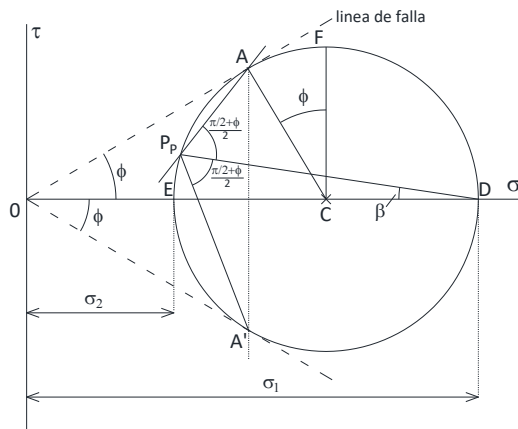
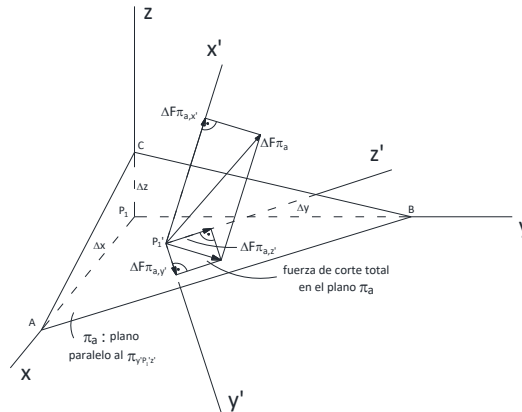




Escuela Técnica Superior de Ingenierías de Caminos y Puertos y de Ingeniería de Minas

PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE ELASTICIDAD EN SUELOS.

APLICACIONES DEL CÍRCULO DE MOHR



Iván Alhama
Gonzalo García
Francisco Alhama



Universidad Politécnica de Cartagena



**PROBLEMAS FUNDAMENTALES DE ELASTICIDAD
EN SUELOS.
APLICACIONES DEL CÍRCULO DE MOHR**

Iván Alhama Manteca

Gonzalo García Ros

Francisco Alhama López

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos y de Ingeniería de Minas

© 2017, Iván Alhama Manteca, Gonzalo García Ros,
Francisco Alhama López
© 2017, Universidad Politécnica de Cartagena.
CRAI Biblioteca
Plaza del Hospital, 1
30202 Cartagena
968325908
ediciones@upct.es



Primera edición, 2017

ISBN: 978-84-16325-38-2

© Imagen de la cubierta: elaboración del autor



Esta obra está bajo una licencia de Reconocimiento-NO comercial-Sin Obra Derivada (by-nc-nd): no se permite el uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas. <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Prólogo

Este texto constituye el primer esfuerzo del Área de Ingeniería del Terreno en elaborar material docente que facilite a los alumnos del Grado y Master de Ingeniería Civil el estudio de los contenidos relacionados con la Geotecnia. Nuestra primera idea era sencillamente elaborar un libro de problemas, pues sabemos la importancia y valoración que los alumnos dan a estos textos de carácter práctico en los que se refugia el alumno como un recurso definitivo y seguro para aprobar la materia que abordan. No hemos podido y, quizás, no hemos querido reducirlo a una 'relación de problemas', y menos aún a una relación de problemas al uso, sin profundizar, sin discutir aspectos teóricos derivados del conocimiento básico, sin extender las preguntas hacia derroteros más amplios e incluso sin dejar aspectos abiertos a un trabajo complementario. No se trata pues de un libro de problemas 'al uso'. Cada una de las cuatro partes que contiene está precedida por una breve descripción teórica de los contenidos desarrollados en los correspondientes problemas.

En relación con el contenido, el objetivo primero fue el de elaborar un conjunto de problemas de mecánica de suelos relacionados con la aplicación del Círculo de Mohr a la determinación de esfuerzos, quizás uno de los temas más complejos de ingeniería del terreno para los alumnos. Hemos mantenido este objetivo al que se dedica el grueso de los problemas, incorporando otros contenidos que hemos considerado previos y que completan los principios de elasticidad: equilibrio de fuerzas y momentos, propiedades elásticas y sus relaciones, tensor de esfuerzo y sus propiedades, etc.

Algunos problemas pueden soslayarse sin perjuicio de continuidad en el desarrollo de los contenidos. En particular, los problemas pueden separarse en dos partes, una más elemental o de grado y otra de mayor nivel correspondiente al máster. Nuestro deseo es que se convierta en un libro de interés para la comprensión de conceptos y de ayuda, cómo no, para el aprobado de la materia. Todos los comentarios serán bienvenidos.

Los autores

Índice

Capítulo 1. El concepto de esfuerzo. Tipos	1
1.1. Introducción. El concepto de esfuerzo	1
Criterio de signos para los esfuerzos normales	5
Problema 1.1	6
1.2. Esfuerzos normales y esfuerzos tangenciales	7
Problema 1.2	8
Criterio de signos para los esfuerzos de corte	9
1.3. Criterio de signos y símbolos de tensiones en geotecnia	10
Problemas 1.3 a 1.5	11
Capítulo 2. La ley de Hooke	17
2.1. La ley de Hooke. El módulo de elasticidad	17
Problemas 2.1 a 2.7	19
Capítulo 3. La matriz de esfuerzos. Transformaciones	35
3.1. La matriz de esfuerzos	35
Problemas 3.1 a 3.6	38
3.2. La matriz de cambios entre sistemas de referencia cartesianos	55
3.2.1. Transformaciones entre versores de sistemas ortogonales cartesianos de diferente orientación	55
3.2.2. Cómo transformar las componentes de un vector dado de un sistema de coordenadas cartesianas a otro con orientación especial diferente	58
Problema 3.7	59

Capítulo 4. Esfuerzos en geotecnia, Círculo de Mohr	63
4.1. Los esfuerzos en mecánica de suelos	63
4.2. Problemas 2-D. Círculo de Mohr	63
Problemas 4.1 a 4.26	64
4.3. Teoría del polo	113
Problemas 4.27 a 4.29	116
4.4. Criterio de fallo de Coulomb	121
Problemas 4.30 y 4.31	122
4.5. Problemas 3-D. Círculo de Mohr	126
Problemas 4.32 a 4.34	128
4.6. Esfuerzos conjugados	137
Problemas 4.35 a 4.38	139
4.7. Círculo de Mohr (2-D) de deformaciones. Ángulo de dilatancia	145
Deformación volumétrica	148
Ángulo de dilatancia	148
Problemas 4.39 a 4.42	151

Capítulo 1

El concepto de esfuerzo. Tipos

1.1. Introducción. El concepto de esfuerzo

A pesar de que el esfuerzo (fuerza por unidad de área, N/m^2) no puede medirse directamente mediante instrumento alguno, ni informa de cómo las fuerzas se transmiten a través de los medios sólidos (cristalinos o no), o a través de los puntos de contacto en materiales granulares como suelos y rocas, es una magnitud universalmente usada por los ingenieros en el diseño y análisis de problemas elásticos en general y de geotecnia en particular.

La Figura 1 (a) ilustra el concepto de esfuerzo mediante la aplicación de una fuerza de tracción axial, \bar{F}_0 (N), distribuida uniformemente sobre las bases de un cilindro de sección transversal constante, A_0 (m^2), y propiedades elásticas homogéneas. Fijemos nuestra atención (manteniendo la muestra intacta) en las dos partes del cilindro separadas por la sección transversal que define el plano π_0 normal al eje de simetría, partes que se han representado como si fueran cuerpos distintos en la Figura 1(b).

El equilibrio estático del cilindro y el de cada una de las partes en que lo hemos dividido (imaginariamente) requiere que la suma de fuerzas y momentos que actúan sobre cada parte y sobre el cilindro completo sea nula. Para cumplir este requisito, y en coherencia con el principio de acción-reacción de fuerzas entre las dos partes del cilindro, es necesario que

- sobre la cara derecha de la pieza de la izquierda, de sección A_0 y contenida en el plano π_0 , actúe una fuerza \bar{F}_0 dirigida hacia la derecha y distribuida uniformemente sobre A_0 , y
- sobre la cara izquierda de la pieza de la derecha, de la misma sección y contenida en el mismo plano, actúe la misma fuerza pero dirigida hacia la izquierda y distribuida asimismo uniformemente sobre la sección. La igualdad de fuerzas (opuestas en sentido) en los pares de

bases de cada mitad asegura el equilibrio de fuerzas, y su distribución uniforme el equilibrio de momentos.

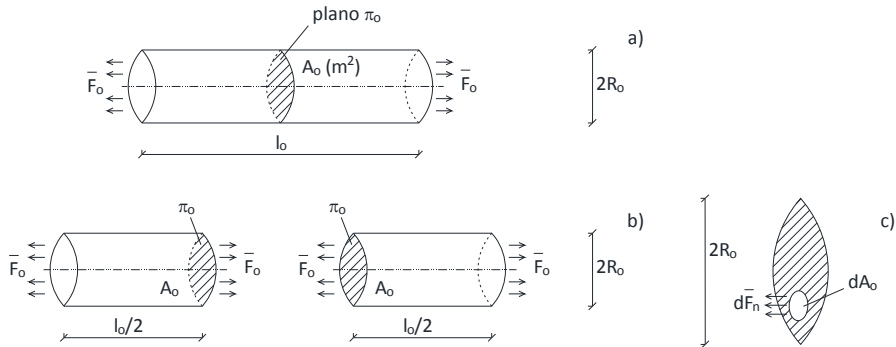


Figura 1. Cilindro homogéneo sometido a fuerzas de tracción

Con esta exposición elemental queremos decir que hablar de fuerzas actuando sobre superficies interiores de un cuerpo podría parecer equívoco. Las fuerzas actúan realmente sobre los propios cuerpos y lo hacen bien en las regiones definidas por sus fronteras (cargas o fuerzas aplicadas sobre las superficies exteriores o, eventualmente, interiores del cuerpo), bien en regiones definidas por fronteras interiores imaginarias (fuerzas de cohesión), o bien en regiones macizas del cuerpo limitadas por una superficie cerrada (fuerzas de volumen, como la gravitatoria o la eléctrica). Así, si hablamos de una superficie (imaginaria o no) interior a un cuerpo, debemos hacerlo con cuidado y, en general, distinguir a qué región del cuerpo separada por dicha superficie referimos nuestras fuerzas.

La Figura 2 muestra un prisma metálico de masa m_0 (peso m_0g), en equilibrio, empujado contra una pared fija (cara EFGH) por una carga \bar{F}_1 aplicada a través de su superficie lateral opuesta a la pared (cara ABCD) y distribuida uniformemente en dicha superficie. Una carga exterior \bar{F}_2 uniformemente distribuida se aplica asimismo sobre la cara superior del prisma (ABEF). Las superficies definidas por los planos indicados π_1, π_2 y π_3 son fronteras exteriores del prisma, las definidas por los planos π_4, π_5 y π_6 son fronteras (o superficies) imaginarias interiores definidas por secciones rectas y, finalmente, π_7 es también una frontera imaginaria interior definida por una superficie curva.

Por hipótesis del enunciado, la distribución uniforme de las fuerzas \bar{F}_1 y \bar{F}_2 en las caras ABCD y EFGH da origen a una 'fuerza por unidad de área' constante en dichas superficies; pero esta afirmación no podemos extenderla, en absoluto al resto de las superficies del cuerpo señaladas en la figura, ni siquiera a la superficie en contacto con la pared. Sólo podemos asegurar que:

- para mantener el cuerpo en equilibrio de fuerzas, la pared debe ejercer sobre el cuerpo a través de su superficie EFGH una fuerza cuya resultante ha de tener dos componentes: una dirigida hacia la izquierda para compensar la fuerza externa \bar{F}_1 (equilibrio de las componentes

horizontales) y otra dirigida hacia arriba para compensar las fuerzas m_0g y \bar{F}_2 (equilibrio de las componentes verticales), y

- para asegurar el equilibrio de momentos, las componentes anteriores no pueden distribuirse uniformemente sobre la cara EFGH (de ser así, el momento sobre el centro de masas de las componentes vertical no podría anularse).

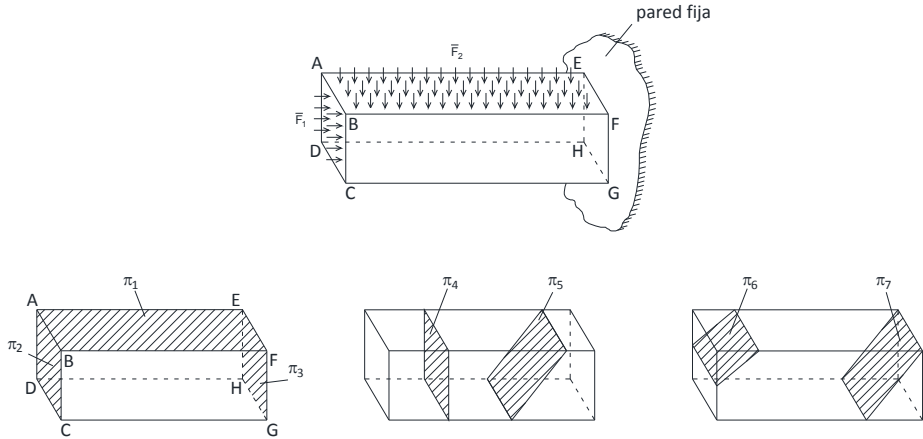


Figura 2. Prisma metálico sometido a cargas externas y superficies π_1 a π_7

Las secciones π_4 a π_7 separan al cuerpo en dos partes, y sobre las superficies de cada parte del cuerpo a que dan lugar dichas secciones se ejercerán fuerzas iguales y opuestas distribuidas no uniformemente por razones del mismo índole que las aludidas en el párrafo anterior (el desequilibrio de momentos verticales u horizontales).

Más tarde presentaremos una definición más precisa del esfuerzo y sus tipos, una magnitud que, al igual que la fuerza, actúa en cada punto de un cuerpo. Por el momento, diremos que el esfuerzo que actúa en un pequeño elemento de su superficie $dA_0 \in A_0$ (es decir, sobre los puntos del cuerpo contenidos en dicha superficie infinitesimal), Figura 1(c), sobre el que actúa la fuerza $d\bar{F}_0$, perpendicular a dicha superficie, viene dado por

$$\sigma_{n,dA_0} = \frac{d\bar{F}_0}{dA_0} \quad (1)$$

y ello es así merced a la distribución regular de $d\bar{F}_0$ sobre dA_0 , o por asumir la hipótesis corriente de que el elemento de superficie es tan pequeño que podemos considerar que $d\bar{F}_0$ no cambia de un punto a otro en el elemento. La expresión (1), σ_{n,dA_0} , define lo que se llama 'esfuerzo normal' ya que $d\bar{F}_0$ es perpendicular a la superficie dA_0 . También, por ser las fuerzas aplicadas de tracción, σ_{n,dA_0} es un esfuerzo normal de tracción. Para la Figura 1, esta expresión podemos generalizarla a toda la superficie

A_0 , merced a que \bar{F}_0 está distribuida uniformemente en A_0 , y escribir la expresión del esfuerzo normal de tracción en los puntos del cilindro contenidos en la superficie A_0 en la forma

$$\sigma_{n,A_0} = \frac{\bar{F}_0}{A_0} \quad (2)$$

En relación con la Figura 1(a), diremos finalmente que el hecho de que en los puntos del cilindro contenidos en la superficie A_0 sólo actúen esfuerzos de tipo normal convierte a la dirección perpendicular al plano π_0 en una '**dirección principal**' y al eje asociado a dicha dirección que pasa por un punto concreto de A_0 en '**eje principal de esfuerzos**' asociado a dicho punto. Así, todos los puntos de una misma sección tienen un eje principal paralelo al eje de simetría en el escenario de la Figura 1 (esto es así por la distribución particular de cargas exteriores; para otra distribución lo anterior no es necesariamente cierto). Pero, dado que todos los puntos del cilindro pertenecen a alguna sección transversal y el esfuerzo en ellos en la dirección perpendicular a la mencionada sección tiene sólo componente normal, todos los puntos de cilindro tienen una dirección principal paralela al eje de simetría y un eje principal paralelo a esta dirección y que contiene el mencionado punto.

El hecho de que para la geometría y configuración de cargas de la Figura 1 el eje de simetría del cilindro defina una de las direcciones principales de esfuerzos en cualquier punto, no significa que los ejes de simetría de un cuerpo definan necesariamente direcciones de ejes principales de esfuerzos. Como se ha mencionado, otra configuración de cargas exteriores en el cilindro puede cambiar las direcciones principales de esfuerzos en algunos (o todos los) puntos del cuerpo.

Recuérdese que en mecánica del sólido rígido, los llamados 'ejes principales de inercia' coinciden con los de simetría (cuando existen) porque se definen por las distribuciones espaciales de masa sin atención a las cargas aplicadas y su distribución. En elasticidad, los ejes principales de tensiones o esfuerzos dependen de los esfuerzos en cada punto, los cuales a su vez dependen de las cargas exteriores e interiores aplicadas al cuerpo, por lo que son independientes de las simetrías (puramente geométricas o de masa) existentes en el sólido.

Volviendo a la disciplina de elasticidad, y como justificaremos más tarde, en cualquier punto de un cuerpo deformado pueden definirse tres direcciones principales de esfuerzo (que, insistimos, cambian en general de un punto a otro aunque el cuerpo tenga propiedades elásticas homogéneas e isotrópicas) y tres ejes principales asociados a las mismas. Las fuerzas sobre las superficies elementales (infinitesimales) normales a estos ejes son paralelas a dichos ejes y, de ahí, los esfuerzos que causan sólo tienen componente normal.

Los esfuerzos, pues, cambian en general de un punto a otro y, además, el esfuerzo normal (también el esfuerzo tangencial, como veremos) en un punto dado (P_0) depende de la orientación del plano al que se refiere dicho esfuerzo. En una dirección normal a un elemento de superficie dA que contiene el

punto P_o , el esfuerzo normal se define aplicando el límite a la ecuación (1); en éste ($dA \rightarrow P_o$ equivale a decir que $dA \rightarrow 0$ en un entorno de P_o) podemos escribir

$$\sigma_{n,P_o} = \lim_{dA \rightarrow P_o} \left(\frac{d\bar{F}_n}{dA} \right) \quad (3)$$

En esta definición, $d\bar{F}_n$ es la componente normal de la fuerza que actúa sobre dA . En general, si llamamos $d\bar{F}$ a la fuerza total que actúa sobre la superficie elemental del cuerpo dA ($d\bar{F}$ y la normal a dA pueden formar un ángulo arbitrario, no necesariamente recto), la fuerza total que actúa sobre una región finita del cuerpo definida por la superficie S viene dada por

$$\bar{F} = \int_S d\bar{F}$$

y su componente normal a la superficie por

$$\bar{F}_n = \int_S d\bar{F}_n = \int_S (d\bar{F} \mathbf{u}_{dA})$$

donde \mathbf{u}_{dA} es el unitario normal a dA en cada punto. Si repetimos el análisis del cilindro de la Figura 1 con fuerzas de compresión, Figura 3, basta cambiar el sentido de todas las fuerzas.

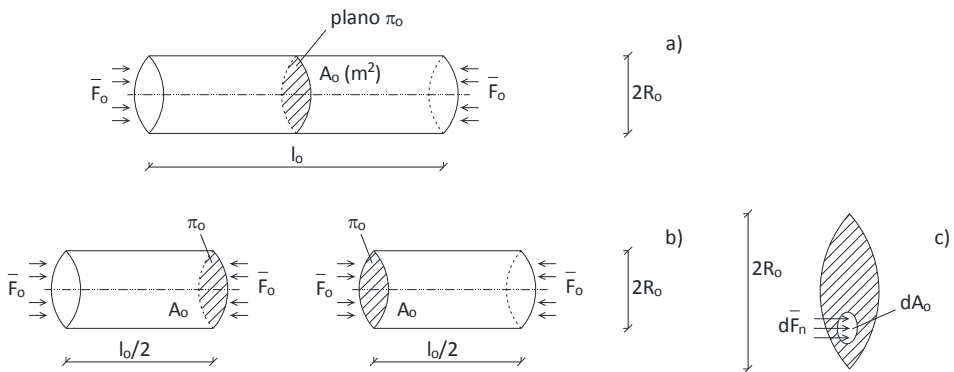


Figura 3. Cilindro homogéneo sometido a fuerzas de compresión

Criterio de signos para los esfuerzos normales.

Los esfuerzos definidos por (1) y (2) son idénticos en compresión y en tracción por lo que para distinguirlos será necesario adoptar un **criterio de signos**.

En elasticidad y resistencia de materiales clásica los esfuerzos normales de tracción son positivos y los de compresión negativos, mientras que en mecánica de suelos (geotecnia) se ha adoptado el criterio

inverso sobre la base de que los suelos apenas ofrecen resistencia a la tracción; en esta disciplina **los esfuerzos de compresión son positivos y los de tracción negativos**.

Problema 1.1

Se quiere estudiar las fuerzas que actúan sobre la rebanada ‘imaginaria’ mostrada en la Figura 1.1a, de sección transversal constante A_0 , perpendicular al eje del cilindro, y espesor δ_e . Las fuerzas de tracción se distribuyen homogéneamente sobre las bases del cilindro. Se desprecia su peso. ¿Cómo sería el análisis para un cilindro de peso m_0g si sólo se aplican fuerzas de tracción en sus bases?

Respuesta:

Puede considerarse el cilindro separado (imaginariamente) en tres partes: la rebanada y los dos cilindros más pequeños situados a su izquierda y a su derecha. Cada una de estas tres partes ha de mantenerse en equilibrio y las fuerzas que actúan sobre las partes en contacto son ‘pares’ acción-reacción (que, de acuerdo con el principio de acción-reacción aplicable en mecánica, son fuerzas del mismo valor, la misma dirección y sentido opuesto).

Es inmediato deducir que las fuerzas sobre la rebanada son del mismo valor que las aplicadas a las bases del cilindro y distribuidas homogéneamente sobre sus caras, Figura 1.1. Se dirigen hacia la izquierda en la cara izquierda de la rebanada y hacia la derecha en su cara derecha. Con ello se mantiene la rebanada en el equilibrio exigido.

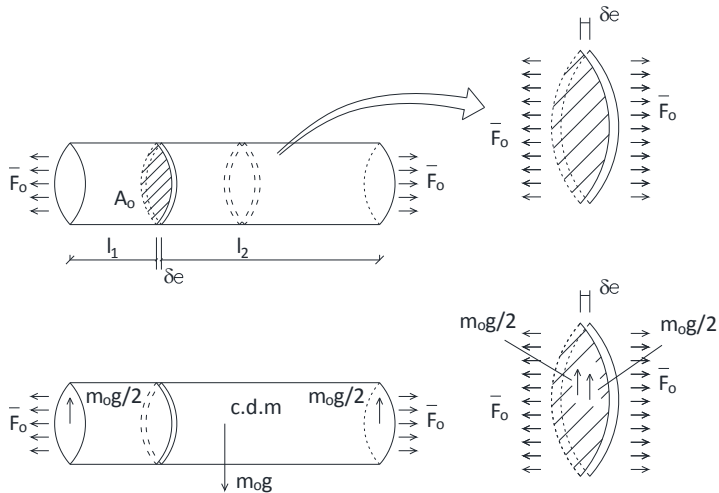


Figura 1.1. Cilindro de propiedades elásticas homogéneas sometido a tracción

Para un cilindro de peso $m_0\mathbf{g}$, se requieren fuerzas verticales en sus bases que compensen el peso. La simetría de la figura y el equilibrio de momentos requieren, en cada base, la aplicación de una fuerza externa dirigida hacia arriba de valor $(1/2)m_0\mathbf{g}$, Figura 1.1.

De la misma forma, el peso de la rebanada $\frac{m_0\delta_e\mathbf{g}}{l_1+l_1+\delta_e}$ ha de compensarse aplicando a sus bases las fuerzas $\frac{1}{2}\left(\frac{m_0\delta_e\mathbf{g}}{l_1+l_1+\delta_e}\right)$; estas fuerzas se obtienen de la cohesión entre partículas (mientras dicha cohesión sea suficiente). Cómo se distribuyen estas fuerzas sobre las caras de la rebanada es un tema que dejamos por el momento.

1.2. Esfuerzos normales y esfuerzos tangenciales

Veamos los esfuerzos sobre el plano π_β , de sección A_β , que resulta de girar el plano π_0 de la Figura 1 un ángulo β en sentido de las agujas del reloj; las secciones A_0 , transversal, y A_β , tienen el mismo centro y el giro se realiza de modo que las líneas perpendiculares a dichas secciones, contenidas en el plano del papel, forman un ángulo β . Así, las superficies A_β y A_0 se relacionan mediante la expresión

$$A_\beta = \frac{A_0}{\cos(\beta)} \quad (4)$$

De nuevo, podemos afirmar que el equilibrio de las dos mitades en que queda dividido el cilindro requiere la existencia de fuerzas normales y tangenciales (o de corte) sobre cada una de las piezas que crea el corte imaginario por la sección A_β , Figura 4.

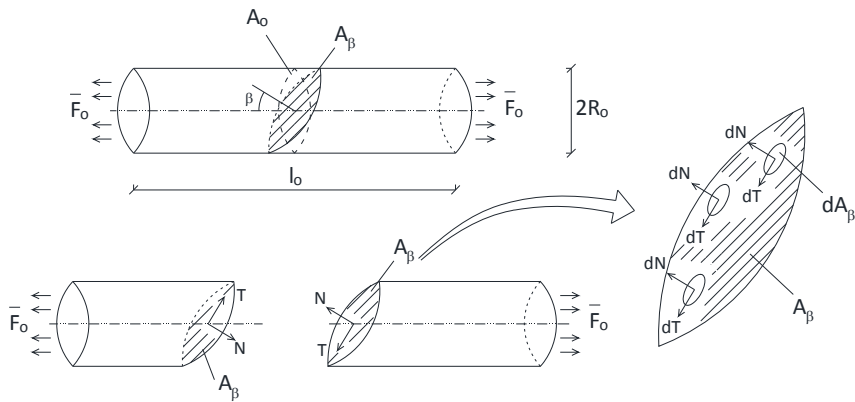


Figura 4. Cilindro bajo fuerzas de tracción en sus bases. Sección inclinada

Si llamamos $d\vec{N}$ y $d\vec{T}$ a las fuerzas normales y de corte que actúan sobre el elemento de superficie dA_β de las caras inclinadas, las fuerzas resultantes sobre una y otra cara vienen dadas por

Fuerzas normales (resultante): $\bar{N} = \int_{A_\beta} d\bar{N}$

Fuerzas de corte (resultante): $\bar{T} = \int_{A_\beta} d\bar{T}$

y sus direcciones son las mostradas en la figura.

Los esfuerzos normales (ya definidos) y los tangenciales (que se definen ahora), $\sigma_{n,\beta}$ y τ_β respectivamente, valen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n,\beta} &= \frac{\bar{N}}{A_\beta} \\ \tau_\beta &= \frac{\bar{T}}{A_\beta} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Problema 1.2

Deducir las dependencias de los esfuerzos $\sigma_{n,\beta}$ y τ_β con la fuerza exterior (\bar{F}_o) y la sección transversal (A_β), Figura 1.2(a). Aplique el criterio de signos de ingeniería del terreno para el esfuerzo normal y deduzca la necesidad de un criterio para el esfuerzo tangencial.

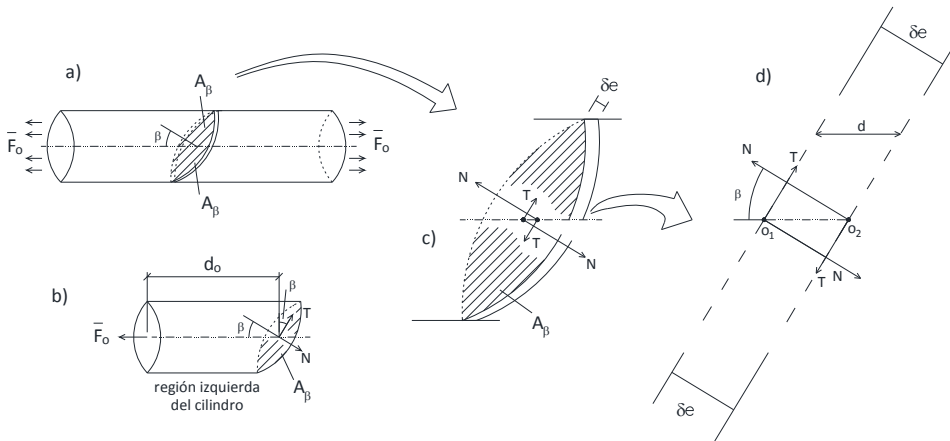


Figura 1.2. Rebanada inclinada sobre un cilindro a tracción

Respuesta:

El equilibrio de cada mitad del cilindro permite escribir

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_o &= \bar{N} \cos(\beta) + \bar{T} \sin(\beta) \\ \bar{N} \sin(\beta) &= \bar{T} \cos(\beta) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ecuaciones de las que pueden deducirse las relaciones de \bar{N} y \bar{T} con \bar{F}_o :

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \bar{F}_o \cos(\beta) \\ \bar{T} &= \bar{F}_o \sin(\beta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Advierta que estas ecuaciones definen las proyecciones de \bar{F}_o sobre la normal al plano A_β y sobre el propio plano (direcciones de los vectores \bar{N} y \bar{T}). De las ecuaciones (5) y (7), los esfuerzos normales y de corte en el plano π_β pueden escribirse en términos de la fuerza aplicada al cilindro (\bar{F}_o) y de su sección transversal (A_o):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n,\beta} &= -\frac{\bar{N}}{A_\beta} = -\frac{\bar{F}_o}{A_o} \cos^2(\beta) \\ \tau_\beta &= \frac{\bar{T}}{A_\beta} = \frac{\bar{F}_o}{A_o} \sin(\beta) \cos(\beta) = \frac{\bar{F}_o}{2A_o} \sin(2\beta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

El signo negativo del esfuerzo normal se debe a que es un cilindro sometido a tracción.

Criterio de signos para los esfuerzos de corte.

Para deducir un criterio de signos para τ_β veremos cómo se compensan los momentos de los esfuerzos normales y de corte sobre la rebanada inclinada de cilindro de la Figura 1.2a.

La Figura 1.2b representa la parte de cilindro a la izquierda de la rebanada y las fuerzas resultantes que actúan sobre ella con sus puntos de aplicación (que son los centros de las bases ya que la distribución de fuerzas es uniforme), mientras que las Figuras 1.2c y 1.2d muestran el detalle de las fuerzas que actúan sobre la rebanada. No existen fuerzas en la superficie lateral de la rebanada por la condición de contorno impuesta al problema en esta frontera. El par de fuerzas normales tiende a hacer girar la rebanada en sentido contrario al movimiento de las agujas de reloj mientras que el par de fuerzas de corte en el sentido del movimiento de las agujas (a partir de ahora usaremos la expresión sentido contrario de las agujas del reloj o sentido de las agujas del reloj).

Las resultantes N y T de las fuerzas distribuidas en las caras actúan sobre los puntos de aplicación O_1 y O_2 de forma que es inmediato comprobar que se satisfacen los equilibrios de fuerzas y de momentos sobre la rebanada para los valores de la ecuación (7).

Tomando momentos respecto de O_1

$$T\delta_e = N\delta_a$$

que con

$$\delta_e = d \cos(\beta)$$

$$\delta_a = d \sin(\beta)$$

se obtiene la ecuación (6).

Para definir los esfuerzos cortantes en un plano del cilindro paralelo al de la galleta, nos vamos al límite $\delta_e \rightarrow 0$ (o $d \rightarrow 0$), y es ahora cuando tenemos que asignar un criterio de signos. El adoptado en ingeniería del terreno es el siguiente:

los esfuerzos que tienden a girar el plano (límite de la galleta con $\delta_e \rightarrow 0$) en sentido contrario a las agujas del reloj son positivos mientras que los que lo hacen girar en sentido de las agujas de reloj, negativos.

Con este criterio, debemos corregir el signo de τ_β en la ecuación (8):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n,\beta} &= -\frac{\bar{F}_o}{A_o} \cos^2(\beta) \\ \tau_\beta &= -\frac{\bar{F}_o}{2A_o} \sin(2\beta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

1.3. Criterio de signos y símbolos de tensiones en geotecnia

Para geometrías 2-D, Figura 5, los criterios se sintetizan en los siguientes puntos:

- Los esfuerzos de compresión son positivos mientras que los de tensión son negativos,
- La tensión o esfuerzo de corte τ_{yz} actúa en la dirección del eje z (es perpendicular, por tanto, al eje y. Lo contrario para el esfuerzo τ_{zy} , que actuando en la dirección del eje y, es perpendicular al eje z.
- Los esfuerzos de corte que causan giros contrarios a las agujas del reloj se consideran positivos mientras que aquellos que lo hacen en el sentido de las agujas del reloj se asumen negativos. Así, en la Figura 5 el esfuerzo τ_{zy} es positivo mientras que τ_{yz} es negativo.

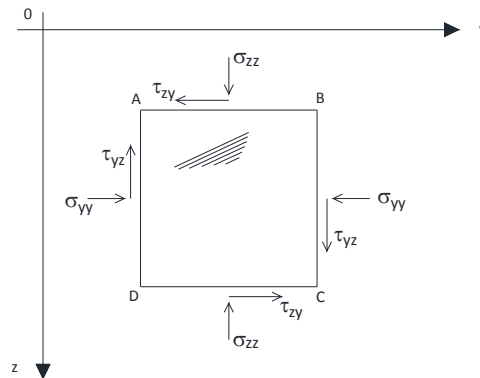


Figura 5. Sistema generalizado de esfuerzos biaxiales

La Figura 6 muestra un paralelepípedo sometido a esfuerzos normales y de corte en sus seis caras que servirá de guía para establecer los acuerdos de signos en 3-D.

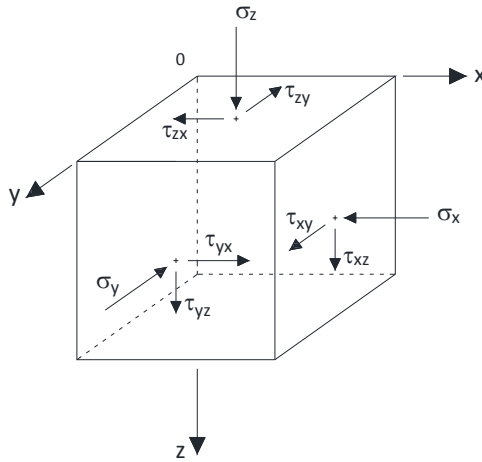


Figura 6. Tensiones sobre un elemento cúbico

Estos criterios se resumen en los siguientes puntos:

- Los esfuerzos de compresión son positivos mientras que los de tensión son negativos,
- En general, la tensión o esfuerzo de corte $\tau_{x_1x_2}$ (con $x_1: x,y,z$; $x_2: x,y,z$) actúa en la dirección del eje x_2 , y está contenido en el plano perpendicular al eje x_1 , por tanto, es perpendicular a x_1).
- Adoptaremos un sistema de referencia dextrógiro ('right hand' o 'dextrorsum'), es decir, un sistema cartesiano cuyos ejes se disponen de modo que $i \wedge j = k$, Figura 6, y un paralelepípedo con esfuerzos normales y de corte en sus caras. Definiremos el momento del par $\tau_{x_1x_2}$, que actúa sobre caras opuestas del paralelepípedo, mediante su correspondiente vector axial cuyo sentido es el del avance del sacacorchos cuando el paralelepípedo gira de acuerdo con las fuerzas del par.

Cuando el sentido del vector axial es opuesto al eje positivo x_1 , el esfuerzo de corte $\tau_{x_1x_2}$ es positivo; en caso contrario, $\tau_{x_1x_2}$ es negativo. Con este convenio, los signos de los esfuerzos señalados en la Figura 6 son:

τ_{zy} positivo, τ_{zx} negativo, τ_{xy} negativo, τ_{xz} positivo, τ_{yx} positivo y τ_{yz} negativo.

Problema 1.3

Indicar los signos de las tensiones de los cubos de la Figura 1.3 con arreglo al convenio de signos en geotecnia.

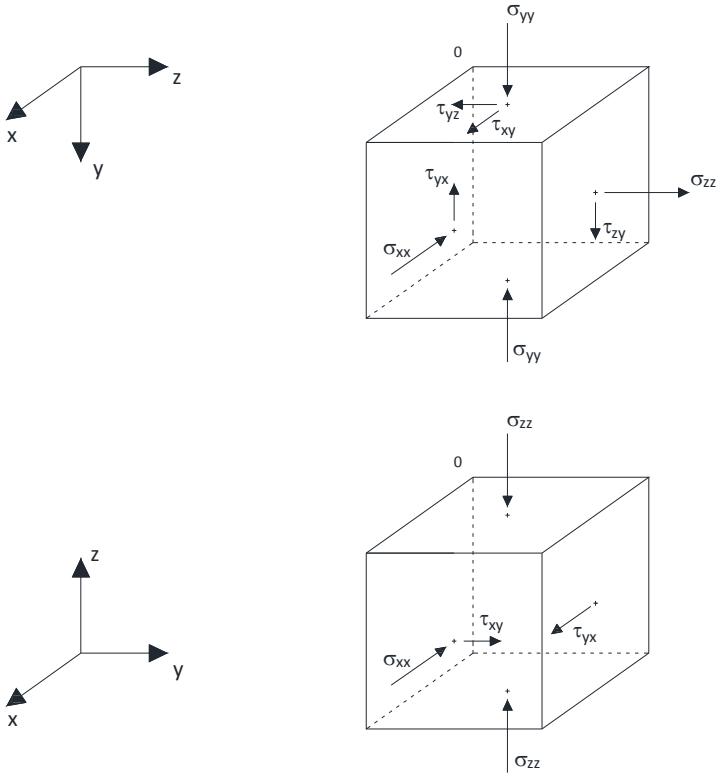


Figura 1.3. Cubo bajo la acción de esfuerzos

Respuesta:

Adviértase que los sistemas de referencia de ambos cubos son dextrógiros. Para el cubo superior los signos de las tensiones son:

$$\sigma_{xx} > 0, \quad \sigma_{yy} > 0, \quad \sigma_{zz} < 0, \quad \tau_{yz} < 0, \quad \tau_{zy} > 0, \quad \tau_{yx} > 0, \quad \tau_{xy} < 0$$

mientras que para el inferior

$$\sigma_{xx} < 0, \quad \sigma_{zz} > 0, \quad \tau_{xy} < 0, \quad \tau_{yx} > 0$$

Problema 1.4

En relación con la Figura 1.4a:

i) ¿cuál es la orientación de los planos que poseen el esfuerzo normal máximo y cuál la de aquellos sometidos al esfuerzo de corte máximo?,

- ii) ¿qué valores tienen estos esfuerzos (normal y de corte) máximos?,
- iii) justificar, sin cálculos, que para un plano π_β orientado un ángulo $\beta=45^\circ$, los esfuerzos normales y de corte, σ_n y τ , respectivamente, tienen el mismo valor, y
- iv) representar gráficamente los esfuerzos σ_n y τ en función de β y comentar esta dependencia discutiendo los signos de los esfuerzos con arreglo al criterio de signos expuesto en la sección anterior.
- v) ¿Cómo interpreta que en el plano $\beta=\pi$ no existan esfuerzos normales ni de corte, $\sigma_{n(\beta=\pi)}=\tau_{(\beta=\pi)}=0$?

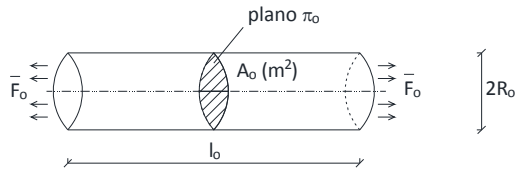


Figura 1.4a. Cilindro bajo tracción

Respuesta:

De la ecuación (8), el esfuerzo normal máximo, $\sigma_{n,\beta}$ (máximo), ocurre para $\cos^2(\beta) = 0$, esto es, para $\beta=0$ y $\beta=180$, es decir, para el plano π_0 de la Figura 1.3. El valor de este esfuerzo es

$$\sigma_{n,\beta} \text{ (máximo)} = \frac{\vec{F}_0}{A_0}$$

De la misma ecuación (8), el esfuerzo de corte máximo, $\tau_{n,\beta}$ (máximo), tiene lugar para $\sin(2\beta) = 0$, esto es para los planos definidos por los ángulos $\beta=45$ y $\beta=135$. Se trata de planos perpendiculares entre sí. El valor de este esfuerzo es

$$\tau_{n,\beta} \text{ (máximo)} = \frac{\vec{F}_0}{2A_0}$$

La relación entre estos esfuerzos máximos viene dada por

$$\sigma_{n,\beta} \text{ (máximo)} = 2 \tau_{n,\beta} \text{ (máximo)}$$

Para $\beta=\pi/4$

$$\sigma_{n(\beta=\pi/4)} = \tau_{(\beta=\pi/4)} = -\frac{\vec{F}_0}{2A_0}$$

que en valor absoluto coincide con la tensión de corte máxima. Por otro lado, para $\beta=3\pi/4$

$$\sigma_{n(\beta=3\pi/4)} = -\tau_{(\beta=3\pi/4)} = -\frac{\vec{F}_0}{2A_0}$$

que, de nuevo, coincide en valor absoluto con la máxima tensión de corte. Advierta sin embargo que mientras $\tau_{(\beta=\pi/4)}$ es negativa (tendería a hacer girar el plano límite de la rebanada a favor de las agujas de reloj), $\tau_{(\beta=3\pi/4)}$ es positiva (causando un giro potencial de sentido contrario). La Figura 1.4b

representa las dependencias $\sigma_n(\beta)$ and $\tau(\beta)$ con el eje vertical normalizado al valor absoluto de las tensiones máximas normales y de corte, $\frac{\bar{F}_o}{A_o}$ y $\frac{\bar{F}_o}{A_o}$, respectivamente.

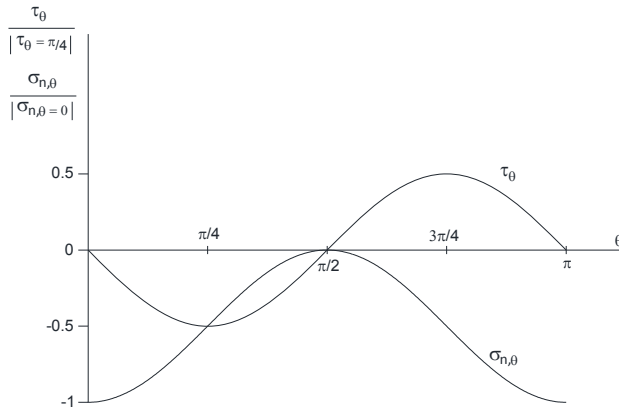


Figura 1.4b. Dependencias de σ_n y τ con β para el cilindro de la Figura 1.4a

Para responder a la pregunta de cómo se interpreta la solución $\sigma_n(\beta=\pi)=\tau(\beta=\pi)=0$ podemos razonar lo siguiente. La existencia de esfuerzos normales en cualquier plano horizontal implicaría que los planos sucesivamente adyacentes al mismo hacia el exterior del cilindro también tendrían esfuerzos normales, incluso en el plano más exterior (superficie lateral del cilindro); pero esto es incompatible con la condición de contorno del cilindro en esta frontera ya que no existen fuerzas externas aplicadas a la misma. La conclusión es que en los planos horizontales el esfuerzo normal es nulo. Tampoco existen esfuerzos de corte pues no hay que compensar los momentos de los esfuerzos normales. En resumen, no existen esfuerzos normales ni tangenciales en cualquier plano horizontal.

Problema 1.5

El cilindro de la Figura 1.5a está sometido a fuerzas de compresión de valor 10 kN en sus bases. Su longitud es de 50 mm y su diámetro de 30 mm.

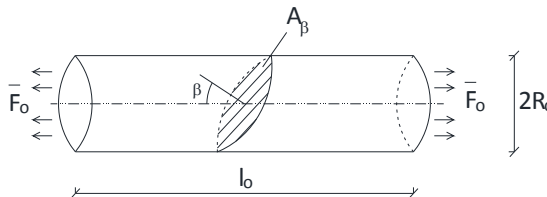


Figura 1.5a. Cilindro bajo fuerzas de compresión

Bajo estas condiciones, obtener:

- i) $\sigma_{n,\beta}$ (máxima), $\tau_{n,\beta}$ (máxima),
- ii) $\sigma_{n(\beta=\pi/6)}$ Y $\tau_{(\beta=\pi/6)}$, $\sigma_{n(\beta=\pi/4)}$ Y $\tau_{(\beta=\pi/4)}$, $\sigma_{n(\beta=\pi/2)}$ Y $\tau_{(\beta=\pi/2)}$, $\sigma_{n(\beta=3\pi/4)}$ Y $\tau_{(\beta=3\pi/4)}$, Y
- iii) los ángulos para los que $\sigma_n = 3\tau$, $\sigma_n = -3\tau$, $\sigma_n = (1/3)\tau$ y $\sigma_n = -(1/3)\tau$, y iv).

Representar gráficamente los valores reales y los normalizados a la unidad de los esfuerzos normales y de corte en función de β .

Respuesta:

De acuerdo con el criterio de signos los esfuerzos normales son todos de compresión y por tanto positivos; en cuanto a los de corte son positivos para $0 < \beta < \pi/2$ y $-\pi/2 < \beta < \pi$ (pues harían girar la rebanada imaginaria en la posición del plano en sentido contrario a las agujas del reloj), y negativos para $0 > \beta > -\pi/2$ y $\pi/2 < \beta < \pi$ (pues la harían girar en el sentido de las agujas).

Así los esfuerzos normales y de corte vienen dados por las expresiones (9) positivas:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n,\beta} &= \frac{\bar{F}_0}{A_0} \cos^2(\beta) \\ \tau_{\beta} &= \frac{\bar{F}_0}{2A_0} \operatorname{sen}(2\beta) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \sigma_{n,\beta} \text{ (máxima)} &= \sigma_{n,\beta=0} = \frac{\bar{F}_0}{A_0} = \frac{10}{\pi (0.015)^2} \text{ kP,} \\ \tau_{\beta} \text{ (máxima)} &= \tau_{\beta=45} = \frac{\bar{F}_0}{2A_0} = \frac{10}{\pi 2(0.015)^2} \text{ kP} \end{aligned}$$

La tensión es máxima también en $\pi = -\pi/4$, pero negativa.

ii) En $\beta = \pi/6 = 30^\circ$:

$$\sigma_{n(\beta=\pi/6)} = \frac{10}{\pi (0.015)^2} \frac{3}{4} \text{ kP, } \tau_{(\beta=\pi/6)} = \frac{10}{2\pi(0.015)^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kP}$$

En $\beta = \pi/4 = 45^\circ$:

$$\sigma_{n(\beta=\pi/4)} = \frac{10}{\pi (0.015)^2} \frac{1}{4} \text{ kP, } \tau_{(\beta=\pi/4)} = \frac{10}{2\pi(0.015)^2} \text{ kP}$$

En $\beta = \pi/2 = 90^\circ$:

$$\sigma_{n(\beta=\pi/2)} = 0 \text{ kP, } \tau_{(\beta=\pi/2)} = 0 \text{ kP}$$

En $\beta = 3\pi/4 = 135^\circ$:

$$\sigma_{n(\beta=3\pi/4)} = \frac{10}{\pi (0.015)^2} \frac{1}{4} \text{ kP, } \tau_{(\beta=3\pi/4)} = -\frac{10}{2\pi(0.015)^2} \text{ kP}$$

iii) Para $\sigma_n = 3\tau$, $\cos^2(\beta) = \frac{3}{2} \operatorname{sen}(2\beta) \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta) = \frac{2}{3}$; $\beta = 33.69^\circ$ (el ángulo 213.69° , que también satisface la condición, representa la misma solución).

