X	X	
Varias ventanas a la vez		X	X		
Suavizado 0-3-5 puntos	X	X	X	X	
Varios suavizados a la vez		X	X		
Cualquier tipo de suavizado	X			X	
Densidad de Probabilidad			X		
Distribución de Probabilidad			X		
Autocorr. y Autocovarianza					X
Cross-corr. y Cross-covarianza					X
Número de canales en un run	M	1	M	M	M
Número de canales a la vez	M	1	1	M	M
Número de Ficheros	8M	13	6M + 1	M <sup>2</sup> + M + 4	M <sup>2</sup> + 3M + 1

**Cuadro 3.2** Características y posibilidades de cálculo de los programas de tratamiento: TRANS.FOR, ESP1.FOR, ESP2.FOR, MULTI.FOR y COVARI.FOR

### 3.7.1 Programa "TRANS.FOR"

El objetivo principal de este programa es determinar la "Función de Transferencia" de los transductores de presión, a partir de los ensayos de calibración dinámica, descritos en el capítulo 4 de esta tesis.

El programa consiste de seis subrutinas (DATA, TRANSF, SUAVIZ, SUAV, ESPECT y PLOT), las mismas que son llamadas "M" veces, a excepción de las subrutinas SUAVIZ y SUAV que se ejecutan  $[2 * M]$  veces, siendo "M" el número de transductores a analizar.

En la figura 3.18 se indica un diagrama general del programa.

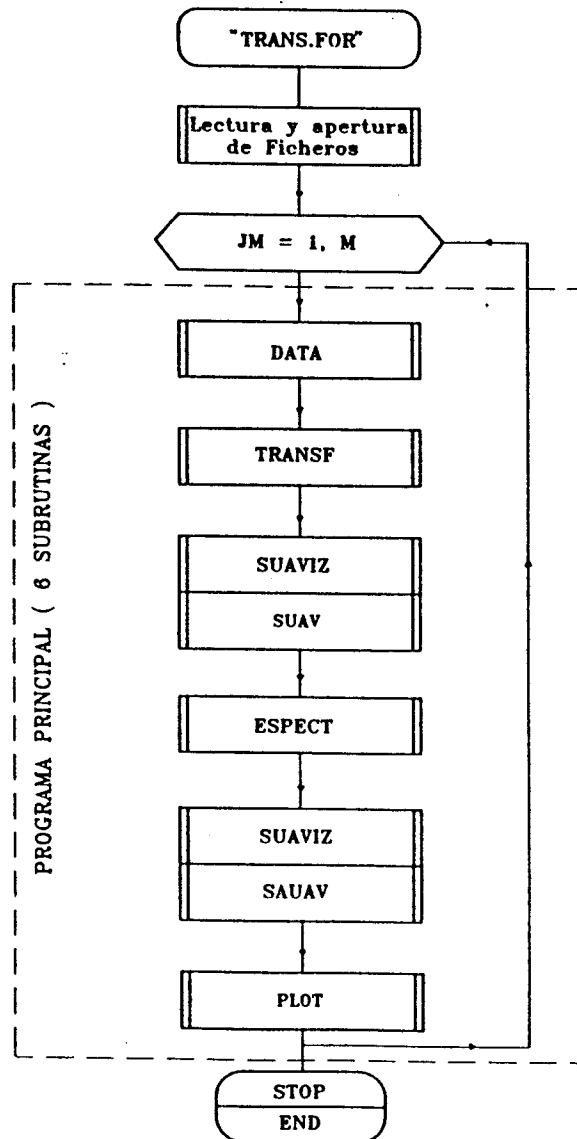


Figura 3.18 Programa TRANS.FOR, para calcular la función de transferencia de los transductores de presión.



En el cuadro 3.3, se presentan los números, nombres y tipo de grabación de los ficheros que se crean con el programa TRANS.FOR, en el caso de analizar cinco canales a la vez (M=5).

En las figuras 4.9 y 4.10 se presenta la función tipo rampa y su derivada.

En las figuras 4.11 a 4.13, se presentan la Respuesta del transductor ensayado, su derivada y el suavizado de la derivada de la respuesta.

En la figura 4.14, se indica el módulo de la función de transferencia del transductor analizado.

FICHERO NÚMERO	NOMBRE DEL FICHERO	TIPO DE GRABACIÓN
20	NP= PRES.RES	Presión Instant. Canal 1
21	FOR021.DAT	Presión Instant. Canal 2
...	...	...
25	FOR025.DAT	Presión Instant. Canal 5
30	NDP= DPRES.RES	Derivada Pres.Inst. Canal 1
31	FOR031.DAT	Derivada Pres.Inst. Canal 2
...	...	...
35	FOR035.DAT	Derivada Pres.Inst. Canal 5
40	NSP= DPRESUAV.RES	Derivada Pres.Inst. Suav. Canal 1
41	FOR041.DAT	Derivada Pres.Inst. Suav. Canal 2
...	...	...
45	FOR045.DAT	Derivada Pres.Inst. Suav. Canal 5
50	NR= RAMPA.RES	Función Rampa Canal 1
51	FOR051.DAT	Función Rampa Canal 2
...	...	...
55	FOR055.DAT	Función Rampa Canal 5
60	NDR= DRAMPA.RES	Derivada de Función Rampa Canal 1
61	FOR061.DAT	Derivada de Función Rampa Canal 2
...	...	...
65	FOR065.DAT	Derivada de Función Rampa Canal 5
70	NTR= FUNT.RES	Función de Transferencia Canal 1
71	FOR071.DAT	Función de Transferencia Canal 2
...	...	...
75	FOR075.DAT	Función de Transferencia Canal 5
80	NTS= FUNTSUAV.RES	Función de Transf. Suav. Canal 1
81	FOR081.DAT	Función de Transf. Suav. Canal 2
...	...	...
85	FOR085.DAT	Función de Transf. Suav. Canal 5

**Cuadro 3.3** Número de los ficheros, en la grabación de la subrutina "PLOT" del programa "TRANS.FOR", en el caso de analizar cinco canales (M=5).

### 3.7.2 Programa "ESP1.FOR"

El objetivo principal de este programa, es determinar las densidades espectrales univariantes, con tres tipos de ventana (Rectangular, Hamming y Blackman-Harris) y tres tipos de suavizado (sin suavizado, tres puntos y cinco puntos), para las fluctuaciones de presión obtenidas en un modelo hidráulico.

El programa consiste de siete subrutinas (DATA, TRANSF, VENTANA, ESPECT, SUAVIZ, y RESULT), las mismas que son llamadas tres veces, a excepción de las subrutinas DATA y TRANSF, que se llaman una sola vez, en la ejecución del programa.

En la figura 3.19 se presenta un diagrama general del programa.

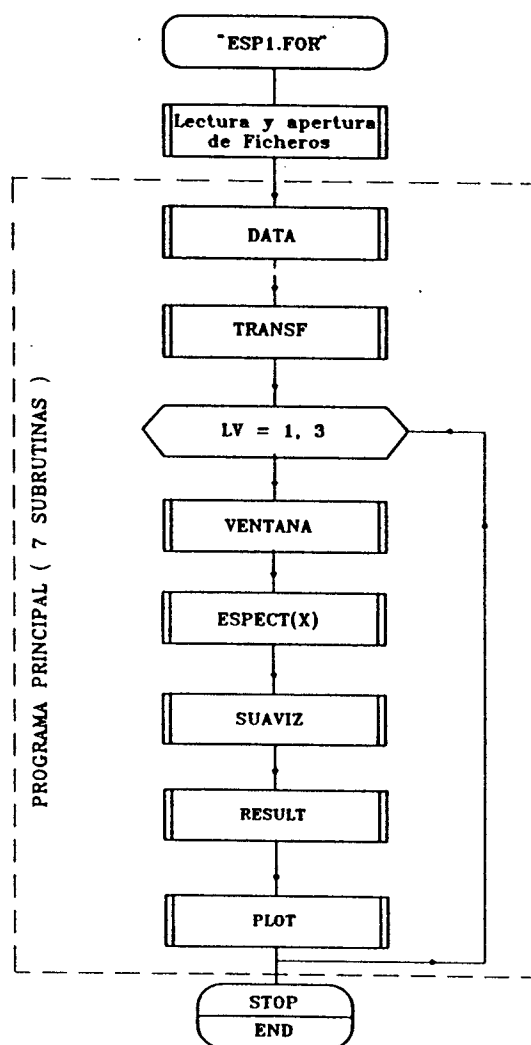


Figura 3.19 Programa "ESP1.FOR", para calcular las densidades espectrales univariantes de las fluctuaciones de presión

En la figura 3.20, se indica un ejemplo de impresión de resultados del programa "ESP1.FOR".

En la primera columna, se presentan las presiones de fluctuación. En la segunda columna, las frecuencias de las fluctuaciones ( $\Omega = 2\pi/NT$ ). En la tercera y cuarta columnas, los coeficientes complejos de Fourier (parte real e imaginaria). En la quinta, sexta y séptima columnas, las densidades espectrales sin suavizado, con tres puntos y con cinco puntos de suavizado, respectivamente.

En las figuras 3.14 y 3.15, se indican ejemplos de gráficos que se obtienen con el programa "ESP1.FOR"

```

***** RESUMEN DE CALCULOS DEL PROGRAMA 'ESP1.FOR' *****
-----
Q(1/s)=8.0; H(m)=1.72; h(m)=0.20
Transductor KYSTLER 190 451. XT(m)=0.0; YT(m)=0.0

'Ventana RECTANGULAR'. N=2400; T(s)= 0.05; Frec. Nyq.(Hz)=10.0
*****
DATOS      FREC.      FFT      DENSIDAD ESPECTRAL
C          F          REAL     IMAGIN.   S.S       3P       5P
*****
0.9492E+010.0000E+00-.3506E-010.0000E+000.5123E-060.1040E+040.6286E+03
-.4603E+010.8333E-02-.1443E+04-.1289E+040.1560E+040.5238E+030.7195E+03
0.8821E+010.1667E-01-.1538E+030.6552E+020.1165E+020.6753E+030.7349E+03
-.2086E+010.2500E-010.8337E+030.6287E+030.4543E+030.7049E+030.8256E+03
.....
0.1536E+020.9992E+010.1174E+030.1345E+030.1328E+020.5732E+020.3840E+02
-.6952E+010.1000E+020.5913E+030.0000E+000.1457E+030.5741E+020.3965E+02
*****

'Ventana de HAMMING'. N=2400; T(s)=0.05; Frec. Nyq(Hz)=10.0
*****
DATOS      FREC.      FFT      DENSIDAD ESPECTRAL
C          F          REAL     IMAGIN.   S.S       3P       5P
*****
0.7593E+000.0000E+000.6636E+030.0000E+000.1835E+030.3553E+030.2196E+03
-.3682E+000.8333E-02-.7436E+03-.7113E+030.4413E+030.2136E+030.2373E+03
0.7057E+000.1667E-010.5699E+020.1873E+030.1598E+020.1819E+030.1922E+03
-.1669E+000.2500E-010.4820E+020.4586E+030.8860E+020.1121E+030.1975E+03
.....
0.1536E+020.9992E+01-.1129E+030.6762E+020.7218E+010.1259E+020.9810E+01
-.6952E+010.1000E+020.2653E+030.0000E+000.2932E+020.1459E+020.9247E+01
*****

'Ventana de BLACKMAN-HARRIS'. N=2400; T(s)=0.05; Frec. Nyq.(Hz)=10.0
*****
DATOS      FREC.      FFT      DENSIDAD ESPECTRAL
C          F          REAL     IMAGIN.   S.S       3P       5P
*****
-.2629E-010.0000E+000.7010E+030.0000E+000.2048E+030.2140E+030.1382E+03
0.1275E-010.8333E-02-.5721E+03-.4442E+030.2186E+030.1493E+030.1463E+03
-.2442E-010.1667E-010.1795E+030.1628E+030.2447E+020.9456E+020.1137E+03
.....
0.1529E+020.9992E+01-.1353E+030.3699E+020.8195E+010.8560E+010.7119E+01
-.6917E+010.1000E+020.1958E+030.0000E+000.1597E+020.1079E+020.7077E+01
*****

```

Figura 3.20 Ejemplo de impresión del fichero "NS=RESULT.DAT", de la subrutina "RESULT", del programa "ESP1.FOR", en el análisis de un registro de presiones, obtenido en el modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa.

### 3.7.3 Programa "ESP2.FOR"

Este programa calcula los parámetros estadísticos más importantes, que nos permiten caracterizar, a los registros de las presiones instantáneas, obtenidos en un modelo de hidráulico. Así, se calculan los valores de presión máxima (PX), media (PM), mínima (PN), la varianza o presión de fluctuación cuadrática media (PCM), desviación estándar (DS), coeficiente de variación (CV), Skew o coeficiente de sesgo (SKEW), aplanamiento o coeficiente de kurtosis (CKURT), frecuencias pico (FP), media (FM) y ancho de banda espectral (AE).

Además, se determinan y grafican los registros de las fluctuaciones de presión, las densidades de probabilidad, distribución, así como también, las densidades espectrales univariantes con sus correspondientes espectros acumulados.

El programa consta de 10 subrutinas (DATA, TRANSF, ESTAD, DIREC, VENTANA, ESPECT, SUAVIZ, RESULT, PLOT y ALTERN), las mismas que se indican en la figura 3.21 y que pueden llamarse un número indefinido de veces, al escoger por pantalla (subrutina "ALTERN") esta decisión.

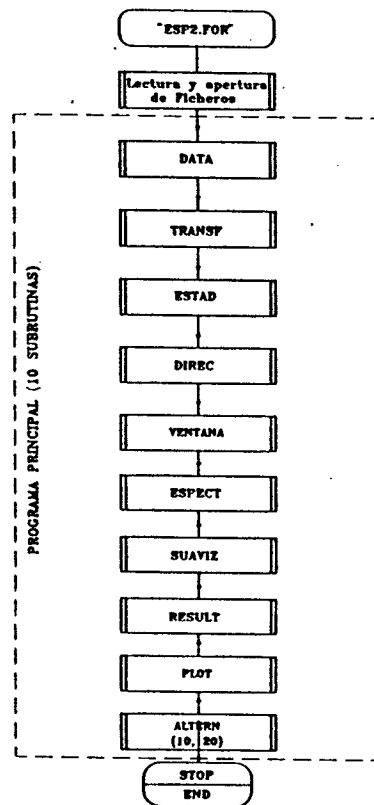


Figura 3.21 Programa "ESP2.FOR". Calcula los parámetros estadísticos más importantes, define las distribuciones de densidad y probabilidad, así, como las densidades espectrales univariantes de los registros de presión.

En la figura 3.22, se presenta un ejemplo de impresión del programa "ESP2.FOR". La primera columna representa la altura del colchón de agua. La segunda, tercera y cuarta columnas, las presiones máxima, mínima y media, respectivamente. Las columnas quinta, sexta, séptima y octava, la desviación estándar, el coeficiente de variación, el sesgo y la kurtosis, respectivamente. La columna novena, la presión de fluctuación cuadrática media o varianza de las presiones. Las columnas décima, onceava y doceava, la frecuencia pico, frecuencia media y el ancho de banda espectral, respectivamente.

```
***** RESUMEN DE CÁLCULOS DEL PROGRAMA 'ESP2.FOR' *****
-----
.....
.          TRANSDUCTOR MARCA : 'KYSTLER 190 451'          .
.          COORDENADAS EN EL MODELO : XT(m)=0.00; YT(m)=0.00 .
.....
*
*          Q(1/s)= 8.00; H(m)= 1.72; N= 2400; T(s)=0.0500 *
*
*****
-----
      h    PX    PN    PM    DS    CV    SK    KU    PFCM    FP    FM    AE
      ( m) ( cm) ( cm) ( cm) ( cm) (%)          (cm2) (Hz) (Hz)
-----
          CANAL N.=2; X(m)=0.00; Y(m)=0.00
0.00172.17 -6.25110.37 29.55 26.78 -1.30 1.53873.33 0.00 1.91 0.56

          CANAL N.=2; X(m)=0.00; Y(m)=0.00
0.04172.84 16.73116.70 26.07 22.34 -1.15 0.98679.57 0.03 1.66 0.57

          CANAL N.=2; X(m)=0.00; Y(m)=0.00
0.08151.72 4.39 70.61 29.44 41.70 0.27 -0.49866.75 0.01 2.10 0.61

          CANAL N.=2; X(m)=0.00; Y(m)=0.00
0.12127.22 16.39 46.79 11.13 23.79 1.13 2.80123.86 0.06 2.39 0.64

          CANAL N.=2; X(m)=0.00; Y(m)=0.00
0.16 96.81 16.56 45.33 8.64 19.05 0.71 1.84 74.61 0.03 3.66 0.70

          CANAL N.=2; X(m)=0.00; Y(m)=0.00
0.20 75.69 26.86 45.35 6.68 14.73 0.67 0.89 44.63 0.13 3.55 0.73

          CANAL N.=2; X(m)=0.00; Y(m)=0.00
0.25 64.37 24.67 41.21 5.04 12.24 0.37 0.65 25.44 0.01 3.18 0.80
*****
```

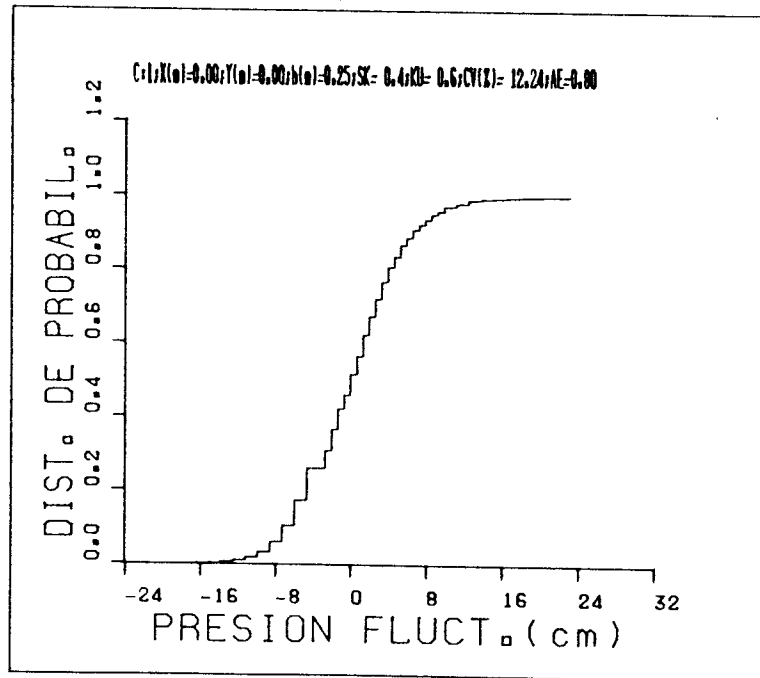
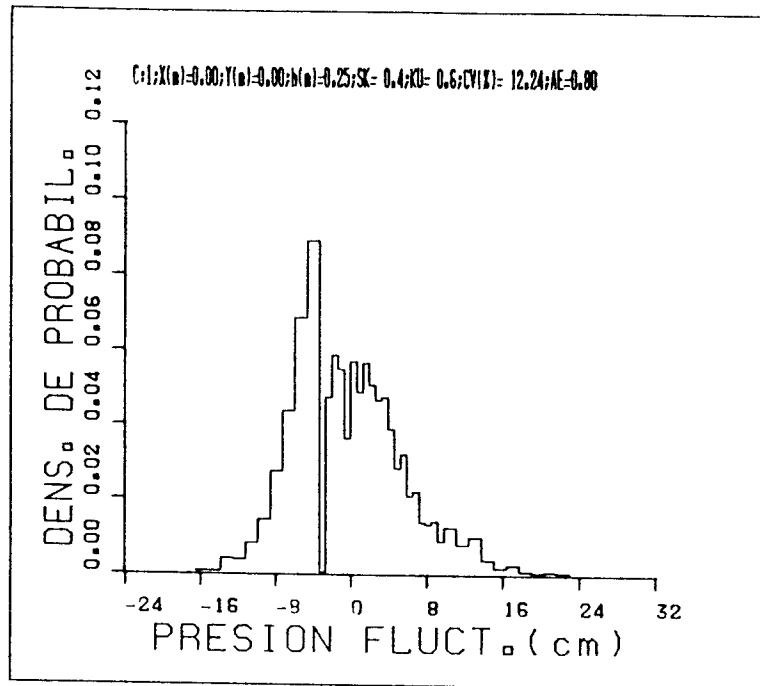
Figura 3.22 Ejemplo de impresión del fichero "RESULT.DAT", del programa "ESP2.FOR", en el análisis de las fluctuaciones de presión, del modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa.

En el cuadro 3.4, se indica el número, nombre y tipo de grabación, de los ficheros, en el programa "ESP2.FOR".

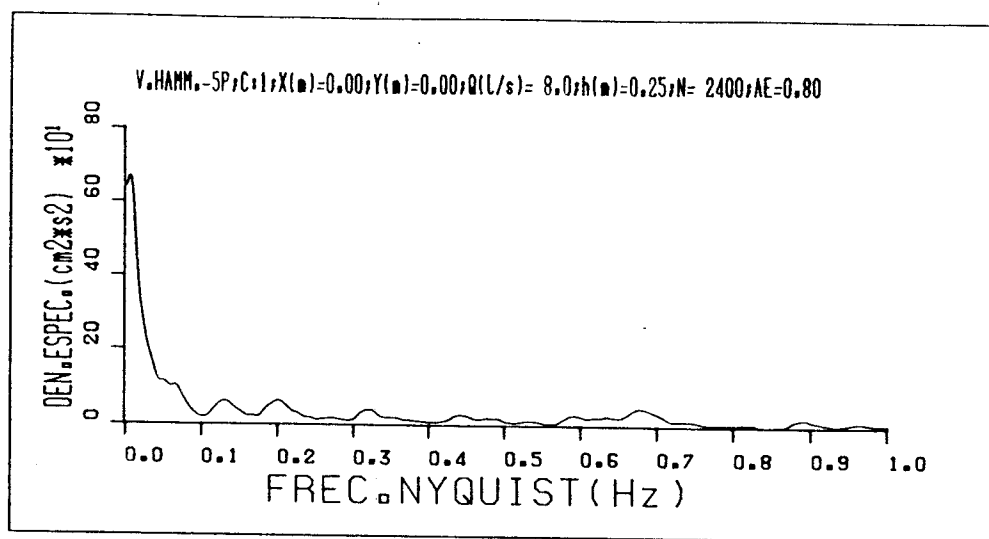
En las figuras 3.23a y 3.23b, se presentan la densidad y distribución de probabilidad. En la figura 3.24, la densidad espectral y la densidad espectral acumulada.

"NP"	NOMBRE DEL FICHERO	TIPO DE GRABACIÓN EN FICHEROS
50	NP=PLOT.DAT	Presión de Fluctuación "C(I)"
51 52	FOR051.DAT FOR052.DAT	Densidad de Probabilidad "FCNR(I)" Densidad de Probab. Normal "AJN"
53 54	FOR053.DAT FOR054.DAT	Distribución de Probabilidad "FACUM(I)" Distrib. de Probab. Normal "DTN(I)"
55 56	FOR055.DAT FOR056.DAT	Densidad Espectral "XR(I)" Densidad Espectral Acumulada "FA(I)"

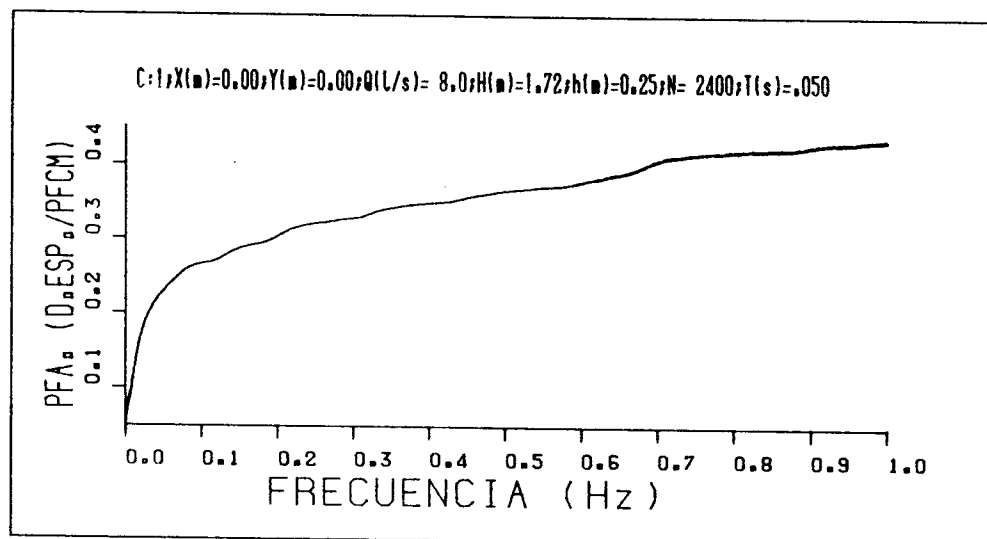
**Cuadro 3.4** Número de los ficheros "NP", en la grabación de la subrutina "PLOT" del programa "ESP2.FOR".



**Figura 3.23** Gráficos correspondientes a las fluctuaciones de presión, registrados en el modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa. (a) Densidad de probabilidad. (b) Distribución de probabilidad.



(a)



(b)

**Figura 3.24** Gráficos correspondientes a las fluctuaciones de presión, registrados en el modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa: (a) Densidad espectral. (b) Densidad espectral acumulada.



#### 3.7.4 Programa "MULTI.FOR"

Este programa calcula las densidades espectrales multivariantes, de los datos de presiones de "M" canales o transductores, instalados en un modelo hidráulico de disipación de energía. Por tanto, se determinan  $(M * (M + 1)/2)$  elementos de la matriz espectral ("Densidades Espectrales Univariantes", Funciones "FASE" y "COHERENCIA").

Se determinan y grafican, los registros de presiones instantáneas y de fluctuación.

Las densidades espectrales univariantes de los registros de presiones, se grafican, tanto en coordenadas naturales, así como también, en coordenadas logarítmicas. Además, se agrupan las diferentes curvas y se representan en un mismo gráfico.

Las "COHERENCIAS" y "FASES", se grafican en archivos independientes, en una forma consecutiva.

Por otro lado, se calculan los parámetros estadísticos más importantes, que nos permiten caracterizar, a los registros de estas presiones. Así, se calculan los valores de presión máxima (PX), media (PM), mínima (PN), la varianza o presión de fluctuación cuadrática media (PCM), desviación estándar (DS), coeficiente de variación (CV), Skew o coeficiente de sesgo (SKEW) y aplanamiento o coeficiente de kurtosis (CKURT).

Por último, se seleccionan y graban, los diez primeros picos de las densidades espectrales, con sus respectivas "COHERENCIAS" Y "FASES".

El programa consta de 9 subrutinas (DATA, TRANSF, ESTAD, VENTANA, ESPECT, SUAVIZ, SUAV, RESULT, Y PLOT), las mismas que se indican en la figura 3.25 y que se llaman una sola vez, durante su ejecución.

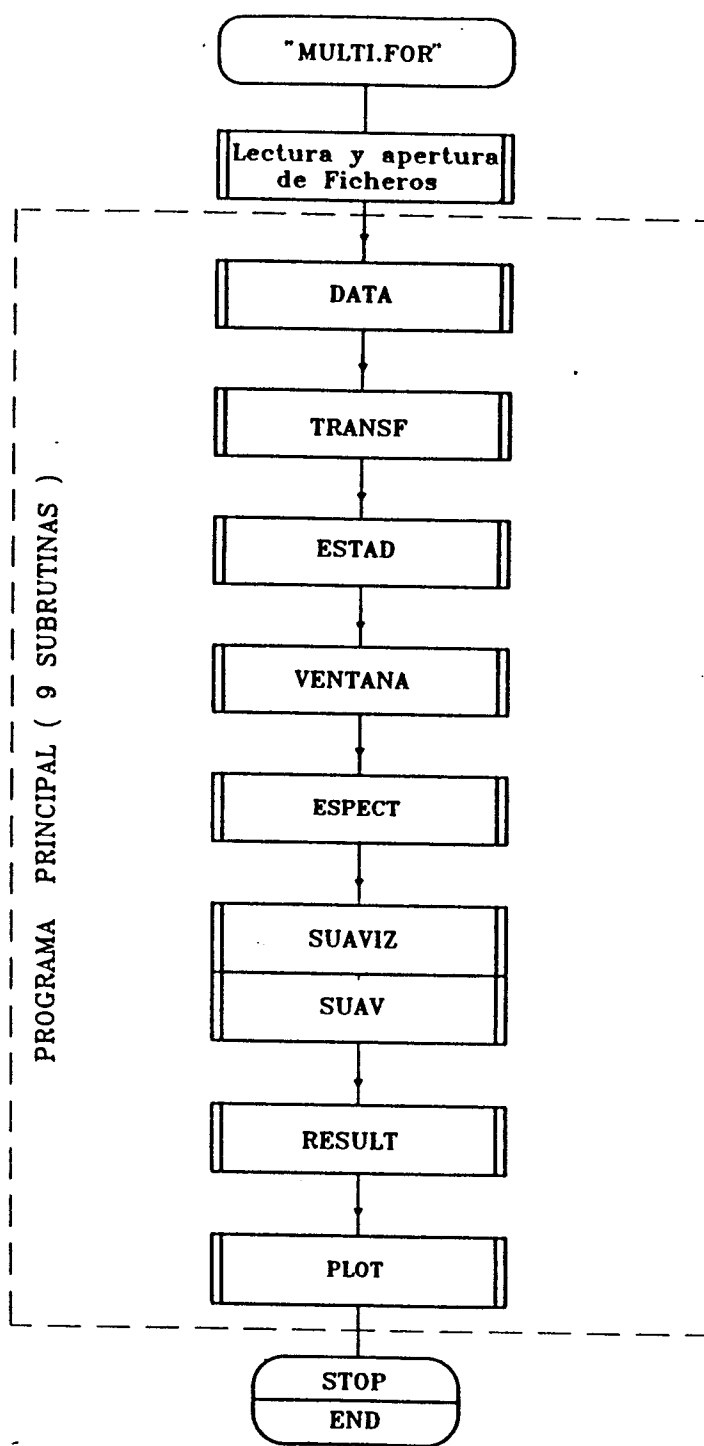


Figura 3.25 Programa "MULTI.FOR". Calcula las densidades espectrales multidimensionales, -así-como los parámetros estadísticos más importantes, de los registros de presión, de los modelos de disipación de energía hidráulica.

En la figura 3.26, se presenta un ejemplo de impresión de resultados, del fichero "RESUM.RES", del programa "MULTI.FOR".

En la figura 3.27, se presenta el ejemplo de impresión del fichero "RESUMC.RES". Este fichero contiene los diez primeros picos de las densidades espectrales univariantes, con sus correspondientes frecuencias, coherencias y fases.

En el cuadro 3.5, se indican el número, nombre y tipo de grabación de los ficheros, en el programa "MULTI.FOR".

En la figura 3.28, se presentan los registros de las fluctuaciones de presión, en dos puntos de la solera del disipador de energía, con sus correspondientes densidades espectrales univariadas, tanto en coordenadas naturales, como semi-logarítmicas.

En la figura 3.29, se indica la coherencia y la fase de las fluctuaciones de presión de la figura 3.28.

```

***** RESUMEN DE VALORES CARACTERISTICOS *****
.....
PROGRAMA 'MULTI.FOR' --- FICHERO 'RESUM.RES'
.....
T.MAX (mV) = 100.00
T.MIN (mV) = -100.00
NC = 4096
T (s) = 0.05
N = 2400
Q (1/s) = 6.00
H (m) = 1.72
h (m) = 0.20
.....
-----
No. CANAL      TRANSDUCTOR      X      Y      ORD.ORIGEN
                (m)      (m)      (cm)
2      KYSTLER 190 451      0.00000      0.00000      -0.58594
3      KYSTLER 230 741      0.14000      0.00000      0.09766
-----
C.No.   PX      PN      PM      PF      DS      SK      KU      CV
        ( cm ) ( cm ) ( cm ) ( cm2 ) ( cm )
-----
2      80.54  19.46  39.97  39.01  6.25  1.04  2.71  15.63
3      26.02  13.01  19.77  3.58  1.89  0.09  0.14  9.57
-----

```

Figura 3.26 Ejemplo de impresión de resultados, del fichero "RESUM.RES", del programa "MULTI.FOR".

```

***** RESUMEN DE VALORES CARACTERISTICOS *****
.....

-----
PROGRAMA 'MULTI.FOR' --- FICHERO 'RESUMC.RES'

-----

***** DIEZ PRIMEROS PICOS DE LAS DENSIDADES ESPECTRALES ****
* CON SUS CORRESPONDIENTES FRECUENCIAS, COHERENCIAS Y FASES *

-----

CAUDAL (1/s)          =      6.00
ALTURA DE CAIDA (m) =      1.72
COLCHON DE AGUA (m)  =      0.20
PER.DE MUESTREO (s)  =      0.05
NUMERO DE DATOS      =     2400
NUMERO DE CANALES    =       2

-----

PICO N.                "( 1-1 )"                "( 2-2 )"
                     FREC.      D. ESP.      FREC.      D. ESP.
                     (Hz)      (cm**2*s)  (Hz)      (cm**2*s)
-----
1                     0.8333E-02 0.9614E+03 0.8333E-02 0.5299E+01
2                     0.4167E-01 0.3160E+03 0.4167E-01 0.1667E+01
3                     0.1083E+00 0.7143E+02 0.1250E+00 0.1614E+01
.                     .           .           .           .
.                     .           .           .           .
.                     .           .           .           .
9                     0.3333E+00 0.1606E+02 0.3417E+00 0.1651E+01
10                    0.4083E+00 0.1942E+02 0.4000E+00 0.9483E+00

-----

PICO N.                "( 2-1 )"
                     FREC. COHER.  FASE
                     (Hz.)         (GRA.)
-----
1                     0.0083 0.9287 -27.23
2                     0.0417 0.4524 -85.04
3                     0.1083 0.5569 -46.91
.                     .           .
.                     .           .
.                     .           .
9                     0.3333 0.5324 11.83
10                    0.4083 0.6257 -60.81

-----

1                     0.0083 0.9287 -27.23
2                     0.0417 0.4524 -85.04
3                     0.1250 0.4956 -56.67
.                     .           .
.                     .           .
.                     .           .
9                     0.3417 0.5890 -0.52
10                    0.4000 0.7384 -55.32

```

Figura 3.27 Ejemplo de impresión de resultados, del fichero "RESUMC.RES", del programa "MULTI.FOR".

FICHERO NÚMERO	NOMBRE DE LOS FICHERO	TIPO DE GRABACIÓN
20	NPI=PINST.RES	Presión Instant. Canal 1
21	FOR021.DAT	Presión Instant. Canal 2
...	...	...
24	FOR024.DAT	Presión Instant. Canal 5
30	NPF=PFLUC.RES	Presión de Fluct. Canal 1
31	FOR032.DAT	Presión de Fluct. Canal 2
...	...	...
34	FOR034.DAT	Presión de Fluct. Canal 5
40	NXU=ESUNI.RES	Densidad Espectral Canal 1
41	FOR041.DAT	Densidad Espectral Canal 2
...	...	...
44	FOR044.DAT	Densidad Espectral Canal 5
50	NCC=SCOH.RES	Coherencia Canal 2 - Canal 1
51	FOR051.DAT	Coherencia Canal 3 - Canal 1
52	FOR052.DAT	Coherencia Canal 4 - Canal 1
53	FOR053.DAT	Coherencia Canal 5 - Canal 1
54	FOR054.DAT	Coherencia Canal 3 - Canal 2
55	FOR055.DAT	Coherencia Canal 4 - Canal 2
56	FOR056.DAT	Coherencia Canal 5 - Canal 2
57	FOR057.DAT	Coherencia Canal 4 - Canal 3
58	FOR058.DAT	Coherencia Canal 5 - Canal 3
59	FOR059.DAT	Coherencia Canal 5 - Canal 4
61	NFC=ESFA.RES	Fase Canal 2 - Canal 1
62	FOR062.DAT	Fase Canal 3 - Canal 1
63	FOR063.DAT	Fase Canal 4 - Canal 1
...	...	...
70	FOR070.DAT	Fase Canal 5 - Canal 4
NXUN=72	FOR072.DAT	Dens. Esp. conjunta (Nat.)
NXUL=73	FOR073.DAT	Dens. Esp. conjunta (Log.)

Cuadro 3.5 Números de los ficheros, en la grabación de la subrutina "PLOT", del programa "MULTI.FOR".

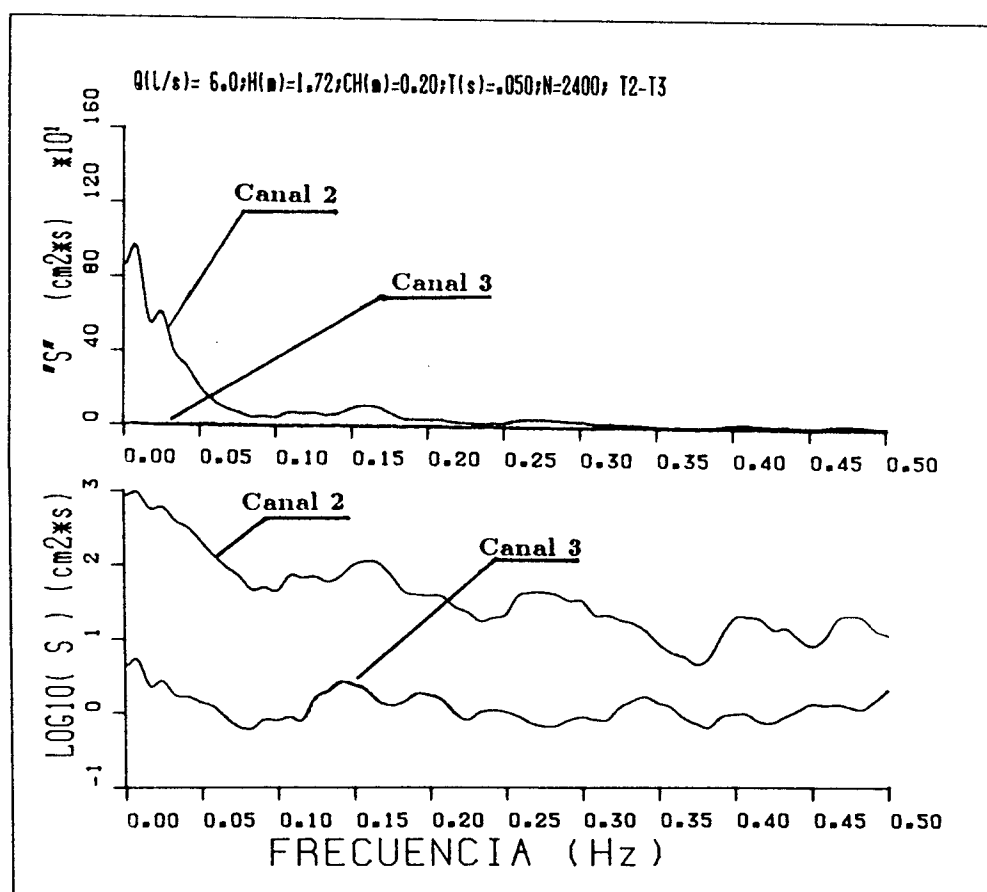
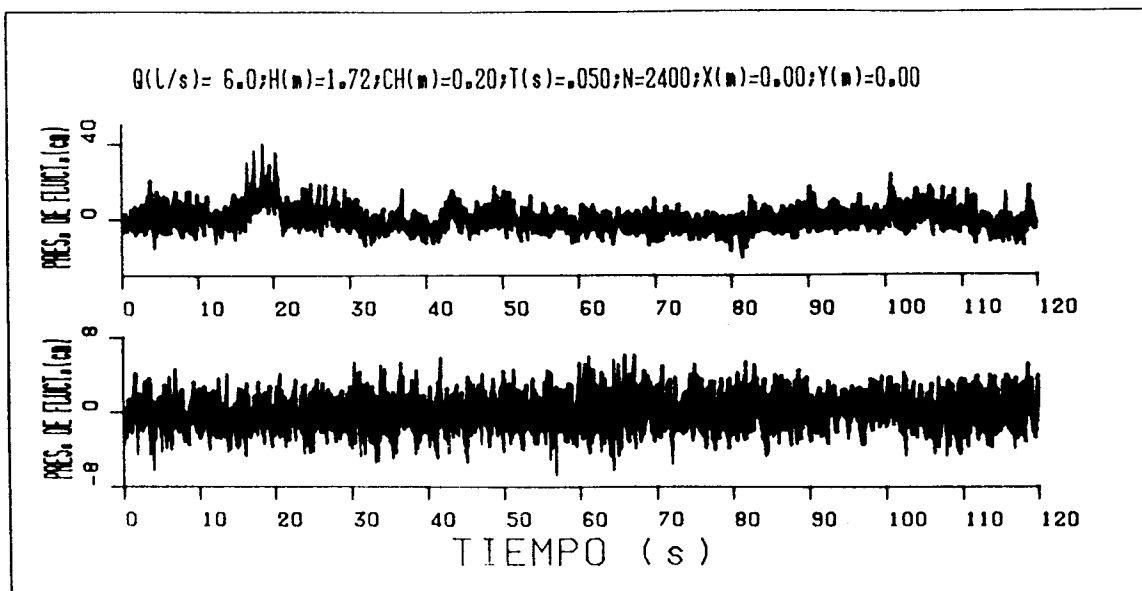
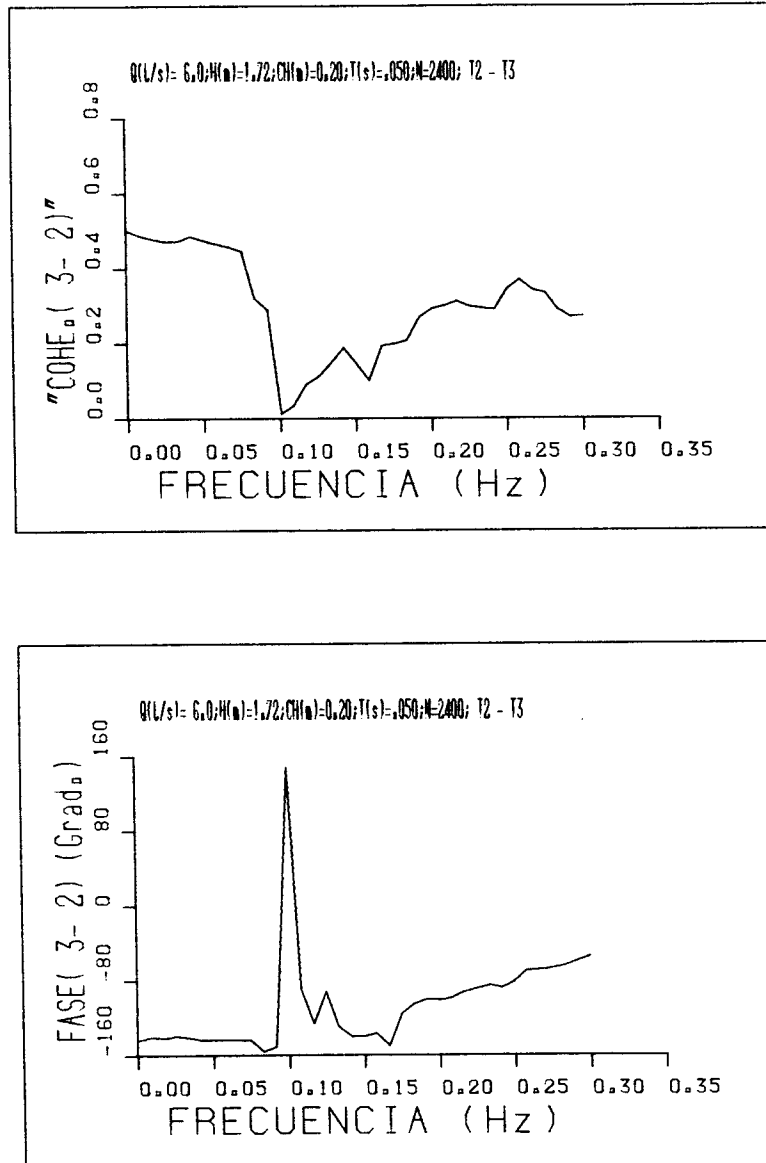


Figura 3.28 Ejemplos de Gráficos obtenidos con el programa "MULTI.FOR", en el análisis de las fluctuaciones de presión, del modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa: (a) Registros de presiones de fluctuación. (b) Densidades espectrales en coordenadas naturales. (c) Densidades espectrales en coordenadas logarítmicas.



**Figura 3.29** Ejemplos de gráficos obtenidos con el programa "MULTI.FOR", en el análisis de las fluctuaciones de presión, del modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa: (a) Coherencias (b) Fases.

### 3.7.5 Programa "COVARI.FOR"

Este programa calcula las AUTOCORRELACIONES, AUTOCOVARIANZAS, CROSS-CORRELACIONES Y CROSS-COVARIANZAS MULTIVARIANTES, de los datos de presiones de "M" canales o transductores, instalados en un modelo hidráulico de disipación de energía.

