

Trabajo fin de Máster

Máster en Ingeniería de Caminos, canales y Puertos

**MODELO DE DAVIS Y RAYMOND DE
CONSOLIDACIÓN DE SUELOS.
AJUSTE PARAMÉTRICO A PARTIR DE DATOS
EXPERIMENTALES Y OBTENCIÓN DE CURVAS
DE CONSOLIDACIÓN MEDIANTE
SIMULACIONES NUMÉRICAS**

Alumno: Fernando Egea Boscada

Director: Iván Alhama Manteca

Codirector: Gonzalo García Ros

Agradecimientos

Las vueltas que da la vida me han llevado al extranjero durante éste último paso académico de mi vida. La distancia, idioma o recursos han jugado un papel importante. Es por esto que la realización de este proyecto no ha sido nada fácil.

Pero si bien ha sido un camino duro, también es cierto que no he estado solo. Muchas son las personas que, de una u otra manera, me han ayudado. Por este motivo me gustaría expresar mis más sinceros agradecimientos,

A mi director de proyecto, D. Iván Alhama Manteca; por su confianza y fe en mí.

A mi codirector de proyecto, D. Gonzalo García Ros, por su facilidad a la hora de explicar, su paciencia con las correcciones, su dedicación, su ayuda incondicional y por guiarme en momentos de ofuscación.

A mis amigos y compañeros, por compartir tantos momentos; por disfrutar de los buenos y apoyarme en los malos.

A mi familia, que siempre están ahí. Ana María, José Ángel, y todos los que me dejo.

A mi pareja, Isa, por su comprensión, su cariño, su apoyo y su paciencia en este largo camino.

A las circunstancias, por enseñarme tanto y hacerme más fuerte.

y en especial,

A mis padres, Fernando y Pepa, por ser mis pilares. Porque sin ellos esto nunca hubiese sido posible. Porque, en definitiva, todo lo que hoy soy y tengo, se lo debo a ellos.

Fernando Egea Boscada

Índice

1	INTRODUCCIÓN	1
2	RESUMEN Y OBJETIVOS	2
2.1	Resumen.....	2
2.2	Objetivos y alcance.....	2
3	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	3
3.1	Introducción.	3
3.2	Teoría de consolidación lineal de Terzaghi. Consolidación 1D (flujo vertical).	4
3.3	Teoría de consolidación radial.	13
3.4	Teoría de consolidación 2D y 3D. Flujo vertical y horizontal (coordenadas rectangulares).	17
3.5	Teoría de consolidación no lineal.....	18
3.5.1	Modelo de Davis y Raymond.....	19
3.5.2	Extensión del modelo de Davis y Raymond para la hipótesis de “1+e” no constante.....	24
3.5.3	Extensión del modelo de Davis y Raymond considerando dz variable	25
4	DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL SUELO PARA EL MODELO DE DAVIS Y RAYMOND	26
4.1	Datos de laboratorio	26
4.2	Ajuste paramétrico.....	27
5	SIMULACIONES NUMÉRICAS	29
5.1	Simulaciones numéricas de las distintas variantes del modelo de Davis y Raymond. Discusión de resultados.....	29
6	CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES	36
7	REFERENCIAS	38

1 INTRODUCCIÓN

Uno de los mayores estereotipos que nos encontramos cuando hablamos de ingeniería civil es el pensar que esta disciplina se basa únicamente en la construcción de edificios singulares, puentes, presas o incluso carreteras. Si bien es cierto que todos ellos conforman el campo de la ingeniería civil, a menudo tendemos a olvidar que cada uno de ellos necesita de unos buenos cimientos sobre los que sustentarse y que todo el peso y la carga de estas estructuras se acaba transmitiendo en última instancia al terreno bajo la cimentación. Este terreno se trata de un complejo material poroso compuesto por las propias partículas de terreno y por agua, que nos viene impuesto de forma natural y que en la mayoría de los casos resulta económicamente inviable cambiar.

Sin embargo, gracias al desarrollo de la ciencia y los avances en el campo de la “*Geotecnia*” hemos podido llegar a comprender de forma razonable el comportamiento que pueden mostrar estos medios porosos, con una serie de características físico-químicas que los hacen distintos entre sí y que a su vez tienen que ejercer una reacción ante las cargas colocadas sobre ellos.

Uno de los procesos que se producen en el suelo como consecuencia de estas interacciones físico-químicas y mecánicas, y que resulta de gran importancia en el estudio de los suelos, es el de la *consolidación*. De igual forma que cuando caminamos por la playa, la arena bajo nuestros pies cede ante nuestro peso, cuando se construye una estructura, el terreno cede ante el peso de misma, compactándose y dejando escapar las partículas de agua de su interior. A este proceso se lo conoce como *consolidación*. Evidentemente, ésta se trata de una descripción muy simple y llevada al extremo con el fin de empezar a familiarizarnos con el concepto.

De una forma más académica, podemos afirmar que al aplicar una carga sobre un suelo saturado con agua (generalmente limos y arcillas), ésta se verá sometida a un aumento de presión que la hará fluir desde los puntos de mayor presión hacia otros puntos sometidos a una presión menor, como es la presión atmosférica existente en la superficie del suelo, produciéndose una expulsión de agua intersticial. Esta pérdida de agua hace que la matriz de suelo se reestructure, produciendo un asentamiento diferido que puede llegar a tener un valor importante y que puede dañar a las estructuras colocadas sobre el terreno. Además, dependiendo del tipo de terreno existente, éste proceso puede ser casi instantáneo (arenas) o producirse lentamente en el tiempo (arcillas).

2 RESUMEN Y OBJETIVOS

2.1 Resumen

La teoría unidimensional de consolidación lineal de Terzaghi [1923, 1996] es la que sirve de base, aún en la actualidad, para la práctica totalidad de los cálculos de tiempos y asentamientos por consolidación, dada su sencillez de planteamiento y la existencia de soluciones estandarizadas de fácil manejo y comúnmente aceptadas en ingeniería civil. Sin embargo, en los últimos treinta años, numerosas investigaciones se han encaminado a analizar y resolver el problema de consolidación eliminando algunas de las restrictivas hipótesis asumidas por Terzaghi, desembocando en una formulación no lineal del problema y cuyas soluciones son más precisas que las obtenidas mediante teoría lineal.

De entre una larga lista de autores y modelos cabría destacar a Davis y Raymond [1965], Juárez-Badillo [1983], y Cornetti y Battaglio [1994], cuyas aportaciones supusieron un avance en el estudio de la consolidación no lineal y cuyos modelos son referencia fundamental en este campo.

A lo largo de este trabajo se profundizará en estas ideas, centrándonos en la teoría no lineal de consolidación. En concreto, estudiaremos el modelo original de Davis y Raymond así como las extensiones de dicho modelo presentadas por García-Ros [2016], comparando las soluciones aportadas por las distintas variantes de dicho modelo y las procedentes de la teoría lineal.

2.2 Objetivos y alcance

Los objetivos de este proyecto, por tanto, consistirán en:

- Conocer los fundamentos básicos teóricos de la teoría de la consolidación.
- Conocer los fundamentos teóricos de la teoría no lineal de consolidación. El modelo de Davis y Raymond y las extensiones de dicho modelo.
- Ajuste paramétrico a partir de datos de laboratorio y obtención de resultados numéricos para el modelo de Davis y Raymond en una serie de escenarios típicos.
- Comparación entre resultados.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 Introducción.

Como ya hemos comentado de manera superficial en la introducción del proyecto, cuando un depósito de suelo es sometido a un incremento de esfuerzos totales debido, por ejemplo, a la aplicación de una carga producida por la construcción de un edificio o de un terraplén, se produce en el suelo un *exceso de presión intersticial*. Puesto que el agua no puede resistir ningún tipo de esfuerzo cortante, el exceso de presión intersticial en los poros de suelo se irá disipando con el transcurso del tiempo mediante un flujo de agua desde el interior de la matriz de suelo hacia el exterior. La velocidad a la cual se produce este proceso depende principalmente de la permeabilidad de la masa de suelo.

La disipación del exceso de presión intersticial debida al flujo de agua hacia el exterior se denomina *consolidación*, proceso que presenta dos importantes consecuencias:

- a) Conduce a una reducción del volumen de poros y, debido a ello, a una reducción del volumen total de la masa de suelo, lo cual repercute en el asentamiento de la superficie del terreno y por consiguiente en un asentamiento de la estructura construida sobre dicha superficie.
- b) Durante la disipación del exceso de presión intersticial, el esfuerzo efectivo en la masa de suelo aumenta, y por tanto se incrementa su resistencia al cortante. La consolidación y la resistencia al cortante están, por tanto, relacionados mutuamente.

De lo anterior se deduce que cuando un suelo se consolida se produce en él una disminución de la relación de vacíos, la cual va acompañada por un incremento del esfuerzo efectivo.

En un *suelo granular*, como por ejemplo una arena, la permeabilidad es relativamente alta y por ello el exceso de presión intersticial se disipa de forma casi instantánea. En consecuencia, el asentamiento de la estructura por lo general se termina al finalizar la construcción.

En el lado opuesto, los *depósitos de arcilla* suelen tener una permeabilidad considerablemente baja y por ello la disipación del exceso de presión intersticial en los poros del suelo es un proceso muy lento. En consecuencia, una estructura ejecutada

sobre un suelo de este tipo puede continuar asentándose durante varios años después de terminada la construcción.

Por tanto, el *proceso de consolidación* aparece en todos los tipos de suelos, sin embargo, en la práctica, solo tiene interés el caso de estructuras cimentadas sobre depósitos de arcilla. Para tales casos se necesita predecir:

- a) El asentamiento total de la estructura.
- b) La velocidad a la cual se produce dicho asentamiento.

Estas predicciones pueden hacerse mediante una teoría apropiada para la consolidación. En este sentido, la bibliografía técnica nos aporta una extensa teoría de la consolidación.

En general, el proceso de la consolidación involucra en tres dimensiones el flujo del agua intersticial y las deformaciones de la masa de suelo. Sin embargo, las teorías tridimensionales son muy complejas y difíciles de aplicar en la práctica. El caso más simple que puede tratarse matemáticamente es el caso unidimensional. Esta es la teoría que se utiliza con mayor frecuencia en la práctica y es la base de la casi totalidad de los cálculos de asentamientos.

3.2 Teoría de consolidación lineal de Terzaghi. Consolidación 1D (flujo vertical).

Considérese un depósito de suelo homogéneo, saturado, de longitud lateral infinita y sometido a una carga uniforme “ q ” aplicada en toda el área superficial, como se muestra en la figura 3.1.

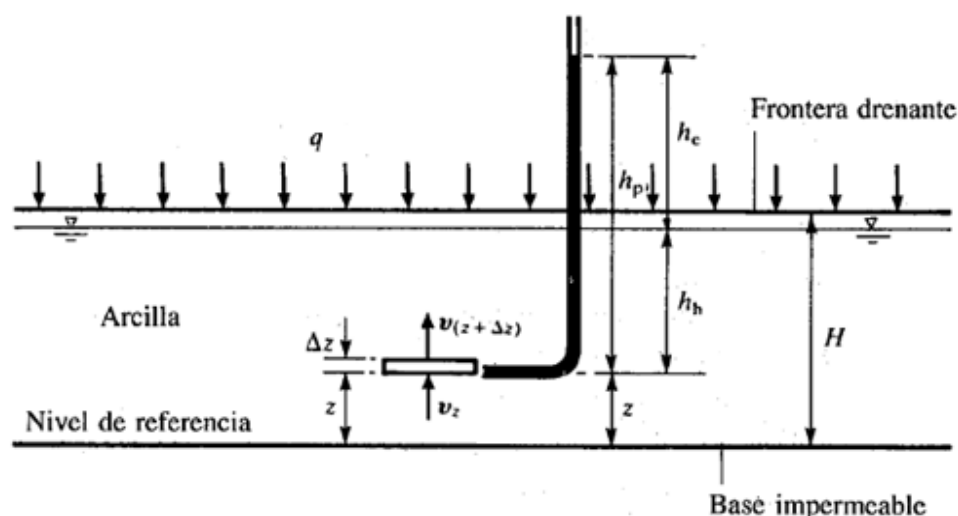


Figura 3.1. Consolidación vertical de una capa de suelo

El suelo reposa sobre una base impermeable y drena libremente por su cara superior. La disipación del exceso de presión intersticial en cualquier punto sólo se producirá mediante el flujo del agua intersticial en sentido vertical ascendente hacia la superficie, ya que el gradiente hidráulico únicamente se presenta en la dirección vertical. Como resultado se producirán deformaciones en la dirección vertical. Por tanto, para un elemento de suelo se tiene:

v_z es la velocidad vertical del flujo que entra en el elemento.

$v_{z+\Delta z}$ es la velocidad vertical del flujo que sale del elemento.