Los esfuerzos son:

$$\sigma_n(\beta=33.69^\circ) = \frac{10 \cdot 0.692}{\pi (0.015)^2} \text{ kP}, \tau(\beta=33.69^\circ) = \frac{0.290 \cdot 10}{2\pi(0.015)^2} \text{ kP}$$

Para $\sigma_n = -3\tau$, $\cos^2(\beta) = -\frac{3}{2} \sin(2\beta) \Rightarrow \text{tg}(\beta) = -\frac{2}{3}$; $\beta = -33.69^\circ$.

$$\sigma_n(\beta=-33.69^\circ) = \frac{10 \cdot 0.692}{\pi (0.015)^2} \text{ kP}, \tau(\beta=-33.69^\circ) = -\frac{0.290 \cdot 10}{2\pi(0.015)^2} \text{ kP}$$

Para $\sigma_n = (1/3)\tau$, $\cos^2(\beta) = \frac{1}{6} \sin(2\beta) \Rightarrow \text{tg}(\beta) = 6$; $\beta = 80.54^\circ$.

$$\sigma_n(\beta=80.54^\circ) = \frac{10 \cdot 0.027}{\pi (0.015)^2} \text{ kP}, \tau(\beta=33.69^\circ) = \frac{0.324 \cdot 10}{2\pi(0.015)^2} \text{ kP}$$

Por último, para $\sigma_n = -(1/3)\tau$, $\cos^2(\beta) = -\frac{1}{6} \sin(2\beta) \Rightarrow \text{tg}(\beta) = -6$; $\beta = -80.54^\circ$.

$$\sigma_n(\beta=33.69^\circ) = \frac{10 \cdot 0.027}{\pi (0.015)^2} \text{ kP}, \tau(\beta=33.69^\circ) = -\frac{0.290 \cdot 10}{2\pi(0.015)^2} \text{ kP}$$

iv) La representación gráfica de los esfuerzos se muestra en la Figura 1.5b. En la gráfica de esfuerzos normalizados se han tomado como referencia los esfuerzos máximos:

$$\sigma_{n(\text{máxima})} = \frac{10}{\pi (0.015)^2} \text{ kP} \text{ y } \tau_{(\text{máxima})} = \frac{10}{\pi 2(0.015)^2} \text{ kP}.$$

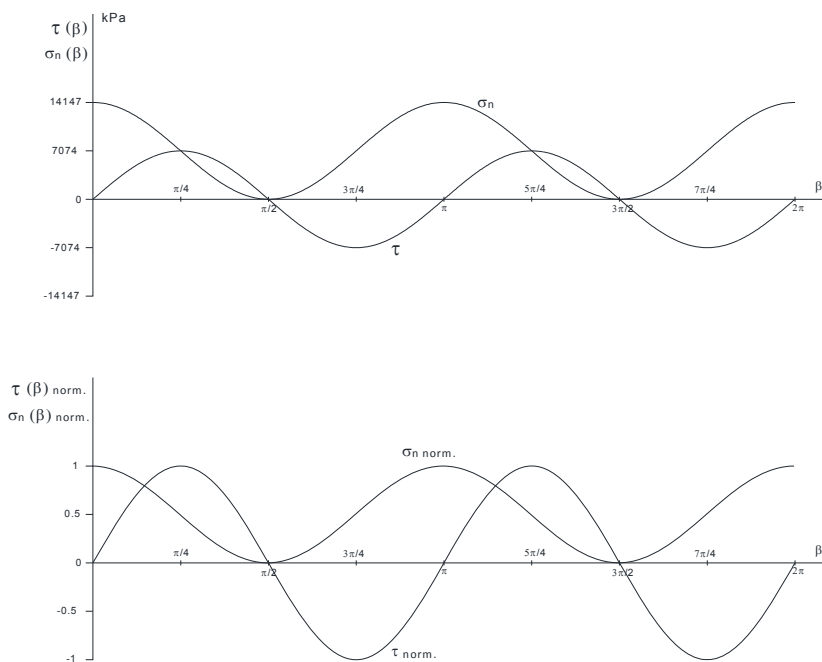


Figura 1.5b. Gráficas $\sigma_n = \sigma_n(\beta)$ y $\tau_n = \tau(\beta)$. Valores reales (superior) y normalizados (inferior)

Capítulo 2

Ley de Hooke

2.1. La ley de Hooke. El módulo de elasticidad

La elasticidad estudia el comportamiento de los cuerpos que recuperan su forma y posición cuando las cargas a las que están sometidos, y que producen las deformaciones, se retiran. Se trata de una teoría física pues los parámetros (elásticos) envueltos en ese comportamiento dependen, en última instancia de su estructura atómica, cristalina o granular. Cuando las cargas aplicadas son grandes nos salimos de la teoría elástica y entramos en los diferentes tipos de teorías plásticas.

Para pequeñas fuerzas (comportamiento elástico), el desplazamiento relativo entre cualquier par de puntos (o 'partículas') del cuerpo es proporcional a la fuerza aplicada, ésta es la ley de Hooke. Tomemos el bloque paralelepípedo granular (no cristalino), homogéneo, de material elástico representado en la Figura 7. Los experimentos confirman que, para una gran cantidad de materiales sólidos, existe una dependencia proporcional entre la elongación (Δa) de la barra y la fuerza aplicada (F) o, mejor, entre la elongación unitaria ($\Delta a/a$) y el esfuerzo normal ($\sigma=F/A$):

$$\sigma \propto \frac{\Delta a}{a}$$

El coeficiente de proporcionalidad es el llamado 'módulo de elasticidad' (E), un parámetro que sólo depende de la naturaleza del material del bloque.

$$\sigma = E \frac{\Delta a}{a} \quad (\text{Ley de Hooke}) \quad (10)$$

Las unidades de E son las mismas que las del esfuerzo, N/m^2 o pascales (P), ya que la elongación unitaria es un parámetro adimensional

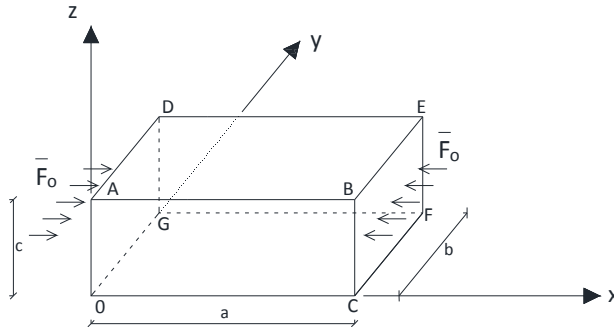


Figura 7. Desplazamientos en un bloque paralelepípedo bajo esfuerzos de compresión

Sin embargo, la elongación del lado a no es el único efecto de la fuerza aplicada. Dicha elongación lleva aparejada una disminución de la longitud de los otros lados del bloque, en los que se producen sendas contracciones unitarias de valores $(\Delta b/b)$ y $(\Delta c/c)$, ambas proporcionales a $\Delta a/a$. El coeficiente de proporcionalidad entre estos cocientes es el llamado coeficiente de Poisson (ν , un parámetro adimensional, en general positivo y de valor menor que 0.5):

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta c}{c} = -\nu \frac{\Delta a}{a} \quad (11)$$

Los parámetros E and ν son suficientes para la completa caracterización del comportamiento elástico de cuerpos sólidos homogéneos, isotrópicos y no cristalinos (granulares), como los metálicos, aleaciones, suelos, rocas y otros materiales de tipo orgánico. En los cristales, las elongaciones y contracciones pueden depender de las direcciones espaciales, de forma que el número de parámetros elásticos necesario para caracterizarlos dependen de su estructura cristalina y son siempre más de dos parámetros. Por otro lado, los cuerpos están sometidos a sollicitaciones más complejas que la de una simple tracción o compresión de forma que su comportamiento en cada escenario de cargas puede caracterizarse (por ejemplo, la relación entre deformaciones unitarias en cualquier dirección y las cargas en la misma u otra dirección) mediante 'módulos' particulares para cada escenario (véanse los ejercicios siguientes). Sin embargo, estos 'módulos' específicos que caracterizan cualquier sollicitación no son independientes y pueden expresarse en función de los parámetros más generales E y ν .

Merced a que las expresiones (10) y (11) son lineales en las fuerzas y en los desplazamientos, podemos aplicar el **principio de superposición**: 'el desplazamiento resultante causado por un conjunto de fuerzas es la suma de los desplazamientos causados por cada una de ellas, separadamente'. Y esto es todo lo que necesitamos (junto con algunos fundamentos matemáticos importantes) para resolver los problemas elásticos.

Problema 2.1 (el módulo de compresión volumétrico o 'bulk modulus')

Aplicar el principio de superposición al bloque paralelepípedo de la Figura 2.1a, sometido a una presión hidrostática constante u_0 , para obtener el módulo de compresión volumétrica (módulo de elasticidad de volumen), definido como el coeficiente de proporcionalidad entre el esfuerzo normal y el cambio unitario de volumen (otra vez la ley de Hooke).

Justifique a partir del resultado que el módulo de Poisson debe ser menor que 0.5, $\nu < 0.5$.

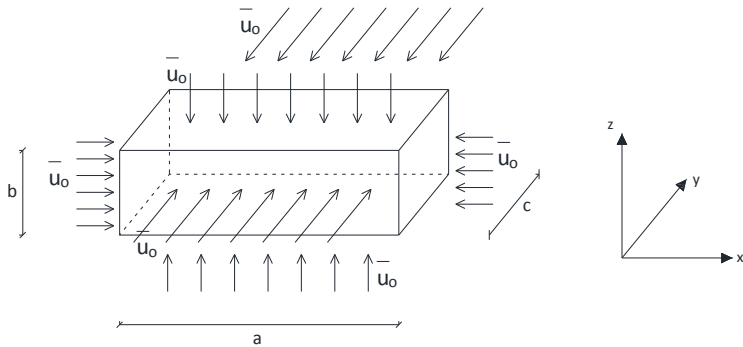


Figura 2.1a. Paralelepípedo bajo presión hidrostática constante

Respuesta:

Bajo esta presión el bloque experimentará una reducción de volumen de valor

$$\Delta V = V_{\text{final}} - V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) - abc = \\ = +(bc\Delta a + ca\Delta b + ab\Delta c) + (a\Delta b\Delta c + b\Delta a\Delta c + c\Delta a\Delta b) + \Delta a\Delta b\Delta c$$

con Δa , Δb y Δc negativos. Dividiendo entre el volumen

$$\frac{\Delta v}{V} = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right) + \left(\frac{\Delta b}{b} \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta c}{c} \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta a}{a} \frac{\Delta b}{b} \right) + \left(\frac{\Delta a}{a} \frac{\Delta b}{b} \frac{\Delta c}{c} \right)$$

y asumiendo pequeños desplazamientos,

$$\frac{\Delta v}{V} \cong + \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right)$$

El módulo de compresión volumétrica, K , se define en la forma

$$u_0 = -K \frac{\Delta v}{V} \tag{2.1-1}$$

La relación entre K y los coeficientes E y ν puede obtenerse mediante el principio de superposición y algunas manipulaciones matemáticas. Así, la presión sobre las caras del bloque puede considerarse como el resultado de aplicar sucesivamente u_0 sobre cada uno de los tres pares de caras opuestas, manteniendo en cada caso las otras dos caras a presión nula, Figura 2.1b.

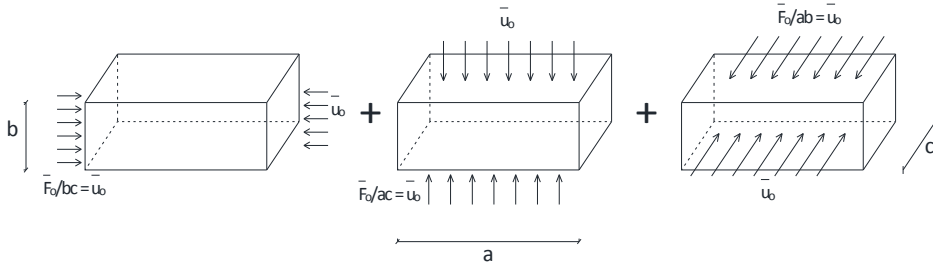


Figura 2.1b. Superposición de las fuerzas de presión

Las deformaciones causadas por las fuerzas de presión en la dirección OX vienen dadas por

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_x} &= -\frac{1}{E} \frac{F_x}{b \times c} = -\frac{u_0}{E} \\ \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_x} &= -\nu \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_x} = \frac{\nu u_0}{E} \\ \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_x} &= -\nu \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_x} = \frac{\nu u_0}{E} \end{aligned}$$

mientras que las producidas en las direcciones OY and OZ son:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_y} &= -E \frac{F_y}{b \times c} = -\frac{u_0}{E} \\ \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_y} &= -\nu \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_y} = \frac{\nu u_0}{E} \\ \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_y} &= -\nu \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_y} = \frac{\nu u_0}{E} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_z} &= -E \frac{F_z}{b \times c} = -\frac{u_0}{E} \\ \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_z} &= -\nu \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_z} = \frac{\nu u_0}{E} \\ \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_z} &= -\nu \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_z} = \frac{\nu u_0}{E} \end{aligned}$$

De esta forma, la deformación total en las tres direcciones espaciales viene dada por

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_x} + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_y} + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_z} = -\frac{u_0}{E}(1-2\nu)$$

$$\left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} = -\frac{u_0}{E}(1-2\nu)$$

de modo que, con $u_0 = -K \frac{\Delta V}{V}$, llegamos a

$$\frac{\Delta V}{V} \cong + \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}\right) = -\frac{3u_0}{E}(1-2\nu) = \frac{3K \frac{\Delta V}{V}}{E}(1-2\nu)$$

de donde la relación entre K, E y ν vale

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Merece la pena comentar algunas conclusiones derivadas de este resultado. En primer lugar al ser K un número positivo, (lo que se justifica por su propia definición, ecuación (2.1-1), en el escenario de la Figura 2.1a), debe cumplirse la condición

$$\nu < 0.5$$

Desde el punto de vista energético, las fuerzas de presión realizan un trabajo sobre el cuerpo ya que los desplazamientos de los puntos de la superficie exterior en donde se aplica u_0 llevan la misma dirección que las fuerzas aplicadas. Este trabajo, de valor $\oint u_0 dV$, entregado por las fuerzas se almacena en el cuerpo en forma de energía elástica al desplazar las partículas del cuerpo de sus posiciones de equilibrio.

Un valor de K negativo (o un valor $\nu > 0.5$) supone un aumento de volumen del cuerpo con lo que la fuerza asociada a u_0 y el desplazamiento de las partículas de la superficie tienen sentido contrario lo que da lugar a un trabajo negativo, $\oint u_0 dV < 0$. Esto supone una extracción de energía del cuerpo que, a su vez, se dilata bajo el efecto de la presión aplicada. Dado que no existen cambios de energía potencial el cuerpo, esta entrega de energía no es posible; así, ν no puede ser superior a 0.5 (¡estaríamos sacando energía gratis!).

Finalmente, el valor $\nu = 0.5$ supone un módulo de compresibilidad infinito, es decir el cuerpo no sufre cambios de volumen sea cual sea el valor de u_0 ; bajo esta condición el trabajo realizado por las fuerzas de presión es nulo y el cuerpo no soporta cambios ni positivos ni negativos de su energía potencial; se trata de una condición límite, $\nu \rightarrow 0.5$ desde valores inferiores.

Advierta que el módulo de compresión volumétrica es un parámetro referido al escenario particular, el de la Figura 2.1a, un escenario en el que todo el dominio exterior del cuerpo se halla sometido a una presión o esfuerzo normal constante. En el problema 1.7 siguiente, se discuten los cambios de volumen para un escenario en donde la presión u_0 sólo se aplica en un par de caras opuestas.

Problema 2.2

Qué puede decir sobre el valor del módulo de Poisson a la vista de la ecuación (11) y del escenario de la Figura 2.2a, ¿puede justificar sin cálculos, en este caso, que el máximo valor del coeficiente de Poisson (ν) sea 0.5? Para un mismo valor de deformación unitaria a lo largo del eje x (es decir para un mismo $\frac{(\Delta a)}{a}$), represente los cocientes $\frac{\Delta V}{V}$ y $\frac{\Delta a}{a}$ frente al coeficiente de Poisson. Justifique e interprete los resultados obtenidos.

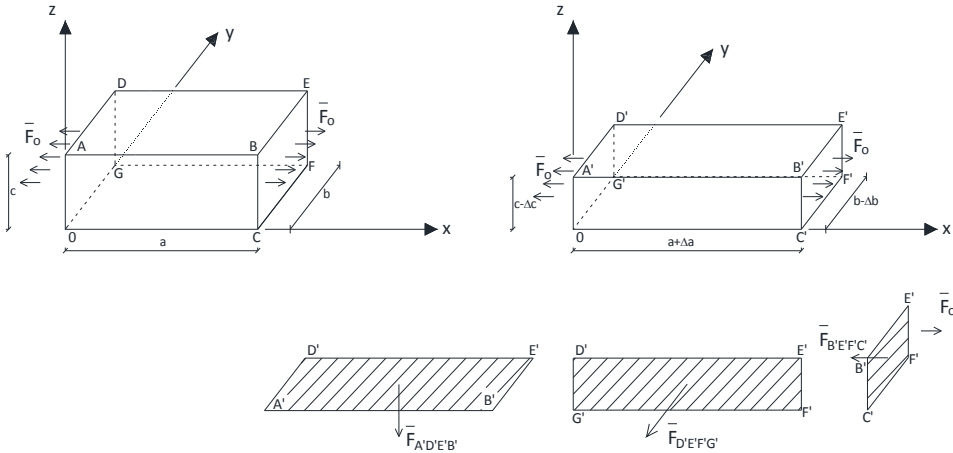


Figura 2.2a. Bloque bajo tracción. Fuerzas y desplazamientos

Respuesta:

Para $\nu=0.5$, tanto $\frac{\Delta b}{b}$ como $\frac{\Delta c}{c}$ (ambos positivos), son en valor absoluto la mitad del valor de la elongación unitaria $\frac{\Delta a}{a}$ (un número negativo). Esto supone que el cambio neto del volumen del bloque es cero (para $\nu=0.5$). En efecto, el cambio de volumen (despreciando los términos de segundo orden) es

$$\Delta V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) - a^3 \approx ab(\Delta c) + ac(\Delta b) + bc(\Delta a)$$

con lo que, para que este cambio sea nulo, $\Delta V = 0$, y teniendo en cuenta que $\frac{(\Delta b)}{b} = -\nu \frac{(\Delta a)}{a}$ y $\frac{(\Delta c)}{c} = -\nu \frac{(\Delta a)}{a}$, tenemos

$$\frac{(\Delta a)}{a} = -\frac{(\Delta b)}{b} - \frac{(\Delta c)}{c} = 2\nu \frac{(\Delta a)}{a} \Rightarrow \nu = 0.5$$

También, escribiendo ΔV en la forma

$$\frac{(\Delta V)}{V} = \frac{(\Delta b)}{b} + \frac{(\Delta c)}{c} + \frac{(\Delta a)}{a} = \frac{(\Delta a)}{a} (1 - 2\nu)$$

es inmediato deducir (puesto que Δa es negativo) que para valores $\nu > 0.5$ el bloque experimenta un aumento de volumen ($\Delta V > 0$), mientras que para $\nu < 0.5$ experimenta una contracción de volumen ($\Delta V < 0$). Sin embargo, tanto en un caso como en otro, el trabajo de las fuerzas de presión sobre las caras normales al eje OX es siempre positivo y queda almacenado en forma de energía potencial elástica aumente o no el volumen del cuerpo. Así, justificar que ν debe ser menor que 0.5 en este escenario, no es una tarea directa. En todo caso admitiremos como cierta la hipótesis de que un cuerpo sometido a compresión en parte de su superficie exterior siempre experimenta una contracción de volumen cuyo valor es una función del coeficiente de Poisson; contracción tanto mayor cuanto menor sea dicho coeficiente.

La Figura 2.2b representa la función

$$\frac{(\Delta V)/V}{(\Delta a)/a} = (1 - 2\nu)$$

Valores despreciables de ν , que suponen valores despreciables de $\frac{(\Delta b)}{b}$ y $\frac{(\Delta c)}{c}$ frente a $\frac{(\Delta a)}{a}$ hacen que la contracción volumétrica sea prácticamente la asociada a la contracción del lado a , $\frac{(\Delta V)}{V} \approx \frac{(\Delta a)}{a}$; mientras que valores de ν cercanos a 0.5 hacen que la contracción volumétrica sea despreciable cualquiera que sea la contracción $\frac{(\Delta a)}{a}$.

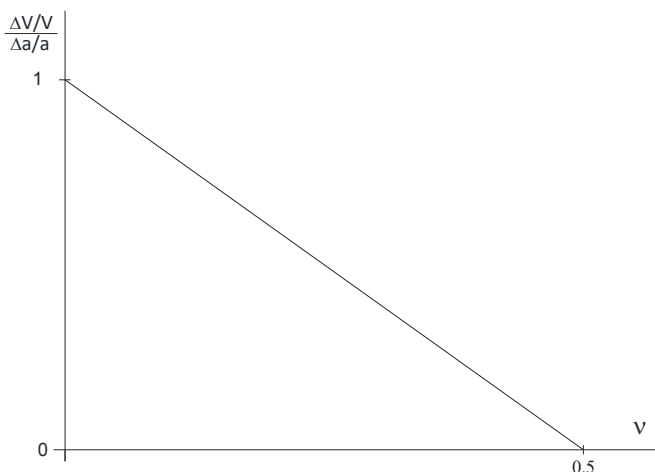


Figura 2.2b. Representación de la función $\frac{(\Delta V)/V}{(\Delta a)/a} = (1 - 2\nu)$

Problema 2.3

Determinar las deformaciones unitarias, en cada dirección, de un cubo y de un paralelepípedo sometido a la presión p_0 en sus cuatro caras verticales, Figura 2.3. Determine la relación entre la presión p_0 y la deformación unitaria de volumen, una especie de ‘módulo de compresibilidad volumétrico’ específico para este escenario.

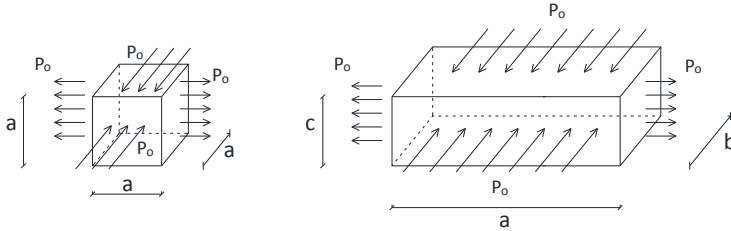


Figure 2.3. Cubo y paralelepípedo rectangular bajo presión en sus cuatro caras verticales

Respuesta:

Siguiendo los resultados del problema anterior,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_x} &= -\frac{p_0}{E} & \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_y} &= -\nu \frac{\Delta b}{b} = \frac{\nu p_0}{E} \\ \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_x} &= -\nu \frac{\Delta a}{a} = \frac{\nu p_0}{E} & \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_y} &= -\frac{p_0}{E} \\ \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_x} &= -\nu \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} & \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_y} &= -\nu \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} & \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_z} &= 0 \end{aligned}$$

De estos resultados

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} &= \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_x} + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debido a } F_y} = \frac{p_0}{E} (\nu - 1) \\ \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} &= \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_x} + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{debido a } F_y} = \frac{p_0}{E} (\nu - 1) \\ \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{total}} &= \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_x} + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{debido a } F_y} = -\nu \left[\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} \right] = -\frac{2p_0}{E} \nu (\nu - 1) \end{aligned}$$

Adviértase que $\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} < 0$, $\left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} < 0$ y que $\left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{total}} > 0$, como esperábamos. De estas relaciones y escribiendo, para simplificar,

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} = \frac{\Delta a}{a}, \left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} = \frac{\Delta b}{b} \text{ y } \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{total}} = \frac{\Delta c}{c},$$

tenemos

$$p_0 = \frac{E}{(\nu-1)} \frac{\Delta a}{a} = -E_{F_x} \frac{\Delta a}{a}$$

$$p_o = \frac{E}{(\nu-1)} \frac{\Delta b}{b} = -E_{F_y} \frac{\Delta b}{b}$$

$$p_o = -\frac{E}{\nu(\nu-1)} \frac{\Delta c}{c} = E_{F_z} \frac{\Delta c}{c}$$

donde, E_{F_x} , $E_{F_y} = E_{F_z}$ y E_{F_z} (que se han definido positivos con arreglo a los signos de las anteriores expresiones) serían los ‘módulos elásticos de cada dirección’ (diferentes uno de otro), que gobiernan este escenario, ambos funciones de E y ν :

$$E_{F_x} = E_{F_y} = -\frac{E}{(\nu-1)}$$

$$E_{F_z} = -\frac{E}{\nu(\nu-1)}$$

El primer ‘módulo’ (E_{F_x} o E_{F_y}), asociado a las direcciones en las que actúan las fuerzas, relaciona deformaciones y fuerzas en una misma dirección (la x o la y); en este sentido responde a la definición propia de un módulo elástico; el segundo (E_{F_z}), sin embargo, relaciona deformaciones en una dirección con fuerzas en direcciones perpendiculares a la deformación por lo que no responde a la definición clásica de un módulo elástico. Advierta que $E_{F_z} > E_{F_x}$, lo cual es coherente en tanto que no hay fuerzas que se opongan a la deformación en la dirección OZ y las del problema (F_x y F_y) causan deformaciones en el mismo sentido. En relación con el tema de los signos, debe tenerse especial cuidado si se trabaja en mecánica de suelos (vea la sección de criterio de signos del Capítulo 1).

¿Qué podemos deducir del ‘módulo de compresibilidad’ de este escenario? Podríamos llamarlo ‘pseudomódulo de compresibilidad’ para eliminar la ambigüedad de la nomenclatura de este parámetro. Buscaremos una relación entre el cambio de volumen unitario y el único esfuerzo aplicado (aunque no lo esté a todas las caras del cubo). Empezaremos por calcular el cambio de volumen; para ello, haciendo uso de la ‘simetría’ del problema en las direcciones OX y OY que implica deformaciones idénticas en esas direcciones ($\Delta a = \Delta b$), escribimos

$$\Delta V = V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}} = (a + \Delta a)^2 (c + \Delta c) - abc = 2ac(\Delta a) + c(\Delta a)^2 + a^2(\Delta c) + 2a(\Delta c)(\Delta a) + (\Delta a)^2 \Delta c$$

y, despreciando los sumandos de orden menor,

$$\Delta V \approx 2ac(\Delta a) + a^2(\Delta c)$$

o, en términos de deformaciones unitarias

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 2 \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta c}{c}$$

Usando ahora las relaciones anteriores

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{p_o}{E} (\nu - 1), \quad \frac{\Delta c}{c} = -\frac{p_o}{E} \nu (\nu - 1)$$

$$p_0 = K'_e \frac{\Delta V}{V}$$

donde K'_e es el pseudomódulo módulo de compresibilidad volumétrica asociado al escenario de la Figura 2.3, llegamos a

$$\frac{p_0}{K'_e} \approx 2 \frac{p_0}{E} (\nu - 1) - \frac{2p_0}{E} \nu (\nu - 1) = \frac{2p_0}{E} (\nu - 1)(1 - \nu)$$

con lo que

$$K'_e \approx - \frac{E}{2(1-\nu)^2}.$$

Pueden compararse ahora los módulos de compresibilidad de los escenarios de las Figuras 2.2a (que define el módulo clásico de compresibilidad volumétrico o 'bulk modulus') y 2.3 (que define el pseudomódulo de compresibilidad de otro escenario diferente):

Figura 1.7a:
$$K = - \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Figura 1.8:
$$K'_e \approx - \frac{E}{2(1-\nu)^2}$$

Se ve que para valores pequeños de ν ($\nu \rightarrow 0$), $K'_e > K$ por lo que el volumen se deforma menos en el escenario de la Figura 2.3; sin embargo, para valores grandes de ν ($\nu \rightarrow 0.5$), $K'_e < K$, por lo que cuesta más trabajo cambiar el volumen en el escenario de la Figura 2.2a.

El estudiante puede comprobar que se obtienen los mismos resultados para un paralelepípedo rectangular.

Problema 2.4 (el módulo de corte)

El comportamiento de un material homogéneo e isótropo ante fuerzas cortantes, Figura 2.4a, se caracteriza mediante el módulo de corte. El paralelepípedo de la figura está sometido a una fuerza $\bar{F}_{o,ss}$ aplicada en la superficie superior del mismo (a través de un pequeño bloque fijado a esta superficie) y a fuerzas aplicadas a su superficie inferior (una opuesta a $\bar{F}_{o,si}$ para 'casi' equilibrar el movimiento horizontal del cuerpo) más un conjunto de fuerzas verticales distribuidas para 'casi' equilibrar el momento (respecto al centro de masas) que causa el par ' $\bar{F}_{o,ss}, \bar{F}_{o,si}$ '. Decimos 'casi' para permitir un desequilibrio que dé lugar a la pequeña deformación. No existen fuerzas ni en las caras frontales ni en las laterales. Ante esta sollicitación el paralelepípedo se inclina un ángulo γ , una suerte de 'deformación específica ingenieril'. Se trata de encontrar el coeficiente de proporcionalidad (un módulo de corte) entre el esfuerzo aplicado y el ángulo girado. Un módulo que, como sabemos, puede expresarse en función de E y ν .

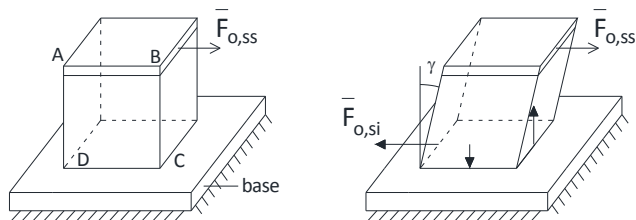


Figura 2.4a. Paralelepípedo bajo un esfuerzo de corte puro

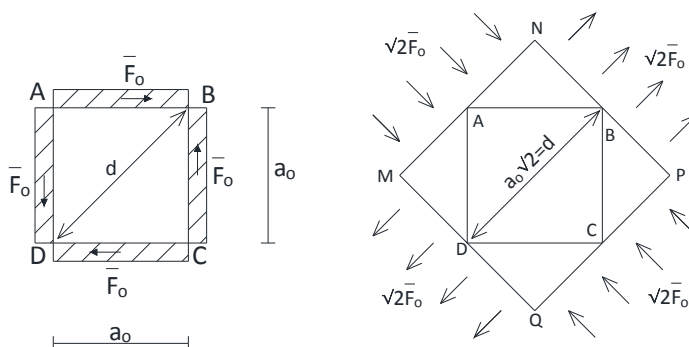


Figura 2.4b. Esfuerzo cortante puro (izquierda) y configuración equivalente (derecha)

Respuesta:

Puede comprobarse la equivalencia entre configuraciones estudiando el equilibrio del triángulo ANB y determinando la fuerza que actúa sobre el lado AB. Dejamos esta comprobación para el alumno. Usando los resultados del Problema 1.8, con A la superficie de las bases de paralelepípedo, tenemos:

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{\bar{F}_0}{AE} (1 + \nu) \quad \text{para la elongación de la diagonal CB}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{\bar{F}_0}{AE} (1 + \nu) \quad \text{para el acortamiento o elongación negativa de la diagonal AD}$$

Relacionemos ahora $\frac{\Delta d}{d}$ y los ángulos β y γ . En la teoría física de elasticidad es frecuente expresar el ‘módulo de corte puro’ como cociente entre los esfuerzos cortantes $\frac{\bar{F}_0}{A}$ y β , ángulo girado por cualquiera de los lados del paralelepípedo medido respecto de su posición original, Figura 2.4c.

En ingeniería (resistencia de materiales), sin embargo, se utiliza el ‘módulo de corte ingenieril’, cociente entre los esfuerzos cortantes $\frac{\bar{F}_0}{A}$ y $\gamma=2\beta$, Figura 2.4a.

Veamos cómo se relacionan las deformaciones específicas y estos ángulos. En el triángulo C'B'H

$$d_{C'H} = 2 \left(\frac{\Delta d}{2} \right) \cos(45) = \frac{\Delta d}{\sqrt{2}}$$

$$d_{B'H} = a_o = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

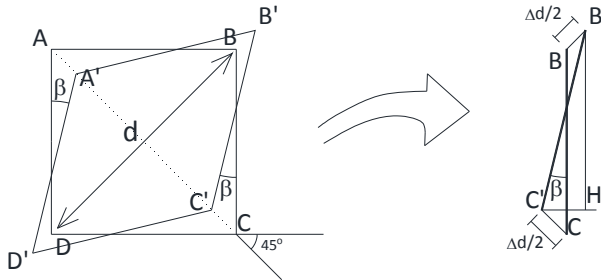


Figura 2.4c. Bloque ABCD original y deformado y detalle

con lo que, para pequeños ángulos

$$\beta \cong \text{tg}(\beta) = \frac{d_{C'H}}{d_{B'H}} = \frac{\Delta d}{d}$$

y, usando los resultados anteriores,

$$\gamma = 2\beta \cong \frac{2(\Delta d)}{d} = \frac{2(1+\nu) F_o}{E A}$$

con lo que

$$\frac{F_o}{A} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma = \mu \gamma$$

$$\frac{F_o}{A} = \frac{E}{(1+\nu)} \beta = \mu_{\text{ing}} \gamma$$

El factor

$$\frac{E}{2(1+\nu)} = \mu$$

es el 'módulo de corte puro' o 'coeficiente de rigidez pura', mientras que

$$\frac{E}{(1+\nu)} = \mu_{\text{ing}} = \frac{\mu}{2}$$

es el 'módulo de corte ingenieril' o 'coeficiente de rigidez ingenieril'. Es evidente que $\mu > 0$ ya que, de otra forma, podríamos extraer trabajo de un bloque autocortante.

Problema 2.5 (elongación sin contracción lateral)

Encontrar las fuerzas F_y y F_z (funciones de F_x) que deben ser aplicadas al paralelepípedo de la Figura 2.5a para que éste no sufra deformación lateral.

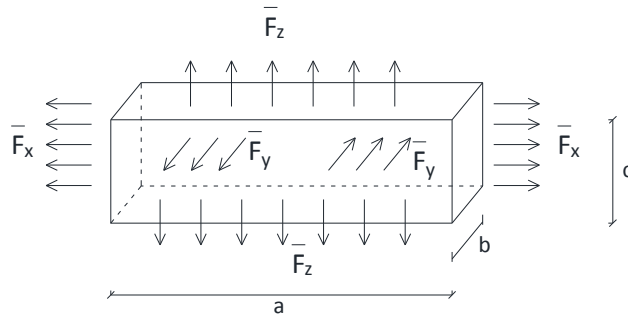


Figura 2.5a. Paralelepípedo sujeto a elongación sin contracciones laterales

Respuesta:

Volvemos al principio de superposición para determinar la elongación unitaria de cada lado del bloque:

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debida a } F_x} + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debida a } F_y} + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{debida a } F_z} = \frac{1}{E} \frac{F_x}{A_x} - \nu \frac{F_y}{E A_y} - \nu \frac{F_z}{E A_z} = \left(\frac{1}{E}\right) \left[\frac{F_x}{A_x} - \nu \left(\frac{F_y}{A_y} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right] \quad (2.5-1)$$

$$\left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{1}{E}\right) \left[\frac{F_y}{A_y} - \nu \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right] \quad (2.5-2)$$

$$\left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{1}{E}\right) \left[\frac{F_z}{A_z} - \nu \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y} \right) \right] \quad (2.5-3)$$

Como debe cumplirse

$$\left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{total}} = 0$$

las ecuaciones (2.5-2) y (2.5-3) permiten expresar F_y y F_z en función de F_x :

$$\frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) \frac{F_x}{A_x}$$

Esta es la condición para una elongación en el eje OX sin contracciones en las direcciones OY y OZ.

Sustituyendo este resultado en (2.5-1), tenemos la solución

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \left(\frac{1}{E}\right) \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right) \frac{F_x}{A_x} = \left(\frac{1}{E}\right) \left(\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\right) \frac{F_x}{A_x}$$

o bien

$$\frac{F_x}{A_x} = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} E \left(\frac{\Delta l_x}{l_x} \right)$$

Como $\nu \in [0, 0.5]$, el cociente $\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ crece apreciablemente con ν desde 1 hasta infinito, el pseudomódulo de elasticidad que caracteriza el comportamiento de un material con elongación sin contracción lateral (de valor $\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ veces E) es siempre mayor que E y se incrementa apreciablemente con ν . ¡Un bloque es más resistente a la elongación cuando sus caras laterales se mantienen firmes!

La Figura 2.5b muestra el factor $\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ en función de ν .

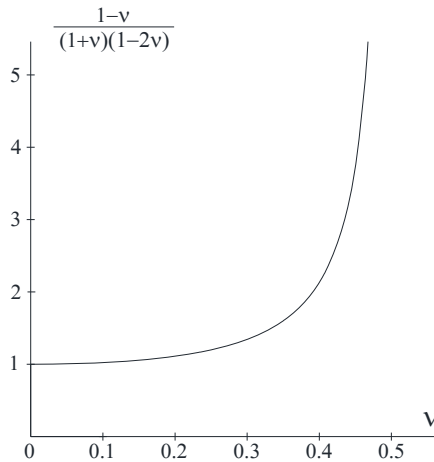


Figura 2.5b. Dependencia del factor $\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ con ν

En el intervalo útil $\nu \in [0, 0.5]$ este factor crece monótonamente desde 1 hasta infinito, lo que significa valores crecientes del módulo de Poisson incrementan fuertemente el pseudomódulo elástico. Así, cuesta tanto más trabajo estirar el paralelepípedo cuando mayor es el módulo de Poisson.

Se podría plantear el cálculo de un pseudomódulo de compresibilidad para este escenario, que podría expresarse en función de K (el módulo de compresibilidad) y ν . Se deja como tarea para el alumno.

Problema 2.6 (contracción en dos direcciones sin contracción lateral en la tercera)

Encontrar la fuerza F_z (función de F_y y F_x) que deben ser aplicadas al paralelepípedo de la Figura 2.6 para que éste no sufra deformación lateral en sentido vertical. Encontrar las expresiones de los pseudomódulos elásticos asociados a cada dirección OX y OY , y su dependencia respecto de los esfuerzos aplicados en esas direcciones.

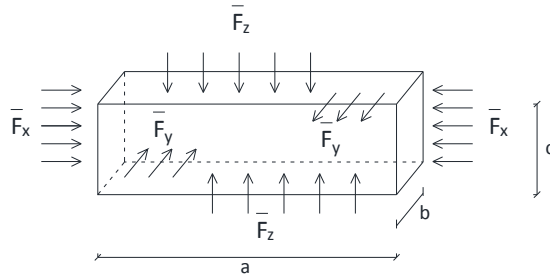


Figura 2.6. Paralelepípedo sujeto a contracciones perpendiculares sin contracción en la tercera cara

Respuesta:

De nuevo, usando con la superposición:

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{1}{E}\right) \left[\frac{F_x}{A_x} - \nu \left(\frac{F_y}{A_y} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right] \quad (2.6-1)$$

$$\left(\frac{\Delta b}{b}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{1}{E}\right) \left[\frac{F_y}{A_y} - \nu \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right] \quad (2.6-2)$$

$$\left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{total}} = \left(\frac{1}{E}\right) \left[\frac{F_z}{A_z} - \nu \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y} \right) \right] \quad (2.6-3)$$

Como

$$\left(\frac{\Delta c}{c}\right)_{\text{total}} = 0,$$

la ecuación (2.6-3) permite expresar F_z en función de F_x y F_y :

$$\frac{F_z}{A_z} = \nu \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y} \right)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.6-1) y (2.6-2), tenemos

$$\frac{\Delta a}{a} = \left(\frac{1}{E}\right) (1 + \nu^2) \frac{F_x}{A_x} + \left(\frac{1}{E}\right) (\nu^2 - \nu) \frac{F_y}{A_y} \quad (2.6-4)$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \left(\frac{1}{E}\right) (1 + \nu^2) \frac{F_y}{A_y} + \left(\frac{1}{E}\right) (\nu^2 - \nu) \frac{F_x}{A_x} \quad (2.6-5)$$

con lo que los pseudomódulos elásticos asociados a cada una de las direcciones OX y OY dependen de la relación de esfuerzos aplicados (una muy interesante influencia) en estas dos direcciones. Sólo en el

caso $\frac{F_x}{A_x} = \frac{F_y}{A_y}$ estos módulos son iguales y se deducen de las anteriores ecuaciones. Para esta igualdad entre esfuerzos resulta

$$\frac{\Delta a}{a} = \left(\frac{1}{E}\right) (1 + 2\nu^2 - \nu) \frac{F_x}{A_x}$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \left(\frac{1}{E}\right) (1 + 2\nu^2 - \nu) \frac{F_y}{A_y}$$

que da un módulo E' de valor

$$E' = \left(\frac{E}{1+2\nu^2-\nu}\right)$$

Buscaremos ahora, sólo para el caso de una dependencia lineal entre esfuerzos que escribiremos en la forma

$$\frac{F_y}{A_y} = c_0 \frac{F_x}{A_x}$$

con c_0 constante, los pseudomódulos asociados a las direcciones OX y OY, y cómo dependen éstos de los esfuerzos aplicados. Introduciendo esta relación en las expresiones (2.6-1) y (2.6-5), que siguen siendo válidas, podemos escribir

$$\frac{\Delta a}{a} = \left(\frac{1}{E}\right) (1 + \nu^2) \frac{F_x}{A_x} + \left(\frac{1}{E}\right) (\nu^2 - \nu) c_0 \frac{F_x}{A_x} = \frac{F_x}{A_x} \left\{ \left(\frac{1}{E}\right) [(1 + \nu^2) + c_0(\nu^2 - \nu)] \right\}$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \left(\frac{1}{E}\right) (1 + \nu^2) \frac{F_y}{A_y} + \left(\frac{1}{E}\right) (\nu^2 - \nu) \left(\frac{1}{c_0}\right) \frac{F_y}{A_y} = \frac{F_y}{A_y} \left\{ \left(\frac{1}{E}\right) \left[(1 + \nu^2) + \frac{(\nu^2 - \nu)}{c_0} \right] \right\}$$

o, en forma convenientemente agrupada

$$\frac{F_x}{A_x} = \left(\frac{E}{(1+\nu^2)+c_0(\nu^2-\nu)}\right) \frac{\Delta a}{a} \tag{2.6-6}$$

$$\frac{F_y}{A_y} = \left(\frac{E}{(1+\nu^2)+\frac{(\nu^2-\nu)}{c_0}}\right) \frac{\Delta b}{b} \tag{2.6-7}$$

De estas expresiones se deducen dos módulos diferentes, uno para cada una de las direcciones OX y OY, dependientes de E , ν y c_0 de forma compleja, pero cuyo cociente es independiente de E . Sólo para el caso $c_0 = 1$ estos pseudomódulos son iguales y su valor es

$$E' = \frac{E}{1-\nu}$$

Como en casos anteriores se deja para el estudiante la obtención de un pseudomódulo de compresión volumétrica para este escenario.

Problema 2.7 (la velocidad de las ondas en medios y los módulos elásticos)

Es conocido que los diferentes tipos de ondas en los medios se propagan con diferentes velocidades pero, para cada tipo (denotado con el subíndice ζ), la velocidad (v_ζ) es proporcional a la raíz cuadrada del cociente entre el módulo de elasticidad asociado al tipo de onda (E_ζ) y la densidad de material (ρ):

$$v_\zeta = \sqrt{\frac{E_\zeta}{\rho}} \quad (2.7-1)$$

Estudiar, basándose en los resultados de los problemas anteriores, qué se puede decir de la relación entre las velocidades de las ondas de corte y las ondas longitudinales, con o sin restricción transversal al movimiento de las partículas en las últimas.

Respuesta:

De acuerdo con (2.7-1), y usando el ‘módulo de corte puro’ obtenido en el Problema 2.4, podemos escribir

$$v_\mu = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\right) \frac{1}{\rho}} \quad (2.7-2)$$

La aplicación de un esfuerzo de corte ‘rápido’ a uno de los extremos de una barra de sección transversal rectangular produce ondas de corte puras, mientras que la aplicación de esfuerzos de torsión en el extremo de una barra cilíndrica o cilindro hueco produce ondas de corte torsionales, pero ambas tienen la misma velocidad ya que en su expresión se usa el mismo módulo elástico de corte. Como sabemos, en las ondas de corte el desplazamiento de las partículas del sólido es perpendicular a la dirección de propagación de la perturbación. Además, en general, en las ondas de corte la deformación del sólido no cambia su volumen pero el esfuerzo se distribuye según el tipo de onda: una distribución plana en un bloque paralelepípedo para las ondas de corte puras y una circular en una barra cilíndrica, hueca o no, para las ondas torsionales. Los sismólogos han encontrado ondas de corte que se propagan en el interior de la tierra con foco en el epicentro.

En las ondas de compresión o longitudinales el desplazamiento de las partículas y la velocidad de propagación de la perturbación tiene la misma dirección espacial. Estas ondas son como las de sonido en los gases, líquidos o sólidos. Pero no todas las ondas son de corte o longitudinales; también existen ondas que combinan estos comportamientos como las ondas Rayleigh. Dentro de las ondas longitudinales podemos distinguir dos tipos de condiciones de contorno que dan lugar a diferentes velocidades de propagación. Estas condiciones pueden enunciarse en términos del cociente entre la longitud de onda y un espesor (transversal) característico del cuerpo; cuando este cociente es menor que la unidad, el cuerpo no puede dilatar lateralmente (merced a su gran tamaño en ña dirección transversal) de modo que el movimiento de sus partículas se restringe únicamente a la dirección de

propagación. Por el contrario, cuando el cociente es mayor que la unidad (cuerpos de pequeña sección transversal en comparación con su extensión longitudinal), las partículas se mueven tanto lateral como longitudinalmente.

Ya hemos estudiado los módulos de elasticidad asociados a este tipo de escenarios. Son: E para elongaciones sin restricción y $\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}E$ para elongaciones con restricción lateral. Con todo, la Tabla 2.7 muestra los módulos elásticos y las velocidades de propagación de los tipos de ondas estudiadas.

Tipo de onda	Módulo elástico asociado (E_c)	Velocidad de propagación
Ondas de corte	Módulo de corte $E_1 = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$	$v_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ $= \sqrt{\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\right) \frac{1}{\rho}}$
Ondas longitudinales sin restricción transversal	Módulo de elasticidad $E_2 = E$	$v_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
Ondas longitudinales con restricción transversal	$E_3 = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}E$	$v_3 = \sqrt{\frac{E_3}{\rho}}$ $= \sqrt{\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{E}{\rho}\right)}$

Tabla 2.7. Módulo elástico específico y velocidad de propagación de los tipos de ondas

Como $\nu \in [0, 0.5]$, es inmediato ver que $E_1 < E_2 < E_3$, esto es, $\mu < E < E_3$, pues

$$\frac{1}{2(1+\nu)} < 1 < \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

En consecuencia, las ondas longitudinales viajan más rápido que las ondas de corte y, dentro de las primeras, aquellas para las que está impedido el movimiento transversal a la dirección de propagación son las que tienen la mayor velocidad.

Las medidas de estas velocidades y de la densidad es una técnica muy precisa para la determinación de las constantes elásticas E y ν de un material. Los sismólogos miden el tiempo transcurrido entre la onda longitudinal con restricción lateral (merced a la condición de contorno de espesor muy alto impuesto por la tierra como medio) y la onda de corte, procedentes de una misma estación, para determinar la distancia desde la estación receptora al epicentro del terremoto.

Capítulo 3

La matriz de esfuerzos. Transformaciones

3.1. La matriz de esfuerzos

Se trata de una matriz de segundo rango que contiene toda la información sobre los esfuerzos en un punto del cuerpo; un conjunto de nueve números (asociados a cada punto) o de nueve funciones de las coordenadas para el dominio completo del medio. La matriz o tensor de esfuerzos es la entidad matemática que mejor describe las fuerzas internas y esfuerzos en el interior de un cuerpo sometido a sollicitaciones mecánicas (cargas y deformaciones en su superficie exterior).

Considérese un bloque de material elástico, por ejemplo goma o gelatina, bajo la acción de fuerzas conocidas aplicadas en parte o toda la superficie externa del mismo, Figura 8. Asumiremos, para simplificar el análisis, que el peso del bloque es despreciable en relación con estas fuerzas.

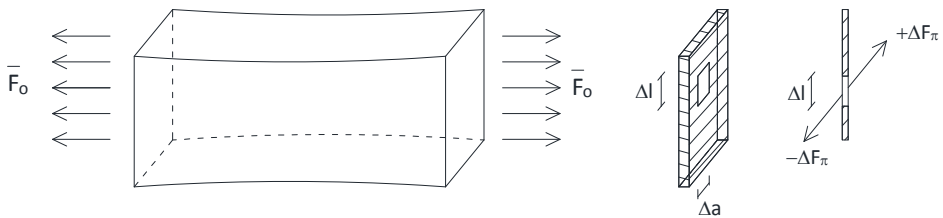


Figura 8. Bloque de goma bajo fuerzas aplicadas en su superficie (izquierda).
Fuerzas que actúan sobre la rebanada de bloque definida por el plano π (derecha)

Las partículas del bloque están fijas en sus localizaciones merced al equilibrio de las fuerzas interiores entre ellas y sus vecinas; los esfuerzos se definen en términos de tales fuerzas. Pero, si cortamos el

bloque por cualquier plano, las partículas a cada lado del material se desplazarán (en general) a causa de la pérdida de equilibrio. Fije un sistema de referencia orientado OXYZ en un punto cualquiera del bloque y considere una rebanada de espesor despreciable en torno al plano π de la figura. Merced al equilibrio, fuerzas iguales y opuestas se ejercen en las caras de la rebanada sobre la superficie elemental $\Delta l \times \Delta l$ del plano π ; llamaremos ΔF_π y $-\Delta F_\pi$ a estas fuerzas que, en general, no serán perpendiculares al plano.