El programa consta de 4 subrutinas (DATA, TRANSF, PAQUET y PLOT), las mismas que se indican en la figura 3.30 y se llaman, una sola vez durante su ejecución.

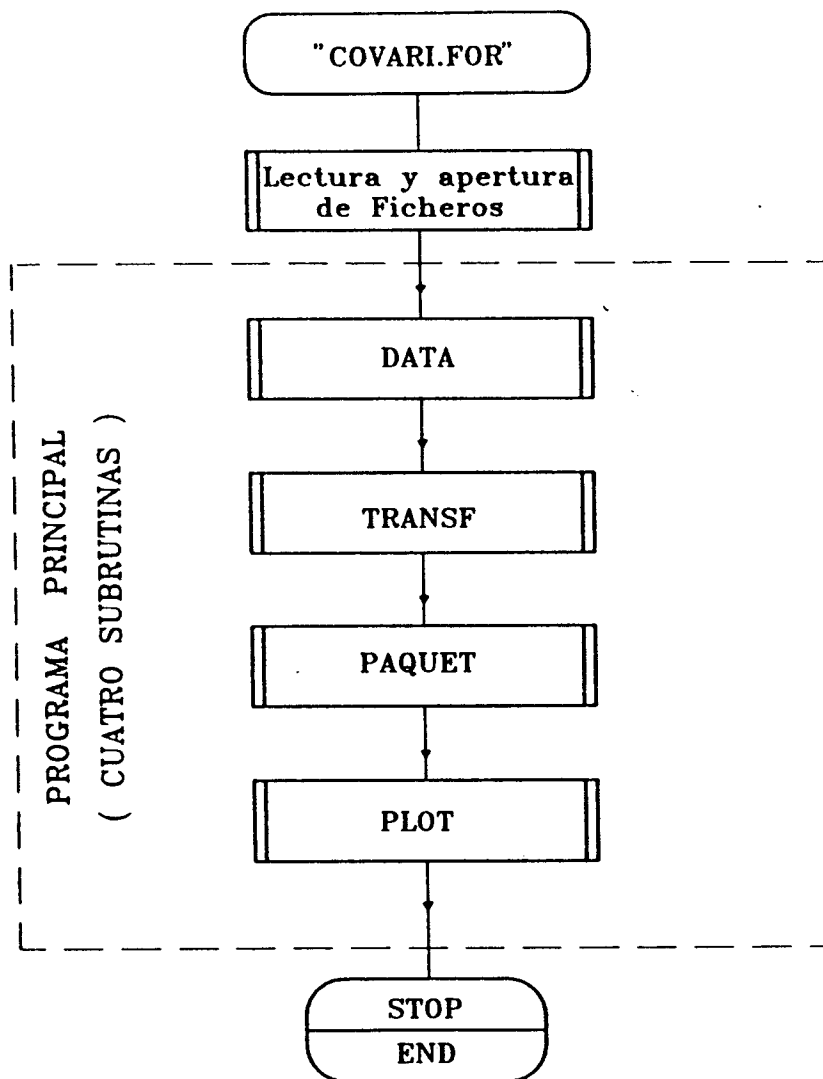


Figura 3.30 Programa "COVARI.FOR". Calcula las autocorrelaciones, autocovarianzas, cross-covarianzas y cross-correlaciones multivariantes, así como la media y la varianza de "M" registros de presión, de los modelos de disipación de energía hidráulica.



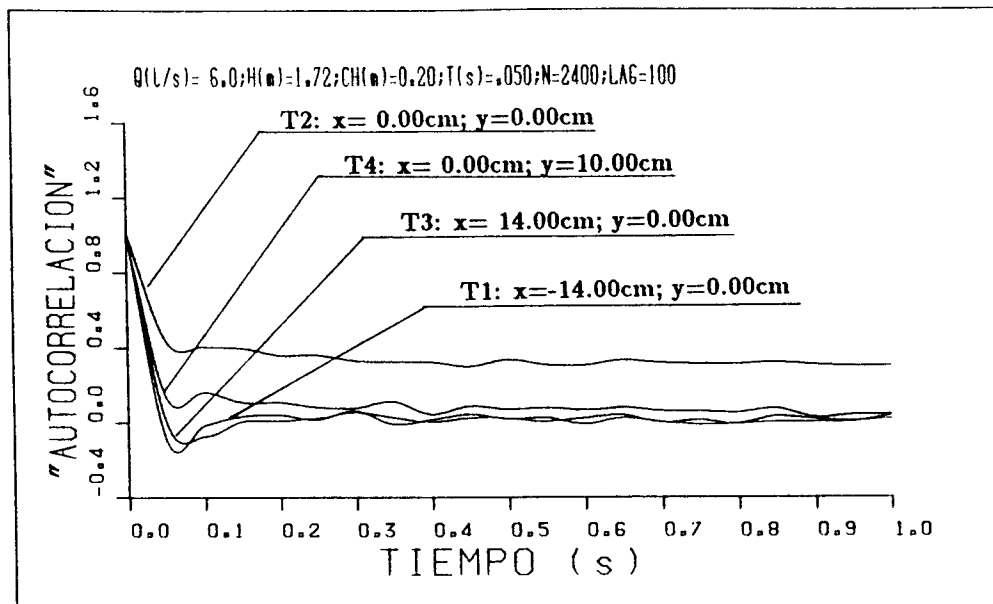
En el cuadro 3.6, se indican los números, nombre y tipo de grabación de los ficheros, en el programa "COVARI.FOR".

En la figura 3.31, se presentan las autocorrelaciones y autocovarianzas, obtenidas con el programa "COVARI.FOR", para el caso del modelo del dissipador de energía hidráulica a pie de presa.

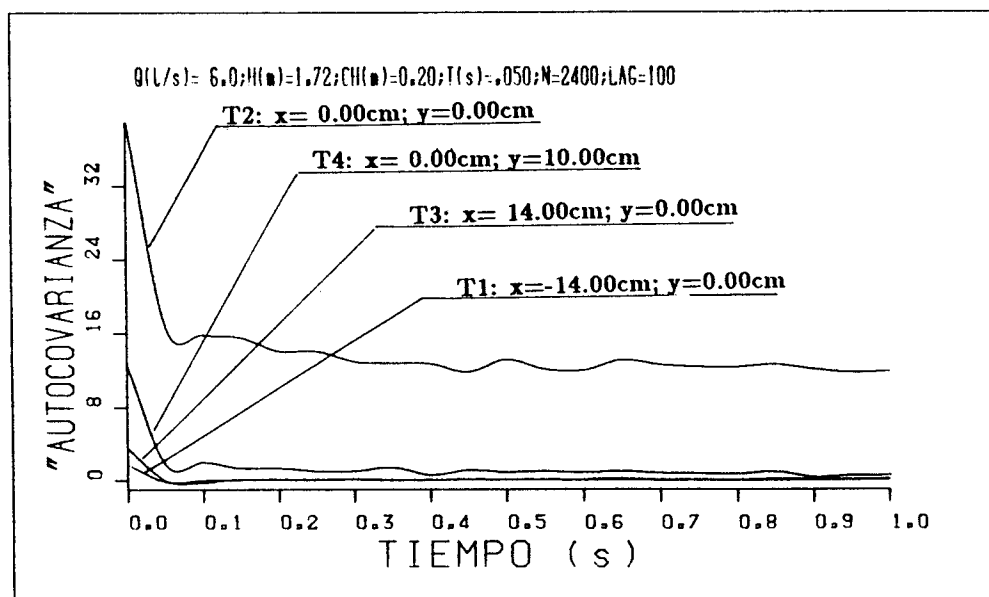
En la figura 3.32, se indican las cross-covarianzas y las cross-correlaciones, para los diferentes puntos de medición, en el modelo hidráulico del dissipador de energía a pie de presa.

FICHERO NÚMERO	NOMBRE DE LOS FICHERO	TIPO DE GRABACIÓN
20	NPI=PINST.RES	Presión Instant. Canal 1
21	FOR021.DAT	Presión Instant. Canal 2
22	FOR022.DAT	Presión Instant. Canal 3
23	FOR023.DAT	Presión Instant. Canal 4
30	NPF=PFLUC.RES	Presión de Fluct. Canal 1
31	FOR031.DAT	Presión de Fluct. Canal 2
32	FOR032.DAT	Presión de Fluct. Canal 3
33	FOR033.DAT	Presión de Fluct. Canal 4
40	NAC=AUTOCOV.RES	Autocovarianza Canal 1
41	FOR041.DAT	Autocovarianza Canal 2
42	FOR042.DAT	Autocovarianza Canal 3
43	FOR043.DAT	Autocovarianza Canal 4
50	NAR=AUTOCORR.RES	Autocorrelación Canal 1
51	FOR051.DAT	Autocorrelación Canal 2
52	FOR052.DAT	Autocorrelación Canal 3
53	FOR053.DAT	Autocorrelación Canal 4
60	NCV=CROSSCOV.RES	Crosscov. Canal 1 - Canal 2
61	FOR061.DAT	Crosscov. Canal 1 - Canal 3
62	FOR062.DAT	Crosscov. Canal 1 - Canal 4
63	FOR063.DAT	Crosscov. Canal 2 - Canal 3
64	FOR064.DAT	Crosscov. Canal 2 - Canal 4
65	FOR065.DAT	Crosscov. Canal 3 - Canal 4
70	NCR=CROSSCOR.RES	Crosscorr. Canal 1 - Canal 2
71	FOR071.DAT	Crosscorr. Canal 1 - Canal 3
72	FOR072.DAT	Crosscorr. Canal 1 - Canal 4
73	FOR073.DAT	Crosscorr. Canal 2 - Canal 3
74	FOR074.DAT	Crosscorr. Canal 2 - Canal 4
75	FOR075.DAT	Crosscorr. Canal 3 - Canal 4

Cuadro 3.6 Número de los ficheros, en la grabación de la subrutina "PLOT" del programa "COVARI.FOR".

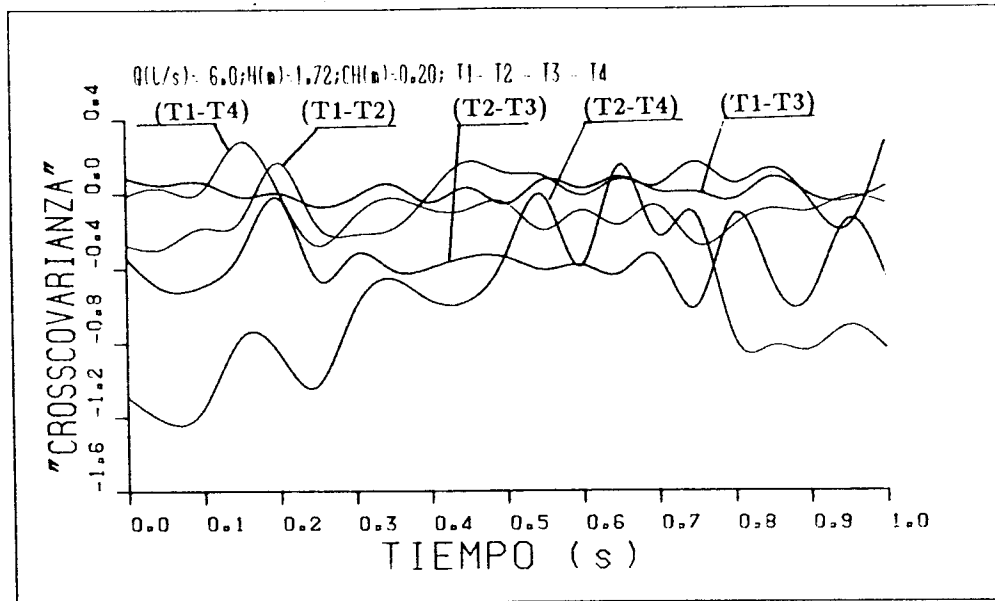


(a)

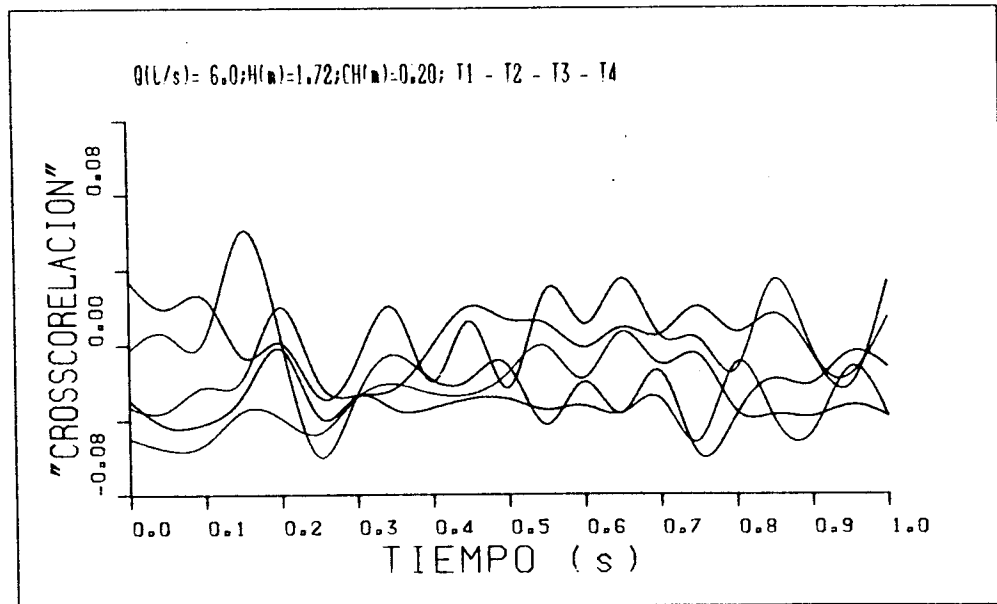


(b)

**Figura 3.31** Ejemplos de gráficos obtenidos con el programa "COVARI.FOR", en el análisis de las fluctuaciones de presión, del modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa: (a) Autocorrelaciones (b) Autocovarianzas.



(a)



(b)

**Figura 3.32** Ejemplos de gráficos obtenidos con el programa "COAVARI.FOR", en el análisis de las fluctuaciones de presión, del modelo hidráulico de un dissipador de energía a pie de presa: (a) Cross-covarianzas. (b) Cross-correlaciones.

## CAPÍTULO 4

# METODOLOGÍA EXPERIMENTAL UTILIZADA PARA LA CARACTERIZACIÓN DEL CAMPO DE PRESIONES. SISTEMA DE ADQUISICIÓN DE DATOS

### 4.1 Introducción

El estudio hidráulico y estructural de los dispositivos que se encuentran sometidos a fluctuaciones de presión debidos a un flujo altamente turbulento, como es el caso de los cuencos disipadores de energía hidráulica de las presas, es uno de los problemas más complejos e interdisciplinarios de la Ingeniería Civil.

Las características del fenómeno de la turbulencia: aleatoriedad, anisotropía y no homogeneidad y la complejidad del flujo creado, no permiten un tratamiento puramente analítico del problema, razón por la cual los parámetros fundamentales del fenómeno son obtenidos experimentalmente en modelos hidráulicos, que son construidos bajo las leyes de semejanza dinámica y concretamente con la ley de similitud de Froude.

Como un primer caso a tratar, nos interesa fundamentalmente estudiar los esfuerzos que se ejercen sobre un fondo plano, debido a la incidencia de un chorro de agua turbulento, semejante al vertido por coronación en una presa bóveda.

Estos esfuerzos están en función de la energía disponible del chorro y que es igual a la energía potencial total en la superficie del embalse, menos las pérdidas que se producen por la fricción y emulsión con el aire y por la difusión en el colchón de agua.

En nuestro caso concreto, analizaremos los esfuerzos turbulentos que se ejercen sobre el fondo del disipador, para varias condiciones de caudal  $Q$  y alturas de colchón de agua  $h$ , manteniendo fija la altura de vertido  $H$ ; ver figura 4.2

De este modo tenemos las siguientes magnitudes a medir:

- Caudales, niveles de agua, velocidades y presiones medias
- Esfuerzos turbulentos (presiones) en el fondo.

El primer grupo de mediciones constituyen procedimientos clásicos.

El segundo grupo, constituye el tema fundamental de este trabajo, y para su realización fue necesario implementar un sistema automatizado de adquisición y tratamiento de datos.

En este capítulo indicaremos las características fundamentales de este equipo, la calibración estática y dinámica de los transductores de presión y finalmente, el software que se ha desarrollado para este sistema de adquisición de datos.

## 4.2 Equipo experimental

Para este estudio fue necesario construir un modelo de un cuenco amortiguador en metacrilato y cuyas dimensiones y características pueden verse en la figura 4.1.

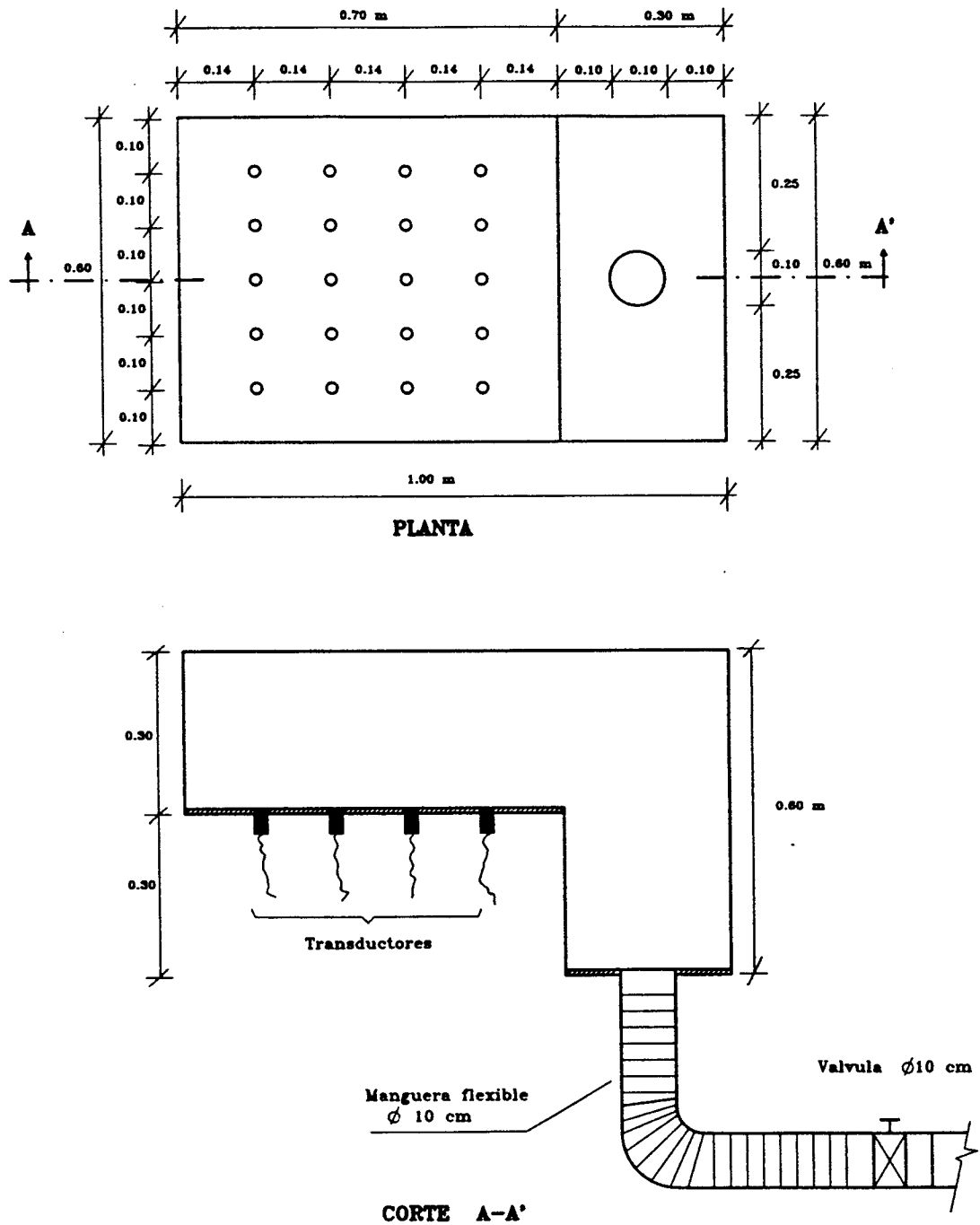


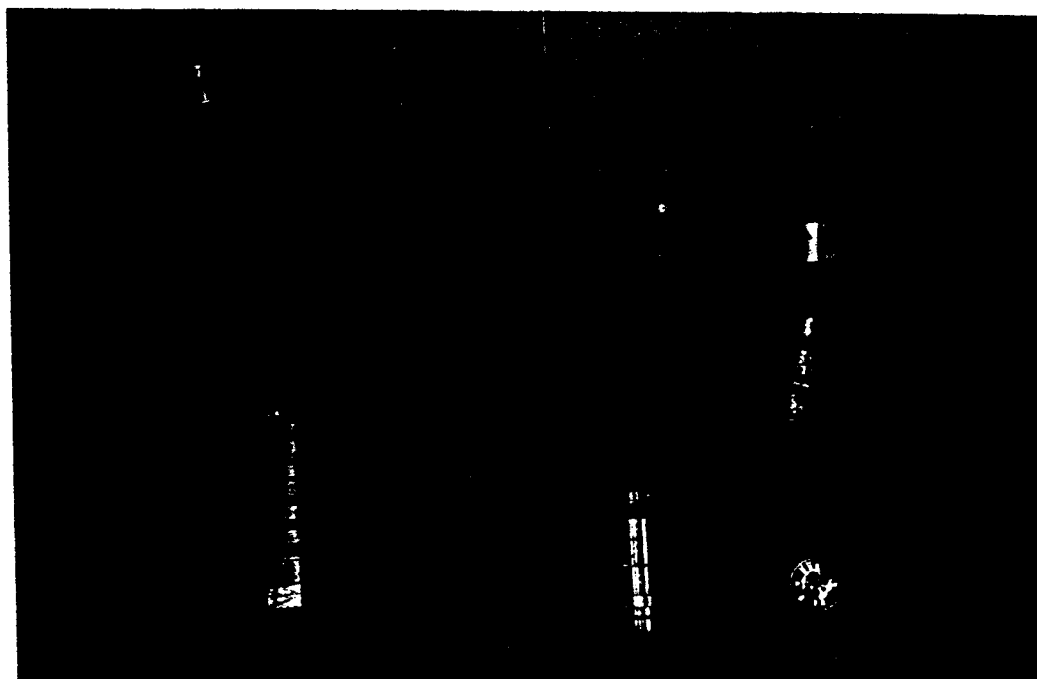
Figura 4.1 Modelo del cuenco disipador de energía.

En la solera del modelo, se instalaron los piezómetros y transductores de presión. Se utilizaron cinco transductores de tipo "piezoresistivo", cuatro de la marca suiza Kistler (rango de medida: 0-0.5bar) y uno de la marca americana Dynisco (rango de medida: 0-0.35bar).

El término piezorresistivo se refiere al cambio de resistencia al paso de la corriente, producida por la acción de una presión.

Se fabricaron adaptadores de PVC para reemplazar a las roscas de acero de los transductores, con el objeto de evitar al máximo el desgaste de la plancha de metacrilato del modelo y se uniformizó el tipo de rosca de los transductores (americana a europea), con el fin de facilitar su operación. Así, estos adaptadores de PVC, constituyen conectores universales, tanto para los transductores como para los tubos piezométricos de  $\phi = 5mm$  y además constituyen tapones de cierre.

El detalle de los transductores y de los adaptadores de PVC, se pueden ver en la fotografía 1.



**Fotografía 1** Transductores de presión con sus respectivos conectores tipo bayoneta, adaptadores de PVC y empalme de tubo piezométrico

Una manguera flexible de  $\phi = 0.10m$  permitió el desague del cuenco, así como también una fácil operación en el cambio de posición de los transductores.

Con una válvula de compuerta se reguló el nivel del colchón de agua.

En las fotografías 2, 3 y 4, se puede observar en detalle al cuenco dissipador y sus accesorios (manguera flexible, transductores, tubos piezométricos y válvula de regulación), así como su funcionamiento en una campaña de ensayos.

Para la caracterización del campo de presiones en la solera del cuenco, se dispuso de un sistema automatizado de adquisición y tratamiento de datos, cuyo esquema puede observarse en la figura 4.2.

En la fotografía 5 puede observarse una panorámica de este sistema de adquisición de datos.

Una tarjeta de adquisición de datos marca Data Translation-DT2805, acoplada a un ordenador IBM System/II, realiza la transformación de la señal analógica a digital.

La regulación de la tensión de entrada, para los dos tipos de transductores, se realizó por medio de una fuente de alimentación PROMAX FAC-364. Los transductores Kystler trabajaron con una tensión de  $15V$ , en tanto que el transductor Dynisco con  $10V$ .

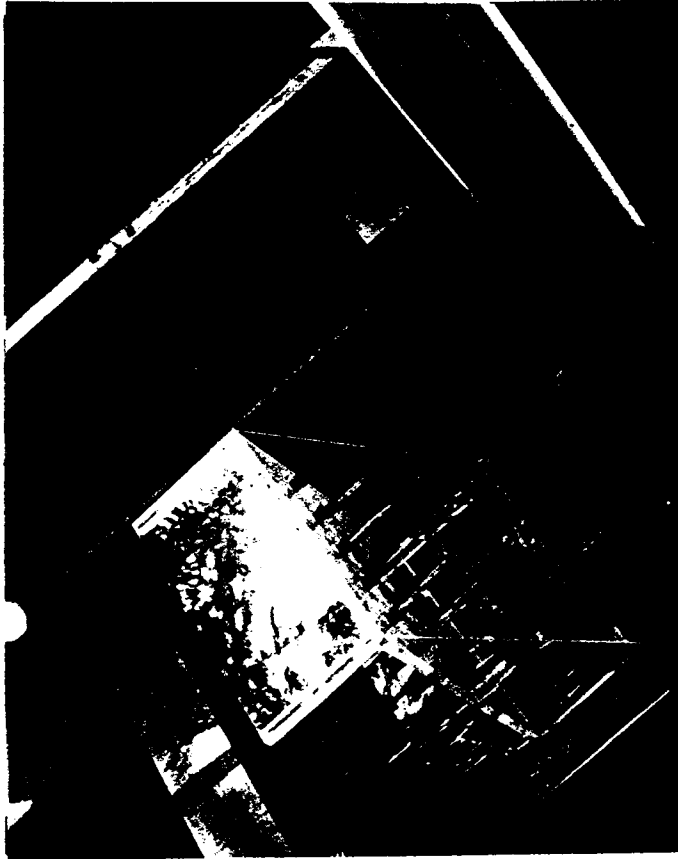
Todas las verificaciones de tensión tanto en la instalación como en el funcionamiento del sistema, se realizó con un multímetro PD 782 marca "PROMAX".

La señal que se registra en los ensayos se graba en discos normales de  $5\frac{1}{4}$ ". Esta información, por medio de un ordenador personal, se transfiere al ordenador VAX 8600, para su posterior tratamiento.

Como infraestructura general, se utilizó el modelo del aliviadero de una presa bóveda, que permitió una altura de caída constante de ensayo de  $1.72m$ . Se dispuso de uno de los vanos centrales de longitud  $L = 0.24m$ . Ver fotografías 3 y 4.

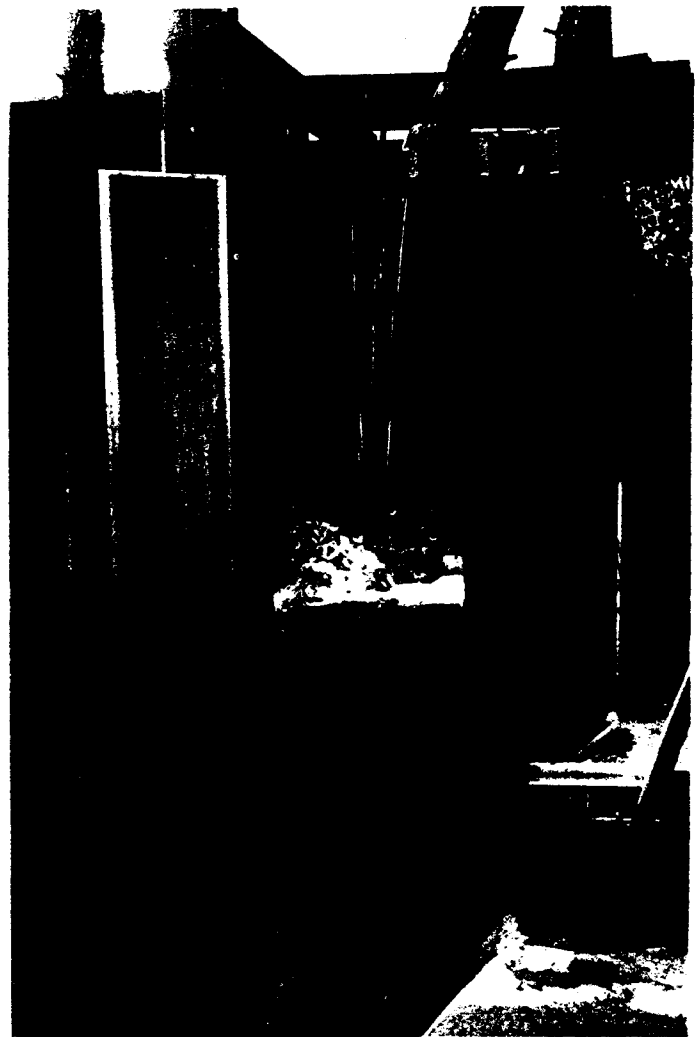
Los caudales ensayados se controlaron por medio de un vertedero triangular, ubicado aguas arriba del modelo de la presa y por un linnímetro marca OTT de  $0.1mm$  de precisión.





Fotografías 2, 3 y 4

Detalle del cuenco y su funcionamiento



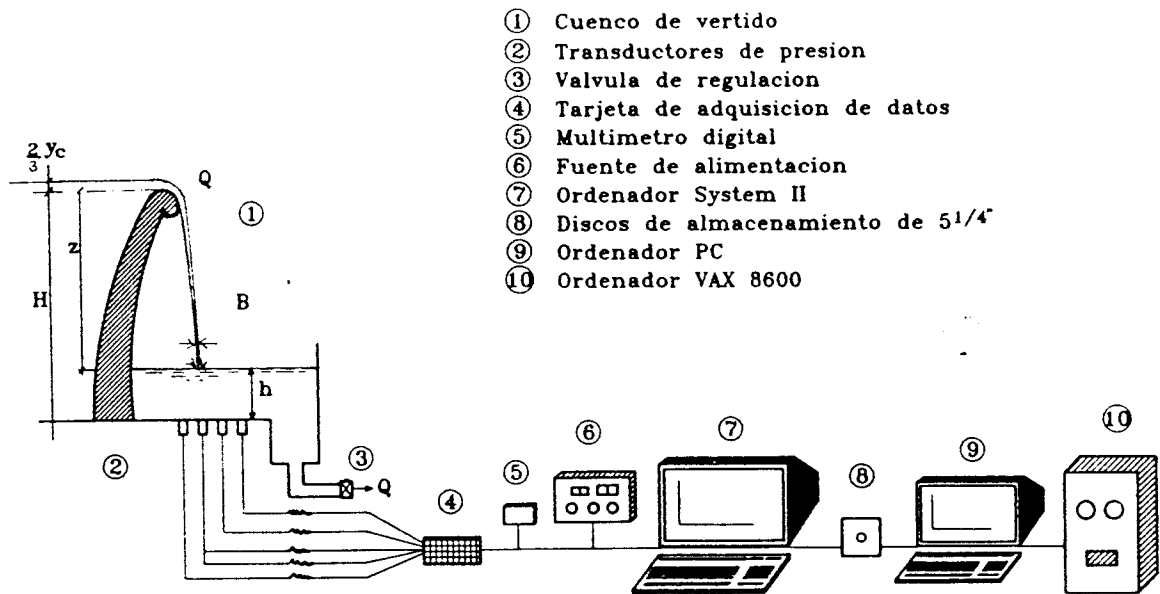


Figura 4.2 Sistema de adquisición y tratamiento de datos.

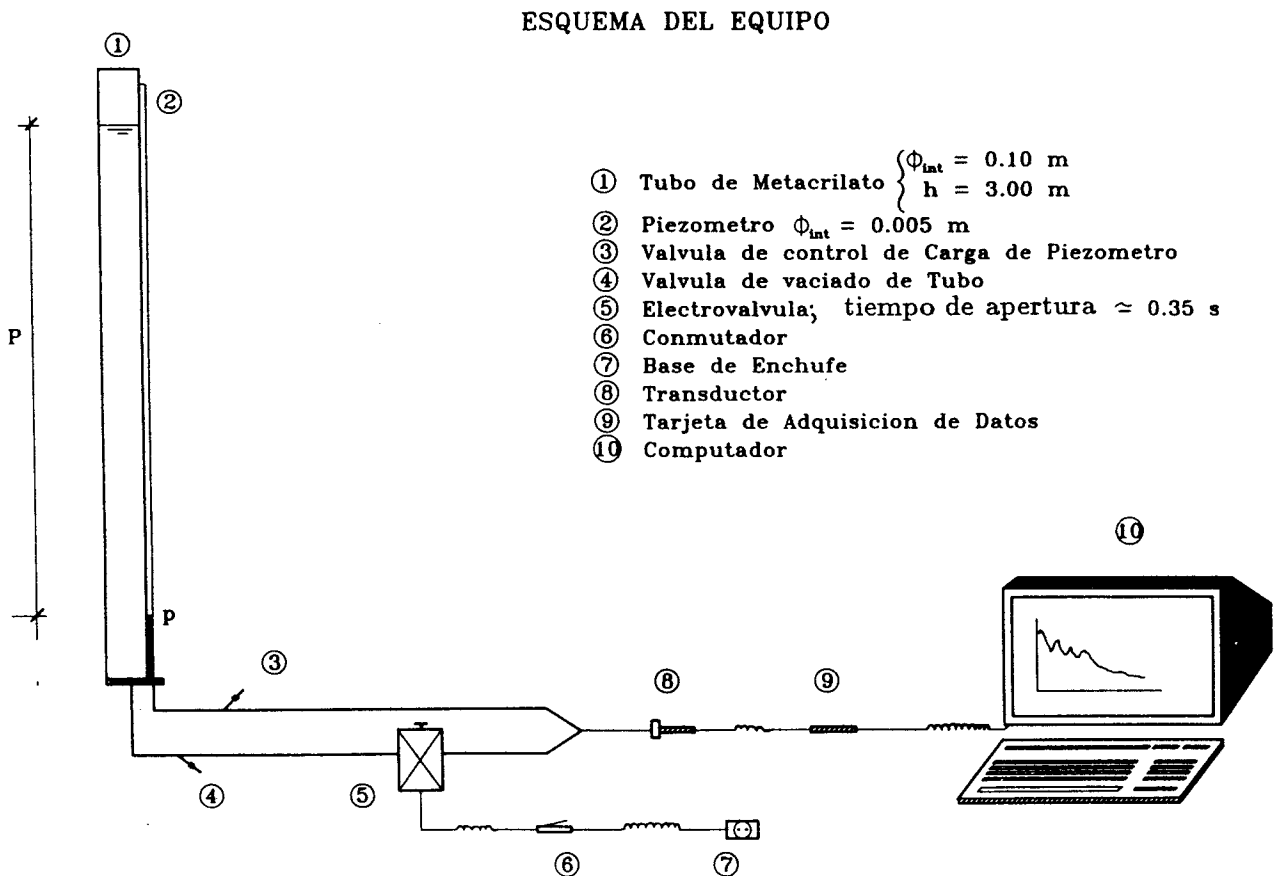


Fotografía 5 Vista panorámica del sistema de adquisición de datos fuente de alimentación, tarjeta de adquisición y ordenador

### 4.3 Calibración de los transductores de presión

Los transductores de presión son los elementos básicos de esta experiencia puesto que nos determinan los registros de presión. Por tanto es imprescindible la comprobación de su funcionamiento para garantizar de esta manera la fiabilidad de los resultados experimentales.

En la figura 4.3, se presenta un esquema del dispositivo construido, para realizar su calibración.



**Figura 4.3** Esquema del equipo y su disposición general, utilizado en la calibración estática y dinámica de los transductores de presión

#### 4.3.1 Calibración estática

La calibración estática consistió en registrar los niveles de presión en cm de columna de agua y sus correspondientes valores de tensión eléctrica en mV, medidos en el transductor. Esto se realizó para diferentes alturas, tanto en llenado como en vaciado del tubo de carga.

Los resultados se graficaron y se determinaron sus ecuaciones de regresión respectivas.

Observamos una respuesta lineal de todos los transductores. Esto, a más de facilitar en gran medida su utilización, garantiza una histéresis muy baja. Esta característica es importante que se exija en el momento de su adquisición.

Unas curvas típicas de los resultado de la calibración estática, puede observarse en las figuras 4.4a y 4.4b.

Otro aspecto importante, es que estas curvas de calibración estática son las que incluidas en los programa de tratamiento, traducen los valores de tensión en mV a valores de presión en cm. Por lo tanto, la precisión en la determinación de la pendiente de la curva, así como del valor de la ordenada al origen es fundamental.

#### 4.3.2 Tratamiento del ruido

Comprobamos que los valores de las pendientes de las curvas de calibración estática de los transductores de presión (sensibilidad nominal), obtenidas en el laboratorio, son prácticamente iguales a los valores dados por los fabricantes y son, sensiblemente constantes a lo largo de su vida útil.

En cambio, los valores de las ordenadas al origen de estas curvas de calibración varían aleatoriamente, afectados por las condiciones del ruido presente en cada día.

Dado que la amplificación de la señal se realiza en la tarjeta de adquisición de datos y no en los propios transductores, se amplifica por igual la señal y el ruido.

Una solución inmediata al problema del ruido consiste en incorporar a los transductores filtros analógicos y multiplicadores diferenciales pero que en la práctica, por su costo, se vuelven casi prohibitivos.

En el presente caso y después de probar varias alternativas, se comprobó que el valor promedio de un muestreo de este ruido, simulando las mismas condiciones de funcionamiento de los ensayos (equipo de bombeo encendido), correspondía al valor de la ordenada al origen de la curva de calibración de cada transductor. Es decir, se determinó que las desviaciones en la medida introducidas por el ruido, se neutralizan tomando este valor promedio como ordenada al origen.

Así pues, una tarea obligada previa a cada campaña de ensayos, fue determinar las ordenadas al origen de los transductores de presión; verificándose a continuación, que la medición suministrada por los transductores, con respecto a una carga hidrostática constante conocida, fuera correcta. Solamente cuando se cumplía esta condición se procedía la campaña de ensayos propiamente dicha.

Dentro de los programas de adquisición y tratamiento de datos, en las ecuaciones de calibración que realizan la transformación de la señal eléctrica (mV), en altura de columna de agua (cm), el valor de la ordenada al origen es una variable que se introduce en cada campaña de ensayo.

Un resumen de las ecuaciones de calibración de los transductores de presión, para una campaña de ensayos, se presenta en el cuadro 4.1

TRANSDUCTOR (Serie No.)	PENDIENTE b (mV/cm)	ORDENADA c (mV)
KISTLER 190 450	0.291	0.630
KISTLER 190 451	0.291	0.557
KISTLER 230 741	0.289	-0.608
KISTLER 230 742	0.290	0.277
DYNISCO 331 874	0.085	0.065

**Cuadro 4.1** *Parámetros de las ecuaciones de calibración estática*  
Ecuación general:  $T(mV)=b(mV/cm) \times H(cm)+c(mV)$

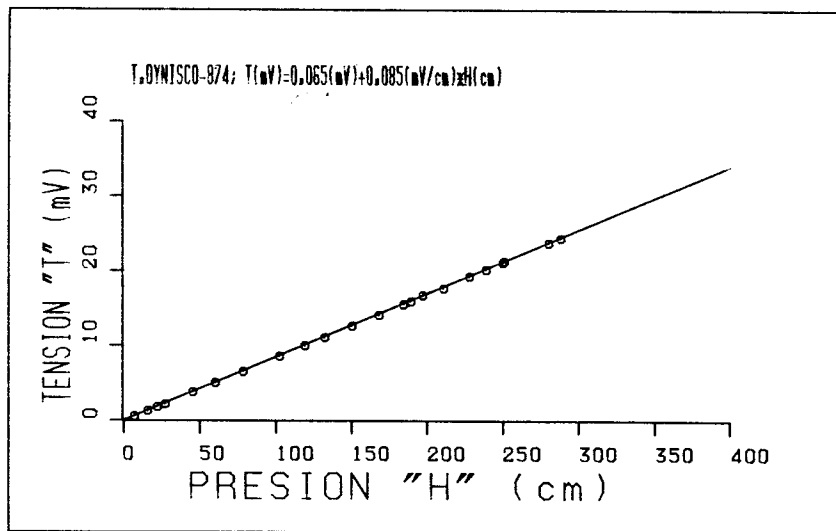
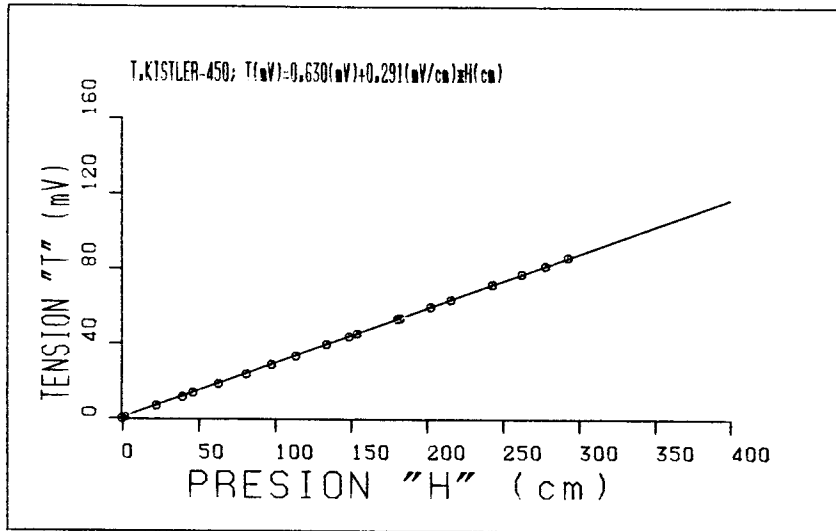


Figura 4.4 Curvas de calibración estática:  
(a) transductor suizo "Kistler". (b) transductor americano "Dynisco"

### 4.3.3 Calibración dinámica

La calibración dinámica permitió la comprobación de las funciones de transferencia de los transductores de presión.

La función de transferencia nos define el tipo de respuesta (en el dominio de la frecuencia) de los transductores de presión, a las solicitaciones de tipo dinámico. Por lo tanto, hasta qué frecuencia la información dinámica obtenida en los ensayos es fidedigna.

Se define la función de transferencia  $H(\omega)$  de un sistema, como la transformada de Fourier de la respuesta al impulso  $h(t)$  [50], [74], [102]

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.1)$$

La respuesta al impulso  $h(t)$  de un sistema, se obtiene aplicando a este sistema una función delta de Dirac  $\delta(t - t_r)$ , donde  $t_r$  es el tiempo de referencia de la primera llegada del incremento de presión.

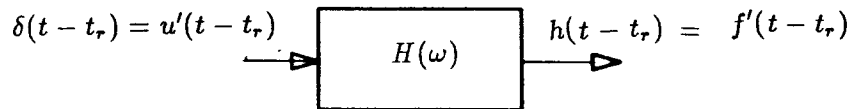


Figura 4.5 Diagrama de la respuesta impulso

Para obtener la función impulso, se usa el mismo equipo que se emplea en la calibración estática (Ver figura 4.3). Para esto, se intenta conseguir una función salto o escalón  $u(t - t_r)$ , accionando la electroválvula que al abrirse provoca por vasos comunicantes un incremento de presión de  $p$  a  $P$  considerado unitario. Así, la derivada de la función salto nos da la función impulso buscada  $\delta(t - t_r) = u'(t - t_r)$ .

Es importante hacer notar que, la calibración dependerá del tipo de función obtenida realmente en laboratorio, concretamente, por el tiempo de apertura de la electroválvula. Así, para tiempos  $t_r$  menores o iguales al período de muestreo  $T$ , la respuesta obtenida puede considerarse como una función salto; de lo contrario, se obtendrá una función rampa.

A continuación analizaremos estos dos tipos de calibración, deduciendo los algoritmos más adecuados para uno y otro caso.