Si se aplica el teorema de Taylor, se tiene que:

$$v_{z+\Delta z} = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \Delta z + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \cdot \Delta z^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 v_z}{\partial z^3} \cdot \Delta z^3 + \dots$$

Puesto que Δz se toma muy pequeño, puede suponerse que los términos de segundo orden y de orden superior son insignificantes, obteniendo entonces la siguiente expresión:

$$v_{z+\Delta z} = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \Delta z$$

A partir del principio de continuidad del volumen se tiene que:

<i>Cantidad de flujo que sale del elemento por unidad de tiempo</i>	$-$	<i>Cantidad de flujo que entra en el elemento por unidad de tiempo</i>	$=$	<i>Velocidad de cambio del volumen del elemento</i>
---	-----	--	-----	---

De esta forma:

$$\left[v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \Delta z \right] \cdot A - v_z \cdot A = - \frac{\partial V}{\partial t}$$

Donde "A" sería el área plana del elemento y "V" es el volumen. Por tanto:

$$V \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\partial V}{\partial t}$$

Suponiendo que las partículas de suelo y el agua intersticial son incompresibles, entonces la velocidad de cambio de volumen del elemento (termino derecho de la ecuación anterior) es igual a la velocidad de cambio de volumen de vacíos $\partial V_v / \partial t$. Quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$V \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{\partial V_v}{\partial t} \tag{3.1}$$

Si " V_s " es el volumen de sólidos en el elemento y " e " es la relación de vacíos, entonces por definición $V_v = e \cdot V_s$. Si se reemplaza en la ecuación anterior y se tiene en cuenta que " V_s " es constante, se obtiene lo siguiente:

$$V \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} = -V_s \cdot \frac{\partial e}{\partial t}$$

Donde:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{1+e} \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.2)$$

Y a partir de la ecuación de *Darcy* se obtiene para flujo vertical del agua intersticial a través del elemento:

$$v_z = -k_z + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Donde " h " sería la cabeza total en el elemento y " k_z " el coeficiente de permeabilidad vertical del suelo (" k_v " según la notación de Terzaghi).

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_v \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \frac{1}{1+e} \cdot \frac{\partial e}{\partial t}$$

En la práctica, las deformaciones verticales suelen ser pequeñas y por tanto es razonable suponer que la permeabilidad del suelo permanece constante durante la aplicación del incremento de carga. Por tanto, se obtiene:

$$k_v \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e} \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.3)$$

Si se toma como nivel de referencia la base del suelo, la cabeza total " h " del elemento está dada por:

$$h = z + h_h + h_e$$

Donde " z " es la cabeza de posición, " h_h " es la cabeza hidrostática y " h_e " el exceso de cabeza de presión. En la teoría de pequeñas deformaciones puede suponerse que la cabeza de posición y la hidrostática ($z + h_h$) permanecen constantes. Entonces:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 h_e}{\partial z^2}$$

El exceso de presión intersticial u_e en el elemento viene dado por:

$$u_e = \rho_w \cdot g \cdot h_e$$

De esta forma obtenemos:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho_w \cdot g} \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \quad (3.4)$$

Sustituyendo la ecuación (3.4) en la ecuación (3.3) y reordenando términos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{k_v \cdot (1 + e)}{\rho_w \cdot g} \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} = \frac{\partial e}{\partial t} \quad (3.5)$$

Se obtiene entonces una ecuación con dos incógnitas (“ u_e ” y “ e ”) y para plantear el problema completamente se necesita una ecuación adicional que relacione el exceso de presión intersticial y la relación de vacíos. Ésta se obtiene al considerar el comportamiento del suelo bajo “esfuerzo vertical”-“deformación”. Terzaghi tomó este comportamiento como lineal para un incremento de carga en particular, como se puede ver en la figura 3.2.

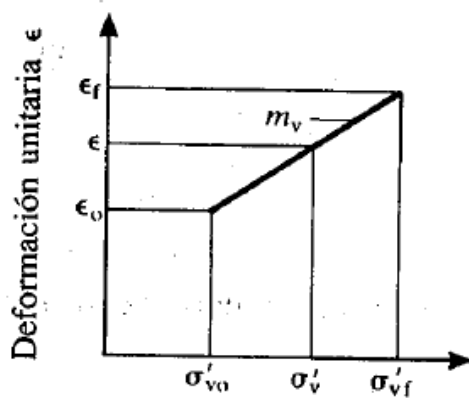


Figura 3.2. Esfuerzo vertical efectivo σ'_v

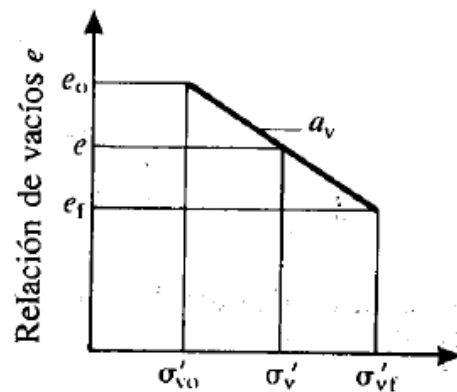


Figura 3.3. Relación de vacíos para incrementos de σ'_v

Puesto que el cambio de deformación es proporcional al cambio de relación de vacíos, esto también implica la existencia de una relación lineal entre “ e ” y “ σ'_v ”, como se puede ver en la figura 3.3, lo cual es completamente razonable siempre que la relación de incremento de presión sea casi igual a la unidad. La pendiente de la línea de la figura 3.3 se designa con “ a_v ” y se denomina *coeficiente de compresibilidad*. Se tiene entonces:

$$a_v = -\frac{\partial e}{\partial \sigma'_v} \quad (3.6)$$

Si σ_v es el esfuerzo vertical total sobre el elemento (figura 3.1), σ'_v el esfuerzo vertical efectivo en el elemento y u la presión intersticial correspondiente, entonces a partir del principio de esfuerzos efectivos se tiene:

$$\sigma_v = \sigma'_v + u$$

La presión intersticial “ u ” está dada por la presión hidrostática “ u_h ” y por el exceso de presión “ u_e ”. Esto es:

$$u = u_h + u_e$$

Con lo que:

$$\sigma_v = \sigma'_v + u_h + u_e$$

Derivando respecto del tiempo t obtenemos:

$$\frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} + \frac{\partial u_e}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t} = - \frac{\partial u_e}{\partial t} \quad (3.7)$$

Además:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial \sigma'_v} \cdot \frac{\partial \sigma'_v}{\partial t}$$

Por consiguiente, al sustituir las ecuaciones (3.6) y (3.7):

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_v \cdot \frac{\partial u_e}{\partial t} \quad (3.8)$$

Y sustituyendo la ecuación (3.8) en la ecuación (3.5):

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = \frac{k_v \cdot (1 + e)}{\rho_w \cdot g \cdot a_v} \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

Esta ecuación se expresa de manera más conveniente así:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = c_v \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \quad (3.10)$$

Donde:

$$c_v = \frac{k_v \cdot (1 + e)}{\rho_w \cdot g \cdot a_v} \quad (3.11)$$

Que se denomina *coeficiente de consolidación vertical*.

También se define el *coeficiente de compresibilidad volumétrica* m_v como:

$$m_v = \frac{a_v}{1 + e} \tag{3.12}$$

La ecuación (3.10) es la ecuación de comportamiento de la consolidación unidimensional derivada por Terzaghi en 1923. La figura 3.4 muestra el modelo reológico equivalente que se utiliza para ayudar a visualizar el proceso de consolidación.

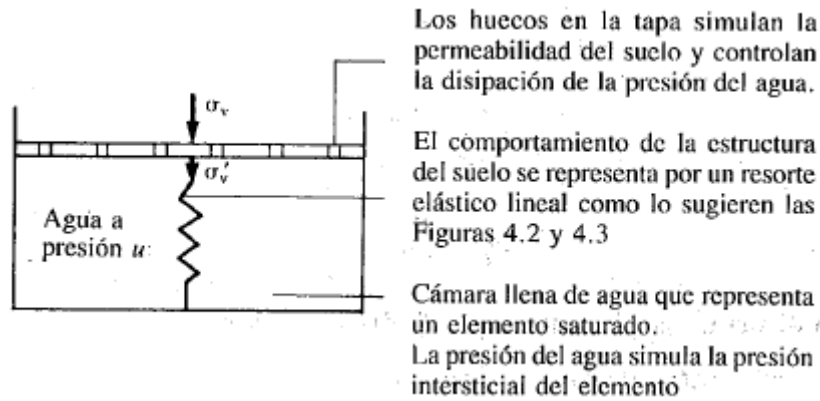


Figura 3.4. Modelo reológico para el proceso de consolidación vertical

En cuanto a la solución de la ecuación de comportamiento, para un área cargada de extensión ilimitada, la presión aplicada “q” es constante con la profundidad e inicialmente es absorbida por el agua intersticial en la forma de un exceso de presión “ u_{0e} ”. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \text{Condición inicial para } t = 0; & \quad u_e = u_{0e} = q; \text{ para } 0 \leq z \leq H \\ \text{Condición de frontera para todo } t: & \quad \frac{\partial u_e}{\partial z} = 0; \text{ en } z = 0, u_e = 0 \text{ en } z = H \\ \text{Condición final para } t = \infty; & \quad u_e = 0; \text{ para } 0 \leq z \leq H \end{aligned}$$

La solución final de la ecuación (3.10) está dada por:

$$\frac{u_e}{u_{0e}} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2}{M} \cdot \text{sen} \left[M \cdot \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right] \cdot \exp(-M^2 \cdot T_v) \tag{3.13}$$

Donde:

$$M = \frac{\pi}{2} \cdot (2m + 1) \quad \text{con } m = 0,1,2, \dots, \infty$$

Donde “H” es la longitud máxima de la trayectoria de drenaje y “ T_v ” es un factor adimensional denominado "factor de tiempo vertical", definido como:

$$T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2} \tag{3.14}$$

Ahora, el “grado de consolidación” de un elemento de suelo, designado por “ U_v ”, quedaría definido por la siguiente expresión:

$$U_v = 1 - \frac{u_e}{u_{0e}} \tag{3.15}$$

Y el “grado de consolidación” es por tanto igual al “grado de disipación del exceso de presión intersticial”:

$$U_v = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{2}{M} \cdot \text{sen} \left[M \cdot \left(1 - \frac{z}{H} \right) \right] \cdot \exp(-M^2 \cdot T_v) \tag{3.16}$$

De esta ecuación podemos deducir una gráfica de triple entrada con “ U_v ” en función de “ T_v ” y “ z/H ”, como la que se muestra en la Figura 3.5.

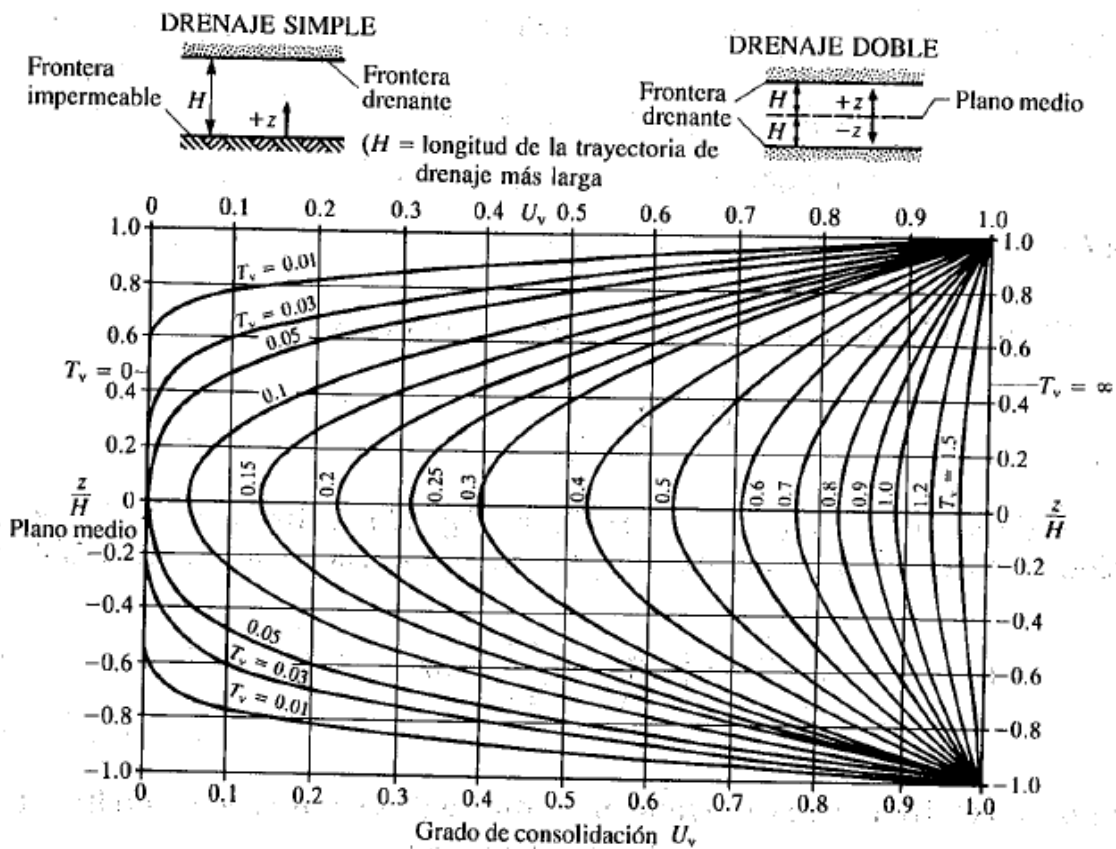


Figura 3.5. Grado de consolidación U_v en función de T_v y z/H

Donde como hemos mencionado:

$$U_v = 1 - \frac{u_e}{u_{0e}} \tag{3.15}$$

En un caso como el considerado inicialmente, donde la lámina de suelo reposa sobre una frontera impermeable y el agua solo puede drenar hacia arriba (hacia la superficie), la distribución del grado de consolidación en función de la profundidad para varios valores del factor de tiempo está representada por la mitad superior de la gráfica. Este caso se denomina "drenaje simple".