Para líquidos viscosos y no viscosos, en reposo, las fuerzas sí son perpendiculares a la superficie y su cociente $\frac{\Delta F_\pi}{\Delta S}$, en el límite, define la presión hidrostática

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_\pi}{\Delta S}$$

Sin embargo, para sólidos o líquidos viscosos en movimiento, las fuerzas que actúan sobre pequeñas superficies no son necesariamente perpendiculares a éstas, como se ha dicho. La proyección del cociente $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F_\pi}{\Delta S}$ sobre la superficie define el esfuerzo de corte y la proyección sobre la línea perpendicular a la superficie el esfuerzo normal.

Tomemos un punto del cuerpo como origen de coordenadas, elijamos tres planos que se corten en dicho punto para formar un sistema cartesiano ortogonal y apliquemos lo expuesto anteriormente. Sobre cada uno de estos tres planos pueden definirse esfuerzos (en torno al punto) a partir de las fuerzas que actúan sobre cada plano que, repetimos una vez más, no son necesariamente perpendiculares a los planos ni del mismo valor de un plano a otro. Las componentes (normales a las superficies) de estas fuerzas darán origen (en el límite anterior) a los respectivos esfuerzos normales sobre cada plano, mientras que las proyectadas sobre las superficies, también en el límite, darán origen a los llamados esfuerzos de corte. Todos estos esfuerzos, como veremos, resultan en nueve números concretos que informan de la matriz o tensor de esfuerzos asociado al punto y a los mencionados planos. Si cambiamos la orientación de los planos ortogonales pero mantenemos el punto en el que se cortan, los nueve números del tensor de esfuerzos cambian; así, cada orientación del triedro ortogonal cartesiano da lugar a un conjunto diferente de nueve números. Y esto ocurre, eventualmente, para cada punto del medio.

Ahora bien, las fuerzas interiores, bajo unas sollicitaciones externas dadas, son las que son; es decir, son unívocas para cada punto, superficie o subdominio del medio. Y del mismo modo, son unívocos los esfuerzos. Lo que cambian son las proyecciones de éstas y éstos de un plano a otro. Así, es obvio que podrá deducirse alguna expresión matemática que permita, a partir de los nueve números del tensor de esfuerzos en un punto y referido a unos determinados planos cartesianos, obtener los nueve números del tensor para cualquier para cualquier otra terna de planos cartesianos (en el mismo punto) cuya orientación con respecto a la primera terna es conocida (y, en general, obtener los esfuerzos de plano de orientación conocida en la primera terna). Volveremos en seguida a este punto.

La Figura 9 muestra la fuerza neta que actúa sobre tres pequeñas superficies, perpendiculares la una a la otra, que intersectan en el punto P en el que queremos obtener el tensor de esfuerzos. La fuerza ΔF_{π_x} sobre la superficie $\Delta S_x = \Delta y \Delta z$ se separa en tres componentes (Figura 9a): $\Delta F_{\pi_{xx}}$ en la dirección del eje OX, y $\Delta F_{\pi_{xy}}$ y $\Delta F_{\pi_{xz}}$, en las direcciones OY and OZ, respectivamente (estas últimas fuerzas están contenidas en el plano π_x). En el límite, $\Delta S_x \rightarrow 0$, estas componentes definen los esfuerzos normales y de corte

$$\sigma_{xx} = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{xx}}}{\Delta S_x}, \quad \tau_{xy} = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{xy}}}{\Delta S_x}, \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{xz}}}{\Delta S_x}$$

Es importante advertir que el segundo subíndice de τ se refiere a la dirección en la que actúa la fuerza mientras que el primero indica la dirección perpendicular al plano al que se refiere el esfuerzo. De la misma forma se definen los esfuerzos sobre los planos $\Delta S_y = \Delta x \Delta z$ y $\Delta S_z = \Delta x \Delta y$ (Figuras 9b y 9c):

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{yx}}}{\Delta S_y}, & \sigma_{yy} &= \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{yy}}}{\Delta S_y}, & \tau_{yz} &= \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{yz}}}{\Delta S_y} \\ \tau_{zx} &= \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{zx}}}{\Delta S_z}, & \tau_{zy} &= \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{zy}}}{\Delta S_z}, & \sigma_{zz} &= \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\pi_{zz}}}{\Delta S_z} \end{aligned}$$

La expresión del tensor de esfuerzos es:

$$\xi_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (12)$$

La primera fila de números, $(\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz})$ contiene las componentes del tensor asociadas al plano YOZ (dirección OX): el esfuerzo normal, σ_{xx} , y las componentes τ_{xy} y τ_{xz} del esfuerzo de corte; en la primera de ellas la fuerza actúa en la dirección OY mientras que en la segunda lo hace en la dirección OZ. De la misma forma, la segunda fila $(\sigma_{yx}, \tau_{yy}, \tau_{yz})$ son las componentes asociadas al plano XOZ (dirección OX): el esfuerzo normal, σ_{yy} , y las componentes τ_{yx} (con fuerza en la dirección OX) y τ_{yz} (con fuerza en la dirección OY) del esfuerzo de corte. Finalmente, la tercera fila $(\sigma_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz})$ definen las componentes asociadas al plano XOY (dirección OZ): el esfuerzo normal, σ_{zz} , y las componentes τ_{zx} (con fuerzas en la dirección OX) y τ_{zy} (con fuerzas en la dirección OY) del esfuerzo de corte.

El ejercicio siguiente, Problema 3.1, demuestra que si conocemos las 9 componentes del tensor $\xi_{ij,0}$ en un punto O, origen del sistema cartesiano $S\{OXYZ\}$, todo lo que necesitamos para obtener sus componentes $\xi_{ij,0'}$ en un nuevo sistema cartesiano $S'\{OX'Y'Z'\}$, es la orientación relativa entre los planos de ambos sistemas. Por otro lado, como demostramos en el Problema 3.4, el equilibrio del cuerpo deformado bajo la acción de cargas externas hace que el tensor de esfuerzos sea simétrico, es decir, que se cumplan las siguientes relaciones entre sus componentes:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (13)$$

Así, todas las propiedades de los tensores simétricos son aplicables al tensor de esfuerzos.

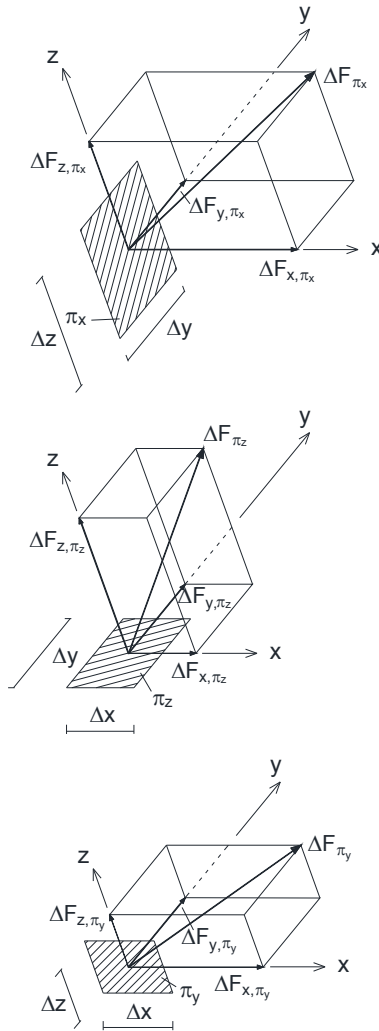


Figura 9. Fuerzas normales y de corte sobre las superficies ΔS_x (a), ΔS_y (b) y ΔS_z (c)

Problema 3.1

Demostrar que si conocemos las componentes del tensor de esfuerzos en un punto P , $\xi_{ij,P_1,XYZP_1}$, referidas a una sistema cartesiano ortogonal $S\{P_1XYZ\}$, cuyos ejes espaciales P_1X , P_1Y y P_1Z intersectan

en P_1 , el estado interno de tensiones está completamente caracterizado. Es decir, para cualquier otro sistema cartesiano ortogonal $S'\{P_1X'Y'Z'\}$ cuyos ejes P_1X' , P_1Y' y P_1Z' intersectan en el mismo punto P_1 , las componentes del tensor de esfuerzos $\xi_{ij,P_1,X'Y'Z'}$ pueden deducirse de las componentes de $\xi_{ij,P_1,XYZP_1}$ y de la información relativa a la orientación del segundo sistema respecto del primero (esta información podría ser la de los cosenos directores de los vectores unitarios del segundo sistema, o de sus ejes, respecto de los unitarios o ejes del primer sistema). La Figura 3.1a muestra los dos sistemas (se ha proyectado un punto del eje P_1X' sobre los ejes P_1X , P_1Y y P_1Z para una mejor visión espacial de la figura).

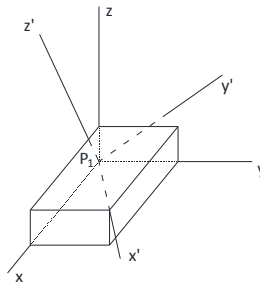


Figura 3.1a. Sistemas $S\{P_1XYZ\}$ y $S'\{P_1X'Y'Z'\}$

Respuesta:

Buscaremos, en primer lugar, los esfuerzos sobre el plano $Y'P_1Z'$ (perpendicular a la dirección P_1X') del nuevo sistema $S'\{P_1X'Y'Z'\}$. Tomemos una pequeña pirámide no regular P_1ABC , de vértice P_1 y base el triángulo ABC . Las aristas de la pirámide, lados Δx , Δy y Δz , se eligen de forma que el plano $Y'P_1Z'$ sea paralelo al plano π_a que contiene el triángulo ABC , Figura 3.1b.

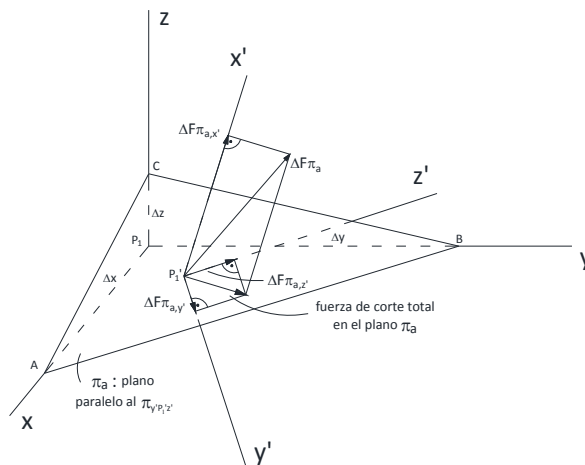


Figura 3.1b. Pirámide para la determinación de las fuerzas que actúan sobre el plano $Y'P_1Z'$

La geometría completa de la pirámide (localización de los cuatro vértices de la base, medida de sus lados, superficie de sus caras, ángulos, etc.) se deduce bajo esta condición una vez elegido un vértice cualquiera de su base ABC.

A partir de las fuerzas que actúan sobre las caras AP_1B , BP_1C y CP_1A (deducidas como productos de las componentes del tensor de esfuerzos $\xi_{ij,P_1,XYZP_1}$ por las superficies de dichas caras) y del equilibrio de las fuerzas que actúan sobre todas las caras de la pirámide, pueden obtenerse las componentes de la fuerza que se ejerce sobre su base (triángulo) ABC, ΔF_{π_a} . Estas componentes quedan expresadas en términos de los vectores unitarios de la base $S\{P_1XYZ\}$ y sus cocientes entre S_{ABC} , en el límite ($\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ y $\Delta z \rightarrow 0$, que implica $\pi_a \rightarrow \pi_{Y'P_1Z'}$), proporcionan las tres componentes (primera fila) del tensor de esfuerzos, $\xi_{ij,P_1,X'Y'Z'}: \xi_{x'x',P_1,X'Y'Z'}, \xi_{x'y',P_1,X'Y'Z'} \text{ y } \xi_{x'z',P_1,X'Y'Z'}$.

Procedamos. Escribiremos en primer lugar las fuerzas que actúan sobre las caras CP_1B , CP_1A y AP_1B ($\bar{F}_{\text{cara } CP_1B}$, $\bar{F}_{\text{cara } CP_1A}$ y $\bar{F}_{\text{cara } AP_1B}$), en términos de las componentes del tensor dado:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{\text{cara } CP_1B}: & \quad \sigma_{xx}S_{CP_1B}\mathbf{i} + \tau_{xy}S_{CP_1B}\mathbf{j} + \tau_{xz}S_{CP_1B}\mathbf{k} \\ \bar{F}_{\text{cara } CP_1A}: & \quad \tau_{yx}S_{CP_1A}\mathbf{i} + \sigma_{yy}S_{CP_1A}\mathbf{j} + \tau_{yz}S_{CP_1A}\mathbf{k} \\ \bar{F}_{\text{cara } AP_1B}: & \quad \tau_{zx}S_{AP_1B}\mathbf{i} + \tau_{zy}S_{AP_1B}\mathbf{j} + \sigma_{zz}S_{AP_1B}\mathbf{k} \end{aligned}$$

La resultante de estas tres fuerzas es la que actúa sobre la cara ABC hacia fuera,

$$\bar{F}_{\text{cara } ABC}, \text{ vale } \bar{F}_{\text{cara } ABC} = \bar{F}_{\text{cara } CP_1B} + \bar{F}_{\text{cara } CP_1A} + \bar{F}_{\text{cara } AP_1B}$$

o bien

$$\bar{F}_{\text{cara } ABC} = (\sigma_{xx}S_{CP_1B} + \tau_{yx}S_{CP_1A} + \tau_{zx}S_{AP_1B})\mathbf{i} + (\tau_{xy}S_{CP_1B} + \sigma_{yy}S_{CP_1A} + \tau_{zy}S_{AP_1B})\mathbf{j} + (\tau_{xz}S_{CP_1B} + \tau_{yz}S_{CP_1A} + \sigma_{zz}S_{AP_1B})\mathbf{k}$$

Como $\frac{\bar{F}_{\text{cara } ABC}}{S_{ABC}}$ es el esfuerzo sobre la cara ABC, sus componentes en el sistema $S\{P_1XYZ\}$ son:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_{\text{cara } ABC}}{S_{ABC}}: & \left\{ \frac{(\sigma_{xx}S_{CP_1B} + \tau_{yx}S_{CP_1A} + \tau_{zx}S_{AP_1B})}{S_{ABC}} \right\}_x, \left\{ \frac{(\tau_{xy}S_{CP_1B} + \sigma_{yy}S_{CP_1A} + \tau_{zy}S_{AP_1B})}{S_{ABC}} \right\}_y, \left\{ \frac{(\tau_{xz}S_{CP_1B} + \tau_{yz}S_{CP_1A} + \sigma_{zz}S_{AP_1B})}{S_{ABC}} \right\}_z \\ \frac{\bar{F}_{\text{cara } ABC}}{S_{ABC}}: & \left\{ \sigma_{xx} \frac{S_{CP_1B}}{S_{ABC}} + \tau_{yx} \frac{S_{CP_1A}}{S_{ABC}} + \tau_{zx} \frac{S_{AP_1B}}{S_{ABC}} \right\}_x, \left\{ \tau_{xy} \frac{S_{CP_1B}}{S_{ABC}} + \sigma_{yy} \frac{S_{CP_1A}}{S_{ABC}} + \tau_{zy} \frac{S_{AP_1B}}{S_{ABC}} \right\}_y, \left\{ \tau_{xz} \frac{S_{CP_1B}}{S_{ABC}} + \tau_{yz} \frac{S_{CP_1A}}{S_{ABC}} + \sigma_{zz} \frac{S_{AP_1B}}{S_{ABC}} \right\}_z \end{aligned}$$

Ahora bien, llamando \mathbf{i}' al vector unitario normal al plano π_a , tenemos

$$\frac{S_{CP_1B}}{S_{ABC}} = \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \quad \frac{S_{CP_1A}}{S_{ABC}} = \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') \quad \frac{S_{AP_1B}}{S_{ABC}} = \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \quad (3.1-1)$$

de modo que llevando la expresión anterior al límite $S_{ABC} \rightarrow 0$ (con la base ABC siempre paralela al plano π_a), obtenemos las componentes del esfuerzo en P_1 en un plano paralelo a π_a . Estas componentes son:

$$\xi_{x'x,P_1,X'Y'Z'} = \left\{ \sigma_{xx} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') + \tau_{yx} \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') + \tau_{zx} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \right\}_x \quad (3.1-2)$$

$$\xi_{x'y,P_1,X'Y'Z'} = \left\{ \tau_{xy} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') + \sigma_{yy} \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') + \tau_{zy} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \right\}_y \quad (3.1-3)$$

$$\xi_{x'z,P_1,X'Y'Z'} = \left\{ \tau_{xz} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') + \tau_{yz} \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') + \sigma_{zz} \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \right\}_z \quad (3.1-4)$$

La simbología empleada trata de explicitar lo más posible el significado de los términos: $\xi_{x'x,P_1,X'Y'Z'}$ es la componente del tensor en el sistema $S'\{P_1X'Y'Z'\}$, en el P_1 y asociada al plano π_a (cuya normal es la dirección del eje X'). En términos matriciales, las expresiones (3.1-2) a (3.1-4) se escriben en la forma

$$\left(\xi_{x'x,P_1,X'Y'Z'} \quad \xi_{x'y,P_1,X'Y'Z'} \quad \xi_{x'z,P_1,X'Y'Z'} \right) = \left(\cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') \quad \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') \quad \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \right) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1-5)$$

Procediendo de igual forma sobre los planos π_b y π_c , paralelos a los planos $Z'P_1X'$ y $X'P_1Y'$ del nuevo sistema $S'\{P_1X'Y'Z'\}$, llegaríamos a expresiones similares para las restantes componentes del tensor $\xi_{ij,P_1,X'Y'Z'}$. Las Figuras 3.1c y 3.1d muestran la geometría para estos engorrosos cálculos que dejamos como ejercicio para el estudiante.

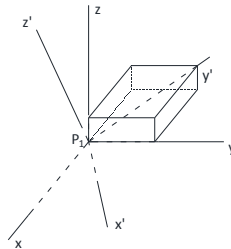


Figura 3.1c. Pirámide para la determinación de las fuerzas que actúan sobre el plano $Z'P_1X'$

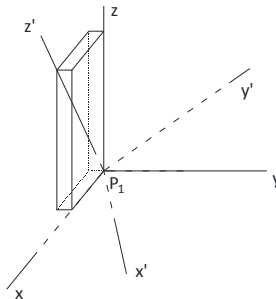


Figura 3.1d. Pirámide para la determinación de las fuerzas que actúan sobre el plano $X'P_1Y'$

Estas componentes son:

$$\begin{pmatrix} \xi_{y'x,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{y'y,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{y'z,P_1,X'Y'Z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{j}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1-6)$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{z'x,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{z'y,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{z'z,P_1,X'Y'Z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1-7)$$

con lo que el tensor de esfuerzos en el nuevo sistema, en términos matriciales tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \xi_{x'x,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{x'y,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{x'z,P_1,X'Y'Z'} \\ \xi_{y'x,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{y'y,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{y'z,P_1,X'Y'Z'} \\ \xi_{z'x,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{z'y,P_1,X'Y'Z'} & \xi_{z'z,P_1,X'Y'Z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \\ \cos(\mathbf{i}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{j}') \\ \cos(\mathbf{i}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1-8)$$

Expresión que podemos reducir (sin perder de vista la interpretación de los símbolos) a la forma

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \\ \cos(\mathbf{i}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{j}') \\ \cos(\mathbf{i}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1-9)$$

Adviértase que $\cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}')$, $\cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}')$ y $\cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}')$ son las proyecciones de los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} sobre el vector \mathbf{i}' , $\cos(\mathbf{i}, \mathbf{j}')$, $\cos(\mathbf{j}, \mathbf{j}')$ y $\cos(\mathbf{k}, \mathbf{j}')$ son las proyecciones de los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} sobre el vector \mathbf{j}' , y $\cos(\mathbf{i}, \mathbf{k}')$, $\cos(\mathbf{j}, \mathbf{k}')$ y $\cos(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ son las proyecciones de los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} sobre el vector \mathbf{k}' . Mediante el álgebra de vectores es fácil deducir la expresión de la matriz de los cosenos directores o matriz de cambio de ejes mediante el cálculo de las proyecciones anteriores (Problema 3.2).

Finalmente hay que ver que para establecer las ecuaciones de equilibrio hemos considerado sólo las fuerzas normales y de corte que actúan sobre las caras, despreciando las fuerzas de volumen a las que el cuerpo podría estar sujeto (tales como fuerzas gravitacionales, de inercia...). Sin embargo, la eliminación de estas últimas fuerzas no cambia los resultados obtenidos ya que, en el límite, éstas (siempre proporcionales a $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$) son de orden de magnitud inferior a las fuerzas superficiales (normales y de corte), estas últimas proporcionales a $\Delta S = \Delta x \Delta y$, o $\Delta y \Delta z$, o $\Delta x \Delta z$.

Problema 3.2

Las componentes del tensor de esfuerzos para un determinado sistema cartesiano ortogonal de vectores unitarios $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ vienen dadas por

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar:

- i) Las componentes del tensor en el mismo punto asociadas a un plano normal al vector $\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
- ii) Las componentes del tensor en el mismo punto asociadas a un plano normal al vector $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$,
- iii) las componentes del tensor para un nuevo sistema ortogonal en el que uno de sus planos es perpendicular al vector $2\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
- iv) las componentes del tensor para un nuevo sistema ortogonal en el que uno de sus planos es perpendicular al vector $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

Respuesta:

i) De la Figura 1.14a,

$$\theta = \arctg(0.5) = 26.56^\circ$$

y los cosenos directores del vector $\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ (ángulos que forman los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} con el vector $\mathbf{j}-2\mathbf{k}$) son:

$$\cos(\mathbf{i}, \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \cos(90) = 0$$

$$\cos(\mathbf{j}, \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \cos(\theta) = 1/\sqrt{5}$$

$$\cos(\mathbf{k}, \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -\cos(\theta) = -2/\sqrt{5}$$

Así, las componentes buscadas (en términos de los unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k}) son:

$$\begin{aligned} (\sigma'_{xx} \quad \tau'_{xy} \quad \tau'_{xz}) &= (\cos(\mathbf{i}, \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \quad \cos(\mathbf{j}, \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \quad \cos(\mathbf{k}, \mathbf{j} - 2\mathbf{k})) \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= (0 \quad 1/\sqrt{5} \quad -2/\sqrt{5}) \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} = (-0.357 \quad 0.894 \quad -1.567) \end{aligned}$$

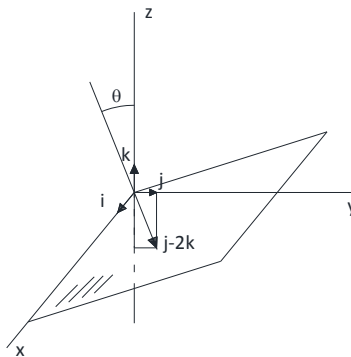


Figura 3.2a. Apartado i). Plano normal al vector $\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

i) De la Figura 3.2b, los cosenos directores del vector $2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ son:

$$\cos(\mathbf{i}, 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 2/3$$

$$\cos(\mathbf{j}, 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = -2/3$$

$$\cos(\mathbf{k}, 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = -1/3$$

Así, las componentes buscadas (en términos de los unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k}) son:

$$(\sigma'_{xx} \quad \tau'_{xy} \quad \tau'_{xz}) = (2/3 \quad -2/3 \quad 1/3) \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} = (1.10 \quad -2.23 \quad 0.40)$$

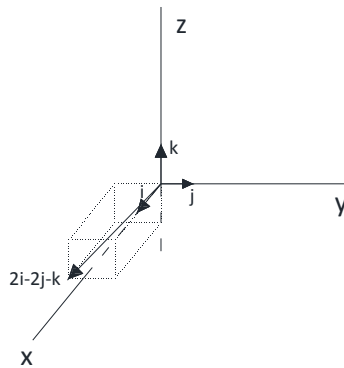


Figura 3.2b. Apartado ii). Plano normal al vector $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

iii) Los ejes $OXYZ$ y $OX'Y'Z'$ de los dos sistemas se muestran en la Figura 3.2c. El sistema $OX'Y'Z'$ es el resultado de girar el primer sistema en torno al eje OX en sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo de valor $\theta = \arctg(0.5) = 26.56^\circ$.

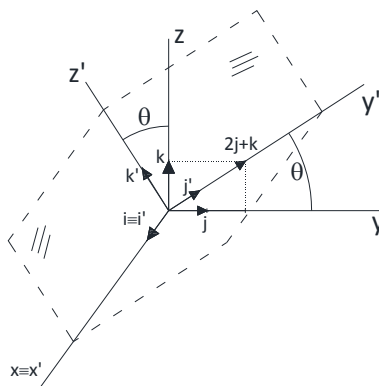


Figura 3.2c. Sistemas de referencia $S\{OXYZ\}$ y $S'\{OX'Y'Z'\}$ del apartado iii)

La matriz de cambio de ejes (puede comprobar que su determinante es la unidad) viene dada por

$$\begin{pmatrix} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \\ \cos(\mathbf{i}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{j}') \\ \cos(\mathbf{i}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz de esfuerzos en nuevo sistema viene dada por

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{zy} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0 \\ -0.6 \cos(\theta) + 0.1 \text{sen}(\theta) & 3 \cos(\theta) + 0.5 \text{sen}(\theta) & 0.5 \cos(\theta) + 2 \text{sen}(\theta) \\ -0.6 \text{sen}(\theta) + 0.1 \cos(\theta) & 3 \text{sen}(\theta) + 0.5 \cos(\theta) & 0.5 \text{sen}(\theta) + 2 \cos(\theta) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 0 \\ -0.49 & 2.91 & 1.34 \\ -0.18 & 1.79 & 2.01 \end{pmatrix}$$

iv) La Figura 3.2d muestra el vector $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, que representa uno de los planos del nuevo sistema $OX'Y'Z'$ (por ejemplo el normal a la dirección $\mathbf{i}' = \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$). Puede buscar otros dos vectores que representen las direcciones \mathbf{j}' y \mathbf{k}' ; bastará, por ejemplo, con elegir un vector cualquiera (de componentes sencillas) normal a dirección $\mathbf{i}' = \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, por ejemplo $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, y asignarle la dirección \mathbf{j}' ; y, finalmente buscar un vector perpendicular a los vectores $\mathbf{i}' = \mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ y $\mathbf{j}' = \mathbf{j}+\mathbf{k}$, que puede ser por ejemplo el producto vectorial de ambos $(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{j}+\mathbf{k}) = (2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$ y asignarle la dirección \mathbf{k}' .

Así, las nuevas direcciones vienen dadas por los vectores

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{k}' = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Con todo, es inmediato obtener

$$\begin{pmatrix} \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{i}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{i}') \\ \cos(\mathbf{i}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{j}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{j}') \\ \cos(\mathbf{i}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{j}, \mathbf{k}') & \cos(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

y los componentes del tensor de esfuerzos en los nuevos planos:

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{zy} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0.17 & 1.11 & -0.81 \\ -0.35 & 2.47 & 1.77 \\ 1.10 & -1.51 & 0.69 \end{pmatrix}$$

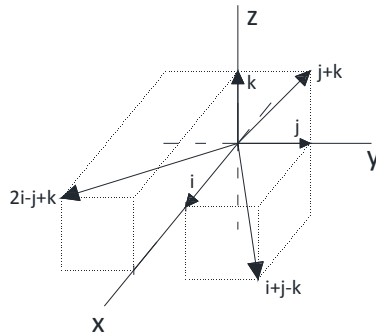


Figura 3.2d. Sistemas de referencia S{OXYZ} y S'{OX'Y'Z'} del apartado iv)

Problema 3.3

Sea $\xi_{ij,P_1,XYZP_1}$ el tensor de esfuerzos en P_1 asociado a los planos XP_1Y , YXZ y YP_1Z , Figure 3.3. Encontrar los esfuerzos que actúan sobre el plano π_θ (plano definido por la cara CBEF). Determinar las componentes normales y de corte del esfuerzo sobre el plano π_θ . Generalizar el resultado anterior encontrando la matriz de esfuerzos en el punto P_1 referida a un sistema ortogonal cartesiano de planos en el que uno de los planos es π_θ . Aplicar el problema a los datos:

$$\xi_{ij,P_1,XYZP_1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ y plano } \pi_\theta \text{ definido por el vector } i+3j-2k.$$

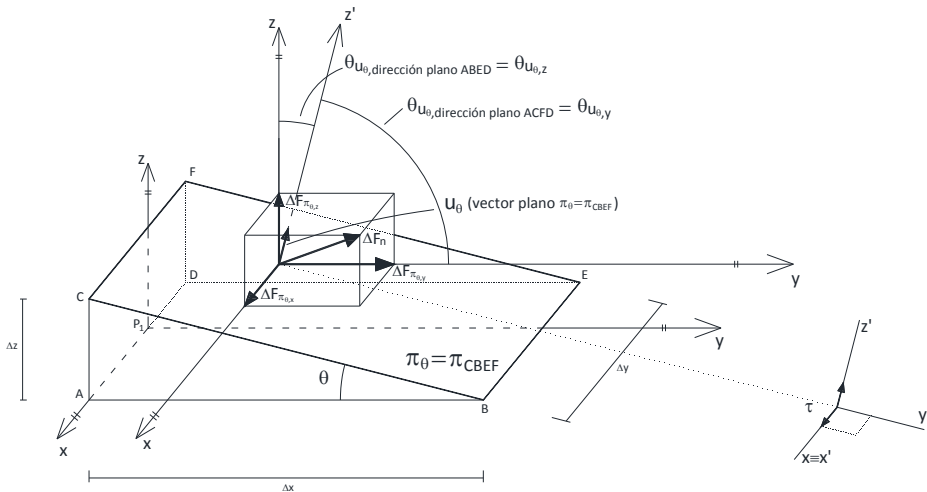


Figura 3.3. Fuerzas sobre el plano definido por el ángulo θ

Respuesta:

Sea u_θ el vector unitario (versor) que define (es perpendicular a) el plano π_θ , y ΔF_n la fuerza incógnita que actúa sobre este plano. El equilibrio de todas las fuerzas actuantes sobre la cuña permite determinar las componentes OX, OY y OZ de la fuerza ΔF_n . Calculemos en primer lugar la componente OX' de esta fuerza, $\Delta F_{\pi_\theta X'}$ o $\Delta F_{\pi_{CBED} X'}$, que debe equilibrar las componentes OX' de las fuerzas sobre las otras cuatro caras (ABED, ACFD, ABC y DEF), las cuales pueden expresarse en términos de las componentes del tensor de esfuerzos $\xi_{ij, P_1, XYZP_1}$:

$$\begin{aligned}\Delta F_{\pi_{ABED} X'} &= \tau_{yx} S_{ABED} \\ \Delta F_{\pi_{ACFD} X'} &= \tau_{zx} S_{ACFD} \\ \Delta F_{\pi_{ABC} X'} &= \sigma_{xx}(\text{en la superficie ABC}) S_{ABC} \\ \Delta F_{\pi_{DEF} X'} &= -\sigma_{xx}(\text{en la superficie DEF}) S_{DEF}\end{aligned}$$

donde las dos últimas expresiones tienen el mismo valor en el límite $\Delta y \rightarrow 0$, y se equilibran entre sí (ya que $\sigma_{xx}(\text{en la superficie ABC}) = \sigma_{xx}(\text{en la superficie DEF})$). De esta forma, podemos escribir

$$\Delta F_{\pi_\theta X'} = \tau_{yx} S_{ABED} + \tau_{zx} S_{ACFD} + \sigma_{xx} S_{ABC} + \sigma_{xx} S_{DEF} = \tau_{yx} S_{ABED} + \tau_{zx} S_{ACFD}$$

Como $\Delta F_{\pi_\theta X'} = \tau_{\pi_\theta X'} S_{\pi_\theta}$, siendo $\tau_{\pi_\theta X'}$ la componente OX' del tensor de esfuerzos relacionada con el plano π_θ , es inmediato verificar que

$$\tau_{\pi_\theta X'} = \tau_{yx} \frac{S_{ABED}}{S_{\pi_\theta}} + \tau_{zx} \frac{S_{ACFD}}{S_{\pi_\theta}} = \tau_{yx} \cos(\theta_{u_\theta, y}) + \tau_{zx} \cos(\theta_{u_\theta, z}) \quad (3.3-1)$$

con $\theta_{u_\theta, y}$ y $\theta_{u_\theta, z}$ los ángulos del versor u_θ con las direcciones espaciales OY y OZ, respectivamente. Generalizando la orientación del versor u_θ (y de su plano asociado π_θ), la ecuación (3.3-1) se escribe en la forma

$$\text{esfuerzo}_{\pi_\theta, x} = \sigma_{xx} \cos(\theta_{u_\theta, x}) + \tau_{yx} \cos(\theta_{u_\theta, y}) + \tau_{zx} \cos(\theta_{u_\theta, z}) \quad (3.3-2)$$

con $\cos(\theta_{u_\theta, x})$ el ángulo entre el versor u_θ y la dirección espacial OX. Advierta que hemos escrito $\text{esfuerzo}_{\pi_\theta, x}$ en lugar de $\tau_{\pi_\theta, x}$ porque esta magnitud no es necesariamente un esfuerzo de corte. Siguiendo un procedimiento similar, las componentes OY y OZ de $\Delta F_{\pi_\theta, x}$ vienen dadas por

$$\text{esfuerzo}_{\pi_\theta, y} = \tau_{xy} \cos(\theta_{u_\theta, x}) + \sigma_{yy} \cos(\theta_{u_\theta, y}) + \tau_{zy} \cos(\theta_{u_\theta, z}) \quad (3.3-2)$$

$$\text{esfuerzo}_{\pi_\theta, z} = \tau_{xz} \cos(\theta_{u_\theta, x}) + \tau_{yz} \cos(\theta_{u_\theta, y}) + \sigma_{zz} \cos(\theta_{u_\theta, z}) \quad (3.3-3)$$

En resumen, a partir del tensor inicial de esfuerzos, $\xi_{ij, P_1, XYZP_1}$, podemos encontrar las componentes OX, OY y OZ de este tensor para un plano definido por sus cosenos directores. En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \text{stress}_{x,\pi_0} \\ \text{stress}_{y,\pi_0} \\ \text{stress}_{z,\pi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{u_0,x}) \\ \cos(\theta_{u_0,y}) \\ \cos(\theta_{u_0,z}) \end{pmatrix} \quad (3.3-4)$$

Es inmediato comprobar que esta expresión puede también escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} \text{stress}_{x,\pi_0} \\ \text{stress}_{y,\pi_0} \\ \text{stress}_{z,\pi_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{u_0,x}) & \cos(\theta_{u_0,y}) & \cos(\theta_{u_0,z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.3-5)$$

Para determinar la componente normal del esfuerzo sobre el plano π_0 basta proyectar el esfuerzo total en la dirección perpendicular al plano (la dirección de u_0). Esta componente vale

$$\sigma_{\pi_0} = \{(\text{stress}_{x,\pi_0})\mathbf{i} + (\text{stress}_{y,\pi_0})\mathbf{j} + (\text{stress}_{z,\pi_0})\mathbf{k}\} \frac{\mathbf{u}_0}{|\mathbf{u}_0|} \quad (3.3-6)$$

En cuanto a la componente de corte basta restar la anterior del esfuerzo total

$$\tau_{\pi_0} = \{(\text{stress}_{x,\pi_0})\mathbf{i} + (\text{stress}_{y,\pi_0})\mathbf{j} + (\text{stress}_{z,\pi_0})\mathbf{k}\} - \sigma_{\pi_0} \quad (3.3-7)$$

Por último, para encontrar la matriz de esfuerzos en P_1 referida a un sistema ortogonal cartesiano de planos con π_0 uno de los planos, generalizamos el resultado anterior enunciando lo siguiente: Si

$$\xi_{ij,P_1,XYZP_1} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

son las componentes del tensor de esfuerzos en P_1 referidas a tres planos ortogonales de direcciones XP_1Y , XP_1Z y YP_1Z ; las componentes del tensor en el mismo punto, referidas a otros tres planos ortogonales, $X'P_1Y'$, $X'P_1Z'$ y $Y'P_1Z'$, uno de los cuales es π_0 ,

$$\xi_{ij,P_1,X'Y'Z'P_1} = \begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{y'x'} & \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'y'} & \tau_{z'y'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'z'} \end{pmatrix}$$

están relacionadas con las primeras mediante la expresión

$$\xi_{ij,P_1,X'Y'Z'P_1} = \xi_{ij,P_1,XYZP_1} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\pi_{X'P_1Y'},X}) & \cos(\theta_{\pi_{X'P_1Z'},X}) & \cos(\theta_{\pi_{Y'P_1Z'},X}) \\ \cos(\theta_{\pi_{X'P_1Y'},Y}) & \cos(\theta_{\pi_{X'P_1Z'},Y}) & \cos(\theta_{\pi_{Y'P_1Z'},Y}) \\ \cos(\theta_{\pi_{X'P_1Y'},Z}) & \cos(\theta_{\pi_{X'P_1Z'},Z}) & \cos(\theta_{\pi_{Y'P_1Z'},Z}) \end{pmatrix}$$

o

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{y'x'} & \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'y'} & \tau_{z'y'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Y'}X'}) & \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Z'}X'}) & \cos(\theta_{\pi_{y'P_1Z'}X'}) \\ \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Y'}Y'}) & \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Z'}Y'}) & \cos(\theta_{\pi_{y'P_1Z'}Y'}) \\ \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Y'}Z'}) & \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Z'}Z'}) & \cos(\theta_{\pi_{y'P_1Z'}Z'}) \end{pmatrix} \quad (3.3-8)$$

con $\theta_{\pi_{x'P_1Y'}X'}$, $\theta_{\pi_{x'P_1Z'}X'}$ y $\theta_{\pi_{y'P_1Z'}X'}$ los cosenos directores del vector unitario que define (es perpendicular a) el plano $X'P_1Y'$, $\theta_{\pi_{x'P_1Y'}Y'}$, $\theta_{\pi_{x'P_1Z'}Y'}$ y $\theta_{\pi_{y'P_1Z'}Y'}$ aquellos que definen el plano $X'P_1Z'$, y $\theta_{\pi_{x'P_1Y'}Z'}$, $\theta_{\pi_{x'P_1Z'}Z'}$ y $\theta_{\pi_{y'P_1Z'}Z'}$ los que definen el plano $Y'P_1Z'$.

El resultado anterior puede escribirse también en la forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{y'x'} & \tau_{z'x'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'y'} & \tau_{z'y'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Y'}X'}) & \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Z'}X'}) & \cos(\theta_{\pi_{y'P_1Z'}X'}) \\ \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Y'}Y'}) & \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Z'}Y'}) & \cos(\theta_{\pi_{y'P_1Z'}Y'}) \\ \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Y'}Z'}) & \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Z'}Z'}) & \cos(\theta_{\pi_{y'P_1Z'}Z'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.3-9)$$

Aplicación al tensor $\xi_{ij,P_1,XYZP_1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix}$ y al plano definido por el vector $\mathbf{u}_0 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

A partir de la expresión general (3.3-7), o de la simplificada (3.3-4), las componentes cartesianas del esfuerzo en el plano (no se hace referencia explícita al punto en el que se determina el esfuerzo), a las que llamaremos $(\sigma_{x'x'}, \tau_{y'x'}, \tau_{z'x'})$, son

$$\begin{aligned} (\sigma_{x'x'} \quad \tau_{y'x'} \quad \tau_{z'x'}) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Y'}X'}) & \cos(\theta_{\pi_{x'P_1Z'}X'}) & \cos(\theta_{\pi_{y'P_1Z'}X'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \\ &= (1/\sqrt{14} \quad 3/\sqrt{14} \quad -2/\sqrt{14}) \begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.1 \\ -0.6 & 3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} = (-0.27 \quad 1.98 \quad -0.64) \end{aligned}$$

Por otro lado, las componentes normales y de corte del esfuerzo en el mismo plano se determinan mediante (3.3-5) y (3.3-6), respectivamente

$$\sigma_{\pi_0} = \{-0.27\mathbf{i} + 1.98\mathbf{j} - 0.64\mathbf{k}\} \frac{\mathbf{u}_0}{|\mathbf{u}_0|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \{-0.27\mathbf{i} + 1.98\mathbf{j} - 0.64\mathbf{k}\} \{\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\} = 1.86$$

$$\tau_{\pi_0} = \{(\text{stress}_{x,\pi_0})\mathbf{i} + (\text{stress}_{y,\pi_0})\mathbf{j} + (\text{stress}_{z,\pi_0})\mathbf{k}\} - \{-0.27\mathbf{i} + 1.98\mathbf{j} - 0.64\mathbf{k}\}$$

Problema 3.4

Demostrar que el tensor de esfuerzos es simétrico.

Respuesta:

Sea $\xi_{ij,P_0} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ el tensor de esfuerzos en el punto P_0 , centro de un pequeño cubo de

lado dl , Figura 3.4. Como Δx , Δy y Δz tienden a cero para el cálculo de esfuerzos en el punto, los pares de esfuerzos en caras opuestas del cubo (no necesariamente los mismos) tienden a ser iguales en el límite pues se refieren al esfuerzo en un mismo plano. Así,

$\sigma_{xx,BFGC} = \sigma_{xx,AEHD}$	$\sigma_{yy,ABCD} = \sigma_{yy,EFGH}$	y	$\sigma_{zz,DHGC} = \sigma_{zz,AEFB}$
$\tau_{xy,BFGC} = \tau_{xy,AEHD}$	y	$\tau_{zy,BFGC} = \tau_{zy,AEHD}$	
$\tau_{yx,ABCD} = \tau_{yx,EFGH}$	y	$\tau_{zx,ABCD} = \tau_{zx,EFGH}$	
$\tau_{xz,DHGC} = \tau_{xz,AEFB}$	y	$\tau_{yz,DHGC} = \tau_{yz,AEFB}$	

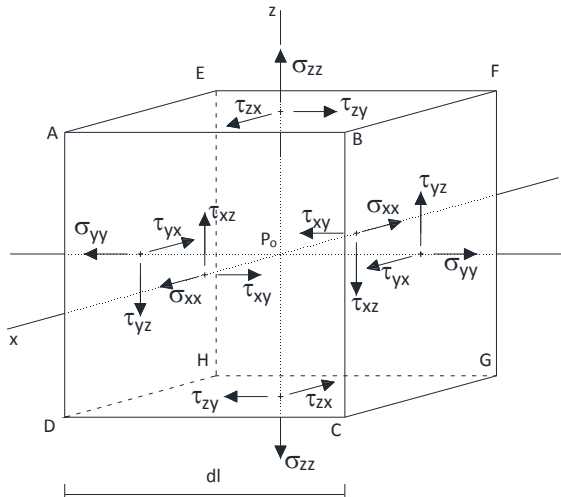


Figura 3.4. Distribución de los esfuerzos en un cubo infinitesimal

Además, el equilibrio del cubo impone que el momento total de todos los esfuerzos de corte debe ser nulo (las fuerzas normales, si están regularmente distribuidas no causan momento). Esta condición aplicada a cada eje del cubo da como resultado

Axis OX: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$
 Axis OY: $\tau_{xz} = \tau_{zx}$
 Axis OZ: $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

En definitiva, el tensor de esfuerzos es un tensor simétrico y, merced a esta importante propiedad, dicho tensor puede ser relacionado con tres ejes principales de esfuerzos en los cuales no existen tensiones de corte, esto es, en los planos principales normales a dichos ejes sólo existen esfuerzos normales. Para cualquier tensor de tensiones con esfuerzos de corte no nulos referido a un punto del sólido, es siempre posible elegir un sistema de referencia (cuyas direcciones son los ejes principales de tensiones) para el cual el tensor de tensiones se reduce a un tensor diagonal cuyos valores son las tensiones normales sobre planos normales a dichos ejes.

Si el elipsoide degenera en una esfera es fácil demostrar que no existen esfuerzos de corte en ningún plano (ver el siguiente problema) y los esfuerzos normales tienen el mismo valor en todas las direcciones. En general, como el tensor de tensiones puede cambiar de un punto a otro del cuerpo, para describir el estado tensional del cuerpo en todos sus puntos se requieren nueve funciones de las coordenadas, que se reducen a seis independientes por la propiedad de simetría del tensor.

Problema 3.5

Estudiar el campo tensorial de un pieza esférica de radio R (de plástico, metal, suelo granular, o de cualquier otro material) sujeta a una presión uniforme en su superficie, p_o . ¿Cómo sería el tensor de esfuerzos si el material fuera un fluido ideal o viscoso? Piense que la presión se aplica envolviendo el material con una delgada capa de goma. Se desprecia el peso del material.

Respuesta:

La solución requiere un poco de reflexión y algunas matemáticas. Para el caso de un material líquido (ideal o real) en reposo, como éste no soporta esfuerzos de corte en equilibrio (el fluido ideal en movimiento tampoco soporta esfuerzos de corte), la única componente de presión en cada punto es la normal; y como se desprecia el peso del fluido, la presión en su interior es la misma en todos los puntos. En consecuencia, el tensor de tensiones es diagonal con $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=p_o$. Si el material es un sólido, para determinar el esfuerzo en cualquier plano de simetría, cortaremos la esfera en dos partes iguales, Figura 3.5a, y escribiremos las ecuaciones de equilibrio de la semiesfera superior. Para más comodidad trabajaremos con coordenadas esféricas.

Tomemos una superficie infinitesimal (dS_{shell}) alrededor del eje OZ, de espesor (arco) $R(d\theta)$ y radio $r = R \cos(\theta)$, para la que

$$dS_{shell} = 2\pi r R(d\theta)$$

La fuerza sobre esta superficie debida a la presión exterior, dirigida por simetría hacia el centro de la esfera, viene dada por

$$d\vec{F}_{dS_{shell}} = p_o dS_{shell} \mathbf{u}_r = 2\pi p_o r R(d\theta) \mathbf{u}_r$$

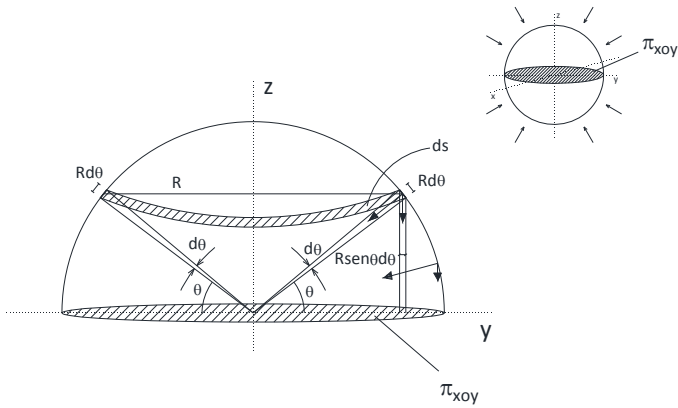


Figure 3.5a. Esquema físico y superficies infinitesimales

siendo su componente vertical

$$dF_{dS_{shell},z} = 2\pi p_o r R(d\theta) \sin(\theta) = 2\pi p_o R^2 \sin(\theta) \cos(\theta) (d\theta) = \pi p_o R^2 \sin(2\theta) (d\theta) \quad (3.5-1)$$

Podemos olvidarnos de su componente horizontal, $d\vec{F}_{dS_{shell}}$, ya que para cada tramo dentro de dS_{shell} existe un tramo opuesto de igual tamaño cuyas componentes horizontales de fuerza se compensan; la consecuencia es que la componente horizontal neta de la fuerza en cada rodaja superficial dS_{shell} es nula. La componente vertical $F_{dS_{shell},z}$ de cada rodaja, sin embargo, debe ser equilibrada por la fuerzas ($dF_{dS_{base},z}$) causadas por la tensión normal en la corona circular de la base de la semiesfera, de superficie dS_{base} (dS_{base} es la superficie proyectada por dS_{shell} sobre la base), Figura 3.5b. Esta fuerza vale

$$dF_{dS_{base},z} = \sigma_{xx} dS_{base} = \sigma_{xx} dS_{shell} \sin(\theta) = \sigma_{xx} \pi R^2 \sin(2\theta) (d\theta) \quad (3.5-2)$$

Igualando las ecuaciones (3.5-1) y (3.5-2) resulta

$$\sigma_{xx} = p_o$$

Así, el esfuerzo en la base de la semiesfera es uniforme y del mismo valor que la presión exterior. Como la solución no dependen de θ , el corte de la esfera por cualquier sección máxima (cualquier diámetro) da la misma solución. En síntesis, el tensor de tensiones en cualquier punto interior de la esfera viene dado por

$$\xi_{ij, \text{cualquier punto de la esfera}} = \begin{bmatrix} p_o & 0 & 0 \\ 0 & p_o & 0 \\ 0 & 0 & p_o \end{bmatrix}$$

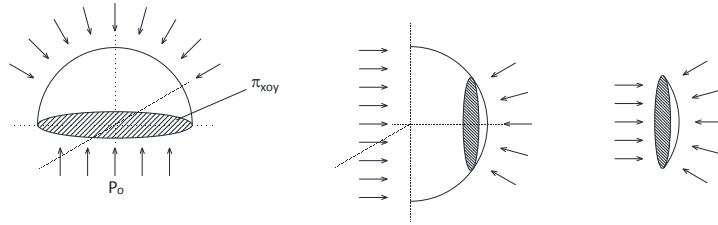


Figura 3.5b. Equilibrio de la semiesfera y corte por una sección no diagonal

En efecto, la afirmación anterior es cierta merced a que todos los puntos interiores de la esfera están contenidos en algún plano diagonal, un razonamiento simple y directo que justifica tal afirmación. Podríamos trabajar sobre un corte de la esfera por un plano arbitrario que no contenga una diagonal, Figura 3.5b, y repetir los cálculos anteriores para demostrar que la presión en cualquier punto de la superficie de separación es también p_0 ; pero éste sería sin duda un trabajo más difícil que ha sido evitado (como ocurre con frecuencia) con razonamientos sencillos.