### 4.3.3.1 Calibración con respuesta tipo salto

Como hemos visto anteriormente, la respuesta obtenida en laboratorio se puede considerar como una función salto cuando el tiempo de apertura de la electroválvula sea suficientemente pequeña ( $t_v \leq T$ ).

$$u(t - t_r) = \begin{cases} p, & \text{si } t \leq t_r \\ P, & \text{si } t > t_r \end{cases} \quad (4.2)$$

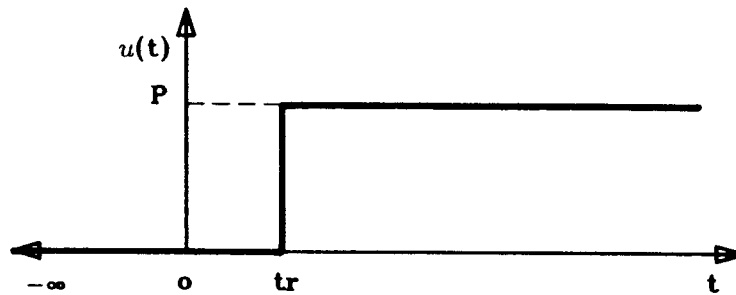


Figura 4.6 Calibración con función tipo salto

Para obtener la función impulso necesitamos derivar a la función salto. En lo posible se debe evitar realizar cualquier derivación numérica [76], por lo tanto debemos encontrar una nueva relación entre las transformadas de Fourier de la función impulso y la función salto.

Esta nueva relación la encontraremos, tanto para el caso continuo como discreto.

#### A) Caso continuo

Partiendo de la definición de Función de transferencia (ecuación (4.1)) tenemos que:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt$$

y reemplazando  $h(t) = f'(t)$  (derivada de la función salto), tenemos:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.3)$$



Cambiando de variables e integrando por partes:

$$\begin{aligned} f'(t)dt &= du; \rightarrow u = f(t) \\ e^{-i\omega t} &= v; \rightarrow dv = -i\omega e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Obtenemos que:

$$H(\omega) = f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} -i\omega f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.4)$$

El producto  $f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty}$  es igual a cero, ya que reemplazando los límites correspondientes tenemos: cuando  $(t \rightarrow \infty)$  el valor  $(e^{-i\omega t} \rightarrow 0)$  y, cuando  $(t \rightarrow -\infty)$  el valor de  $(f(t) = 0)$ .

Por lo tanto:

$$H(\omega) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.5)$$

La integral  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = F(\omega)$ , es la transformada de Fourier de la respuesta con función tipo salto  $f(t)$ .

De esta forma, la **función de transferencia** se relaciona directamente con la **función salto** por medio del producto complejo:

$$H(\omega) = i\omega F(\omega) \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) no es más que una confirmación de una de las propiedades de las transformadas de Fourier "la derivada temporal de una función  $f(t)$ , es la transformada de Fourier  $F(\omega)$  multiplicada por la frecuencia compleja  $(i\omega)$ ".

## B) Caso discreto

El análisis del caso continuo es más bien de tipo teórico, ya que la información que obtenemos de los ensayos es de tipo discreto. Escogiendo un período de muestreo "T", el tiempo continuo se discretiza como  $t = kT$ .

Así, se define la transformada discreta finita de Fourier (DFFT) de la respuesta al impulso  $h(kT) = f'(kT)$  como:

$$\hat{H}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f'(kT)e^{-i\omega kT} \quad (4.7)$$

Donde N representa el número total de datos muestreados.

La derivada de la respuesta a la función salto  $f'(kT)$ , podemos expresarla como una derivación numérica muy simple:

$$f'(kT) = \frac{f(kT + T) - f(kT)}{T} \quad (4.8)$$

Reemplazando la Ec.(4.8) en la Ec.(4.7), tenemos que:

$$\hat{H}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(kT+T) - f(kT)}{T} e^{-i\omega kT} = \frac{1}{T} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} f(kT+T) e^{-i\omega kT} - \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i\omega kT} \right]$$

El segundo sumatorio del lado derecho representa la transformada discreta finita de Fourier (DFFT) de la respuesta de función tipo salto:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-i\omega kT} = \hat{F}(\omega) \quad (4.9)$$

Si al primer sumatorio del lado derecho le multiplicamos y dividimos por  $\left(\frac{e^{-i\omega T}}{e^{-i\omega T}}\right)$ , obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(kT+T) e^{-i\omega kT} \left(\frac{e^{-i\omega T}}{e^{-i\omega T}}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(kT+T) e^{-i\omega(kT+T)}}{e^{-i\omega T}}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f(kT+T) e^{-i\omega kT} = e^{i\omega T} \hat{F}(\omega)$$

Con lo cual:

$$\hat{H}(\omega) = \frac{1}{T} \left[ e^{i\omega T} \hat{F}(\omega) - \hat{F}(\omega) \right] \quad (4.10)$$

Quedando finalmente la función de transferencia relacionada directamente con la respuesta de función tipo salto, por medio de un producto complejo:

$$\hat{H}(\omega) = \hat{F}(\omega) \left( \frac{e^{i\omega T} - 1}{T} \right) \quad (4.11.1)$$

Como cualquier valor complejo, la función de transferencia se puede expresar como la suma de su parte real e imaginaria:

$$\hat{H}(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) \quad (4.11.2)$$

Y de aquí, la función de transferencia calculada con respuesta tipo salto  $\hat{H}_s(\omega)$ , la expresamos en función de su módulo y fase:

**Módulo de la función de transferencia:**

$$\left| \hat{H}_s(\omega) \right| = \left| \hat{F}(\omega) \left( \frac{e^{i\omega T} - 1}{T} \right) \right| \quad (4.11.3)$$

Fase de la función de transferencia:

$$\Psi_s = \text{Arctg} \left( \frac{B_s(\omega)}{A_s(\omega)} \right) \quad (4.11.4)$$

Donde:

T... Período de muestreo

N... Número total de datos muestreados

$\Psi_s$ ... Angulo de fase de la función de transferencia con respuesta

de función tipo salto

$|H_s(\omega)| = \sqrt{A_s^2 + B_s^2}$ ... Módulo de la función de transferencia con respuesta

de función tipo salto

$\hat{F}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-i\omega kT}$ ... DFFT de la respuesta a la función tipo salto.

$A_s$ ... Parte real de la función de transferencia con respuesta de función tipo salto

$B_s$ ... Parte imaginaria de la función de transferencia con respuesta de función tipo salto.

#### 4.3.3.2 Calibración con respuesta tipo rampa

Cuando el tiempo de apertura de la electroválvula es  $t_v > T$  lo que obtenemos es una función tipo rampa  $r(t)$ :

$$r(t) = \begin{cases} p, & \text{si } t \leq t_r \\ (t - t_r) * \frac{P-p}{t_v-t_r}, & \text{si } t_r < t \leq t_v \\ P, & \text{si } t > t_v \end{cases} \quad (4.12)$$

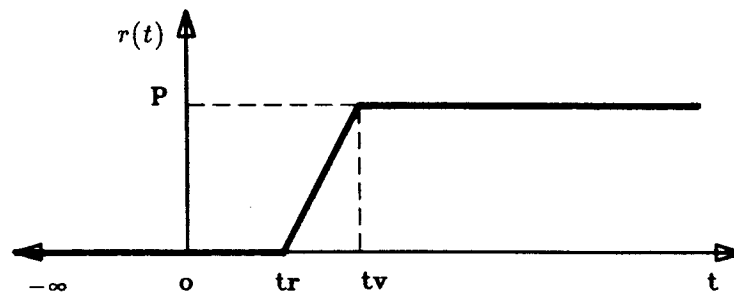


Figura 4.7 Calibración con función tipo rampa

La derivada de una función rampa, corresponde a una función tipo bloque  $m(t) = r'(t)$ , con valores característicos:

$$m(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < t_r \\ \frac{P-p}{t_v-t_r}, & \text{si } t_r \leq t \leq t_v \\ 0, & \text{si } t > t_v \end{cases} \quad (4.13)$$

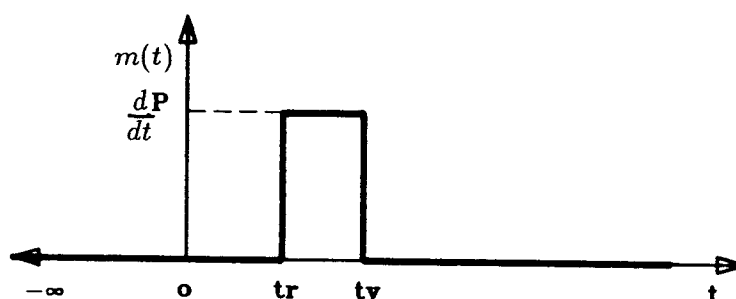


Figura 4.8 Función tipo bloque

La transformada discreta finita de Fourier (DFFT) de la función bloque es:

$$\hat{M}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} m(kT) e^{-i\omega kT} \quad (4.14)$$

La respuesta en el tiempo obtenida en el laboratorio  $f(kT)$  se deriva numéricamente. Esta función deberá ser suavizada convenientemente para obtener la función  $\bar{f}'(kT)$ :

$$\bar{f}'(kT) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n f'(kT + j) \quad (4.15)$$

Donde  $n$  representa el orden que define los puntos de suavizado [ $n=1 \rightarrow$  3-puntos-de-suavizado;  $n=2 \rightarrow$  5-puntos-de-suavizado ...]

La transformada discreta finita de Fourier de la función suavizada  $\bar{f}'(kT)$  es:

$$\hat{F}'(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{f}'(kT)e^{-i\omega kT} \quad (4.16)$$

La cual representa la transformada de Fourier de la respuesta del sistema a  $m(t)$ .

La relación entre la salidas y entradas— (out-put/in-put)— del sistema, nos define la función de transferencia — $\hat{H}_r(\omega)$ —.

En nuestro caso, será el cociente entre las ecuaciones (4.16) y (4.14) , así:

$$\hat{H}_r(\omega) = \frac{\hat{F}'(\omega)}{\hat{M}(\omega)} \quad (4.17.1)$$

Al igual que para la función salto, la función de transferencia tipo rampa, se puede expresar en función de su módulo y fase:

$$\left| \hat{H}_r(\omega) \right| = \left| \frac{\hat{F}'(\omega)}{\hat{M}(\omega)} \right| \quad (4.17.2)$$

$$\Psi_r = \text{Arctg} \left( \frac{B_r(\omega)}{A_r(\omega)} \right) \quad (4.17.3)$$

Donde:

T... Período de muestreo

N... Número total de datos muestreados

$\Psi_r$  ... Angulo de fase de la función de transferencia con respuesta tipo rampa

$\left| H_r(\omega) \right| = \sqrt{A_r^2 + B_r^2}$  ... Módulo de la función de transferencia con respuesta de función tipo rampa

$\hat{M}(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} m(kT)e^{-i\omega kT}$  ... DFFT de la derivada de la función tipo rampa [Función bloque (In-put)].

$\hat{F}'(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{f}'(kT)e^{-i\omega kT}$  ... DFFT de la derivada suavizada de la respuesta de función tipo rampa (out-put).

$A_r$  ... Parte real de la función de transferencia con respuesta de función tipo rampa

$B_r$  ... Parte imaginaria de la función de transferencia con respuesta de función tipo rampa

#### 4.3.4 Análisis de las calibraciones y conclusiones

Resumiendo lo tratado anteriormente, diremos que la **calibración estática** de los transductores de presión no conlleva mayor dificultad. Sin embargo, su determinación correcta es muy importante, pues además de ser un parámetro decisivo en la selección de compra (exigencia de linealidad entre tensión—presión), su curva de regresión nos da la transformación de los datos medidos, para su posterior tratamiento.

De esta forma se determinó, que la ordenada al origen de las curvas de calibración estática, es una variable, que se cuantifica como el valor medio del muestreo del ruido, correspondiente a cada día ensayado.

El valor de la pendiente de las curvas de calibración es una constante. Estos valores obtenidos en la calibración, fueron muy semejantes a los suministrados por los fabricantes.

**La calibración dinámica** consiste en comprobar las funciones de transferencia de los transductores. Su realización conlleva mayor complicación y el análisis de los datos medidos dependerá del tipo de la función de respuesta obtenida en el laboratorio.

Así, hemos visto que para tiempos de apertura de la electroválvula ( $t_v \leq T$ ), la función de transferencia puede analizarse como una respuesta de función de tipo escalón y su cálculo, realizarse directamente por medio de la fórmula (4.11.3).

Para tiempos mayores de apertura de la electroválvula ( $t_v > T$ ), como ha sido nuestro caso ( $0.35s > 0.005s$ ), la función de transferencia debe analizarse como una respuesta de función de tipo rampa y su cálculo, realizarse por medio de la fórmula (4.17.2).

En la **figura 4.9** se indica la función tipo rampa que se ajusta a los datos medidos, para uno de los transductores analizados. Debe notarse, que el tiempo de la primera llegada del incremento de presión fue ( $t_r = 0.5s$ ). El ensayo se ha realizado con una frecuencia de 200 muestras por segundo (lo que corresponde a una frecuencia de Nyquist de 100Hz), y con 1000 puntos de muestreo.

En la **figura 4.10** se indica la derivada de la función rampa y cuya transformada discreta Finita de Fourier (DFFT) se utilizó como In-put.

En las **figuras 4.11 y 4.12** se indican las respuesta del transductor y su derivada correspondiente.

En la **figura 4.13** se presenta la derivada de la respuesta, suavizada con 21 puntos y cuya transformada discreta finita de Fourier (TDF) es la salida del sistema Out-put.

En la **figura 4.14** se indica el módulo de la función de transferencia del transductor analizado. Se puede observar que ésta es sensiblemente plana hasta los 20Hz. A partir de esta frecuencia los datos obtenidos deberían ser tratados por medio de una corrección de la función de transferencia, ya que como se puede observar, el valor de módulo se altera.

En el estudio de las fluctuaciones de presión, lo que nos interesa analizar son las macroturbulencias, las mismas que se encuentran muy por debajo de los 20Hz. Por lo tanto, los datos obtenidos no necesitan ser corregidos.

Como afirmación de esto último, se presenta en la figura 4.15 las densidades espectrales de estas fluctuaciones de presión, medidas para diferentes alturas de colchón de agua del cuenco disipador. Las máximas concentraciones de las fluctuaciones de presión macroturbulenta se encuentran por debajo de 1Hz.

La densidad espectral representa la distribución de la energía en función de la frecuencia, permitiéndonos por tanto, identificar las frecuencias predominantes del fenómeno (ver capítulo 3).

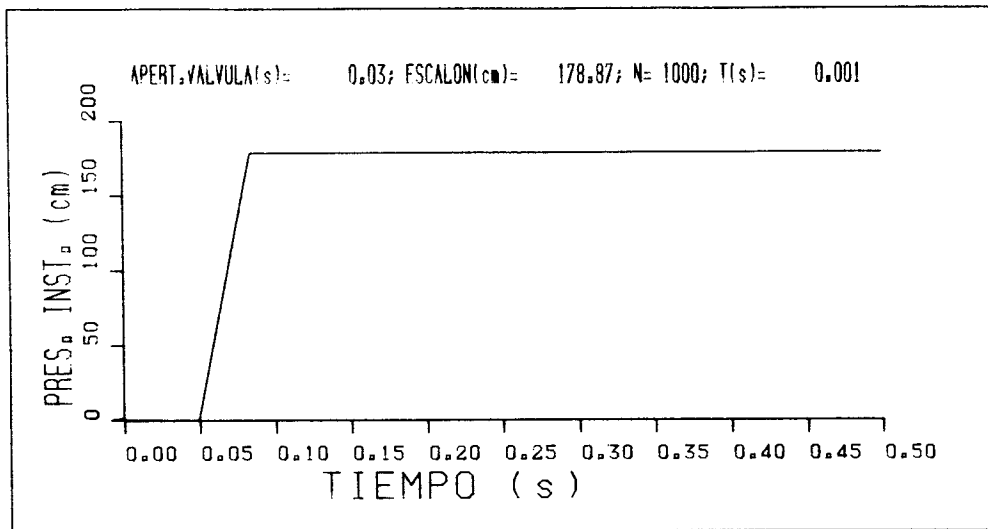


Figura 4.9 Función tipo rampa  
Transductor suizo "Kistler"

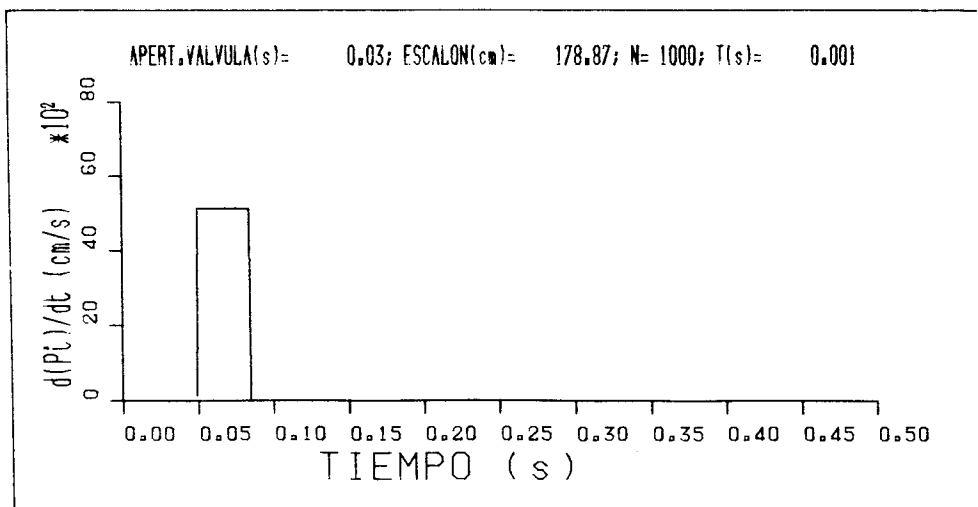


Figura 4.10 Derivada de la función tipo rampa

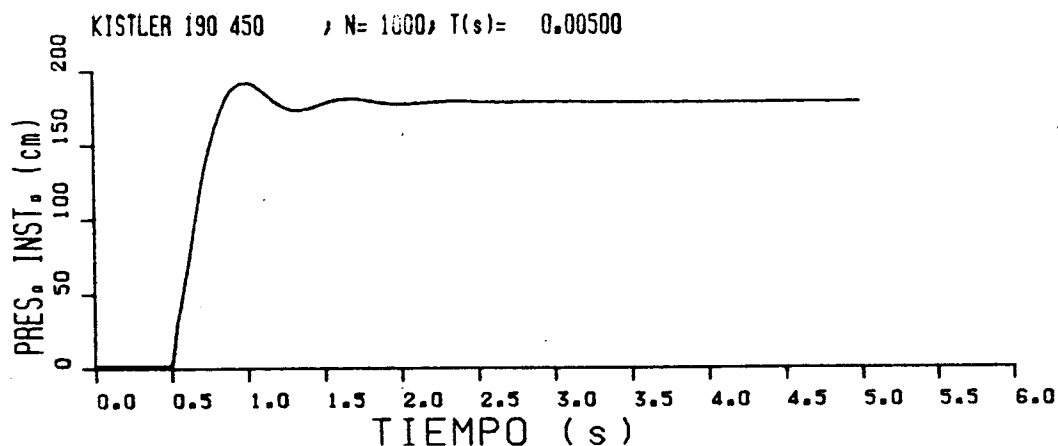


Figura 4.11 Respuesta del transductor Kistler  
 Ensayo: N=1000 puntos; frecuencia=200 muestras/s  
 Frecuencia de Nyquist=100Hz

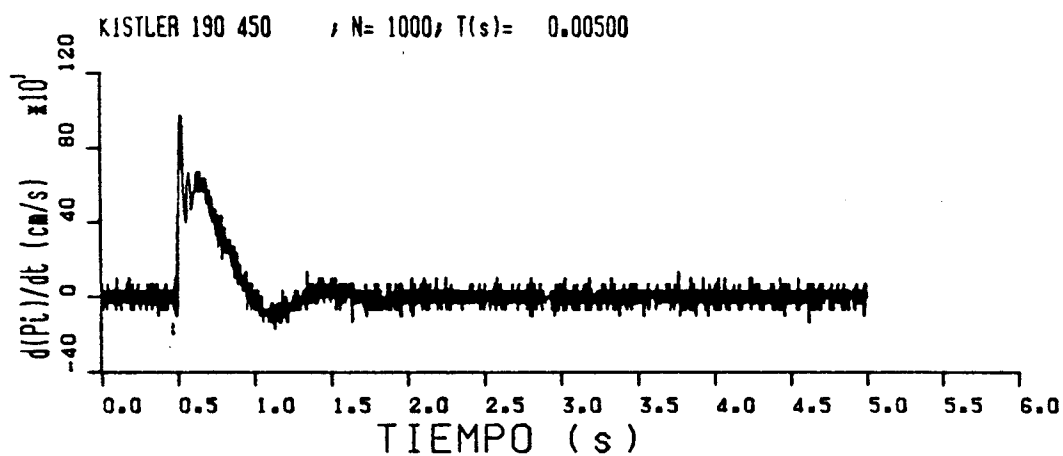


Figura 4.12 Derivada de la respuesta del transductor Kistler

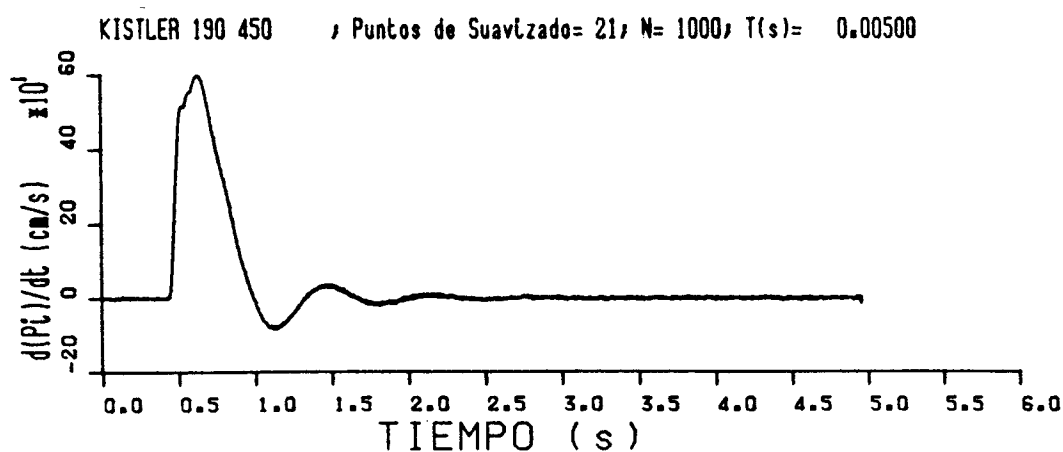


Figura 4.13 Derivada de la respuesta del transductor Kistler con 21 puntos de suavizado.



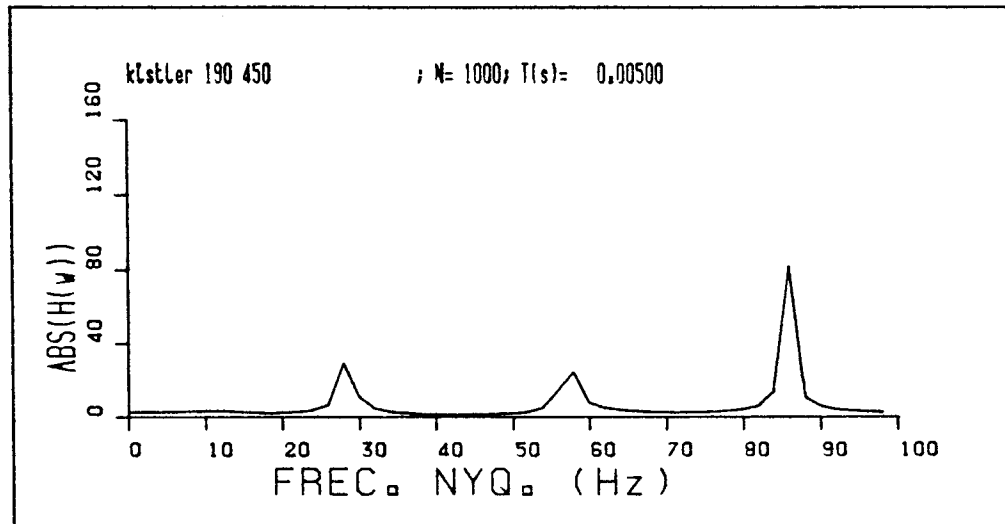


Figura 4.14 Módulo de la función de transferencia transductor suizo "Kistler"  
 $N=1000$  muestras; frec. ensayo= $200$  muestras/s; frec. de Nyquist= $100$ Hz.

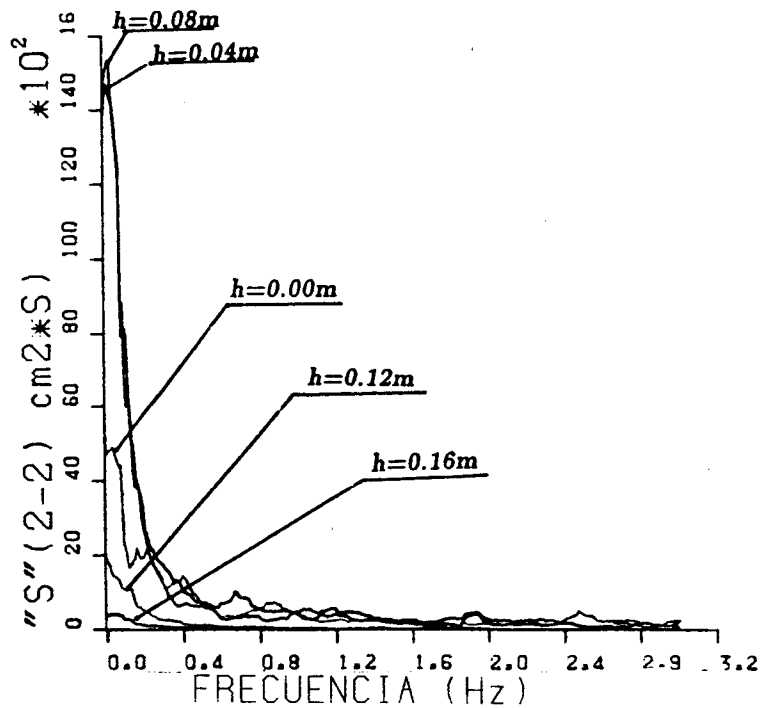


Figura 4.15 Densidades espectrales de fluctuaciones de presión  
 $H = 1.72m$ ;  $h = 0 - 4 - 8 - 12 - 16cm$ ;  $q = 50 \frac{l}{s^2m}$

#### 4.4 Descripción del software del sistema de adquisición de datos

El sistema general de adquisición de datos, se presentó en la sección 4.2, figura 4.2 de este capítulo. A continuación realizamos una explicación resumida del software que se desarrolló para la adquisición de la información. Una exposición detallada de este tema se encuentra en el Anexo A de esta tesis.

Un diagrama de ubicación y de interrelación de este software, se presenta en la figura 4.16.

Los programas "MUESTRAS1.PAS" y "MUESTRAS2.C" corresponden al software de adquisición de datos, en tanto que a través del programa "KERMIT" (emulador de terminal), se transfiere la información al Ordenador VAX-8600, para su procesamiento. Los programas de tratamiento "TRANS.FOR", "ESP1.FOR", "ESP2.FOR", "MULTI.FOR" y "COVARI.FOR", ya fueron expuestos en el capítulo 3.

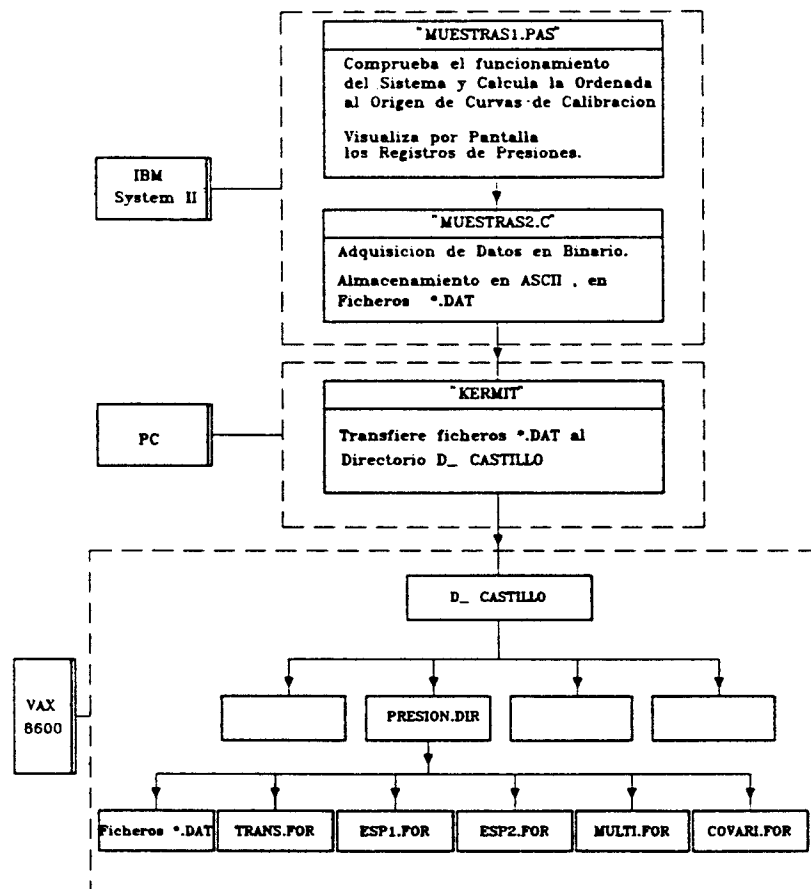


Figura 4.16 Diagrama de ubicación del software del sistema de adquisición de datos

En cuanto a la forma de adquisición, se indica que la señal analógica se amplificó en la tarjeta de adquisición con un rango bipolar de  $\pm 100\text{mV}$  y, se digitalizó en un rango de 0 a 4096 enteros o niveles de cuantización.

Los datos para los diferentes canales de los transductores, se almacenaron vectorialmente en forma consecutiva, en la memoria central del ordenador IBM. Después de cada serie de ensayos, los datos se transformaron a ASCII y se grabaron en discos de  $5\frac{1}{4}$ ". Esta información en ASCII, se transfiere por medio de un ordenador PC al ordenador VAX 8600, directorio D.Castillo, para su posterior tratamiento.

Seguidamente se describe las características del software de adquisición datos.

#### 4.4.1 Programa MUESTRAS1.PAS

Este programa escrito en lenguaje "Pascal", nos permite comprobar el funcionamiento del sistema general de automatización, así como, de cada uno de los transductores y canales de la tarjeta de adquisición. Se escribió en este lenguaje con el objeto de utilizar las subrutinas gráficas estandar, para ordenadores personales.

Se registran las presiones instantáneas por cada transductor y se calcula la máxima, mínima y media, representando finalmente por pantalla las presiones del transductor analizado.

El digrama de flujo así como el listado correspondiente de este programa, se puede ver en el Anexo A de esta tesis.

Con este programa se realiza la simulación y calibración, de las ordenadas al origen de los transductores de presión. Como ya se anotó anteriormente, la calibración estática de la ordenada al origen de cada transductor de presión es un paso previo obligado a cada campaña de ensayos pues, es con este procedimiento con el que se logra corregir y controlar las perturbaciones introducidas por el ruido aleatorio en los registros de las fluctuaciones de presión.

En la fotografía 6 se indican el registro del ruido aleatorio de uno de los transductores, obtenido al simular las mismas condiciones de ruido (funcionamiento de los equipos de bombeo sin salida de agua al modelo), previo a la campaña de ensayos. La media de este registro(2400 datos, muestreados con una frecuencia de 20 muestras por segundo) constituye "la ordenada al origen" de la ecuación de calibración del transductor respectivo.

#### 4.4.2 Programa MUESTRAS2.C

Este programa escrito en lenguaje "C", nos permite la adquisición de las presiones en binario; al cargar los ficheros \*.DAT, realiza una transformación en ASCII, para permitir la posterior transferencia al directorio "D.Castillo", del Ordenador VAX 8600.

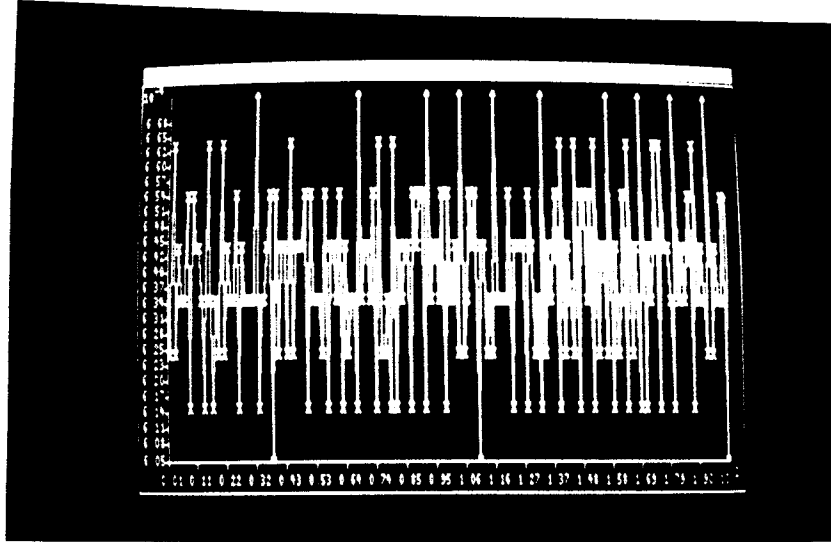
Se escribió en lenguaje "C" por tener una velocidad de ejecución superior a los otros lenguajes (PASCAL, FORTRAN, BASIC). De esta forma queda abierta la posibilidad de explotar al máximo la frecuencia de muestreo de los ensayos.

El diagrama de flujo y el listado correspondiente se encuentra en el Anexo A.

Ejemplos de registros de presiones, obtenidos en una campaña de ensayos, se pueden ver en la figura 4.17.

#### 4.4.3 Programa KERMIT

Este programa es un emulador de terminal que se encuentra incorporado a un ordenador PC, y por medio del cual se transfieren los ficheros de las presiones en ASCII (\*.dat) hasta el directorio D.Castillo del sistema VAX 8600, para realizar el tratamiento correspondiente de esta información.



Fotografía 6 Registro de ruido aleatorio de un transductor de presión, visualizado por la pantalla del ordenador

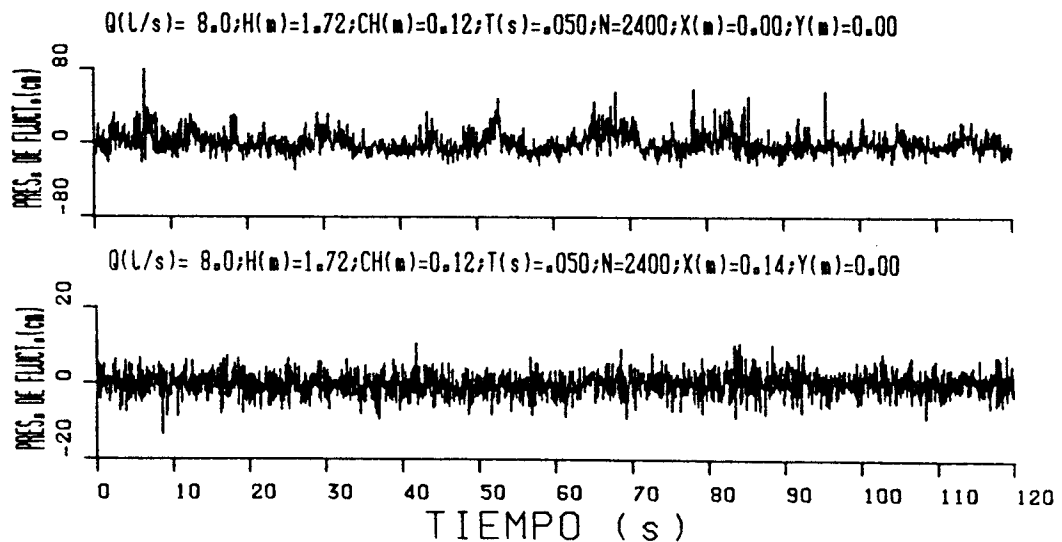


Figura 4.17 Registros de presiones de una campaña de ensayos

$q = 50 \frac{l}{sm}; H = 1.72m; h = 0.12m$   
 (a) Bajo el chorro; (b) A 0.14m aguas abajo

### 4.5 Comprobación de la estacionariedad y ergodicidad de los procesos

Se define a un proceso estacionario como ergódico, cuando los promedios temporales de las realizaciones son iguales al promedio del conjunto.

En las figuras 4.18a y 4.18b, se presentan los resultados del cálculo de las presiones medias de los tres caudales ensayados (3-6-8l/s) y con las alturas extremas del colchón de agua (0.0-0.25m), para diferentes tiempos de registros desde 30s hasta 120s. Estos resultados nos confirman la hipótesis de estacionariedad y ergodicidad, asumidas en el análisis y tratamiento de la información. Además, como se vió en la sección 4.3 de este capítulo (figura 4.15), para la frecuencia de muestreo escogida (20 muestras/s → Frecuencia de Nyquist= 10Hz), en el tiempo de ensayo de 120s se encuentra registrado todo el fenómeno de la macroturbulencia. Así mismo, en la figura 5.3 se puede observar que la frecuencia de muestreo de 20Hz es suficiente para registrar las variaciones de presión, puesto que entre un máximo y un mínimo se sitúan varias tomas de datos.

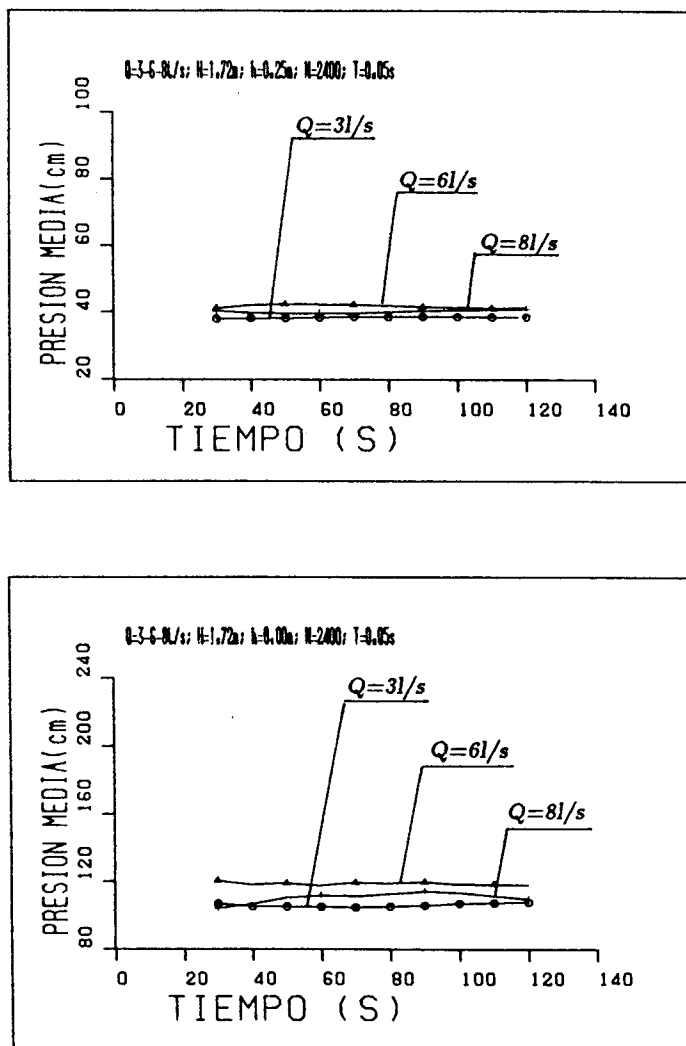


Figura 4.18 Presiones dinámicas medias en el punto de impacto del chorro, para diferentes caudales (3-6-8l/s) y tiempos de registro de ensayo ( $t=30-120\text{s}$ ): (a) Altura del colchón de agua  $h=0.25\text{m}$ . (b)  $h=0.00\text{m}$

#### 4.6 Ensayos realizados

Se han realizado un total de 22 ensayos correspondientes a 3 diferentes caudales (3, 6 y 8l/s) y a 8 diferentes alturas de colchón de agua (0, 0.04, 0.06, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20 y 0.25m), ver figura 5.4.

La altura de vertido siempre fue de 1.72m.

La toma de datos de presiones se realizó con una frecuencia de 20 muestras por segundo, durante 120 segundos ( un total de 2400 datos por ensayo y punto de medida). Ello equivale a una frecuencia en la banda de Nyquist de 10Hz.

En cada ensayo se registraron las presiones en cinco puntos: justo debajo de la zona de incidencia del chorro, delante y detrás (a 0.14m) de dicho punto, a la derecha del mismo (a 0.10m) y a 0.28m aguas abajo de este punto de incidencia (ver figura 4.19).

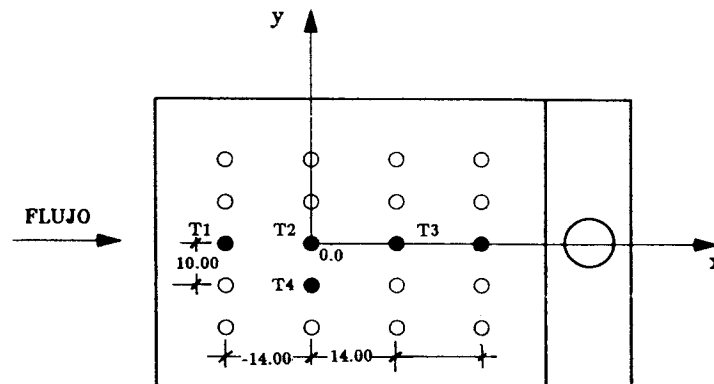


Figura 4.19 Puntos de medida en la solera del cuenco disipador

*“La enorme cantidad de energía que lleva el aliviadero plantea al ingeniero uno de los problemas hidráulicos más apasionantes. Y, al resolverlo, la satisfacción que se siente al ver el grandioso espectáculo - uno de los más bellos que existen - del vertido durante una crecida y saber que ha sido uno capaz de dominar una fuerza tan impresionante y avasalladora, produce uno de los sentimientos más elevados que pueden alcanzarse humanamente. Porque en pocas obras podrá plasmarse de una forma tan evidente y escalofriante la sensación de dominio de la inteligencia sobre las fuerzas naturales como en un aliviadero. En ellos se siente de forma exultante la frase bíblica de que el hombre es el rey de la creación”*

*Eugenio Vallarino Cánovas del Castillo*

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

#### 5.1 Introducción

En este capítulo se realiza un análisis y discusión de los resultados obtenidos al aplicar la metodología numérica y experimental descritos en los capítulos 3 y 4 respectivamente. Para ello, se comparan los resultados con los propuestos por otros autores (capítulos 1 y 2). Todo ello, nos permite profundizar en el conocimiento de las acciones que se ejercen sobre la solera de un cuenco sobre el que incide una lámina vertiente y verificar la bondad de la metodología numérico-experimental propuesta en esta tesis.

El análisis se realiza en dos formas generales: en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

**Análisis en el dominio del tiempo:** Se presenta en primer lugar unos ejemplos de los registros de presiones para a continuación, realizar un análisis y una comprobación experimental de las principales formulaciones de la distribución de la presión dinámica media en las proximidades del punto de estancamiento. Seguidamente, se presentan los resultados de las presiones dinámicas media, máxima y mínima en función de la altura del colchón de agua/espesor del chorro. A continuación se presentan los resultados de las presiones dinámicas máximas y amplitudes máximas de presión, en función de la altura del colchón/calado crítico y altura del colchón/altura neta del salto. De igual forma, las semiampplitudes máximas en función de la altura de colchón/espesor del chorro. Se realiza un análisis descriptivo de la densidad y distribución de probabilidad de las presiones, pasando luego a determinar las presiones de fluctuación macroturbulentas. Finalmente, se presenta las correlaciones temporales y espaciales de las presiones en el punto de estancamiento y en su entorno.

**El análisis en el dominio de la frecuencia:** Se presenta la densidad espectral univariante en el punto de estancamiento, para diferentes alturas de colchón de agua y los diferentes caudales. Presentándose por último las densidades espectrales multivariantes (funciones coherencia y fase) para el punto de estancamiento y puntos de su entorno.