Para una lámina de suelo que reposa sobre una frontera permeable, la distribución del grado de consolidación en función de la profundidad para varios valores del factor de tiempo vertical, está representada por la gráfica completa. Este segundo caso se denomina "drenaje doble".

Se puede observar que la consolidación se produce con mayor rapidez en las proximidades de las fronteras drenantes y con menor rapidez en la frontera impermeable de una lámina con drenaje simple o en el plano medio de una lámina con drenaje doble. Además de los valores del grado de consolidación, también es interesante el cálculo del *grado promedio de consolidación* \bar{U}_v , el cual refleja el asentamiento en la superficie de la capa y, por tanto, el asentamiento en la estructura ingenieril. La relación entre el "factor de tiempo vertical" y "el grado promedio de consolidación" puede observarse en la Figura 3.6.

$$\bar{U}_s = 1 - \sum_{N=0}^{N=\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \tag{3.17}$$

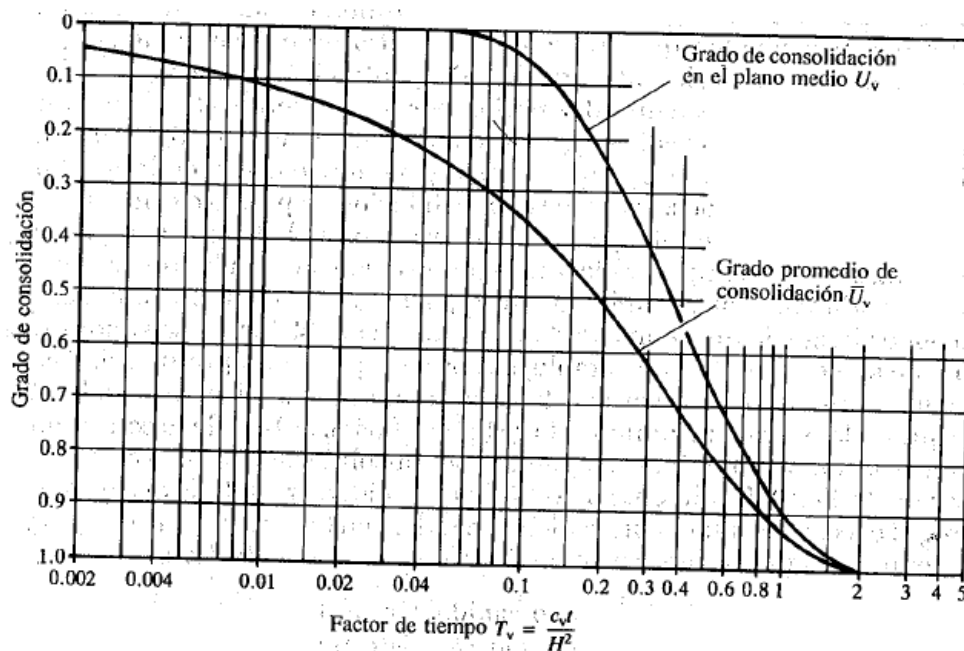


Figura 3.6. Relación entre el factor de tiempo vertical y el grado promedio de consolidación

Este es el caso teórico considerado por Terzaghi. Las deformaciones y el flujo intersticial se producen sólo en la dirección vertical, y la capa de suelo se comporta como un elemento de suelo en el ensayo de consolidación de laboratorio. Entonces, a partir de la ecuación:

$$m_v = \frac{\Delta S}{\Delta D} \cdot \frac{1}{\Delta \sigma'_v} \quad (3.18)$$

El asentamiento al final de la consolidación en la capa de suelo de un elemento como el de la Figura 3.7, está dado por:

$$\Delta S = m_v \cdot \Delta D \cdot \Delta \sigma'_v \quad (3.19)$$

Donde " $\Delta \sigma'_v$ " es el "incremento de esfuerzo vertical efectivo" en el elemento, " ΔD " es el "espesor" del elemento, y " m_v " es el "coeficiente de compresibilidad volumétrica" para el rango de esfuerzos efectivos correspondiente.

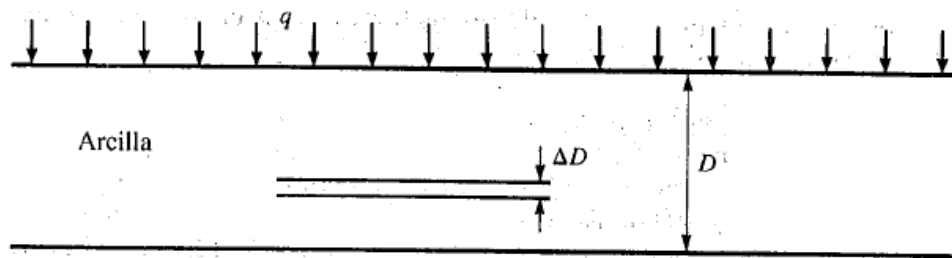


Figura 3.7. Área cargada de extensión infinita

Inicialmente se tiene que:

$$\sigma_{v0} = \sigma'_{v0} + u_h$$

Y al final de la consolidación se tiene:

$$\sigma_{vf} = \sigma'_{vf} + u_h$$

Entonces:

$$\Delta \sigma_v = \Delta \sigma'_v$$

Y por tanto:

$$\Delta S = m_v \cdot \Delta D \cdot \Delta \sigma'_v = m_v \cdot \Delta D \cdot \Delta \sigma_v$$

El asentamiento al final de la consolidación está dado por:

$$S = \sum \Delta S = \sum m_v \cdot \Delta D \cdot \Delta \sigma'_v = \sum m_v \cdot \Delta D \cdot \Delta \sigma_v \quad (3.20)$$

Se tiene además que el incremento de esfuerzos verticales totales " $\Delta\sigma_v$ " es constante con la profundidad e igual a la carga aplicada " q ". Por tanto no es necesario dividir el depósito de arcilla en varias subcapas y puede tomarse $\Delta D = D$, obteniéndose así:

$$S = m_v \cdot \Delta D \cdot \Delta\sigma'_v = m_v \cdot D \cdot \Delta\sigma'_v = m_v \cdot D \cdot q \quad (3.21)$$

Siendo " m_v " el valor promedio del "coeficiente de compresibilidad volumétrica" en todo punto a igual profundidad de la arcilla para el rango de esfuerzos aplicado.

Las condiciones teóricas de la deformación vertical y flujo vertical intersticial se aproximan bastante a las condiciones de campo cuando las dimensiones del área cargada son mucho mayores que la profundidad de la capa de arcilla. Por lo general este es el caso que se presenta en los terraplenes para vías y en los sistemas de aprovechamiento del terreno.

3.3 Teoría de consolidación radial.

Supongamos una muestra de depósito homogéneo de arcilla saturada de dimensión lateral infinita sujeta a una carga uniforme " q " y aplicada en la totalidad del área de la superficie como la de la Figura 3.8.

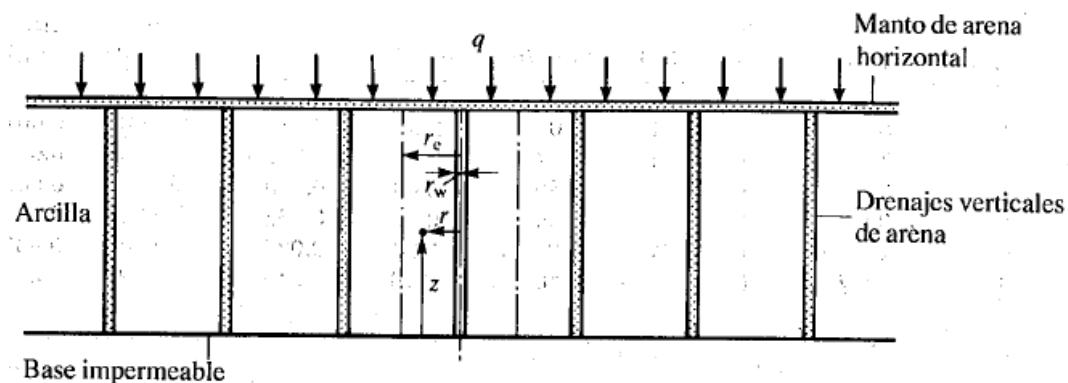


Figura 3.8. Depósito de arcilla saturada sujeta a carga uniforme

Consideremos además que la arcilla reposa sobre una base impermeable y puede drenar con libertad por su cara superior. Si la arcilla es blanda, a menudo se necesita acelerar la velocidad de consolidación para limitar el asentamiento a largo plazo hasta un valor aceptable. Esto puede obtenerse instalando un sistema de drenaje vertical de arena, como también se puede ver en la figura anterior. El exceso de presión intersticial se disipa entonces por los flujos vertical y radial conjuntamente, sin embargo, las deformaciones que resultan se producirán en la dirección vertical.

Si la cimentación con la cual se aplica la carga al depósito de arcilla es *flexible*, la superficie asentará de manera diferencial durante la consolidación ya que la arcilla adyacente a los drenajes verticales de arena se consolidará con mayor rapidez que el suelo por fuera de la zona de influencia. Este caso se denomina como de “*deformación vertical libre*”.

Si por el contrario, la cimentación es *rígida*, el suelo en la superficie asentará uniformemente durante la consolidación, lo cual se denomina “*deformación uniforme*”.

Al considerar los flujos radial y vertical del agua intersticial a través de un elemento de suelo a una altura “*z*” sobre una base impermeable y a una distancia radial “*r*” del eje vertical del drenaje de arena (Figura 3.9), de modo similar a como se desarrolló en la “*Teoría de consolidación de Terzaghi*” podremos obtener la ecuación de comportamiento para la condición de “*deformación vertical libre*”.

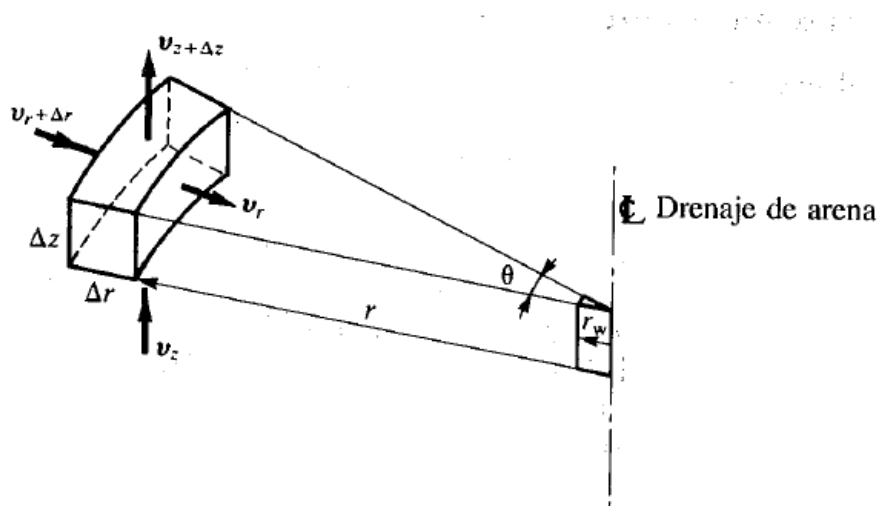


Figura 3.9. Flujo radial y vertical a través de un elemento de suelo

La ecuación diferencial que rige el flujo vertical y radial sería la siguiente:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = c_v \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} + c_h \cdot \left[\frac{\partial^2 u_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_e}{\partial r} \right] \quad (3.22)$$

Donde el “*coeficiente de consolidación vertical*” sigue siendo:

$$c_v = \frac{k_v \cdot (1 + e)}{\rho_w \cdot g \cdot a_v} \quad (3.23)$$

Y el “*coeficiente de consolidación horizontal*” es:

$$c_h = \frac{k_h \cdot (1 + e)}{\rho_w \cdot g \cdot a_v} \quad (3.24)$$

Según se demostró en Carrillo [1942], la ecuación puede convertirse en la ecuación lineal para la consolidación vertical:

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = c_v \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} \quad (3.25)$$

Y la ecuación para la consolidación radial plana, operándolas por separado y superponiendo los resultados.