Problema 3.6

Representar un plano arbitrariamente orientado que contenga el punto O para el cual el tensor de esfuerzos es diagonal con $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}$. Demostrar que los esfuerzos en dicho plano son también normales. A diferencia del ejercicio anterior, estudiamos un escenario más simple, ya que hacemos referencia a un punto en particular y no a todos los puntos de cuerpo. Sin embargo, usaremos de nuevo conocimientos matemáticos básicos, y sencillos razonamientos físicos, para justificar la afirmación del enunciado.

Respuesta:

La Figura 3.6 muestra un plano π arbitrariamente orientado alrededor del punto O y que contiene dicho punto. El equilibrio del prisma OABCD requiere que la fuerza que actúa sobre el plano π sea igual y opuesta a la suma de las fuerzas que actúan sobre las caras AOB, AOC y BOC.

Las fuerzas individuales sobre estas caras son

$$\begin{aligned}\bar{F}_{S_{AOB}} &= \sigma_{xx} S_{AOB} \mathbf{i} = \frac{ab}{2} \sigma_{xx} \mathbf{i} \\ \bar{F}_{S_{AOC}} &= \sigma_{yy} S_{AOC} \mathbf{j} = \frac{ac}{2} \sigma_{yy} \mathbf{j} = \frac{ac}{2} \sigma_{xx} \mathbf{j} \\ \bar{F}_{S_{BOC}} &= \sigma_{zz} S_{BOC} \mathbf{k} = \frac{bc}{2} \sigma_{zz} \mathbf{k} = \frac{bc}{2} \sigma_{xx} \mathbf{k}\end{aligned}$$

y la resultante de ellas

$$\bar{R}_{S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}} = \frac{\sigma_{xx}}{2} (abi + acj + bck)$$

Para demostrar que esta resultante es perpendicular al plano π construiremos en primer lugar un vector perpendicular a este plano a partir de los vectores $\bar{v}_{BA} = (a\mathbf{i} - b\mathbf{j})$ y $\bar{v}_{BC} = (c\mathbf{k} - b\mathbf{j})$; por ejemplo, el producto vectorial de ambos $\mathbf{v}_{BA} \wedge \mathbf{v}_{BC}$:

$$\bar{v}_{BA} \wedge \bar{v}_{BC} = (a\mathbf{i} - b\mathbf{j}) \wedge (c\mathbf{k} - b\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & -b & 0 \\ 0 & -b & c \end{pmatrix} = -bci - caj - bak$$

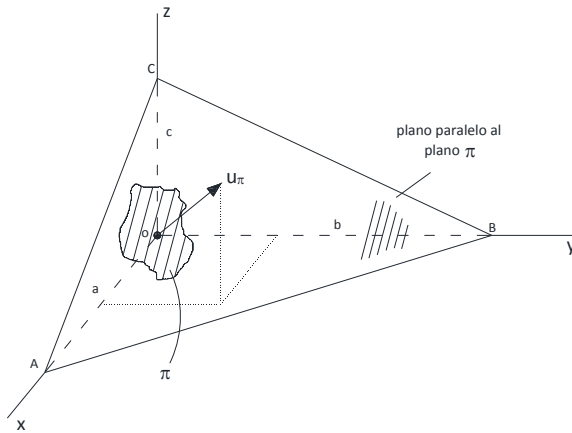


Figura 3.6. Plano arbitrariamente orientado en torno a O

De este modo, los vectores $\bar{R}_{S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}}$ y $\bar{v}_{BA} \wedge \bar{v}_{BC}$ son paralelos (aunque de sentido opuesto). Como la fuerza debida al esfuerzo total sobre π ($\Delta \bar{F}_\pi$) debe equilibrar (en el límite $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$ y $c \rightarrow 0$) las fuerzas sobre las otras caras, podemos escribir

$$\Delta \bar{F}_\pi = -\bar{R}_{S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}} = -\frac{\sigma_{xx}}{2} (abi + acj + bck)$$

pero $\Delta \bar{F}_\pi$, con \mathbf{u}_θ el vector unitario normal al plano π , se define también como

$$\Delta \bar{F}_\pi = \sigma_\pi S_{ABC} \mathbf{u}_\theta$$

de modo que sustituyendo la superficie

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\bar{v}_{BA} \wedge \bar{v}_{BC}| = |bci + caj + bak|$$

en las ecuaciones anteriores de $|\Delta \bar{F}_\pi|$ y $|\bar{R}_{S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}}|$, resulta

$$\sigma_\pi \frac{1}{2} |bci + caj + bak| = \frac{\sigma_{xx}}{2} |abi + acj + bck|$$

Cuya solución da, como se esperaba,

$$\sigma_{\pi} = \sigma_{xx}$$

La independencia de la orientación del plano π significa, en efecto, que el esfuerzo el cualquier plano que contenga el punto O sólo tiene componente normal.

3.2. La matriz de cambios entre sistemas de referencia cartesianos

3.2.1. Transformaciones entre versores de sistemas ortogonales cartesianos de diferente orientación

Sean $S_{x_1x_2x_3}$ y $S_{x'_1x'_2x'_3}$ dos sistemas ortogonales con el mismo origen y diferente dirección espacial, y sean $\{e_i\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\{e'_i\} = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ sus respectivos vectores unitarios, Figura 10.

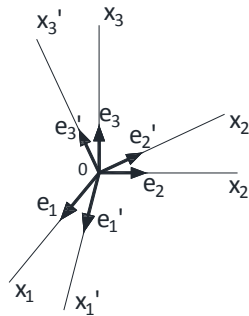


Figura10. Sistemas cartesianos ortogonales y sus vectores unitarios

Denominemos $Q_{ij,S \rightarrow S'}$ al símbolo matricial que representa los cosenos directores de los ángulos que forman los ejes x'_i y x_i . Advierta que el ángulo formado por cualquier par de ejes x'_i y x_j se extiende al intervalo $[0, \pi]$ rad por lo que $\cos(x'_i, x_j)$ es un número positivo o negativo. También, note que el ángulo que definen cualquier par de ejes que se cruzan, uno en el sistema x'_i y otro en x_i , puede definirse mediante dos ángulos suplementarios, β y $2\pi - \beta$, que tienen el mismo coseno en valor absoluto.

En general, $\cos(x'_i, x_j) \neq \cos(x'_j, x_i)$, ya que el par de ejes x'_i y x_j no tienen nada que ver con el par x'_j y x_i ; por ejemplo, el par $x'_1 - x_2$ es diferente del par $x'_2 - x_1$. Así, $Q_{ij,S \rightarrow S'}$ es, en general, una matriz que no es simétrica ni antisimétrica.

Escribimos

$$Q_{ij,S \rightarrow S'} = \cos(x'_i, x_j) = \begin{pmatrix} \cos(x'_1, x_1) & \cos(x'_1, x_2) & \cos(x'_1, x_3) \\ \cos(x'_2, x_1) & \cos(x'_2, x_2) & \cos(x'_2, x_3) \\ \cos(x'_3, x_1) & \cos(x'_3, x_2) & \cos(x'_3, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11,S \rightarrow S'} & Q_{12,S \rightarrow S'} & Q_{13,S \rightarrow S'} \\ Q_{21,S \rightarrow S'} & Q_{22,S \rightarrow S'} & Q_{23,S \rightarrow S'} \\ Q_{31,S \rightarrow S'} & Q_{32,S \rightarrow S'} & Q_{33,S \rightarrow S'} \end{pmatrix}$$

Usando las componentes de $Q_{ij,S \rightarrow S'}$, es inmediato expresar las componentes de los unitarios del sistema $Sx_1x_2x_3$, $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ en términos de los vectores del sistema $Sx_1x_2x_3$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Estas relaciones vienen dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= \cos(x'_1, x_1) \mathbf{e}_1 + \cos(x'_1, x_2) \mathbf{e}_2 + \cos(x'_1, x_3) \mathbf{e}_3 = Q_{11,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_1 + Q_{12,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_2 + Q_{13,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= \cos(x'_2, x_1) \mathbf{e}_1 + \cos(x'_2, x_2) \mathbf{e}_2 + \cos(x'_2, x_3) \mathbf{e}_3 = Q_{21,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_1 + Q_{22,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_2 + Q_{23,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= \cos(x'_3, x_1) \mathbf{e}_1 + \cos(x'_3, x_2) \mathbf{e}_2 + \cos(x'_3, x_3) \mathbf{e}_3 = Q_{31,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_1 + Q_{32,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_2 + Q_{33,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

o bien por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11,S \rightarrow S'} & Q_{12,S \rightarrow S'} & Q_{13,S \rightarrow S'} \\ Q_{21,S \rightarrow S'} & Q_{22,S \rightarrow S'} & Q_{23,S \rightarrow S'} \\ Q_{31,S \rightarrow S'} & Q_{32,S \rightarrow S'} & Q_{33,S \rightarrow S'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

En notación indicial $\mathbf{e}'_i = Q_{ij,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_j$. De la misma forma, los unitarios $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ pueden expresarse en términos de los vectores $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \cos(x_1, x'_1) \mathbf{e}'_1 + \cos(x_1, x'_2) \mathbf{e}'_2 + \cos(x_1, x'_3) \mathbf{e}'_3 = Q_{11,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_1 + Q_{12,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_2 + Q_{13,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 &= \cos(x_2, x'_1) \mathbf{e}'_1 + \cos(x_2, x'_2) \mathbf{e}'_2 + \cos(x_2, x'_3) \mathbf{e}'_3 = Q_{21,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_1 + Q_{22,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_2 + Q_{23,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3 &= \cos(x_3, x'_1) \mathbf{e}'_1 + \cos(x_3, x'_2) \mathbf{e}'_2 + \cos(x_3, x'_3) \mathbf{e}'_3 = Q_{31,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_1 + Q_{32,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_2 + Q_{33,S' \rightarrow S} \mathbf{e}'_3\end{aligned}$$

Pero como

$$\begin{aligned}\cos(x_1, x'_1) &= \cos(x'_1, x_1) & \Rightarrow & Q_{11,S' \rightarrow S} = Q_{11,S \rightarrow S'} \\ \cos(x_1, x'_2) &= \cos(x'_2, x_1) & \Rightarrow & Q_{12,S' \rightarrow S} = Q_{21,S \rightarrow S'} \\ \cos(x_1, x'_3) &= \cos(x'_3, x_1) & \Rightarrow & Q_{13,S' \rightarrow S} = Q_{31,S \rightarrow S'} \\ \cos(x_2, x'_1) &= \cos(x'_1, x_2) & \Rightarrow & Q_{21,S' \rightarrow S} = Q_{12,S \rightarrow S'} \\ \cos(x_2, x'_2) &= \cos(x'_2, x_2) & \Rightarrow & Q_{22,S' \rightarrow S} = Q_{22,S \rightarrow S'} \\ \cos(x_2, x'_3) &= \cos(x'_3, x_2) & \Rightarrow & Q_{23,S' \rightarrow S} = Q_{32,S \rightarrow S'} \\ \cos(x_3, x'_1) &= \cos(x'_1, x_3) & \Rightarrow & Q_{31,S' \rightarrow S} = Q_{13,S \rightarrow S'} \\ \cos(x_3, x'_2) &= \cos(x'_2, x_3) & \Rightarrow & Q_{32,S' \rightarrow S} = Q_{23,S \rightarrow S'} \\ \cos(x_3, x'_3) &= \cos(x'_3, x_3) & \Rightarrow & Q_{33,S' \rightarrow S} = Q_{33,S \rightarrow S'}\end{aligned}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= Q_{11,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_1 + Q_{21,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_2 + Q_{31,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 &= Q_{12,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_1 + Q_{22,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_2 + Q_{32,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3 &= Q_{13,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_1 + Q_{23,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_2 + Q_{33,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_3\end{aligned}$$

o, $\mathbf{e}_i = Q_{ji,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_j$. En notación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11,S \rightarrow S'} & Q_{21,S \rightarrow S'} & Q_{31,S \rightarrow S'} \\ Q_{12,S \rightarrow S'} & Q_{22,S \rightarrow S'} & Q_{32,S \rightarrow S'} \\ Q_{13,S \rightarrow S'} & Q_{23,S \rightarrow S'} & Q_{33,S \rightarrow S'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11,S \rightarrow S'} & Q_{12,S \rightarrow S'} & Q_{13,S \rightarrow S'} \\ Q_{21,S \rightarrow S'} & Q_{22,S \rightarrow S'} & Q_{23,S \rightarrow S'} \\ Q_{31,S \rightarrow S'} & Q_{32,S \rightarrow S'} & Q_{33,S \rightarrow S'} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}$$

por lo que la matriz que se aplica a los vectores unitarios de $Sx'_1x'_2x'_3$, $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, para obtener los unitarios de $Sx_1x_2x_3$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, es la traspuesta de la que se aplica a los unitarios de $Sx_1x_2x_3$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, para obtener los unitarios de $Sx'_1x'_2x'_3$, $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$.

En notación matricial estos resultados se denotan como $\mathbf{e}'_i = Q_{ij,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_j$ y $\mathbf{e}_i = Q_{ji,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_j$.

Las matrices $Q_{ij,S \rightarrow S'}$ y $Q_{ji,S \rightarrow S'}$ se relacionan pues en la forma

$$Q_{ji,S \rightarrow S'} = (Q_{ij,S \rightarrow S'})^T$$

Sustituyendo ahora el valor de $\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ en la expresión $\begin{pmatrix} Q_{11,S \rightarrow S'} & Q_{12,S \rightarrow S'} & Q_{13,S \rightarrow S'} \\ Q_{21,S \rightarrow S'} & Q_{22,S \rightarrow S'} & Q_{23,S \rightarrow S'} \\ Q_{31,S \rightarrow S'} & Q_{32,S \rightarrow S'} & Q_{33,S \rightarrow S'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ resulta

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11,S \rightarrow S'} & Q_{12,S \rightarrow S'} & Q_{13,S \rightarrow S'} \\ Q_{21,S \rightarrow S'} & Q_{22,S \rightarrow S'} & Q_{23,S \rightarrow S'} \\ Q_{31,S \rightarrow S'} & Q_{32,S \rightarrow S'} & Q_{33,S \rightarrow S'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}$$

Una ecuación que solo se satisface bajo la condición:

$$\begin{pmatrix} Q_{11,S \rightarrow S'} & Q_{12,S \rightarrow S'} & Q_{13,S \rightarrow S'} \\ Q_{21,S \rightarrow S'} & Q_{22,S \rightarrow S'} & Q_{23,S \rightarrow S'} \\ Q_{31,S \rightarrow S'} & Q_{32,S \rightarrow S'} & Q_{33,S \rightarrow S'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11,S \rightarrow S'} & Q_{21,S \rightarrow S'} & Q_{31,S \rightarrow S'} \\ Q_{12,S \rightarrow S'} & Q_{22,S \rightarrow S'} & Q_{32,S \rightarrow S'} \\ Q_{13,S \rightarrow S'} & Q_{23,S \rightarrow S'} & Q_{33,S \rightarrow S'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

o

$$\begin{aligned} (Q_{11,S \rightarrow S'})^2 + (Q_{12,S \rightarrow S'})^2 + (Q_{13,S \rightarrow S'})^2 &= 1 \\ Q_{11,S \rightarrow S'} Q_{21,S \rightarrow S'} + Q_{12,S \rightarrow S'} Q_{22,S \rightarrow S'} + Q_{13,S \rightarrow S'} Q_{23,S \rightarrow S'} &= 0 \\ Q_{11,S \rightarrow S'} Q_{31,S \rightarrow S'} + Q_{12,S \rightarrow S'} Q_{32,S \rightarrow S'} + Q_{13,S \rightarrow S'} Q_{33,S \rightarrow S'} &= 0 \\ Q_{21,S \rightarrow S'} Q_{11,S \rightarrow S'} + Q_{22,S \rightarrow S'} Q_{12,S \rightarrow S'} + Q_{23,S \rightarrow S'} Q_{13,S \rightarrow S'} &= 0 \\ (Q_{21,S \rightarrow S'})^2 + (Q_{22,S \rightarrow S'})^2 + (Q_{23,S \rightarrow S'})^2 &= 1 \\ Q_{21,S \rightarrow S'} Q_{31,S \rightarrow S'} + Q_{22,S \rightarrow S'} Q_{32,S \rightarrow S'} + Q_{23,S \rightarrow S'} Q_{33,S \rightarrow S'} &= 0 \\ Q_{31,S \rightarrow S'} Q_{11,S \rightarrow S'} + Q_{32,S \rightarrow S'} Q_{12,S \rightarrow S'} + Q_{33,S \rightarrow S'} Q_{13,S \rightarrow S'} &= 0 \\ Q_{31,S \rightarrow S'} Q_{21,S \rightarrow S'} + Q_{32,S \rightarrow S'} Q_{22,S \rightarrow S'} + Q_{33,S \rightarrow S'} Q_{23,S \rightarrow S'} &= 0 \\ (Q_{31,S \rightarrow S'})^2 + (Q_{32,S \rightarrow S'})^2 + (Q_{33,S \rightarrow S'})^2 &= 1 \end{aligned}$$

Las matrices que satisfacen las condiciones anteriores reciben el nombre de ortogonales; una matriz Q_{ab} para la cual se cumple $Q_{ab}(Q_{ab})^T = \delta_{ij}$ se dice que es ortogonal. Todas las matrices que expresan las transformaciones de coordenadas entre dos sistemas cartesianos ortogonales de diferente orientación son ortogonales. Las condiciones anteriores se simplifican a $Q_{ij,S \rightarrow S'} Q_{ki,S \rightarrow S'} = \delta_{ik}$, una expresión útil para comprobar la condición de ortogonalidad de una matriz.

Finalmente, tomando el determinante de ambos lados de la ecuación (14), y como

$$\det[Q_{ij,S \rightarrow S'}] = \det[Q_{ij,S \rightarrow S'}]^T$$

las dos posibles soluciones son

$$\det[Q_{ij,S \rightarrow S'}] = \pm 1$$

Otra condición para comprobar la ortogonalidad de una matriz conocida.

3.2.2. Cómo transformar las componentes de un vector dado de un sistema de coordenadas cartesianas a otro con orientación especial diferente

Volvamos a la figura 13. $Q_{ij,S \rightarrow S'}$ y $Q_{ji,S \rightarrow S'} = (Q_{ij,S' \rightarrow S})$ son las matrices de transformación entre dos sistemas de coordenadas; recuerde que $Q_{ij,S \rightarrow S'}$ y $Q_{ji,S \rightarrow S'}$ son matrices ortogonales que satisfacen la relación $Q_{ji,S \rightarrow S'} = (Q_{ij,S \rightarrow S'})^T$.

Un vector cualquiera \bar{v} puede expresarse en términos de cualquiera de los sistemas:

$$\bar{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = v_i \mathbf{e}_i \quad (15)$$

$$\bar{v} = v'_1 \mathbf{e}'_1 + v'_2 \mathbf{e}'_2 + v'_3 \mathbf{e}'_3 = v'_i \mathbf{e}'_i \quad (16)$$

Sustituyendo $\mathbf{e}_i = Q_{ji,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_j$ en (15)

$$\bar{v} = v_i \mathbf{e}_i = v_i Q_{ji,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_j \quad (17)$$

Y usando (16) en la forma $\bar{v} = v'_j \mathbf{e}'_j$, resulta $v'_j \mathbf{e}'_j = v_i Q_{ji,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_j$, o

$$v'_j = v_i Q_{ji,S \rightarrow S'} \quad (18)$$

De forma similar, sustituyendo $\mathbf{e}'_i = Q_{ij,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_j$ en (16)

$$\bar{v} = v'_i \mathbf{e}'_i = v'_i Q_{ij,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_j \quad (19)$$

y usando (15) en la forma $\bar{v} = v_j \mathbf{e}_j$, resulta

$$v_j = v'_i Q_{ij,S \rightarrow S'} \quad (20)$$

Las expresiones (18) y (20) son las reglas de transformación de las componentes cartesianas de cualquier vector bajo un cambio de sistema de coordenadas. Desde luego, mientras un vector siempre retiene el mismo módulo y orientación, sus componentes cambian al hacerlo el sistema de referencia desde el que se observa.

Problema 3.7

La matriz $Q_{ij,S \rightarrow S'}$ que permite expresar los vectores unitarios $\{\mathbf{e}'_i\}$ del sistema cartesiano $Sx'_1x'_2x'_3$ en términos de los vectores unitarios $\{\mathbf{e}_i\}$ del sistema original $Sx_1x_2x_3$, así como determinar las componentes de cualquier vector en el sistema $Sx'_1x'_2x'_3$ en términos de las componentes del sistema original, viene dada por

$$Q_{ij,S \rightarrow S'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

- i) verificar que $Q_{ij,S \rightarrow S'}$ es una matriz ortogonal,
- ii) determinar las dependencias entre los vectores $\{\mathbf{e}'_i\}$ y $\{\mathbf{e}_i\}$, y viceversa,
- iii) determinar las expresiones de los siguientes vectores en el sistema $Sx'_1x'_2x'_3$:

$$\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 \text{ y } \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

Repetir los cálculos para la matriz de transformación

$$Q_{ij,S \rightarrow S'} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Respuesta:

- i) La matriz es ortogonal si $Q_{ij,S \rightarrow S'}(Q_{ij,S \rightarrow S'})^T = \delta_{ij}$. En efecto,

$$\begin{aligned} Q_{ij,S \rightarrow S'}(Q_{ij,S \rightarrow S'})^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}^T = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

- ii) Como $Q_{ij,S \rightarrow S'} = (Q_{ij,S \rightarrow S'})^T = Q_{ji,S \rightarrow S'}$, las dependencias entre $\{\mathbf{e}'_i\}$ y $\{\mathbf{e}_i\}$, y viceversa, vienen dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i = Q_{ij,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_j &\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_i = Q_{ji,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_j &\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

iii) Las componentes de $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el sistema $Sx'_1x'_2x'_3$, $v'_j = v_i Q_{ji, S \rightarrow S'}$, son:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

o bien $\bar{\mathbf{v}} = v'_1 \mathbf{e}'_1 + v'_2 \mathbf{e}'_2 + v'_3 \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 - 2/\sqrt{5} \mathbf{e}'_2 - 1/\sqrt{5} \mathbf{e}'_3$

mientras que las de $\bar{\mathbf{v}} = 3\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ son:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6/\sqrt{5} \\ -3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

o bien, $\bar{\mathbf{v}} = 3\mathbf{e}'_1 - 6/\sqrt{5} \mathbf{e}'_2 - 3/\sqrt{5} \mathbf{e}'_3$. Advierta que como $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ es tres veces $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la componentes del primer vector en $Sx'_1x'_2x'_3$ son también tres veces las del segundo vector.

Componentes de $\bar{\mathbf{v}} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $Sx'_1x'_2x'_3$:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/\sqrt{5} \\ 7/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

o bien $\bar{\mathbf{v}} = 2\mathbf{e}'_1 - 1/\sqrt{5} \mathbf{e}'_2 + 7/\sqrt{5} \mathbf{e}'_3$

Finalmente, las componentes de $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $Sx'_1x'_2x'_3$ valen:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

o bien $\bar{\mathbf{v}} = 2\mathbf{e}'_1 + 3/\sqrt{5} \mathbf{e}'_2 - 1/\sqrt{5} \mathbf{e}'_3$

En cuanto a la matriz de transformación $Q_{ij, S \rightarrow S'} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

i) Se trata asimismo de una matriz ortogonal,

$$Q_{ij,S \rightarrow S'} (Q_{ij,S \rightarrow S'})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}$$

ii) Como $Q_{ij,S \rightarrow S'} = (Q_{ij,S \rightarrow S'})^T = Q_{ji,S \rightarrow S'}$, las dependencias entre $\{\mathbf{e}'_i\}$ y $\{\mathbf{e}_i\}$, y viceversa, vienen dadas por

$$\mathbf{e}'_i = Q_{ij,S \rightarrow S'} \mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_i = Q_{ji,S \rightarrow S'} \mathbf{e}'_j \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

iii) Las componentes de $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $Sx'_1x'_2x'_3$, $v'_j = v_i Q_{ji,S \rightarrow S'}$, son:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Así,

$$\bar{\mathbf{v}} = v'_1 \mathbf{e}'_1 + v'_2 \mathbf{e}'_2 + v'_3 \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 - 2/\sqrt{5} \mathbf{e}'_2 - 1/\sqrt{5} \mathbf{e}'_3$$

mientras que las de $\bar{\mathbf{v}} = 3\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $Sx'_1x'_2x'_3$ son:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6/\sqrt{5} \\ -3/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

con lo que $\bar{\mathbf{v}} = 3\mathbf{e}'_1 - 6/\sqrt{5} \mathbf{e}'_2 - 3/\sqrt{5} \mathbf{e}'_3$

De Nuevo, como $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ es tres veces $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, las componentes de ambos vectores se mantienen en la misma proporción.

Las componentes de $\bar{\mathbf{v}} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ in $Sx'_1x'_2x'_3$ on

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/\sqrt{5} \\ 7/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Con lo que $\bar{\mathbf{v}} = 2\mathbf{e}'_1 - 1/\sqrt{5}\mathbf{e}'_2 + 7/\sqrt{5}\mathbf{e}'_3$

Finalmente, las componentes de $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $Sx'_1x'_2x'_3$ son:

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

así, $\bar{\mathbf{v}} = 2\mathbf{e}'_1 + 3/\sqrt{5}\mathbf{e}'_2 - 1/\sqrt{5}\mathbf{e}'_3$

Capítulo 4

Esfuerzos en geotecnia. Círculo de Mohr

4.1. Los esfuerzos en mecánica de suelos

Como hemos dicho, conocidos los esfuerzos en un plano pueden determinarse los esfuerzos en cualquier otro plano en función de ellos y de la orientación (geometría) del nuevo plano respecto del primero. En problemas 2-D esta relación se deduce gráficamente mediante el círculo de Mohr, una herramienta, obtenida por Culmann en 1866, y desarrollada en detalle por Mohr en 1882 de quien recibió su nombre.

4.2. Problemas 2-D. Círculo de Mohr

La Figura 11 muestra un elemento (2-D) cuadrado sujeto a un sistema de fuerzas generalizado.

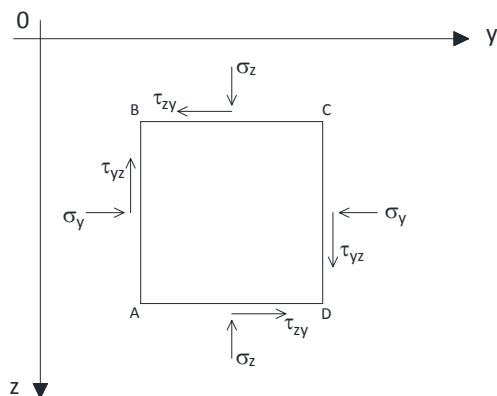


Figure 11. Elemento cuadrado bajo un sistema generalizado de fuerzas 2-D

Recuérdese que, según el criterio de signos y símbolos en geotecnia:

- τ_{ij} actúa en la dirección del segundo subíndice (eje OY), sobre la cara normal al eje asociado al primer subíndice (eje OX).
- Los esfuerzos de corte que causen un giro potencial en sentido contrario a las agujas del reloj son positivos,
- los esfuerzos de compresión son positivos, y
- los esfuerzos de corte en caras perpendiculares son iguales en valor absoluto ($\tau_{yz} = -\tau_{zy}$).

Problema 4.1 (placa bajo esfuerzos normales)

La Figura 4.1a muestra un escenario simple de esfuerzos de compresión en un elemento rectangular 2-D. Se quiere determinar los esfuerzos sobre un plano π_θ (plano normal a Y'OZ'), inclinado un ángulo θ sobre la horizontal, en función de σ_{yy} y σ_{zz} .

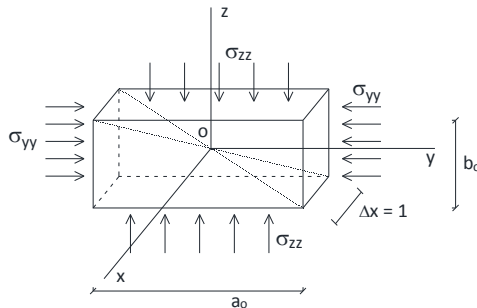


Figura 4.1a. Placa rectangular (2-D bajo esfuerzos de compresión en sus superficies laterales

Respuesta:

Es el escenario 2-D de mayor simplicidad, sean a_0 y b_0 los lados de la placa de propiedades elásticas homogéneas, Δx su espesor constante (por simplicidad tomaremos $\Delta x=1$), y σ_{yy} y σ_{zz} los esfuerzos normales que actúan perpendicularmente a sus superficies laterales (direcciones OY y OZ), Figura 4.1b. Se ha localizado el sistema de referencia con el origen en el centro de la placa y planos paralelos a sus caras. Las líneas OY y OZ son ejes principales de esfuerzos ya que no existen tensiones de corte sobre las caras normales a estas líneas. Desde luego, OX es también un eje principal de esfuerzos sobre el que actúa un esfuerzo normal nulo. De las ecuaciones de equilibrio aplicadas a las dos piezas de la placa que resultan de cortarla por secciones paralelas a XOY, XOZ y YOZ, se deduce que los únicos esfuerzos en cualquier punto de la placa que actúan en planos paralelos a los anteriores son también σ_{yy} , σ_{zz} y $\sigma_{xx}(=0)$, respectivamente. Para encontrar el esfuerzo que actúa sobre el plano π_θ de la Figura 4.1b, con σ_{π_θ} y τ_{π_θ} los esfuerzos normales y de corte sobre π_θ , escribamos las condiciones de equilibrio de la cuña de sección CDM.

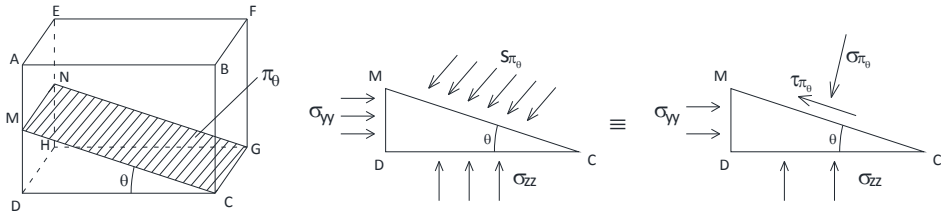


Figura 4.1b. Plano π_0 y fuerzas sobre la cuña limitada por esta sección

Advierta que el sentido del esfuerzo de corte τ_{π_0} que actúa sobre la superficie de la cuña depende del sentido del momento del resto de las fuerzas y es opuesto al mismo; para evitar los complejos cálculos de estos momentos podemos seguir un razonamiento lógico: i) si $\sigma_{zz} > \sigma_{yy}$, cualquiera que sea la geometría de la placa, la parte (el trapecio) superior se mueve hacia la derecha mientras que la parte (el triángulo) inferior lo hace hacia la izquierda, esto significa que el esfuerzo de corte sobre la superficie MC se dirige hacia abajo del plano; ii) Por el contrario, si $\sigma_{zz} < \sigma_{yy}$, la parte superior de la placa se mueve hacia la izquierda y la parte inferior hacia la derecha, de modo que la tensión de corte sobre la superficie MC se dirige hacia arriba del plano. En la Figura 4.1c, para la que se asume que $\sigma_{zz} > \sigma_{yy}$, se detallan las fuerzas que actúan sobre las caras de la cuña y sus descomposiciones en las direcciones de los esfuerzos σ_{π_0} y τ_{π_0} . Tanto las longitudes como los valores de estas fuerzas se muestran en la figura.

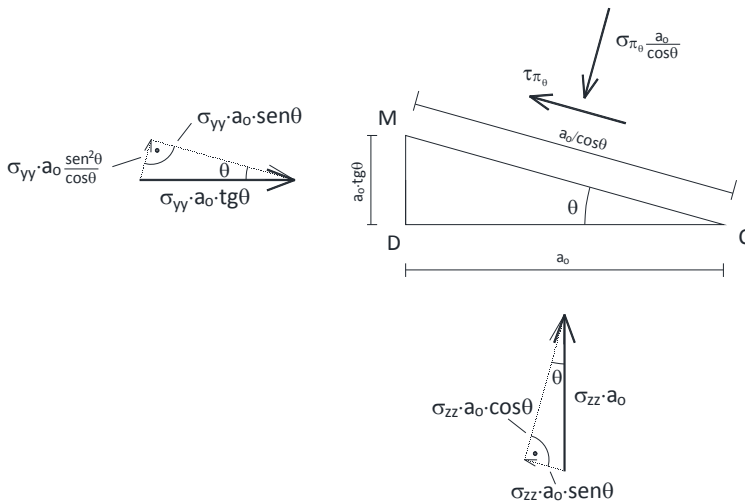


Figura 4.1c. Plano π_0 y fuerzas sobre la cuña limitada por esta sección

El equilibrio de fuerzas en la dirección de σ_{π_0} permite la determinación directa de estos esfuerzos en función de σ_{zz} y σ_{yy} :

$$\sigma_{\pi_0} \frac{a_0}{\cos(\theta)} = \sigma_{zz} a_0 \cos(\theta) + \sigma_{yy} a_0 \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$$

o bien

$$\sigma_{\pi_0} = \sigma_{zz} \cos^2(\theta) + \sigma_{yy} \sin^2(\theta) \quad (4.1-1)$$

mientras que en la dirección de τ_{π_0} proporciona los valores de este esfuerzo:

$$\tau_{\pi_0} \frac{a_0}{\cos(\theta)} = \sigma_{zz} a_0 \sin(\theta) + \sigma_{yy} a_0 \sin(\theta)$$

o bien

$$\tau_{\pi_0} = \sigma_{zz} \sin(\theta)\cos(\theta) - \sigma_{yy} \sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \sin(2\theta) \quad (4.1-2)$$

Problema 4.2 (placa bajo esfuerzos normales)

Para la Figura 4.1a,

- i) encontrar el ángulo $\theta_{\tau_{\max}}$ para el cual τ_{π_0} tiene el máximo valor; ¿cuál es el valor de σ_{π_0} para $\theta_{\tau_{\max}}$?
- ii) ¿Existen otros planos en la placa (no necesariamente perpendiculares a YOZ) para los cuales el esfuerzo de corte es mayor que el determinado en el apartado anterior?

Respuesta:

Sobre los planos perpendiculares a YOZ la tensión de corte (Problema 4.1) viene dada por $\tau_{\pi_0} = \sigma_{zz} \sin(\theta)\cos(\theta) - \sigma_{yy} \sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \sin(2\theta)$. El valor máximo ocurre cuando $\sin(2\theta) = 1$, de modo que

$$\theta_{\tau_{\max}} = 45^\circ \text{ or } \pi/4 \text{ rad}$$

$$\tau_{\theta_{\tau_{\max}}} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$$

Advierta que $\tau_{\theta_{\tau_{\max}}}$ se mantiene constante siempre que la diferencia entre la tensión normal y la de cote se mantenga, aunque sus valores individuales aumenten o disminuyan en una misma cifra. Para $\theta_{\tau_{\max}} = 45^\circ$, se tiene $\sigma_{45^\circ} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} + \sigma_{yy})$; de esta forma el valor $\sigma_{45^\circ} = \sigma_{\theta_{\tau_{\max}}}$ puede crecer considerablemente (sin cambiar $\tau_{\theta_{\tau_{\max}}}$) cuando σ_{zz} y σ_{yy} aumenten o disminuyan (el mismo valor). Sin embargo, $\frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$ es la máxima tensión de corte sólo en planos perpendiculares a YOZ. En planos perpendiculares a XOZ y XOY las tensiones máximas de corte son $\frac{\sigma_{zz}}{2}$ y $\frac{\sigma_{yy}}{2}$, respectivamente. Esto es fácilmente demostrable escribiendo el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre las dos partes de la placa cortadas por planos perpendiculares a XOZ y XOY (una tarea que se deja para el estudiante). Los resultados son:

- i) si $\sigma_{zz} > \sigma_{yy}$ la tensión de corte máxima en la placa es $\frac{\sigma_{zz}}{2}$ y se da en el plano normal a XOZ cuyo vector (perpendicular al plano) está 45° desviado de los ejes OX and OZ; bajo la misma condición ($\sigma_{zz} > \sigma_{yy}$), la máxima tensión de corte en un plano normal a XOY cuyo vector de dirección esta 45° desviado de los ejes OX y OY es $\frac{\sigma_{yy}}{2}$, y
- ii) si $\sigma_{zz} < \sigma_{yy}$ la tensión de corte máxima en la placa es $\frac{\sigma_{yy}}{2}$ y se da en un plano normal a XOY, desviado 45° de los ejes OX y OY, mientras que la máxima tensión de corte en un plano normal a XOZ, desviado 45° de los ejes OX y OZ es $\frac{\sigma_{zz}}{2}$.

Problema 4.3 (placa bajo esfuerzos normales)

Estudiar los esfuerzos en el plano π_θ de una placa 2-D bajo esfuerzos de compresión y tracción aplicados a los pares de caras opuestas de la misma, Figuras 4.3a y 4.3b. Siguiendo los pasos del Problema 4.11, responda a las mismas cuestiones listadas allí. Compare los resultados finales entre los escenarios de estos problemas. Para suelos bajos los esfuerzos descritos y valores crecientes de las tensiones σ_{yy} y σ_{zz} , ¿Cuál de ellos romperá antes por efecto exclusivo de la tensión de corte?

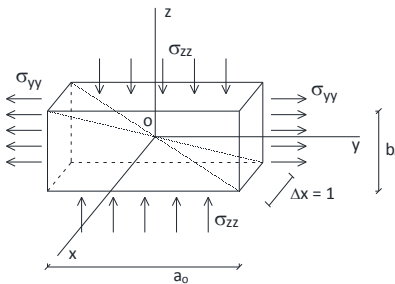


Figura 4.3a. Placa rectangular 2-D bajo la acción de esfuerzos normales en sus superficies

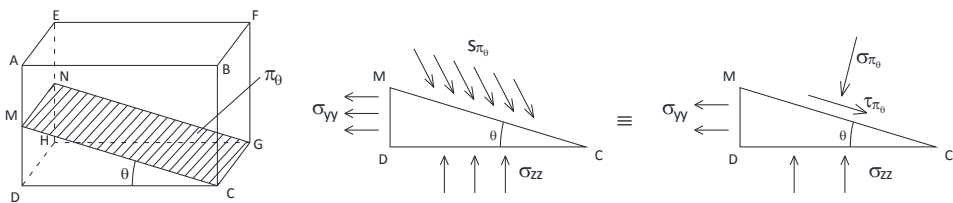


Figura 4.3b. Plano π_θ y fuerzas en la cuña limitada por este plano

Respuesta:

Al no existir fuerzas de corte en las caras exteriores, las líneas OX, OY y OZ son ejes principales de esfuerzos, como en el Problema 4.1. También, los únicos esfuerzos en cualquier punto interior de la placa, sobre planos paralelos a XOY, XOZ y YOZ, son σ_{yy} , σ_{zz} y $\sigma_{xx}(=0)$, respectivamente. σ_{π_θ} y τ_{π_θ} son

los esfuerzos normales y de corte sobre el plano π_θ ; el sentido de τ_{π_θ} es hacia abajo del plano (la dirección contraria, hacia arriba, no permitiría el equilibrio de la cuña, ¡no es así!). La Figura 4.3c detalla todas las fuerzas que actúan sobre la cuña y su descomposición en las direcciones de σ_{π_θ} y τ_{π_θ} .

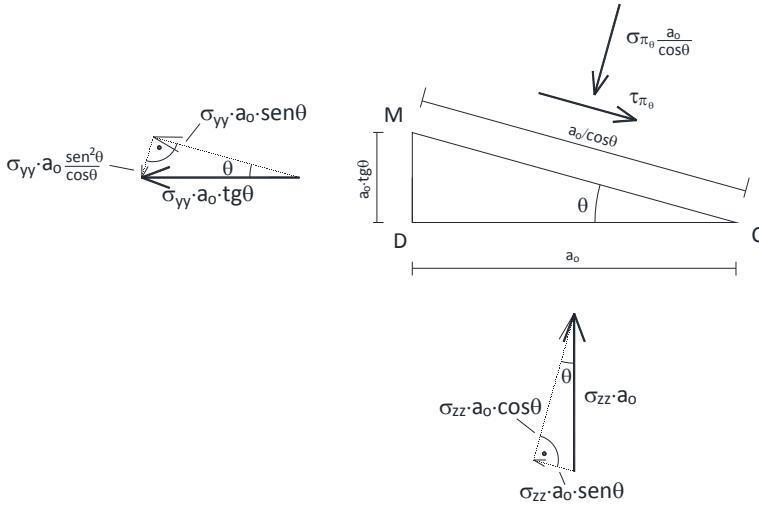


Figure 4.3c. Diagrama de fuerzas sobre la cuña y su descomposición

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas proyectadas en las direcciones σ_{π_θ} y τ_{π_θ} , Figura 4.3c, permiten la determinación directa de estos esfuerzos en función de σ_{zz} y σ_{yy} :

$$\sigma_{\pi_\theta} \frac{a_0}{\cos(\theta)} = \sigma_{zz} a_0 \cos(\theta) - \sigma_{yy} a_0 \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \text{o} \quad \sigma_{\pi_\theta} = \sigma_{zz} \cos^2(\theta) - \sigma_{yy} \sin^2(\theta) \quad (4.3-1)$$

$$\tau_{\pi_\theta} \frac{a_0}{\cos(\theta)} = \sigma_{zz} a_0 \sin(\theta) + \sigma_{yy} a_0 \sin(\theta) \quad \text{o} \quad \tau_{\pi_\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \sin(2\theta) \quad (4.3-2)$$

La tensión de corte máxima, que se da para $\theta_{\tau_{\max}} = 45^\circ$ o $\pi/4$ rad, vale

$$\tau_{\theta_{\tau_{\max}}} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} + \sigma_{yy})$$

En contraste con el escenario del Problema 4.1, $\tau_{\theta_{\tau_{\max}}}$ no se mantiene constante para la misma diferencia entre las tensiones normales σ_{zz} y σ_{yy} , pero su valor aumenta cuando crece cualquiera de estas tensiones (σ_{zz} o σ_{yy}). También, $\frac{1}{2} (\sigma_{zz} + \sigma_{yy})$ es el valor de la máxima tensión de corte en planos perpendiculares a YOZ; en planos perpendiculares a XOZ y XOY, la tensión de corte máxima es $\frac{\sigma_{zz}}{2}$ y $\frac{\sigma_{yy}}{2}$, respectivamente. Así, $\tau_{\theta_{\tau_{\max}}}$ es la suma de las tensiones de corte máximas en los planos anteriores (XOY y XOZ). Para $\theta_{\tau_{\max}} = 45^\circ$, $\sigma_{45^\circ} = \sigma_{\theta_{\tau_{\max}}} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$. En particular, para $\sigma_{zz} = \sigma_{yy}$, $\tau_{\theta_{\tau_{\max}}} = \sigma_{zz} = \sigma_{yy}$ mientras que $\sigma_{\theta_{\tau_{\max}}} = 0$.

La respuesta a la última cuestión, ¿cuál de las muestras de las Figuras 4.1a y 4.3a romperá antes basándose exclusivamente en el valor de la tensión de rotura?, es ahora inmediata. Si las muestra tienen la misma resistencia a la rotura, para valores crecientes de las tensiones σ_{yy} y σ_{zz} romperá primero la de la figura 4.3a. El criterio de rotura basado exclusivamente en el valor del esfuerzo de rotura no es válido; como se sabe, la rotura se produce por una combinación límite de esfuerzos normales y de corte (criterio de Mohr-Coulomb).

Problema 4.4

A partir de los resultados de los Problemas 4.1 y 4.3 en relación con las soluciones de σ_{π_0} y τ_{π_0} , Figuras 4.1a y 4.3a, y asumiendo que $\sigma_{zz} \geq \sigma_{yy}$, estudiar los valores de $\frac{\sigma_{\pi_0}}{\sigma_{yy}}$ y $\frac{\tau_{\pi_0}}{\sigma_{yy}}$ en función de θ para cada escenario. En particular, considerar los casos $\sigma_{zz} = 5\sigma_{yy}$, $\sigma_{zz} = 2\sigma_{yy}$ y $\sigma_{zz} = \sigma_{yy}$.

Respuesta:

Se deja como trabajo para el estudiante.

Problema 4.5

La Figura 4.5 muestra una placa 2-D de piedra blanda de cantera, de lados iguales de longitud l_0 y espesor e_0 . Se aplican esfuerzos normales de tensión σ_{yy} y compresión σ_{zz} en las caras opuestas de la placa según las direcciones OY y OZ, respectivamente y se asume que $\sigma_{zz} > \sigma_{yy}$.

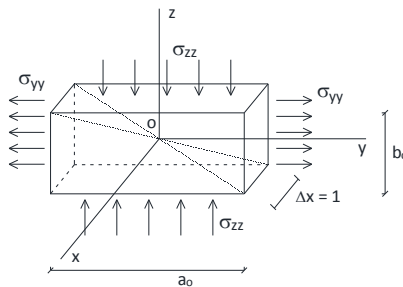


Figura 4.5. Geometría del Problema 4.5

La prueba se lleva a cabo partiendo de un par de valores de tensión, $\sigma_{yy,ini}$ y $\sigma_{zz,ini}$, que aseguran que el esfuerzo en cualquier plano de la muestra está por debajo de la resistencia al corte de la piedra. Si el fallo ocurre cuando el esfuerzo de corte en cualquier plano excede un valor umbral τ_{lim} , ¿cuáles son los valores de σ_{yy} y σ_{zz} en el fallo si:

i) $\sigma_{zz} - \sigma_{yy} = \Delta\tau_1$, ii) $\sigma_{zz}/\sigma_{yy} = -\Delta\tau_2$,

donde $\Delta\tau_1$ y $\Delta\tau_2$ son valores positivos constantes? Se trata de un criterio de rotura básico.

Aplicación: $l_0 = 100$ mm, $e_0 = 25$ mm, $\tau_{lim} = 0.65$ MPa, $\Delta\tau_1 = 1$ MPa, $\Delta\tau_2 = 1, 3$ and 5 MPa.

Respuesta:

i) Con $\sigma_{zz} - \sigma_{yy} = \Delta\tau_1$, como τ_{max} tiene lugar para $\theta_{\tau_{max}} = 45^\circ$,

$$\tau_{max(\theta=45^\circ)} = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) = \frac{\Delta\tau_1}{2}$$

Así,

si $\tau_{lim} \geq \frac{\Delta\tau_1}{2} \rightarrow$ la muestra no romperá

si $\tau_{lim} < \frac{\Delta\tau_1}{2} \rightarrow$ la muestra romperá para cualquier par de valores de σ_{zz} y σ_{yy}

ii) Con $\sigma_{zz}/\sigma_{yy} = \Delta\tau_2$, de nuevo, como τ_{max} se da para $\theta_{\tau_{max}} = 45^\circ$,

$$\tau_{max(\theta=45^\circ)} = \frac{1+\Delta\tau_2}{2} |\sigma_{yy}|$$

Así,

si $\tau_{lim} \geq \frac{1+\Delta\tau_2}{2} |\sigma_{yy}| \rightarrow$ la muestra no romperá

si $\tau_{lim} < \frac{1+\Delta\tau_2}{2} |\sigma_{yy}| \rightarrow$ la muestra romperá

Aplicación:

i) Para $\Delta\tau_1 = 1$ MPa, como $\tau_{lim} = 0.65$ MPa $> \frac{\Delta\tau_1}{2} = 0.5$ MPa, la muestra nunca romperá.