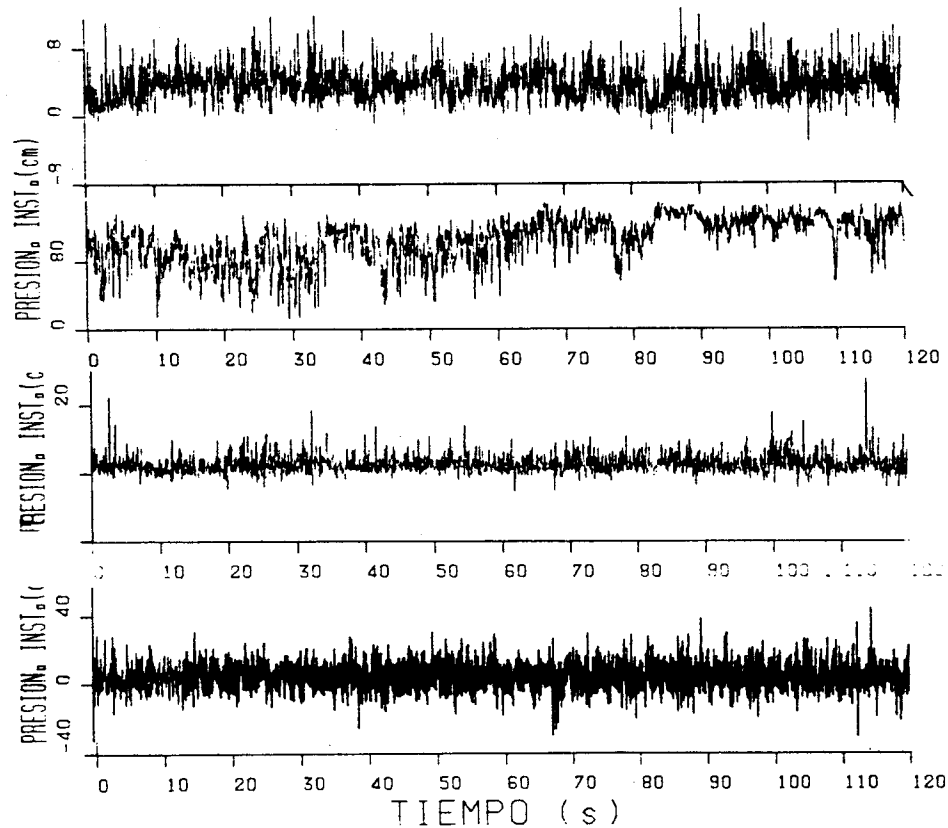


## 5.2 Registros de las presiones

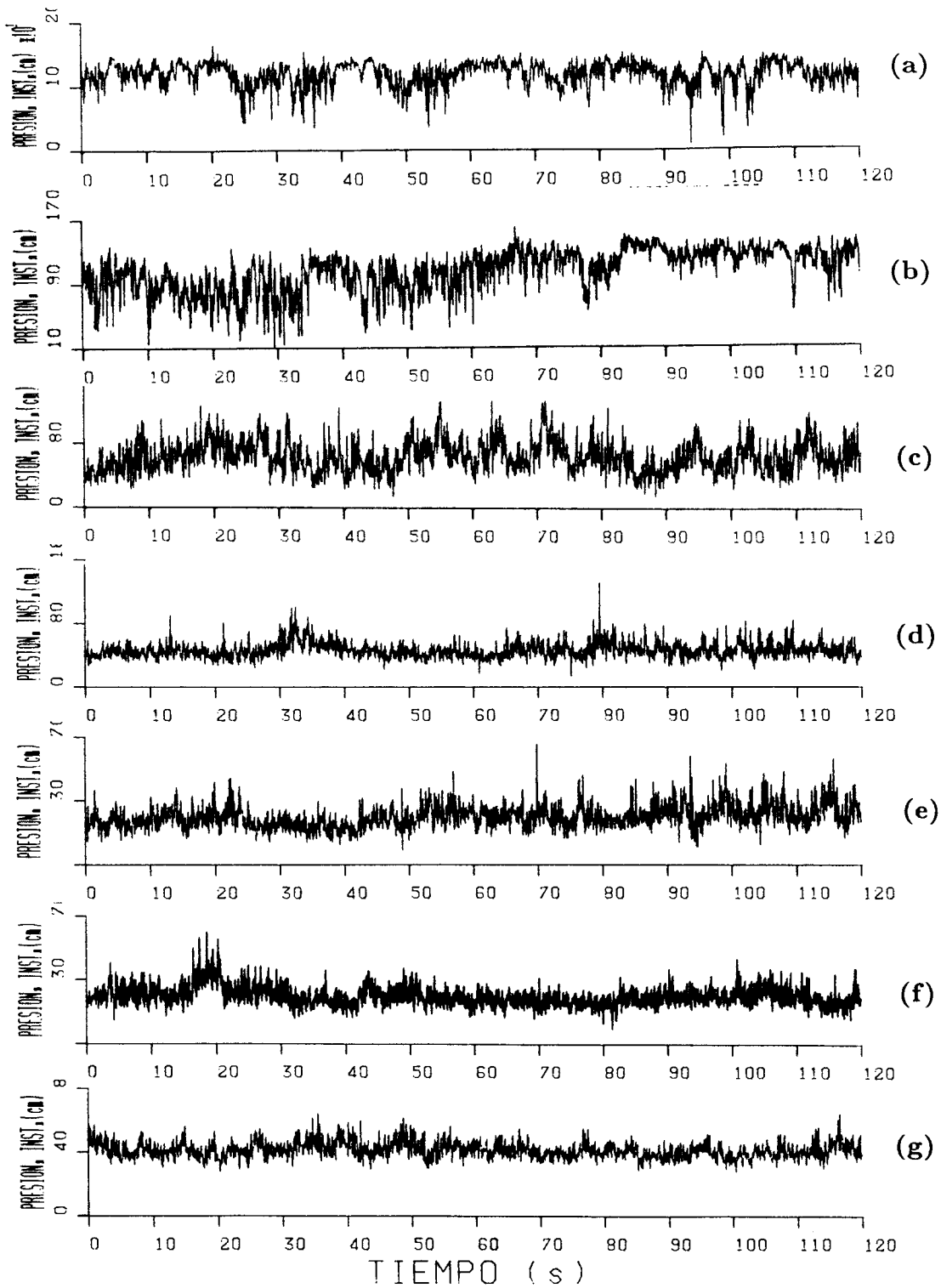
Los registros de las presiones nos ofrecen una información visual de la naturaleza del fenómeno. Además son la base del tratamiento numérico posterior que permitirá analizar en detalle el campo de presiones creado en la solera del cuenco.

Se obtuvieron 210 registros de presiones instantáneas y fluctuantes, correspondientes a 3 caudales ensayados, 22 alturas de colchón de agua y a 5 puntos de medida.

En las figura 5.1, se presentan los registros de las presiones instantáneas medidos en el punto de estancamiento, aguas arriba, aguas abajo y a la derecha del mismo, correspondiente a un colchón de  $h = 0.04m$  y un caudal de  $Q = 6l/s$ . En la figura 6.2, se presenta los registros de las presiones instantáneas medidos en el punto de estancamiento, correspondientes a una altura de colchón de  $h=0.0, 0.04, 0.06, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20, 0.25m$  y un caudal de  $Q = 6l/s$ .



**Figura 5.1** Presiones instantáneas correspondientes a un caudal de  $6l/s$  y un colchón de agua de  $h = 0.04m$ . (a) Aguas arriba del punto de estancamiento; (b) En el punto de estancamiento; (c) Aguas abajo del punto de estancamiento; (d) A la derecha del punto de estancamiento



**Figura 5.2** Presiones instantáneas en el punto de estancamiento, caudal  $Q = 6l/s$   
 (a)  $h = 0.00m$ ; (b)  $h = 0.04m$ ; (c)  $h = 0.08m$ ; (d)  $h = 0.12m$ ; (e)  $h = 0.16m$ ; (f)  
 $h = 0.20m$ ; (g)  $h = 0.25m$

Una ampliación de la figura 5.1 desde los tiempos de registro de 6.5s hasta 7.0s, correspondientes al punto de estancamiento (5.1b) y a la derecha del mismo (5.1d), se indica en la figura 5.3.

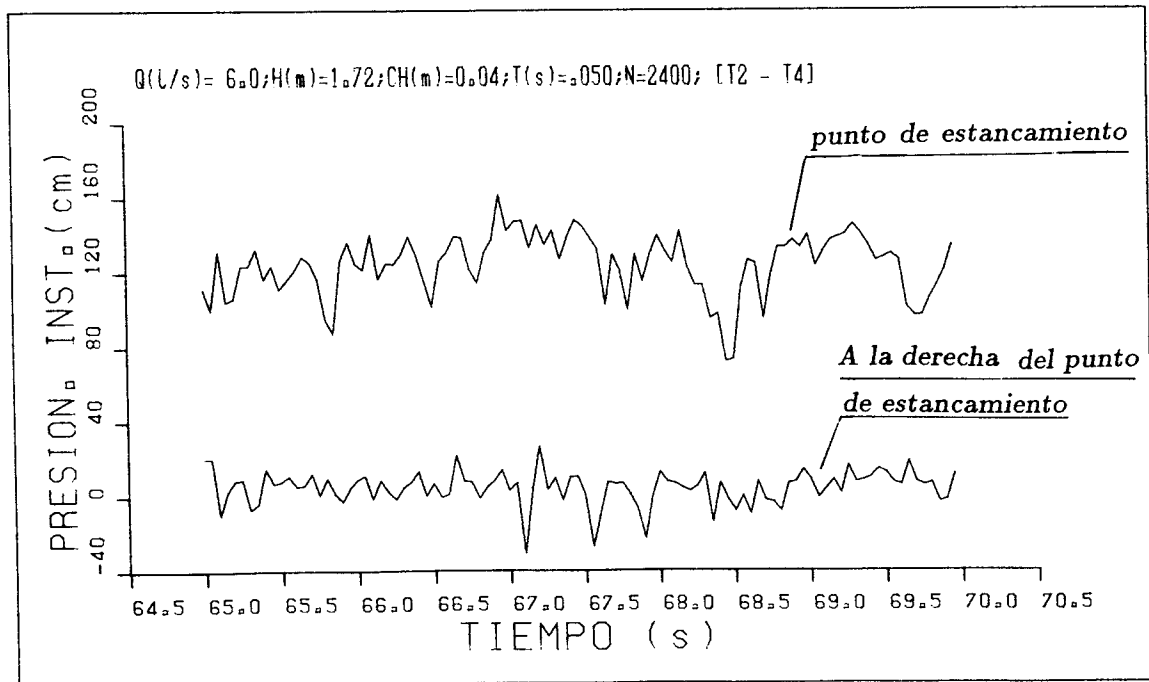
Podemos observar que en el instante  $t = 67.2s$ , mientras en el punto de estancamiento hay una presión de  $150cm$ , en el punto de medición de la derecha situado a  $0.14m$  del punto de estancamiento existe una depresión de  $-30cm$ , produciéndose por tanto una diferencia de presiones entre estos dos puntos de  $180cm$ .

Las fluctuaciones de mayor amplitud en el punto de estancamiento corresponden a períodos de tiempos largos de aproximadamente  $4s$  (frecuencia  $\sim 0.25Hz$ ), en tanto que las fluctuaciones de menor amplitud corresponden a períodos cortos de aproximadamente  $0.20s$  (frecuencia  $\sim 5Hz$ ).

Las fluctuaciones de menor amplitud, pero con una duración de tiempo grande, pueden tener un efecto destructivo mucho mayor que las fluctuaciones de mayor amplitud y de corta duración [15].

Aunque la presión media del punto del lado derecho es mayor que cero, observamos que continuamente desciende hasta valores de  $-30cm$ , con una frecuencia de unos  $3Hz$ .

El tiempo de permanencia de la presión por debajo de la presión de vapor de agua, es un dato fundamental que nos permite saber si se producirá el fenómeno de cavitación. Este tema que solamente se esboza en el presente estudio, se trata en detalle en Johnson [45] y sus efectos de escala en Liu [55].



**Figura 5.3** Ampliación de los registros de las presiones en el punto de estancamiento y a la derecha del mismo (figura 5.1)

### 5.3 Análisis de la presiones en el dominio del tiempo y del espacio

#### 5.3.1 Distribución de la presión dinámica media en las proximidades del punto de estancamiento

Según se indica en la figura 5.4, se han registrado las presiones en el punto de estancamiento (punto S) y en otros dos (puntos 1 y 2), situados en el eje del cuenco y a una distancia de 0.14m arriba y abajo del punto de estancamiento.

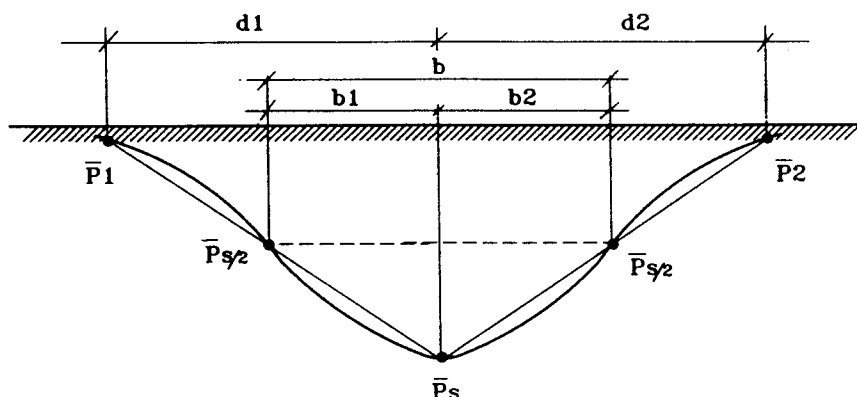


Figura 5.4 Análisis de las presiones en las proximidades del punto de estancamiento

Al objeto de analizar el efecto de la sobrepresión creada por el chorro incidente, se determinan las distancias  $b_1$  y  $b_2$  (distancias de influencia) tales que la presión media en ellas es la mitad de la presión media en el punto de estancamiento. Para ello se supone que la distribución de presiones medias a los largo de  $1S$  y  $S2$ , es lineal y por tanto:

$$\frac{\bar{P}_s - \bar{P}_1}{0.14} = \frac{\bar{P}_s - \bar{P}_s/2}{b_1}$$

de donde:

$$b_1 = 0.07 \frac{\bar{P}_s}{\bar{P}_s - \bar{P}_1} \quad (5.1)$$

análogamente:

$$b_2 = 0.07 \frac{\bar{P}_s}{\bar{P}_s - \bar{P}_2} \quad (5.2)$$

En el cuadro 5.2, se muestran los resultados correspondientes a los 22 ensayos realizados.

En la figura 5.5, se presentan las curvas resultantes de las expresiones propuestas por los diferentes autores y que fueron analizadas en el capítulo 2, con los valores obtenidos y calculados en este trabajo (cuadro 5.2).

Se puede observar el buen ajuste con la familia de ecuaciones de Beltaos (ec. 2.16b), Cola (ec. 2.17b), Hartung y Hausler con  $y_k = 7.20B$  (ec. 2.18e) y Aki con  $b = 0.23h$  (ec. 2.19e). Concluimos por tanto, que estas expresiones representan la distribución de presiones dinámicas medias en el punto de estancamiento y en sus proximidades.

Estas expresiones de tipo exponencial, se pueden representar en forma general, ya sea en función de la distancia de influencia  $b$ , ecuación 5.3a (ec. 2.20a), o en función de la altura de colchón de agua  $h$ , ecuación 5.3b (ec. 2.20b):

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-\Phi(x/b)} \quad (5.3a)$$

$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_s} = e^{-\Phi'(x/h)} \quad (5.3b)$$

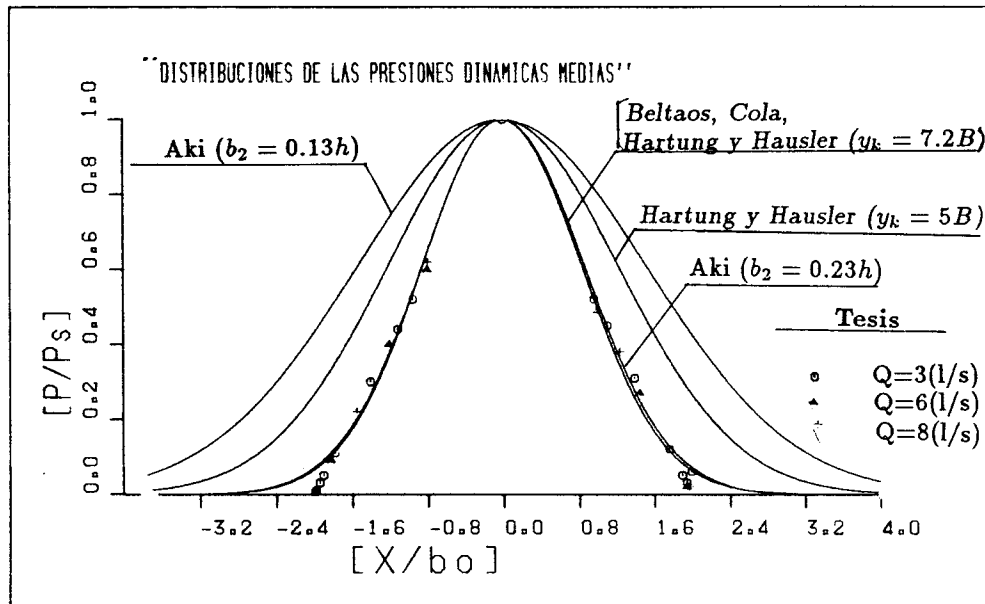


Figura 5.5 Gráficas de distribución de las presiones dinámicas medias propuestas por diferentes autores y comprobación con los valores medidos y calculados en el presente trabajo

AUTOR	$\Phi$	$\Phi'$	$b$	$y_k$
Beltaos	0.693	41.01	$0.13h$	—
Cola	0.685	40.51	$0.13h$	—
Hartung y Hausler	0.688	40.71	$0.13h$	$7.2B$
Aki	0.664	12.56	$0.23h$	—

Cuadro 5.1 Parámetros principales de las ecuaciones de cálculo de las presiones dinámicas medias

En el cuadro 5.1, se presentan los parámetros de estas ecuaciones.

Las ecuaciones de Aki con  $b = 0.13h$  (ec. 2.19d) y Hartung Hausler con  $y_k = 5B$  (ec. 2.18b), constituyen envolventes superiores de las presiones dinámicas medias, propuestas por Beltaos (ec. 2.16b), Cola (ec. 2.17b), Hartung y Hausler con  $y_k = 7.20B$  (ec. 2.18e), Aki con  $b = 0.23h$  (ec. 2.19e) y en el presente trabajo. Por lo tanto, sobreestiman las presiones dinámicas medias, tanto en magnitud, como en longitud de influencia.

$Q$ [l/s]	$h$ (cm)	$\bar{P}_s$ (cm)	$\bar{P}_1$ (cm)	$\bar{P}_2$ (cm)	$b_1$ (cm)	$b_2$ (cm)	$\bar{P}_1/\bar{P}_s$	$x/b_1$ $x = 14cm$	$\bar{P}_2/\bar{P}_s$	$x/b_2$ $x = 14cm$
3	0	107.13	0.73	0.70	7.05	7.05	0.006	-1.99	0.006	1.99
	2	112.39	1.14	0.76	7.07	7.05	0.01	-1.98	0.006	1.99
	4	103.15	3.08	3.00	7.22	7.21	0.03	-1.94	0.03	1.94
	6	95.00	4.50	5.17	7.35	7.40	0.05	-1.90	0.05	1.89
	8	63.83	6.96	7.68	7.86	7.96	0.11	-1.78	0.12	1.76
	12	39.46	11.68	12.10	9.94	10.10	0.30	-1.41	0.31	1.39
	16	36.44	16.03	16.39	12.50	12.72	0.44	-1.12	0.45	1.10
20	38.52	19.97	19.94	14.54	14.51	0.52	-0.96	0.52	0.96	
6	0	118.05	1.49	1.54	7.09	7.09	0.01	-1.97	0.01	1.97
	4	105.97	3.73	2.62	7.26	7.18	0.04	-1.93	0.02	1.95
	8	64.22	6.09	7.46	7.73	7.92	0.09	-1.81	0.12	1.77
	12	46.30	11.47	12.54	9.31	9.60	0.25	-1.50	0.27	1.46
	16	40.04	16.02	16.64	11.67	11.98	0.40	-1.20	0.42	1.17
	20	39.97	19.82	19.77	13.89	13.85	0.50	-1.01	0.49	1.01
	25	41.35	24.95	24.50	17.65	17.18	0.60	-0.79	0.59	0.81
8	0	109.61	1.37	1.64	7.09	7.11	0.01	-1.97	0.01	1.97
	4	115.90	1.40	2.24	7.09	7.14	0.01	-1.97	0.02	1.96
	8	70.12	5.24	6.46	7.57	7.71	0.07	-1.85	0.09	1.82
	12	46.47	10.37	11.78	9.01	9.38	0.22	-1.55	0.25	1.49
	16	45.02	15.54	17.32	10.69	11.38	0.35	-1.31	0.38	1.23
	20	45.04	19.33	20.34	12.26	12.76	0.43	-1.14	0.45	1.10
	25	40.92	24.46	25.17	17.40	18.19	0.60	-0.80	0.62	0.77

**Cuadro 5.2** Distribución de la presión dinámica media en el punto de estancamiento y en sus proximidades

### 5.3.2 Presiones dinámicas media, máxima y mínima, en función de la altura del colchón de agua

Una vez que hemos analizado la distribución (su forma y su longitud de influencia) de la presión dinámica media ( $\bar{P}$ ), supuesto conocido el valor de la presión dinámica media en el punto de estancamiento ( $\bar{P}_s$ ), ahora analizaremos cómo varían las presiones dinámicas: media ( $\bar{P}$ ), máxima ( $P_{max}$ ) y mínima ( $P_{min}$ ), en función de la altura del colchón de agua.

En el cuadro 5.4, se presentan los valores registrados y los cálculos correspondientes para la presión dinámica media.

En la primera columna se indica los caudales ensayados, en la segunda y tercera columna las alturas del colchón de agua  $h$  y anchura  $l$  del chorro a la entrada de dicho colchón, para cada caudal ensayado.

En la cuarta columna, las velocidades calculadas  $v_0$  a la entrada del colchón de agua. Estas velocidades se calculan con la conocida ecuación de caída libre, siendo por tanto:

$$v_0 = \sqrt{2gZ} \quad (5.4)$$

donde:

$Z = H - h$ ... Altura neta del salto

$H$  ..... Altura bruta del salto, igual a 1.72m

$h$  ..... Altura del colchón de agua

$g$  ..... Aceleración de la gravedad

Dado que el ángulo de incidencia del chorro a la entrada del colchón es próximo a  $90^\circ$ , supondremos que  $v_0$  es la velocidad en la dirección vertical.

En la quinta columna, se indica el espesor del chorro a la entrada del colchón de agua  $B$ , calculado a partir de la ecuación de continuidad:

$$B = \frac{Q}{lv_0} = \frac{q}{v_0} \quad (5.5)$$

donde:

$Q$  ... Caudal de ensayo

$l$  ... Anchura del chorro a la entrada del colchón

$q = Q/l$  ... Caudal específico a la entrada del chorro

$v_0$ ... Velocidad del chorro a la entrada del colchón

$Q$ [l/s]	$h$ (cm)	$l$ (cm)	$v_0$ (m/s)	$B$ (cm)	$\bar{P}_s$ (cm)	$v_0^2/2g$ (cm)	$\bar{P}_s/(v_0^2/2g)$	$h/B$
3	0	9.00	5.81	0.57	107.13	172.00	0.62	0
	2		5.78	0.58	112.39	170.00	0.66	3.45
	4		5.74	0.58	103.15	168.00	0.61	6.90
	6		5.71	0.58	95.00	166.00	0.57	10.34
	8		5.67	0.59	63.83	164.00	0.40	13.54
	12		5.60	0.60	39.46	160.00	0.25	20.00
	16		5.53	0.60	36.44	156.00	0.24	26.67
	20		5.46	0.61	38.52	152.00	0.25	32.79
6	0	14.00	5.81	0.74	118.05	172.00	0.69	0
	4		5.74	0.75	105.97	168.00	0.63	5.33
	8		5.67	0.76	64.22	164.00	0.39	10.53
	12		5.60	0.77	46.30	160.00	0.29	15.58
	16		5.53	0.77	40.04	156.00	0.26	20.78
	20		5.46	0.78	39.97	152.00	0.26	25.64
	25		5.37	0.80	41.35	147.00	0.28	31.25
8	0	16.00	5.81	0.86	109.61	172.00	0.64	0
	4		5.74	0.87	155.90	168.00	0.69	4.60
	8		5.67	0.88	70.12	164.00	0.43	9,09
	12		5.60	0.89	46.47	160.00	0.29	13.48
	16		5.53	0.90	45.02	156.00	0.29	17.77
	20		5.46	0.92	45.04	152.00	0.30	21.74
	25		5.37	0.93	40.92	147.00	0.28	26.88

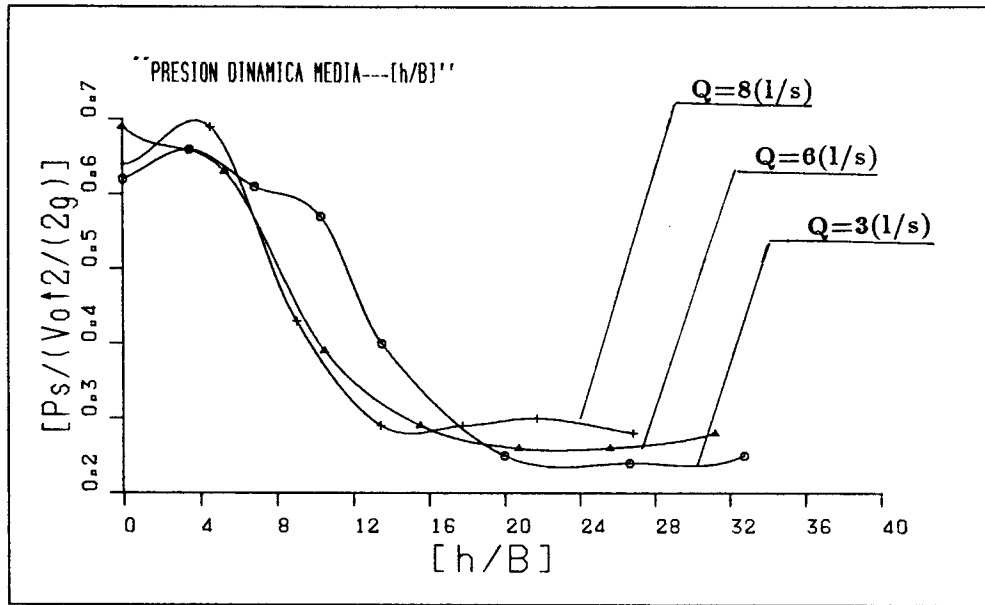
**Cuadro 5.4** Cuadro de cálculo de las relaciones adimensionales  $[\bar{P}_s/(v_0^2/2g)]$  y  $[h/B]$

En la figura 5.6a, se representa la relación adimensional  $[\bar{P}_s/(v_0^2/2g)]$  en función de la relación adimensional  $[h/B]$ ; para los tres caudales ensayados ( $Q=3, 6$  y  $8$  l/s). Es de destacar, que la distribución de los puntos sugiere una única distribución la misma que se representa en la figura 5.6b.

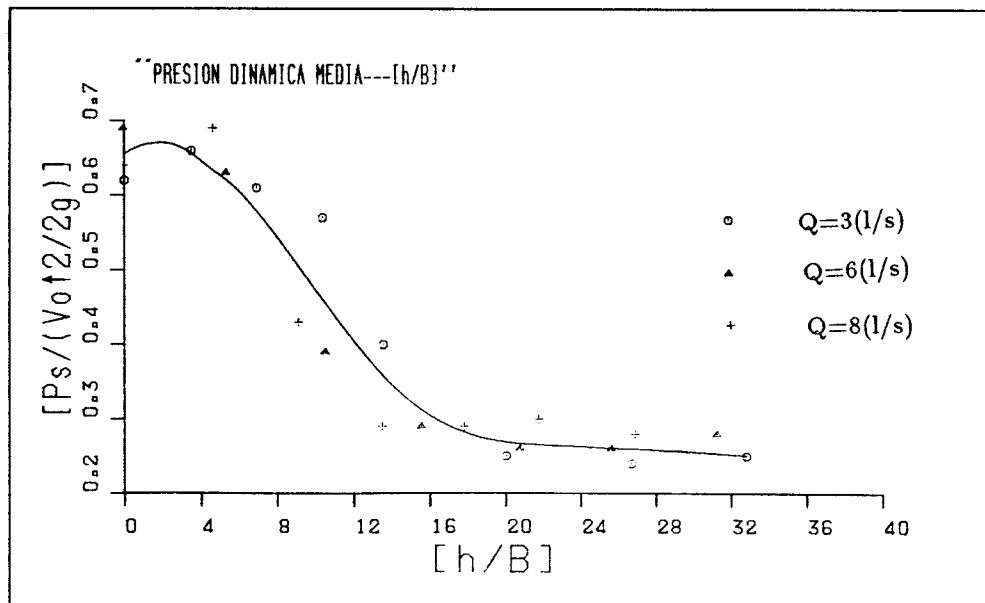
Se puede observar, que la presión dinámica media en el punto estancamiento puede alcanzar valores de hasta el 69% de la carga estática total, cuando el colchón de agua es menor de cuatro veces el ancho del chorro a la entrada del cuenco  $h/B < 4$ .



Una disminución del 60% de la presión dinámica media en el punto de estancamiento se alcanza cuando se tiene un colchón de agua  $h/B = 16$ . Apartir de este valor la presión dinámica media tiende asintóticamente a la presión hidrostática del colchón de agua.



(a)



(b)

Figura 5.6 Presiones dinámicas medias  $\bar{P}_s$  en el punto de estancamiento. (a) Ajustes individuales a los caudales ensayados. (b) Distribución general ajustada a los caudales ensayados

Cola [20], propone la siguiente expresión para calcular la presión dinámica media en el punto de estancamiento, en función de la altura de colchón de agua:

$$\bar{P}_s = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}C_1} \frac{v_0^2 B}{2 h} \left[ \frac{1}{1 - \eta_A} \right] \quad (5.6a)$$

en donde  $\rho$  es la densidad del agua,  $v_0$  y  $B$  representan la velocidad y espesor del chorro a la entrada del colchón de agua  $h$ ,  $C_1$  el coeficiente de difusión ( $\sim 0.1085$  Albertson [4]) y  $\eta_A$  un coeficiente experimental ( $\eta_A \sim 0.276$ )

Con el objeto de comparar con los datos experimentales obtenidos en el presente trabajo, a la ecuación 5.6a le reemplazamos los valores de los coeficientes y constantes respectivos y le expresamos en función de la relación adimensional  $h/B$ , así, tenemos que:

$$\frac{\bar{P}_s}{v_0^2/2g} = \frac{7.1822}{h/B} \quad (5.6b)$$

En la figura 5. 7 se presentan la curva obtenida en este trabajo y los valores calculados (cuadro 5.4) con la expresión de Cola (ec. 5.6b).

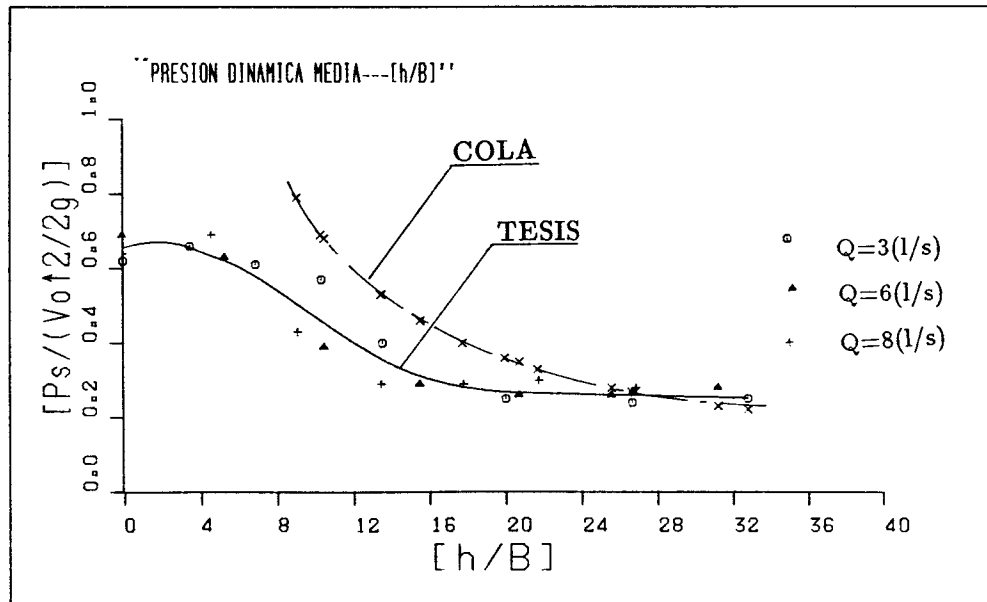


Figura 5.7 Comparación de la presión dinámica media experimental en el punto de estancamiento  $\bar{P}_s$ , con los valores calculados con la expresión de Cola (ec. 5.6b)

$Q$ [l/s]	$h$ (cm)	$l$ (cm)	$v_0$ (m/s)	$B$ (cm)	$\bar{P}_s$ (cm)	$\bar{P}_s/(v_0^2/2g)$ COLA	$\bar{P}_s/(v_0^2/2g)$ TESIS	$h/B$
3	0	9.00	5.81	0.57	107.13	--	0.62	0
	2		5.78	0.58	112.39	2.08	0.66	3.45
	4		5.74	0.58	103.15	1.04	0.61	6.90
	6		5.71	0.58	95.00	0.69	0.57	10.34
	8		5.67	0.59	63.83	0.53	0.40	13.54
	12		5.60	0.60	39.46	0.36	0.25	20.00
	16		5.53	0.60	36.44	0.27	0.24	26.67
	20		5.46	0.61	38.52	0.22	0.25	32.79
6	0	14.00	5.81	0.74	118.05	--	0.69	0
	4		5.74	0.75	105.97	1.35	0.63	5.33
	8		5.67	0.76	64.22	0.68	0.39	10.53
	12		5.60	0.77	46.30	0.46	0.29	15.58
	16		5.53	0.77	40.04	0.35	0.26	20.78
	20		5.46	0.78	39.97	0.28	0.26	25.64
	25		5.37	0.80	41.35	0.23	0.28	31.25
	8		0	16.00	5.81	0.86	109.61	--
4		5.74	0.87		115.90	1.56	0.69	4.60
8		5.67	0.88		70.12	0.79	0.43	9,09
12		5.60	0.89		46.47	0.53	0.29	13.48
16		5.53	0.90		45.02	0.40	0.29	17.77
20		5.46	0.92		45.04	0.33	0.30	21.74
25		5.37	0.93		40.92	0.27	0.28	26.88

**Cuadro 5.4** Cuadro de cálculo de las relaciones adimensionales  $[\bar{P}_s/(v_0^2/2g)]$ ,  $[h/B]$  y comparación con los valores calculados con la expresión de Cola

Podemos concluir que los valores calculados en función de la expresión de Cola (ec. 5.6a y 5.6b) son superiores a los valores experimentales obtenidos en el presente trabajo, para valores de  $h/B < 22$ . Esto se debe a que la expresión de Cola no contempla el efecto de la aireación a la entrada del colchón (ver capítulo 2).

Para valores de  $h/B \geq 22$ , los valores experimentales del presente trabajo y los de Cola, tienen un buen ajuste.

Para valores bajos de  $h/B$ , los valores de Cola son inconsistentes, ya que tienden asintóticamente al infinito cuando  $h \rightarrow 0$ . Por lo tanto, la curva experimental obtenida en este trabajo es más ajustada a la realidad.

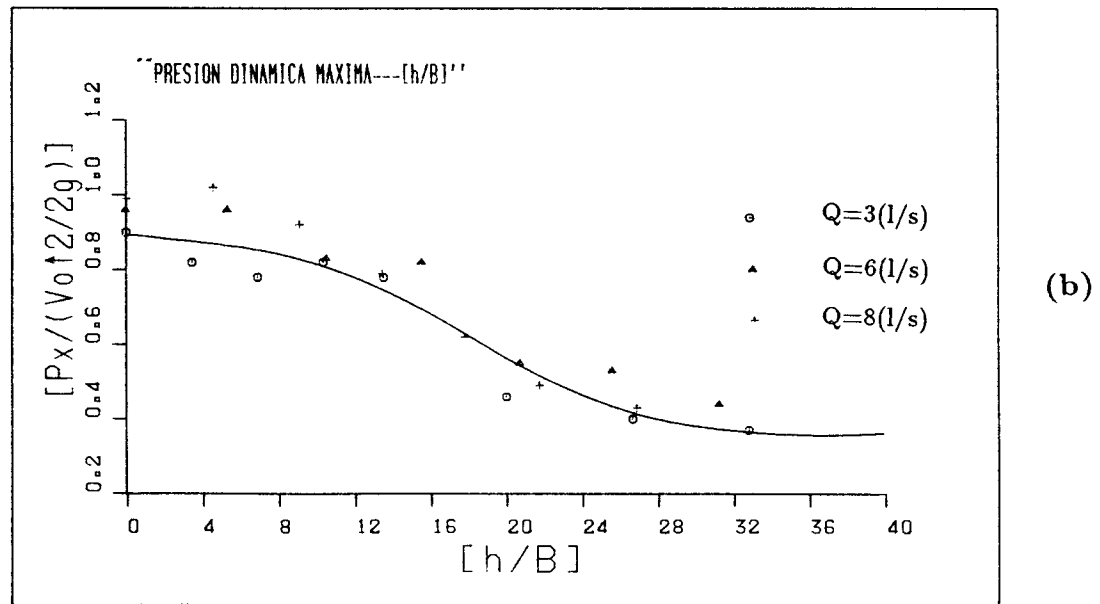
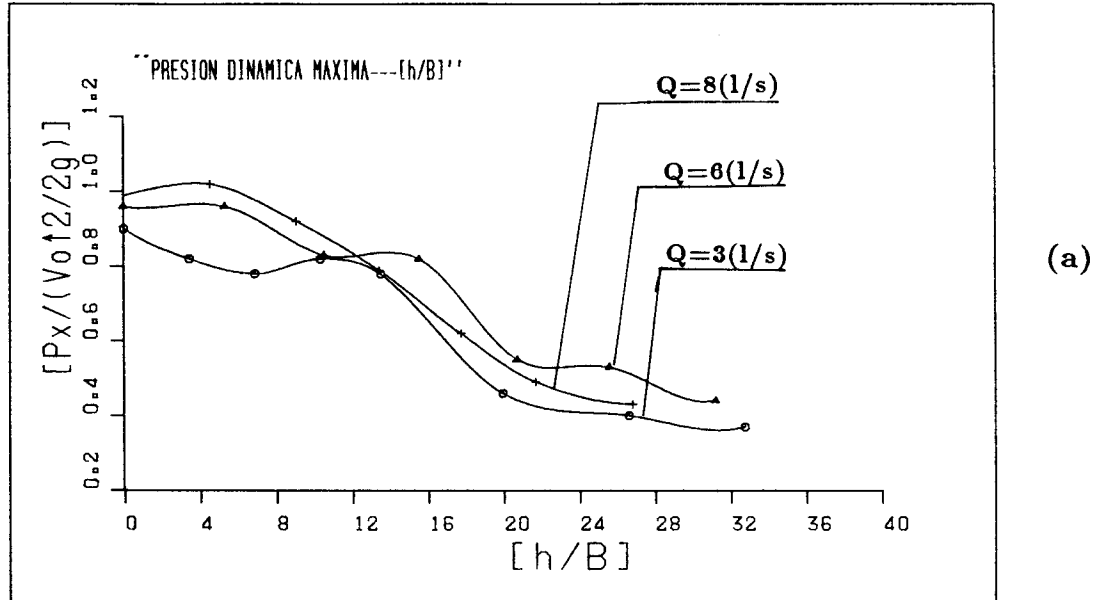
En el cuadro 5.5, se indican los valores registrados y calculados, correspondientes a las presiones dinámicas máxima y mínima en el punto de estancamiento. El esquema de cálculo del cuadro 5.5, es igual al esquema explicado del cuadro 5.3.

En la figura 5.8a se indica las relaciones adimensionales  $[P_{max}/(v_0^2/2g)]$  y  $[h/B]$ , ajustadas individualmente a los tres caudales ensayados. En la figura 5.8b, se indica la distribución general; observamos que la presión dinámica máxima en el punto de estancamiento, es sensiblemente constante hasta una altura de colchón de agua de ocho veces el ancho del chorro a la entrada del colchón ( $h/B = 8$ ). Desde este valor hasta ( $h/B = 26$ ), la presión dinámica máxima disminuye rápidamente, hasta ser aproximadamente el 40% de la carga hidrostática total.

$Q$ [l/s]	$h$ (cm)	$l$ (cm)	$v_0$ (m/s)	$B$ (cm)	$v_0^2/2g$ (cm)	$P_{max}$ (cm)	$P_{max}/(v_0^2/2g)$	$P_{min}$ (cm)	$P_{min}/(v_0^2/2g)$	$h/B$
3	0	9.00	5.81	0.57	172.00	134.74	0.90	12.25	0.07	0
	2		5.78	0.58	170.00	139.27	0.82	22.15	0.13	3.45
	4		5.74	0.58	168.00	130.54	0.78	34.23	0.20	6.90
	6		5.71	0.58	166.00	136.92	0.82	22.82	0.14	10.34
	8		5.67	0.59	164.00	127.52	0.78	28.19	0.17	13.54
	12		5.60	0.60	160.00	72.82	0.46	9.23	0.06	20.00
	16		5.53	0.60	156.00	62.42	0.40	16.61	0.11	26.67
	20		5.46	0.61	152.00	56.55	0.37	24.16	0.16	32.79
6	0	14.00	5.81	0.74	172.00	164.77	0.96	8.05	0.05	0
	4		5.74	0.75	168.00	161.75	0.96	11.07	0.07	5.33
	8		5.67	0.76	164.00	135.75	0.83	14.26	0.09	10.53
	12		5.60	0.77	160.00	131.89	0.82	13.09	0.08	15.58
	16		5.53	0.77	156.00	85.74	0.55	18.96	0.12	20.78
	20		5.46	0.78	152.00	80.54	0.53	19.46	0.13	25.64
	25		5.37	0.80	147.00	64.43	0.44	27.69	0.19	31.25
	8		0	16.00	5.81	0.86	172.00	170.98	0.99	6.21
4		5.74	0.87		168.00	171.65	1.02	16.61	0.10	4.60
8		5.67	0.88		164.00	150.68	0.92	4.44	0.03	9.09
12		5.60	0.89		160.00	126.35	0.79	16.28	0.10	13.48
16		5.53	0.90		156.00	96.15	0.62	16.44	0.11	17.77
20		5.46	0.92		152.00	75.17	0.49	26.68	0.18	21.74
25		5.37	0.93		147.00	63.93	0.43	24.50	0.17	26.88

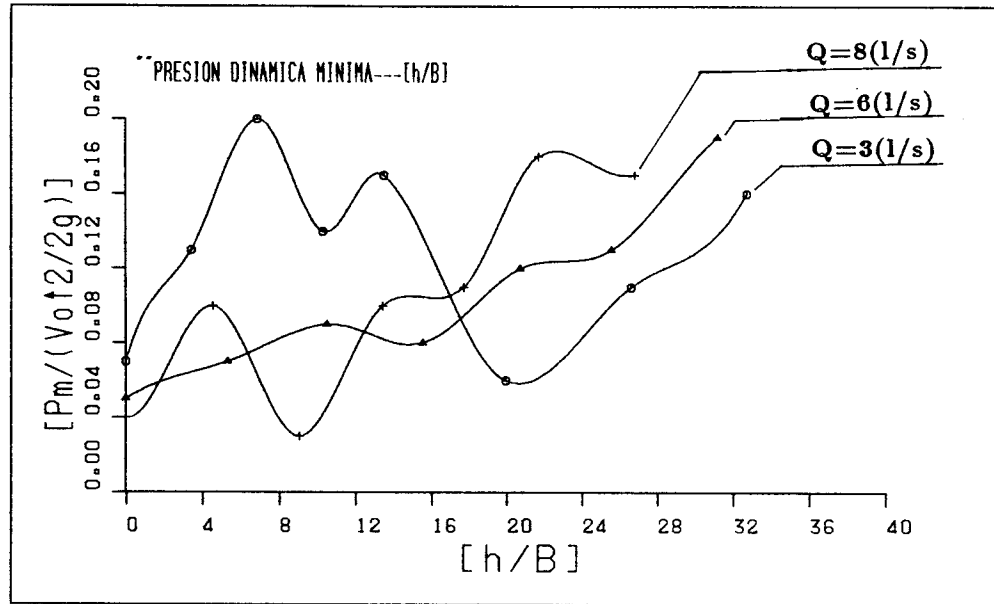
Cuadro 5.5 Cuadro de cálculo de las relaciones adimensionales  $[P_{max}/(v_0^2/2g)]$ ,  $[P_{min}/(v_0^2/2g)]$  y  $[h/B]$

A partir de esta relación, la presión dinámica máxima tiende asintóticamente al valor de la altura del colchón de agua.