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = c_h \cdot \left[\frac{\partial^2 u_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_e}{\partial r} \right] \quad (3.26)$$

Si " \overline{U}_v " es el "grado promedio de consolidación debido al flujo vertical" para un tiempo dado y " \overline{U}_r " es el "grado promedio de consolidación debido al flujo radial" para el mismo tiempo, el "grado promedio de consolidación debido al flujo vertical y radial combinado" " \overline{U}_{vr} ", se determina con la ecuación:

$$(1 - \overline{U}_{vr}) = (1 - \overline{U}_v) \cdot (1 - \overline{U}_r) \quad (3.27)$$

La ecuación para el "grado promedio de consolidación radial", por su parte, se puede obtener de la ecuación dada por Barron [1948] que se muestra a continuación:

$$\overline{U}_r = 1 - \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^{\alpha=\infty} \frac{4 \cdot U_1^2(\alpha)}{\alpha^2 \cdot (n^2 - 1) [n^2 \cdot U_0^2(\alpha n) \cdot \alpha - U_1^2(\alpha)]} \cdot \exp(-\alpha^2 \cdot n^2 \cdot T_r) \quad (3.28)$$

Donde:

$$U_1(\alpha) = J_1(\alpha) \cdot Y_0(\alpha) - Y_1(\alpha) \cdot J_0(\alpha)$$

$$U_0(\alpha n) = J_0(\alpha n) \cdot Y_0(\alpha) - Y_0(\alpha n) \cdot J_0(\alpha)$$

Siendo:

" J_0 " y " J_1 ", funciones de Bessel de primer género, de orden cero y de primer orden respectivamente.

" Y_0 " y " Y_1 ", funciones de Bessel de segundo género, de orden cero y de primer orden respectivamente.

$\alpha_1, \alpha_2 \dots$ = raíces de las funciones de Bessel que satisfacen:

$$J_1(\alpha n) \cdot Y_0(\alpha) - Y_1(\alpha n) \cdot J_0(\alpha) = 0$$

$n = \frac{r_e}{r_w}$; donde " r_w " es el "radio del drenaje" y " r_e " es el radio de influencia y " T_r " es el "factor de tiempo radial" adimensional, definido por:

$$T_r = \frac{c_h \cdot t}{r_e^2} \tag{3.29}$$

Por tanto, para un valor de " n " especificado y para valores dados del "factor de tiempo" pueden calcularse los valores correspondientes del grado promedio de consolidación " \bar{U}_r ", obteniéndose las familias de curvas de la Figura 3.10 y disminuyendo la velocidad de consolidación a medida que el valor de " n " aumenta.

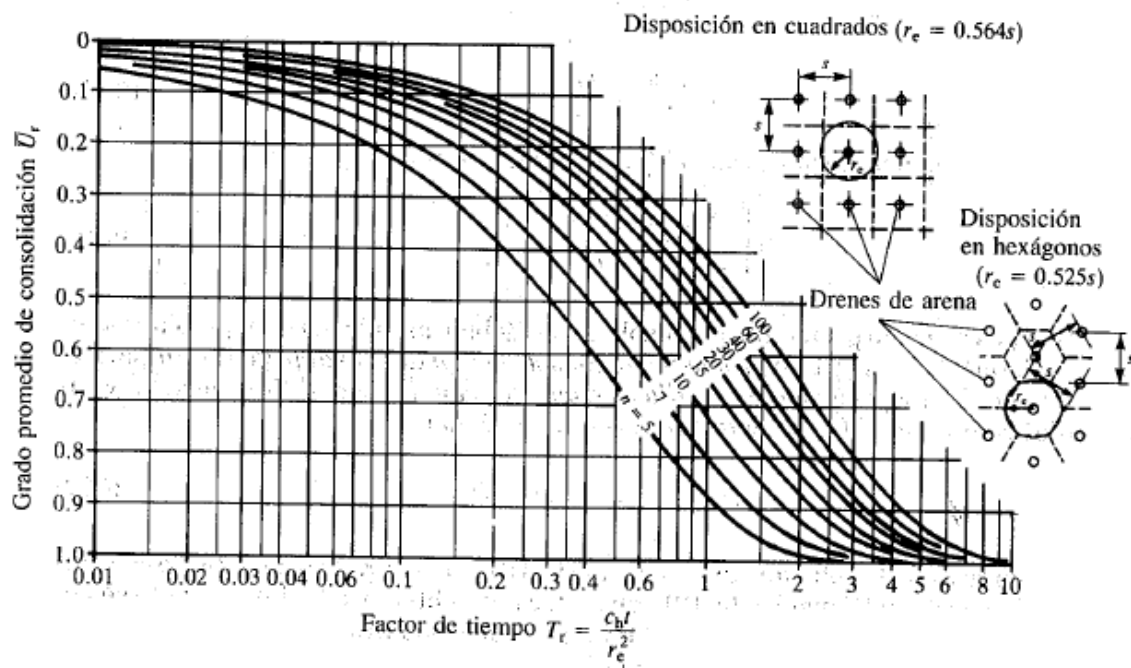


Figura 3.10. Grado promedio de consolidación en función de " n " y el factor de tiempo

Para obtener la "deformación vertical uniforme", la ecuación de comportamiento está dada por:

$$\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial t} = c_v \cdot \frac{\partial^2 u_e}{\partial z^2} + c_h \cdot \left[\frac{\partial^2 u_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_e}{\partial r} \right] \tag{3.30}$$

Donde " \bar{u}_e " es el "valor promedio del exceso de presión intersticial" a cualquier profundidad.

Para el flujo radial esta expresión se reduce a:

$$\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial t} = ch \cdot \left[\frac{\partial^2 u_e}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_e}{\partial r} \right] \quad (3.31)$$

La resolución a esta ecuación es dada por Barron [1948], apareciendo ésta a continuación:

$$\bar{U}_r = 1 - \exp \left[-\frac{2 \cdot T_r}{F(n)} \right] \quad (3.32)$$

Siendo:

$$F(n) = \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdot \ln(n) - \frac{3 \cdot n^2 - 1}{4 \cdot n^2} \quad (3.33)$$

3.4 Teoría de consolidación 2D y 3D. Flujo vertical y horizontal (coordenadas rectangulares).

En dominios anisótropos 2D y 3D las ecuaciones de Terzaghi se escriben, respectivamente, en la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{v,z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_{v,x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{v,z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_{v,x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{v,y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.35)$$

La Figura 3.11 muestra el esquema físico de un escenario de consolidación 2D rectangular, con drenajes hacia las fronteras superior y lateral. En general, los coeficientes de consolidación en el plano horizontal son iguales, $c_{v,x} = c_{v,y}$. Llamando $c_{v,h}$ al coeficiente de consolidación horizontal, la ecuación 3D se simplifica a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_{v,z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c_{v,h} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.36)$$

Esta ecuación se aplica a escenarios 2D (y 3D horizontalmente isótropos) en los que el agua drena hacia las fronteras superior y lateral, esta última por la existencia de drenes corridos o zanjas, o por la existencia de mechas drenantes parcial o completamente introducidas en el terreno.

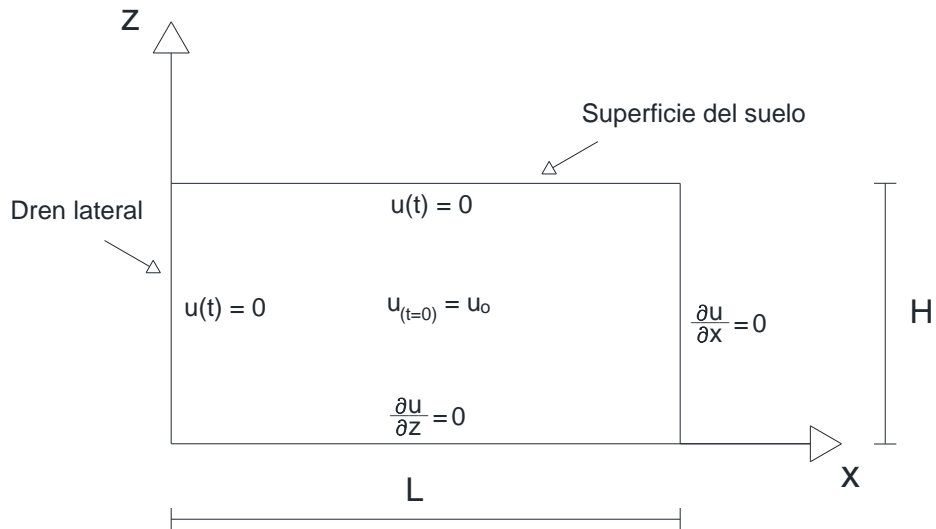


Figura 3.11. Esquema físico de un escenario de consolidación 2D rectangular

Existen soluciones exactas, analíticas o semi-analíticas, para estas ecuaciones de consolidación en escenarios 2D y 3D, aunque dada su complejidad resultan de difícil aplicación por parte del ingeniero civil.

3.5 Teoría de consolidación no lineal

La mayoría de procesos no lineales investigados en la literatura, que se deducen de la misma ecuación general (3.37):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\gamma_w} \frac{du}{dz} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{1+e} \right) = \frac{1}{(1+e)^2} \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (3.37)$$

asumen cierto tipo de dependencias funcionales $e = e(\sigma')$ y $k = k(\sigma')$ que se ajustan en buen grado al comportamiento mecánico del suelo. Además, los modelos no lineales pueden asumir (o no) que el valor '1 + e' es aproximadamente constante ($1 + e \approx 1 + e_0$), reduciendo la ecuación anterior a su forma más simplificada:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\gamma_w} \frac{du}{dz} \right) = \frac{1}{1+e_0} \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (3.38)$$

Por otro lado, no tienen en cuenta, en general, la contracción del suelo a lo largo del proceso o, lo que es lo mismo, el cambio de volumen de los elementos del suelo en función de la presión efectiva; un mecanismo que algunos autores recogen como un cierto tipo de problema de frontera móvil (Chen [1983]). La no asunción de esta hipótesis

implica una nueva ecuación en el modelo matemático o un nuevo término en la ecuación anterior, según la forma de plantear el problema.

Históricamente, el estudio no lineal de la consolidación puede sintetizarse en los modelos desarrollados por Davis y Raymond [1965], Juárez-Badillo [1983], y Cornetti y Battaglio [1994], este último reescrito dos años después buscando una mejor presentación, con la introducción de nuevos coeficientes, por Arnod y col. [1996].

Aunque son numerosos los trabajos de otros autores que merecerían ser citados en relación con la consolidación no lineal, la mayor parte de ellos recogen aspectos particulares y secundarios de los modelos anteriores o bien presentan diferentes técnicas numéricas de solución.

3.5.1 Modelo de Davis y Raymond

En un primer paso hacia la teoría de consolidación no lineal, estos autores asumen, por un lado, un coeficiente de consolidación constante sobre la base de la siguiente hipótesis (Davis y Raymond [1965], p. 162): *'In a mass of real soil the compressibility, permeability and coefficient of consolidation vary during the consolidation process. The least variable factor for normally consolidated clays is the coefficient of consolidation. It seems reasonable, therefore, that a more accurate consolidated theory could be developed by assuming the coefficient of consolidation to be constant while the compressibility and permeability were both allowed to decrease with increasing pressure'*.

Por otro, adoptan una dependencia $e \sim \sigma'$ regida por la ley empírica

$$e = e_o - I_c \cdot \log_{10} \left(\frac{\sigma'}{\sigma'_o} \right) \quad (3.39a)$$

$$I_c = \frac{-(e - e_o)}{\log_{10} \sigma' - \log_{10} \sigma'_o} \quad (3.39b)$$

con $I_c = \text{constante}$

o bien,

$$\sigma' = \sigma'_o 10^{-\left(\frac{e - e_o}{I_c}\right)} \quad (3.40)$$

Donde I_c es el índice de compresibilidad. También asumen las hipótesis clásicas siguientes:

- i) se ignora la consolidación secundaria, es decir, el esqueleto del suelo no fluye bajo la presión efectiva creciente,
- ii) condiciones de contorno edométricas, esto es, el suelo está lateralmente confinado y los puntos de la misma cota horizontal tienen la misma presión efectiva y presión total,
- iii) coeficiente de consolidación constante en suelos normalmente consolidados, una hipótesis derivada de la experiencia en pruebas edométricas,
- iv) el agua de los poros y las partículas de suelo son incompresibles, con lo que en condiciones de suelo saturado, $\sigma = \sigma' + u$,
- v) peso del suelo despreciable frente a la carga aplicada, lo que implica:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial z}$$
- vi) ley de Darcy, y
- vii) el cambio de espesor se considera despreciable frente al espesor inicial, es decir, $1+e$ constante.