El esfuerzo normal en el plano de corte ($\theta=45^\circ$) está dado por $\sigma_{\pi_0} = \sigma_{zz} \cos^2(\theta) - \sigma_{yy} \sin^2(\theta) = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$.

ii) Para $\Delta\tau_2 = 1$, la muestra romperá para las tensiones $|\sigma_{yy}| = 0.65$ MPa ($\sigma_{yy} = -0.65$) y $\sigma_{zz} = 0.65$ MPa. Realmente estos son los valores límite de la rotura. Para $\Delta\tau_2 = 3$, la muestra romperá para las tensiones $|\sigma_{yy}| = \frac{0.65}{2} = 0.325$ MPa ($\sigma_{yy} = -0.325$) y $\sigma_{zz} = 0.975$ MPa. Finalmente, para $\Delta\tau_2 = 5$, la muestra romperá para las tensiones $|\sigma_{yy}| = \frac{0.65}{3} = 0.2166$ MPa ($\sigma_{yy} = -0.2166$) y $\sigma_{zz} = 1.830$ MPa.

El esfuerzo normal que actúan sobre el plano de rotura es $\sigma_{\pi_0} = \frac{1}{2}(0.65+0.65) = 0.65$ MPa para $\Delta\tau_2 = 1$, $\frac{1}{2}(0.975+0.325) = 0.65$ MPa para $\Delta\tau_2 = 3$, y $\frac{1}{2}(0.2166+1.830) = 0.6498$ MPa para $\Delta\tau_2 = 5$.

Al adoptar un criterio básico de rotura, ésta no depende del valor del esfuerzo normal en el plano de rotura, lo cual no se ajusta al comportamiento real.

Problema 4.6

¿Cómo influye el valor de la resistencia al corte de la muestra en el Problema 4.5? Aplicar a los casos de resistencia: i) 0.2, ii) 0.5 y iii) 0.8 MPa.

Respuesta:

i) Para $\sigma_{zz} - \sigma_{yy} = \Delta\tau_1$, la muestra no romperá nunca si

$$\tau_{lim} \geq \frac{\Delta\tau_1}{2} \text{ and } |\sigma_{yy}| < 0.2 \quad (\text{caso de resistencia 0.2 MPa}),$$

$$\tau_{lim} \geq \frac{\Delta\tau_1}{2} \text{ and } |\sigma_{yy}| < 0.5 \quad (\text{caso de resistencia 0.5 MPa}), \text{ y}$$

$$\tau_{lim} \geq \frac{\Delta\tau_1}{2} \text{ and } |\sigma_{yy}| < 0.8 \quad (\text{caso de resistencia 0.8 MPa}).$$

ii) Para $\sigma_{zz}/\sigma_{yy} = \Delta\tau_2$, la muestra no romperá nunca si

$$\tau_{lim} \geq \frac{1+\Delta\tau_2}{2} |\sigma_{yy}| \text{ and } |\sigma_{yy}| < 0.2 \quad (\text{caso de resistencia 0.2 MPa}),$$

$$\tau_{lim} \geq \frac{1+\Delta\tau_2}{2} |\sigma_{yy}| \text{ and } |\sigma_{yy}| < 0.5 \quad (\text{caso de resistencia 0.5 MPa}), \text{ y}$$

$$\tau_{lim} \geq \frac{1+\Delta\tau_2}{2} |\sigma_{yy}| \text{ and } |\sigma_{yy}| < 0.8 \quad (\text{caso de resistencia 0.8 MPa}),$$

Aplicación:

i) Para $\Delta\tau_1 = 1$ MPa, la placa nunca romperá siempre que $|\sigma_{yy}| < 0.2$ (caso de resistencia 0.2 MPa), $|\sigma_{yy}| < 0.5$ (caso de resistencia 0.5 MPa), y $|\sigma_{yy}| < 0.8$ (caso de resistencia 0.8 MPa).

ii) Para $\Delta\tau_2 = 1$, la placa romperá para tensiones $|\sigma_{yy}| = 0.2$ y $\sigma_{zz} = 0.2$ MPa. Para $\Delta\tau_2 = 3$, romperá para tensiones $|\sigma_{yy}| = 0.325$ y $\sigma_{zz} = 0.975$ MPa. Finalmente, para $\Delta\tau_2 = 5$, la placa romperá para tensiones $|\sigma_{yy}| = 0.2166$ y $\sigma_{zz} = 1.830$ MPa.

Problema 4.7

Asumir, en la muestra de los problemas anteriores (4.1 a 4.6), un plano débil de orientación $\theta_w=30^\circ$ inclinado respecto al eje OZ, cuya resistencia al corte es de 0.4 MPA. ¿Cómo afecta la existencia de este plano a los valores de σ_{yy} y σ_{zz} en la ruptura en el supuesto de que el criterio de rotura se base exclusivamente en el valor de la resistencia al corte?

Respuesta:

La Figura 4.7 muestra el plano π_{θ_w} en relación con los ejes de aplicación de las tensiones σ_{yy} y σ_{zz} .

La tensión de corte en el plano π_{θ_w} ($\theta_w=30^\circ \equiv \theta= 60^\circ$, medido desde el eje OY axis) es

$$\tau_{\pi_{\theta}} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \sin(2\theta) = 0.433(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$$

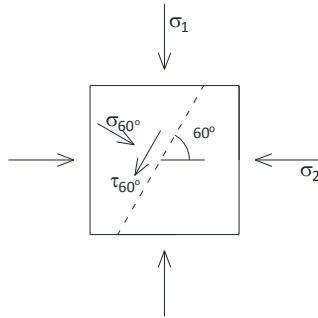


Figura 4.7. Orientación del plano de esfuerzo débil

i) For $\Delta\tau_1 = 1\text{MPa}$,

$$\tau_{\pi_\theta} = 0.433(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) = 0.433(\Delta\tau_1) = 0.433\text{ MPa}.$$

De nuevo,

si $\tau_{lim} \geq \frac{1+\Delta\tau_2}{2} |\sigma_{yy}| \rightarrow$ la muestra no romperá

si $\tau_{lim} < \frac{1+\Delta\tau_2}{2} |\sigma_{yy}| \rightarrow$ la muestra romperá

Aplicación:

i) Para $\Delta\tau_2 = 1\text{MPa}$, como $\tau_{lim} = 0.4\text{ MPa}$, la placa no romperá siempre que $|\sigma_{yy}| < 0.4\text{ MPa}$

La tensión normal que actúa sobre el plano de corte ($\theta=60^\circ$) está dada por

$$\sigma_{\pi_{\theta=60}} = \sigma_{zz} \cos^2(\theta) - \sigma_{yy} \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{0.4}{4} + \frac{1.2}{4} \right) = 0.2\text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pi_{\theta=150}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1.2}{4} + \frac{0.4}{4} \right) = 0.2\text{ MPa}$$

Para $\Delta\tau_2 = 3$, la muestra romperá para $|\sigma_{yy}| = \frac{0.8}{4} = 0.2\text{ MPa}$. La tensión normal que actúa sobre el plano de corte ($\theta=60^\circ$) está dada por

$$\sigma_{\pi_{\theta=60}} = \sigma_{zz} \cos^2(\theta) - \sigma_{yy} \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} \left(0.6 \frac{1}{4} + 0.2 \frac{3}{4} \right) = 0.15\text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pi_{\theta=150}} = \frac{1}{2} \left(0.6 \frac{3}{4} + 0.2 \frac{1}{4} \right) = xx\text{ MPa}$$

Finalmente, para $\Delta\tau_2 = 5$, la placa romperá para $|\sigma_{yy}| = \frac{0.8}{6} = 0.1333\text{ MPa}$.

$$\sigma_{\pi_{\theta=60}} = \sigma_{zz} \cos^2(\theta) - \sigma_{yy} \sin^2(\theta) = \frac{1}{2} \left(0.1333 \frac{1}{4} + 0.6666 \frac{3}{4} \right) = 0.266\text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pi_{\theta=150}} = \frac{1}{2} \left(0.133 \frac{3}{4} + 0.6666 \frac{1}{4} \right) = 1.333\text{ MPa}$$

Problema 4.8

En los problemas anteriores hemos trabajado con placas 2-D rectangulares sometidas a esfuerzos normales en sus bordes, bien de compresión en todas ellos, bien de compresión y tracción en pares opuestos de bordes. Son esfuerzos principales y los ejes normales a sus planos de aplicación, ejes principales de esfuerzos. Recuérdesse que la solución para los esfuerzos normal y de corte en cualquier otro plano π_θ cuya perpendicular es el resultado de girar el eje OZ (normal al plano de aplicación de σ_{zz}) un ángulo θ en sentido contrario a las agujas del reloj, Figura 4.8a, viene dada por

$$\sigma_{\pi_\theta} = \sigma_{zz} \cos^2(\theta) + \sigma_{yy} \sin^2(\theta)$$

$$\tau_{\pi_\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \sin(2\theta)$$

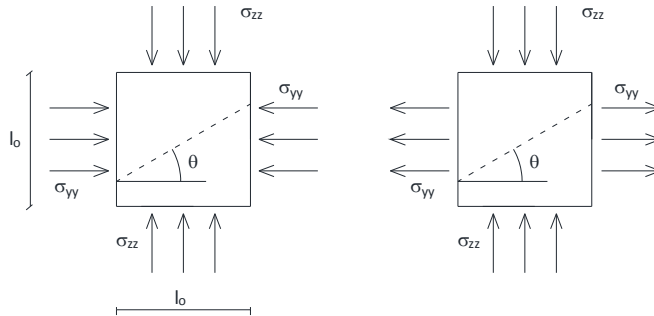


Figura 4.8a. Plano π_θ . Placas bajo esfuerzos de compresión (izquierda), y de compresión y tracción (derecha)

- i) Utilice relaciones trigonométricas para expresar las ecuaciones anteriores como funciones armónicas de θ , y represente las dependencias $\sigma_{\pi_\theta} = \sigma_{\pi_\theta}(\theta)$ y $\tau_{\pi_\theta} = \tau_{\pi_\theta}(\theta)$. Comente los gráficos para valores significativos de los esfuerzos.
- ii) Elimine θ de las anteriores dependencias para encontrar la solución $\sigma_{\pi_\theta} = \Psi(\tau_{\pi_\theta})$.

Respuesta:

Introduciendo las relaciones trigonométricas

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \text{ y } \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

en las expresiones de σ_{π_θ} y τ_{π_θ} , es inmediato deducir las dependencias armónicas buscadas:

$$\sigma_{\pi_\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \cos(2\theta) \tag{4.8-1}$$

$$\tau_{\pi_\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \sin(2\theta) \tag{4.8-2}$$

La Figura 4.8b muestra estas funciones para dos pares de valores σ_{zz} y σ_{yy} : $\sigma_{zz}=10$ y $\sigma_{yy}=2$ (a), y $\sigma_{zz}=10$ y $\sigma_{yy}=-2$ (b). Recuérdese que los valores positivos son de compresión y los negativos de tracción de acuerdo con el criterio de signos.

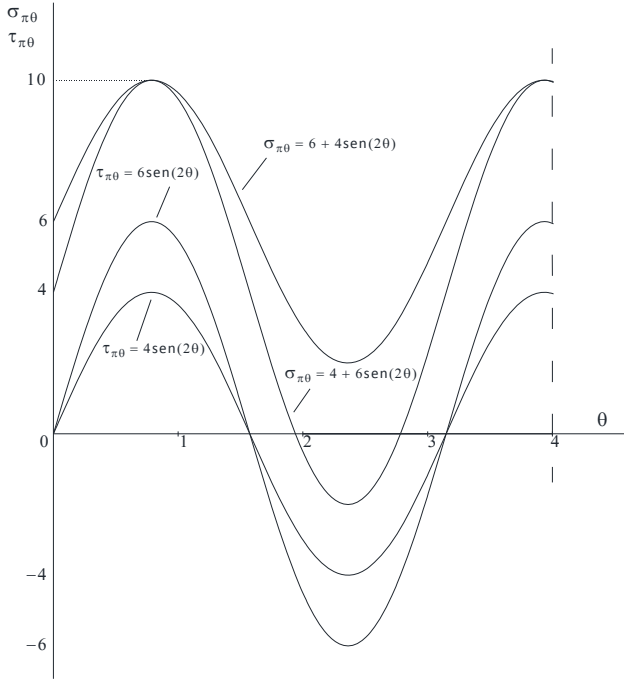


Figura 4.8b Soluciones $\sigma_{\pi\theta} = \sigma_{\pi\theta}(\theta)$ y $\tau_{\pi\theta} = \tau_{\pi\theta}(\theta)$ en placa 2-D bajo esfuerzos normales de compresión. (a): $\sigma_{zz}=10, \sigma_{yy}=2$; (b): $\sigma_{zz}=10, \sigma_{yy}=-2$

Advierta que mientras que las tensiones de corte siempre son siempre simétricas (de valor medio nulo), las tensiones normales pueden ser positivas y negativas, aunque no necesariamente. Tiene mucho interés el cociente entre las primeras y las segundas pues está asociado al criterio de corte de Mohr-Culomb como veremos en problemas posteriores. .

Finalmente, para encontrar la dependencia $\sigma_{\pi\theta} = \Psi(\tau_{\pi\theta})$, elevaremos las ecuaciones (4.8-1) y (4.8-2) al cuadrado y las sumaremos (recuerde que $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)=1$). El resultado es

$$\left\{ \sigma_{\pi\theta} - \frac{1}{2} (\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \right\}^2 + \tau_{\pi\theta}^2 = \left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \right\}^2 \quad (4.8-3)$$

En el plano σ_{π} (abscisa) τ_{θ} (ordenada), la ecuación anterior define una circunferencia de radio $r_o = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})$ y centro en el eje de abscisas en el punto $\left(\frac{\sigma_{zz} + \sigma_{yy}}{2}, 0 \right)$, Figura 4.8c, llamado circunferencia o círculo de Mohr.

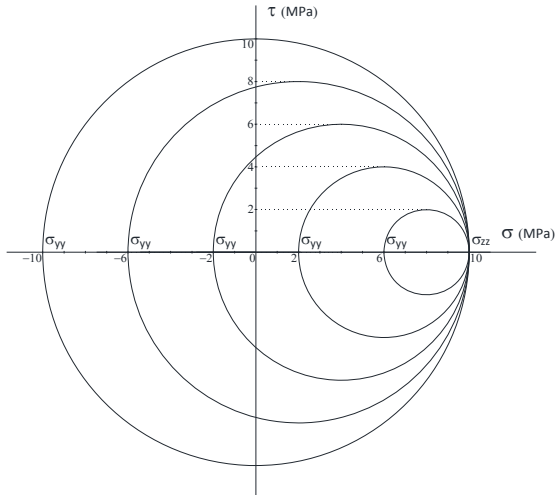


Figura 4.8c. Dependencia $\sigma_{\pi_0} = \Psi(\tau_{\pi_0})$ para $\sigma_{zz} = 10$ y $\sigma_{yy} = 6$ (a), $\sigma_{zz} = 10$ y $\sigma_{yy} = 2$ (b), $\sigma_{zz} = 10$ y $\sigma_{yy} = -10$ (c), $\sigma_{zz} = 10$ y $\sigma_{yy} = -6$ (d), y $\sigma_{zz} = 10$, $\sigma_{yy} = -2$ (e)

Cada punto de la circunferencia define el par $(\sigma_{\pi}, \tau_{\pi})$ relacionado con un valor particular de θ que corresponde a un plano particular π_0 . El arco de circunferencia entre dos puntos define un ángulo que es el doble del ángulo entre los planos asociados a los extremos del arco. Si vamos de un punto a otro del arco en el sentido de las agujas del reloj, el plano referido al primer punto debe girarse en el mismo sentido, la mitad del ángulo definido por el arco, para obtener el plano correspondiente al otro extremo del arco, y viceversa.

Problema 4.9

¿En qué cambian las soluciones del problema anterior si la placa es rectangular?

La solución se deja como trabajo para el alumno.

Problema 4.10 (placa bajo esfuerzos normales y de corte)

Este escenario biaxial, más complejo, está formado por una placa cuadrada de lado l_0 y espesor unidad, Figura 4.10a. Encontrar:

- i) los esfuerzos normales y de corte sobre el plano π_0 que resulta de girar un ángulo θ , en el sentido de las agujas del reloj, la base de la placa,
- ii) los planos $\pi_{0, \tau=0}$ en los cuales la tensión de corte es cero (planos principales),

- iii) las tensiones normales en los planos principales, y
- iv) los planos $\pi_{\theta_{\text{max}}}$ en os que tiene lugar la tensión de corte máxima.

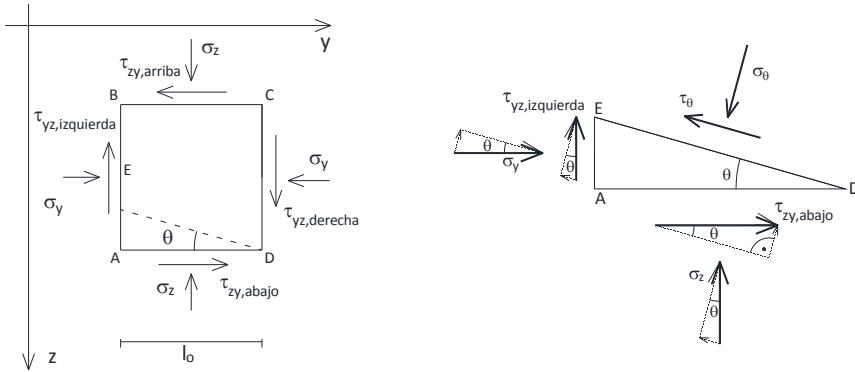


Figura 4.10. Placa 2-D bajo un sistema de esfuerzos generalizado (izquierda). Geometría y esfuerzos de la cuña ADE (derecha)

Respuesta:

i) De acuerdo con la descomposición de esfuerzos que actúan en la pieza triangular ADE de la figura, la condición de equilibrio de las fuerzas sobre la cuña da lugar a dos ecuaciones con dos incógnitas, σ_θ y τ_θ . Proyectando las fuerzas sobre los ejes perpendiculares y paralelos a la hipotenusa DE, estas ecuaciones son (advierta que hemos asignado sentido a las tensiones de corte de acuerdo con el criterio de signos en geotecnia; así, las tensiones de corte son positivas y $\tau_{yz}=\tau_{zy}$):

$$\sigma_\theta \frac{l_0}{\cos(\theta)} = \sigma_{zz} l_0 \cos(\theta) + \sigma_{yy} l_0 \text{tg}(\theta) \text{sen}(\theta) + \tau_{zy} l_0 \text{sen}(\theta) + \tau_{yz} l_0 \text{tg}(\theta) \cos(\theta)$$

$$\tau_\theta \frac{l_0}{\cos(\theta)} + \sigma_{zz} l_0 \text{sen}(\theta) + \tau_{yz} l_0 \text{tg}(\theta) \text{sen}(\theta) = \tau_{zy} l_0 \cos(\theta) + \sigma_{yy} l_0 \text{tg}(\theta) \cos(\theta)$$

o, reorganizando las ecuaciones

$$\sigma_\theta = \sigma_{zz} \cos^2(\theta) + \sigma_{yy} \text{sen}^2(\theta) + \tau_{zy} \text{sen}(2\theta) \tag{4.10-1}$$

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \text{sen}(2\theta) + \tau_{yz} \cos(2\theta) \tag{4.10-2}$$

ii) Los ángulos de estos planos se deducen igualando a cero la ecuación anterior,

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \text{sen}(2\theta) + \tau_{yz} \cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \text{tg}(2\theta) = \frac{2\tau_{yz}}{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}} \tag{4.10-3}$$

Existen dos soluciones:

$$\theta_{1(\tau=0), \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]} = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\tau_{yz}}{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}} \right)$$

$$\theta_{2(\tau=0), \in [+ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\tau_{yz}}{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}} \right)$$

Advierta que $2\theta_1 + 2\theta_2 = \pi$, de modo que $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, se trata de dos planos ortogonales definidos por ángulos complementarios. Además, la condición de esfuerzo de corte nulo hace que π_{θ_1} y π_{θ_2} sean dos planos principales de esfuerzo.

iii) El esfuerzo normal en estos planos principales se determina resolviendo la ecuación (4.10-1) usando (4.10-3). Partiendo de esta última y de la relación $\text{sen}^2(2\theta) + \text{cos}^2(2\theta) = 1$, tenemos

$$\text{sen}(2\theta) = \frac{2\tau_{yz}}{\left[(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{zy}^2 \right]^{1/2}}$$

$$\text{cos}(2\theta) = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{yy}}{\left[(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{zy}^2 \right]^{1/2}}$$

Con estas expresiones y las relaciones trigonométricas

$$\left. \begin{aligned} \text{cos}^2(\theta) &= \frac{1 + \text{cos}(2\theta)}{2} \\ \text{sen}^2(\theta) &= \frac{1 - \text{cos}(2\theta)}{2} \end{aligned} \right\}$$

La ecuación (4.10-1) da lugar a

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{zz} \text{cos}^2(\theta) + \sigma_{yy} \text{sen}^2(\theta) + \tau_{zy} \text{sen}(2\theta) \quad (4.10-4)$$

iv) Los planos $\pi_{\theta_{\text{max}}}$ en los que el esfuerzo de corte es máximo se obtienen derivando respecto a θ , e igualando a cero, la ecuación (4.10-3)

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \text{sen}(2\theta) + \tau_{yz} \text{cos}(2\theta) \quad (4.10-5)$$

Haciendo uso de relaciones trigonométricas ya citadas, la solución es

$$\pi_{\theta_{\text{max}}} = \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{yz}^2 \right\}^{1/2} \quad (4.10-6)$$

Problema 4.11

Siga los pasos matemáticos necesarios para derivar la ecuación (4.10-4).

Respuesta:

La sustitución de

$$\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \text{ y } \sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

en la ecuación (4.10-1) conduce a la relación

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{zz} \left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2} \right) + \tau_{zy} \sin(2\theta)$$

o, mediante manipulaciones, a

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}\sigma_{zz} \cos(2\theta) - \frac{1}{2}\sigma_{yy} \sin(2\theta) + \tau_{zy} \sin(2\theta)$$

Ahora, haciendo uso de

$$\sin(2\theta) = \frac{2\tau_{yz}}{[(\sigma_{zz}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{zy}^2]^{1/2}} \text{ y } \cos(2\theta) = \frac{\sigma_{zz}-\sigma_{yy}}{[(\sigma_{zz}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{zy}^2]^{1/2}}$$

en la ecuación anterior, podemos escribir

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}\sigma_{zz} \frac{\sigma_{zz}-\sigma_{yy}}{[(\sigma_{zz}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{zy}^2]^{1/2}} - \frac{1}{2}\sigma_{yy} \frac{2\tau_{yz}}{[(\sigma_{zz}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{zy}^2]^{1/2}} + \tau_{zy} \frac{2\tau_{yz}}{[(\sigma_{zz}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{zy}^2]^{1/2}}$$

o bien

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{zz}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{yz}^2}{[(\sigma_{zz}-\sigma_{yy})^2+4\tau_{zy}^2]^{1/2}} = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \pm \frac{1}{2} [(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{zy}^2]^{1/2}$$

Esta expresión proporciona dos valores de σ_{θ} , uno para el signo positivo de la raíz y otro para el negativo. El mayor de ellos es el esfuerzo principal mayor, el otro el esfuerzo principal menor.

¿Cómo saber la relación entre los ángulos o planos definidos por

$$\theta_{1(\tau=0), \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]} \text{ y } \theta_{2(\tau=0), \in [+ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}$$

y los valores mayor y menor de σ_{θ} ? Es una cuestión que dejamos como trabajo al estudiante.

Problema 4.12

Siga los pasos matemáticos necesarios para deducir la ecuación (4.10-5).

Respuesta:

Diferenciando la ecuación (4.10-3), $\tau_{\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \sin(2\theta) + \tau_{yz} \cos(2\theta)$, tenemos

$$\frac{d\tau_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) 2 \cos(2\theta) - 2\tau_{yz} \sin(2\theta) = 0$$

de modo que

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{2\tau_{yz}} \quad (4.12-1)$$

De esta solución se deducen dos planos ortogonales, $\pi_{\theta_{\tau_{\max}}}$, en los que actúa la máxima tensión de corte:

$$\theta_{1(\tau_{\max})} \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{2\tau_{yz}} \right)$$

$$\theta_{2(\tau_{\max})} \in \left[+\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})}{2\tau_{yz}} \right)$$

Sustituyendo (4.12-1) en (4.10-3) se obtienen los valores de las tensiones de corte máximas:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 4\tau_{zy}^2 \right]^{1/2} \quad (4.12-2)$$

Advierta que la expresión anterior proporciona realmente dos soluciones matemáticas del mismo valor absoluto, las raíces positiva y negativa del miembro derecho de la ecuación, valores que corresponden al valor máximo y mínimo del esfuerzo de corte que actúa sobre planos ortogonales definidos por los ángulos $\theta_{1(\tau_{\max})}$ y $\theta_{2(\tau_{\max})}$ ya mencionados (qué ángulo corresponde a cada tensión es un tema ya trabajado por el estudiante en el problema anterior).

Desde el punto de vista físico, el valor del esfuerzo de corte mínimo es cero, así que los anteriores valores máximo (positivo) y mínimo (negativo, pero del mismo valor absoluto) se interpretan como los esfuerzos de corte que causan momentos (vectores axiales) en contra y a favor de las agujas del reloj en un elemento infinitesimal del cuerpo.

Problema 4.13

¿Qué se puede decir (comparándolos) de los ángulos relacionados con la tensión de corte máxima y mínima y los ángulos relacionados con los planos principales o planos de tensión de corte nula?

$$\theta_{1(\tau_{\max})} \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \text{ and } \theta_{2(\tau_{\max})} \in \left[+\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\theta_{1(\tau=0)} \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \text{ and } \theta_{2(\tau=0)} \in \left[+\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right]$$

Se deja como trabajo para el estudiante.

Problema 4.14 (círculo de Mohr 2-D)

Encontrar la relación entre $\sigma_{n\theta}$ y τ_θ como la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en el eje OX. Los ejes en que se representa está circunferencia son el de tensiones normales (eje OX) y el de tensiones tangenciales (eje OY). Expresar el centro y el radio de la circunferencia en función de las tensiones generales aplicadas a caras opuestas del elemento, Figura 4.14a.

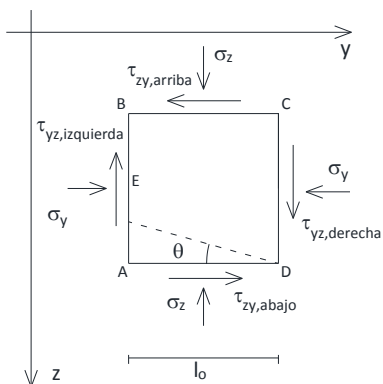


Figura 4.14a. Esfuerzos generales 2-D sobre un elemento

Respuesta:

Sustituyendo (4.12-1) en (4.10-4) resulta

$$\sigma_{n\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \cos(2\theta) + \tau_{zy} \sin(2\theta) \tag{4.14-1}$$

De esta ecuación y la (4.10-5), después de algunas manipulaciones matemáticas se obtiene

$$\left[\sigma_{n\theta} - \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \right]^2 + \tau_\theta^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \right]^2 + \tau_{zy}^2$$

Escribiendo

$$d_o = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \quad \text{posición del centro del círculo}$$

$$r_o^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_{zz} - \sigma_{yy}) \right]^2 + \tau_{zy}^2 \quad \text{radio del círculo}$$

la expresión anterior adopta la forma más sencilla

$$[\sigma_{n\theta} - d_o]^2 + \tau_\theta^2 = r_o^2$$

que define la ecuación de una circunferencia (llamada círculo de Mohr de esfuerzos) en el plano τ - σ , de radio r_o y cuyo centro está sobre el eje σ a una distancia d_o del origen, Figura 4.14b. Esta

representación recoge todo el estado tensional del cuerpo en el punto considerado que resulta de reducir al límite el elemento de la Figura 4.14a.

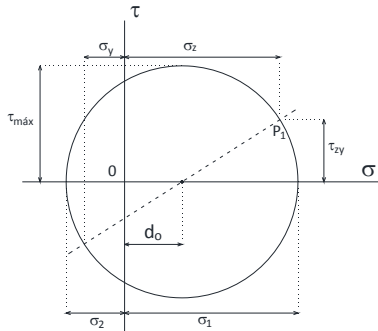


Figura 4.14b. Círculo de Mohr

La Figura 4.14c representa, sobre el círculo de Mohr dibujado a partir de los datos d_o y r_o , las tensiones del elemento de la Figura 4.14a, σ_{zz} y τ_{zy} sobre las caras horizontales y σ_{yy} y τ_{yz} sobre las verticales. Advierta que si partimos del punto definido por las tensiones en las caras horizontales, σ_{zz} y τ_{zy} (punto P_1 de la figura), las tensiones sobre las caras verticales (resultado de girar las horizontales 90° en sentido de las agujas del reloj) definidas en el punto P_2 , σ_{yy} y τ_{yz} , se obtienen girando P_1 180° sobre el círculo (un ángulo 2 veces 90°) en sentido contrario de las agujas del reloj (o en el mismo sentido, en este caso, puesto que se trata de un ángulo de 180°). En general, si giramos el plano AD de la Figura 4.14a un ángulo θ en sentido contrario de las agujas del reloj hasta el nuevo plano AE, las tensiones sobre las caras AE vienen dadas por el punto del círculo resultado de girar P_1 un ángulo 2θ en sentido contrario de las agujas del reloj, es decir por el punto D_1 de la Figura 4.14c, tensiones $\sigma_{n1,\theta}$ y $\tau_{1,\theta}$. Por otro lado las tensiones sobre sus caras opuestas procedentes de girar las caras verticales del elemento el ángulo θ , también en sentido contrario de las agujas del reloj, vienen dadas por el punto del círculo resultado de girar P_2 un ángulo 2θ en sentido contrario de las agujas del reloj, es decir por el punto D_2 , tensiones $\sigma_{n2,\theta}$ y $\tau_{2,\theta} = -\tau_{1,\theta}$ en la Figura 4.14c. Vea que los puntos D_1 y D_2 tienen diferente esfuerzo normal pero el mismo esfuerzo de corte, este último con diferente signo para producir momentos que se equilibren (advierta que, en cada cara, el signo del esfuerzo cortante es coherente con el criterio de signos en geotecnia).

Estos mismos razonamientos se podrían realizar para ángulos θ girados en sentido de las agujas del reloj. En particular, los puntos A y B que representan los planos para los que no existen esfuerzos de corte (planos principales de esfuerzos), se obtienen de girar los puntos P_1 y P_2 un ángulo que llamaremos 2α en sentido de las agujas del reloj. Las tensiones principales mayor y menor viene dadas por σ_1 y σ_2 , respectivamente. La orientación de estos planos principales en relación con los planos originales donde se definen las tensiones de la Figura 4.14a se determina del siguiente modo:

i) girando el plano horizontal del elemento un ángulo $\alpha = \frac{1}{2}(2\alpha)$ en el sentido de las agujas del reloj obtenemos el plano principal en el que se da la tensión normal máxima (es lo mismo que girar P_1 un ángulo 2α en sentido de las agujas del reloj hasta el punto A, y

ii) girando el plano vertical del elemento un ángulo $\alpha = \frac{1}{2}(2\alpha)$ en el sentido de las agujas del reloj obtenemos el plano principal en el que se da la tensión normal mínima (es lo mismo que girar P_2 un ángulo 2α en sentido de las agujas del reloj hasta el punto B.

¿Cómo se obtienen las tensiones $\sigma_{n1,\theta}$, $\sigma_{n2,\theta}$ y τ_θ a partir de los datos σ_{yy} , σ_{zz} y τ_{zy} ($= -\tau_{yz}$)?

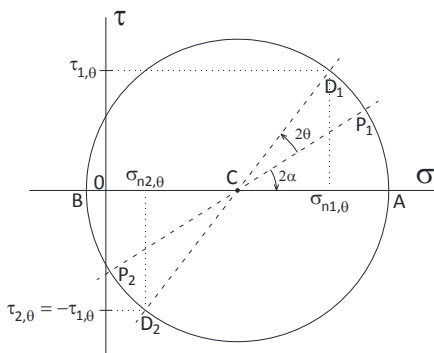


Figura 4.14c. Representación de esfuerzos en el plano θ de la Figura 4.14a

En primer lugar deducimos $\sigma_{n\theta}$, solución ya presentada anteriormente en forma gráfica. De la Figura 4.14c podemos escribir

$$\sigma_{n\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) + r_0 \cos(2\alpha - 2\theta)$$

ecuación en la que sustituyendo las expresiones

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \frac{\tau_{zy}}{\sin(2\alpha)} \\ \operatorname{tg}(2\alpha) &= \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_{zz} - \sigma_{yy}} \end{aligned} \right\} \quad (4.14-2)$$

obtenemos (4.14-1). Por otro lado, de la misma figura, se obtiene

$$\tau_\theta = r_0 \operatorname{sen}(2\alpha - 2\theta)$$

expresión en la que sustituyendo (4.14-2) se obtiene la dependencia ya conocida

$$\tau_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \operatorname{sen}(2\theta) + \tau_{zy} \cos(2\theta)$$

Problema 4.15

Los esfuerzos sobre un elemento como el representado en la Figura 4.15a vienen dados por los puntos A y B del círculo de Mohr mostrado en la Figura 4.15b. El punto A representa los esfuerzos normales y de corte en los planos horizontales mientras que el punto B representa los correspondientes a los planos verticales. Responder a las siguientes cuestiones:

- i) interpretar los signos de las tensiones en los puntos A y B,
- ii) definir los planos principales de esfuerzos y su orientación respecto de los planos en los que se definen los esfuerzos de los puntos A y B,
- iii) definir los planos de los esfuerzos correspondientes a los puntos C y D y a los puntos E y F,
- iv) ¿qué orientación tiene los planos con tensiones de corte máximas en relación con los planos que definen las tensiones de A y B? ¿y en relación con los planos principales?

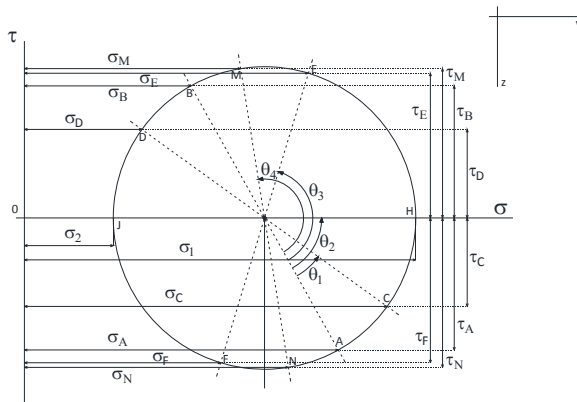


Figura 1.34a. Círculo de Mohr de tensiones en el elemento

Respuesta:

- i) Las tensiones normales en las caras opuestas del elemento son positivas por lo que se trata de esfuerzos de compresión.

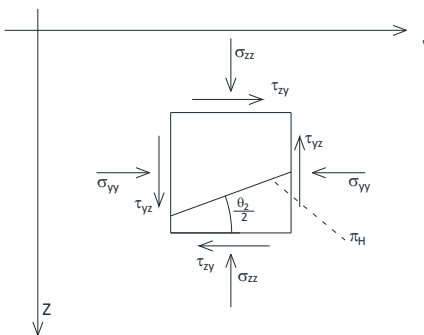


Figura 4.15b. Esfuerzos sobre el elemento (puntos A y B del círculo de Mohr)

El punto A marca las tensiones en los planos horizontales y el punto B en los planos verticales, Figura 4.15b. También, como τ_{zy} (tensión de corte en A) es negativa, el momento que causa (de acuerdo con el criterio de signos en geotecnia) provoca un giro potencial del elemento en el sentido de las agujas del reloj, así τ_{zy} se dirige hacia la región negativa del eje OY en la cara superior y hacia la positiva en la cara inferior. En el punto B, τ_{yz} es positivo provocando un giro del elemento en sentido contrario a las agujas del reloj, este esfuerzo se dirige hacia la región positiva del eje OX, en cara derecha del elemento, y hacia la región negativa en la cara izquierda.

ii) Los puntos del círculo que definen las tensiones principales son H y J.

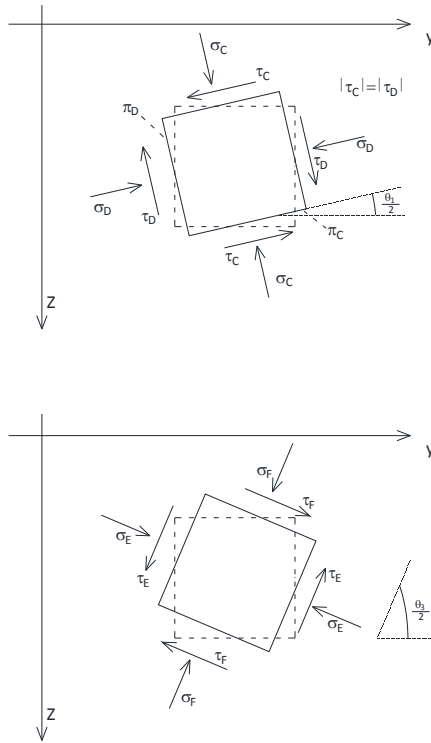


Figura 4.15c. Planos y esfuerzos en C, D, E y F (Figura 4.15a)

La tensión principal mayor σ_1 (de compresión) se aplica sobre un plano (π_H , Figura 4.15b) que resulta de girar el plano horizontal un ángulo $\frac{\theta_2}{2}$ en sentido contrario a las agujas del reloj; la tensión principal menor σ_2 (también de compresión) se aplica sobre un plano perpendicular al anterior (resultado de girar el plano horizontal un ángulo $\frac{\pi+\theta_2}{2}$).

iii) Los puntos C y D definen los esfuerzos en planos que resultan de girar los originales (horizontal y vertical, respectivamente) un ángulo $\frac{\theta_1}{2}$ en sentido contrario de las agujas del reloj. Las tensiones

normales en ambos planos, σ_C y σ_D son de compresión. La tensión de corte en C (τ_C) es negativa lo que implica giros potenciales en el sentido de las agujas del reloj mientras que la tensión de corte en D ($\tau_D = \tau_C$, en valor absoluto) es positiva y produce giros potenciales en el sentido contrario al giro de las agujas del reloj. La Figura 4.15c muestra estos planos en relación a los planos originales y los sentidos de los esfuerzos de corte.

Por otro lado, los puntos E y F definen los esfuerzos en planos que resultan de girar los originales (horizontal y vertical, respectivamente) un ángulo $\frac{\theta_s}{2}$ en sentido contrario de las agujas del reloj. Las tensiones normales en ambos planos, σ_E y σ_F son también de compresión (todas las tensiones normales asociadas a cualquier plano son de compresión!). La tensión de corte en E (τ_E) es positiva mientras que la tensión de corte en F ($\tau_F = \tau_E$, en valor absoluto) es negativa; ambas se representan en la misma Figura 4.15c de acuerdo con el criterio de signos en geotecnia.

iv) Los planos de máxima tensión de corte se definen en los puntos M y N del círculo. Son los que resultan de girar los originales (definidos en puntos A y B del círculo) un ángulo $\frac{\theta_s}{2}$. En M, la tensión de corte (τ_M) positiva se aplica en el plano que resulta de girar el horizontal original, en sentido contrario a las agujas del reloj, un ángulo $\frac{\theta_s}{2}$; el momento potencial de τ_M sobre el elemento lo hace girar en sentido contrario a las agujas del reloj. En N, τ_M es negativa ($\tau_M = \tau_N$, en valor absoluto) y se aplica al plano que resulta de girar el plano vertical original, en sentido contrario a las agujas del reloj, un ángulo $\frac{\theta_s}{2}$. Las tensiones normales en estos planos son de compresión y del mismo valor $\sigma_M = \sigma_N$. Todas estas tensiones y sus sentidos se muestran en la Figura 4.15d.

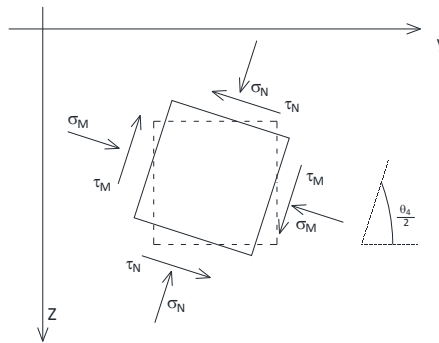


Figura 4.15d. Planos y esfuerzos en M y N (Figura 4.15a)

La relación entre los planos con tensiones de corte máximas y los planos principales (de tensión de corte nula) puede deducirse directamente de la Figura 4.15b. Naturalmente, estos pares de planos son mutuamente perpendiculares. Girando cada uno de los planos principales un ángulo $\frac{\pi}{2}$ se obtienen los planos de máxima tensión de corte.

Problema 4.16

Los esfuerzos sobre un elemento como el representado en la Figura 4.16a vienen dados por los puntos A (tensiones sobre planos horizontales) y B (sobre planos verticales) del círculo de Mohr mostrado en la Figura 4.16b. Las tensiones sobre los planos horizontales son de compresión mientras que las que aplican a planos verticales son de tensión.

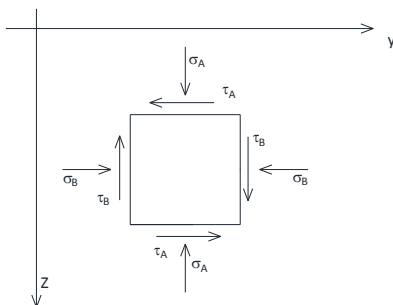


Figura 4.16a. Tensiones sobre un elemento de suelo

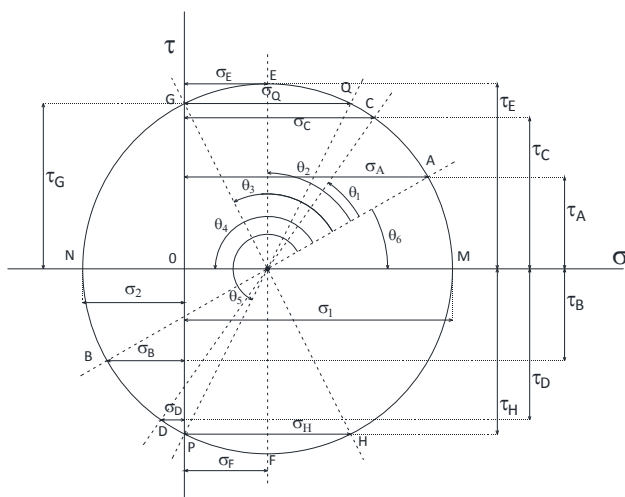


Figura 4.16b. Círculo de Mohr de tensiones en el elemento de la Figura 4.16a

- i) interpretar los signos de las tensiones en los puntos A y B,
- ii) definir los planos principales de esfuerzos y su orientación respecto de los planos en los que se definen los esfuerzos de los puntos A y B,
- iii) definir los planos de los esfuerzos correspondientes a los puntos C y D, y puntos G, H, y P y Q,
- iv) ¿qué orientación tiene los planos con tensiones de corte máximas en relación con los planos que definen las tensiones de A y B?, ¿y en relación con los planos principales?

v) ¿qué orientación tienen los planos de tensión normal nula en relación con los planos horizontales originales?

Respuesta:

i) El elemento está sometido a esfuerzos normales de compresión (positivos, punto A del círculo) en sus planos horizontales y de tracción (negativos, punto B) en sus planos verticales. En relación con las tensiones de corte se razona como en el problema anterior: la tensión de corte τ_{zy} ($=\tau_A$, punto A) es positiva, de ahí su sentido sobre el elemento (causa momentos en sentido contrario a las agujas del reloj); τ_{yz} ($=\tau_B$, punto B), por el contrario, es negativa y causa un giro en sentido contrario al anterior, Figura 4.16a. Todo ellos de acuerdo con el criterio de signos en geotecnia.

ii) Las tensiones principales y sus planos asociados se definen en los puntos M y N del círculo. En M el esfuerzo es de compresión (σ_1) mientras que en n es de tracción (σ_2). La tensión normal principal σ_1 se aplica sobre el plano que resulta de girar el plano horizontal original (Figura 4.16a) un ángulo $\frac{\theta_s}{2}$ en el sentido de las agujas del reloj; σ_2 se aplica sobre un plano perpendicular al anterior, el que resulta de girar el plano horizontal original (Figura 4.16a) un ángulo $\frac{\pi+\theta_s}{2}$ también en el sentido de las agujas del reloj.

iii) Los puntos C y D definen los esfuerzos en planos que resultan de girar los originales (horizontal y vertical, respectivamente) un ángulo $\frac{\theta_1}{2}$ en sentido contrario de las agujas del reloj. Las tensiones normales en ambos planos son σ_C , de compresión, y σ_D , de tracción.

La tensión de corte en C (τ_C) es positiva (produce giros potenciales en el sentido contrario a las agujas del reloj) mientras que la tensión de corte en D ($\tau_D = \tau_C$, en valor absoluto) es negativa y produce giros potenciales en el sentido de las agujas del reloj. La Figura 4.16c muestra estos planos, en relación a los planos originales, y los sentidos de los esfuerzos de corte.

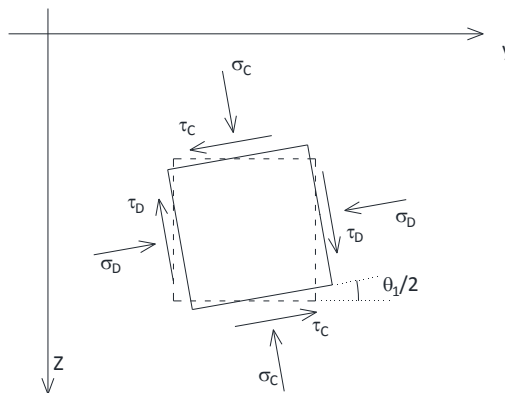


Figura 4.16c. Planos y esfuerzos en C y D (Figura 4.16a)

Por otro lado, los puntos G y H definen los esfuerzos en planos que resultan de girar los originales (horizontal y vertical, respectivamente) un ángulo $\frac{\theta_3}{2}$ en sentido contrario de las agujas del reloj. El esfuerzo normal σ_G es nulo mientras que σ_H lo es de compresión. τ_G es positiva mientras que τ_F es negativa ($\tau_F = \tau_E$, en valor absoluto); de acuerdo con el criterio de signos, estas tensiones se representan en la Figura 4.16d.

Finalmente, los puntos P y Q definen los esfuerzos en planos que resultan de girar los originales (horizontal y vertical, respectivamente) un ángulo $\frac{\theta_5}{2}$ en sentido contrario de las agujas del reloj. El esfuerzo normal σ_P es nulo mientras que σ_Q lo es de compresión. Los sentidos de τ_P (negativa) y τ_Q (positiva), del mismo valor absoluto, se muestran en la Figura 4.16e.

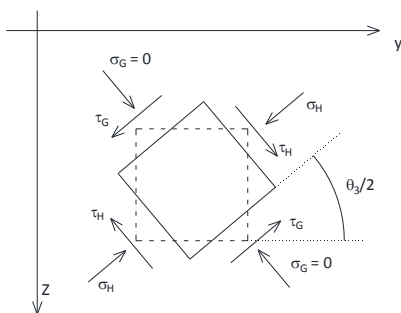


Figura 4.16d. Planos y esfuerzos en G y H (Figura 4.16a)

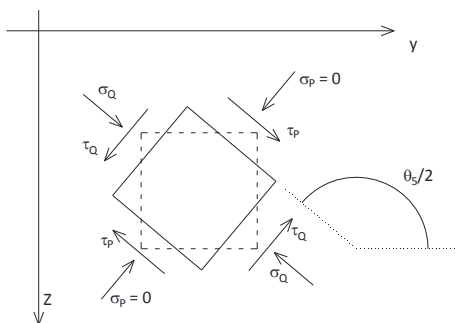


Figura 4.16e. Planos y esfuerzos en P y Q (Figura 4.16a)

iv) Los planos de máxima tensión de corte se definen en los puntos E y F del círculo. En E la tensión de corte (τ_E) es positiva y se aplica en el plano que resulta de girar el plano horizontal original, en sentido contrario a las agujas del reloj, un ángulo $\frac{\theta_2}{2}$; su momento sobre el elemento lo hace girar en sentido contrario a las agujas del reloj. τ_F , negativa ($\tau_E = \tau_F$, en valor absoluto), se aplica en el plano que resulta de girar el plano vertical original, en sentido contrario a las agujas del reloj, un ángulo $\frac{\theta_2}{2}$.