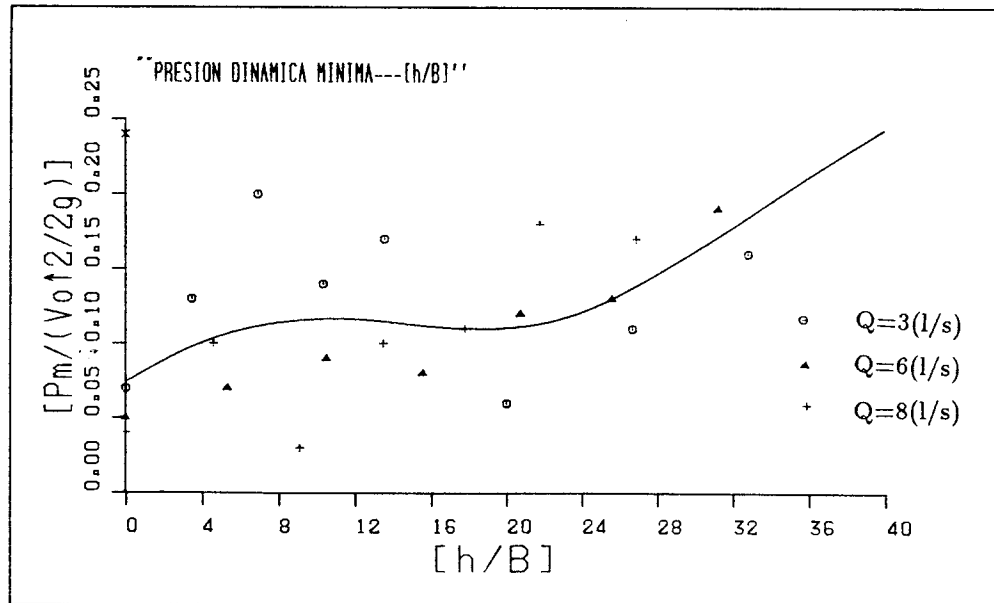


**Figura 5.8** Presiones dinámicas máximas  $P_{max}$  en el punto de estancamiento. (a) Ajustes individuales a los caudales ensayados. (b) Distribución general ajustada a los caudales ensayados

En la figura 5.9a, se indica las relaciones adimensionales  $[P_{min}/(v_0^2/2g)]$  y  $[h/B]$ , ajustadas individualmente a los tres caudales ensayados. En la figura 5.9b, se indica la distribución general. Observamos un mal ajuste a una ley única para los tres caudales en los valores bajos de  $h/B$ . También podemos ver una cierta constancia en el valor de  $P_{min}$  para estos valores bajos y una tendencia a la presión hidrostática del colchón, para valores altos.



(a)



(b)

**Figura 5.9** Presiones dinámicas mínimas  $\bar{P}_{min}$  en el punto de estancamiento. (a) Ajustes individuales a los caudales ensayados. (b) Distribución general ajustada a los caudales ensayados

En la figura 5.10, se indica las relaciones adimensionales  $[\bar{P}_s/(v_0^2/2g)]$ ;  $[P_{max}/(v_0^2/2g)]$  y  $[P_{min}/(v_0^2/2g)]$  en función de  $[h/B]$ .

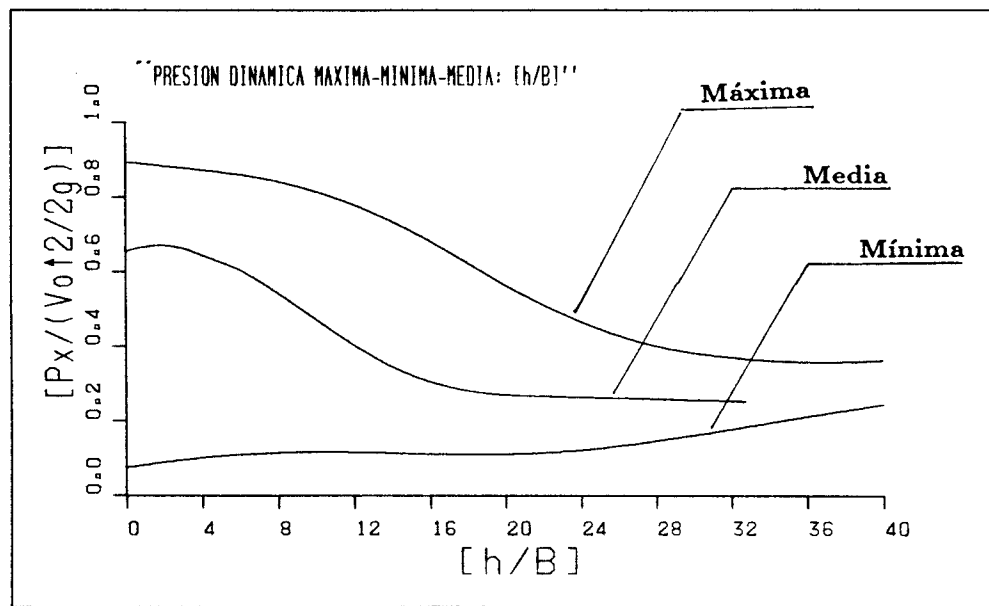


Figura 5.10 Presiones dinámicas media  $\bar{P}_s$ , máxima  $P_{max}$  y mínima  $P_{min}$  en el punto de estancamiento, en función de la relación  $[h/B]$ .

**5.3.3 Presiones dinámicas máximas y amplitudes máximas de presión en el punto de estancamiento, en función de la relación (altura de colchón/calado crítico) y (altura de colchón/altura neta del salto).**

**5.3.3.1 Presiones y amplitudes máximas en función de  $[h/y_c]$**

Cui Guang Tao... [23], propone las siguientes fórmulas empíricas válidas para el intervalo  $[2 \leq h/y_c \leq 10.5]$

**Presión dinámica máxima**

$$\frac{P_{max}}{Z} = 0.68^{[(h/y_c)-1.5]} \quad (5.7)$$

**Amplitud máxima de presión**

$$\frac{2A_{max}}{Z} = 0.73^{(h/y_c)} \quad (5.8)$$

en donde

$P_{max}$ ... Presión dinámica máxima

$P_{min}$ ... Presión dinámica mínima

$Z = H - h$ ... Altura neta del salto

$H$  ... Altura bruta del salto

$h$  ... Altura del colchón de agua

$y_c = \sqrt[3]{q^2/g}$ ... Calado crítico

$q$  ... Caudal unitario a la entrada del colchón.

$2A_{max} = P_{max} - P_{min}$ ... Amplitud máxima de presión

Con el fin de contrastar estas fórmulas con nuestros ensayos y completar el intervalo de validez  $[0 \leq h/y_c \leq 4]$ , se presenta el cuadro 5.6.

En la figura 5.11, se indica la curva de ajuste de  $P_{max}/Z$  en función de  $h/y_c$ , propuesta por Cui Guang Tao y los valores obtenidos en el presente trabajo.

De estos resultados podemos concluir, que la ecuación (5.7) es válida para valores de  $[h/y_c \geq 1.5]$ . Para el intervalo  $[0 \leq h/y_c < 1.5]$ , se ajusta mejor una parábola, tal como se indica en la figura 5.11. En todo caso, los valores correspondientes al caudal de  $Q = 3l/s$ , difieren notablemente de los valores correspondientes a los otros caudales. Para definir mejor esta zona, sería necesario realizar más ensayos.



$q$ [l/(sm <sup>2</sup> )]	$y_c$ (cm)	$h$ (cm)	$h/y_c$	$P_{max}$ (cm)	$P_{min}$ (cm)	$Z$ (cm)	$P_{max}/Z$	$h/Z$	$2A_m$ (cm)	$2A_m/Z$
33	4.81	0	0	134.74	12.25	172.00	0.78	0	122.49	0.71
		2	0.42	139.27	22.15	170.00	0.82	0.01	117.12	0.69
		4	0.83	130.54	34.23	168.00	0.78	0.02	96.31	0.57
		6	1.24	136.92	22.82	166.00	0.82	0.04	114.10	0.69
		8	1.66	127.52	28.18	164.00	0.78	0.05	99.33	0.61
		12	2.49	72.82	9.23	160.00	0.46	0.08	63.59	0.40
		16	3.33	62.42	16.61	156.00	0.40	0.10	45.81	0.29
		20	4.16	56.55	24.16	152.00	0.37	0.13	32.39	0.21
43	5.73	0	0	164.77	8.05	172.00	0.96	0	156.72	0.91
		4	0.70	161.75	11.07	168.00	0.96	0.02	150.68	0.90
		8	1.40	135.75	14.26	164.00	0.83	0.05	121.49	0.74
		12	2.09	131.89	13.09	160.00	0.82	0.08	118.80	0.74
		16	2.79	85.74	18.96	156.00	0.55	0.10	66.78	0.42
		20	3.49	80.54	19.46	152.00	0.53	0.13	61.08	0.40
		25	4.36	64.43	27.69	147.00	0.44	0.17	36.74	0.25
50	6.34	0	0	170.98	6.21	172.00	0.99	0	163.79	0.95
		4	0.63	171.65	16.61	168.00	1.00	0.02	155.04	0.92
		8	1.26	150.68	4.36	164.00	0.92	0.05	146.32	0.89
		12	1.89	126.35	16.28	160.00	0.79	0.08	110.07	0.69
		16	2.52	96.15	16.44	156.00	0.62	0.10	79.71	0.51
		20	3.15	75.17	26.68	152.00	0.50	0.13	48.49	0.32
		25	3.94	63.93	24.50	147.00	0.44	0.17	39.43	0.27

**Cuadro 5.6** Cuadro de cálculo de las relaciones adimensionales  $[P_{max}/Z]$ ,  $[2A_{max}/Z]$ ,  $[h/Z]$  y  $[h/y_c]$

En la figura 5.12, se presenta la curva de ajuste de  $[2A_{max}/Z]$  en función de  $[h/y_c]$ , ecuación (5.8) y los valores obtenidos en el presente trabajo.

Puede observarse que la ecuación (5.8) está en concordancia de los resultados obtenidos en este trabajo para valores de  $[h/y_c > 2]$ . Para el intervalo  $[0 \leq h/y_c \leq 2]$ , los resultados sugieren un nuevo tipo de ajuste, tal como se observa en la figura 5.12. Para definir mejor este intervalo, se requerirían más ensayos.

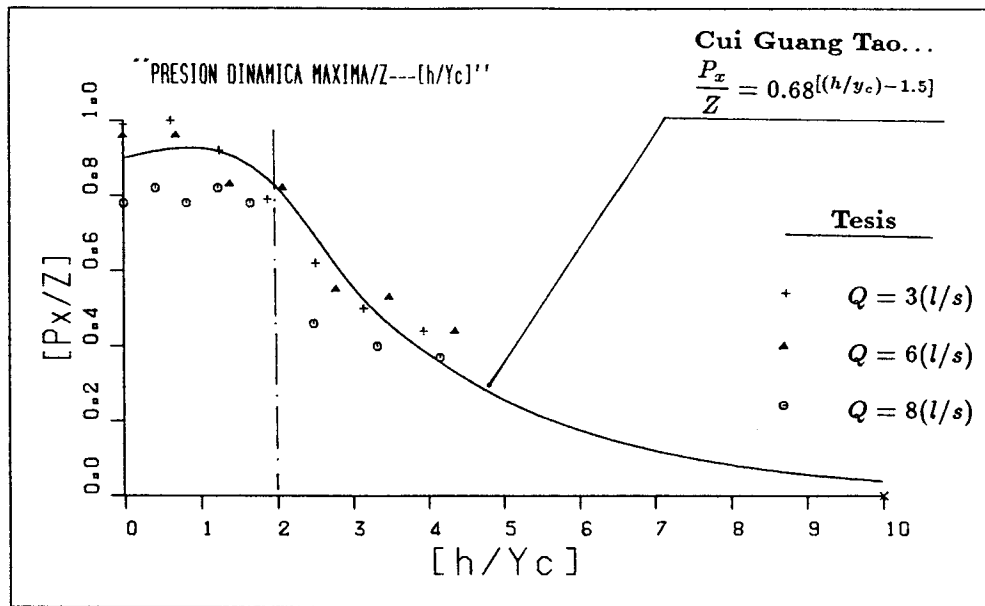


Figura 5.11 Presiones dinámicas máximas en el punto de estancamiento  $[P_{max}/Z]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/y_c]$

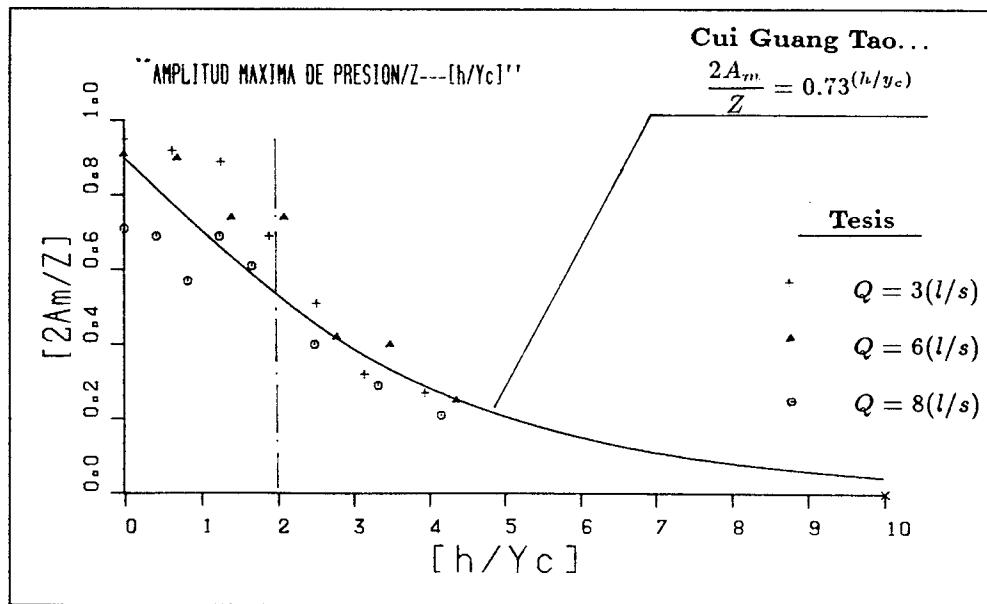


Figura 5.12 Amplitudes máximas de presión en el punto de estancamiento  $[2A_{max}/Z]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/y_c]$

### 5.3.3.2 Presiones y amplitudes máximas en función de $[h/Z]$

El cálculo de la relación altura de colchón/altura neta del salto  $[h/Z]$ , se puede ver en el cuadro 5.6, columna 9.

En las figuras 5.13 y 5.14 se indican las curvas de las relaciones adimensionales  $[P_{max}/Z]$  y  $[2A_{max}/Z]$ , en función de  $[h/Z]$ . Estas curvas sugieren un ajuste particular para cada caudal ensayado para relaciones  $h/Z < 0.14$ , para relaciones mayores las presiones y amplitudes máximas son independientes del caudal.

Podemos concluir que la presión máxima para alturas de colchón menores al 4% de la altura neta del salto  $[h/Z < 0.04]$ , puede llegar a ser del mismo orden que la energía total impuesta por el embalse, cuando el caudal de vertido es importante.

La presión máxima disminuye considerablemente hasta un 60% de la altura neta del salto, para alturas de colchón del orden del 10% del salto neto  $[h/Z \sim 0.10]$ . Para colchones de mayor altura, la presión máxima disminuye lentamente hasta un valor del orden del 30% de la altura neta del salto.

Con respecto a las amplitudes máxima de presión, podemos concluir de la figura 5.14 que se pueden alcanzar valores máximos del orden del 95% de la altura neta del salto, para alturas de colchón de agua menores del 5% de esta altura neta  $[h/Z < 0.05]$ , cuando el caudal vertido es importante.

Estas amplitudes máximas de presión disminuyen considerablemente hasta ser del orden del 30% de la altura neta del salto, para alturas de colchón de un 12% de la altura neta  $[h/Z = 0.12]$ . Para alturas de colchón mayores, las amplitudes de presión disminuyen muy poco y tienden alcanzar valores del orden del 25% de la altura neta del salto.

### 5.3.3.3 Semiamplitudes de presión en función de $[h/B]$

Se define a la semiamplitud superior como la diferencia de la presión máxima con la presión media  $[A_{sup} = P_{max} - \bar{P}_s]$ .

De igual forma, se define la semiamplitud inferior como la diferencia entre la presión media y la presión mínima  $[A_{inf} = \bar{P}_s - P_{min}]$

En el cuadro 5.7 se presenta el cálculo de las relaciones adimensionales  $[A_{sup}/Z]$  y  $[A_{inf}/Z]$ .

En las figuras 5.15a y 5.15b, se presentan los gráficos correspondientes a las relaciones  $[A_{sup}/Z]$ ,  $[A_{inf}/Z]$  en función del parámetro  $[h/B]$ .

Podemos observar que, en primera aproximación, las semiamplitudes superiores e inferiores tienen una dependencia débil respecto al caudal, siendo posible por tanto ajustar una sola curva para cada familia de curvas de semiamplitudes.

En la figura 5.16 se presentan las semiamplitudes ajustadas convenientemente. A partir de esta figura realizaremos los análisis que siguen.

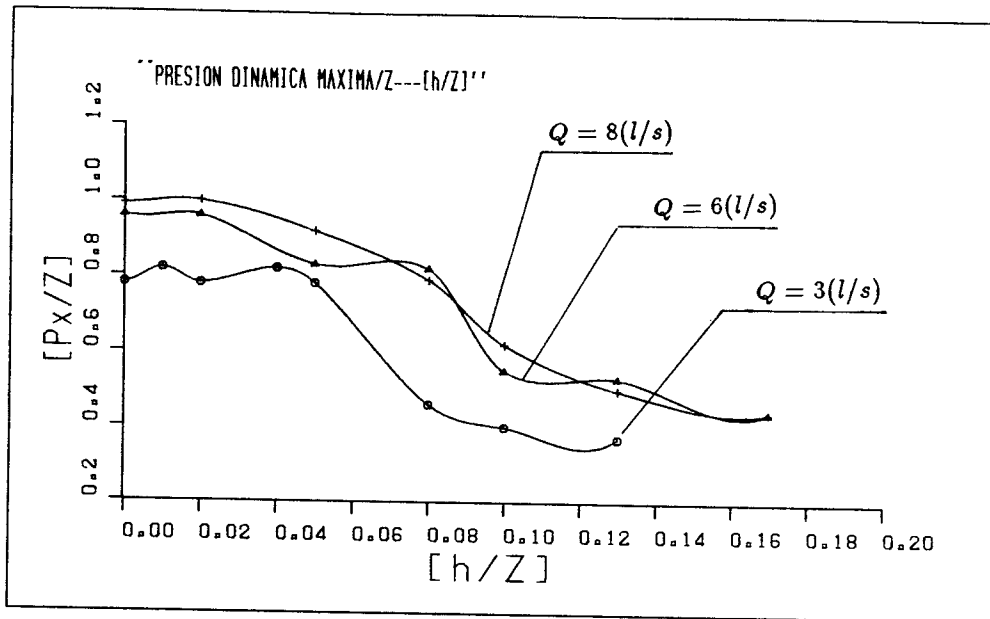


Figura 5.13 Presiones dinámicas máximas en el punto de estancamiento  $[P_{max}/Z]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/Z]$

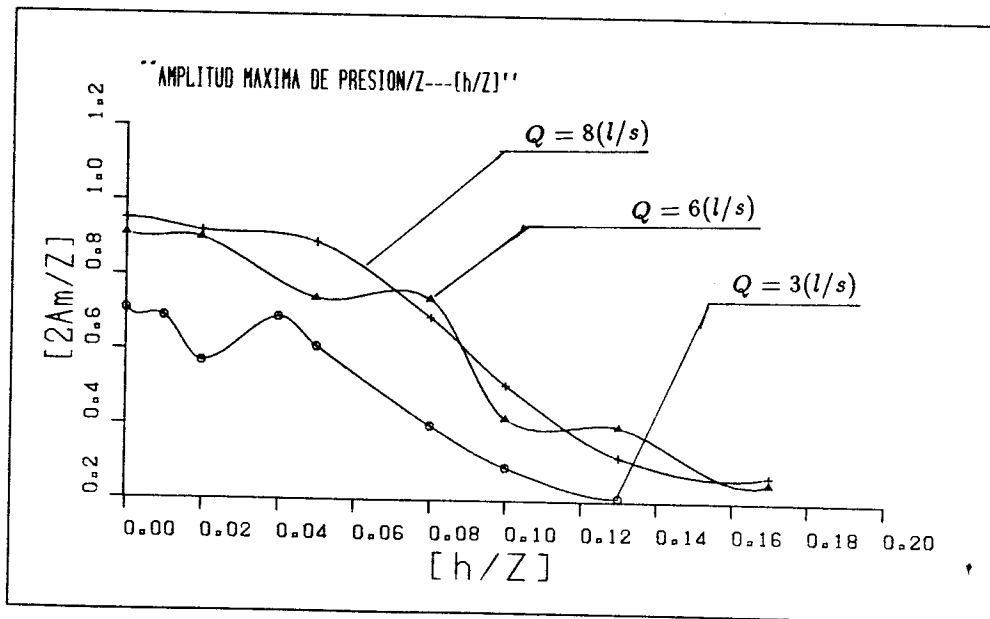


Figura 5.14 Amplitudes máximas de presión en el punto de estancamiento  $[2A_{maz}/Z]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/Z]$

$Q$ [l/s]	$h/Z$	$h/B$	$P_{maz}$ (cm)	$P_{min}$ (cm)	$\bar{P}_s$ (cm)	$v_0^2/2g = Z$ (cm)	$A_{sup}$ (cm)	$A_{inf}$ (cm)	$A_{sup}/Z$	$A_{inf}/Z$
3	0	0	134.74	12.25	107.73	172.00	27.01	95.48	0.16	0.56
	0.01	3.45	139.27	22.15	112.39	170.00	26.88	90.24	0.16	0.53
	0.02	6.90	130.54	34.23	103.15	168.00	27.39	68.92	0.16	0.41
	0.04	10.34	136.92	22.82	95.00	166.00	41.92	72.18	0.25	0.43
	0.05	13.54	127.52	28.18	63.83	164.00	63.69	35.64	0.39	0.22
	0.08	20.00	72.82	9.23	39.49	160.00	33.39	30.26	0.21	0.19
	0.10	26.67	62.42	16.61	16.41	156.00	25.98	20.03	0.17	0.13
	0.13	32.79	56.55	24.16	38.52	152.00	18.03	14.36	0.12	0.09
6	0	0	164.77	8.05	118.05	172.00	46.72	110.00	0.27	0.64
	0.02	5.33	161.75	11.07	105.97	168.00	55.78	94.90	0.33	0.56
	0.05	10.53	135.75	14.26	64.22	164.00	71.53	49.96	0.44	0.30
	0.08	15.58	131.89	13.09	46.30	160.00	85.59	33.21	0.53	0.21
	0.10	20.78	85.74	18.96	40.04	156.00	45.70	21.08	0.29	0.14
	0.13	25.64	80.54	19.46	39.97	152.00	40.57	20.51	0.27	0.13
	0.17	31.25	64.43	27.69	41.35	147.00	23.08	13.66	0.16	0.09
	8	0	0	170.98	6.21	109.61	172.00	61.37	103.40	0.36
0.02		4.60	171.65	16.61	115.90	168.00	55.75	99.29	0.33	0.59
0.05		9.09	150.68	4.36	70.12	164.00	80.56	65.76	0.49	0.40
0.08		13.48	126.35	16.28	46.47	160.00	79.88	30.19	0.50	0.19
0.10		17.77	96.15	16.44	45.02	156.00	51.13	28.58	0.33	0.18
0.13		21.74	75.17	26.68	45.04	152.00	30.11	18.36	0.20	0.12
0.17		26.88	63.93	24.50	40.92	147.00	23.01	16.42	0.16	0.11

**Cuadro 5.7** Cuadro de cálculo de las relaciones adimensionales  $[A_{sup}/Z]$  y  $[A_{inf}/Z]$

Las semiamplitudes superiores  $A_{sup}$  alcanzan los valores máximos para relaciones de  $h/B < 6$ , pudiendo llegar a alcanzar valores del orden del 55% de la carga hidrostática del embalse. Para relaciones de  $h/B > 6$ , estas semiamplitudes disminuyen rápidamente hasta llegar a ser del orden del 10% de la carga total embalse.

La semiamplitudes inferiores  $A_{inf}$  tienen un comportamiento algo singular. Se inician registrando valores del orden del 20% de la carga del embalse, para ir aumentando y registrar los valores máximos en el intervalo de  $12 < h/B < 18$ , con valores del orden del 40% de la carga del embalse. Para relaciones de  $h/B > 16$ , disminuyen hasta llegar a ser del orden del 10% de la carga del embalse, es decir del mismo orden de las semiamplitudes superiores.

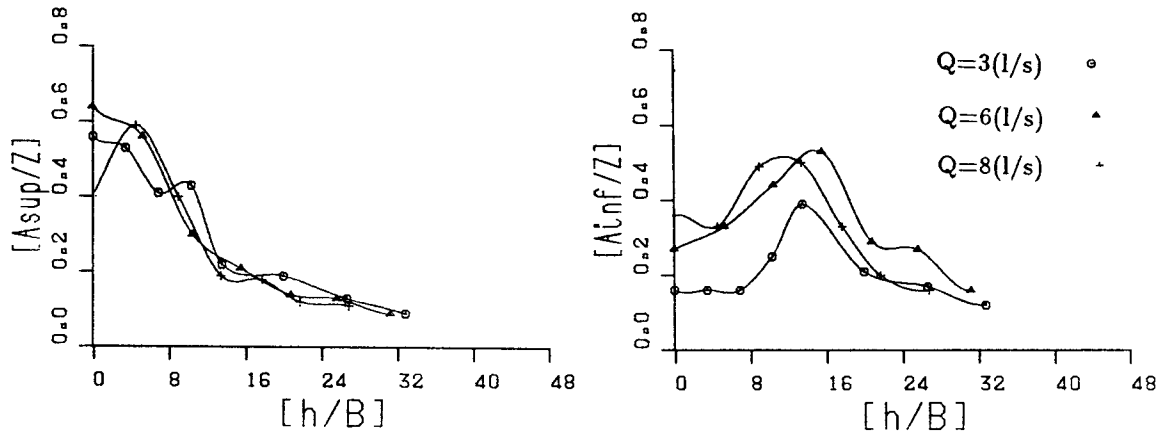


Figura 5.15 Semiamplitudes de presión en el punto de estancamiento (a)  $[A_{sup}/Z]$  y (b)  $[A_{inf}/Z]$ , en función del parámetro  $[h/B]$ . Ajuste individual a cada caudal

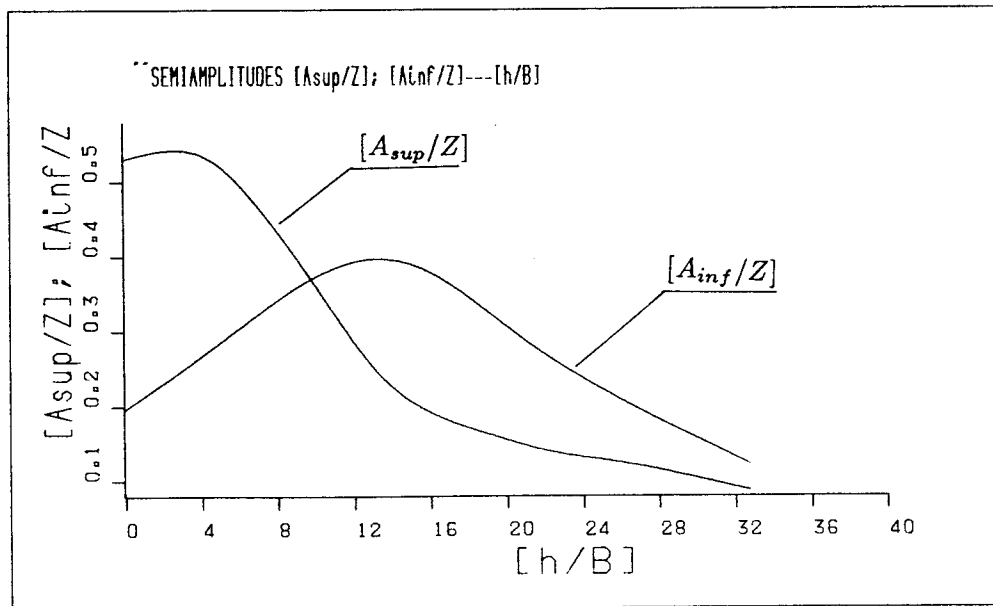


Figura 5.16 Semiamplitudes de presión en el punto de estancamiento  $[A_{sup}/Z]$  y  $[A_{inf}/Z]$ , en función del parámetro  $[h/B]$ . Ajuste general

#### 5.3.4 Densidad y distribución de probabilidad de las presiones instantáneas

En la figura 5.17, se presentan las densidades y distribuciones de probabilidad de presiones instantáneas en el punto de estancamiento, para el caso de un caudal de  $Q=8l/s$  y alturas de colchón de agua  $h=0, 4, 8, 16$  y  $25cm$ .

Estas distribuciones varían desde formas de distribución asimétricas, para el impacto directo y colchones reducidos hasta la distribución normal, conforme aumenta la altura del colchón de agua. Estos resultados están de acuerdo con los estudios realizados por Xu Duo-Ming...[114].

En las figuras 5.18a y 5.18b, se pueden observar las distribuciones de las presiones instantáneas en el punto de estancamiento, a una misma escala. Es importante notar como el colchón de agua actúa amortiguando y modificando la distribución de las presiones.

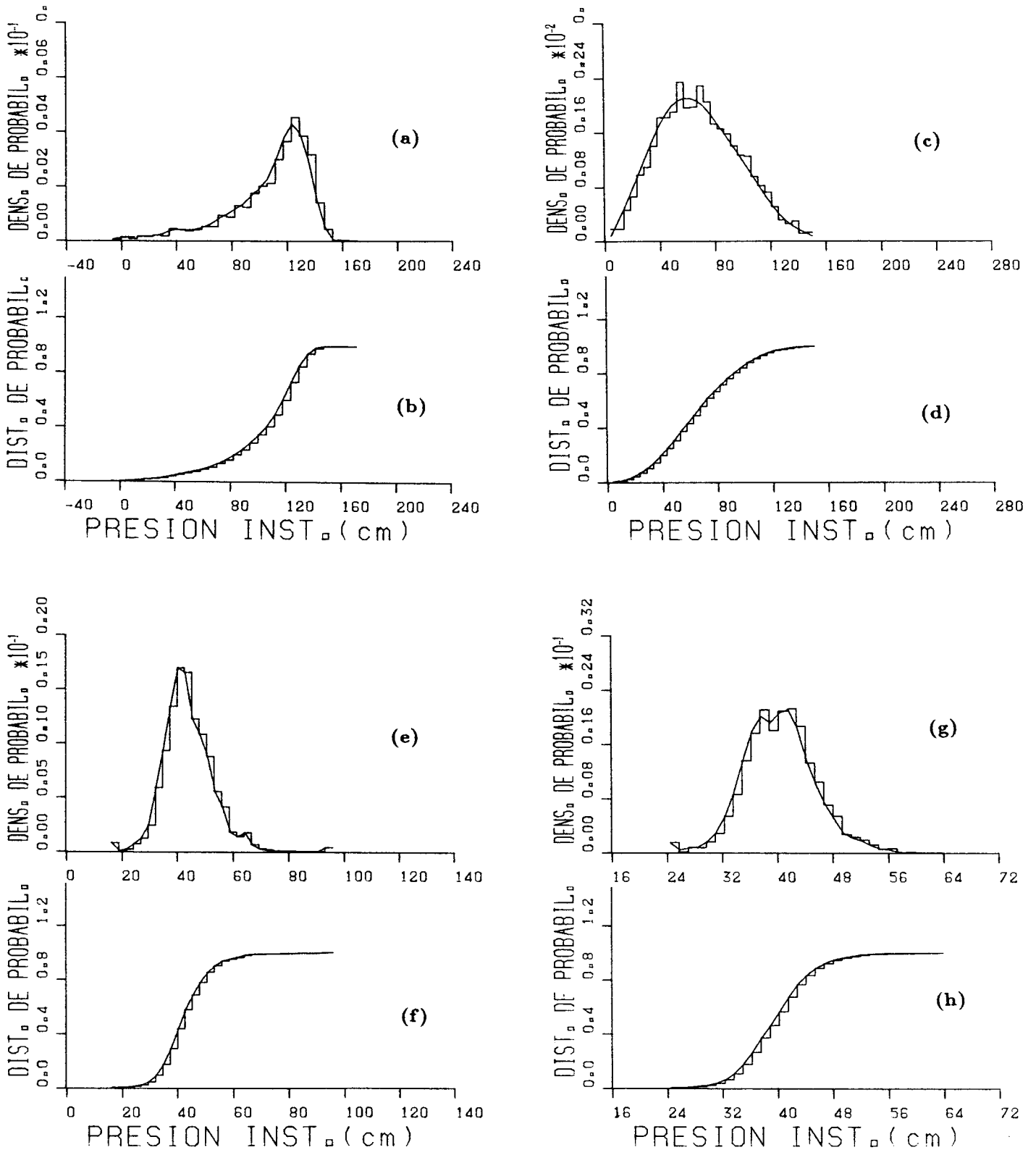
Para el caso de una probabilidad del 90%, la presión de diseño puede variar, para el punto de estancamiento, desde  $140cm$ , en el caso del impacto directo, hasta solamente  $40cm$ , para el caso de un colchón de  $h=25cm$ .

En la figura 5.19, se indica las distribuciones de densidad y probabilidad en el punto de estancamiento, aguas arriba, aguas abajo y a la derecha del mismo, para el caso del caudal  $Q=8l/s$  y un colchón  $h=16cm$ .

Se puede observar que las distribuciones con mayor asimetría corresponden, al punto de estancamiento y al punto a la derecha del mismo. En cambio, las distribuciones correspondientes a los puntos de aguas arriba y aguas abajo del punto de estancamiento, se acercan bastante a una normal.

En las figuras 5.20a y 5.20b, se pueden observar las distribuciones de las presiones instantáneas representados a una misma escala.

Para el caso de una probabilidad del 90%, las presiones varían desde  $50cm$ , en el punto de estancamiento, hasta  $20cm$ , correspondiente al punto de aguas arriba.



**Figura 5.17** Funciones de densidad y distribución de probabilidad en el punto de estancamiento, para diferentes alturas de colchón de agua y caudal de  $Q=8l/s$ . (a) y (b):  $h=0cm$ ; (c) y (d):  $h=8cm$ ; (e) y (f):  $h=16cm$ ; (g) y (h):  $h=25cm$



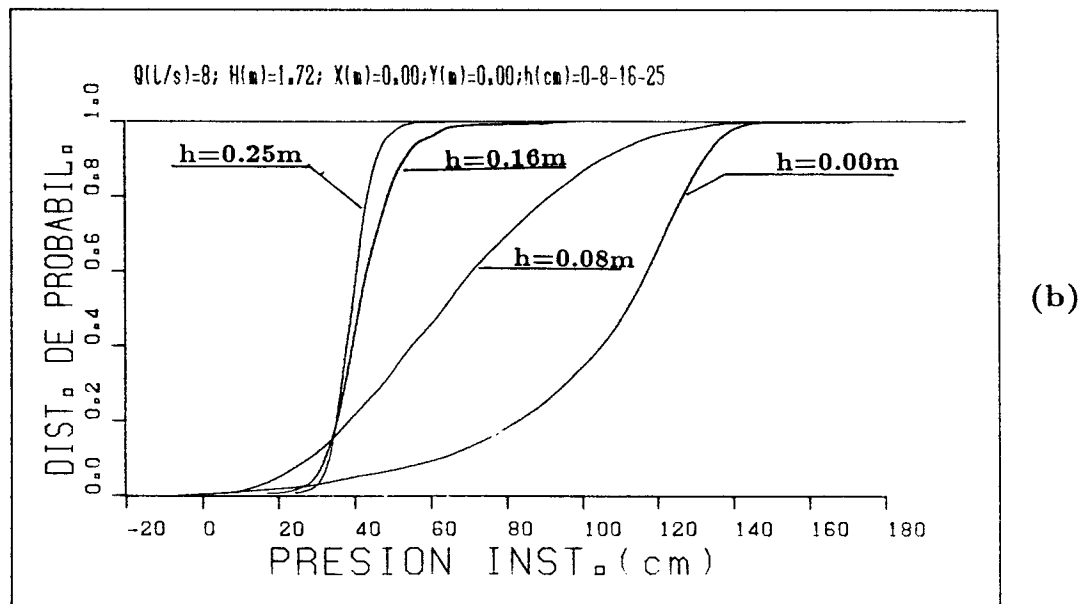
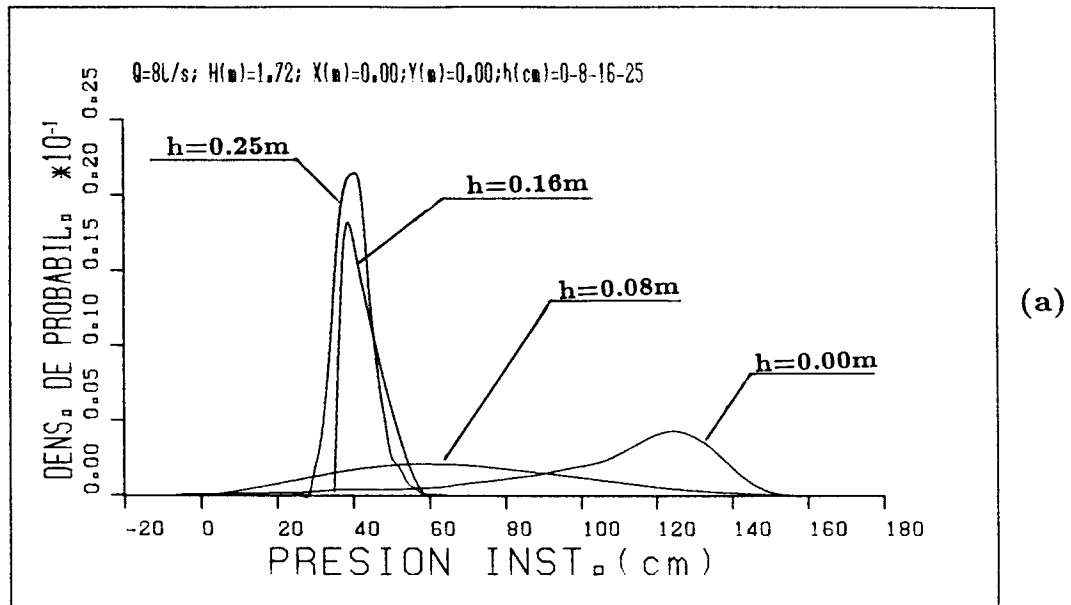
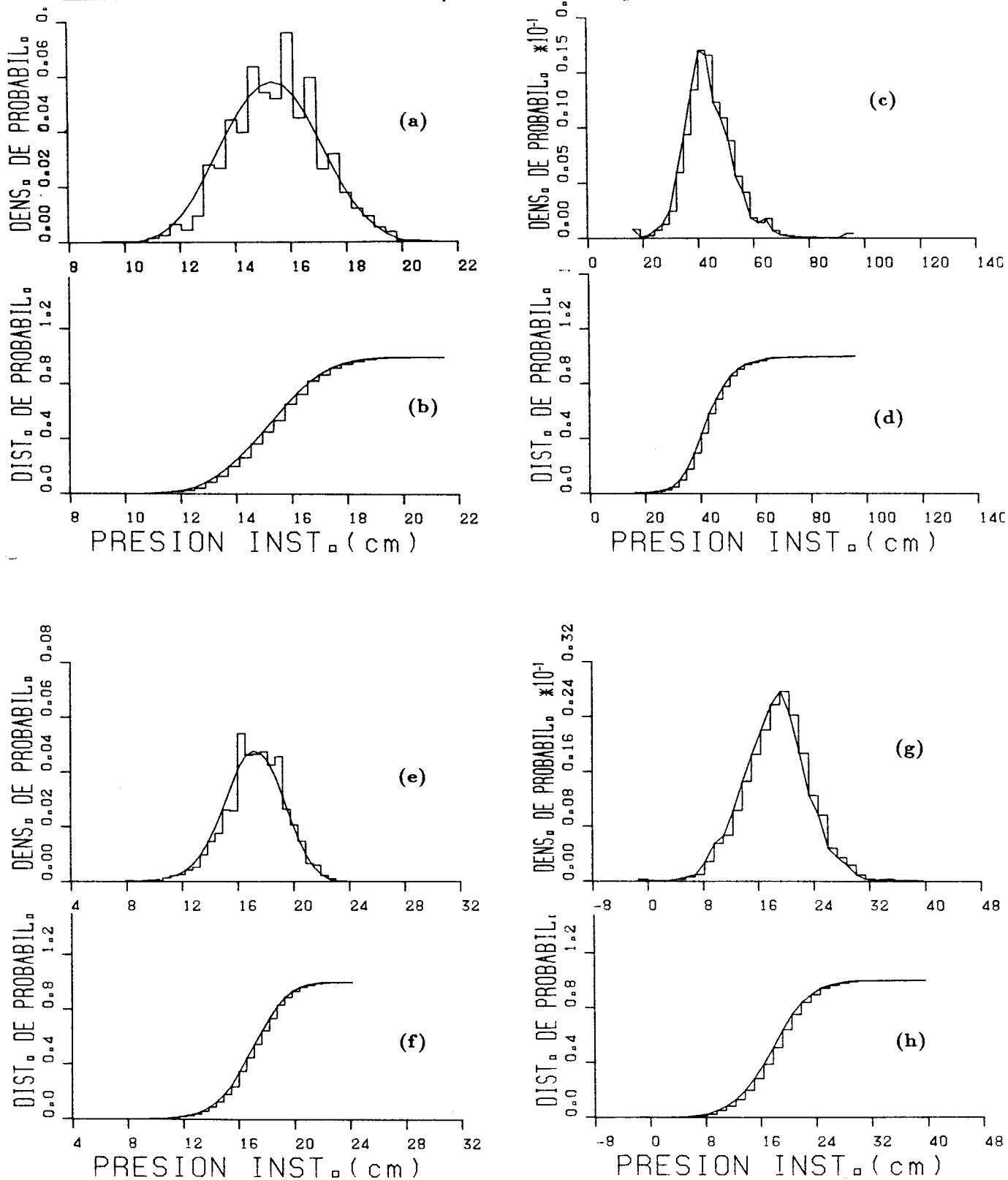
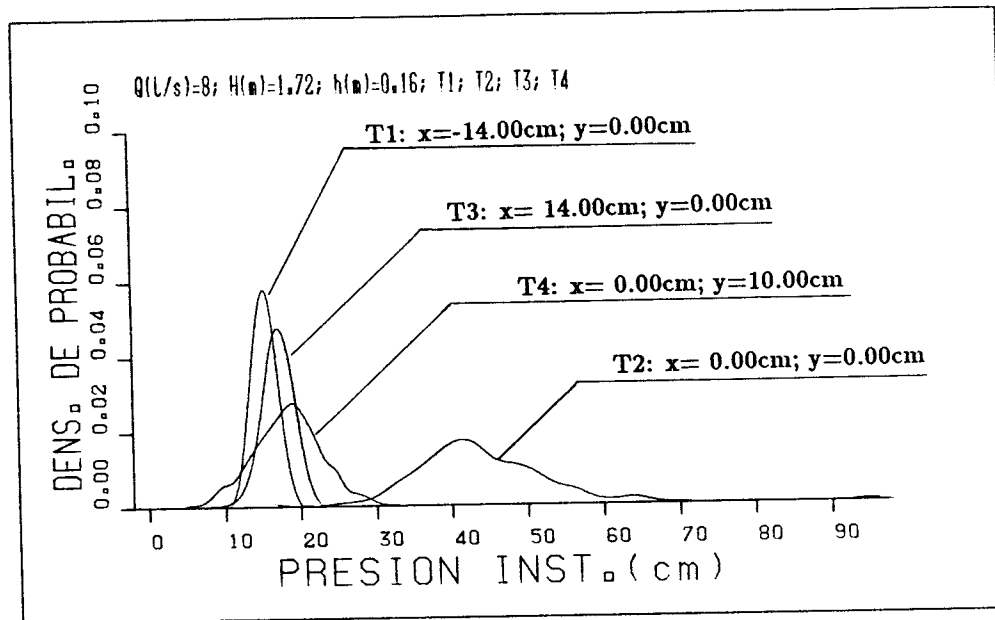


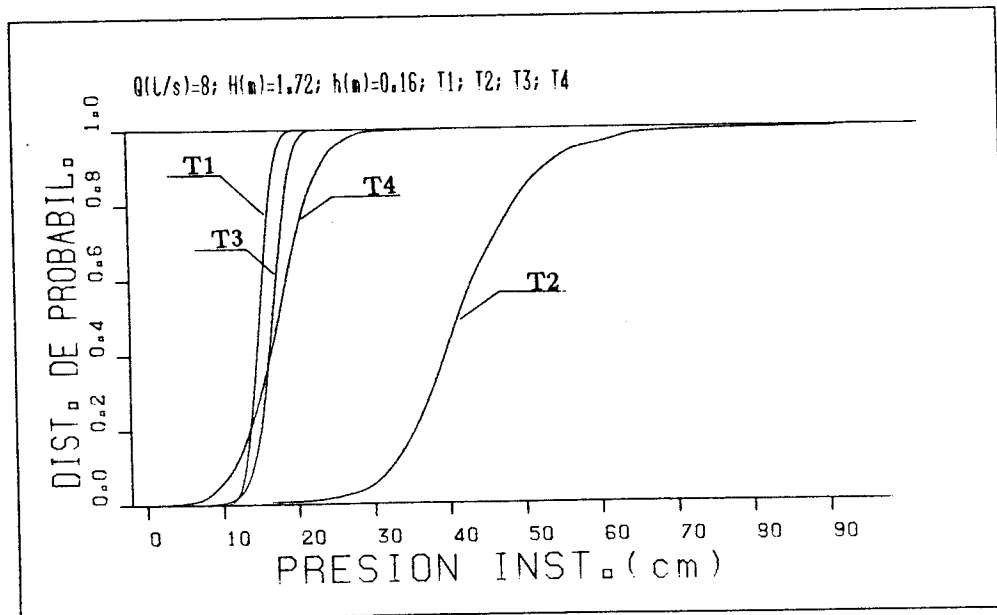
Figura 5.18 Funciones de densidad y distribución de probabilidad en el punto de estancamiento, para diferentes alturas de colchón de agua y caudal de  $Q=8\text{l/s}$ . (a) Densidades de probabilidad. (b) Distribuciones de probabilidad



**Figura 5.19** Funciones de densidad y distribución de probabilidad en el punto de estancamiento, aguas arriba, aguas abajo y a la derecha, para una altura de colchón de agua  $h=16\text{cm}$  y caudal de  $Q=8\text{l/s}$ . (a) y (b): aguas arriba; (c) y (d): punto de estancamiento; (e) y (f): aguas abajo; (g) y (h): a la derecha del punto de estancamiento



(a)



(b)

**Figura 5.20** Funciones de densidad y distribución de probabilidad en el punto de estancamiento, aguas arriba, aguas abajo y a la derecha, para una altura de colchón de agua  $h=16\text{cm}$  y caudal de  $Q=8\text{l/s}$ . (a) Densidades de probabilidad. (b) Distribuciones de probabilidad

#### 5.4 Presiones de fluctuación macroturbulentas

En este apartado, estudiaremos las principales características de las presiones de fluctuación macroturbulentas.