Bajo estas hipótesis las soluciones del modelo demuestran que la teoría de Terzaghi predice satisfactoriamente el grado medio de consolidación (o asentamiento), \bar{U}_s , pero no el grado medio de disipación del exceso de presión intersticial, \bar{U}_σ , cuya solución se desplaza hacia el lado menos seguro (mayor disipación de presión para un mismo tiempo en el modelo de Terzaghi, tal y como veremos en la Figura 3.12).

A partir del coeficiente de compresibilidad volumétrico, $m_v = -\frac{\partial e}{\partial \sigma'} \left(\frac{1}{1+e} \right)$, y de la expresión $\frac{\partial e}{\partial \sigma'}$ obtenida de (3.39b), podemos escribir

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma'} = -\frac{0.434 I_c}{\sigma'} \quad (3.41)$$

que al sustituir en la expresión de m_v nos da el coeficiente de compresibilidad volumétrico en función de la tensión efectiva

$$m_v = \frac{0.434 I_c}{(1+e)\sigma'} = \frac{A}{\sigma'} \quad ; \quad A = \frac{0.434 I_c}{(1+e)} \quad (3.42)$$

Así, este coeficiente es inversamente proporcional a la presión efectiva. Por otro lado, la asunción de un valor constante para el coeficiente de consolidación vertical del suelo c_v :

$$c_v = \frac{k}{m_v \cdot \gamma_w} \quad (3.43)$$

Donde k es la permeabilidad del suelo (conductividad hidráulica), γ_w es la densidad del agua, y m_v el coeficiente de compresibilidad volumétrico. Usando (3.42) podemos escribir:

$$c_v = \frac{k \sigma'}{A \gamma_w} \propto (k \sigma') \quad (3.44)$$

Una ecuación equivalente a asumir que k y σ' cambian inversamente durante el proceso de consolidación. Ahora, para la deducción de la ecuación de consolidación igualamos la pérdida de agua por unidad de área (m^3/m^2s) en un elemento de suelo de espesor dz (aplicando la ley de Darcy al movimiento del agua a través del suelo),

$$\frac{\partial v}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz$$

expresión que, tras ser operada, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} dz &= -Ac_v \left\{ \left(\frac{1}{\sigma'} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{\sigma'^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right\} dz = \dots \\ &= -\frac{0.434 I_c c_v}{(1+e)} \left\{ \left(\frac{1}{\sigma'} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{\sigma'^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right\} dz \end{aligned} \quad (3.45)$$

Igualando esta expresión al cambio temporal de la deformación,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{I_c}{1+e_0} \cdot \frac{0.434}{\sigma'} \cdot \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (3.46)$$

se obtiene

$$-c_v \left\{ \left(\frac{1}{\sigma'} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{\sigma'} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right\} = \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (3.47)$$

que, bajo la hipótesis de condiciones edométricas, $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$, o bien $\frac{\partial \sigma'}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial z}$, se reduce a

$$-c_v \left\{ \left(\frac{1}{\sigma'} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\sigma'} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \quad (3.48)$$

Para una misma etapa de carga $\sigma = \sigma' + u$ no varía ni con la profundidad ni con el tiempo. Así, debería cumplirse también la relación $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$, o bien $\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial t}$. Sustituyendo este resultado en (3.48) podemos reescribir la ecuación en las formas:

$$c_v \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\sigma'} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.49)$$

$$c_v \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\sigma - u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.50)$$

Esta última es la ecuación de consolidación de Davis y Raymond en términos del exceso de presión intersticial, una ecuación claramente no lineal. Buscando una simplificación que la reduzca a una ecuación lineal en pruebas edométricas, los autores proponen la introducción de una nueva variable w , a la que no asignan significado físico explícito, cuya relación con el exceso de presión intersticial es de la forma:

$$w = \log_{10} \left(\frac{\sigma'}{\sigma'_f} \right) = \log_{10} \left(\frac{\sigma'_f - u}{\sigma'_f} \right) \quad (3.51)$$

donde σ'_f es la tensión efectiva final. La introducción de esta nueva variable, a través de sus derivadas espaciales y temporales, en la ecuación (3.49) conduce a una ecuación de difusión pura:

$$c_v \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.52)$$

Lo que se difunde en esta nueva ecuación lineal, pues, es una nueva magnitud local (w). Añadiendo a la ecuación (3.52) las condiciones de contorno en función de esta nueva variable, los autores determinan su solución analítica, en términos de $u(z, t, \frac{\sigma'_f}{\sigma'_i})$

tras deshacer el cambio de variable $w = \log_{10} \frac{\sigma'_f - u}{\sigma'_f}$

$$u = \sigma'_f \left[1 - \left(\frac{\sigma'_i}{\sigma'_f} \right)^B \right] \quad (3.53)$$

siendo B

$$B = \sum_{N=0}^{N=\infty} \frac{2}{M} \left[\text{sen } M \frac{z}{H} \right] e^{-M^2 T_v}, \quad M = (2N + 1) \frac{\pi}{2}, \quad T_v = \frac{c_v t}{H^2} \quad (3.54)$$

También deducen el grado de asentamiento instantáneo promediado a todo el dominio, $\bar{U}_s(t)$, comprobando que es el mismo que el deducido en el caso lineal de Terzaghi.

$$\bar{U}_s = 1 - \sum_{N=0}^{N=\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T_v} \quad (3.55)$$

Es importante hacer notar que la coincidencia de grado instantáneo medio de asentamiento (\bar{U}_s) en ambos modelos, Terzaghi, y Davis y Raymond, no implica coincidencia ni en el asiento instantáneo (s) ni en el asentamiento final (s_f) que, sin duda,

son diferentes y dependen del coeficiente de compresibilidad a_v (un parámetro constante en el modelo de Terzaghi y variable en el de Davis y Raymond).

El siguiente cuadro, Tabla 3.1, resume la comparación entre los modelos de Terzaghi y de Davis y Raymond.

Modelo	Hipótesis	Ec. de difusión de u	Ec. de difusión de w
Terzaghi	i) c_v constante ii) k constante iii) a_v constante iv) Ley de Darcy	lineal (con $\Delta e = a_v \Delta u$) $c_v \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} = \frac{\partial u}{\partial t}$	-
Davis y Raymond	i) c_v constante ii) $e - \log \sigma'$ iii) Ley de Darcy	no lineal $c_v \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{\sigma'} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} = \frac{\partial u}{\partial t}$	lineal $c_v \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} = \frac{\partial w}{\partial t}$

Tabla 3.1. Comparación de los modelos de Terzaghi y de Davis y Raymond

Volvemos a incidir en que las similitudes parciales entre los modelos de Terzaghi y de Davis y Raymond no suponen la igualdad de asentamientos. Si, por ejemplo, partimos de un estado inicial definido por los valores e_0 y σ'_0 , y aplicamos una carga al terreno $\Delta \sigma$, el valor del asiento calculado a partir del modelo de Terzaghi es mayor que el obtenido con el modelo de Davis y Raymond, ya que, mientras para Terzaghi a_v es constante para cualquier $\Delta \sigma$, para Davis y Raymond a_v disminuye con la tensión efectiva, pues

$$a_v = m_v(1 + e) = \frac{A}{\sigma'}(1 + e) = \frac{0.434 I_c}{\sigma'} \quad (3.56)$$

Naturalmente, todo ello para un mismo valor inicial de a_v .

En conclusión, sobre el modelo de Davis y Raymond, puede decirse que para valores grandes de la relación de las presiones efectivas final e inicial (σ'_f/σ'_i), el exceso de presión en los poros en un suelo normalmente consolidado se espera que sea considerablemente mayor en cualquier instante (tanto más cuanto mayor sea el cociente anterior) que el previsto por la teoría lineal de Terzaghi.

Por otro lado, el grado de asentamiento se espera que sea independiente de la relación anterior y coincida con el previsto por Terzaghi. La Figura 3.12 muestra las soluciones numéricas de Davis y Raymond [1965] para el grado medio de asentamiento y para el

grado de disipación de presión intersticial, en la posición más alejada de la frontera drenante, en función de la relación de cargas (σ'_t/σ'_i). Estos resultados han sido comprobados en suelos remoldeados normalmente consolidados, de diferentes propiedades, en el trabajo de Davis y Raymond.

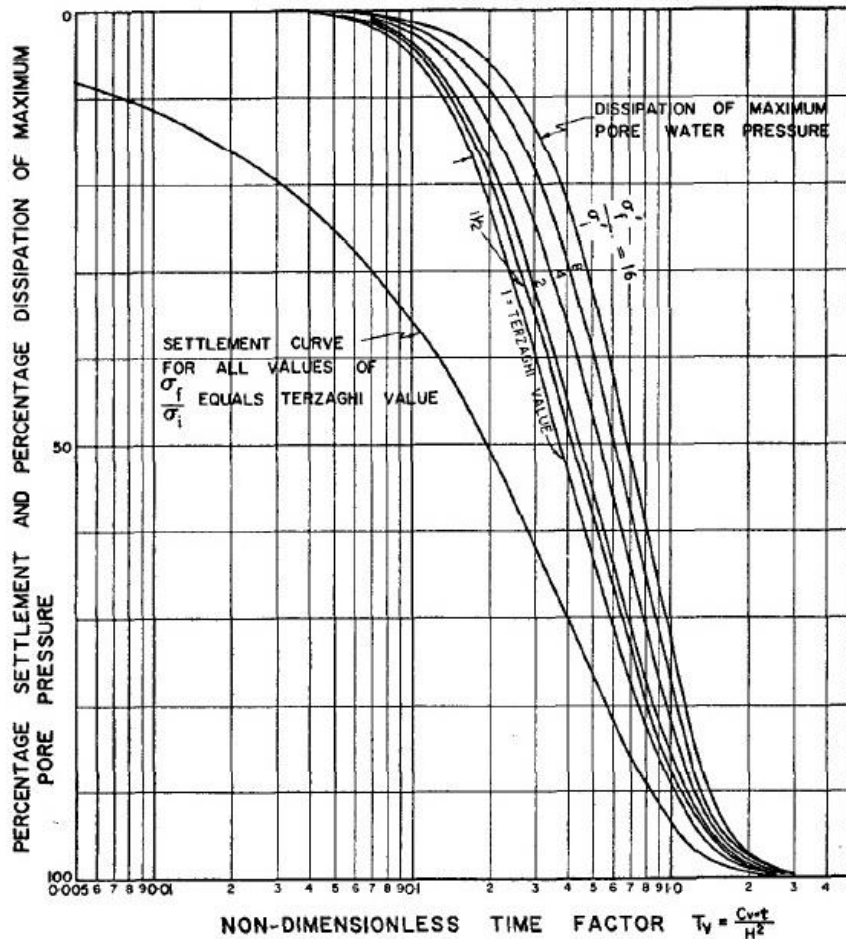


Figura 3.12 Solución del grado medio de asentamiento y grado de disipación de la presión intersticial correspondiente a la posición más alejada de la frontera drenante. Davis y Raymond [1965]

3.5.2 Extensión del modelo de Davis y Raymond para la hipótesis de “1+e” no constante

Esta opción, más general, elimina las ‘incongruencias’ asumidas por Davis y Raymond, que adoptaban un valor constante de ‘1 + e’ a la hora de obtener la distribución de σ' ; solución que, posteriormente, emplean para determinar el grado medio de asiento mediante su ecuación constitutiva $e - \sigma'$, en la que no puede cumplirse dicha hipótesis, como es obvio.

Partimos de la ecuación (3.37) que reescribimos a continuación

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\gamma_w} \frac{du}{dz} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e}{1+e} \right) = \frac{1}{(1+e)^2} \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right) \quad (3.57)$$

Mediante manipulaciones matemáticas, esta ecuación puede escribirse, en términos de σ' y e , en la forma (García-Ros [2016])

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = - \frac{c_v [(1+e) - I_c \cdot 0.4343]}{\sigma'} \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right)^2 + c_v (1+e) \left(\frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2} \right) \quad (3.58)$$

Una ecuación que, comparada con la ecuación del modelo original de Davis y Raymond (3.50), presenta coeficientes no lineales tanto para la primera derivada espacial de σ' como para la segunda.