Naturalmente, los planos sobre los que se aplican τ_E y τ_F son perpendiculares. Las tensiones normales que se aplican en los planos de máxima tensión de corte son iguales, de compresión, y de valor σ_E . Todas estas tensiones y sus sentidos se muestran en la Figura 4.16f.

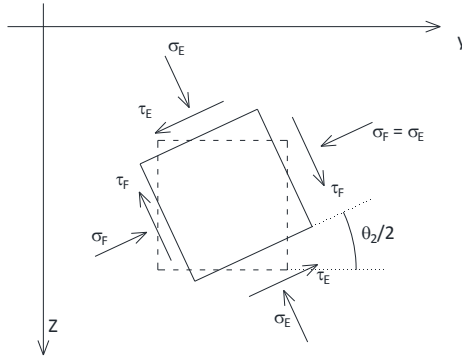


Figura 4.16f. Planos y esfuerzos en E y F (Figura 4.16a)

Como esperábamos, los planos de tensión de corte máxima están girados $\frac{\pi}{2}$ respecto de los planos principales (Figura 4.16b).

v) Existen dos planos de tensión normal nula definidos por los puntos del círculo G y P. G está asociada al plano que resulta de girar el plano principal de la tensión σ_1 un ángulo $\frac{\theta_3+\theta_6}{2}$ en sentido contrario a las agujas del reloj mientras que P está asociada al plano que resulta de girar el plano principal de tensión σ_1 un ángulo $\frac{\theta_5+\theta_6}{2}$ también en sentido contrario a las agujas del reloj. Estos planos se representan en la Figura 4.16g.

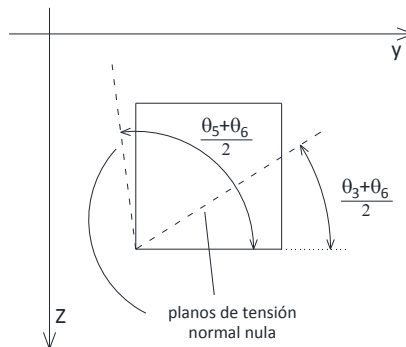


Figura 4.16g. Planos de esfuerzo normal nulo en relación con los planos originales (Figura 4.16a)

Problema 4.17

Sobre el elemento de la Figura 4.17a, orientado un ángulo β en el sistema de referencia elegido, se aplican los esfuerzos normales (ambos de compresión) y de corte señalados en la propia figura. Se cumple que $\sigma_b > \sigma_a$. Encontrar:

- i) los esfuerzos principales y los planos sobre los que se aplican (referidos al sistema de referencia de la figura),
- ii) las tensiones de corte máxima y mínima y los planos sobre los que se aplican (referidos al sistema de referencia de la figura),
- iii) ¿qué orientación tiene los planos sobre los que las tensiones normales y de corte tiene el mismo valor absoluto?
- iv) ¿Qué valores tiene las tensiones normales y de corte en planos perpendiculares a los ejes OX y OY del sistema de referencia de la figura?

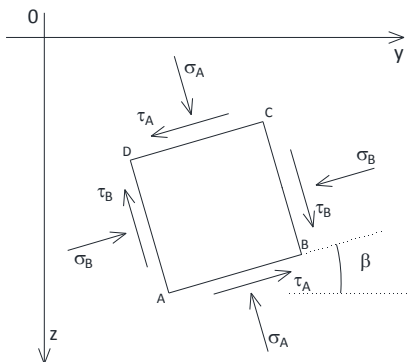


Figura 4.17a Esfuerzos normales y de corte sobre el elemento ABCD

Respuesta:

El círculo de Mohr, independiente del ángulo β , se representa en la Figura 4.17b. Este círculo, con arreglo a los valores particulares de σ_a , σ_1 y τ_a ($=\tau_b$, en valor absoluto), se representa en la Figura 4.17b. El punto E sobre el círculo marca los esfuerzos en los planos DC y AB mientras que el punto B lo hace en los planos (perpendiculares a los anteriores) AD y BC. El centro del círculo está en la σ -coordenada

$$d_o = \frac{(\sigma_a + \sigma_b)}{2}$$

mientras que su radio vale

$$r_o = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a - \sigma_b}{2}\right)^2 + \tau_a^2}$$

El diámetro EF define sobre el σ -eje un ángulo θ_1 de modo que girando el lado AB (o el CD) del elemento un ángulo $\frac{\theta_1}{2}$, en sentido de las agujas del reloj, obtenemos la dirección de uno de los planos principales (A'B' o C'D') sobre el que actúa la tensión principal σ_1 de valor $d_o + r_o'$. Así, en el sistema de referencia XOY el eje principal asociado a este plano forma con el eje OX un ángulo $\beta - \frac{\theta_1}{2}$, Figura 4.17c. El otro plano principal A'D' (o B'C') es perpendicular al anterior y está sometido a un esfuerzo de compresión de valor $d_o - r_o$.

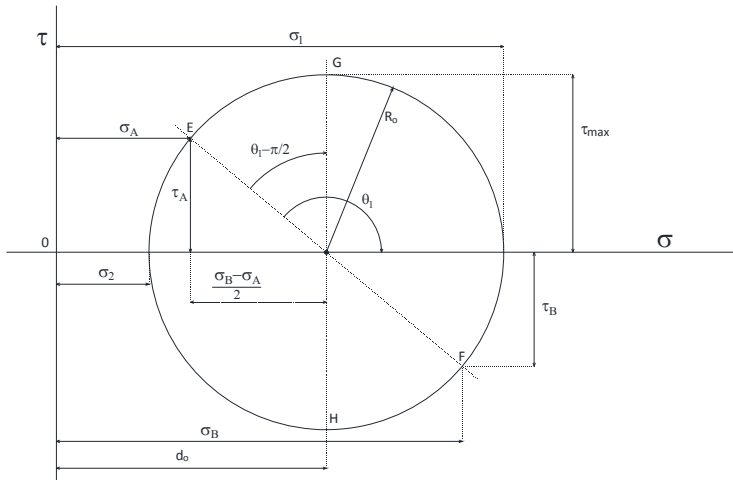


Figura 4.17b Círculo de Mohr del problema 4.17

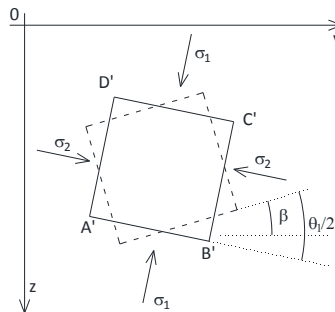


Figura 4.17c Orientación de los planos principales

ii) Las tensiones de corte máxima y mínima ocurren en los puntos G y H del círculo. La tensión máxima positiva, de valor $\tau_{\text{máx}} = r_o$, se da en un plano (A''B'') resultado de girar AB un ángulo $\frac{\theta_1}{2} - \frac{\pi}{4}$, plano que en el sistema de referencia XOY forma un ángulo $\beta - \left(\frac{\theta_1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ con el eje OX, Figura 4.17d. La tensión mínima, $\tau_{\text{mín}} = -r_o$, se da en un plano (A''D'') perpendicular al anterior. El sentido de estos

esfuerzos es coherente con sus signos en el círculo de Mohr. La tensión normal sobre los planos anteriores es la misma y su valor es $\sigma_G = \sigma_H = d_0$.

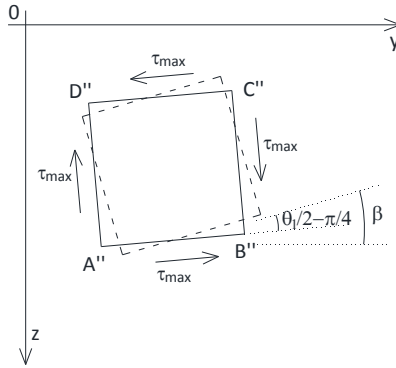


Figura 4.17d Planos de esfuerzo de corte máximo

iii) Los planos para los que las tensiones normales y de corte tienen el mismo valor absoluto definen cuatro puntos en el círculo de Mohr que están en las bisectrices de los cuadrantes. Estos planos son caras del elemento ABCD que se obtienen mediante los giros $\frac{1}{2}(\theta_1 - \frac{\pi}{4})$ y $\frac{1}{2}(\theta_1 + \frac{\pi}{4})$. En el sistema de referencia XOY estos planos forman ángulos de valor $\beta - \frac{1}{2}(\theta_1 - \frac{\pi}{4})$ y $\beta - \frac{1}{2}(\theta_1 + \frac{\pi}{4})$. El valor absoluto de las tensiones normales y de corte es $\frac{\tau_0}{\sqrt{2}}$. El alumno puede dibujar la posición de estos planos en relación con los originales AB y BC del sistema de referencia XOY.

iv) Estos planos se obtienen girando el elemento un ángulo β ; los esfuerzos en ellos están en los puntos M y N resultado de girar el diámetro EF un ángulo β . La Figura 4.17e muestra el elemento girado y los puntos sobre el círculo de Mohr que definen las tensiones en sus caras.

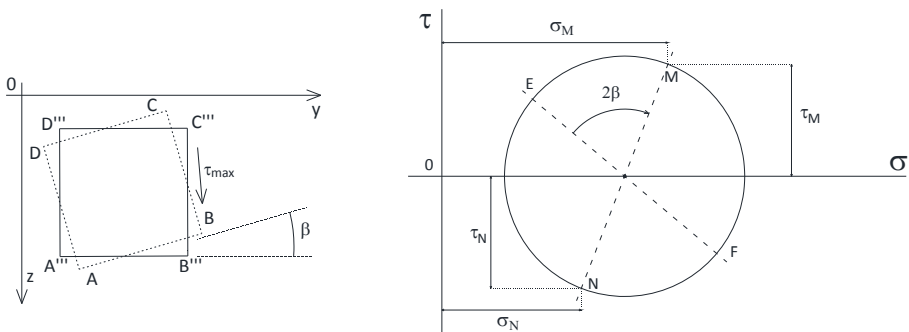


Figura 4.17e Planos de esfuerzo paralelos a los ejes OX y OY, y sus tensiones correspondientes en el círculo de Mohr

Problema 4.18

Sobre el elemento de la Figura 4.18a, orientado un ángulo β en el sistema de referencia elegido, se aplican los esfuerzos normales (uno de compresión y otro de tracción) y de corte indicados. Se cumple que $\sigma_A > |\sigma_B|$. El círculo de Mohr correspondiente se muestra en la Figura 4.18b. Comprobar que el círculo de Mohr es coherente con las tensiones y sus sentidos en el elemento. Encontrar:

- i) los esfuerzos principales y los planos sobre los que se aplican (referidos al sistema de referencia de la figura),
- ii) las tensiones de corte máxima y mínima y los planos sobre los que se aplican (referidos al sistema de referencia de la figura),
- iii) ¿qué orientación tienen los planos sobre los que las tensiones normales y de corte tiene el mismo valor absoluto?
- iv) ¿Qué valores tienen las tensiones normales y de corte en planos perpendiculares a los ejes OX y OY del sistema de referencia de la figura?

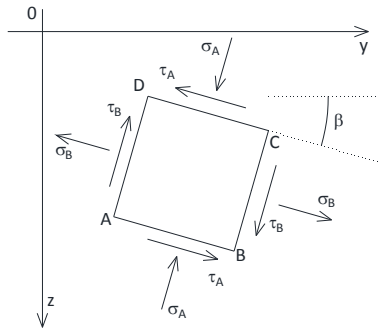


Figura 4.18a Esfuerzos normales y de corte sobre el elemento ABCD

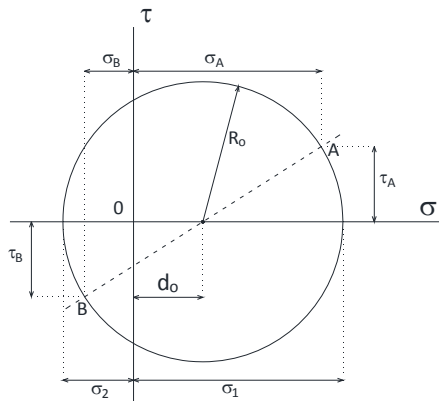


Figura 1.37b Círculo de Mohr del elemento de la Figura 1.37a

Se deja como ejercicio para el estudiante que tendrá que seguir los pasos del problema anterior.

Problema 4.19

Una muestra de roca en forma de placa rectangular, de espesor pequeño frente a las dimensiones de su sección (se asume comportamiento 2-D) se somete a una prueba consistente en la aplicación de sendos esfuerzos normales de compresión y tracción en sus caras laterales, Figura 4.19a. Partiendo de un valor seguro y manteniendo la proporción $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -c_0$, con $c_0 > 1$ una constante, se incrementan los valores de estas tensiones hasta que se produce el corte de la placa. La máxima de corte admisible en cualquier plano es $\tau_{m\acute{a}x,lim}$ (se asume independiente de la tensión normal en el plano de rotura como criterio de rotura) y se supone que la resistencia a la tensión está muy por encima de los valores aplicados de σ_2 . Aplicación: $\tau_{m\acute{a}x,lim} = 0.95$ MPa, $\sigma_{1, inicial} = 0.5$ MPa, $c_0 = 2.5$, resistencia a la tracción 0.75 MPa.

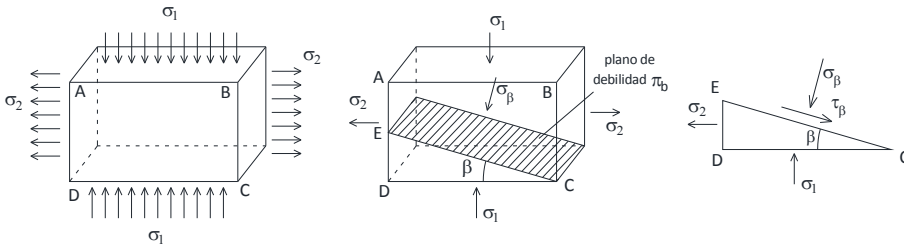


Figura 4.19a Placa de roca bajo solicitaciones normales. Placa con plano de resistencia débil

Usar el círculo de Mohr para:

- i) determinar los valores de las tensiones σ_1 y σ_2 en el fallo. ¿Cómo cambian estos valores si aumenta la relación $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$?
- ii) Si la muestra tiene un plano de debilidad que forma un ángulo β con la cara inferior de la placa, Figura 4.19a, en el que la ruptura tiene lugar para una tensión de corte de 0.8 MPa (independiente de la tensión normal), ¿influirá ese plano en la rotura si $\beta < \frac{\pi}{8}$ rad?

Respuesta:

i) La condición $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = c_0$ para tensiones σ_1 y σ_2 progresivamente crecientes, y para $c_0 = 2.5$, da lugar a círculos de Mohr como los de la Figura 4.19b. De estos círculos, la tensión máxima de corte se da los puntos M, M', M''..., que corresponden a planos que resultan de girar 45° el plano principal DC (o AB) en sentido contrario a las agujas del reloj. Los valores de esta tensión de corte máxima en función de σ_1 y σ_2 son

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{2.5}}{2} = \frac{3.5\sigma_1}{5} = 0.7\sigma_1$$

En rotura, la expresión anterior se escribe en la forma $\tau_{\text{máx,lím}} = 0.7\sigma_{1,\text{rotura}}$. Como $\tau_{\text{máx,lím}} = 0.95$, los valores de los esfuerzos σ_1 y σ_2 en la rotura son:

$$\sigma_{1,\text{rotura}} = \frac{0.95}{0.7} = 1.357 \text{ MPA, y } \sigma_{2,\text{rotura}} = -\frac{1.357}{2.5} = -0.5428 \text{ MPA}$$

El círculo de rotura se muestra en la Figura 4.19b; su centro está en $\sigma = 0.4072$ y su radio es 0.95 MPa. El esfuerzo de tensión en la rotura, $\sigma_{2,\text{rotura}} = -0.5428$ MPa está muy por debajo del valor de la resistencia a la tracción (0.75 MPa) por lo que ésta no afecta al desarrollo de la prueba.

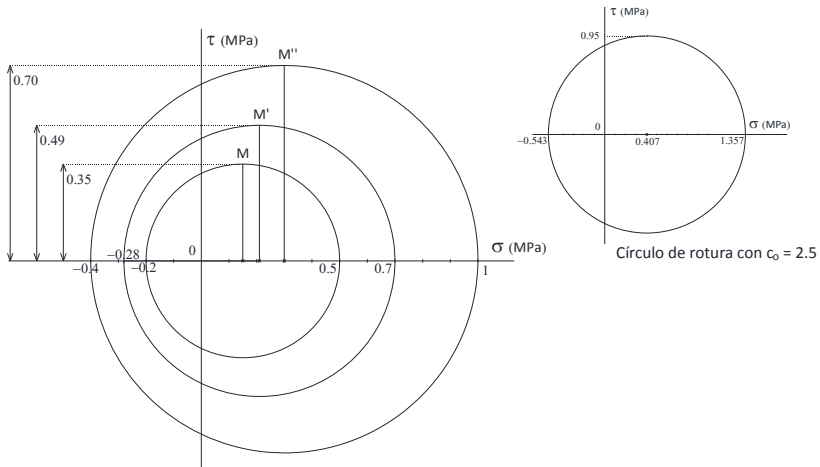


Figura 4.19b Círculos para esfuerzos σ_1 y σ_2 crecientes (izquierda) y círculo de rotura (derecha)

La expresión de $\tau_{\text{máx}}$ en función de c_0 y de una de las tensiones σ_1 o σ_2 es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 + \frac{\sigma_1}{c_0}}{2} = \frac{\sigma_1(1+c_0)}{2c_0} = \frac{\sigma_1}{2} \left(1 + \frac{1}{c_0}\right)$$

y, en rotura,

$$\tau_{\text{máx,lím}} = \frac{\sigma_{1,\text{rotura}}}{2} \left(1 + \frac{1}{c_0}\right)$$

o bien (usando $\frac{\sigma_{1,\text{rotura}}}{\sigma_{2,\text{rotura}}} = c_0$)

$$\sigma_{1,\text{rotura}} = 2\tau_{\text{máx,lím}} \frac{c_0}{1+c_0} \quad \text{y} \quad \sigma_{2,\text{rotura}} = -2\tau_{\text{máx,lím}} \frac{1}{1+c_0}$$

Así, un aumento del cociente $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = c_0$ supone un aumento del esfuerzo $\sigma_{1,rotura}$ y una disminución de $\sigma_{2,rotura}$. La Figura 4.19c muestra los círculos de rotura para $c_0 = 2, 3$ y 5 y las coordenadas del centro del círculo que dan el valor de la tensión normal en el plano de rotura. Los datos se muestran en la Tabla 4.19.

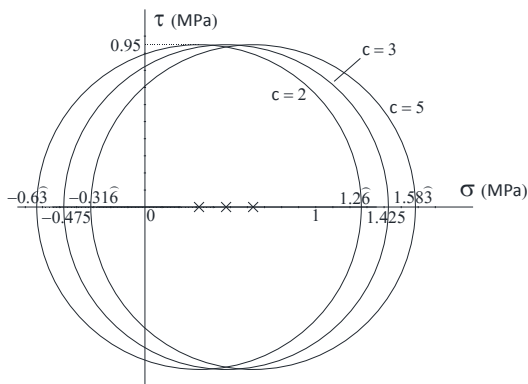


Figura 4.19c Círculos de rotura para $c_0 = 2, 3$ y 5 . $\tau_{m\acute{a}x,l\acute{i}m} = 0.95$ MPa

c_0	2	2.5	3	5
$\sigma_{1,rotura}$ (MPa)	1.266	1.357	1.425	1.5833
$\sigma_{2,rotura}$ (MPa)	-0.633	-0.5428	-0.475	-0.3166
Centro del círculo	0.3166	0.407	0.475	0.6333

Tabla 4.19 Tensiones de rotura y centro del círculo para $c_0 = 2, 3$ y 5 . $\tau_{m\acute{a}x,l\acute{i}m} = 0.95$ MPa

ii) Para el plano de debilidad (π_β), las tensiones normal y de corte en el punto de ruptura pueden leerse directamente del círculo de Mohr de la Figura 4.19b. Estos valores, para $\beta = \frac{\pi}{8}$ son:

$$\sigma_{\pi_\beta (\beta=\frac{\pi}{8})} = -0.95 \cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) = -0.672$$

$$\tau_{\pi_\beta (\beta=\frac{\pi}{8})} = -0.95 \sin\left(2\frac{\pi}{8}\right) = -0.672$$

Como $\tau_{\pi_\beta (\beta=\frac{\pi}{8})}$ es inferior a la tensión de ruptura en este plano débil (de valor 0.8), esta debilidad de la pieza no afecta al proceso de ruptura. Es inmediato pensar que para ángulos β inferiores a $\frac{\pi}{8}$, $\tau_{\pi_\beta (\beta=\frac{\pi}{8})}$ es aún menor por lo que la debilidad no influye para estos ángulos.

Problema 4.20

Una muestra de roca de cantera, similar a la del problema anterior, se somete a esfuerzos de compresión en sus caras laterales, Figura 4.20a. En la prueba se mantiene fijo el esfuerzo σ_1 mientras que se disminuye σ_2 hasta el corte. La muestra contiene dos planos de debilidad, marcados como π_{β_1} y π_{β_2} en la figura, que soportan esfuerzos máximos de valores $\tau_{\text{máx},\beta_1} = 0.55$ y $\tau_{\text{máx},\beta_2} = 0.60$ MPa, respectivamente, y con independencia de las tensiones normales en estos planos. Se parte de los esfuerzos iniciales $\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}} = 1.5$ MPa y la tensión máxima admisible en la pieza (salvo planos de debilidad) es $\tau_{\text{máx},\text{lím}} = 0.7$ MPa, (también independiente del esfuerzo normal). $\beta_1 = 20^\circ$ y $\beta_2 = 25^\circ$. Responder a las siguientes preguntas tratando de usar siempre el círculo de Mohr para los cálculos numéricos:

- i) ¿cómo son los sucesivos círculos de Mohr en la prueba?
- ii) ¿cómo influyen los planos de debilidad en el proceso?, ¿se produce la rotura en alguno de estos planos de debilidad? Dibujar el círculo de Mohr en rotura e indicar el plano de rotura,
- iii) ¿cómo se modifica la prueba si partimos de las tensiones iniciales $\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}} = 2$ MPa?, ¿y si partimos de $\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}} = 1$ MPa?

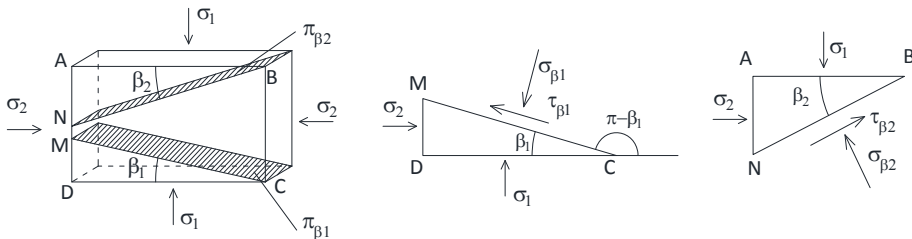


Figura 4.20a. Placa de roca bajo solicitaciones normales. Placa con plano de resistencia débil

Respuesta:

i) Al mantener σ_1 constante durante la prueba ($\sigma_1 = \sigma_{1,\text{inicial}}$), los sucesivos círculos de Mohr retienen este punto común y son de diámetro creciente al bajar σ_2 , Figura 4.20b. Con ello el esfuerzo de corte máximo, definido por el radio del círculo, crece paulatinamente hasta alcanzar la rotura.

El círculo de Mohr correspondiente a la hipotética ruptura (que tendría lugar en planos con ángulo $\beta=45^\circ$) se representa en la Figura 4.20c y sobre él se muestran los puntos correspondientes a los planos de debilidad. Las tensiones sobre el plano MC (π_{β_1}) se manifiestan en el punto P del círculo, resultado de girar un ángulo $2\beta_1$ el punto $(1.5,0)$ sobre el círculo en sentido de las agujas del reloj. $\pi_{\beta_1,\text{rotura}}$ es positiva (lo que justifica su signo de la Figura 4.20a) y su valor es

$$\pi_{\beta_1,\text{rotura}} = 0.7\text{sen}(40) = 0.450 \text{ MPa}$$

De la misma forma, las tensiones sobre el plano NB (π_{β_2}) se manifiestan en el punto Q del círculo, resultado de girar un ángulo $2\beta_2$ el punto (1.5,0) sobre el círculo en sentido contrario a las agujas del reloj. $\pi_{\beta_2,rotura}$ es negativa (lo que justifica su signo de la Figura 4.20a) y su valor es

$$\pi_{\beta_2,rotura} = -0.7\text{sen}(50) = -0.536 \text{ MPa}$$

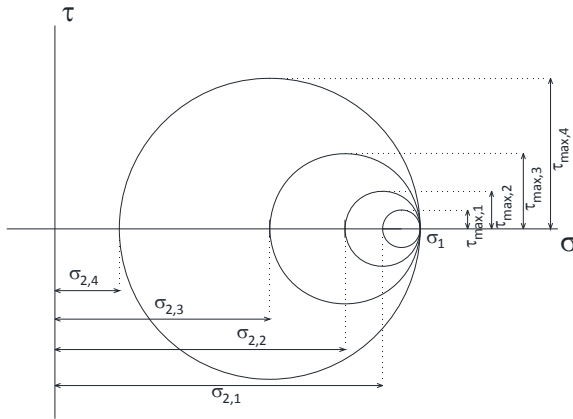


Figura 4.20b. Sucesivos círculos del Mohr de la prueba y tensiones de corte máximas

Dado que las tensiones límite en estos planos de debilidad, $\tau_{m\acute{a}x,\beta_1} = 0.55$ y $\tau_{m\acute{a}x,\beta_2} = 0.60$ MPa, están por debajo de las correspondientes a las anteriores, los planos no influyen en la rotura. La pieza romperá por un plano de 45° como si estos planos de debilidad no existieran, de manera que las hipotéticas tensiones de corte anteriores son las que producen la rotura de la pieza:

$$\sigma_{1,rotura} = \sigma_{1,rotura}^* = 1.5 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{2,rotura} = \sigma_{2,rotura}^* = 0.1 \text{ MPa}$$

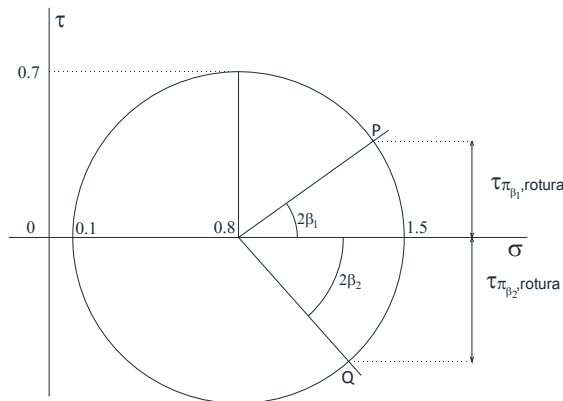


Figura 4.20c. Círculo de Mohr de rotura, $\sigma_{1,inicial} = \sigma_{2,inicial} = 1.5$ MPa

iii) ¿cómo se modifica la prueba si partimos de las tensiones iniciales $\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}} = 1 \text{ MPa}$?,

Para $\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}} = 2$, procediendo como en el apartado anterior, obtenemos unas hipotéticas tensiones en la rotura de valores:

$$\sigma_{1,\text{rotura}}^* = 2 \text{ MPa}, \quad \sigma_{2,\text{rotura}}^* = 0.6 \text{ MPa}$$

El círculo de Mohr correspondiente y los puntos representativos de los planos de debilidad se muestran en la Figura 4.20d. Las tensiones sobre los planos MC (π_{β_1}) y NB (π_{β_2}), puntos P' y Q' de la figura vienen dadas por los mismos valores (como era de esperar),

$$\tau_{\beta_1,\text{rotura}} = 0.7\text{sen}(40) = 0.450 \text{ MPa} \text{ y } \tau_{\beta_2,\text{rotura}} = -0.7\text{sen}(50) = -0.536 \text{ MPa},$$

por lo que, de nuevo, los planos de debilidad no influyen en la rotura que tendrá lugar por el plano definido por $\beta = 45^\circ$ y bajo los esfuerzos normales

$$\sigma_{1,\text{rotura}} = 2 \text{ MPa}, \quad \sigma_{2,\text{rotura}} = 0.1 \text{ MPa}.$$

De lo anterior puede deducirse que la rotura de la pieza tendrá lugar en un plano de 45° , respecto de los planos correspondientes a las caras horizontales de la muestra, siempre que las tensiones de partida iniciales, $\sigma_{1,\text{inicial}}$ y $\sigma_{2,\text{inicial}}$, del mismo valor, sean superiores a 1.4 MPa. Ello es así puesto que los círculos de Mohr de rotura tienen todos el mismo radio (0.7 MPa) y lo que hacen es desplazarse hacia la derecha al aumentar la tensión inicial. Este hecho proporciona el mismo valor de tensión de corte en cada uno de los planos débiles, siempre por debajo de la tensión de rotura en los mismos. Advertida que para esfuerzos iniciales $\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}} = 1.4 \text{ MPa}$, la rotura tiene lugar para $\sigma_{2,\text{rotura}} = 0$ (círculo tangente al eje τ).

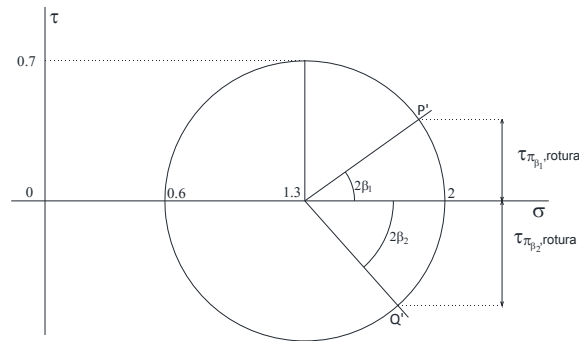


Figura 4.20d. Círculo de Mohr de rotura, $\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}} = 2 \text{ MPa}$

¿Qué ocurre para esfuerzos iniciales por debajo de 1.4 MPa? La expresión $\tau_{\text{máx, lím}} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ deduce una tensión $\sigma_{2,\text{rotura}}^*$ negativa (tracción). Por ejemplo, para $\tau_{\text{máx, lím}} = 0.7 \text{ MPa}$ y $\sigma_1 = \sigma_{1,\text{inicial}} = 1 \text{ MPa}$ obtenemos (sin considerar los efectos de los planos de debilidad)

$$\sigma_{1,rotura}^* = 1 \text{ MPa}, \quad \sigma_{2,rotura}^* = -0.5 \text{ MPa}$$

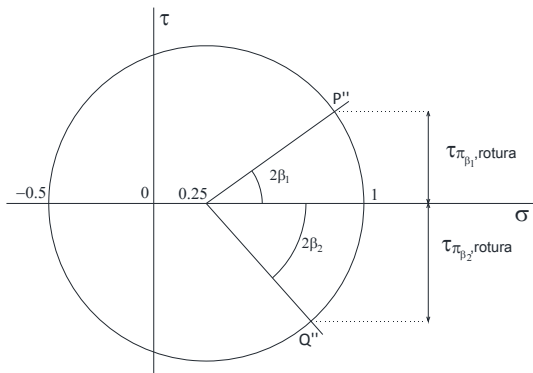


Figura 4.20e. Círculo de Mohr de rotura, $\sigma_{1,inicial} = \sigma_{2,inicial} = 1 \text{ MPa}$

El círculo de Mohr correspondiente a la hipotética ruptura por planos $\beta=45^\circ$ se representa en la Figura 4.20e. Los puntos del círculo asociados a los planos de debilidad no han cambiado por lo que éstos no afectan a la rotura

Problema 4.21

¿Cómo se modifican las soluciones del problema anterior si la máxima tensión de corte (salvo los planos de debilidad) se reduce a 0.8 MPa? Considere las mismas tensiones de rotura en los planos de debilidad y parta de $\sigma_{1,inicial} = \sigma_{2,inicial} = 2 \text{ MPa}$.

Respuesta:

A partir de $\tau_{m\acute{a}x,l\acute{i}m} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, con $\tau_{m\acute{a}x,l\acute{i}m} = 0.4$ y $\sigma_1 = \sigma_{1,inicial} = 2 \text{ MPa}$, obtenemos las hipotéticas tensiones de rotura:

$$\sigma_{1,rotura}^* = 2 \text{ MPa}, \quad \sigma_{2,rotura}^* = 0.4 \text{ MPa}$$

Sobre el círculo de Mohr para estas tensiones, Figura 1.40a, se representan los puntos P y Q correspondientes a los planos de debilidad cuyos esfuerzos son

$$\pi_{\beta_1,rotura} = 0.8\text{sen}(40) = 0.514 \text{ MPa}$$

$$\pi_{\beta_2,rotura} = -0.8\text{sen}(50) = -0.613 \text{ MPa}$$

El resultado muestra que en el plano de debilidad π_{β_1} la tensión queda por debajo de la admisible ($\tau_{m\acute{a}x,\beta_1} = 0.55$) por lo que este plano no afecta al corte. Por el contrario, el esfuerzo sobre el plano π_{β_2} queda ligeramente por encima del admisible ($\tau_{m\acute{a}x,\beta_2} = 0.60$) por lo que la ruptura se produciría por este plano en lugar de por el plano de 45° .

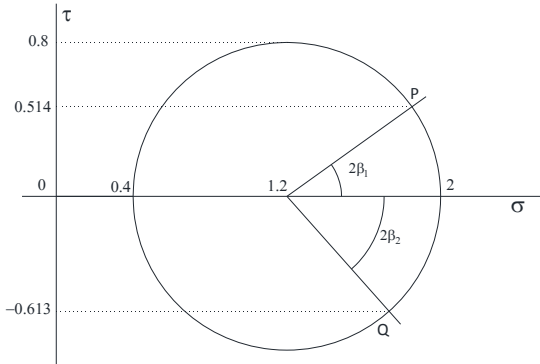


Figura 4.21a. Círculo de Mohr para $\sigma_1 = 2$ MPa, $\sigma_2 = 0.4$ MPa

El círculo de Mohr de rotura sería algo diferente, Figura 4.21b. Para dibujarlo se parte de los datos del plano de rotura π_{β_2} : $\beta_2 = 25^\circ$ y $\tau_{\pi_{\beta_2}, \text{rotura}} = -0.6$ MPa, que permiten conocer el radio del círculo

$$r_o = \frac{\tau_{\pi_{\beta_2}, \text{rotura}}}{\text{sen}(50)} = \frac{0.6}{0.766} = 0.783$$

con lo que

$$\sigma_{1, \text{rotura}} = 2 \text{ MPa}, \sigma_{2, \text{rotura}} = 2 - 2r_o = 0.434 \text{ MPa}$$

La tensión en el plano π_{β_1} en el momento de rotura es $\tau_{\pi_{\beta_1}} = 0.783 \text{ sen}(40) = 0.503$ MPa, por debajo de la tensión de corte (0.55) como esperábamos. Puede deducirse que bajo la prueba de mantener σ_1 constante y bajar σ_2 hasta llegar al fallo de la muestra, el plano π_{β_2} es siempre el de mayor debilidad cualesquiera que sean los valores iniciales de las tensiones y el valor de $\tau_{\text{máx, lím}}$ (obviando estos planos) y, en general, cualquiera que sea el proceso que lleve a cabo la ruptura. Así, la muestra caso de romper por alguno de estos planos lo hará por π_{β_2} .

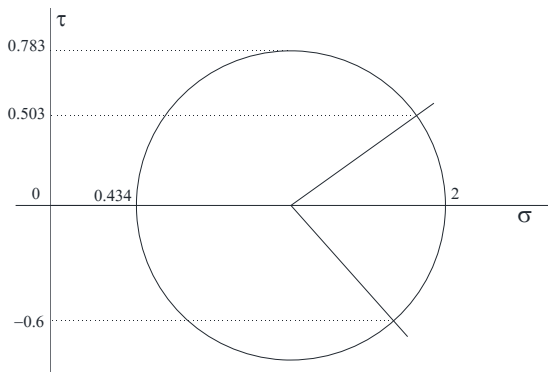


Figura 4.21b. Círculo de Mohr de rotura por el plano débil π_{β_2}

Problema 4.22

Una muestra de suelo (2-D) se somete a una prueba partiendo de unos valores iniciales idénticos de tensión ($\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}}$), manteniendo el esfuerzo aplicado en sus caras verticales (σ_1) y aumentando la aplicada a sus caras horizontales (σ_2) hasta la rotura. La disposición es la de la Figura 1.41a. El esfuerzo máximo admisible en cualquier plano (independiente de las tensiones normales) es $\tau_{\text{máx, lím}} = 0.72$ KPa.

- i) Discutir y representar, sin hacer cálculos, la evolución de los círculos de Mohr a lo largo del experimento, ¿depende la tensión de rotura ($\sigma_{2,\text{rotura}}$) de la tensión inicial y constante $\sigma_{1,\text{inicial}}$?, ¿qué orientación tiene el plano de rotura respecto del plano horizontal de la muestra?
- ii) Determinar los valores de las tensiones normales y de corte en planos π_β orientados 20° y -20° respecto a las caras verticales de la muestra, Figura 4.22a. Aplicación: $\tau_{\text{máx, lím}} = 0.7$, $\sigma_{1,\text{inicial}} = \sigma_{2,\text{inicial}} = 0.4$ MPa.
- iii) Determinar los esfuerzos en el plano de rotura ($\sigma_{2,\text{rotura}}$ y τ_{rotura}) para los datos anteriores.

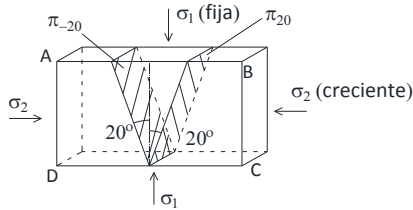


Figura 4.22a. Muestra de suelo sometida a rotura

Respuesta:

- i) Los sucesivos círculos tienen un punto fijo y su radio crece paulatinamente hasta el valor $\tau_{\text{máx, lím}}$ que determina el círculo de rotura, Figura 4.22b (izquierda).

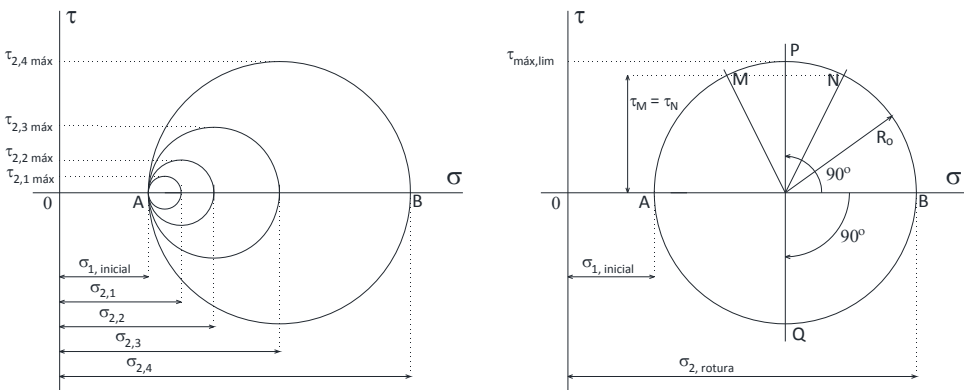


Figura 4.22b. Sucesivos círculos del Mohr de la prueba (izquierda). Círculo de rotura (derecha)

Un aumento en la tensión inicial $\sigma_{1,\text{inicial}}$ traslada los círculos de Mohr hacia la derecha; los círculos de rotura se desplazan también hacia la derecha este mismo incremento pero tienen el mismo radio. Los puntos de corte sobre el círculo de rotura, Figura 4.22b (derecha), P y Q, resultan de girar el punto B un ángulo de 90° en sentido contrario y a favor, respectivamente, de las agujas del reloj, de modo que los planos de corte están 45° desviados respecto de las caras horizontales (o verticales) de la muestra.

ii) Los esfuerzos en los planos π_β orientados 20° y -20° respecto a las caras verticales de la muestra están asociados a los puntos N y M del círculo de rotura, respectivamente, Figura 4.22b (derecha).

A partir del propio círculo es inmediato determinar las siguientes incógnitas:

Radio del círculo: $r_o = \tau_{\text{máx, lím}} = 0.72$

$\sigma_{1,\text{rotura}} = 0.4 \text{ MPa}$, $\sigma_{2,\text{rotura}} = \sigma_{1,\text{rotura}} + 2\tau_{\text{máx, lím}} = 1.84 \text{ MPa}$

Plano $\pi_{\beta=20^\circ}$: $\sigma_{20^\circ} = \frac{1}{2}(\sigma_{2,\text{rotura}} - \sigma_{1,\text{rotura}}) + \tau_{\text{máx, lím}} \sin(20) = 1.366 \text{ MPa}$
 $\tau_{20^\circ} = \tau_{\text{máx, lím}} \cos(20) = 0.677 \text{ MPa}$

Plano $\pi_{\beta=-20^\circ}$: $\sigma_{-20^\circ} = \frac{1}{2}(\sigma_{2,\text{rotura}} - \sigma_{1,\text{rotura}}) - \tau_{\text{máx, lím}} \sin(20) = 0.873 \text{ MPa}$
 $\tau_{-20^\circ} = \tau_{\text{máx, lím}} \cos(20) = 0.677 \text{ MPa}$

Las tensiones normales sobre los planos $\pi_{\beta=20^\circ}$ y $\pi_{\beta=-20^\circ}$ son de compresión. El signo positivo de la tensión de corte asocia a estos planos los sentidos señalados en la Figura 4.22c.



Figura 4.22c. Sentido de las tensiones normales y de corte en los planos $\pi_{\beta=20^\circ}$ y $\pi_{\beta=-20^\circ}$

iii) En los planos de rotura (puntos P y Q):

$\sigma_P = \sigma_Q = \sigma_{1,\text{rotura}} + \tau_{\text{máx, lím}} = 1.120 \text{ MPa}$

$\tau_{\text{rotura}} = \tau_{\text{máx, lím}} = 0.72 \text{ MPa}$

Problema 4.23

La muestra de suelo de la Figura 4.23a se lleva a rotura mediante una prueba que consiste en aplicar esfuerzos crecientes de corte puros en sus caras. La rotura tiene lugar para valores $\tau_{\text{máx, lím}} = 0.72$ KPa en cualquier plano, con independencia de la tensión normal. Se parte de un valor inicial $\tau_{xy, \text{inicial}}$ de 0.25 KPa. En estas condiciones:

- i) Representar la evolución de los círculos de Mohr de la prueba; ¿cuáles son los planos principales de la muestra y qué esfuerzos actúan sobre estos planos?
- ii) Representar el círculo de Mohr en la ruptura. ¿Cuál es el plano de ruptura?, ¿qué esfuerzos actúan en el plano $\pi_{\beta=30^\circ}$ de la figura?

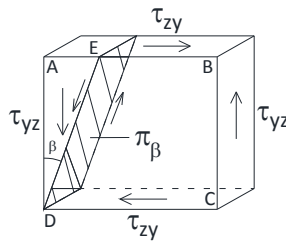


Figura 4.23a. Muestra sometida a esfuerzos de corte puros

Respuesta:

La ausencia de esfuerzos normales en las caras de la muestra ubica el círculo de Mohr con su centro en el origen y radio creciente de valor la tensión de corte aplicada τ_{xy} . Los círculos son crecientes durante la prueba, el primer círculo tiene un radio de 0.25 mientras que el de corte lo tiene de 0.72, Figura 4.23b.

P y P' representan los puntos del círculo cuyos esfuerzos (sólo cortantes) positivos son los aplicados en las caras verticales de acuerdo con el criterio de signos en geotecnia mientras que Q y Q' son puntos que representan los esfuerzos de corte (negativos) aplicados en las caras horizontales. También, N y N' representan esfuerzos normales (positivos) de compresión que se aplican en la cara perpendicular a la diagonal AC (resultado de girar la cara vertical 45º en sentido de las agujas del reloj, recorrido P'N' sobre el círculo), mientras que M y M' representan esfuerzos normales (negativos) de tracción que se aplican al plano perpendicular a la diagonal BD (resultado de girar la cara vertical 45º en sentido contrario a las agujas del reloj, recorrido P'M' sobre el círculo). Estos planos, perpendiculares entre sí, son los planos principales de la muestra en todo momento (tensión de corte nula en los mismos); los de rotura son planos paralelos a las caras verticales y horizontales (igualmente perpendiculares entre sí). No hace falta mencionar que los esfuerzos principales, en valor absoluto, son iguales a las tensiones de corte aplicadas.

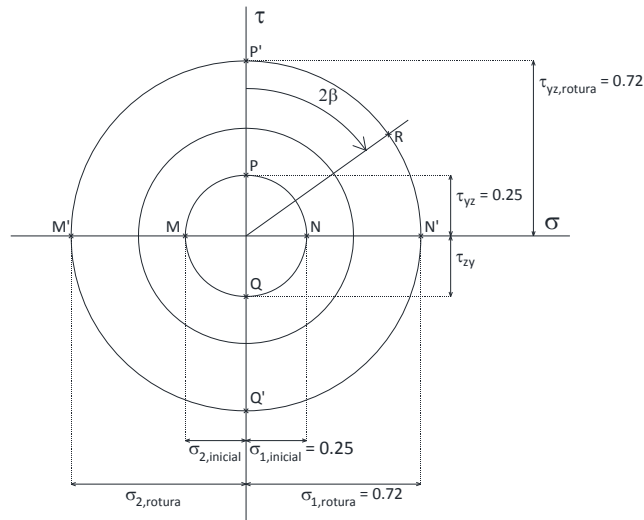


Figura 4.23b. Círculos crecientes del Mohr de la prueba y círculo de rotura

ii) El círculo de Mohr de ruptura queda representado en la Figura 4.23b y ya se ha mencionado cuáles son los planos de ruptura. Para determinar los esfuerzos sobre el plano $\pi_{\beta=30^\circ}$ de la Figura 4.23a basta girar el punto P' del círculo de ruptura (punto que representa el esfuerzo de corte en las caras verticales) un ángulo 2β en sentido de las agujas del reloj. En el nuevo punto R, con $\beta=30^\circ$, se tiene

$$\sigma_{\pi_{\beta=30^\circ}} = 0.72 \sin(60) = 0.624 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\pi_{\beta=30^\circ}} = 0.72 \cos(60) = 0.360 \text{ MPa}$$

El sentido positivo de $\sigma_{\pi_{\beta=30^\circ}}$ indica que las fuerzas normales en este plano son de compresión mientras que el sentido también positivo de $\tau_{\pi_{\beta=30^\circ}}$ induce para la tensión de corte el sentido mostrado en la Figura 4.23a.

Problema 4.24

Se pretende practicar una prueba de rotura a una muestra rectangular 2-D homogénea, de suelo granular, consistente en aplicar esfuerzos de corte crecientes en sus caras horizontales y verticales partiendo de esfuerzo de corte nulo. Los esfuerzos se aplican con los sentidos indicados en la Figura 4.24a. La muestra está sometida a un esfuerzo de compresión en sus caras horizontales y uno de tracción en sus caras verticales, ambos constantes y de valor $\sigma_y = 0.2$ y $\sigma_x = -0.05$ MPa, respectivamente. Se observa la rotura de la pieza para el valor $\tau_{xy,rotura} = 0.15$ KPa, con independencia del esfuerzo normal en el plano de ruptura. Bajo este escenario:

- i) Representar la evolución de los círculos de Mohr de la prueba sin hacer cálculos,
- ii) Dibujar el círculo de Mohr de rotura; calcular la tensión de corte máxima que soporta la muestra, los planos de rotura y las tensiones normales en dichos planos,
- iii) ¿cuáles son los planos principales de la muestra y qué esfuerzos actúan sobre estos planos?