La presión de fluctuación  $P'$  se determina a partir de la presión instantánea  $P$  y de la presión media  $\bar{P}$  como:

$$P' = P - \bar{P} \quad (5.9)$$

La fluctuación cuadrática media "PF" (o varianza  $\sigma^2$  en el caso de procesos aleatorios estacionarios), se define como el valor cuadrático medio de las fluctuaciones de presión y su raíz cuadrada, como la raíz cuadrática media de las fluctuaciones de presión (o desviación estándar  $\sigma$ ); así:

$$\bar{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i \quad (5.10)$$

$$PF = \bar{P'^2} = \sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i - \bar{P})^2 \quad (5.11)$$

$$\sigma = \sqrt{\bar{P'^2}} \quad (5.12)$$

en donde  $N$  es el número de datos muestreados.

Se define como intensidad de turbulencia  $T_p$ , la relación entre la fluctuación cuadrática media PF, sobre la carga de velocidad  $[v_0^2/2g]$ , a la entrada del colchón de agua; así:

$$T_p = \frac{\sqrt{\bar{P'^2}}}{v_0^2/2g} \quad (5.13)$$

Otro parámetro adimensional que puede definir a la intensidad de turbulencia es la relación de la fluctuación cuadrática media  $PF$ , sobre la presión dinámica media en el punto de estancamiento  $\bar{P}_s$ ; así:

$$T_s = \frac{\sqrt{\bar{P'^2}}}{\bar{P}_s} \quad (5.14)$$

En el cuadro 5.8, se indica los valores de  $T_p$  y  $T_s$ , la relación adimensional  $PF/PF_0$ , en función de la relación adimensional  $[h/B]$ . El valor de  $PF_0$  es la presión de fluctuación cuadrática media para colchones de altura de agua igual a cero (caso de impacto directo).

En la figura 5.21, se indica la intensidad de turbulencia  $[T_p]$  en función de la relación adimensional  $[h/B]$ , para los tres caudales ensayados.

$Q$ [l/s]	$h$ (cm)	$h/B$	$\bar{P}_s$ (cm)	$v_0^2/2g$ (cm)	$\sqrt{P'^2}$ (cm)	$\sqrt{P'^2}/(v_0^2/2g)$ $T_p$	$\sqrt{P'^2}/(\bar{P}_s)$ $T_s$	$PF$ (cm)	$PF/PF_0$
3	0	0	107.13	172.00	13.07	0.08	0.12	170.94	1
	2	3.45	112.39	170.00	20.15	0.12	0.18	405.90	2.37
	4	6.90	103.15	168.00	15.58	0.09	0.15	242.72	1.42
	6	10.43	95.00	166.00	16.58	0.10	0.17	274.85	1.61
	8	13.56	63.83	164.00	12.27	0.07	0.19	150.53	0.88
	12	20.00	39.46	160.00	7.98	0.05	0.20	63.71	0.37
	16	26.67	36.44	156.00	5.60	0.04	0.15	31.25	0.18
20	32.79	38.52	152.00	4.58	0.03	0.12	21.01	0.12	
6	0	0	118.05	172.00	18.85	0.11	0.16	355.42	1
	4	5.33	105.97	168.00	25.69	0.15	0.24	660.09	1.86
	8	10.53	64.22	164.00	20.10	0.12	0.31	403.81	1.14
	12	15.58	46.30	160.00	10.01	0.06	0.22	100.18	0.28
	16	20.78	40.04	156.00	7.45	0.05	0.19	55.48	0.16
	20	25.64	39.97	152.00	6.25	0.04	0.16	39.01	0.11
	25	31.25	41.35	147.00	5.13	0.03	0.13	26.33	0.07
8	0	0	109.61	172.00	29.35	0.17	0.27	861.36	1
	4	4.60	155.90	168.00	25.89	0.15	0.17	670.26	0.78
	8	9.09	70.12	164.00	29.24	0.18	0.43	854.88	0.99
	12	13.48	46.47	160.00	11.05	0.07	0.24	122.16	0.14
	16	17.78	45.02	156.00	8.58	0.06	0.19	73.58	0.09
	20	21.74	45.04	152.00	6.63	0.04	0.15	44.02	0.05
	25	26.88	40.92	147.00	5.01	0.03	0.12	25.09	0.03

**Cuadro 5.8** Cuadro de cálculo de las relaciones adimensionales  $[\sqrt{P'^2}/(v_0^2/2g)]$ ,  $[\sqrt{P'^2}/\bar{P}_s]$  y  $[PF/PF_0]$

Se observa que para el caudal de  $Q = 8l/s$ , existe una singularidad en la tendencia de la curva para un colchón de  $h/B = 4.60$ . Lo mismo ocurre para el  $Q = 3l/s$  y un  $h/B = 6.90$ .

Se puede observar que las máximas intensidades de turbulencia, para los tres caudales ensayados, se producen para colchones menores de once veces el ancho del chorro ( $h < 11B$ ).

Cuando el colchón de agua incrementa, la intensidad de turbulencia disminuye, hasta un valor semejante del 3%

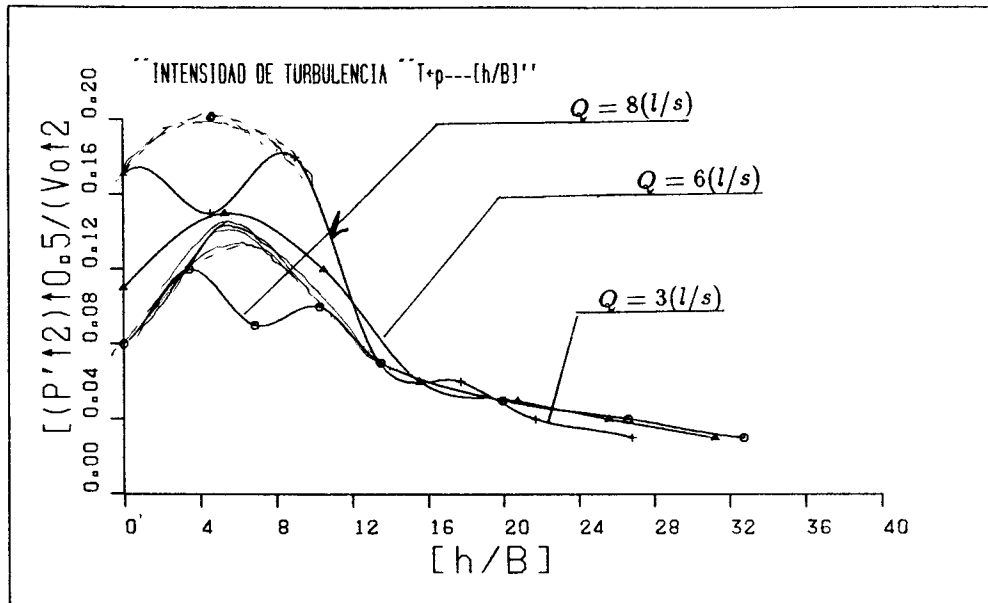


Figura 5.21 Intensidades de turbulencia  $[T_p = \sqrt{P'^2} / (v_0^2/2g)]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/B]$

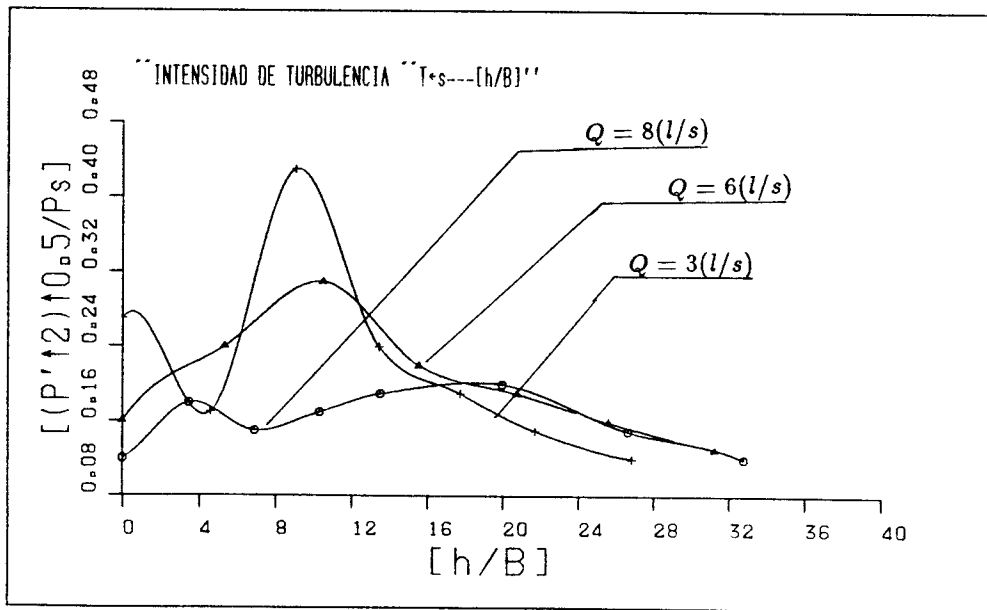


Figura 5.22 Intensidades de turbulencia  $[T_s = \sqrt{P'^2} / \bar{P}_s]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/B]$

En la figura 5.22, se indica la intensidad de turbulencia  $[T_s]$ , en función de la relación adimensional  $[h/B]$ .

Nuevamente se observan las singularidades en los caudales de 8 y de 3l/s, para las relaciones de  $h/B=4.60$  y  $6.90$  respectivamente. Esto se debe posiblemente a un exceso del colchón de agua (de algunos segundos) por dificultad en la operación de la válvula de control.

Se puede observar, que las máximas intensidades de turbulencia  $T_s$  (figura 5.21), se encuentran para una altura de colchón de agua,  $[9 \leq h/B \leq 14]$ . Para alturas de colchón mayores, la intensidad de Turbulencia  $T_s$ , tiende a un valor del orden del 10%.

En la figura 5.23, se representan las intensidades de turbulencia  $T_p$  y  $T_s$ , cuyas curvas son el ajuste de los tres caudales ensayados, eliminando las singularidades comentadas y siguiendo la tendencia.

Como cabía esperar, el nivel de turbulencia con respecto al valor de la presión dinámica media  $T_s$ , es muy superior al nivel de turbulencia con respecto a la carga de velocidad a la entrada del colchón  $T_p$ .

Del análisis de estas curvas, podemos concluir que los índices de turbulencia máxima, se encuentran comprendidos en el intervalo  $[9 \leq h/B \leq 14]$  con un  $T_s \sim 23\%$ ; y en el intervalo de  $[0 \leq h/B \leq 6]$  con un  $T_p \sim 12\%$ .

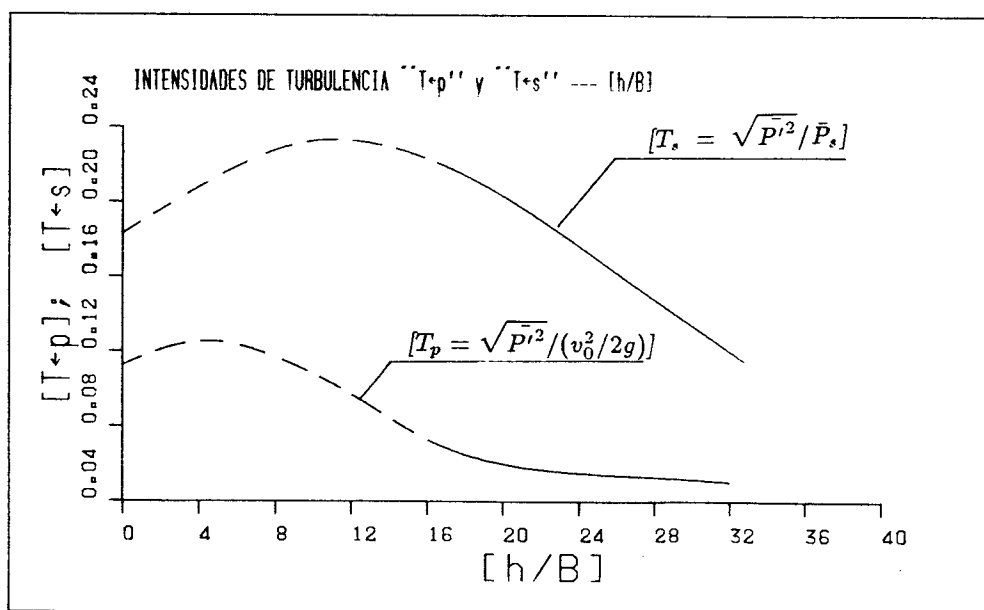


Figura 5.23 Curvas de ajuste de las intensidades de turbulencia  $[T_p]$  y  $[T_s]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/B]$

En la figura 5.24, se indican las fluctuaciones de presión adimensionales  $[PF/PF_0]$ , en función de la relación adimensional  $[h/B]$ , para los tres caudales ensayados en este trabajo, y los valores presentados por Lencastre [54]. Es importante hacer notar que en los valores presentados por Lencastre también existe una singularidad en el caudal de  $q = 118\text{l/sm}$  ( $h/B \sim 2.5$ ), pero que no es comentado por su autor.

Se puede observar que la distribución de los puntos sugieren una familia de curvas, las mismas que son función del caudal unitario a la entrada del colchón de agua. Por lo tanto, se pone en evidencia la propuesta de Lencastre de ajustar con una sola curva los puntos de ensayo obtenidos.

En la figura 5.25, se indica las curvas ajustadas convenientemente a cada caudal ensayado. Para ello se han eliminado los puntos que están alejados de la tendencia asumida en los ajustes respectivos. Los puntos eliminados se pueden considerar como valores defectuosos del ensayo; así, en nuestro caso, por desajustes en la válvula de control del nivel del colchón de agua; concretamente, por exceso del nivel respectivo en los caudales de 3 y 8l/s.

Un aspecto importante que ya fue indicado por Lencastre [54] y que ahora se comprueba es que las máximas fluctuaciones de presión no se producen para el caso del impacto directo ( $h = 0$ ); sino en pequeñas alturas del colchón de agua. Este fenómeno puede explicarse por el pequeño o nulo efecto de los pequeños colchones en la disipación de energía y por la facilidad que un cierto espesor de colchón de agua ofrece al desarrollo de la turbulencia. Estas máximas fluctuaciones de presión se producen para valores de  $[4 \leq h/B \leq 8]$ .

Para valores de  $[8 \leq h/B \leq 16]$  se produce una rápida disminución en el valor de las fluctuaciones de presión llegando a reducirse, en término medio, del orden del 80%; sin embargo, para las curvas superiores la disminución de las fluctuaciones, con respecto a los valores de colchón nulo, es solamente del orden del 50%.

En las curvas inferiores, para valores de  $h/B > 16$ , la disminución de las fluctuaciones de presión es poco sensible; siendo por tanto, prácticamente despreciable el efecto del colchón de agua.

Para las curvas superiores, el aumento del colchón de agua es todavía efectivo y así, se necesitaría de un colchón doble, con respecto a las curvas inferiores ( $h/B = 32$ ), para tener un nivel de presiones de fluctuación despreciable.

Con el presente estudio, se ponen en evidencia el pobre conocimiento de la disipación de las fluctuaciones de presión en función de la altura del colchón de agua y de los caudales unitarios a la entrada del colchón.

Por lo pronto, en función de la calidad y cantidad de los valores obtenidos en nuestros ensayos así como de los otros autores, podemos solamente dar el aire de estas curvas.

Para una definición más precisa se necesitan de más datos experimentales.



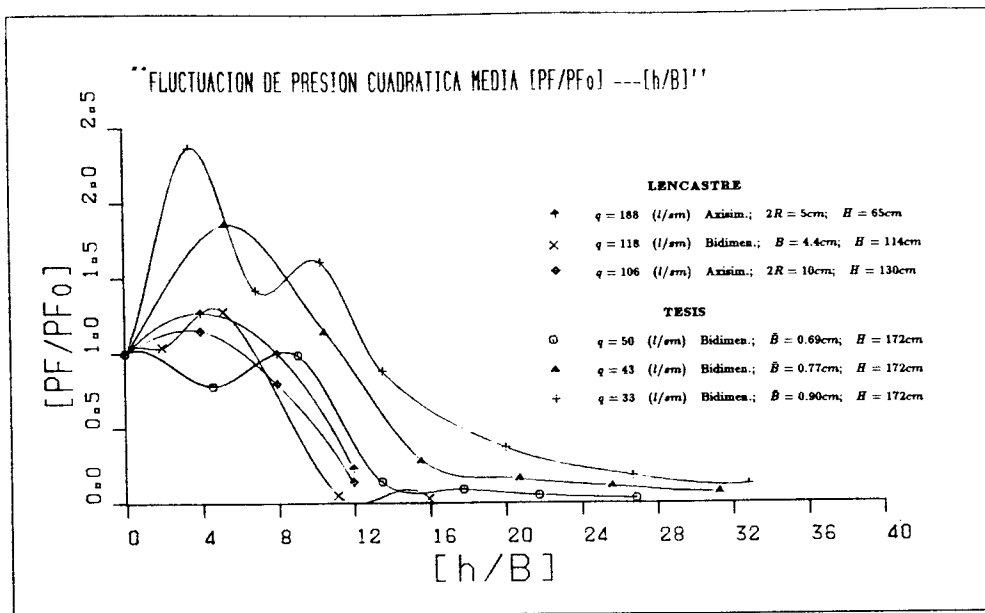


Figura 5.24 Presiones de fluctuación cuadrática media  $[PF/PF_0]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/B]$ . Sin quitar puntos defectuosos

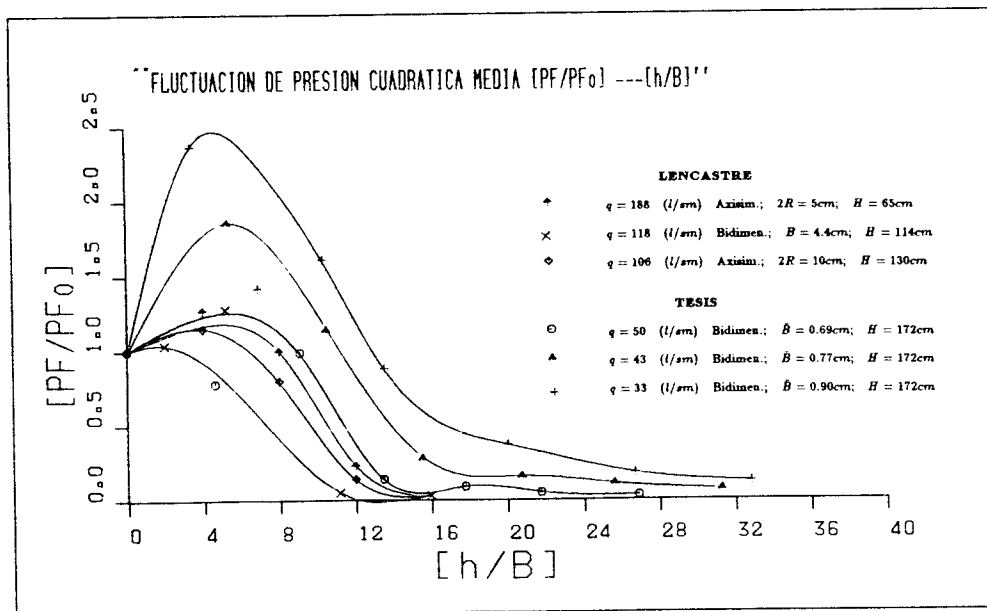
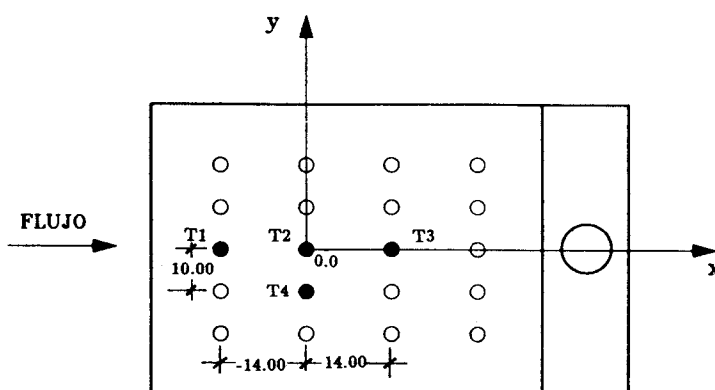


Figura 5.25 Presiones de fluctuación cuadrática media  $[PF/PF_0]$ , en función de la altura del colchón de agua  $[h/B]$ .

### 5.5 Correlaciones temporales y espaciales de las presiones, en la losa del disipador de energía.

En esta sección analizaremos las correlaciones temporales y espaciales, en cuatro puntos de medición simultánea, en la losa del disipador. Tres puntos de medida, separados 14cm y alineados en la dirección del flujo, aguas arriba, en el punto de estancamiento y aguas abajo. Un punto de medida, a la derecha del punto de estancamiento, en la dirección del flujo y separado en 10cm (ver figura 5.26).



**Figura 5.26** Puntos de medida en la losa del modelo de disipación de energía a pie de presa.

En forma general, las correlaciones temporales y espaciales de las presiones se pueden definir por medio de la ecuación de crosscorrelación [39], [87], [98]:

$$R_{x,y}(\tau) = \frac{\overline{P_x(t)P_y(t-\tau)}}{\sigma_x\sigma_y} \quad (5.15)$$

en donde:

$P_x(t)$ ...Presión en el punto  $x$  y en el instante  $t$ .

$P_y(t)$ ...Presión en el punto  $y$  y en el instante  $t$ .

$\sigma_x$  y  $\sigma_y$ ...Desviaciones estándar de las presiones en  $x$  y  $y$

$\tau$ ...Retardo temporal de análisis

Cuando  $x = y$ , estamos en el caso de la autocorrelación, que nos relaciona el valor de una presión medida en un mismo punto en instantes diferentes; esto es, traducen el comportamiento del fenómeno en el tiempo.

Cuando  $x \neq y$ , estamos en el caso de la correlación espacial, que nos relaciona las presiones de fluctuación medidas en el mismo instante en dos puntos distintos, dándonos así una idea del comportamiento espacial del fenómeno.

En las figuras 5.27 a 5.29, se indican las autocorrelaciones y crosscorrelaciones, para el caudal  $Q = 6l/s$  y alturas de colchones de agua de  $h=0.04, 0.12, 0.20m$ . En las figuras 5.30 y 5.31, se presentan las curvas resumen de las autocorrelaciones en el punto de estancamiento, para las diferentes alturas del colchón de agua, así como, las crosscorrelaciones entre el punto de estancamiento y los puntos de su entorno.

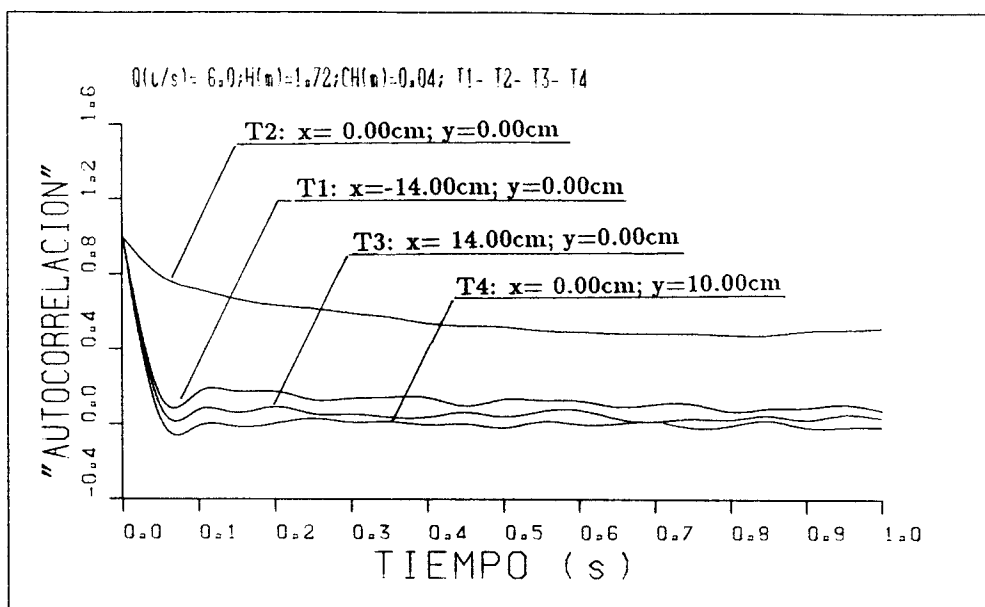
Estos gráficos se obtuvieron con 100 valores de retardo; lo que significó un desplazamiento total del origen de tiempos de 5 segundos ( $0.05s*100=5s$ ).

Los valores de la presión instantánea en el punto de estancamiento, mantienen un alto grado de autocorrelación; así, coeficientes de autocorrelación de 0.6, se mantiene hasta aproximadamente un segundo, disminuyendo gradualmente a cero con una pendiente muy suave. Esto nos indica que la señal registrada pertenece a una onda de período muy largo. Esta autocorrelación disminuye a medida que la altura del colchón de agua aumenta.

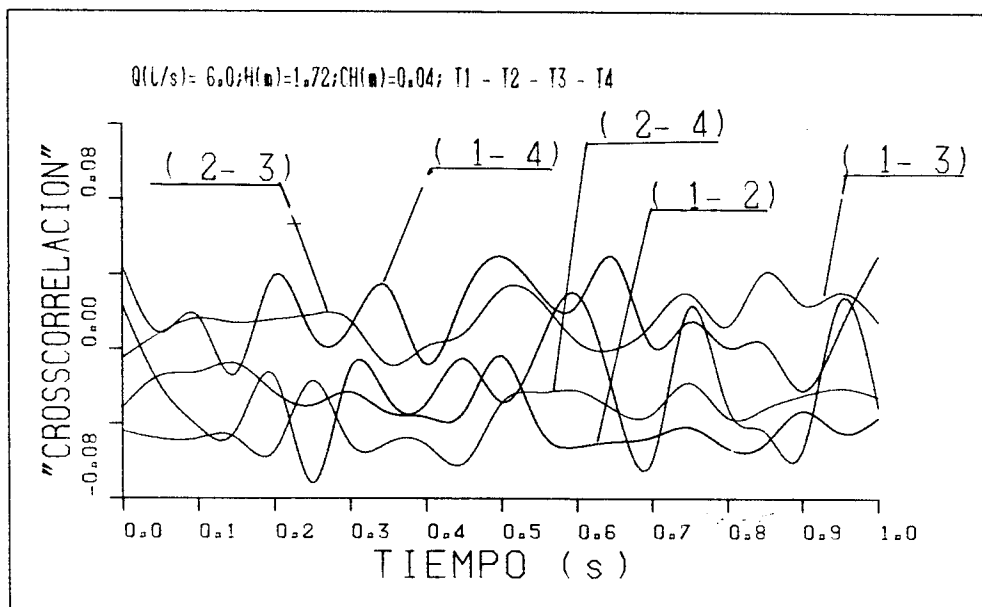
Las autocorrelaciones de los otros puntos de medida, tienen una disminución al valor de cero, de una forma muy rápida ( $\sim 0.05s$ ), lo que nos indica que estas presiones no están correlacionadas consigo mismo.

Para realizar un análisis más profundo de la función de autocorrelación sería necesario una mayor frecuencia de muestro.

El análisis de las crosscorrelaciones nos indica que para todos los colchones y todos los caudales, los valores se encuentran entre  $+0.08$  y  $-0.08$ . De esto concluimos que existe una baja dependencia lineal entre las variables aleatorias; o lo que es lo mismo, existe una baja correlación temporal o espacial. Esto se debe a que la distancia entre los puntos medidos, es superior a la distancia hasta la que pueda existir una correlación razonable.

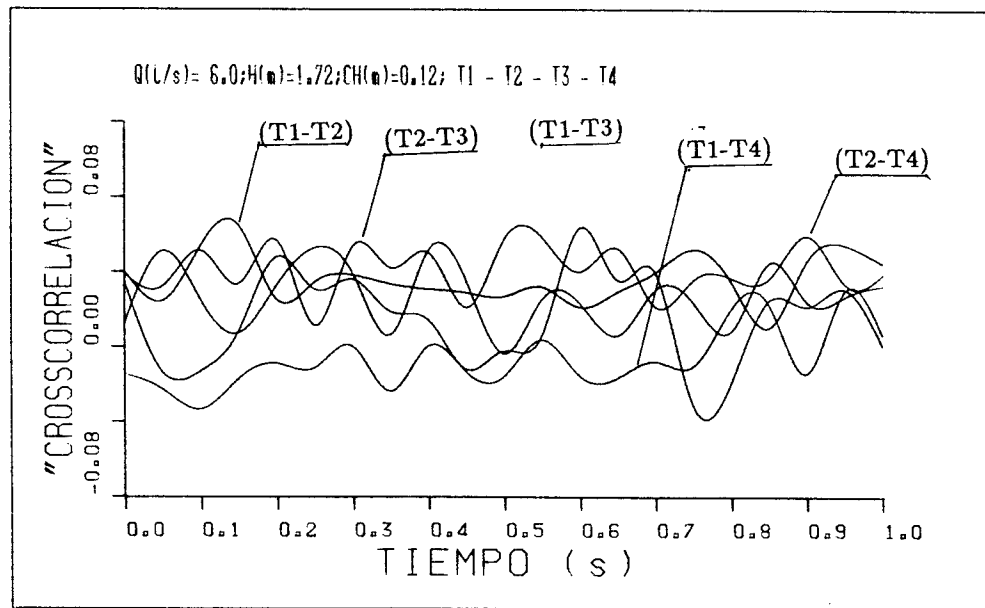
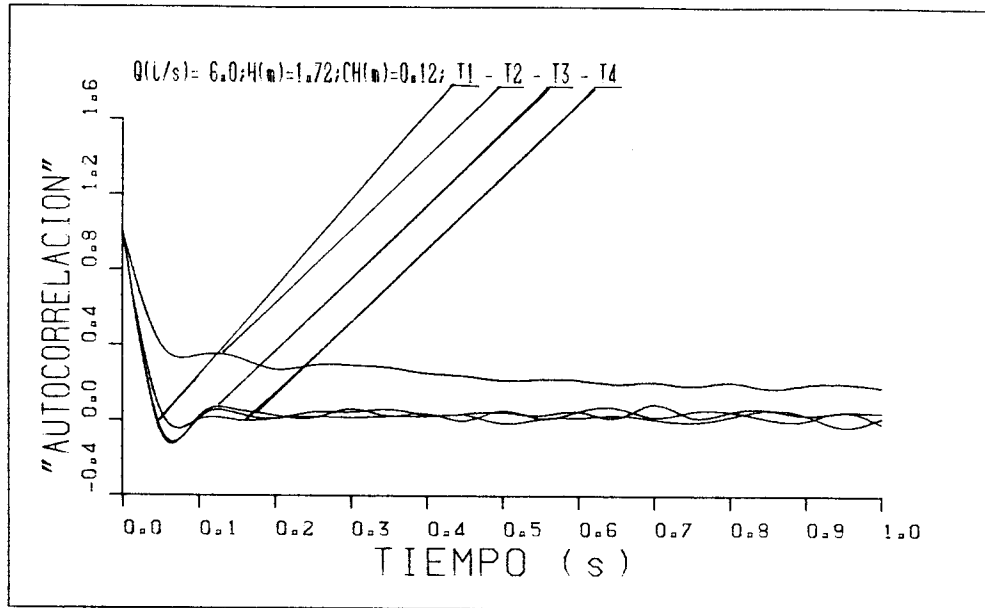


(a)



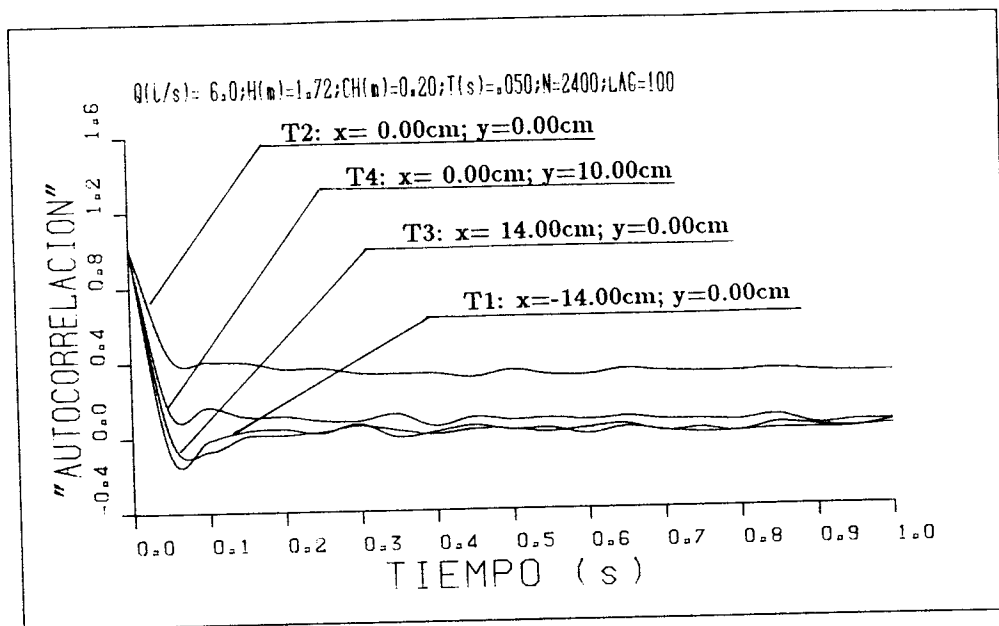
(b)

**Figura 5.27** (a) Autocorrelaciones y (b) Crosscorrelaciones de las fluctuaciones de presión en el punto de estancamiento y puntos del entorno.  $Q = 6l/s; h = 0.04m$

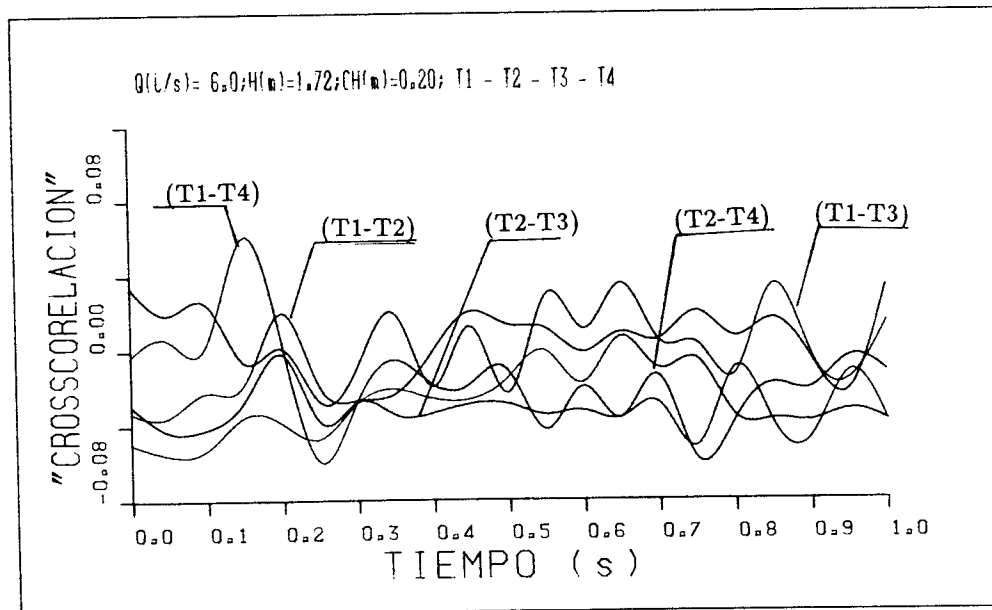


(b)

Figura 5.28 (a) Autocorrelaciones y (b) Crosscorrelaciones de las fluctuaciones de presión el punto de estancamiento y los puntos del entorno.  $Q = 6l/s$ ;  $h = 0.12m$

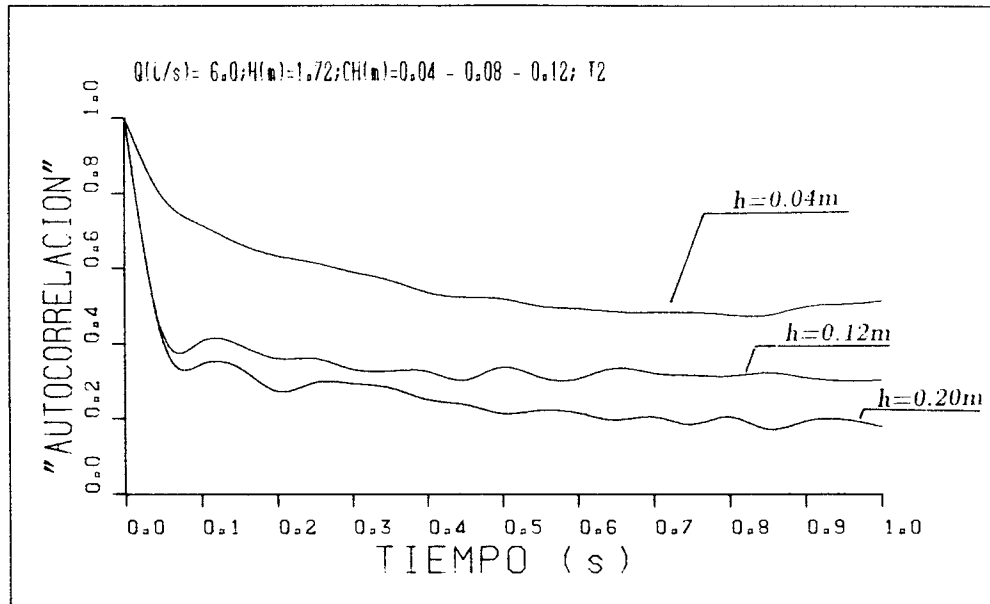


(a)

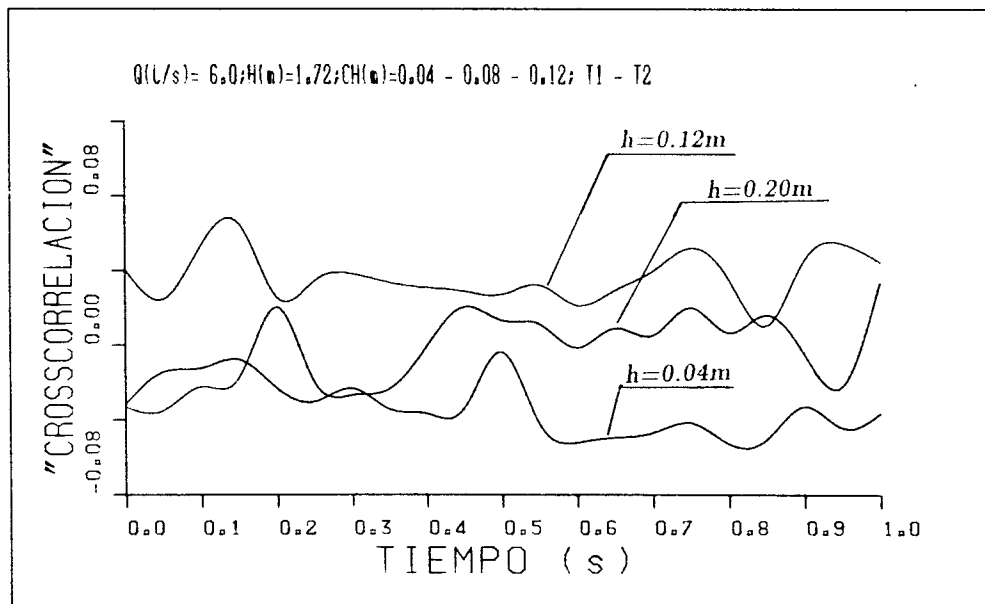


(b)

Figura 5.29 (a) Autocorrelaciones y (b) Crosscorrelaciones de las fluctuaciones de presión en el punto de estancamiento y los punto del entorno.  $Q = 6/s$ ;  $h = 0.20m$

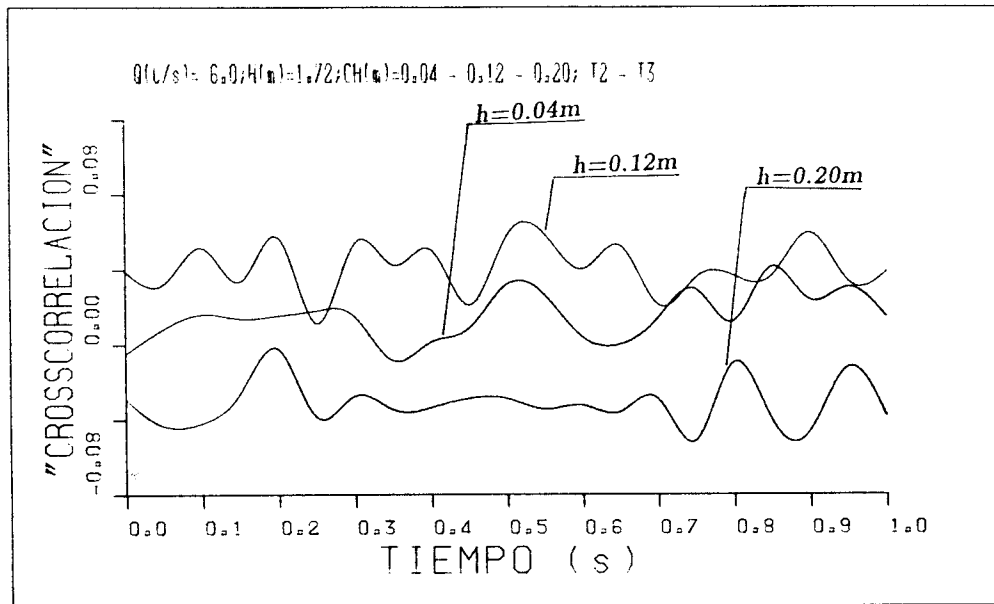


(a)

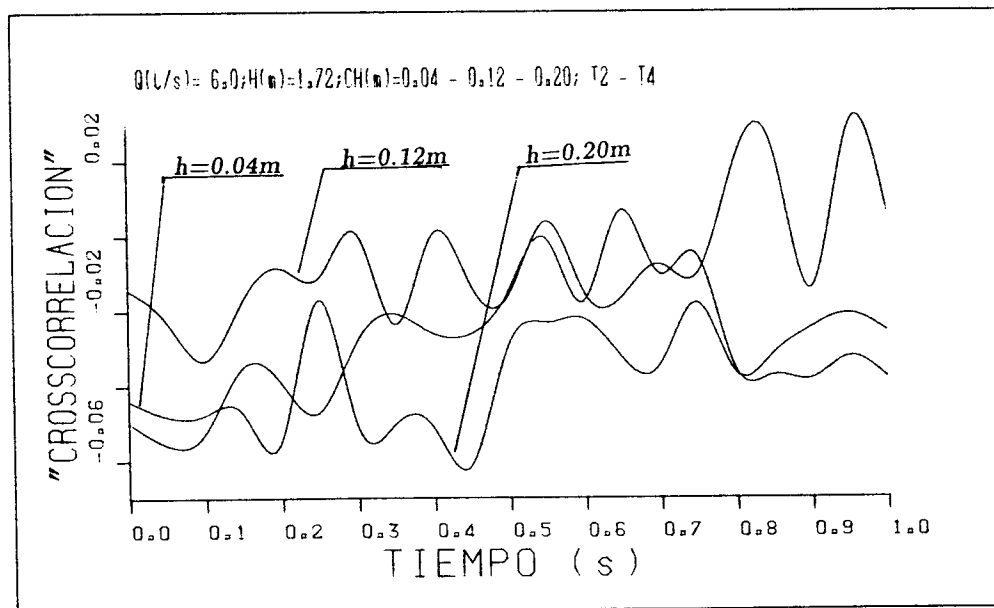


(b)

Figura 5.30 (a) Autocorrelaciones en el punto de estancamiento y (b) Crosscorrelaciones de las fluctuaciones de presión, entre los puntos de estancamiento y aguas arriba.  $Q = 6/s$ ;  $h = 0.04 - 0.12 - 0.20\text{m}$



(a)



(b)

**Figura 5.31** Crosscorrelaciones de las fluctuaciones de presión (a) Entre los puntos de estancamiento y aguas abajo y (b) Entre los puntos de estancamiento y a la derecha.  $Q = 6/s$ ;  $h = 0.04 - 0.12 - 0.20\text{m}$



## 5.6 Análisis de las presiones en el dominio de la frecuencia

Una vez que hemos realizado un análisis general del campo de presiones en el dominio del tiempo, a continuación realizaremos un análisis de las fluctuaciones de presión en el dominio de la frecuencia.