3.5.3 Extensión del modelo de Davis y Raymond considerando dz variable

La correcta eliminación de la hipótesis '1 + e' constante debe suponer añadir al modelo matemático la ecuación que relaciona dz con e . A partir de la equivalencia

$$\frac{dz}{dz_o} = \frac{1+e}{1+e_o} \quad (3.59)$$

se llega al nuevo valor de dz , variable con el proceso de consolidación

$$dz = dz_o \frac{1+e}{1+e_o} \quad (3.60)$$

lo cual supone añadir al modelo matemático (3.58), en la expresión del dz , la dependencia de $\frac{1+e}{1+e_o}$.

4 DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL SUELO PARA EL MODELO DE DAVIS Y RAYMOND

4.1 Datos de laboratorio

En este capítulo abordaremos la obtención del índice de compresión I_c , necesario para caracterizar el modelo de Davis y Raymond.

Para ello partiremos de los datos de un ensayo completo de consolidación-edométrico realizado a una muestra de arcilla con alto porcentaje en moscovita normalmente consolidada: tensión efectiva inicial (σ'_o), tensión efectiva final (σ'_f), índice de poros inicial (e_o), índice de poros final (e_f), coeficiente de consolidación (c_v) y permeabilidad (k_v), Tabla 4.1.

	σ'_o (kN/m ²)	σ'_f (kN/m ²)	e_o	e_f	c_v (m ² /año)	k_v (m/año)
Precarga	0	12.5	1.441	1.280	-	-
Escalón 01	12.5	25	1.280	1.182	0.166	0.00569
Escalón 02	25	50	1.182	1.054	0.300	0.00713
Escalón 03	50	100	1.054	0.897	0.316	0.00494
Escalón 04	100	50	0.897	0.918	1.117	0.00238
Escalón 05	50	25	0.918	0.947	0.384	0.00228
Escalón 06	25	50	0.947	0.930	1.018	0.00352
Escalón 07	50	100	0.930	0.881	0.669	0.00336
Escalón 08	100	200	0.881	0.760	0.368	0.00240
Escalón 09	200	400	0.760	0.627	0.240	0.00092
Escalón 10	400	200	0.627	0.661	0.698	0.00071
Escalón 11	200	100	0.661	0.699	0.362	0.00080

Tabla 4.1. Valores de índice de poros y tensión efectiva del suelo en los diferentes escalones.

Muestra: arcilla con alto porcentaje en moscovita

A partir de los valores de σ'_f y e_f de cada escalón de carga se obtiene la curva edométrica de la arcilla estudiada, Figura 4.1.

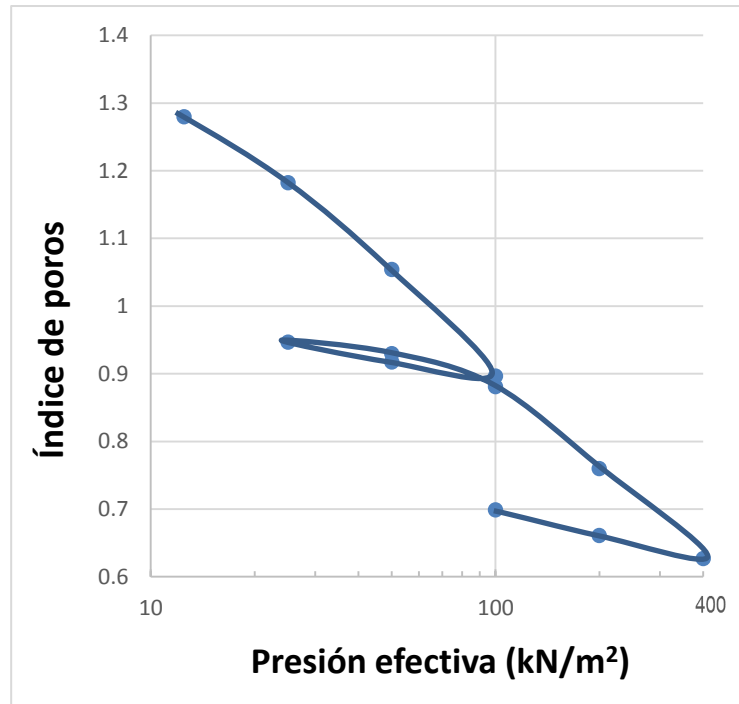


Figura 4.1 Curva edométrica de una arcilla con alto porcentaje en moscovita

4.2 Ajuste paramétrico

A partir de los datos de la Tabla 4.1, se procede a calcular el índice de compresión de cada tramo, empleando las expresiones presentadas en el capítulo anterior. Para el índice de compresión, según Davis y Raymond, recordamos la expresión 3.39b:

$$I_c = \frac{-(e - e_o)}{\log_{10}\sigma' - \log_{10}\sigma'_o} \quad (3.39b)$$

Que también se puede escribir como:

$$e = e_o - I_c \cdot \log_{10}\left(\frac{\sigma'}{\sigma'_o}\right)$$

Donde e_o y σ'_o son los valores iniciales del índice de poros y tensión efectiva del suelo antes de aplicar la carga, e I_c el índice de compresión (pendiente de la recta $e - \log_{10}\sigma'$). Operando, obtenemos el índice de compresión para cada escalón, tomando como valores de e y σ' los correspondientes a los valores finales de estos parámetros al final del escalón de carga, es decir, e_f y σ'_f . Los resultados se recogen en la Tabla 4.2.

	σ'_o (kN/m ²)	σ'_f (kN/m ²)	e_o	e_r	I_c (NC)	I_c (OC) descarga	I_c (OC) recarga	I_c (12.5-400) (NC)
Precarga	0	12.5	1.441	1.280	-	-	-	-
Escalón 01	12.5	25	1.280	1.182	0.325	-	-	-
Escalón 02	25	50	1.182	1.054	0.426	-	-	-
Escalón 03	50	100	1.054	0.897	0.523	-	-	-
Escalón 04	100	50	0.897	0.918	-	0.069	-	-
Escalón 05	50	25	0.918	0.947	-	0.097	-	-
Escalón 06	25	50	0.947	0.930	-	-	0.057	-
Escalón 07	50	100	0.930	0.881	-	-	0.162	-
Escalón 08	100	200	0.881	0.760	0.401	-	-	-
Escalón 09	200	400	0.760	0.627	0.442	-	-	0.434
Escalón 10	400	200	0.627	0.661	-	0.114	-	-
Escalón 11	200	100	0.661	0.699	-	0.126	-	-
Promedio					0.423	0.083	0.109	0.434

Tabla 4.2. Valores obtenidos del índice de compresión para cada escalón de carga

Como se puede observar, a la hora de presentar los resultados, se ha tenido en cuenta el estado o historia tensional de la arcilla, de manera que el valor de I_c se ha ordenado en columnas, en función de si la arcilla está sobre consolidada (OC) o no (NC). Para aquellos escalones donde la arcilla es OC, se ha distinguido también entre los escalones de descarga y de recarga.

A la vista de los resultados, se observa como el valor del parámetro I_c se mantiene relativamente constante, lo cual es una prueba de la bondad que tiene el empleo de la relación constitutiva $e-\log_{10}(\sigma')$. De hecho, para la arcilla NC, una vez se procede a promediar el valor de I_c de los 5 escalones disponibles y comparado con el I_c obtenido con los valores de los extremos de estos 5 escalones se obtiene prácticamente el mismo valor del índice de compresión (0.423 frente a 0.434).

5 SIMULACIONES NUMÉRICAS

5.1 Simulaciones numéricas de las distintas variantes del modelo de Davis y Raymond. Discusión de resultados

En este apartado vamos a resolver 2 escenarios de consolidación mediante simulaciones por ordenador. El programa de cálculo utiliza un algoritmo de resolución numérica basado en el método de redes: una herramienta eficaz y fiable basada en la analogía que existe entre los términos (o coeficientes) de una ecuación diferencial y los elementos de un circuito eléctrico.

En las simulaciones, resolveremos cada escenario de consolidación utilizando 4 modelos de comportamiento diferentes: modelo de Davis y Raymond en las 3 variantes vistas en este trabajo y modelo lineal. Una vez obtenidos los resultados, compararemos las soluciones obtenidas.

Escenario 01

El primer escenario de consolidación a resolver trata de un suelo, con las propiedades del apartado anterior, de 1m de espesor en el cual se tiene un tensión efectiva inicial de 25 kPa y al que se le aplica una carga uniformemente distribuida de 25 KPa.

De esta forma, los parámetros que introduciremos al programa de cálculo para realizar las simulaciones se pueden observar en la Tabla 5.1:

H (m)	σ'_o (KPa)	σ'_f (KPa)	ψ	e_o	l_c	c_v (m ² /año)
1	25	50	2	1.182	0.426	0.300

Tabla 5.1. Parámetros del terreno para el escenario 01

Para esta primera simulación, se ha comprobado que un tiempo suficiente para alcanzar la completa consolidación (por cualquiera de los modelos utilizados) del terreno es 7 años. Este período de tiempo se ha dividido en 500 partes (iteraciones), mientras que el dominio espacial se ha reticulado en 120 celdas. Con estos parámetros, se ha comprobado que se obtienen soluciones suficientemente precisas (errores inferiores al 1%) y con tiempos de computación realmente bajos (2 minutos), no siendo necesario aumentar la reticulación del problema.

Las Figuras 5.1.1 y 5.1.2 representan la evolución del grado de consolidación promedio para los cuatro modelos de cálculo (línea verde: modelo de Terzaghi; línea roja: modelo de Davis y Raymond; línea azul: modelo de Davis y Raymond con 1+e no constante;

línea negra: modelo de Davis y Raymond con $1+e$ no constante y dz variable). A la vista de los resultados, y como era de esperar, los modelos de Terzaghi y Davis y Raymond muestran la misma solución para esta función, mientras que los modelos extendidos aportan tiempos de consolidación más bajos. Esto se encuentra en concordancia con lo que cabría prever, puesto que en los modelos extendidos, a medida que el terreno consolida se tiene en cuenta en acortamiento del camino drenante del agua: en consecuencia, el proceso de consolidación se acelera.

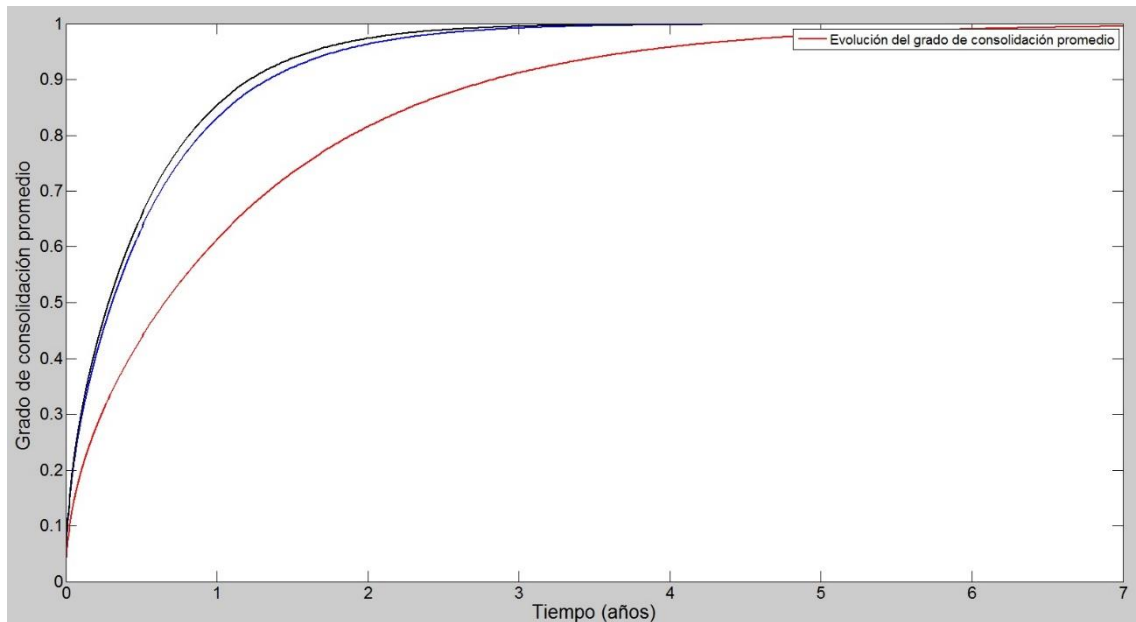


Figura 5.1.1 Grado medio de consolidación para las distintas variantes del modelo de Davis y Raymond.