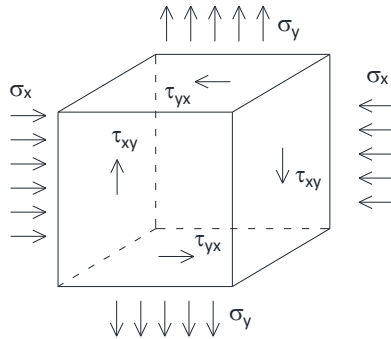


Figura 4.24a. Muestra bajo tensiones generalizadas (normales y de corte)

Respuesta:

i) El primer círculo de Mohr, correspondiente a la aplicación en las caras de una tensión de corte nula tiene un radio $r_o = 0.125$, Figura 4.24b. Sus puntos A y A' representan los esfuerzos en las caras horizontales y verticales, respectivamente, caras que se corresponden para este círculo en planos principales de la muestra. El esfuerzo de corte máximo es también 0.125MPa y se produce a 45° de los mencionados planos, puntos M y M'.

La evolución de los círculos viene marcada por los sucesivos valores del esfuerzo de corte aplicado a las caras de la muestra, la cual mantiene los esfuerzos normales en sus caras en los valores iniciales, $\sigma_y = 0.2$ y $\sigma_x = -0.05$ MPa. De esta forma el punto A del primer círculo asciende por la vertical hasta, por ejemplo, el punto B, que denota un nuevo círculo en el que la tensión de corte vale τ_{xy1} . Para éste, el radio y la máxima tensión de corte tienen el mismo valor

$$r_o = \tau_{m\acute{a}x,1} = \sqrt{0.125^2 + \tau_{xy1}^2}$$

El punto N del círculo define el plano en el que aplica esta tensión de corte máxima así como su esfuerzo normal. Dicho plano resulta de girar las caras horizontales de la muestra un ángulo β_1 de acuerdo con las propiedades del círculo de Mohr; su valor en función de τ_{xy1} es

$$\text{tg}(2\beta_1) = \frac{0.125}{\tau_{xy1}}$$

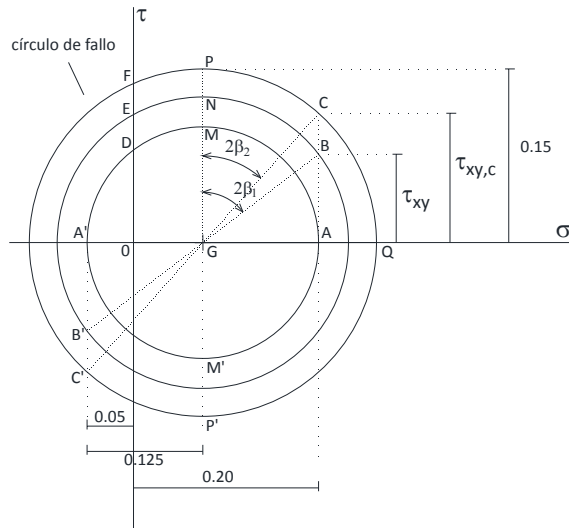


Figura 4.23b. Círculos crecientes del Mohr de la prueba y círculo de rotura

ii) El círculo de Mohr de rotura es el mayor de los círculos de la Figura 4.24b. De acuerdo con el enunciado, está definido por una tensión de corte en C de valor $\tau_{xy,rotura} = 0.15$ KPa y proporciona el valor de la tensión de corte máxima que soporta la pieza (punto P), $\tau_{m\acute{a}x,l\acute{i}m}$,

$$\tau_{m\acute{a}x,l\acute{i}m} = \sqrt{0.125^2 + 0.15^2} = 1.036 \text{ KPa}$$

el plano de rotura, $\pi_{rotura} = \pi_{\beta_2}$, definido por el que resulta de girar el plano horizontal un ángulo β_2 en sentido contrario a las agujas del reloj (giro del punto C hasta P),

$$\text{tg}(2\beta_2) = \frac{0.125}{0.15} = 0.833, \quad \beta_2 = 79.60^\circ$$

y la tensión normal en el plano de rotura (punto P)

$$\sigma_{\beta_2} = 0.125 - 0.05 = 0.075 \text{ KPa}$$

La Figura 4.24c muestra la posición del plano de rotura, resultado de girar el plano horizontal (punto C del círculo) un ángulo de 40.8° en sentido contrario a las agujas del reloj (punto P).

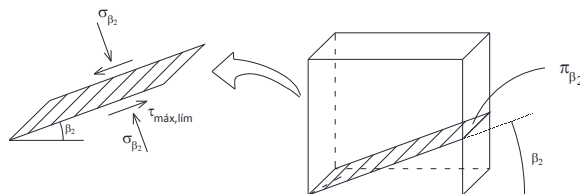


Figura 4.24c. Plano de rotura y tensiones sobre el mismo

iii) Los planos principales de la muestran, ubicados en los puntos de corte de los sucesivos círculos con el eje σ , van cambiando a lo largo de la prueba tanto de orientación como del valor de las tensiones principales que actúan sobre los mismos. De acuerdo con la Figura 4.24b, en todo momento, una de estas tensiones es positiva (de compresión) y la otra negativa (de tracción). Para cada círculo, la orientación del plano principal de compresión es el resultado de girar el plano horizontal de la pieza un ángulo $\alpha = \frac{\pi - 2\beta}{2}$; sobre este plano actúa un esfuerzo de compresión de valor $\sigma_{1,\alpha} = \frac{1.025}{\text{sen}(2\alpha)}$. El cálculo del esfuerzo de tracción sobre el otro plano principal, usando el círculo de Mohr, se deja como tarea para el alumno. En particular, para el plano de rotura,

$$\alpha_{\text{rotura}} = \frac{\frac{\pi}{2} - 2\beta_2}{2} = \frac{90 - 81.6}{2} = 4.2^\circ$$

$$\sigma_{1,\alpha_{\text{rotura}}} = \frac{1.025}{\text{sen}(2\alpha_{\text{rotura}})} = 7.02 \text{ KPa}$$

Problema 4.25

Una de las pruebas más frecuentes con el triaxial para medir la resistencia de suelos y rocas es preparar muestras cilíndricas en las que la superficie lateral de la probeta se mantiene constante mientras se aumenta la presión en sus bases hasta la rotura. Merced a la simetría de la prueba las dos tensiones aplicadas, la axial (σ_a) y la radial (σ_r), son las tensiones principales σ_1 y σ_2 , respectivamente ($\sigma_1 > \sigma_2$), lo que supone que las tensiones en todos sus planos quedan representadas mediante un solo círculo de Mohr. En un experimento como el descrito, Figura 4.25a, que parte de los esfuerzos $\sigma_a = \sigma_r = 0.9 \text{ MPa}$, la muestra de suelo rompe en $\sigma_a = 1.7 \text{ MPa}$. Determinar:

- i) la evolución de los círculos de Mohr durante la prueba y el círculo de rotura,
- ii) el esfuerzo de corte máximo de la muestra (τ_{rotura}), su sentido, y el plano de rotura,
- iii) los esfuerzos normales en el plano de rotura,
- iv) ¿en qué plano los esfuerzos de corte son negativos y de valor mitad al esfuerzo de corte máximo?, ¿qué tensiones normales se dan en ese plano?

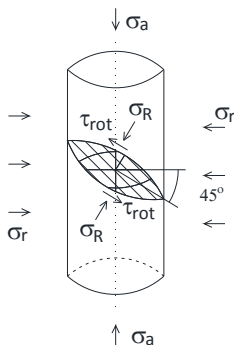


Figura 4.25a. Prueba triaxial en muestra cilíndrica

Respuesta:

i) La evolución se muestra en la Figura 4.25b. El vértice A del círculo se mantiene fijo (σ_r) mientras que B (σ_r) se desplaza hacia la derecha aumentando así el radio del círculo. El círculo de rotura, de radio 1.2, está definido por su centro C en el σ -eje, de $\frac{0.9+1.7}{2}=1.3$.

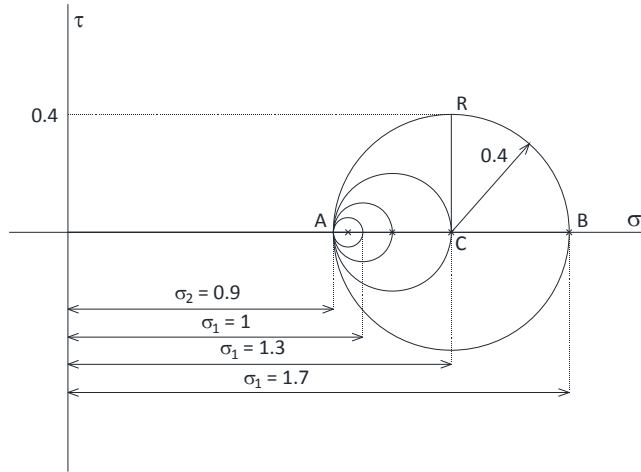


Figura 4.25b. Círculos de Mohr durante la prueba y círculo de rotura

ii) La resistencia al corte (esfuerzo de corte máximo) de la muestra es $\tau_{rotura}=0.4$ MPa; el valor es positivo de modo que las tensiones de corte sobre el plano de rotura (el determinado por la base del cilindro al girar 45° en sentido contrario a las agujas del reloj), de acuerdo con el criterio de signos, es el mostrado en la misma Figura 4.25a.

iii) En efecto, sobre el plano de rotura actúa el esfuerzo normal (punto R del círculo) marcado por el centro del círculo, 1.3 MPa.

iv) Los puntos del círculo en los que la tensión de corte es $\tau_{rotura}/2$ son M y N de la Figura 4.25c. El ángulo que define dichos puntos es $\beta = \arcsen(0.2/0.4)30^\circ$. Las tensiones normales positivas (de compresión) correspondientes a estos puntos son:

$$\sigma_M = 1.3 - 0.4\cos(30) = 0.954 \text{ Mpa y } \sigma_N = 1.3 + 0.4\cos(30) = 1.65 \text{ Mpa.}$$

Para determinar el plano π_N correspondiente al punto N basta girar el plano horizontal en sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo de $\frac{90+30}{2} = 60^\circ$ (recorrido R→N de la Figura 1.44c). Del mismo modo el plano correspondiente a M (π_M) resulta de girar el mismo plano horizontal un ángulo $\frac{180+60}{2} = 120^\circ$, Figura 4.25d. Advierta que los planos π_M y π_N no son perpendiculares (¿es coherente este

resultado?, ¿dónde se ubican en el círculo los puntos correspondientes a los esfuerzos en planos perpendiculares a π_M y π_N ?)

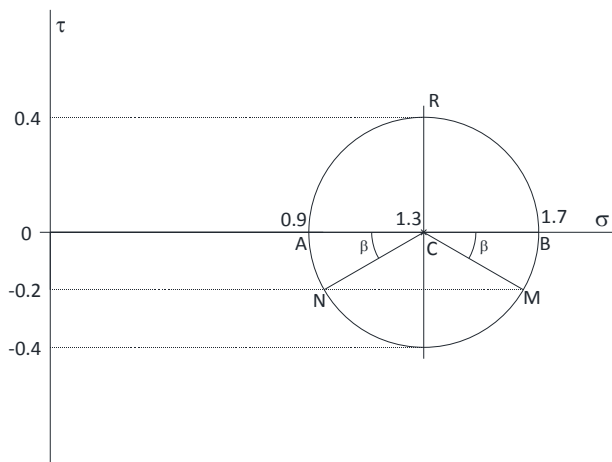


Figura 4.25c. Tensiones de corte de valor $\tau_{rotura}/2$

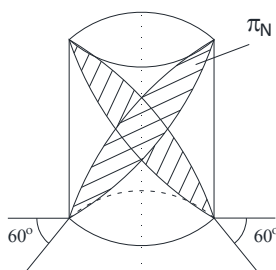


Figura 4.25d. Orientación del plano π_N

Problema 4.26

Se desea determinar la orientación de un plano débil (π_β) en una roca y el esfuerzo sobre este plano; se sabe que la tensión máxima de corte que soporta en cualquier plano diferente al débil es $\tau_{m\acute{a}x}=3.2$ MPa, con independencia de ll esfuerzo normal en el plano de corte. Para ello se extrae una muestra convenientemente orientada de la misma y se la somete a una prueba traixial con tensiones iniciales radial y axial de valor $\sigma_{a,ini} = \sigma_{r,ini} = 1.2$ MPa; en estas condiciones se aumenta el esfuerzo axial hasta que se produce la rotura de la pieza que tiene lugar para el valor $\sigma_{a,\beta} = 2.8$ MPa. El corte se produce por un plano que forma 75° con el plano de la base cilíndrica de la muestra, Figura 4.26a.

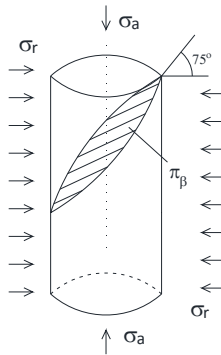


Figura 4.26a. Prueba triaxial en muestra cilíndrica

Determinar:

- i) el círculo de Mohr de rotura por el plano débil y el punto sobre el mismo que marca las tensiones en este plano. ¿Qué valor tienen tales tensiones?,
- ii) el círculo de Mohr de rotura caso de que no existiera el plano débil.

Respuesta:

i) Los círculos evolucionan de la forma indicada en la Figura 4.26b hasta el valor $\sigma_a = \sigma_{a,\beta} = 2.8$ MPa, el cual determina el círculo de rotura por el plano débil. Dado que este se encuentra a 75° del plano horizontal, basta girar el punto A (plano de las bases de la muestra) en sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo de $2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$, hasta el punto R_β .

En el plano débil

$$\sigma_\beta = 1.307 \text{ MPa}, \quad \tau_\beta = 0.4 \text{ MPa}$$

Observe que τ_β es muy inferior a la tensión de corte máxima (4 MPa) que es capaz de soportar la roca en ausencia del plano débil.

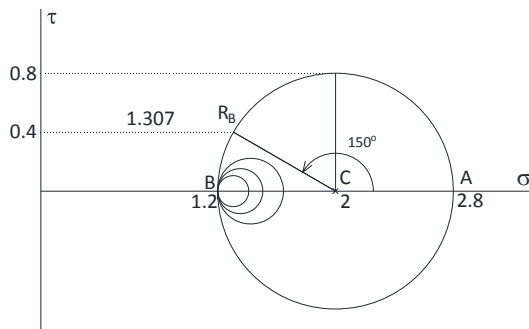


Figura 4.26b. Evolución de los círculos de Mohr y círculo de rotura por el plano débil

ii) Caso de no existir el plano débil, las tensiones principales que definirían el plano de rotura, Figura 4.26c, serían

$$\sigma_1 = \sigma_a = 1.2 + 2 \cdot 3.2 = 7.6 \text{ MPa}, \sigma_2 = \sigma_r = 1.2 \text{ MPa}$$

El centro está en (4.4,0) y el radio es $r_0 = 3.2$; $\tau_{a,\beta} = 3.2$ MPa. La rotura (con el criterio adoptado de independencia respecto del esfuerzo normal) tendría lugar, como sabemos, en planos desviados 45° respecto del plano de la base de la muestra (puntos R_1 y R_2 del círculo).

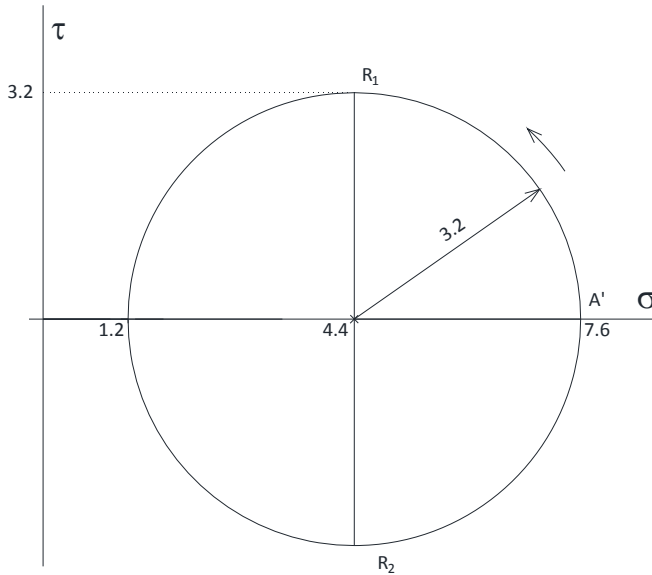


Figura 4.26c. Círculo de rotura en ausencia de plano débil y tensiones de rotura

4.3. Teoría del polo

Como sabemos, el estado tensional más general de un elemento (2-D) de una cierta muestra de suelo o roca, Figura 12 (tres casos), viene caracterizado por los esfuerzos normales y de corte en sus caras horizontales (σ_z, τ_{zx}) y verticales (σ_x, τ_{xz}). Uno de los esfuerzos (el mayor) es positivo (trabajo a compresión) y el otro puede ser positivo o negativo según la prueba; por otro lado, τ_{zx} y τ_{xz} son uno positivo y otro negativo pero del mismo módulo. El punto A_1 define los esfuerzos en la cara horizontal (normal a σ_z), con $\sigma_z > \sigma_y$ (las dos positivas), τ_{xz} positivo y τ_{zx} negativo, ambos del mismo módulo. Lo mismo puede razonarse para los otros dos casos.

Pues bien, para un estado tensional cualquiera (σ_z, τ_{zx}) y (σ_x, τ_{xz}), se llama 'polo de planos' (en general este es el polo al que se hace referencia en todos los textos por lo que suele suprimirse su alusión a los planos y se llama simplemente polo) asociado a tal estado tensional al punto de intersección entre la línea horizontal trazada desde (σ_z, τ_{zx}) y el propio círculo. Así, para los estados tensionales de la figura anterior los polos son los puntos P_1, P_2 y P_3 . El polo tiene la siguiente propiedad: para obtener la tensión en un plano de orientación arbitraria definida por $\pm\beta$ ($+\beta$ girando el plano horizontal en sentido contrario a las agujas del reloj y $-\beta$ girándolo a favor) en relación con el plano que asumimos horizontal del elemento, basta girar la línea horizontal que contiene el polo un ángulo $\pm\beta$; el estado tensional del nuevo plano queda definido por el punto de intersección de la línea girada, y que parte del polo, con el círculo.

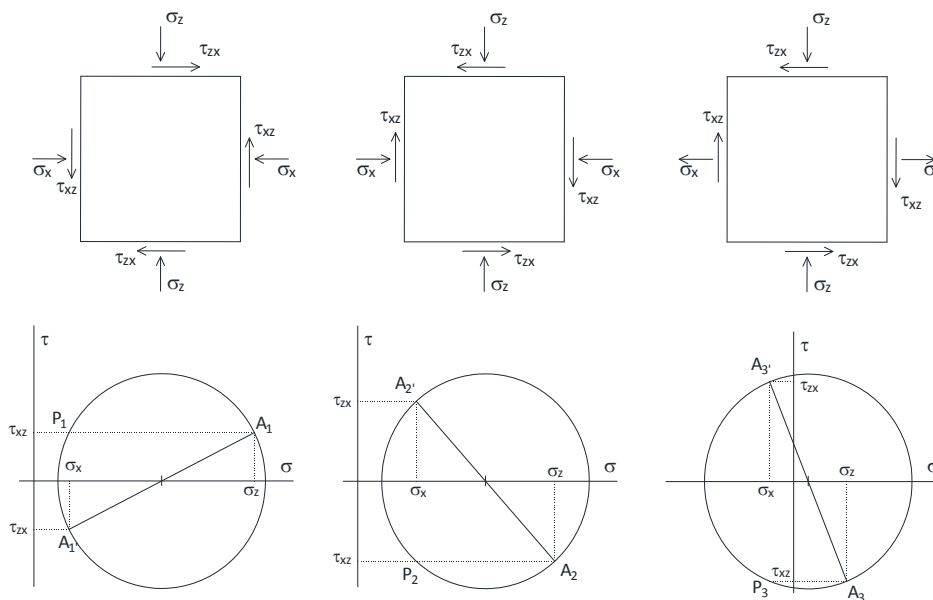


Figura 12. Estado tensional generalizado y puntos del círculo de Mohr asociados a ese estado

Las Figuras 13 y 14 muestran ejemplos de aplicación de este teorema. En la primera, el elemento se define por las tensiones (σ_z, τ_{zx}) y (σ_x, τ_{xz}) aplicadas en los planos π_A y $\pi_{A'}$, respectivamente, puntos A y A' del círculo. Estos planos se han representado horizontal y verticalmente junto al plano π_C en el que se quieren determinar las tensiones (σ_C, τ_C) , plano resultado de girar un ángulo β en sentido contrario a las agujas del reloj.

El nuevo elemento de caras paralelas a π_C y π_D (perpendicular a π_C) se ha dibujado en la misma figura, mostrando las tensiones que se aplican en sus caras. Para hallar las tensiones (σ_C, τ_C) a partir del polo primero se obtiene éste trazando una línea horizontal desde A, la intersección con el círculo define el polo de planos (punto P_P). Basta girar ahora la línea $P_P A$ alrededor de P_P , y en sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo β dando un punto sobre el círculo (C) que define las tensiones en el plano π_C buscadas. Finalmente, las tensiones en el plano π_D vienen dadas por el punto D del círculo.

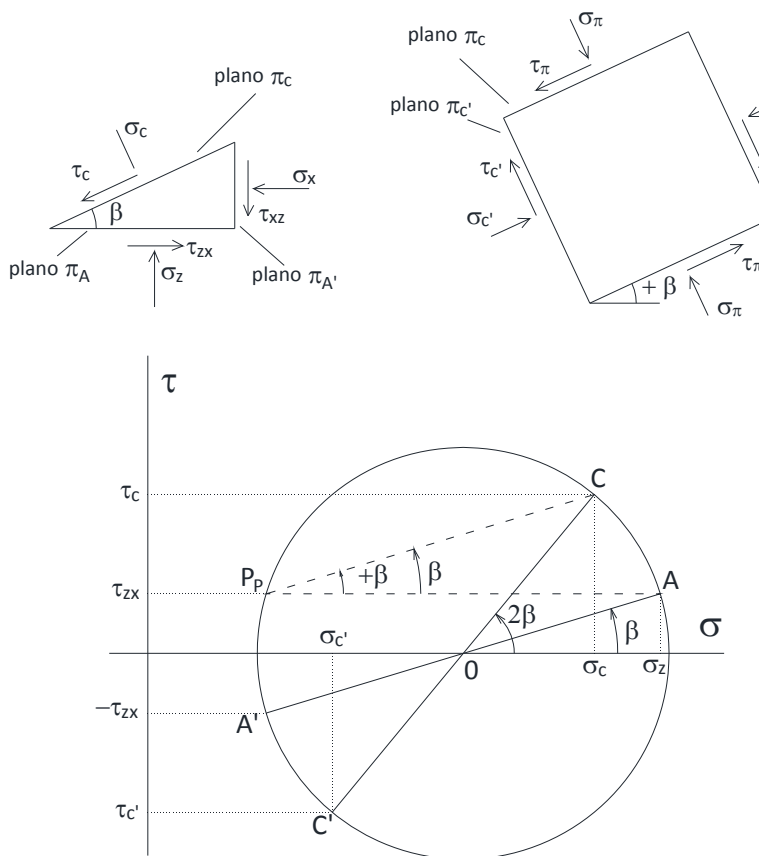


Figura 13. Ejemplo 1. Deducción del polo asociado al punto. Uso del polo

Advierta que los sentidos de las tensiones de corte dibujadas en la figura, en cualquiera de los planos π_A , π_B , π_C y π_D , son coherentes con los signos de las mismas en el círculo. Las normales son siempre positivas (de compresión) en este escenario. Observe que el ángulo central definido por las líneas OA y OC vale 2β pues proyecta sobre el círculo el mismo arco que el ángulo inscrito definido por las líneas P_PA y P_PC (propiedad simple de los ángulos inscritos de una circunferencia).

En la Figura 14, que utiliza una nomenclatura similar a la anterior, las tensiones en los planos π_A y $\pi_{A'}$ del elemento son las mismas, (σ_z, τ_{zx}) y (σ_x, τ_{xz}) , puntos A y A'. En este caso se ha adoptado una tensión de corte negativa en el plano π_A y, naturalmente, positiva en $\pi_{A'}$, mientras que el plano en el que se quiere determinar las tensiones, π_C , está girado un ángulo β en sentido de agujas del reloj respecto al plano π_A . El polo de A está en P_P y se obtiene siguiendo los mismos pasos que para la figura anterior. La solución está representada en los puntos C y C' del círculo.

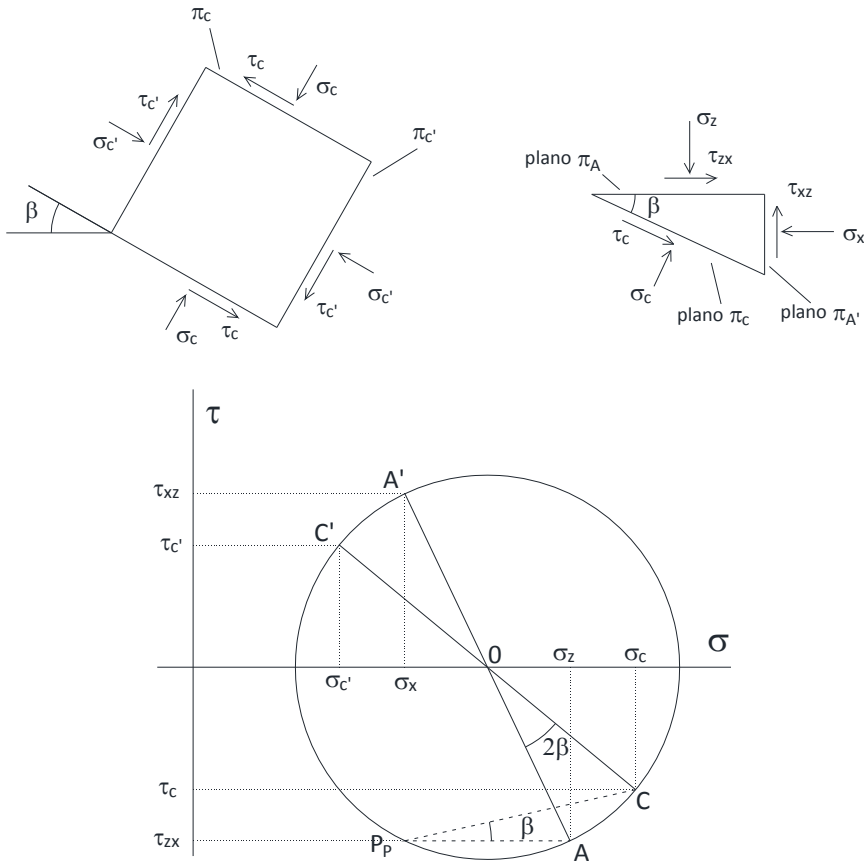


Figura 14. Ejemplo 2. Deducción del polo asociado al punto. Uso del polo

Problema 4.27 (polo de planos)

La figura 4.27a representa la sección de un elemento (2-D) sometido a tensiones de compresión en sus caras, determinar el polo correspondiente al punto A ($\sigma_1, 0$) y usar el teorema del polo para determinar las tensiones en planos que forman ángulos de $+30^\circ$ (π_{30}), $+75^\circ$ (π_{75}), $+125^\circ$ (π_{125}), y $+150^\circ$ (π_{150}), con el plano horizontal del elemento π_a .

Aplicación: $\sigma_1 = 3.5$ MPa, $\sigma_2 = 0.5$ MPa,

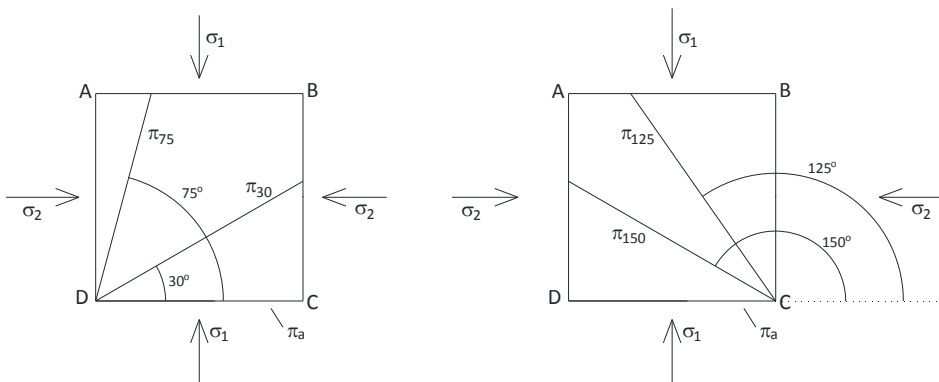


Figura 4.27a. Elemento 2-D y planos en los que se solicitan las tensiones

Respuesta:

Por ser π_a el plano principal correspondiente al esfuerzo principal mayor (punto A del círculo), una línea horizontal en A determina sobre el círculo el punto polo P_p que se corresponde con el que define el esfuerzo principal menor (A'), Figura 4.27b. Ahora es suficiente girar la línea P_pA sobre el polo en sentido contrario a las agujas del reloj para obtener los puntos B, C, D y E que definen los esfuerzos en los planos pedidos, π_{30} , π_{75} , π_{125} , y π_{150} . Los puntos B' , C' , D' y E' , definen los esfuerzos en planos perpendiculares a los anteriores.

Los valores de las tensiones son:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= 1.5 + 1.5 \cos(60) = 2.25 \text{ MPa}, & \tau_B &= 1.5 \sin(60) = 1.30 \text{ MPa} \\ \sigma_C &= 1.5 - 1.5 \cos(30) = 0.20 \text{ MPa}, & \tau_C &= 1.5 \sin(30) = 0.75 \text{ MPa} \\ \sigma_D &= 1.5 + 1.5 \cos(70) = 2.01 \text{ MPa}, & \tau_D &= -1.5 \sin(70) = -1.41 \text{ MPa} \\ \sigma_E &= 1.5 - 1.5 \cos(60) = 2.25 \text{ MPa}, & \tau_E &= -1.5 \sin(60) = -1.30 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Observe que los planos π_{30} y π_{150} tienen el mismo esfuerzo normal pero su tensión de corte es opuesta. El dibujo de los esfuerzos en estos planos se deja como trabajo para el estudiante.

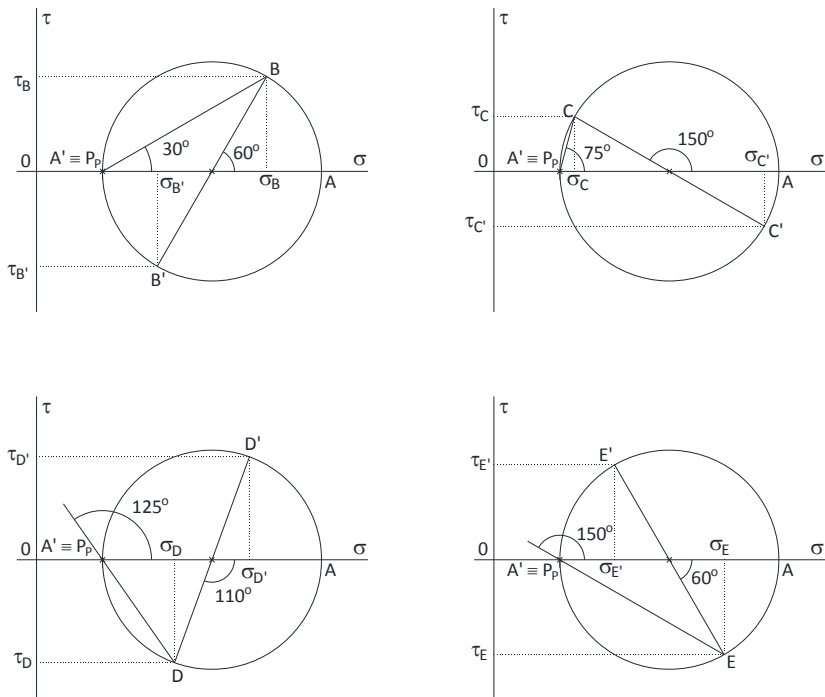


Figura 4.27b. Tensiones en los planos π_{30} , π_{75} , π_{125} , y π_{150} (y sus planos perpendiculares)

Problema 4.28

La figura 4.28a es similar a la del problema 4.27 pero el esfuerzo principal menor es de tracción. Usar el teorema del polo para determinar las tensiones en los mismos planos (π_{30} , π_{75} , π_{125} y π_{150} en referencia al plano π_a . Aplicación: $\sigma_1 = 1.5$ MPa, $\sigma_2 = -0.5$ MPa,

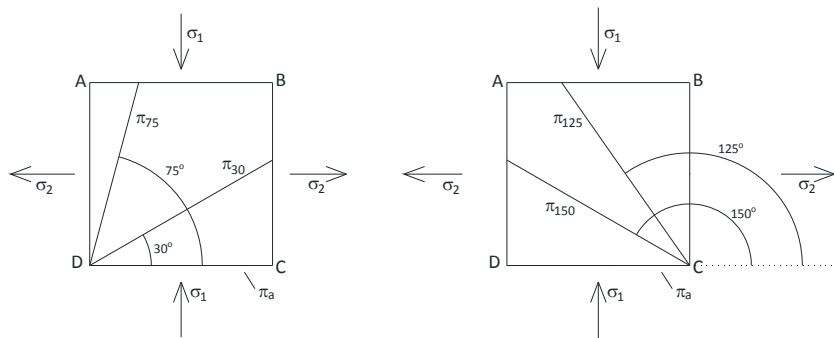


Figura 4.28a. Elemento 2-D y planos en los que se solicitan las tensiones

Respuesta:

Siguiendo los pasos del problema anterior, los puntos B, C, D y E definen los esfuerzos en los planos pedidos, π_{30} , π_{75} , π_{125} , y π_{150} , Figura 4.28b.

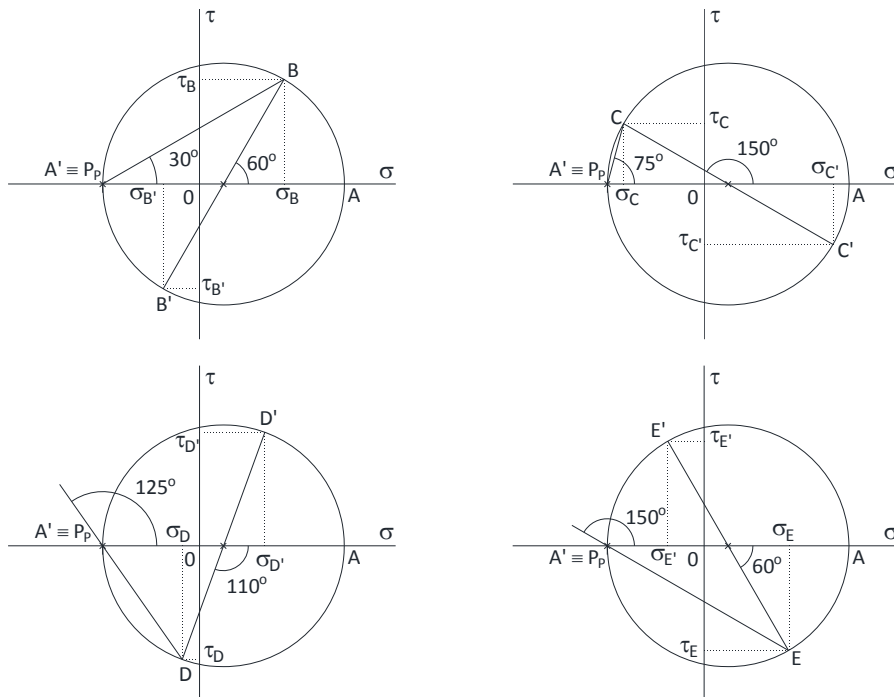


Figura 4.28b. Tensiones en los planos π_{30} , π_{75} , π_{125} , y π_{150} (y sus planos perpendiculares)

Los valores de las tensiones son:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= 0.5 + \cos(60) = 1 \text{ MPa}, & \tau_B &= \text{sen}(60) = 0.87 \text{ MPa} \\ \sigma_C &= 0.5 - \cos(30) = 0.20 \text{ MPa}, & \tau_C &= \text{sen}(30) = 0.50 \text{ MPa} \\ \sigma_D &= 0.5 + \cos(70) = 0.84 \text{ MPa}, & \tau_D &= -\text{sen}(70) = -0.94 \text{ MPa} \\ \sigma_E &= 0.5 + \cos(60) = 1 \text{ MPa}, & \tau_E &= -\text{sen}(60) = -0.87 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Problema 4.29

Las caras opuestas de una muestra cuadrada (2-D) de roca están sometidas a los siguientes esfuerzos, Figura 4.29a:

Caras horizontales (planos π_H):	$\sigma_z = 1100 \text{ kPa}$,	$\tau_{zx} = -400 \text{ kPa}$
Caras verticales (planos π_V):	$\sigma_x = 900 \text{ kPa}$,	$\tau_{zx} = 400 \text{ kPa}$

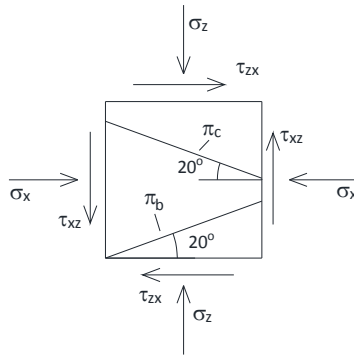


Figura 4.29a. Elemento 2-D y planos en los que se solicitan las tensiones

Responder a las siguientes preguntas:

- i) dibujar el círculo de Mohr del problema, representar los puntos correspondientes al estado tensional de los planos π_H y π_V , y obtener las tensiones y planos principales de esfuerzos,
- ii) ¿cuál la tensión máxima de corte de la roca?, ¿en qué plan se produce? (responder usando el círculo),
- iii) encontrar el polo asociado al punto que representa el estado tensional del plano horizontal, los esfuerzos en este punto y el plano sobre los que actúan,
- iv) usar la teoría del polo para obtener los esfuerzos en los planos π_a y π_b de la figura.

Respuesta:

- i) Los datos del problema permiten representar el círculo de Mohr, Figura 4.29b cuyo centro y radio son:

$$\text{centro: } (1000,0), \quad \text{radio} = 4.12$$

Los puntos correspondientes al estado tensional de los planos π_H y π_V son A y A' respectivamente. Las tensiones principales y los planos sobre las que actúan son:

$\sigma_1 = 1412 \text{ kPa} \rightarrow$ plano resultado de girar 38° el plano π_H , en sentido contrario a las agujas del reloj,
 $\sigma_2 = 588 \text{ kPa} \rightarrow$ plano resultado de girar $38+90 = 128^\circ$ el plano π_H , en sentido contrario a las agujas del reloj.

- ii) La tensión de máxima de corte es 412 kPa y se produce en el plano resultado de girar $38+45= 83^\circ$ el plano π_H , en sentido contrario a las agujas del reloj (punto R del círculo), Figura 4.29b.

- iii) El polo representativo del estado en A es P_p , Figura 4.29b. Los esfuerzos en el polo son: $\sigma_{\text{polo}} = 900 \text{ kPa}$, $\tau_{\text{polo}} = -400 \text{ kPa}$. El plano sobre el que actúan los esfuerzos anteriores es el resultante de girar 28° el plano π_H , en sentido contrario a las agujas del reloj, Figura 4.29b.

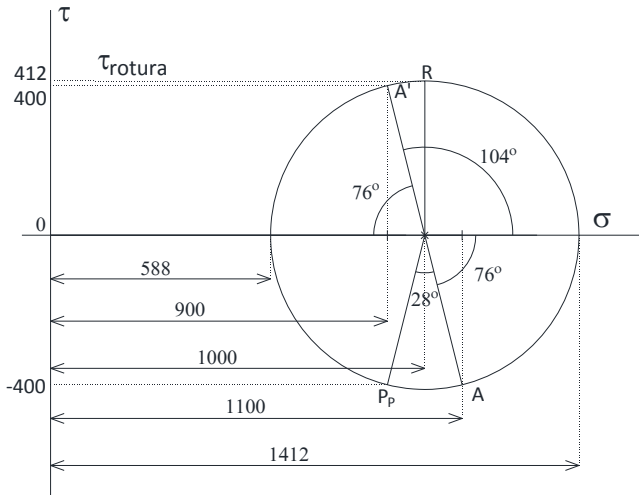


Figura 4.29b. Círculo de Mohr

iv) Para obtener los esfuerzos en el plano π_b basta girar 20° en sentido de las agujas del reloj la línea P_pA en torno al polo para obtener el punto B que define las tensiones en ese plano, Figura 4.29c. Del mismo modo, los esfuerzos en el plano π_c se obtienen de girar 20° en sentido contrario a las agujas del reloj la línea P_pA en torno al polo, punto C, Figura 4.29c.

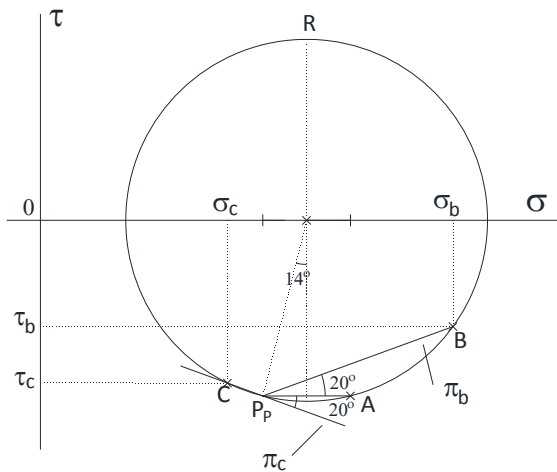


Figura 4.29c. Uso del polo para obtener los esfuerzos en los planos π_b y π_c

Leyendo en el propio círculo, el estudiante puede calcular los esfuerzos en los planos correspondientes a los puntos B y C.

4.4. Criterio de fallo de Coulomb

El criterio de fallo de Coulomb en suelos (también aplicable para discontinuidades o juntas en rocas), propuesto en 1773, se basa en su expresión para la resistencia al corte de estos materiales. Ésta, que aglutina las propiedades mecánicas del medio y las tensiones normales y de corte en la superficie de fallo, viene dada por

$$\tau_f = c + \sigma_n \operatorname{tg}(\phi) \quad (21)$$

donde τ_f es el esfuerzo de corte (resistencia por unidad de área, M/m^2), c es la cohesión del material (fuerzas atracción entre partículas por unidad de área, N/m^2), σ_n es el esfuerzo normal aplicado al plano de corte (M/m^2), y $\operatorname{tg}(\phi)$ (adimensional) la tangente del llamado ángulo de resistencia al corte (ϕ). Los puntos de los hipotéticos círculos de Mohr situados por encima de la línea de falla, ecuación (21) no pueden estar en equilibrio pues para ellos existen planos en los que las tensiones de corte están por encima de τ_f . De este modo el círculo límite (círculo de falla o rotura) es siempre tangente a la línea de falla.

Mohr asume el criterio de Coulomb y lo aplica a muestras de hierro fundido (en las que el criterio de Saint-Venant, usado ampliamente por la comunidad ingenieril, presentaba discrepancias con los resultados de laboratorio). Ilustra su utilidad con la deducción de la resistencia límite al corte ($\tau_{\text{lím,corte}}$) mediante pruebas de resistencia a la compresión y a la tensión: a partir de los círculos de estas pruebas definidos por los esfuerzos de compresión hasta la rotura (σ_1 , positivo de acuerdo al criterio de signos) y tracción (σ_2 , negativo), también hasta la rotura hasta, representa la línea tangente común a estos círculos; el radio del círculo intermedio tangente a esta línea y con centro en $\sigma=0$, $\tau=0$, Figura 15, es el valor de la resistencia al corte, $\tau_{\text{lím,corte}}$. En las figuras se indican los valores $\tau_{\text{lím,tracción}}$ y $\tau_{\text{lím,compresión}}$.

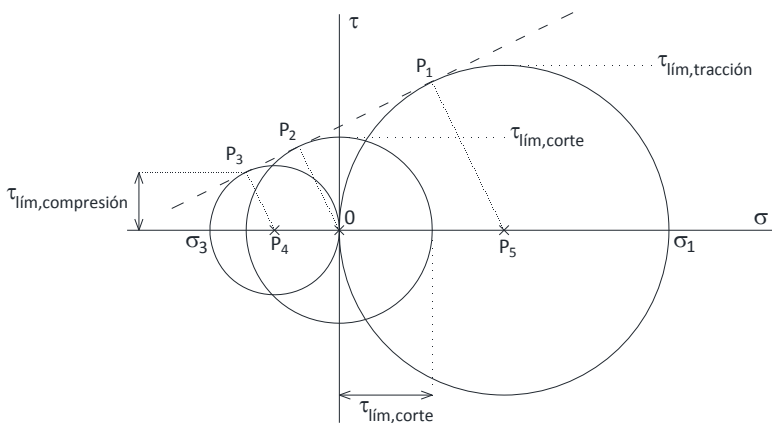


Figura 15. Círculos de Mohr de compresión, tracción y corte para el hierro fundido

Es fácil demostrar utilizando la semejanza entre los trapecios $P_1P_3P_4P_1$ y $P_2P_3P_4O$, que la relación entre los valores límite de los anteriores esfuerzos viene dada por $\tau_{\text{lím,corte}}^{-1} = \tau_{\text{lím,tracción}}^{-1} + \tau_{\text{lím,compresión}}^{-1}$, o bien

$$\tau_{\text{lím,corte}} = \frac{\tau_{\text{lím,tracción}} \tau_{\text{lím,compresión}}}{\tau_{\text{lím,tracción}} + \tau_{\text{lím,compresión}}}$$

una tarea que dejamos para el alumno.

Problema 4.30 (criterio de fallo de Coulomb)

Conocidas las propiedades cohesión (c) y ángulo de rozamiento (ϕ) de una determinada muestra de suelo, representar la recta $\tau_f = c + \sigma_n \text{tg}(\phi)$, cuyos puntos son tangentes a los potenciales círculos de rotura en cualquier tipo de prueba. Esta línea recibe el nombre de línea de falla o rotura o recta de Coulomb. Representar esta línea en el plano τ - σ y el círculo de rotura o falla definido por los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 . A partir de esta geometría (recta y círculo), deducir una expresión que relacione los parámetros del problema: i) σ_1 , σ_2 y ϕ (par el caso $c=0$) y, ii) σ_1 , σ_2 , c y ϕ (par el caso $c \neq 0$).

Respuesta:

i) La representación gráfica pedida se muestra en la Figura 4.30a para el caso $c=0$. El radio del círculo de rotura vale $r_o = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ mientras que su centro está en el punto $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$.

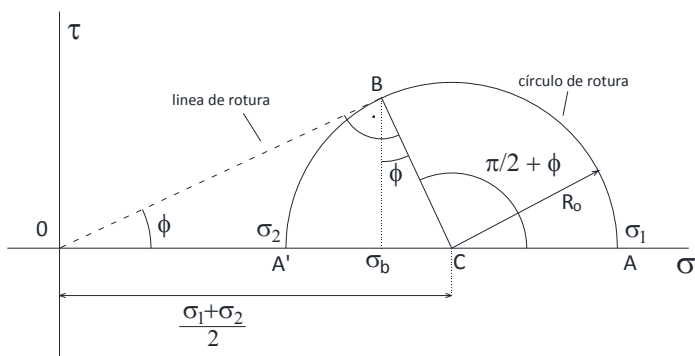


Figura 4.30a. Recta de coulomb y círculo de rotura ($c=0$)

Llamamos 2θ al ángulo correspondiente al arco de círculo AB. La relación entre θ y el ángulo de corte ϕ es

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$$

De la figura anterior, y teniendo en cuenta (del triángulo OBC) que $\text{sen}(\phi) = \frac{r_o}{OC}$, podemos escribir

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{OC+r_o}{OC-r_o} = \frac{1+\frac{r_o}{OC}}{1-\frac{r_o}{OC}} = \frac{1+\text{sen}(\phi)}{1-\text{sen}(\phi)}$$

Una expresión que, usando las relaciones trigonométricas

$$1 + \text{sen}(\phi) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

$$1 - \text{sen}(\phi) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = 2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

se puede escribir en la forma

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

donde el término $\text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ denotado con el símbolo N_ϕ juega un papel muy importante en muchos problemas de mecánica de suelos.

ii) Para el caso $c \neq 0$, la línea de falla y el círculo de rotura se representan en la Figura 4.30b.