Este análisis lo realizamos tanto en la forma univariante (densidades espectrales en el punto de estancamiento), así como en la forma multivariante (coherencia y fase de las densidades espectrales cruzadas, entre los puntos de estancamiento, aguas arriba, aguas abajo y a la derecha).

### 5.6.1 Densidades espectrales univariantes en el punto de estancamiento

Tal como se expuso en el capítulo 3, la función de densidad espectral de las fluctuaciones de presión permite conocer la distribución en frecuencias de la energía del movimiento de fluctuación.

El área bajo la curva de la densidad espectral con respecto al eje de frecuencias  $[S * d\omega]$ , representa la varianza de la presión en ese intervalo de frecuencias  $\{\omega, \omega + d\omega\}$ , o lo que es lo mismo, la raíz cuadrática media de las fluctuaciones de presión  $[\sqrt{P'^2}]$ .

En el presente estudio se obtuvieron las densidades espectrales univariantes en el punto de estancamiento, para las diferentes alturas de colchón de agua y los tres caudales ensayados.

En la figura 5.32a, se indican las densidades espectrales para un caudal de  $Q=3l/s$  y alturas de colchón de agua  $h=0, 2, 4, 8, 12, 16$  y  $20cm$ . En la figura 5.32d, se indican las mismas densidades espectrales, pero en coordenadas semilogarítmicas, en donde se puede observar que las densidades espectrales disminuyen rápidamente y tienden progresivamente a desaparecer. Se observa que la curva de densidad espectral máxima, corresponde a un colchón de altura  $h=2cm$ . Por tanto para este colchón la energía es máxima (existe un mayor grado de turbulencia).

En la figura 5.32b, se indican las densidades espectrales para un caudal de  $Q=6l/s$  y alturas de colchón de agua  $h=0, 4, 8, 12, 16, 20$  y  $25cm$ . En la figura 5.32e, se indican estas densidades espectrales en coordenadas semilogarítmicas. Se observa que la curva de densidad espectral máxima, corresponde a un colchón de altura  $h=4cm$ .

En la figura 5.32c, se indican las densidades espectrales para un caudal de  $Q=8l/s$  y alturas de colchón de agua  $h=0, 4, 8, 12, 16, 20$  y  $25cm$ . En la figura 5.31f, se indican las mismas densidades espectrales en coordenadas semilogarítmicas. Se observa que la curva de densidad espectral máxima, corresponde a un colchón de altura  $h=8cm$ .

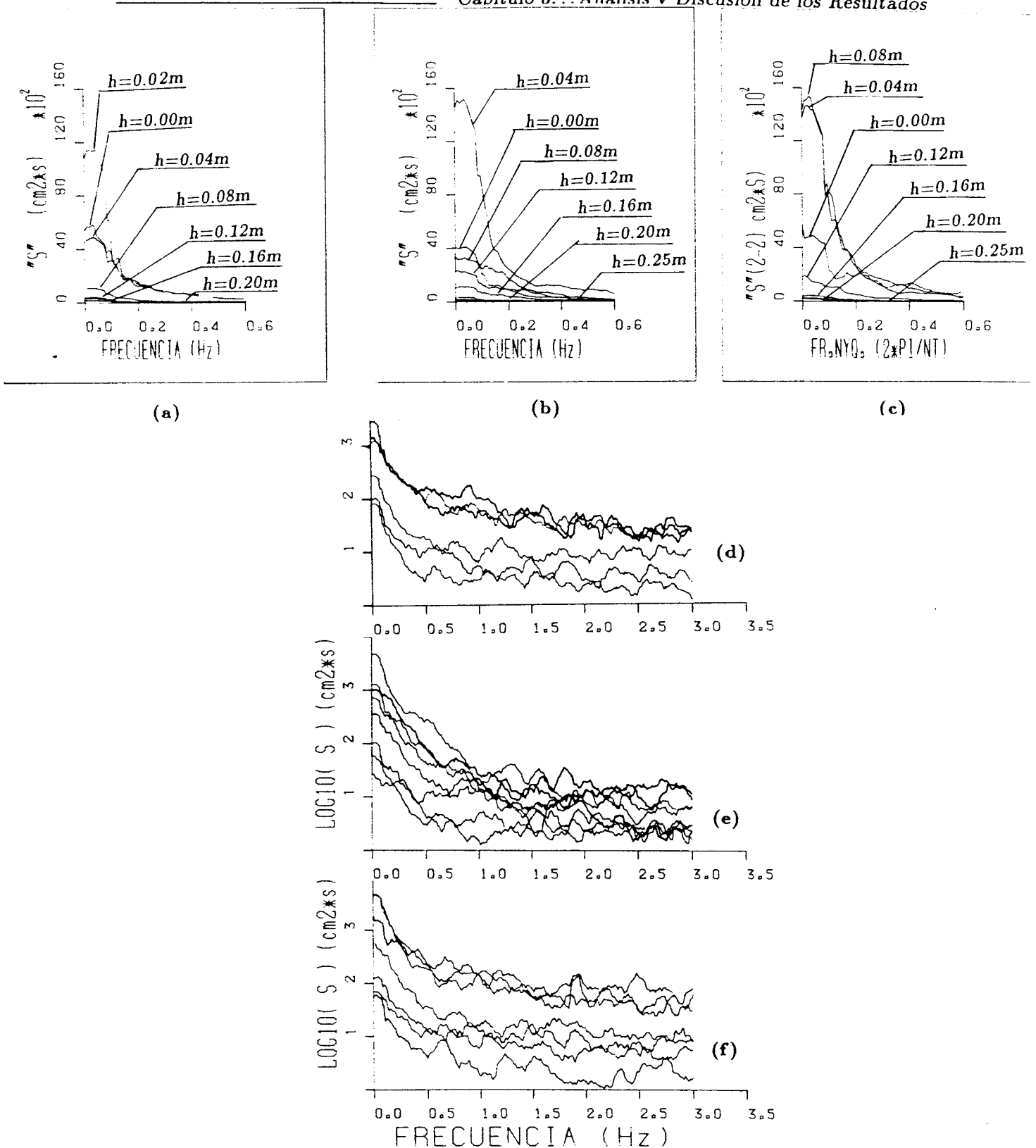
El hecho de que las curvas con densidades espectrales máximas, no correspondan al caso de impacto directo ( $h=0cm$ ), confirma que las máximas fluctuaciones de presión se producen en pequeños colchones, tal como fue indicado en el apartado 5.4. Ello indica que la existencia de un pequeño colchón de agua facilita el desarrollo de un mayor grado de turbulencia.

En todos los gráficos de las densidades espectrales, se puede observar el efecto de la altura del colchón de agua, traduciéndose en una disminución de la varianza (área de la curva de la densidad espectral), cuando el colchón aumenta. Ello muestra, como cabía esperar, que el colchón de agua actúa como elemento uniformizador de la presión.

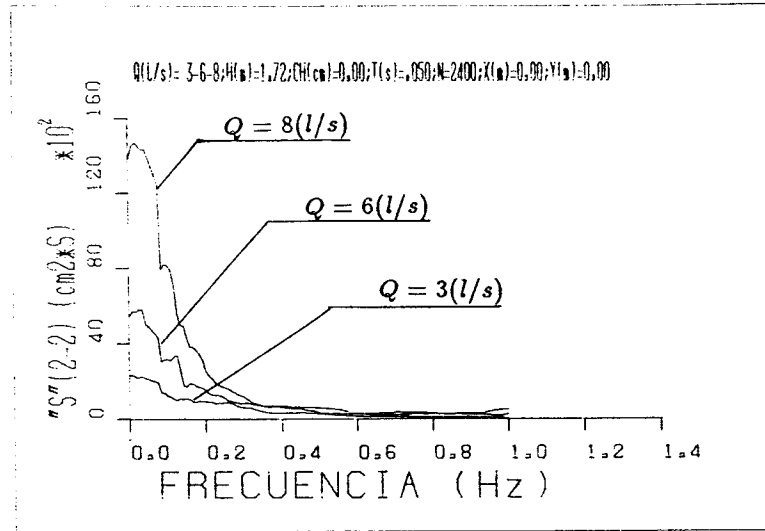
Otro aspecto importante a destacar es que en todos los casos ensayados, la energía asociada a las fluctuaciones de presión es despreciable para frecuencias superiores a  $0.3\text{Hz}$ . Es decir, en nuestro análisis, solamente se muestran importantes desde un punto de vista práctico las “fluctuaciones de presión macroturbulentas”. Debemos recordar, que las frecuencias propias de las presas bóveda se encuentran en el orden de  $1\text{-}3\text{Hz}$  [72], aunque existen casos en que estas frecuencias propias se encuentran por debajo de  $1\text{Hz}$  [23].

En la figura 5.33a se indican las densidades espectrales en el caso del impacto directo ( $h=0\text{cm}$ ), para los tres caudales ensayados. Se puede observar el fuerte aumento de la varianza, a medida que aumenta el caudal.

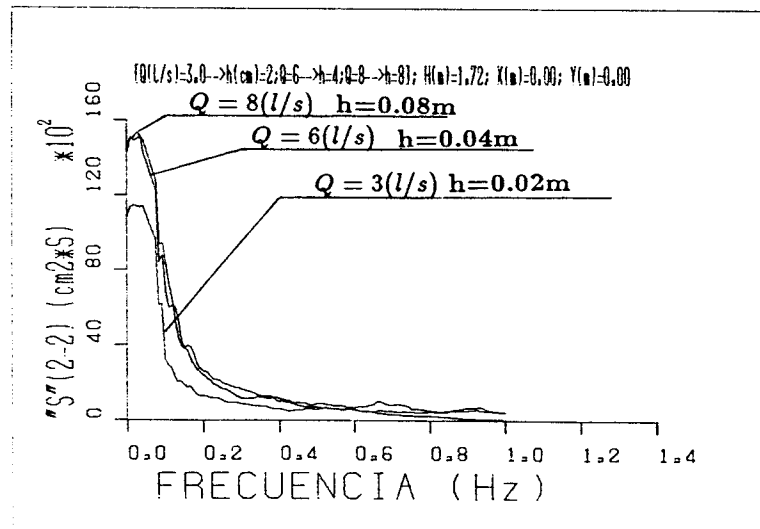
En la figura 5.33b se indican las densidades espectrales correspondientes a la altura de colchón que da la densidad espectral máxima para un caudal dado. Se puede observar que la varianza varía ligeramente de una curva a otra.



**Figura 5.32** Densidades espectrales univariantes, de las fluctuaciones de presión en el punto de estancamiento, para diferentes alturas de colchón de agua: (a) y (d) Caudal 3l/s; (b) y (e) Caudal 6l/s; (c) y (f) Caudal 8l/s



(a)



(b)

Figura 5.33 Densidades espectrales univariantes, de las fluctuaciones de presión en el punto de estancamiento, para los tres caudales ensayados: (a) Impacto directo ( $h=0\text{cm}$ ); (b) Densidades espectrales máximas

### 5.6.2 Densidades espectrales multivariantes

Las densidades espectrales cruzadas o multivariantes, se determinan a través de las funciones coherencia y fase entre los puntos de estancamiento T2, aguas arriba T1, aguas abajo T3 y a la derecha T4. En total seis posibles combinaciones: T1-T2, T1-T3, T1-T4, T3-T3, T2-T4 y T3-T4.

Según se expuso en el capítulo 3, la coherencia nos muestra el grado de correlación (de 0 a 1) existente entre las funciones de densidad espectral referidas a dos puntos. La fase nos compara la evolución de las presiones en dos puntos. Según sea su valor (que puede variar de  $-180^{\circ}$  a  $180^{\circ}$ ) nos indica que las presiones crecen o disminuyen al unísono ( $0^{\circ}$ ), o que cuando la primera crece la otra disminuye ( $+/- 180^{\circ}$ ),

En relación a los 4 puntos de medida, se calcularon 54 coherencias con sus correspondientes fases, para los tres caudales ensayados ( $Q = 3 - 6 - 8l/s$ ) y tres colchones de agua ( $h = 4 - 12 - 20cm$ ) (ver figuras 5.34 a 5.42).

A partir del análisis univariante se concluyó que las densidades espectrales son despreciables para frecuencias mayores que  $0.30Hz$ . Por lo tanto, el cálculo de las coherencias y fases se representa hasta esta frecuencia.

En las figuras 5.43 a 5.45, se muestra la frecuencia más alta para cada colchón de cada caudal ensayado. Como característica general se debe notar que las coherencias en frecuencias menores de  $0.10Hz$  se mantienen prácticamente constantes, para a partir de este valor caer bruscamente a valores de baja coherencia.

Podemos observar en la figura 5.43 que para el caudal de  $3l/s$ , las mayores coherencias se obtuvieron para el colchón de  $20cm$  y entre los puntos de aguas abajo y a la derecha del punto de estancamiento (T3-T4). La siguiente coherencias más alta corresponde a los puntos de aguas arriba y aguas abajo del punto de estancamiento (T1-T3) y colchón de  $12cm$ . Por último, la siguiente coherencia corresponde al punto de aguas arriba y el punto de estancamiento (T1-T2) y colchón de  $4cm$ .

Si analizamos las fases correspondientes a (T3-T4) Y (T1-T3), observamos que prácticamente son las mismas ( $\sim 0^{\circ}$ ), lo que quiere decir que las presiones aumentan y disminuyen en estos puntos a la vez y en el mismo sentido. En cambio, la fase entre (T1-T2) es negativa para bajas frecuencias, lo que quiere decir que cuando aumenta la presión en el punto de estancamiento, disminuye en el punto de aguas arriba. Lo contrario ocurre para frecuencias mayores.

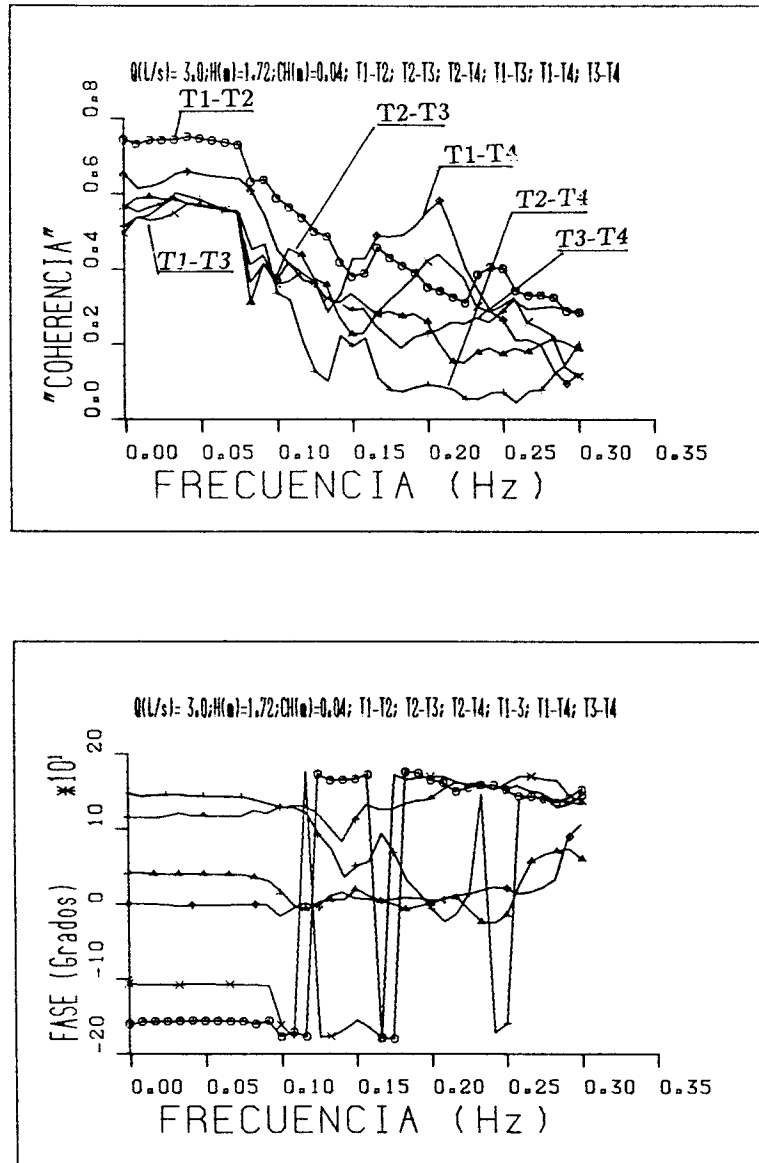


Figura 5.34 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=3l/s$  y  $h=4cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

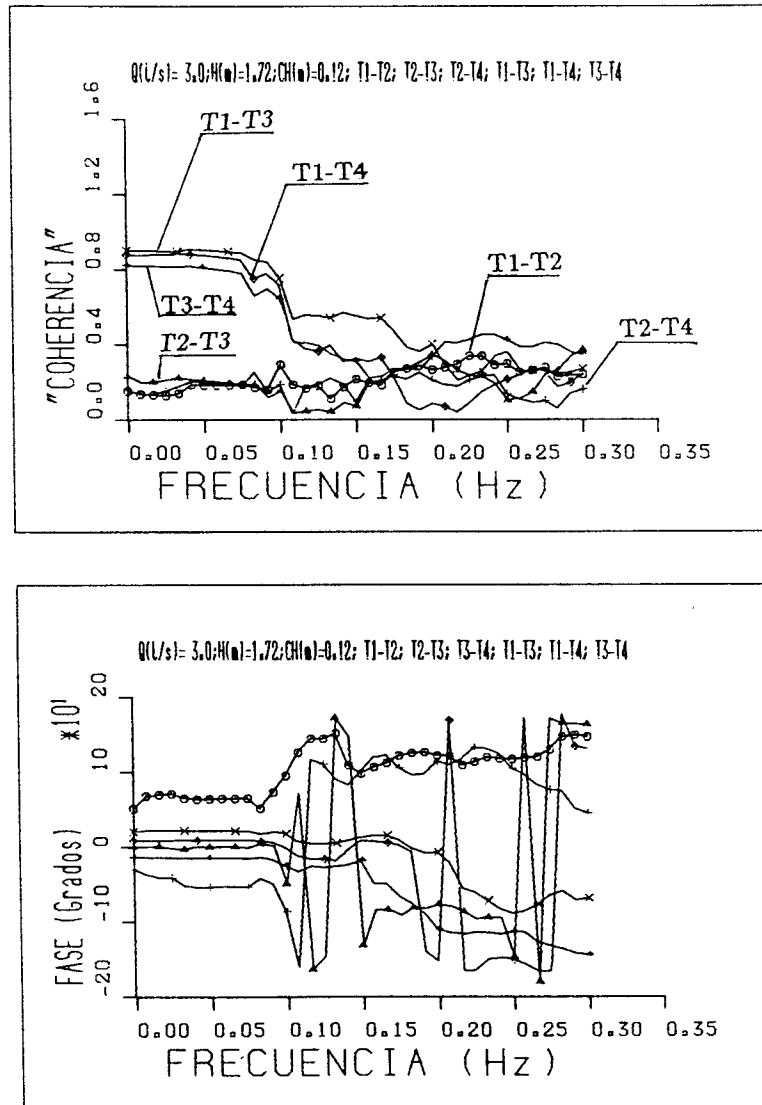


Figura 5.35 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=31/s$  y  $h=12cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

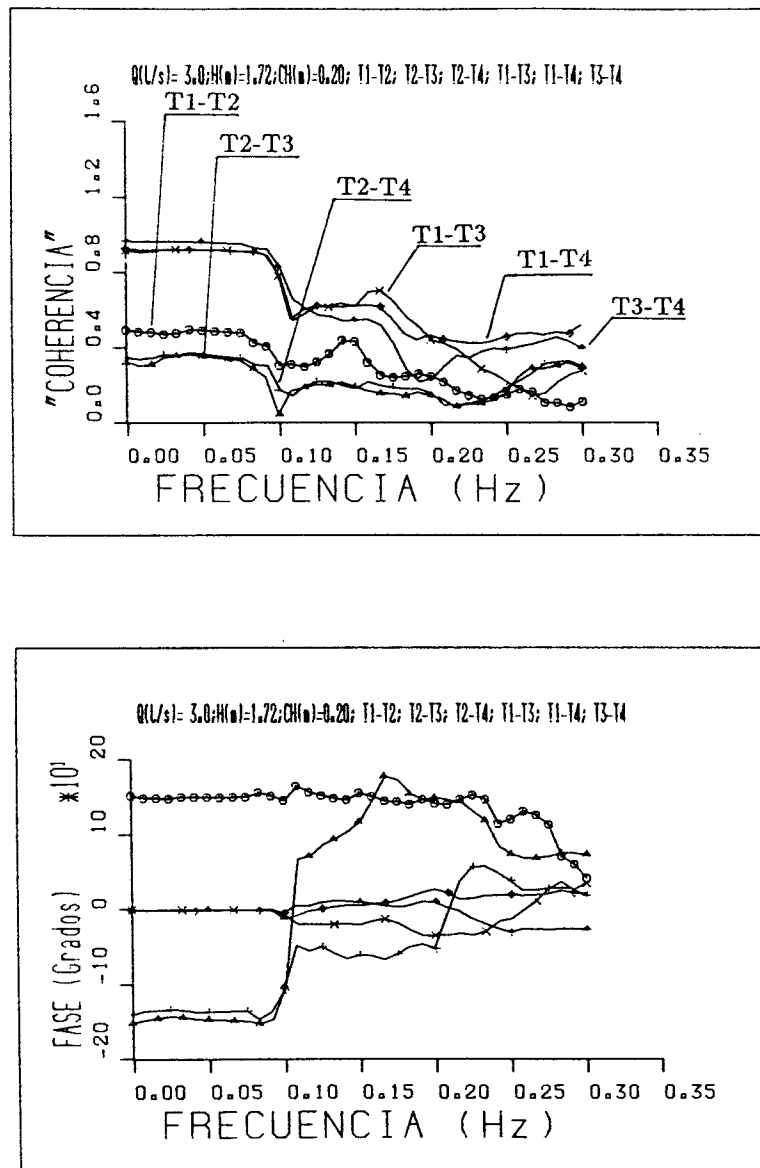


Figura 5.36 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=3l/s$  y  $h=20cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases



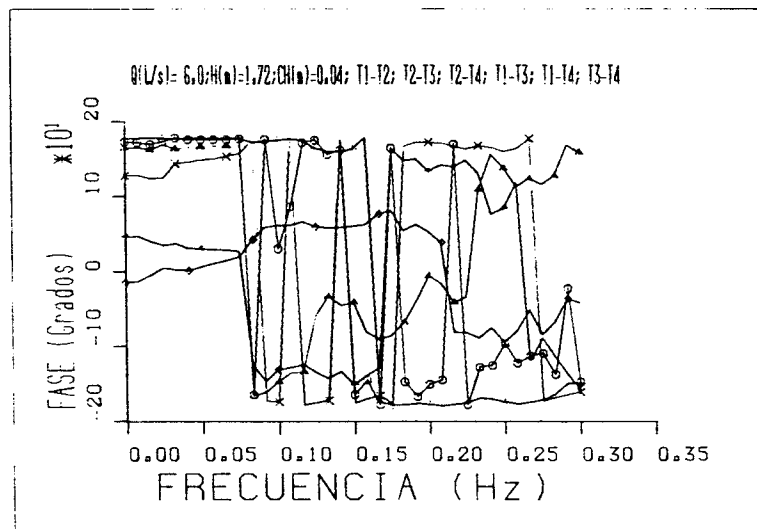
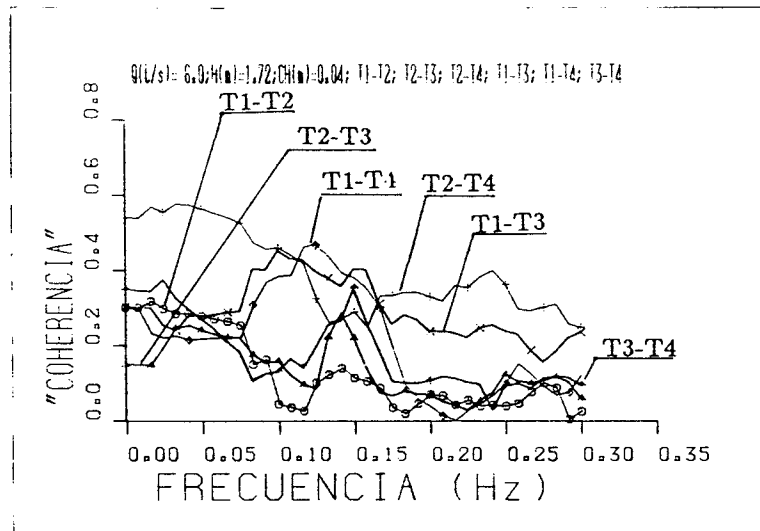


Figura 5.37 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=6l/s$  y  $h=4cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

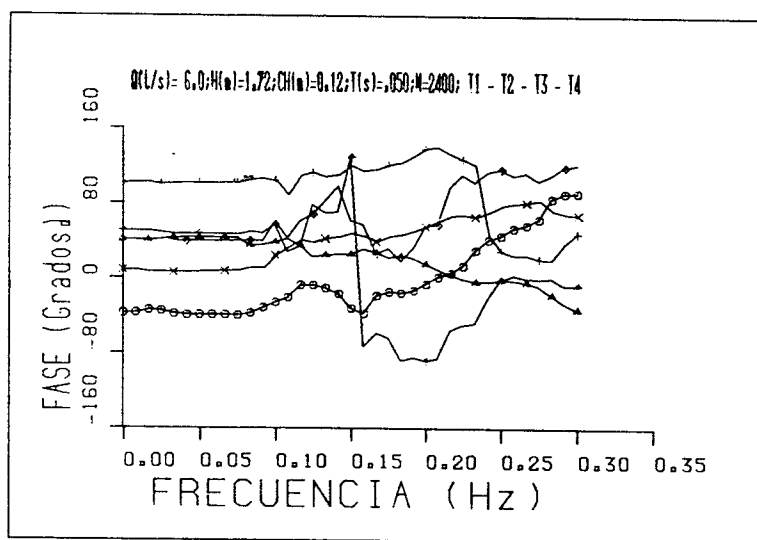
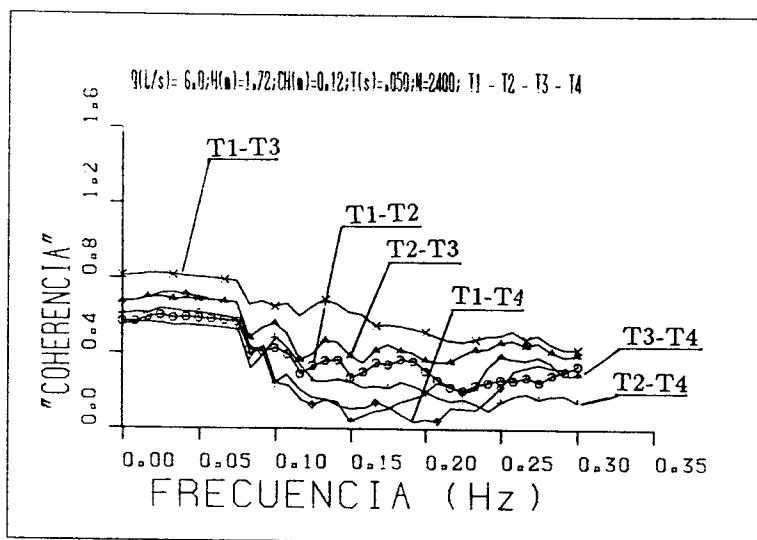


Figura 5.38 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=6l/s$  y  $h=12cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

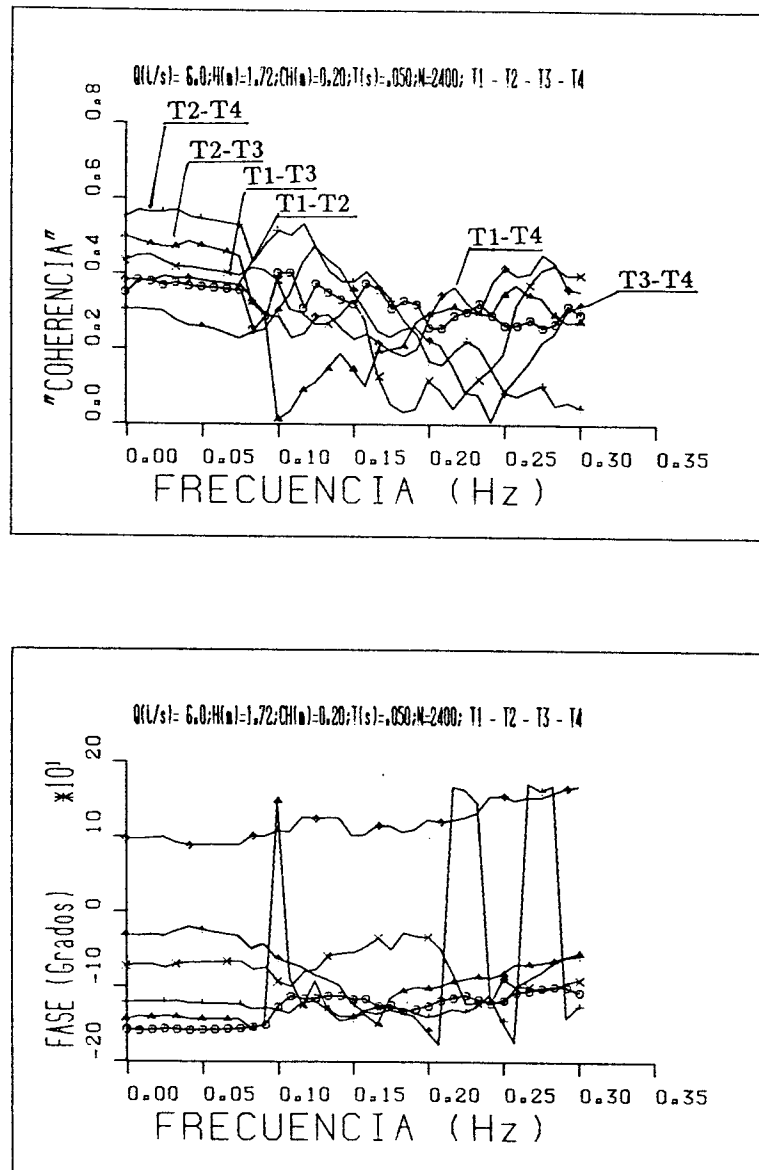


Figura 5.39 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=6l/s$  y  $h=20cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

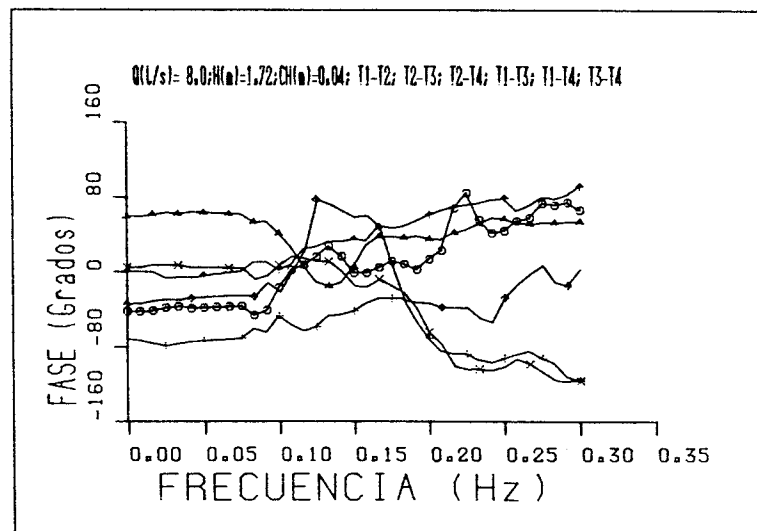
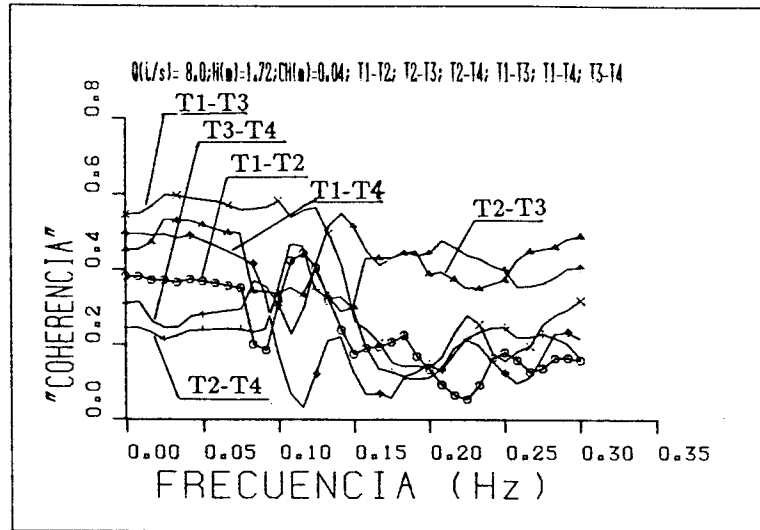


Figura 5.40 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=81/s$  y  $h=4cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

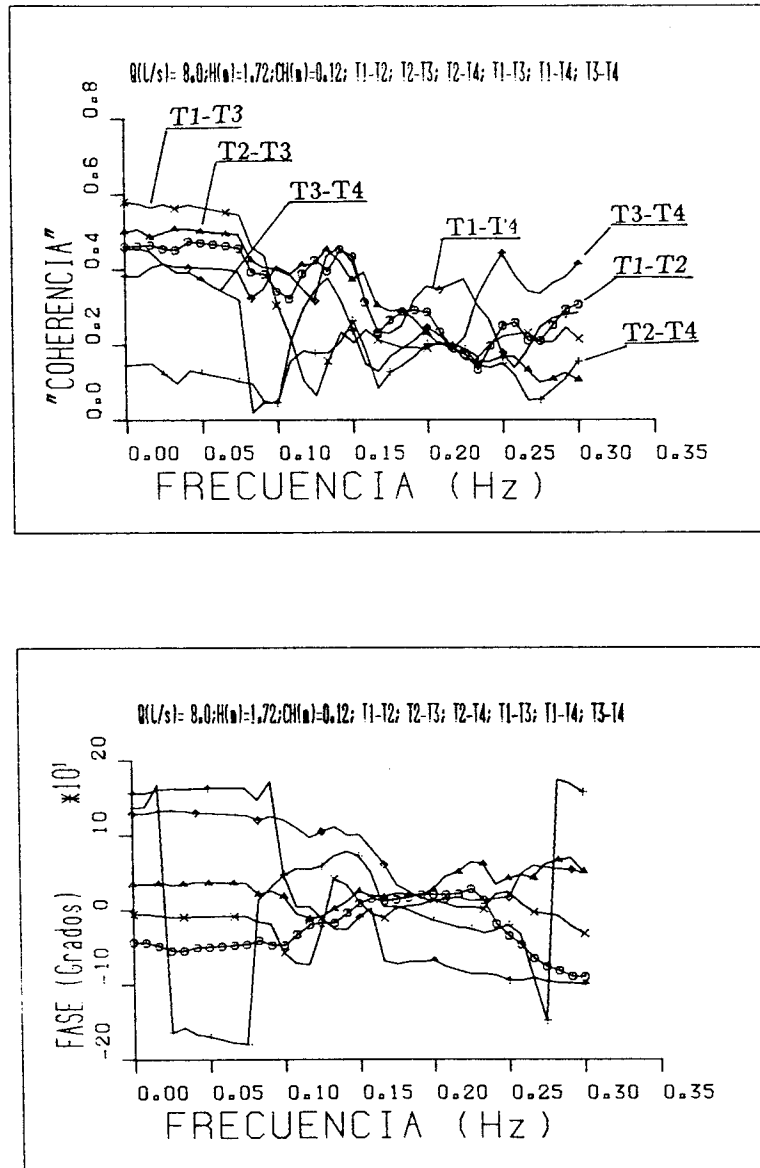


Figura 5.41 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=8l/s$  y  $h=12cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

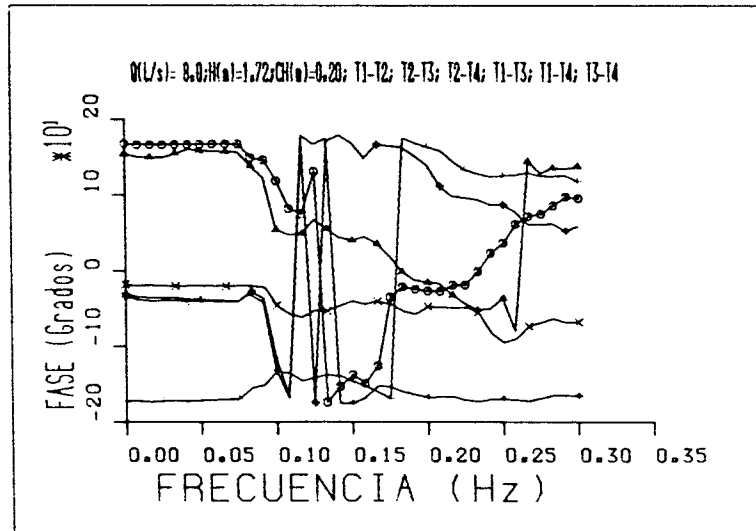
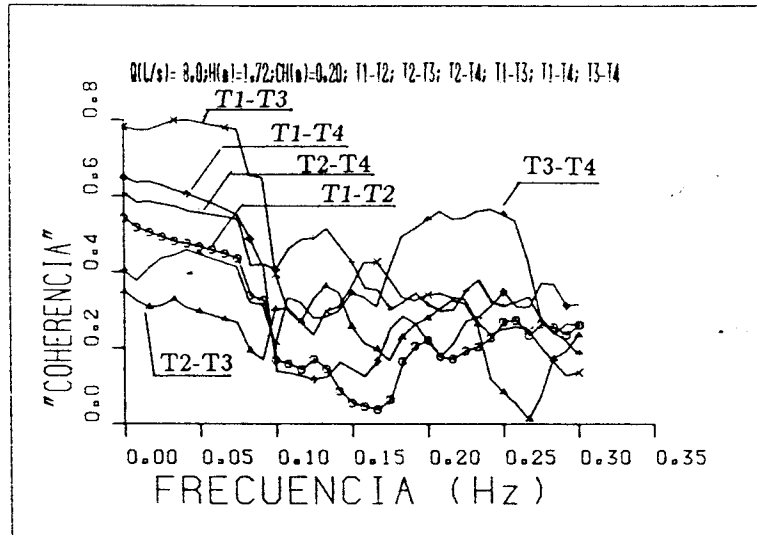


Figura 5.42 Densidades espectrales multivariantes para un  $Q=81/s$  y  $h=20cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

En la figura 5.44 observamos que al aumentar el caudal a  $6l/s$ , los puntos (T3-T4) y (T1-T2) han dejado de estar correlacionados; sin embargo, los puntos de aguas arriba y aguas abajo (T1-T3) y para la misma altura de colchón de agua ( $h = 12cm$ ), aunque han disminuido ligeramente en su coherencia (de 0.9 a 0.8), son los más correlacionados a bajas frecuencias para este caudal. La fase es semejante a cero, por lo tanto el esquema de flujo para estos dos puntos permanece en igual forma.

Los puntos de estancamiento y la derecha del mismo (T2-T4), aparecen en este caudal con una coherencia semejante a 0.5 tanto para los colchones de 4 y 20cm. Las fases sin embargo varían totalmente, pasando de un valor positivo ( $\sim 180^\circ$ ) para el colchón de 4cm, a un valor negativo ( $\sim -120^\circ$ ) para el colchón de 20cm. Esto nos indica una inversión en el sentido de las presiones.

En la figura 5.45 se puede observar que para el caudal de  $8l/s$ , los puntos de aguas arriba y aguas abajo (T1-T3) son los más correlacionados para todas las alturas de colchón de agua. Las fases son prácticamente las mismas y tienen un valor  $\sim 0^\circ$  para bajas frecuencias. Las coherencias van aumentando a medida que se aumenta el colchón de agua, alcanzando el valor de 0.80 para el colchón de 20cm.

En la figura 5.46, se presentan un resumen de las coherencias máximas con sus correspondientes fases de cada caudal ensayado. Así vemos que para el caudal de  $3l/s$ , las máximas coherencias se obtuvieron en los puntos de aguas abajo y a la derecha del punto de estancamiento (T3-T4); las fases correspondientes para bajas frecuencias son de  $0^\circ$ . Esto se obtuvo para el colchón de 20cm.

Para los caudales de  $6/s$  y  $8l/s$ , las coherencias máximas se obtienen en los puntos de aguas arriba y aguas abajo (T1-T3), con alturas de colchón de 12 y 20cm, respectivamente. Las fases para bajas frecuencias son prácticamente constantes y se sitúan en  $5^\circ$  y  $-20^\circ$ , para cada caudal.

En la figura 5.47 se presenta la evolución de las coherencias para los tres caudales ensayados ( $3 - 6 - 8l/s$ ), los cuatro puntos de medida (T1-T2-T3-T4) y las diferentes alturas de colchón de agua ( $4 - 12 - 20cm$ ).

Para el caudal de  $3l/s$  podemos observar que existe una agrupación muy clara en los valores de la coherencia para las parejas de puntos medidos. Así, todas las combinaciones con el punto de estancamiento (T1-T2; T2-T4 y T2-T3) poseen menor coherencia que las restantes parejas de puntos.

Para valores de  $h/B < 10$ , caso de chorro corto (ver capítulo 2), todos los puntos tienen un semejante grado de coherencia (entre 0.5 y 0.75). En el intervalo  $[10 < h/B < 20]$  las parejas formadas con el punto de estancamiento (T1-T2; T2-T3 y T2-T4) disminuyen notablemente su coherencia; en cambio, las parejas restantes aumentan de forma importante el grado de coherencia.

Para valores  $h/B > 20$  los puntos emparejados con el punto de estancamiento, aumentan su coherencia, quedando no obstante por debajo de 0.4. Las otras parejas de puntos siguen aumentando la coherencia y alcanzan un valor semejante a 0.8.