Escenario 01

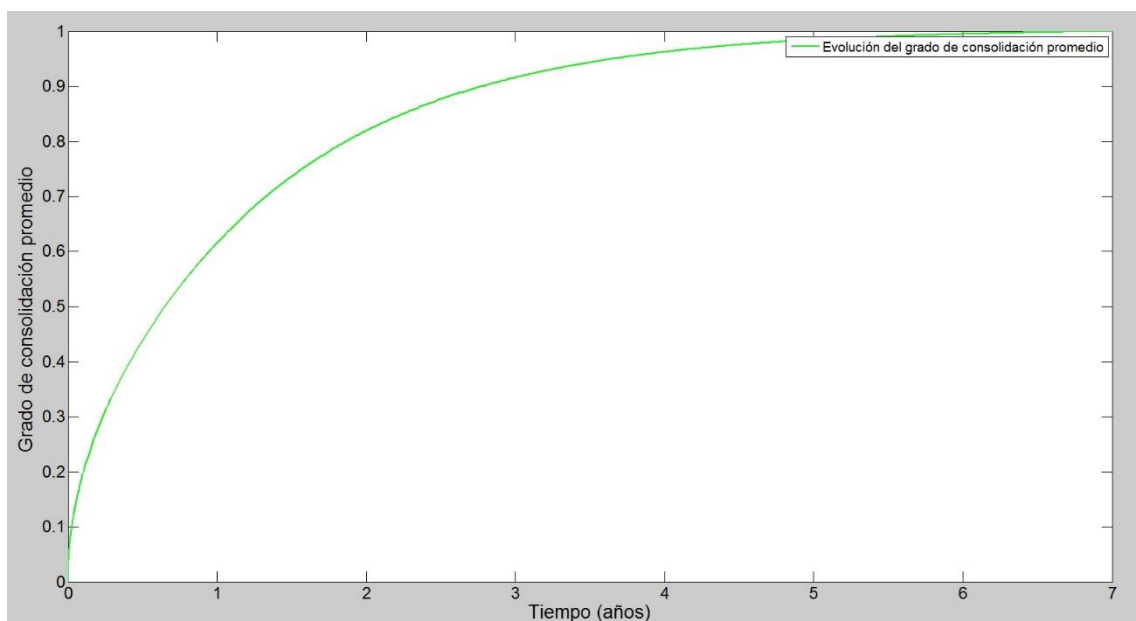


Figura 5.1.2 Grado medio de consolidación para el modelo de Terzaghi. Escenario 01

No obstante, para todos los modelos, el valor del asiento es el mismo: 5.9 cm.

En cuanto a la disipación del exceso de presión intersticial, Figura 5.1.3, podemos comprobar que, tal y como postularon Davis y Raymond, la disipación de esta presión se retrasa con respecto al modelo de Terzaghi (líneas roja y verde). Sin embargo, en los modelos extendidos, no ocurre así. Esto es debido, sin duda, al efecto de haber implementado en los modelos de cálculo la contracción del terreno, lo cual supone una distancia de drenaje menor.

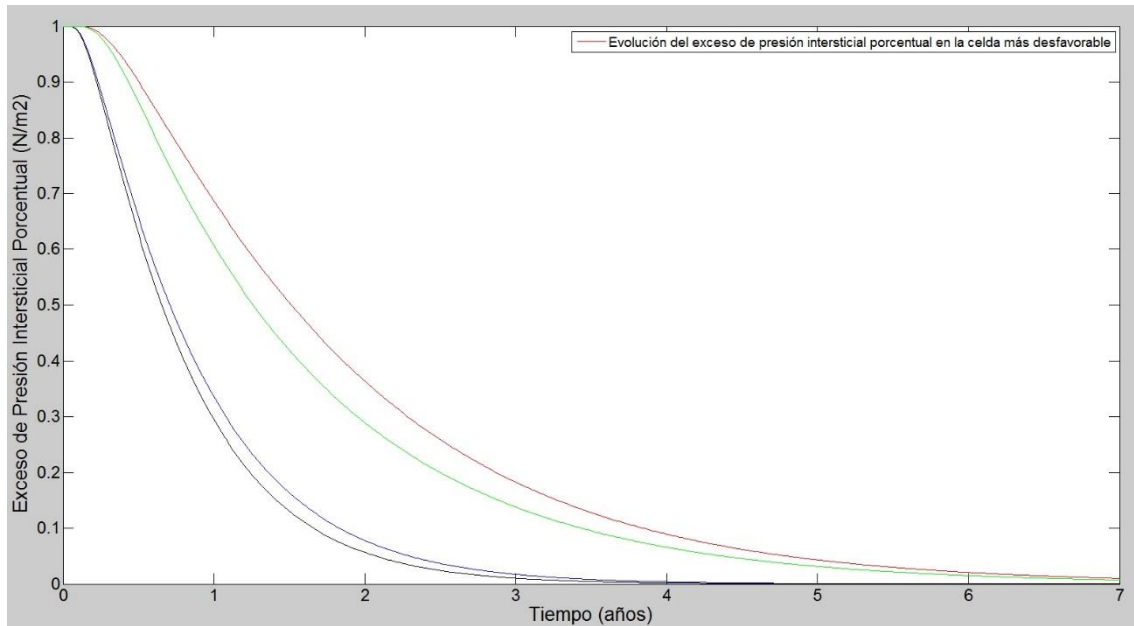


Figura 5.1.3 Evolución del exceso de presión intersticial en la celda más desfavorable para los 4 modelos estudiados. Escenario 01

Para finalizar este apartado, y a modo de ilustración, mostramos en la Figura 5.1.4 la evolución del exceso de presión intersticial y efectiva, para todas las celdas del medio, en el modelo más general y preciso: Davis y Raymond con $1+e$ no constante y dz variable. Como se observa en la gráfica, durante el proceso de consolidación, a medida que se disipa el exceso de presión intersticial va aumentando en la misma magnitud la presión efectiva.

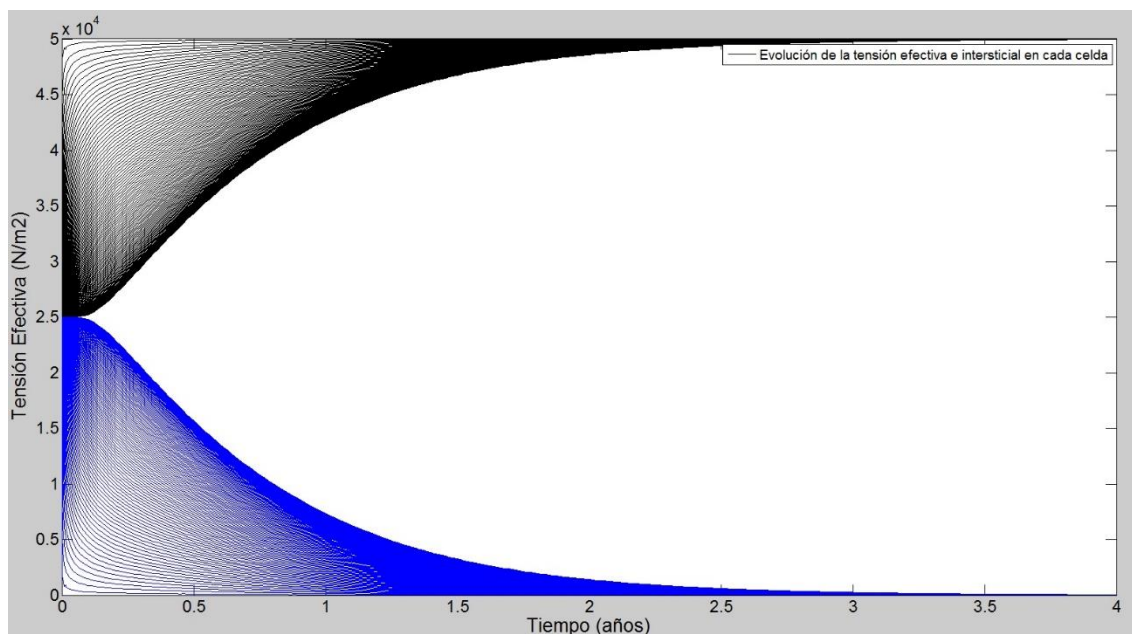


Figura 5.1.4 Evolución del exceso de presión intersticial y efectiva en todas las celdas del suelo. Modelo de Davis y Raymond con $1+e$ no constante y dz variable. Escenario 01

Escenario 02

En este segundo escenario de consolidación se va a simular una salto tensional en el que partiremos de una tensión efectiva inicial de 100 kPa y, tras aplicar una carga en superficie de 300 kPa, el terreno, de 1m de espesor nuevamente, alcanzará una tensión efectiva final de 400 kPa una vez haya finalizado el proceso de consolidación.

De esta forma, los parámetros que introduciremos al programa de cálculo para realizar las simulaciones se pueden observar en la Tabla 5.2. Para lo obtención de c_v se ha optado por promediar el c_v correspondiente a los escalones de carga 08 y 09, mientras que para l_c hemos optado por tomar el l_c (12.5-400) de la arcilla normalmente consolidada.

H (m)	σ'_o (KPa)	σ'_f (KPa)	ψ	e_o	l_c	c_v (m ² /año)
1	100	400	4	0.881	0.434	0.304

Tabla 5.2. Parámetros del terreno para el escenario 02

En esta ocasión, un tiempo suficiente para alcanzar la completa consolidación (por cualquiera de los modelos utilizados) del terreno es también 7 años (c_v casi igual que el caso 1). Se ha vuelto a tomar un número de intervalos de tiempo igual 500, mientras que el dominio espacial se ha reticulado también en 120 celdas.

Las Figuras 5.2.1 y 5.2.2 representan la evolución del grado de consolidación promedio para los cuatro modelos de cálculo (línea verde: modelo de Terzaghi; línea roja: modelo de Davis y Raymond; línea azul: modelo de Davis y Raymond con $1+e$ no constante; línea negra: modelo de Davis y Raymond con $1+e$ no constante y dz variable). A la vista de los resultados, y como era de esperar, los modelos de Terzaghi y Davis y Raymond muestran la misma solución para esta función, mientras que los modelos extendidos aportan tiempos de consolidación más bajos. Esto se encuentra en concordancia con lo que cabría prever, puesto que en los modelos extendidos, a medida que el terreno consolida se tiene en cuenta en acortamiento del camino drenante del agua: en consecuencia, el proceso de consolidación se acelera.

En comparación con el caso anterior, se observa cierta aceleración del proceso de consolidación en el modelo más general, $1+e$ constante y dz variable, respecto de los demás. Este resultado encuentra su explicación en el hecho de que, en este caso, el asiento final obtenido es de 0.13cm. Por lo tanto, el terreno se ha comprimido más y de esta manera el efecto de incluir la variación del dz durante el proceso es mayor.

Por el contrario, se observa que la diferencia entre el modelo de Terzaghi (o Davis y Raymond) y el modelo extendido de Davis y Raymond con $1+e$ no constante y dz constante es menor que en el caso anterior. Esto es debido, sin duda, al menor valor del índice de poros inicial del segundo caso ($1+e_{o,caso1} = 2.182$; $1+e_{o,caso2} = 1.881$).

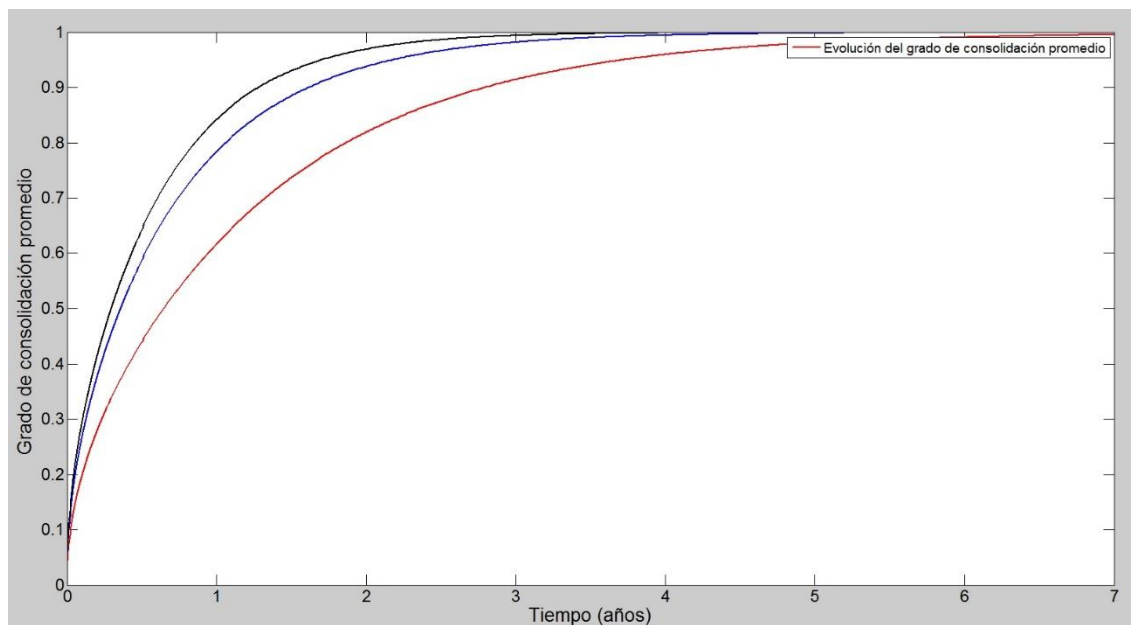


Figura 5.2.1 Grado medio de consolidación para las distintas variantes del modelo de Davis y Raymond.

Escenario 02

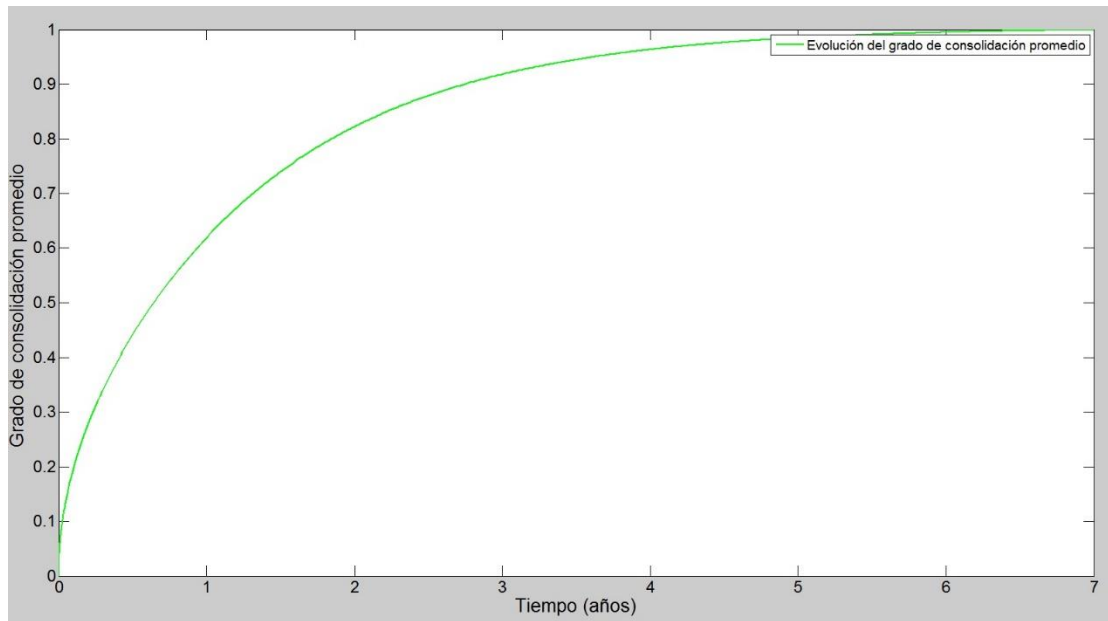


Figura 5.2.2 Grado medio de consolidación para el modelo de Terzaghi. Escenario 02

En cuanto a la disipación del exceso de presión intersticial, Figura 5.2.3, podemos comprobar que, tal y como postularon Davis y Raymond, la disipación de esta presión se retrasa con respecto al modelo de Terzaghi (líneas roja y verde). En este caso, estas líneas se muestran algo más separadas ya que el factor de carga ψ vale en esta ocasión 4, mientras que en el escenario 01 valía 2. Tal y como vimos en la Figura 3.12, estas líneas tienden a separarse con el aumento de ψ .

Sin embargo, en los modelos extendidos, no ocurre así. Esto es debido, sin duda, al efecto de haber implementado en los modelos de cálculo la contracción del terreno, lo cual supone una distancia de drenaje menor.

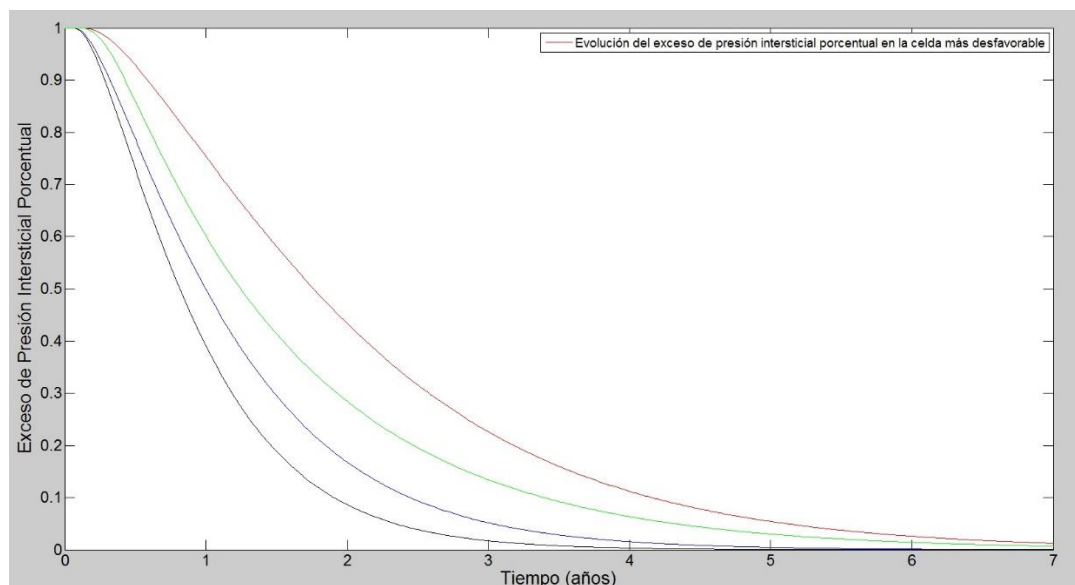


Figura 5.2.3 Evolución del exceso de presión intersticial en la celda más desfavorable para los 4 modelos estudiados. Escenario 02

Para finalizar este apartado, y a modo de ilustración, mostramos en la Figura 5.2.4 la evolución del exceso de presión intersticial y efectiva, para todas las celdas del medio, en el modelo más general y preciso: Davis y Raymond con $1+e$ no constante y dz variable. Como se observa en la gráfica, durante el proceso de consolidación, a medida que se disipa el exceso de presión intersticial va aumentando en la misma magnitud la presión efectiva.

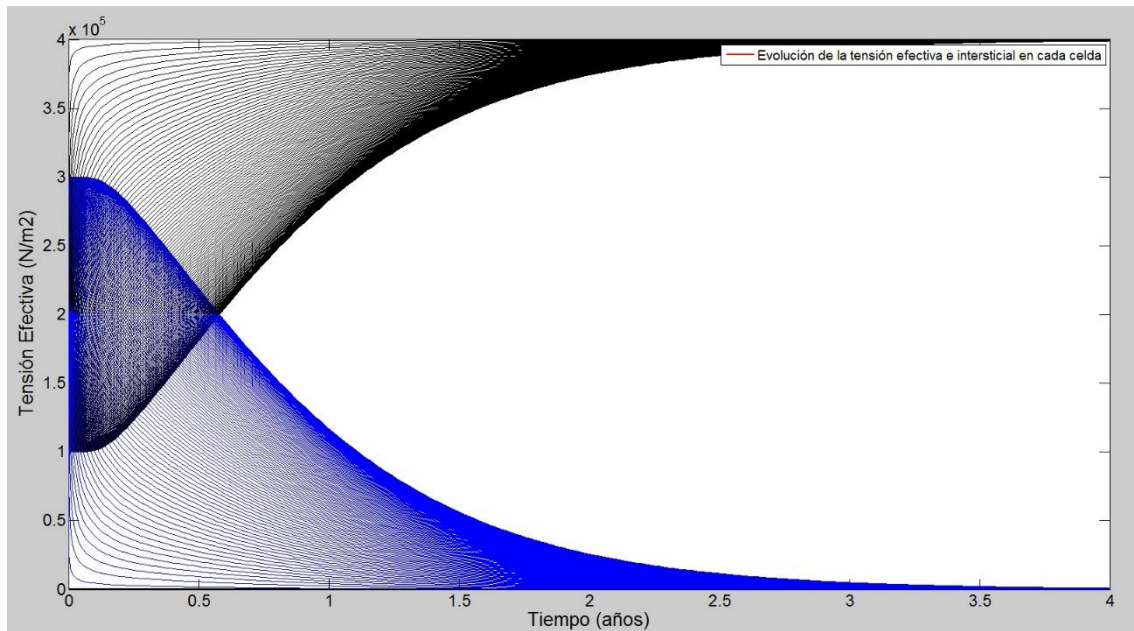


Figura 5.2.4 Evolución del exceso de presión intersticial y efectiva en todas las celdas del suelo. Modelo de Davis y Raymond con $1+e$ no constante y dz variable. Escenario 02

6 CONCLUSIONES Y COMENTARIOS FINALES

Primera: se han revisado las teorías de consolidación lineal de Terzaghi y no lineal de Davis y Raymond.

Segunda: se han presentado formulaciones extendidas y más generales del modelo no lineal de Davis y Raymond.

- Una primera extensión consiste en eliminar la restricción $1+e$ constante del término de contracción de la ecuación de gobierno.
- Una segunda extensión elimina la restricción dz constante del término relacionado con la salida de agua del terreno.

Tercera: se ha realizado un ajuste paramétrico con el objetivo de determinar el coeficiente I_c característico del modelo esfuerzo-deformación propuesto por Davis y Raymond. Como datos de partida se ha tomado el ensayo edométrico completo realizado a una arcilla con alto porcentaje en moscovita.

Cuarta:

Se han realizado simulaciones numéricas con el objetivo de ilustrar las principales diferencias, a nivel de resultados, entre el modelo lineal y las distintas variantes del modelo no lineal de Davis y Raymond. Comprobándose que, cualitativamente:

- El modelo lineal de Terzaghi y el modelo original de Davis y Raymond proporcionan iguales soluciones para el grado medio de consolidación. Sin embargo, en cuanto a la disipación del exceso de presión intersticial, se ha podido comprobar que el modelo lineal de Terzaghi predice una disipación más rápida que el modelo original de Davis y Raymond, tanto más cuanto mayor es el factor de carga (relación entre la tensión efectiva final e inicial).
- Los modelos extendidos proporcionan tiempos de consolidación inferiores a los modelos anteriores. Por un lado, la eliminación de la hipótesis $1+e$ constante hace que, de forma aproximada, el proceso se acelere tantas veces como sea el valor de $1+e_0$. Por otro lado, la eliminación de la hipótesis dz constante también contribuye a la aceleración del proceso de consolidación, tanto más, cuanto mayor sea el asiento obtenido.

Quinta:

El modelo de Terzaghi proporciona soluciones del lado de la seguridad, pero, a nuestro juicio, altamente imprecisas. Los modelos no lineales, que representan el proceso de

una forma más precisa, podrían, a priori, presentar dos dificultades: la primera sería la complejidad del modelo matemático a la hora de su planteamiento y análisis. La segunda sería su resolución, la cual hoy en día está de sobra superada gracias a los potentes ordenadores de los que disponemos y que son capaces de resolver este tipo de problemas mediante algoritmos de cálculo muy precisos y rápidos.

7 REFERENCIAS

- Arnod, S., Battaglio, M. and Bellomo, N. Nonlinear Models in Soils Consolidation Theory Parameter Sensitivity Analysis. *Mathl. Comput. Modelling*, 24 (3), 11-20 (1996)
- Barron, R.A. Consolidation of fine grained soils by drain wells. *Transactions of the ASCE*, 113, 718-742 (1948)
- Carrillo, N. Simple two and three dimensional cases in the theory of consolidation of soils. *Journal of Mathematics and Physics*, 21 (1), 1, 1-5 (1942)
- Chen, B. A method for solving nonlinear parabolic equations with moving boundaries. *Numerical Methods*. Springer Berlin Heidelberg, 37-45 (1983)
- Cornetti, P. and Battaglio, M. Nonlinear consolidation of soil modelling and solution techniques. *Mathl. Comput. Modelling*, 20 (7), 1-12 (1994)
- Davis, E.H. and Raymond, G.P. A Non-Linear Theory of Consolidation. *Géotechnique*, 15 (2), 161-173 (1965)
- García-Ros, G. Caracterización adimensional y simulación numérica de procesos lineales y no lineales de consolidación de suelos. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cartagena (2016)
- Juárez-Badillo, E. General Consolidation Theory for Clays. *Soil Mechanics Series, Report No. 8*, Graduate School of Engineering, National University of Mexico (1983)
- Terzaghi K., Die Berechnung der Durchlässigkeitszifferdes tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungerscheinungen, *Akademie der Wissenschaften in Wien, Technical report II a, 132 N 3/4*, 125-138. *Sitzungsberichte Mathnaturwiss Klasse Abt* (1923)
- Terzaghi, K., Peck, R.B. and Mesri, G. *Soil Mechanics in engineering practice*. John Wiley and Sons, New York (1996)