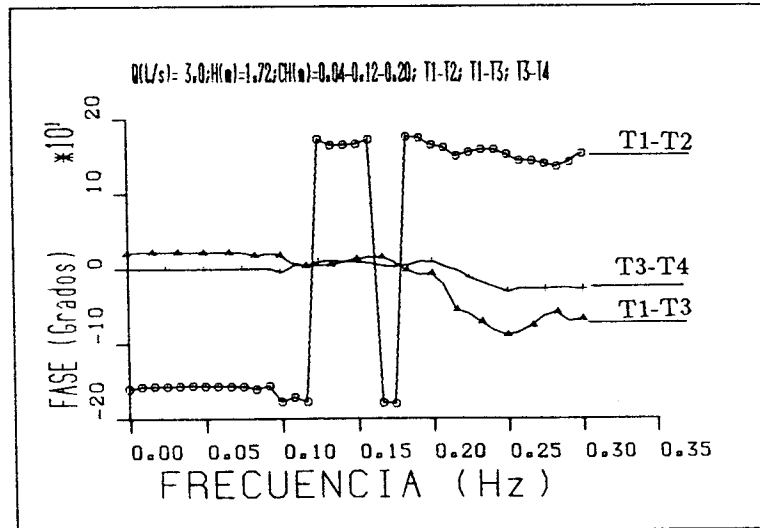
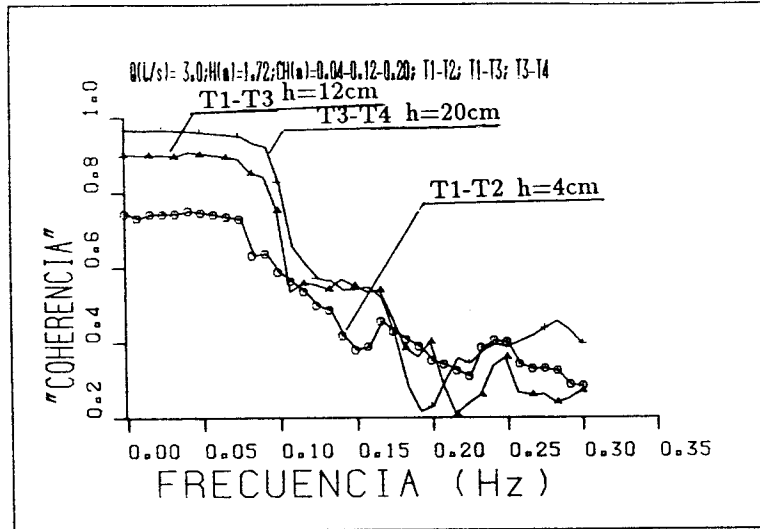


Figura 5.43 Coherencias máximas y fases correspondientes para un  $Q=3l/s$  y  $h=4-12-20$ cm. (a) Coherencias y (b) Fases



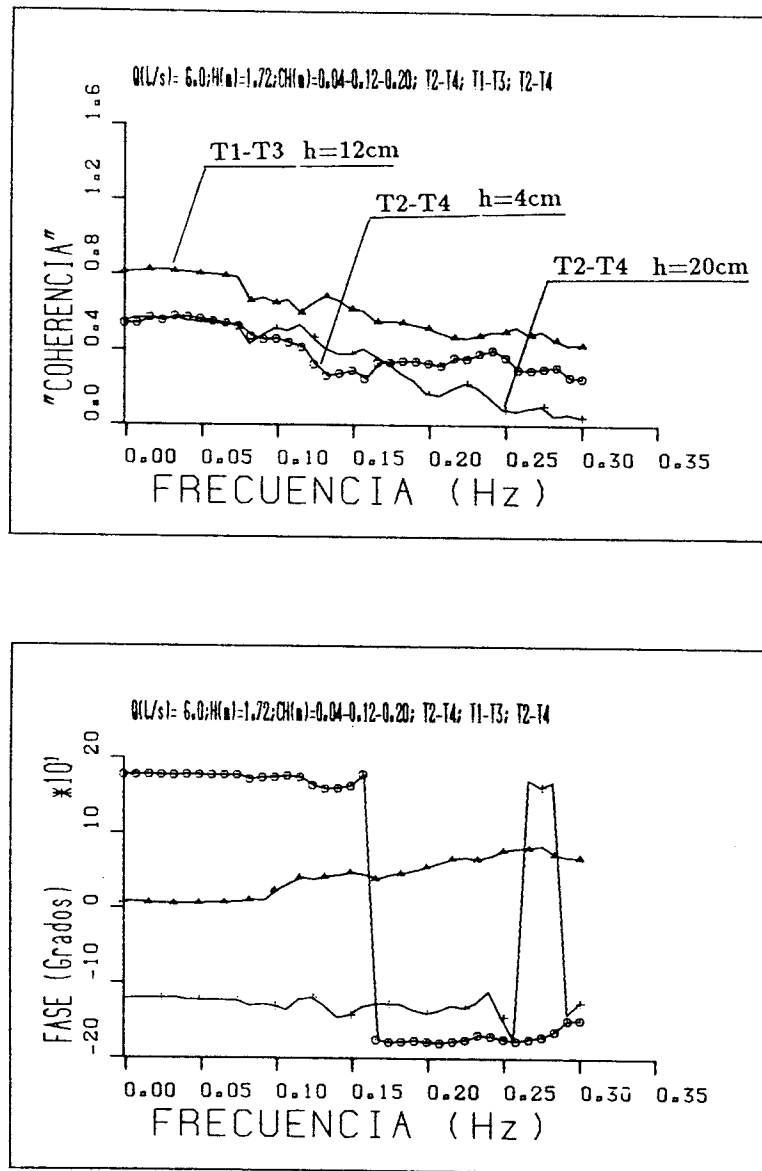


Figura 5.44 Coherencias máximas y fases correspondientes para un  $Q=6l/s$  y  $h=4-12-20cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

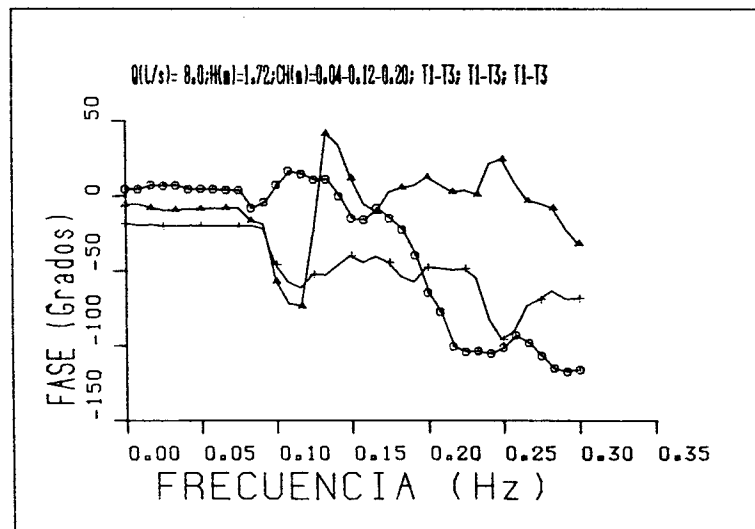
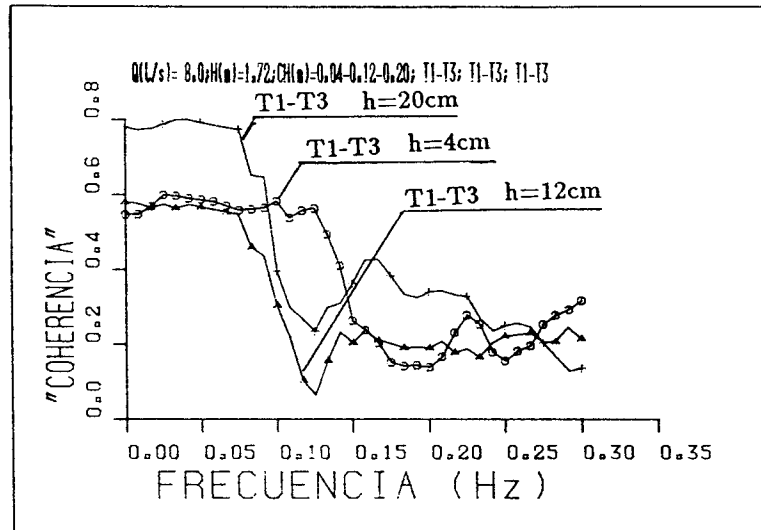


Figura 5.45 Coherencias máximas y fases correspondientes para un  $Q=8l/s$  y  $h=4-12-20\text{cm}$ . (a) Coherencias y (b) Fases

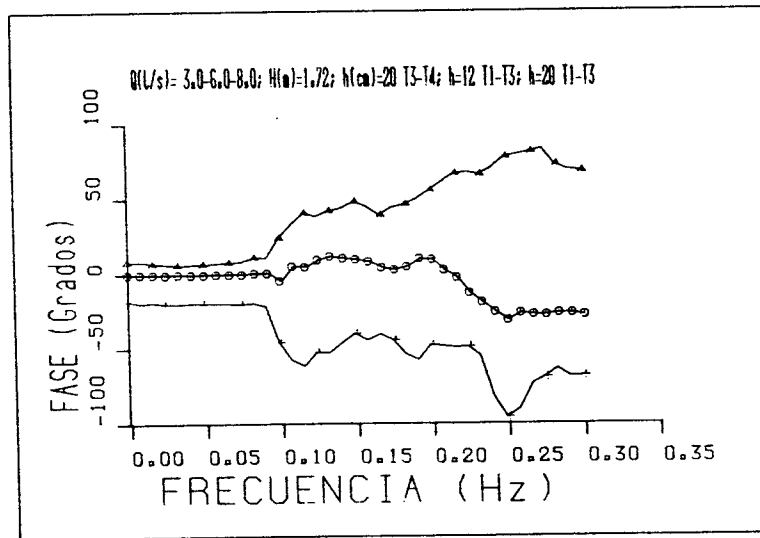
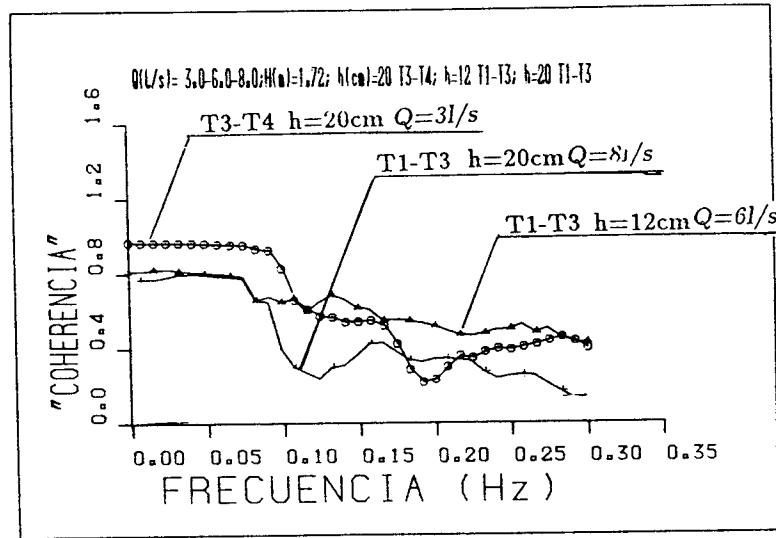


Figura 5.46 Coherencias máximas y fases correspondientes para  $Q=3-6-8l/s$  y  $h=4-12-20cm$ . (a) Coherencias y (b) Fases

El interés de análisis de la fase se da en el caso de alta coherencia. Si se observa el intervalo posible de diseño para el caudal de  $3l/s$  [ $16 < h/B < 24$ ] (ver figura 5.25), en las parejas de puntos con baja coherencia (T1-T2; T2-T3 y T2-T4) no se necesita analizar sus fases, ya que las fluctuaciones de presión pueden considerarse independientes. En cambio, las parejas con alta coherencia (T1-T3; T1-T4 y T3-T4) a más de las magnitudes de las fluctuaciones de presión, debemos considerar sus fases. Así vemos que la pareja (T1-T4) con fase de  $0^\circ$ , indica una considerable sincronización de las fluctuaciones de presión.

La pareja (T1-T3) tiene una fase de  $+20^\circ$  indicándonos por tanto que las fluctuaciones de presión no son totalmente sincrónicas, pero siguen comportamientos en el mismo sentido, es decir, cuando sube la presión en T1, también sube la presión en T3 aunque un poco desfasado, y viceversa. A la pareja (T3-T4) le corresponde una fase negativa de  $-15^\circ$ . Esto nos indica al igual que en el caso anterior, que no existe sincronización total y además, las fluctuaciones de presión se desfasan en sentido opuesto; cuando sube la presión en T3, sube la presión en T4 en forma desfasada, y viceversa.

Con respecto al caudal de  $6l/s$  (figura 5.47b), observamos que no se logra una agrupación clara de coherencias, como en el caso del caudal de  $3l/s$ . Para relaciones de  $h/B < 10$  (caso de chorro corto), todas las parejas de puntos poseen una baja coherencia, a excepción de la pareja (T2-T4), que posee un valor de 0.58 que, aunque bajo, es relativamente mayor. Es curioso que la pareja (T2-T4) tenga una coherencia constante, indicándonos que para este caudal de  $6l/s$ , sea prácticamente independiente de la altura del colchón de agua. Esta última observación podrían responder a los errores de estimación.

Para relaciones de [ $10 < h/B < 16$ ], la coherencia aumenta en todas las parejas de puntos (a excepción de T2-T4). Para  $h/B > 16$ , las coherencias disminuyen en todas las parejas, hasta llegar a ser inferiores a 0.5.

Para el posible rango de diseño del caudal de  $6l/s$  [ $16 < h/B < 24$ ] (ver figura 5.25), las fluctuaciones de presión en todas las parejas de puntos pasan de tener un razonable nivel de sincronización a un bajo nivel. Todos los comentarios generales realizados para el caudal de  $3l/s$  son válidos para este caso.

En el caudal de  $8l/s$  (ver figura 5.47c), se observa que parece existir nuevamente un cierto grado de agrupamiento en las coherencias, pero sin llegar a ser como el obtenido en el caudal de  $3l/s$ . En relaciones  $h/B < 10$ , las parejas poseen coherencias inferiores a 0.6. Al aumentar la relación  $h/B$ , la mitad de las parejas aumentan su coherencia. Para el posible intervalo de diseño del caudal de  $8l/s$  [ $12 < h/B < 18$ ] (ver figura 5.25), todas las parejas contienen una coherencia inferior a 0.6; a excepción de T1-T3 que alcanza un valor de 0.65. Por último, todos los comentarios generales realizados para el caudal de  $3l/s$ , se aplican por igual a este caudal.

Podemos concluir que la herramienta presentada es muy útil en el estudio de los cuencos disipadores de energía, ya que a pesar de las limitaciones del equipo utilizado, se ha obtenido información muy valiosa. Para una descripción más detallada del fenómeno sería necesario realizar más ensayos en un modelo de mayores dimensiones, con un amplio rango de caudales y puntos de medida más cercanos.

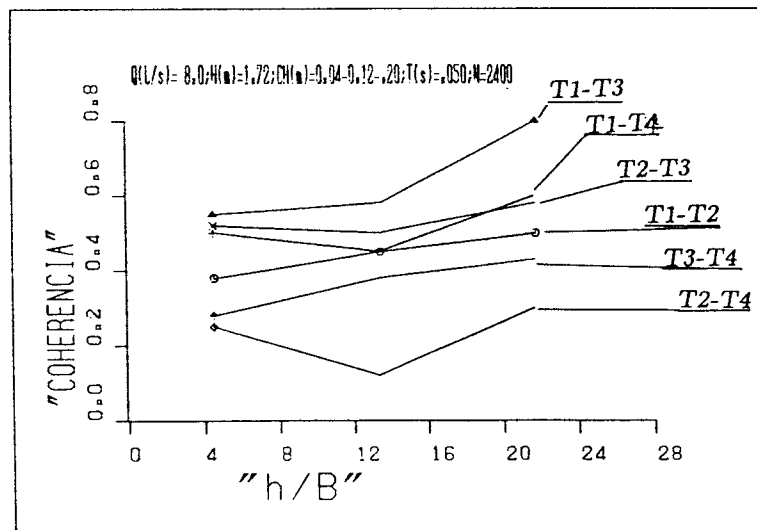
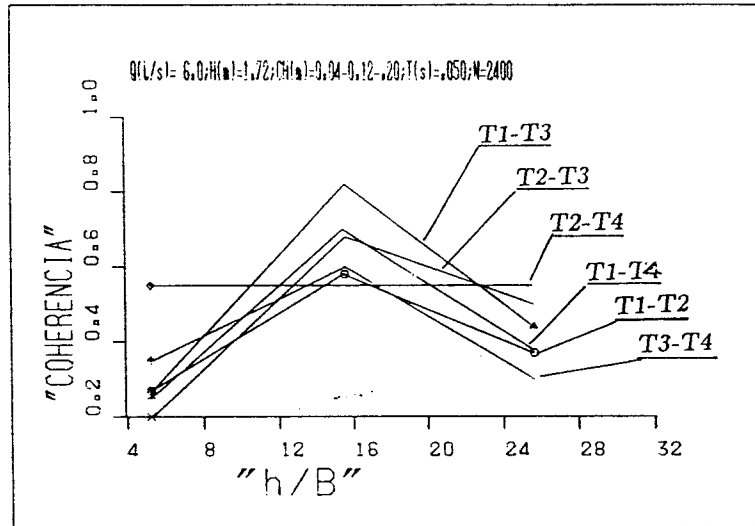
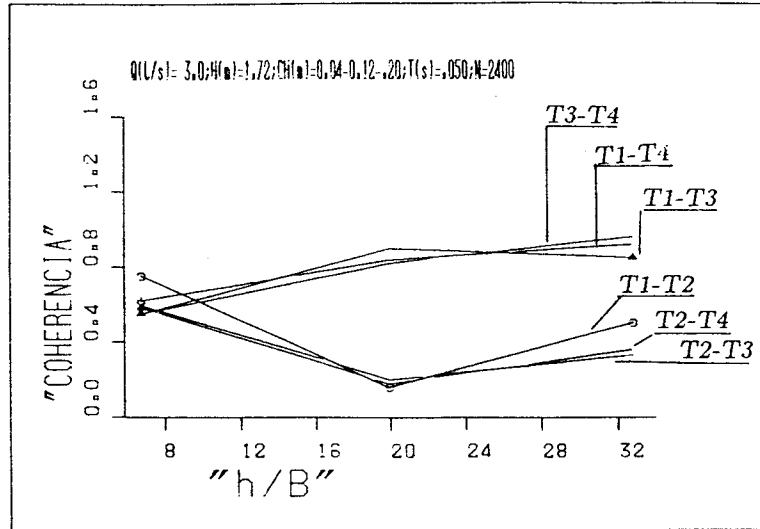


Figura 5.47 Coherencias de los puntos medidos en la losa del cuenco disipador de energía para alturas de colchón de agua ( $h=4-12-20\text{cm}$ ): (a)  $Q=3\text{l/s}$ ; (b)  $Q=6\text{l/s}$  y (c)  $Q=8\text{l/s}$

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES, APORTACIONES Y FUTUROS DESARROLLOS

#### 6.1 Conclusiones y aportaciones

Tal como ya se indicó en el apartado 1.5, los objetivos que se pretenden alcanzar con el trabajo desarrollado en esta tesis son:

- Diseñar, poner a punto y contrastar una metodología experimental y numérica, para el estudio del campo de presiones en los disipadores de energía hidráulica y una aplicación al vertido libre por coronación en presas bóveda.
- Proponer y comprobar, en una primera aproximación, formulaciones para el análisis del campo de presiones en la solera del cuenco.

Las principales aportaciones y conclusiones de este trabajo son:

1.- Se ha realizado una revisión del estado actual del conocimiento del vertido libre sobre un cuenco. Particularmente se ha incidido en el análisis de las presiones sobre la solera del cuenco amortiguador en el caso de un vertido libre por coronación en presas bóveda. Ello ha puesto en evidencia la necesidad de profundizar en su estudio.

2.- Se ha diseñado, construido y puesto a punto una metodología experimental para la medición y registro de las fluctuaciones de presión que se presentan en la solera del cuenco, cuando se analiza el fenómeno en modelo reducido.

Se ha desarrollado y puesto a punto un software para la adquisición y registro de la información proporcionada por los transductores de presión.

3.- Se ha diseñado, desarrollado y puesto a punto una metodología numérica al objeto de tratar la información experimental y caracterizar el campo de presiones creado en la solera del cuenco. Dada la naturaleza aleatoria de dicho campo se ha utilizado el análisis estocástico. Este análisis se realiza en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

En el análisis en el dominio del tiempo se estudia la distribución de presiones en las proximidades del punto de estancamiento. Se obtienen las presiones medias, máxima y mínima en función de la altura del colchón de agua y del caudal vertido. Mediante las curvas de densidad y distribución de probabilidad se hace una descripción estadística del campo de presiones. Finalmente se analiza el grado de correlación espacial y temporal de las presiones en diferentes puntos de la solera.

El estudio en el dominio de la frecuencia se lleva a cabo haciendo uso de técnicas convencionales del análisis espectral multivariado. Mediante la función de densidad espectral de las fluctuaciones de presión se determina la distribución en frecuencias de la energía del movimiento de fluctuación. El diferente comportamiento que presentan los puntos de la solera es analizado mediante las funciones de coherencia y fase. El estudio en el dominio de la frecuencia ayuda a conocer las características del flujo y su evolución en el cuenco.

4.- Al objeto de contrastar la metodología propuesta se realizaron una serie de ensayos. El tratamiento de la información obtenida dió los siguientes resultados:

4.1 La distribución de presiones instantáneas en un punto se aproxima tanto más a la distribución normal cuanto mayor altura del colchón de agua exista.

4.2 Se ha comprobado que las máximas presiones en el punto de estancamiento se alcanzan para valores pequeños de altura de colchón de agua y no para el caso de impacto directo (caso de colchón nulo). Este fenómeno se puede explicar por el pequeño o nulo efecto de los pequeños colchones en la disipación de energía y por la facilidad que una cierta altura de colchón de agua ofrece al desarrollo de la turbulencia.

4.3 Se puede establecer una relación entre el valor de las fluctuaciones de presión y el parámetro altura del colchón/espesor de la lámina, a través de una familia de curvas que dependen del caudal vertido.

4.4 En base a medidas experimentales y a un análisis general se unifica las formulaciones propuestas por otros autores para la distribución de las presiones dinámicas medias en el punto de estancamiento y la zona de influencia. Se define en forma general dos familias de curvas exponenciales, en función de la altura del colchón y del ancho de influencia.

4.5 Las presiones dinámicas mínimas en el punto de estancamiento fueron siempre superiores a la atmosférica y muestran una cierta constancia para valores bajos de colchón de agua, para tender gradualmente al valor de la altura del colchón de agua.

4.6 Las presiones dinámicas máximas en el punto de estancamiento pueden ponerse en función de la relación: altura de colchón/calado crítico a la entrada del colchón. Esta relación empírica es de tipo potencial para valores altos del colchón, mientras que para valores bajos es de tipo parabólico.

4.7 Las presiones instantáneas en el punto de estancamiento mantienen un cierto grado de autocorrelación hasta aproximadamente  $1s$ , lo que nos indica que corresponden a ondas de presión de períodos largos. La autocorrelación disminuye a medida que aumenta la altura del colchón de agua. Las autocorrelaciones de los otros puntos de medida, disminuyen al valor cero de una forma rápida, lo que nos indica que estas presiones tienen un marcado carácter de ruido aleatorio. El análisis de las cross-correlaciones nos indica que existe una baja correlación espacial entre los puntos de medida. Esto se debe posiblemente a que la distancia entre los puntos de medición es relativamente grande.

En todos los casos ensayados, la energía asociada a las fluctuaciones de presión es despreciable para frecuencias superiores a  $0.3Hz$ .

4.8 Como resultado del análisis espectral se infiere que las presiones en los puntos emparejados con el punto de estancamiento tienen una baja coherencia, lo que indica que las fluctuaciones de presión se pueden considerar independientes. Para puntos diferentes del de estancamiento, las presiones tienen, comparativamente, coherencias más altas, especialmente, en caudales moderados y colchones reducidos, indicándonos por tanto una considerable sincronización de las fluctuaciones de presión en esos puntos.

## 6.2 Posibles futuros desarrollos

La metodología experimental y numérica propuesta en esta tesis, al ser de carácter general, constituye una herramienta de utilidad para el análisis del campo de presiones en cualquier tipo de estructura de disipación de energía hidráulica a pie de presa. En este sentido y teniendo en cuenta el estado actual del conocimiento, creemos de interés el profundizar en el estudio de la disipación de la energía de una lámina vertiente sobre un cuenco. En particular, cabe señalar la necesidad de establecer criterios de prediseño del cuenco que permitan conocer las características del campo de presiones en la solera y en la contrapresa, en función del caudal específico, de la altura de vertido y de las características geométricas del cuenco (longitud y altura de la contrapresa). Para ello, sería preciso construir un dispositivo experimental que permitiera la realización de ensayos con una amplia gama del valor de las variables antes citadas. Aplicando la metodología puesta a punto en esta tesis, podrían analizarse los registros de presiones obtenidos en dichos ensayos y obtener unos criterios de prediseño para los cuencos.

Otro aspecto que debería ser cuidadosamente analizado es el de los efectos de escala que se presentan al estudiar en modelo reducido el vertido libre. Estos efectos, debidos fundamentalmente a la aireación y emulsión, podrían ser analizados mediante la utilización de modelos a diferentes escalas y sería de gran interés el poder disponer de datos de campo correspondientes al prototipo.

Todo ello permitiría avanzar en el conocimiento del comportamiento hidráulico de los cuencos disipadores en el vertido libre por coronación de presas bóveda, de acuerdo con la necesidad expresada en 1987 por el boletín 58 de la ICOLD "Spillways for Dams" donde, en las páginas 83 y 88, se muestra la necesidad de una mayor investigación experimental con modelos y prototipos, con objeto de conocer las acciones a que se ve sometido el cuenco amortiguador.



## BIBLIOGRAFÍA

1. Abdul Khader M.H. and Elango K. "Turbulent pressure field beneath a hydraulic jump". Journal of Hydraulic Research, Delft, 1974, Vol.12, No.4, pp. 469-489.
2. Akbari M.E, Mittal M.k. and Pande P.k. "Pressure fluctuations on the floor of free and forced hydraulic jumps". International Conference on the Hydraulic Modelling of Civil Engineering Structures. Coventry, England, 1982. pp. 87-96.
3. Aki Schuichi "Jiyu rakka suimuyaku no mizu-kusshon koka mi kansuru kenkyu". Denryoku chuo kenkyujo hokoku.  
[ "Estudio de la eficiencia de los colchones de agua en relación a los chorros libres. Journal del Instituto de Investigación de las Centrales Hidroeléctricas", 1969.]
4. Albertson H. L., Dai Y. B., Jensen R. A. and Rouse H. "Diffusion of submerged jets". Transactions ASCE, Paper N0. 2409, Vol. 115, 1950.
5. Apostol, T. M. "Análisis Matemático", ed. castellana, Reverté, Barcelona 1969.
6. Arandjelović D. "Hydrodynamic loading of sill". Proceedings of the International Conference, Portoroz, Yugoslavia, 1984. pp. 1-85—1-97.
7. Arruda Camargo S.A. "Macroturbulencia de pressao em estruturas de dissipacao de energia por resalto hidráulico". XIII Seminario Nacional de Grandes Barragens. Río de Janeiro, Brasil, 1980, pp. 207-237.
8. Ash, R.B. and Gardner, M. F. "Topics in stochastic processes", Academic, New York, 1975.
9. Bakhmeteff B. A. and Feodoroff N. V. "Discussion on energy loss at the base of the overall", by Walter L. Moore; Transaction American of Civil Engineers. Vol. 108. pp. 1364-1373; 1943.

10. **Barcilon U. and Temes G.** "Optimum impulse response and the Van Der Maas function". *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. CT-19, pp. 336-342, July 1972.
11. **Batchelor, G. K.** "The theory of homogeneous turbulence". Cambridge University Press, New York, 1953.
12. **Beltaos Spyridon.** "Oblique impingement of plane turbulent jets". *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol.102, No.HY9, September, 1976. pp. 1177-1192.
13. **Beltaos S. and Rajaratnam N.** "Impinging circular turbulent jets". *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*. Vol.100, No.HY10, October, 1974. pp. 1313-1328.
14. **Blackman R.B. and Tukey J.W.** "The measurements of power spectra from the point of view of communications engineering". New York: Dover, 1959.
15. **Bowers C.E. and Tsai F.Y.** "Fluctuating pressures in spillway stilling basins". *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, Vol.95, HY6. 1969. pp. 2071-2079.
16. **Bribiesca J.S. and Vizcaino A.C.** "Turbulence effects on the lining of stilling basins". *Trans. of 11<sup>th</sup> Congress of ICOLD*, Vol.II, Q.41. Madrid, Spain. 1973. pp. 12-83.
17. **Brisbane T. and Karaki S.** "Stilling basin 3 hydraulic model study. Tarbela Dam Project. Indus River, Pakistán". Colorado State University, Engineering Research Center, May, 1979.
18. **Chan D.T.L, Lin T.J. and Kennedy J.F.** "Entrainment and drag forces of deflected jets". *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*. Vol.102, No.HY5, May, 1976. pp. 615-635.
19. **Cola Raffaele.** "Energy dissipation of a high-velocity vertical jet entering a basin". *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Association for Hydraulic Research Congress-Leningrado, USSR*, Vol.1, 1965.
20. **Cola Raffaele.** "Diffusione di un getto piano verticale in un bacino d'acqua d'altezza limitata". *L'Energia Elettrica-N.11-Novembre 1966*. pp. 649-667.
21. **Cooley J.W., Lewis L.A. and Welch P.D.** "The finite Fourier transform". *IEEE Trans. Audio Electroacust.*, Vol. Au-17, pp. 75-85, June 1969.
22. **Cooley J.W. and Tukey J.W.** "An algorithm for the machine calculation of Fourier series". *Math. Compu.*, 19, 1965. pp. 297-301.
23. **Cui Guang Tao...** "Gongba yiliu shuishe dui hechuang zuoyonghi ji qi yingxiang de yanjiu". *Shuli xuebao*, Beijing. (8) 1985, pp. 58-63.  
[“Efeito do impacto, no leito do rio, da lâmina descarregada sobre uma barragem-abóbada”. I.C.T. TR. 829 LNEC. Lisboa, 1986.]
24. **Davanipour T. and Sami S.** "Short jet impigement". *Journal of the Hydraulics Division. ASCE*, Vol.103, No.HY5, May, 1977. PP. 557-567.

25. Egozcue Rubí Juan J. "Temas de procesos estocásticos y análisis espectral". Dirección General de Puertos y Costas. MOPU-España, 1986.
26. Egozcue Rubí Juan J. y Canet Miquel Juan "Revisión de métodos de análisis espectral. Aplicación al estudio y simulación de un registro sísmico". Revista de Obras Públicas-España, Junio 1984. pp. 429-446.
27. Elevatorski Edward A. "Hydraulic energy dissipators". New York. Mc Graw-Hill, 1959.
28. Ervine D.A. "The entrainment of air in water". Water Power & Dam Construction. December 1976. pp. 27-30.
29. Ervine D.A. and Falvey H.T. "Behaviour of turbulent water jets in the atmosphere and in plunge pools". Proc. Instn. Civ. Engrs. Part 2, 1987, Mar. pp. 295-314.
30. Falvey, H. T. "Air-water flow in hydraulic structures". A Water Resources Technical Publication, Eng. Mon. No. 41, U.S. Bureau of Reclamation, Denver Colorado, 1980
31. Franzetti S. "Pressioni idrodinamiche sul fondo di una vasca di smorzamento". L'Energia Elettrica. No.6-1980. pp 280-285.
32. Franzetti S. and Tanda M. G. "Analysis of turbulent pressure fluctuation caused by a circular impinging jet". International Symposium on New Tecnology in Model Testing in Hydraulic Research. September 1987. India.
33. Goldberg R.R. "Fourier transform". Cambridge U. Press. London, 1970.
34. Harris F.J. "High-resolution spectral analysis with arbitrary spectral centers and adjustable spectral resolutions". J. Comp. Elec. Eng., Vol.3, 1976. pp 171-191.
35. Harris F.J. "On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform". Proc. IEEE, Vol.66, Jan 1978. pp. 51-83.
36. Hartung F. and Häusler E. "Scours, stilling basins and downstream protection under free overfall jets at dams". Trans. of 11<sup>th</sup> Congress of ICOLD, VOL.II, Q.41. Madrid-Spain, 1973. pp. 39-56.
37. Helstrom C.W. "Statistical theory of signal detection". 2<sup>nd</sup> ed. New York: Pergamon Press, 1968, Ch.IV,4. pp. 124-130.
38. Henning R.E. "Correlación de presiones fluctuantes en la base del resalto libre". Informe preliminar, INCYTH, LHA-039-11-84, Ezeiza, Argentina, 1984.
39. Hinze J.O "Turbulence". New York. McGraw-Hill. 2<sup>nd</sup> Ed. 1975.
40. Hussaini M.Y. and Zang T.A. "Spectral methods in fluid dynamics". Ann. Rev. Fluid Mech. 1987. 19. pp. 339-367.

41. **ICOLD.** "Deterioration of dams and reservoirs—Examples and their analysis". Report of the ICOLD Committee on Deterioration of Dams and Reservoir, Paris, France. 1983.
42. **Ivoilov A.A.** "Pressure fluctuations on the bottom of open-channel turbulent flows in spillway structures". *Hydrotechnical Construction*. 10, Oct. 1982.
43. **Jenkins G.M. and Watts D.G.** "Spectral analysis and its applications". San Francisco, C.A.: Holden-Day, 1968.
44. **Jiang Wenchao and Liang Xingrong.** "Yingyong wenliu lilun tantao maidong yali yau fenxi de chuanbo guilu". *Shuili xuebao*, Beijing. (9) 1983, pp. 53-59.
- [“Estudo da propagação de oscilações de pressão através de juntas, pela teoria da turbulência. ICT. TR. 791, LNEC. Lisboa 1984.]
45. **Johnson V.E.** "Mechanics of cavitation". *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*. Vol. 89, No.HY3, May, 1963. pp. 251-275.
46. **Kaiser J. F.** "Design methods for sampled data filters". *Proc. 1<sup>st</sup> Allerton Conf. Circuit System Theory*, Nov. 1963, pp. 221-236.
47. **Kay S.M. and Marple S.L.** "Spectrum analysis—A modern perspective". *Proc. IEEE*, Vol. 69, No. 11. November 1981. pp 1380-1419.
48. **Kolmogoroff, A. N.** "The local structure of turbulence in incompressible fluid for very large Reynolds numbers". *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30, 301 (1941).
- [Translation in **FRIEDLANDER, S. K. and TAPPER, L.** (ed.) *Turbulence: Classic papers on statistical theory*, Intersciencie, 1961.]
49. **Kolmogoroff, A. N. and Fomin S. V.** "Elementos de la teoría de funciones y del Análisis Funcional" Ed. Mir, Moscú, 2o. Ed. 1975.
50. **Koopmans L.H.** "The spectral analysis of time series", New York: Academic Press, 1974.
51. **Lanczos C.** "Discourse on Fourier series". New York: Hafner Publishing Co., 1966, Ch.1 pp. 29-30.
52. **Lemos, F. O. and Ramos, C. M.** "Hydraulic modelling of free jet energy dissipation". *Proc. of the Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures*. Ed. H. Kobus, Technische Akademie Esslingen, Esslingen, F.R.G. 1984.
53. **Lencastre A.** "Etat des connaissances sur le dimensionnement des évacuateurs de crue des barrages". *La Houille Blanche/No. 1-1985*. pp. 19-52.
54. **Lencastre A.** "Descarregadores de lâmina livre". LNEC, Lisboa, Memoria No. 174, 1961.

55. Liu Y. "Scale effect on cavitation in modelling". Symposium on scale effects in Modelling Hydraulic Structures, Esslingen am Neckar, Alemania Federal, 1984. pp. 1.13-1—1.13-4.
56. Lopardo R.A. et al. "Modelling techniques for preventing cavitation in structures submerged in hydraulic jumps". AIHR, Congress— Laussane, 1987. pp. 177-182.
57. Lopardo R.A. et al. "Model-Prototype comparison on pressure fluctuations in hydraulic jump energy dissipators". Symposium on Scale effects in Modelling Hydraulic Structures, Esslingen am Neckar, Alemania Federal, 1984. pp. 7-2.1—7-2.8.
58. Lopardo R.A. et al. "Physical modelling on cavitation tendency for macroturbulence of hydraulic jumps". Hydraulic Modelling of Civil Engineering Structures. Coventry, England: September, 1982. pp. 109-121.
59. Lopardo R.A. et al. "Verificación prototipo-modelo de presiones fluctuantes sobre dientes disipadores". Proc. X IAHR. Latin American Congress, México, 1982, Vol.2, pp 325-335.
60. Lopardo R.A. et al. "Determinación de fluctuaciones de presión en disipadores a resalto mediante modelos físicos convencionales". X Congreso Nacional del Agua. Corrientes, Argentina, 1981.
61. Lopardo R.A. et al. "Fluctuaciones de presión en la base del resalto libre". IX IAHR Latin American Congress, Mérida, Venezuela, 1980, Vol. I. pp. 69-78.
62. Lyatkher V.M. "Pul'satsiya sily gidrodinamicheskogo davleniya me granitse turbulentnogo potoka". Trudy Hidroproekta. Moskva, (10), 1963. pp. 69-85.
- [“Flutuação dos impulsos da pressão hidrodinâmica na fronteira de um escoamento turbulento. ICT. TR. 559, LNEC, Lisboa 1988.]
63. Martins R.B.F. "Scouring of rocky riverbeds by free-jet spillways". Water Power & Dam Construction, April 1975. pp. 152-153.
64. Mc Keogh E.J. and Elsayy E.M. "Air retained in pool by plunging water jet". Journal of the Hydraulics Division. ASCE, Vol. 106, No.HY10, October, 1980. pp. 1577-1594.
65. Markushevich, A. "Teoría de las funciones analíticas", Ed. Castellana, MIR, Moscú, 1978.
66. Moore W. L. "Energy loss at the base of a free overall". Transactions, American Society of Civil Engineers, vol. 108, pp. 1343-1360, 1943.
67. Müller Andreas. "A review of methods to determine the low frequency end of spectra". Proceedings of the International Conference, Portoroz, Yugoslavia, September 1984. pp. 1-61—1-71.

68. Narasimhan S. and Bhargava U.P. "Pressure fluctuations in submerged jump". Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.102, No.HY3, 1976. pp. 339-350.
69. Narayanan R. "The role of pressure fluctuations in hydraulic modelling". Symposium on scale effects in modelling hydraulic structures, Esslingen am Neckar, Alemania Federal, 1984. pp. 1.12-1—1.12-6.
70. Narayanan R. "Cavitation induced by turbulence in stilling basins". Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol.106, No.HY4, 1980. pp. 619-629.
71. Narayanan R. "Pressure fluctuation beneath submerged jump". Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 104, HY9, 1978. pp. 1331-1342.
72. Naudascher Eduard. "Flow induced forces and vibrations". Course LNEC. Lisboa, 1986.
73. Novak P., Locher F.A. and Hsu S.T. "Energy dissipation at high dams". Chapter 5. Pitman Publishing Co. 1984.
74. Oppenheim A.V. and Schafer R.W. "Digital signal processing". Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1975.
75. Oran Brigham E. "The fast Fourier transform". Englewood Cliffs. N.J. Prentice-Hall, 1974.
76. Otnes R.K. and Enochson L. "Digital time series analysis". New York: Wiley, 1972.
77. Papoulis A. "Probability, random variables and stochastic processes. New York: McGraw-Hill, 1965.
78. Parzen E. "Mathematical considerations in the estimation of spectra". Technometrics, Vol. 3, Mayo 1961. pp. 167-190.
79. Parzen E. "Statistical analysis (single channel case) in 1968". Dep. Estadistics, Stanford Univ., Stanford, C.A., Tech. Rep. 11, June 10, 1968.
80. Penino B.J. and Larsen J. "Measurements of flow-induced forces on floor blocks Pit 6 Dam model Study". Alden Research Laboratories, Report No. 109-77/M 303CF, July 1977.
81. Prewitt J.F. "Amplitud bias in the Fourier transforms of noise signals". IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-26, Sept. 1978. pp. 730-731.
82. Rajaratnam N. "Turbulent Jets". Elsevier Scientific Publishing C. Amsterdam, 1976.
83. Ramos C.M. "Hydrodinamic actions on hydraulic structures", LNEC-65/53/315. Lisboa, 1988.

84. Ramos C.M. "Statistical characteristics of the pressure field of crossed flows in energy dissipation structures". Trans. of 13<sup>th</sup> Congress of ICOLD, Vol. III, Q.50-R.24. New Delhi, 1979. pp. 403-415.
85. Ramos C.M. "Macroturbulenciã dos escoamentos cruzados em estruturas de dissipação de energia. LNEC, Lisboa 1978.
86. Rand Walter "Flow geometry at straight drop spillways", paper 791, Proceedings, American Society of Civil Engineers, Vol. 81, pp. 1-13, September, 1955.
87. Raudkivi A.J. and Callander R.A. "Advanced Fluid Mechanics". E. Arnold (Publishers) Ltd. London, 1975.
88. Rodi W. "Turbulence models and their application in hydraulic, State-of-the-art". paper, IAHR, Delft, 1980.
89. Sánchez B.J. and Fuentes M.O. "Experimental analysis of macroturbulence effects on the lining of stilling basins". Trans. of 13<sup>th</sup> Congress of ICOLD, Vol. III, Q.50-R6. New Delhi, 1979. pp. 85-102.
90. Schulthess Dieter "Computer assisted dynamic pressure measurements in an hydraulic model investigation". Proceedings of the International Conference, Portoroz, Yugoslavia, 1984. pp. 1-85—1-97.
91. Schuster A. "On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena", Terrestrial Magnetism, Vol. 3, pp. 13-41, Mar. 1898.
92. Schuster A. "The periodogram of magnetic declination as obtained from the records of the Greenwich Observatory during the years 1875-1895." Trans. Cambridge Philosophical Soc., vol. 18, pp. 107-135, 1899.
93. Schwartz, L. "Theorie des distributions". Herman, Paris, 1957.
94. Scimeni Ettore "Sulla forma delle vene tracimanti". L'Energia Elettrica, Aprile 1930, pp. 293-305.
95. Solari H.G. "Fluctuaciones de presión en resalto libre y forzado". Trabajo de Seminario, INCYTH, LHA-52-028-078. Ezeiza- Argentina, 1978.
96. Špoljarić Anita et al. "Dynamic characteristics of the load on the bottom plate under hydraulic jump". Proceedings of the International Conference, Portoroz, Yugoslavia, 1984. pp. 1-129—1-141.
97. Špoljarić Anita et al. "Unsteady dynamic force due to pressure fluctuations on the bottom of an energy dissipator". Proc. Int. Conf. on Hydraulic Modelling of Civil Engineering Structures. BHRA, Coventry, U.K. 1982. pp. 97-107.
98. Stanišić M.M "The Mathematical theory of turbulence". New York: Springer-Verlag 1985.

99. **Strader N.R.** "Effects of subharmonic frequencies on DFT coefficients". Proc. IEEE, Vol. 68, Feb. 1980. pp. 285-286.
100. **Taylor, G. I.** "The spectrum of the turbulence". Proc. R. Soc. 164-476. 1938.
101. **Toman K.** "The spectral shift of truncated sinusoids". J. Geophysical Res., Vol. 70, Apr. 1965. pp. 1749-1750.
102. **Tretter Steven A.** "Introduction to discrete-Time signal processing". New York: John-Wiley, 1976.
103. **Uppal H.L. et al** "A study of causes of damage of the central training wall Bhakra Dam Spillway". Journal of Hydraulic Research, Vol. 5, No. 3. 1967
104. **U. S. Army Corps of Engineers** "Hydraulic design criteria". Office the Chied of Engineers, U. S. Army Corps of Engineers. Waterways Experimental Station, Vicksburg, Miss., 1952.
105. **U. S. Bureau of Reclamation** "Stilling basin chute block pressure (Basin II), Hydraulic Branch", report No.HYD.-514. Denver Colorado, 1963.
106. **U. S. Bureau of Reclamation** "Studies of crest for overfall dams"-Bulletin 3. Denver Colorado, 1948.
107. **Vasiliev O.F. and Bukreyev V.I.** "Statistical characteristics of pressure fluctuation in the region of hydraulic jump". Proc. XII IAHR Congress. Fort Collins, USA, 1967. Vol. 2. pp. 1-8.
108. **Vigander S.** "Bubbles, drops and friction on the judgement scale. Symp. Scale Effects in Modelling Hydraulic Structures. International Association for Hydraulic Research, Esslingen, W. Germany, paper 5.1. 1984.
109. **Vischer D.** "Modelling energy dissipation with hydraulic structures: A Phenomenon with insignificant scale effects?". Symposium on Scale Effects in Modelling Hydraulics Structures, Esslingen am Neckar, Alemania Federal, 1984. pp. 7.1-1-7.1-10.
110. **Wallis B. G.** "One-Dimensional Two-phase Flow". Mc. Graw-Hill, Inc. 1969.
111. **Welch P.D.** "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time overaging over short, modofied periodograms". IEEE Trans. Audio Electracust., Vol. Au-15, June 1967. pp. 70-73.
112. **White M. P.** "Discussion on energy loss at the base of a free overall" , by Walter L. Moore; Transaction American of Civil Engineers. Vol. 108, 1943.
113. **Wozencraft J.W. and Jacobs I.M.** "Principles of Comunication Engineering". New York: Wiley, 1965. Ch. 4.3. pp. 223-228.



114. Xu Duo-Ming and Yu Chang-Zhao "Pingmian shuisheliu dui caodide changji yaquiang ji qi maidong texing". Shuili xuebao, Beijing, (5), 1983, pp. 52-58.

["Pressão no fundo de um canal devido ao choque de um jacto plano, e suas características de flutuação". ICT. TR. 841 LNEC, Lisboa 1986.]

115. Yuditskii G.A. "Eksperimental'nye issledovaniya pul'satsii gidrodinamicheskoi magruzki ma plity krepleniya v nizhnem b'efe." Izvestiya VNIIG, Moskva, Leningrad G5, 1960. pp. 117-124.

["Estudo experimental dos flutuações da carga hidrodinâmica numa soleira de jusante. ICT. TR. 520. Lisboa 1985.]