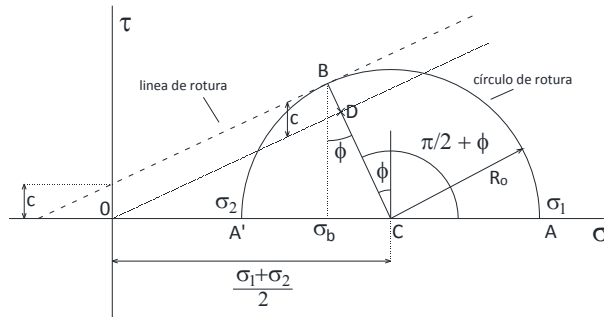


Figura 4.30b. Recta de coulomb y círculo de rotura ($c \neq 0$)

El radio y el centro del círculo tienen el mismo valor que en caso anterior. Trazando una paralela a la línea de falla que pase por el origen tenemos

$$CB = r_o = CD + DB = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{sen}(\beta) + c \text{sen}(\beta)$$

con lo que,

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{sen}(\beta) + c \text{sen}(\beta)$$

de donde

$$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{1 + \text{sen}(\phi)}{1 - \text{sen}(\phi)} + 2c \frac{\cos(\phi)}{1 - \text{sen}(\phi)}$$

En términos del factor $N_\phi = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$, es fácil llegar a

$$\sigma_1 = \sigma_2 \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + 2c \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sigma_2 N_\phi + 2c \sqrt{N_\phi}$$

Problema 4.31

Una muestra de suelo arcilloso de cohesión $c=20$ kPa y ángulo de rozamiento $\phi=26^\circ$ se somete a rotura en un triaxial mediante una prueba que, partiendo de las tensiones $\sigma_{a,\text{ini}} = \sigma_{r,\text{ini}} = 80$ kPa, se lleva al corte manteniendo el esfuerzo axial (σ_a) y aumentando el radial (σ_r). En estas condiciones:

- i) Dibujar la recta de Coulomb, los sucesivos círculos de la prueba y el círculo de Mohr de rotura,
- ii) ¿Para qué valor del esfuerzo radial tiene lugar el corte?, ¿cuánto vale la tensión máxima de corte en la pieza y en qué plano tiene lugar?, calcular el factor N_ϕ ,
- iii) Responda a las cuestiones anteriores para un suelo de parámetros $c=0, \phi=26^\circ$.

Respuesta:

i) La ecuación de la recta de Coulomb, $\tau_f = c + \sigma_n \text{tg}(\phi)$, es (Figura 4.31a)

$$\tau_f = 20 + 0.488 \sigma_n$$

Los sucesivos círculos crecientes de la prueba tienen un punto común en $\sigma_a = 80$ kPa. La rotura tiene lugar en el círculo límite que intersecta la recta de Coulomb.

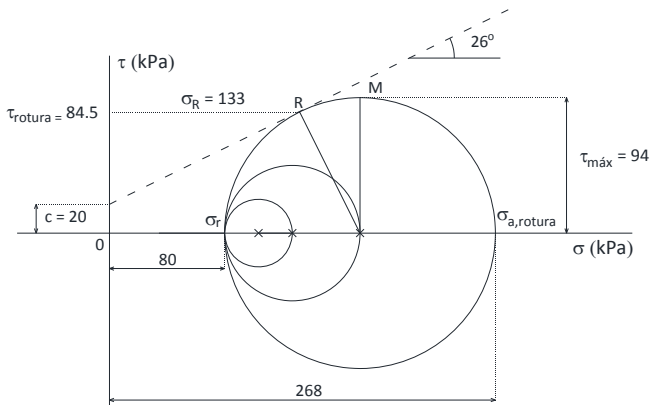


Figura 4.31a. Recta de Coulomb, círculos sucesivos de la prueba y círculo de rotura

ii) De la expresión que liga los parámetros del problema se obtiene el esfuerzo axial en el corte

$$\sigma_{a,\text{corte}} = \frac{2c \cos\phi}{1 - \text{sen}\phi} + \sigma_r \frac{1 + \text{sen}\phi}{1 - \text{sen}\phi} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \cos(26)}{1 - \text{sen}(26)} + 80 \frac{1 + \text{sen}(26)}{1 - \text{sen}(26)} = 268 \text{ kPa}$$

El radio del círculo de rotura es 94. El fallo tiene lugar en el plano resultado de girar $45+26=71^\circ$ el plano horizontal, en sentido contrario a las agujas del reloj; las tensiones en el plano de corte (punto R de la figura) son

$$\sigma_R = 174 - 94\sin(26) = 133 \text{ y } \tau_R = 94\cos(26) = 84.5 \text{ kPa.}$$

La tensión de corte máxima (positiva) tiene lugar en el punto M del círculo y se da en un plano resultado de girar 45° el plano horizontal, en sentido contrario a las agujas del reloj. Su valor es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_{\text{a,corte}} - \sigma_r}{2} = 94 \text{ kPa}$$

El valor de N_ϕ es:

$$N_\phi = \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \text{tg}^2(64) = 4.20$$

iii) Para el suelo con $c=0$ y $\phi=26^\circ$, tenemos (Figura 4.31b)

$$\sigma_{\text{a,corte}} = \sigma_r \frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi} = +80 \frac{1+\sin(26)}{1-\sin(26)} = 205 \text{ kPa}$$

El radio del círculo de rotura es 67.5. El fallo tiene lugar en el mismo plano que el caso ii); por otra parte, las tensiones en el mismo son (punto R de la Figura) son

$$\sigma_R = 140.7 - 67.5\sin(26) = 111 \text{ y } \tau_R = 67.5\cos(26) = 60.7 \text{ kPa.}$$

Finalmente $\tau_{\text{máx}} = 67.5 \text{ kPa}$

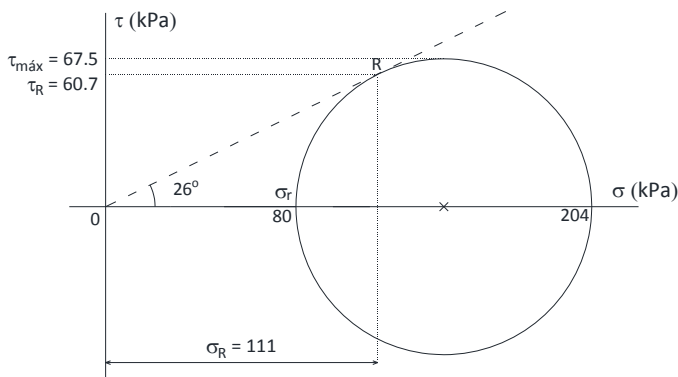


Figura 4.31b. Recta de Coulomb y círculo de rotura para $c=0$ y $\phi=26^\circ$

4.5. Problemas 3-D. Círculo de Mohr

Ya sabemos que los esfuerzos en tres dimensiones en un punto dado de una muestra o pieza de material vienen representados (en el caso más general) por un tensor de esfuerzos de segundo orden, que convenientemente ordenado de acuerdo la nomenclatura más adoptada de ejes de referencia en ingeniería del terreno, tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_z & \tau_{zy} & \tau_{zx} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yx} \\ \tau_{xz} & \tau_{xy} & \sigma_x \end{pmatrix}$$

Estos esfuerzos actúan sobre las caras del elemento cúbico mostrado en la Figura 16. Se trata de un tensor simétrico por lo que sólo seis de sus componentes son independientes:

$$\sigma_z, \quad \sigma_y, \quad \sigma_x, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

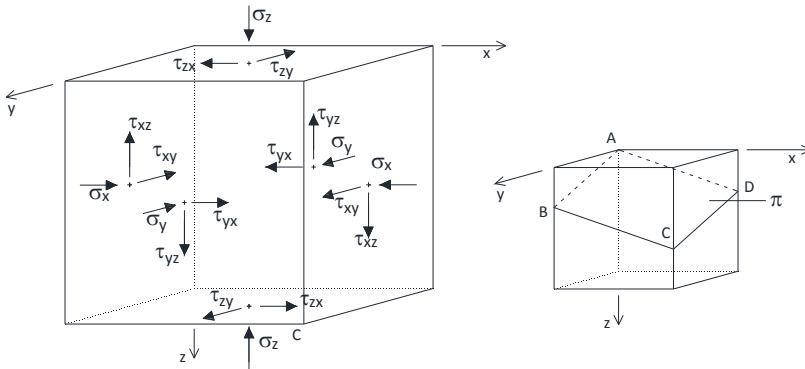


Figura 16. Elemento cúbico bajo un sistema generalizado de esfuerzos 3-D y plano π

La aplicación de las condiciones de equilibrio (de fuerzas y momentos) a cualquiera de las partes del elemento cúbico separadas por un plano de orientación arbitraria como el plano π de la figura 16, permite determinar las componentes normal y de corte del esfuerzo que aplica a dicho plano. Este engorroso cálculo lo omitimos y, en su lugar, aportaremos las soluciones para dos escenarios. En el primero, el elemento cúbico está sometido a tensiones normales de compresión en sus caras (son pues tensiones principales y sus caras planos principales de esfuerzos), Figura 17; el segundo incluye además tensiones tangenciales en cuatro de sus seis caras (sólo una de las tensiones normales es principal y su cara asociada plano principal), Figura 18.

Los tres círculos de Mohr para estos escenarios se muestran en las mismas figuras. Incluso para estos casos más sencillos, el cálculo de los esfuerzos en cualquier plano es engorroso y lo omitimos. Para ambas figuras los puntos de las tres circunferencias representan los esfuerzos en planos

perpendiculares a cualquiera de las caras del cubo; en planos que no cumplan esta condición los esfuerzos están representados por puntos interiores a los círculos (zona sombreada).

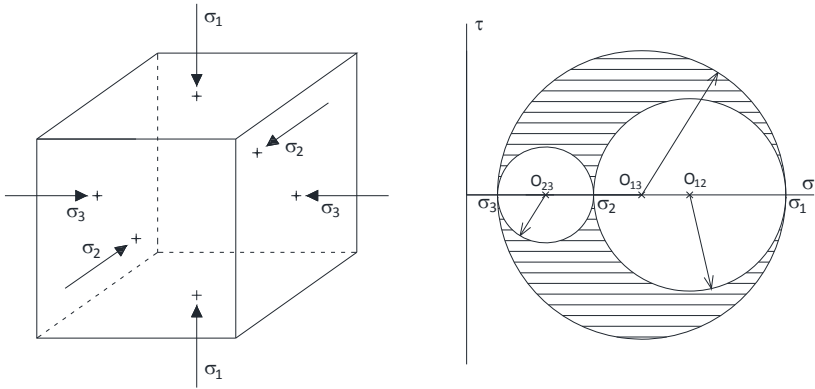


Figura 17. Elemento cúbico bajo esfuerzos normales (principales) de compresión (izquierda). Círculos de Mohr (derecha)

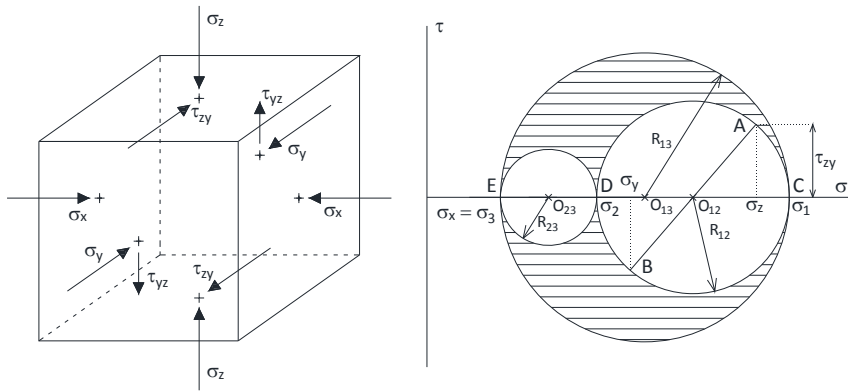


Figura 18. Elemento cúbico bajo esfuerzos normales (compresión) y de corte (izquierda). Círculos de Mohr (derecha)

La secuencia para dibujar el círculo del primer escenario es inmediata ya que se conocen las tres tensiones principales cuyas diferencias (dos dos) determinan el diámetro de los círculos. En cuanto al segundo escenario, se representan en primer lugar los puntos A (σ_z, τ_{zy}) y B (σ_z, τ_{zy}) y se traza la circunferencia cuyo centro (punto O_{12}) está en $\frac{\sigma_z + \sigma_z}{2}$ y cuyo radio es $r_{12} = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zy}^2}$; los puntos C y D de este círculo definen las tensiones principales σ_1 y σ_2 . El tercer esfuerzo principal es conocido, $\sigma_x = \sigma_3$, por lo que los otros dos círculos de centros O_{23} y O_{13} , y radios $r_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ y $r_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, respectivamente, pueden ser incorporados a la figura. La terminología σ_1 para el esfuerzo principal

mayor, σ_2 para el intermedio y σ_3 para el esfuerzo principal menor es la generalmente adoptada en ingeniería del terreno.

Problema 4.32 (círculo de Mohr 3-D)

Sobre las caras de un elemento cúbico de roca débil y lado l_0 actúan tensiones normales (principales) de valor 0.4, 1.2 y 1.6 MPa sin romperse, Figura 14.32a. Dibujar los círculos de Mohr y calcular:

- i) el esfuerzo de corte máximo y el plano sobre el que actúa dicho esfuerzo,
- ii) el esfuerzo de corte máximo, ¿sobre qué plano actúa este esfuerzo?, ¿sobre qué plano actúa el esfuerzo de corte de 0.3 Mpa correspondiente a puntos de la circunferencia mayor?
- iii) encontrar los planos sobre los que actúan los esfuerzos asociados a los puntos de máxima tensión de corte de los círculos de Mohr de menor radio

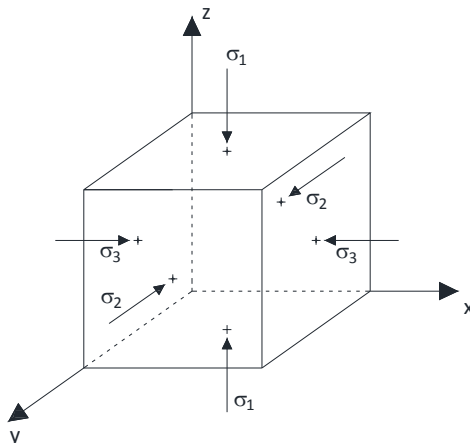


Figura 4.32a. Elemento cúbico bajo esfuerzos principales de compresión

Respuesta:

i) De acuerdo con la terminología al uso,

$$\sigma_1 = 1.6, \sigma_2 = 1.2, \sigma_3 = 0.4$$

Los centros y radios de los círculos, representados en la Figura 4.32b, son

$$O_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad O_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad O_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

$$r_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 0.2, \quad r_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0.6, \quad r_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = 0.4$$

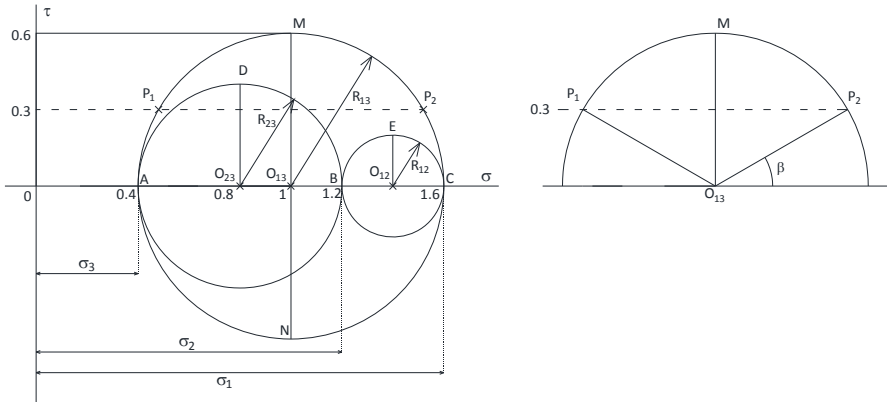


Figura 4.32b. Círculos de Mohr del elemento de la Figura 1.51a

ii) El esfuerzo de corte máximo positivo se da en el punto M del círculo (en N se da el mismo esfuerzo pero negativo). Su valor es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0.6 \text{ MPa}$$

Para determinar la orientación θ , mejor, el plano ($\pi_{\tau_{\text{máx,positiva}}}$) del elemento sobre el que actúa este esfuerzo, observamos que se encuentra en el círculo definido por las tensiones σ_1 y σ_3 por lo que hay que girar la cara horizontal del cubo (sobre la que actúa σ_1), superior o inferior, un ángulo de 45° en sentido contrario al giro de las agujas del reloj para llegar al punto M en el que tiene lugar el esfuerzo máximo; un giro positivo que implica el avance del sacacorchos en el sentido positivo del eje OY ($\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$). El giro de 45° en sentido contrario (negativo) determina el punto N sobre el círculo $\sigma_1 - \sigma_3$, punto asociado al plano ($\pi_{\tau_{\text{máx,negativa}}}$) sobre el que actúa la tensión de corte de -0.6 MPa . La Figura 4.32c muestra estos planos y los sentidos de las tensiones de corte de acuerdo con la convención de signos. Las tensiones normales e iguales en estos planos de corte son de compresión y de valor $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = 1 \text{ Mpa}$.

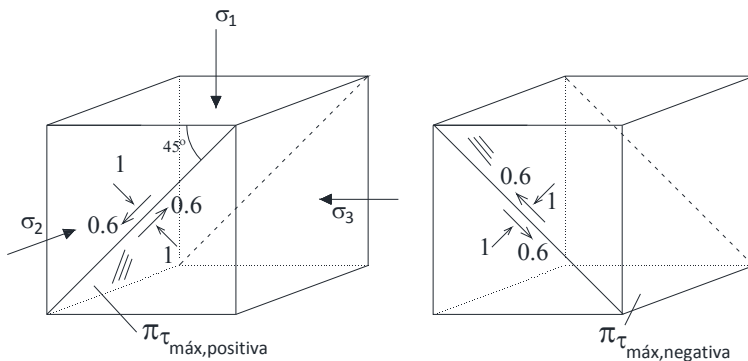


Figura 4.32c. Planos de máxima tensión de corte (planos de rotura) y sentidos de los esfuerzos

Los puntos de tensión de corte 0.3 MPa de la circunferencia mayor son P_1 y P_2 , Figura 4.32b. De los datos del problema,

$$\text{sen}(\beta) = \frac{0.3}{0.6} = 0.5, \quad \beta = 30^\circ$$

Así, el plano sobre el que actúan los esfuerzos de P_2 se obtiene girando el plano horizontal del cubo un ángulo $\alpha = \frac{90-30}{2} = 30^\circ$ en el sentido (negativo) de las agujas del reloj, mientras que el plano sobre el que actúan los esfuerzos de P_1 se obtiene girando el mismo ángulo en sentido (positivo) contrario a las agujas del reloj, Figura 4.32d.

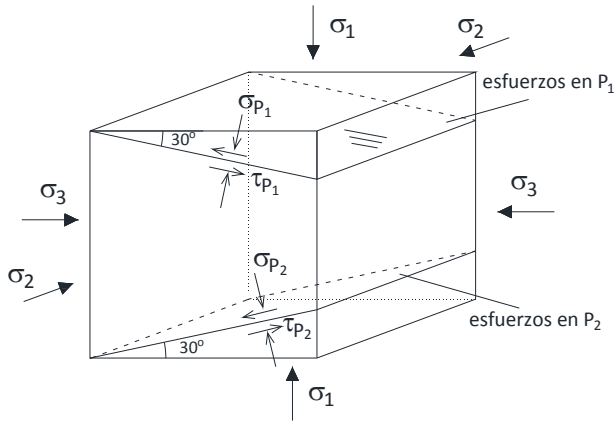


Figura 4.32d. Planos sobre los que actúan los esfuerzos definidos en los puntos P_1 y P_2 , Figura 4.32b

iii) Estos puntos están señalados como D y E en la Figura 4.32b. Representan los siguientes valores (positivos) de esfuerzo:

Punto D: $\sigma_D = 0.8 \text{ Mpa}, \quad \tau_D = 0.4 \text{ Mpa}$

Punto E: $\sigma_E = 1.4 \text{ Mpa}, \quad \tau_E = 0.2 \text{ Mpa}$

El plano sobre el que actúan los esfuerzos σ_D y τ_D se obtiene girando el plano frontal de la muestra (sobre el que actúa σ_2 , punto B del círculo intermedio) un ángulo de 45° , efectuando el giro en sentido positivo, de forma que el sacacorchos avance en el sentido positivo del eje OZ. De igual forma El plano sobre el que actúan los esfuerzos σ_E y τ_E se obtiene girando el plano horizontal de la muestra (sobre el que actúa σ_1), punto C, un ángulo de 45° , efectuando el giro en el sentido positivo, de forma que el sacacorchos avance en el sentido positivo del eje OX. La Figura 4.32e muestra estos planos.

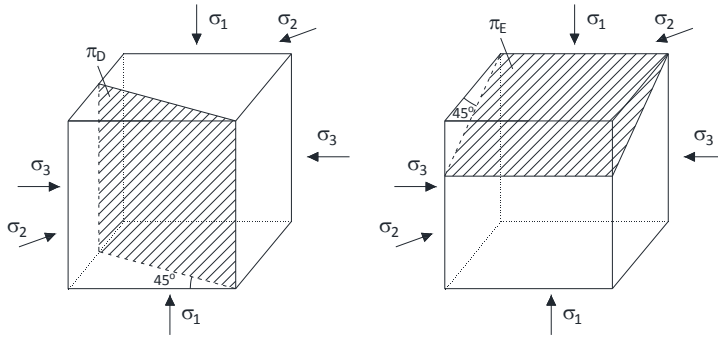


Figura 4.32e. Planos sobre los que actúan los esfuerzos definidos en los puntos D y E, Figura 4.32b

Problema 4.33 (¿círculo de Mohr 3-D?)

Una muestra de suelo en forma de cubo se somete a una prueba 3-D con $\sigma_3=500$ kPa, $\sigma_2=750$ kPa y σ_1 creciente partiendo de un valor inicial $\sigma_1=750$ kPa. La tensión máxima soportable por la muestra es $\tau_{lim} = 1.2$ MPa con independencia del esfuerzo normal en el plano en el que se da la rotura (no es el criterio de Coulomb), Figura 4.33a. Dibujar los círculos de la prueba y determinar:

- i) el valor de σ_1 en el fallo,
- ii) el plano de rotura y los esfuerzos en el mismo,
- iii) ¿qué tensiones existen en un plano $\pi_{o,1}$ y $\pi_{o,2}$ normales a XOZ, y cuyos vectores de dirección forman ángulos de 40° con σ_3 ?

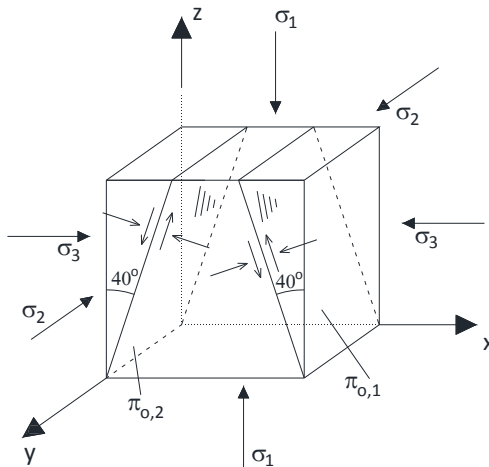


Figura 4.33a. Elemento cúbico de suelo sometido a rotura y planos $\pi_{o,1}$ y $\pi_{o,2}$

Respuesta:

i) Los círculos de Mohr evolucionan como se indica en la Figura 4.33b (en sentido descendente).

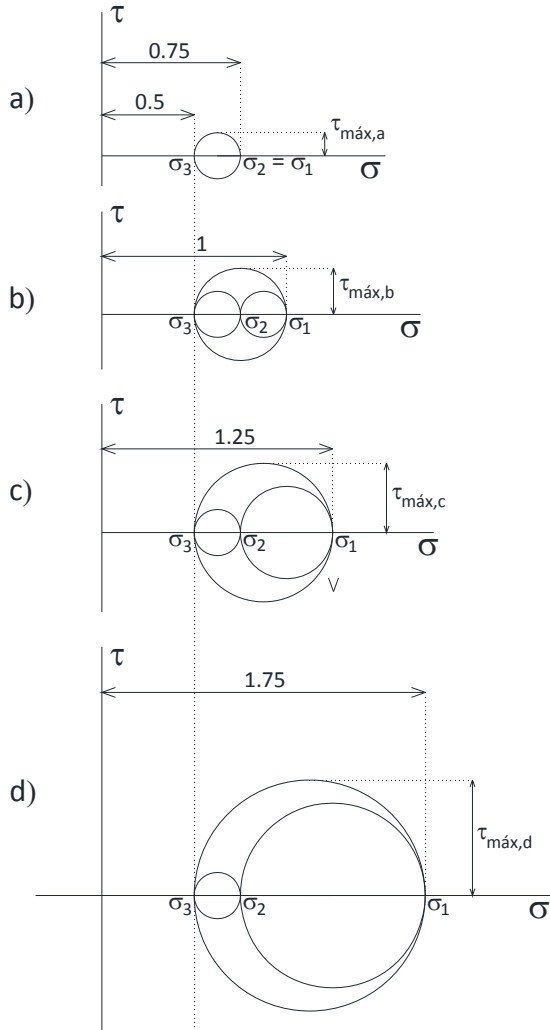


Figura 4.33b. Evolución de los círculos de Mohr hasta la rotura de la muestra

El círculo formado por las tensiones σ_2 y σ_3 no cambia de radio mientras los otros dos crecen. Dado que la rotura ocurre para un esfuerzo de corte de 1200 kPa, independiente de la tensión normal, éste debe ser el radio del círculo máximo (asociado a las tensiones σ_1 y σ_3). Así, la rotura ocurre para

$$\tau_{\text{lím}} = \frac{\sigma_{1,\text{rotura}} - \sigma_3}{2} = 1.2 \quad \rightarrow \quad \sigma_{1,\text{rotura}} = 2.9 \text{ MPa}$$

Los círculos en la rotura están definidos por los centros y radios siguientes, Figura 4.33c:

Círculo menor:	Centro en (0.625,0),	radio=0.125
Círculo intermedio:	Centro en (1.825,0),	radio=1.075
Círculo mayor:	Centro en (1.7),	radio=1.2

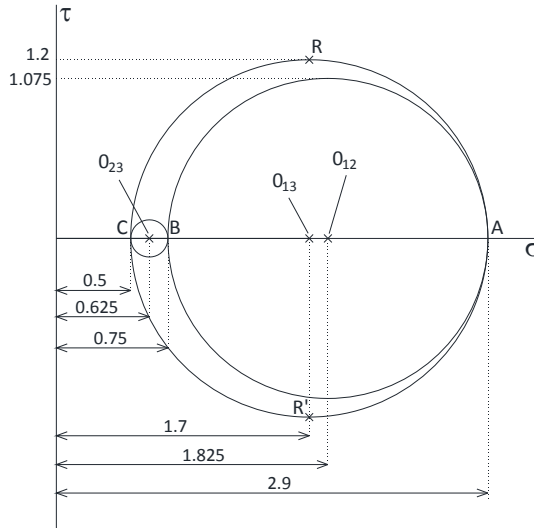


Figura 4.33c. Círculos de Mohr de rotura

ii) El punto R de la figura anterior identifica la rotura (también el punto opuesto en el círculo, R'). Las tensiones en el mismo son $\sigma_R = 1.7$ (de compresión) y $\tau_R = 1.2$ (positiva). El plano de rotura se obtiene yendo de A a R, lo que equivale a girar el plano horizontal (donde se aplica σ_1) un ángulo de 45° en sentido contrario a las agujas del reloj (avance del sacacorchos en la dirección OY). Este plano y sus tensiones se muestran en la Figura 4.33d.

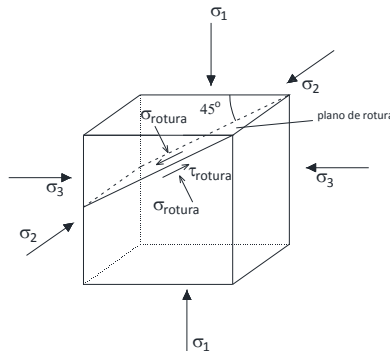


Figura 4.33d. Plano de rotura y sentido de los esfuerzos en el mismo

iii) El plano $\pi_{o,1}$ es el resultado de girar el plano horizontal (cara superior) un ángulo de 130° en sentido contrario a las agujas del reloj, lo que significa ir del punto A al D (260°) en el círculo de Mohr. Advierta que esto equivale a girar 80° la cara vertical derecha también en sentido contrario a las agujas del reloj (recorrido C a D), Figura 4.33e. La tensión de corte es negativa y su sentido es el indicado en la Figura 4.33a. Con idéntico razonamiento, el plano $\pi_{o,2}$ es el resultado de girar el plano horizontal (cara superior) un ángulo de 50° en sentido contrario a las agujas del reloj, lo que significa ir del punto A al E (100°). Advierta, de nuevo, que esto equivale a girar 80° la cara vertical derecha en sentido de las agujas del reloj (recorrido C a E), Figura 4.33e. La tensión de corte es positiva y su sentido es el indicado en la Figura 4.33a. Los valores de los esfuerzos en estos planos son:

$$\begin{aligned} \text{Plano } \pi_{o,1}: \quad \tau_{\pi_{o,1}} &= -1.2 \cos(10) = -1.18 \text{ MPa} & \sigma_{\pi_{o,1}} &= 1.7 - 1.2 \sin(10) = 1.49 \text{ MPa} \\ \text{Plano } \pi_{o,2}: \quad \tau_{\pi_{o,2}} &= 1.2 \cos(10) = 1.18 \text{ MPa} & \sigma_{\pi_{o,2}} &= 1.7 - 1.2 \sin(10) = 1.49 \text{ MPa} \end{aligned}$$

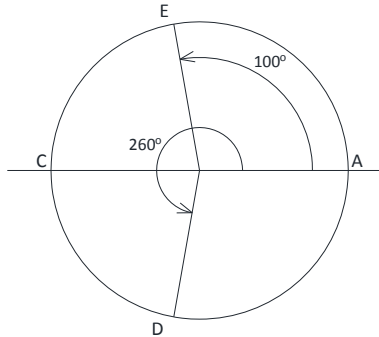


Figura 1.52e. Tensiones en los planos $\pi_{o,1}$ y $\pi_{o,2}$

Problema 4.34 (círculo de Mohr 3-D)

En una muestra de terreno 3-D confinada entre dos placas, Figura 4.34a, la rotura tiene lugar en el plan de esfuerzo de corte máximo cuando se aplican a las caras los siguientes esfuerzos de compresión: $\sigma_z = 0.28$, $\sigma_x = 0.18$ y $\sigma_y = \sigma_2 = 0.15$ Mpa. Al mismo tiempo las caras verticales están sometidas a esfuerzos de corte cuyo sentido se muestra en la figura. La resistencia al corte de la muestra es $\tau_{rotura} = 0.1$ MPa.

- i) Discutir el enunciado e indicar el camino para la construcción del círculo de Mohr de rotura,
- ii) Determinar los círculos de Mohr en la rotura, el plano de rotura y las tensiones normales en él indicando sus signos y sentidos,
- iii) Calcular los esfuerzos y planos principales de la muestra,
- iii) ¿Qué influencia tiene la tensión σ_2 en el corte?

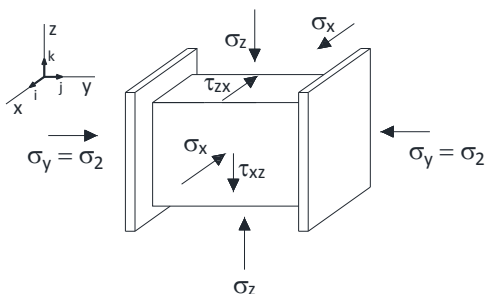


Figura 4.34a. Muestra de suelo sometida a corte con el sentido de los esfuerzos aplicados

Respuesta:

i) Los planos laterales son principales ya que en ellos no existen esfuerzos de corte; así, $\sigma_y = \sigma_2$ es el esfuerzo principal intermedio. Los esfuerzos σ_y y σ_x permiten la determinación del centro del círculo mayor cuyo radio es la resistencia al corte. Las tensiones principales se determinan a partir del centro y radio de este círculo mayor. La orientación de cualquier plano y los esfuerzos normales y tangenciales que soporta se deducen de la representación de Mohr usando los convenios de signos.

ii) Los datos del círculo mayor, Figura 4.34b, que contiene la información sobre el punto y plano de ruptura, son:

Círculo mayor: Centro en $\left(\frac{0.28+0.18}{2}, 0\right) = (0.23, 0)$ radio = $\tau_{rotura} = 0.1$

De aquí, se deducen las tensiones principales

$$\sigma_1 = 0.23 + \tau_{rotura} = 0.23 + 0.1 = 0.33 \quad \sigma_2 = 0.15, \quad \sigma_3 = 0.23 - \tau_{rotura} = 0.23 - 0.1 = 0.13 \text{ MPa}$$

que dan lugar a los otros dos círculos, Figura 4.34b,

Círculo intermedio: Centro en $\left(\frac{0.15+0.23}{2}, 0\right) = (0.19, 0)$ radio = $\frac{0.23-0.15}{2} = 0.04$

Círculo menor: Centro en $\left(\frac{0.15+0.13}{2}, 0\right) = (0.14, 0)$ radio = $\frac{0.15-0.13}{2} = 0.01$

El punto de rotura es R con tensiones $\tau_{rotura} = 0.1$ y $\sigma_{rotura} = 0.23$ MPa, mientras que los puntos correspondientes a los planos no confinados por las placas (escenario de la Figura 4.34a) son A' y A. Advierta que el cortante τ_{zx} , con arreglo al criterio de signos, es negativo por lo que este plano está asociado al punto A'. De la figura, $\cos(\beta) = \frac{0.28-0.23}{0.1} = 0.5$, $\beta = 60^\circ$.

Por el contrario el cortante τ_{xz} es positivo y está asociado al punto A. Con esta ubicación es inmediato determinar el plano de rotura, basta girar el plano horizontal un ángulo $\frac{\beta + \pi}{2} = 75^\circ$ en sentido contrario

a las agujas del reloj o sentido de avance del sacacorchos en la dirección positiva del eje OY (recorrido A' a R en el círculo). El plano de rotura, en relación con el esquema de la muestra de la Figura 4.34a, así como los sentidos de los esfuerzos se muestran en la Figura 4.34c

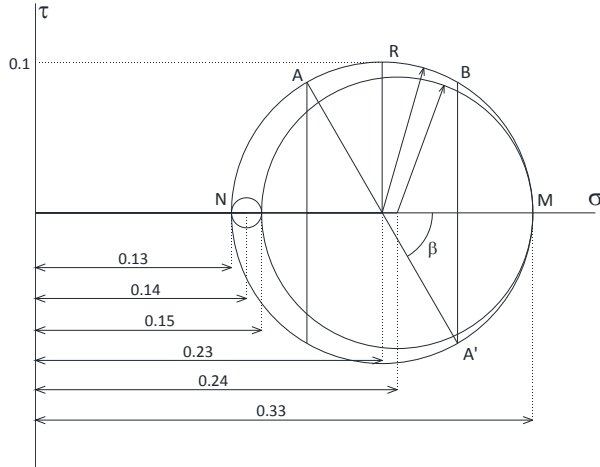


Figura 4.34b. Círculos de Mohr en la rotura

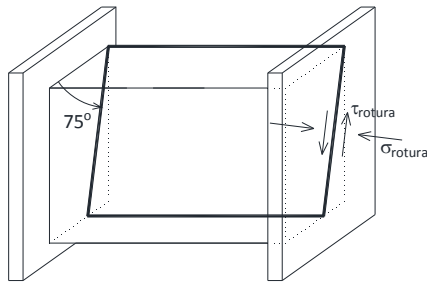


Figura 4.33c. Plano de rotura y esfuerzos en la rotura

iii) El plano principal correspondiente el esfuerzo mayor resulta de girar el plano horizontal un ángulo $\frac{\beta}{2} = 30^\circ$ en sentido contrario a las agujas del reloj o sentido de avance del sacacorchos en la dirección positiva del eje OY (recorrido de A' a M en el círculo). El correspondiente al esfuerzo intermedio viene determinado por un giro de $\frac{\beta+\pi}{2} = 120^\circ$ (recorrido de A' a N en el círculo).

iii) El esfuerzo principal intermedio σ_2 no tiene influencia en la rotura pues no modifica el tamaño del círculo mayor. Su influencia se limita a modificar las tensiones normales y de corte en planos no perpendiculares al eje OY. Profundice el estudiante sobre esta afirmación.

4.6. Esfuerzos conjugados

Spongamos un suelo, 2-D, no cohesivo ($c=0$) caracterizado por los esfuerzos representados mediante el círculo de Mohr de la Figura 19. Tomemos un elemento de suelo (un cuadrado) sobre cuyas caras actúan los esfuerzos asociados a los puntos A y A' del círculo. En la misma figura se representa este elemento con dos orientaciones espaciales diferentes (distinto sistema de referencia); una en la que las caras sobre las que actúan los esfuerzos del punto A (planos π_A) se dibujan horizontalmente y otra en la que estas mismas caras están inclinadas un cierto ángulo ψ respecto a la horizontal (resultado de girar π_A en sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo ψ). En ambas representaciones del elemento se muestran los esfuerzos en las caras, con sentidos y signos coherentes con el convenio en mecánica de suelos.

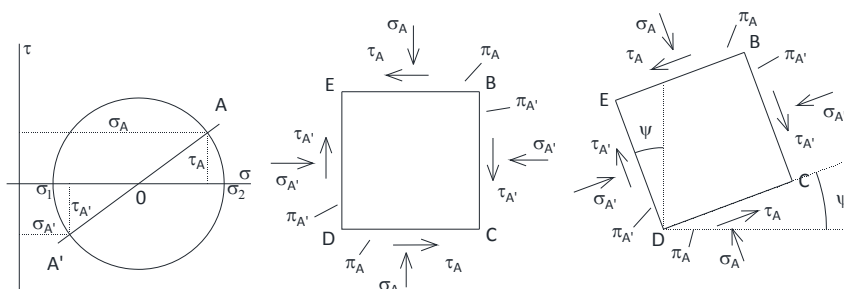


Figura 19. Círculo de Mohr y esfuerzos en un elemento de suelo en dos sistemas de referencia

En la Figura 20, para las dos orientaciones de la figura anterior, se representan los esfuerzos normales y tangenciales sobre el plano π_A , σ_A y τ_A , así como el esfuerzo total \bar{s}_A , suma vectorial de los anteriores ($\bar{s}_A = \bar{\sigma}_A + \bar{\tau}_A$). Los esfuerzos \bar{s}_A y $\bar{\sigma}_A$ sobre π_A forman un ángulo ϕ representado también sobre el círculo de Mohr, Figura 18.

Se llama plano conjugado de π_A al plano π_{A_c} que contiene el vector esfuerzo total \bar{s}_A (recuérdese que estamos en 2-D). El plano conjugado forma un ángulo $\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ con π_A , con independencia de la orientación inicial asignada al plano π_A , Figura 20.

Para determinar el punto de círculo (A_c) representativo de las tensiones en el plano conjugado π_{A_c} , basta desplazar el punto A sobre el círculo en sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo $2\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$. Los esfuerzos en el plano conjugado son $\bar{\sigma}_{A_c}$ y $\bar{\tau}_{A_c}$ y el ángulo entre $\bar{s}_{A_c} = \bar{\sigma}_{A_c} + \bar{\tau}_{A_c}$ y $\bar{\sigma}_{A_c}$ es ϕ' ($=\phi$ como se demuestra más tarde), Figura 21. Una vez determinados los planos conjugados, los esfuerzos sobre elementos de suelo limitados por planos conjugados (en dos sistemas de referencia) se indican en a Figura 20.

Los planos conjugados tiene la siguiente propiedad: 'el ángulo que forma el esfuerzo total en un plano con la normal al mismo es el mismo ángulo que forma el esfuerzo total y la normal en el plano

conjugado'. Así, en la Figura 21, el ángulo ϕ del triángulo OAM (que forma el esfuerzo total en el plano π_A y la normal a este plano) es igual al ángulo ϕ' del triángulo OA_cN (que forma el esfuerzo total en el plano π_{A_c} y la normal a este plano).

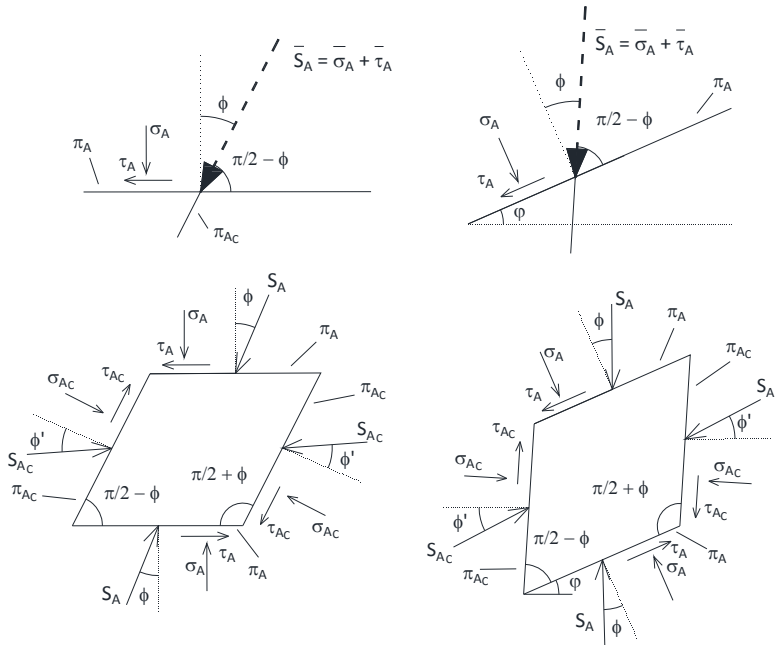


Figura 20. Esfuerzos sobre π_A y plano conjugado $\pi_{A'}$

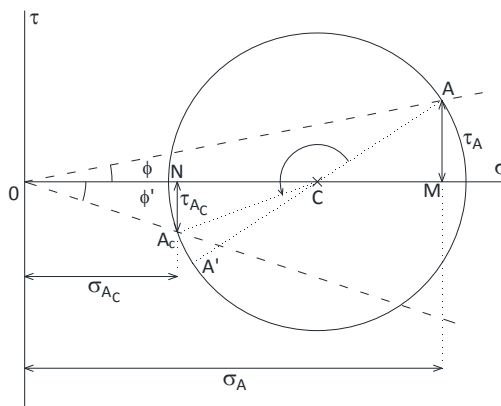


Figura 21. Determinación de los esfuerzos en el plano conjugado $\pi_{A'}$

Problema 4.35 (esfuerzos conjugados)

Utilizar el polo para determinar el plano conjugado de uno dado.

Respuesta:

El elemento de la Figura 4.35, limitado por planos conjugados, muestra los esfuerzos totales en sus caras y el (mismo) ángulo entre éstos y las normales; advierta que el sentido de los esfuerzos totales (o de corte en la cara MN) es coherente con los valores de la tensión de corte en el punto A del círculo. En la otra cara deben producirse esfuerzos de corte de diferente signo.

Para obtener el conjugado del punto A, fijamos el polo a partir de este punto con la línea $AP_{P,A}$ trazada paralelamente el plano MN (π_B). Después basta trazar una línea a partir de $P_{P,A}$ que forme un ángulo $\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$, línea paralela a la cara MQ (plano π_a) cuyo corte con el círculo determina el punto conjugado de A, A_c . Advierta que el ángulo $\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$ es el existente entre la línea MN y la MQ. Advierta también que denominar el polo con el símbolo $P_{P,A}$ parece redundante pues el polo no está asociado a un punto concreto sino a un escenario de orientación del elemento en relación con los esfuerzos en A; cualquier otro punto dentro de este escenario daría el mismo polo. Sin embargo, hemos mantenido esta nomenclatura para significar que el polo se determina a partir del punto concreto A.

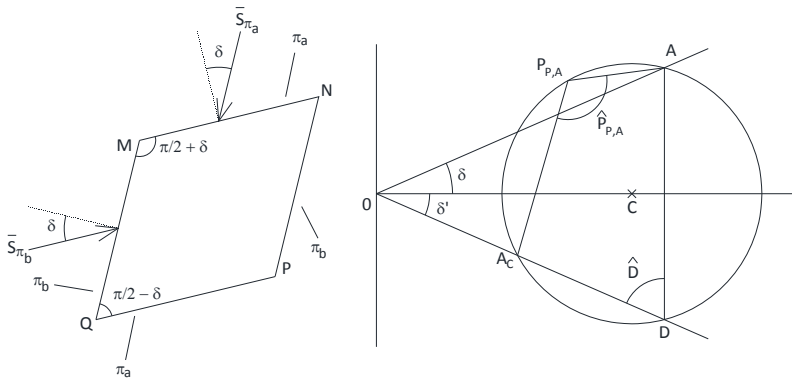


Figura 4.35. Uso del polo para determinar los planos conjugados

Problema 4.36 (esfuerzos conjugados)

En suelos no cohesivos:

- i) demostrar la propiedad enunciada anteriormente en relación con los ángulos entre esfuerzos en planos conjugados,
- ii) encontrar una expresión que relacione los esfuerzos totales en planos conjugados con el ángulo que forman éstos con la normal a sus respectivos planos y con el ángulo de fricción.

Respuesta:

i) La Figura 4.36a (izquierda) vuelve a mostrar el círculo de Mohr para determinar el plano conjugado de π_A (o punto conjugado de A), π_{A_c} . Como hemos visto en la teoría, basta girar A sobre el círculo un ángulo $2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ hasta A_c , punto que define las tensiones en π_{A_c} . Para que δ sea igual a δ' , la recta OA_c debe pasar por B y el ángulo OBM debe ser complementario de δ' (debido a que el triángulo OBM es rectángulo). Pero, en efecto, el ángulo inscrito OBM vale la mitad del arco AA_c . En consecuencia $\delta = \delta'$.

Para el caso en que σ_A sea inferior a la tensión que define el centro del círculo, Figura 4.36 (derecha), la construcción sigue el mismo procedimiento. Advierta que en esta figura A_c es el conjugado de A y B el de B_c ; también es cierto que A es el conjugado de A_c y B el de B_c , ¿puede comprobarlo?.

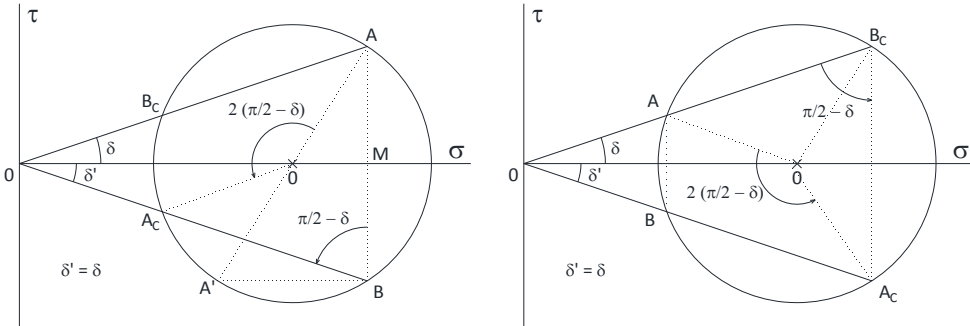


Figura 4.36a. Deducción de los planos conjugados de los puntos A

Una demostración alternativa puede obtenerse a partir de la Figura donde se ha utilizado el polo para obtener los esfuerzos en el plano conjugado. Por un lado, los ángulos inscritos en el círculo \widehat{D} y $\widehat{P}_{P,A}$ abarcan la circunferencia completa (son suplementarios), y como además $\widehat{M} = \widehat{P}_{P,A}$, resulta

$$\widehat{D} + \widehat{P}_{P,A} = \widehat{D} + \widehat{M} = \pi$$

pero como \widehat{M} y \widehat{Q} son también suplementarios

$$\widehat{Q} + \widehat{M} = \pi$$

De este modo, Así,

$$\widehat{Q} = \widehat{D} = \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

con lo que $\widehat{DOC} = \delta$

ii) De la Figura 4.36a, con r_0 el radio del círculo y $\bar{s}_{\pi_A} = \overline{OA}$ y $\bar{s}_{\pi_b} = \overline{OA_c}$, (haciendo uso de expresiones que relacionan lados y ángulos en los triángulos OCA y OCA_c), tenemos

$$\left(\bar{s}_{\pi_A}\right)^2 = r_0^2 - (\overline{OC})^2 + 2\overline{OC}\bar{s}_{\pi_A} \cos(\delta)$$

$$(\bar{s}_{\pi_B})^2 = r_o^2 - (\overline{OC})^2 + 2\overline{OC}\bar{s}_{\pi_B} \cos(\delta)$$

$$r_o = \overline{OC} \operatorname{sen}(\delta)$$

con lo que la relación buscada es

$$\frac{\bar{s}_{\pi_A}}{\bar{s}_{\pi_B}} = \frac{\cos(\delta) - \sqrt{\cos^2(\delta) - \cos^2(\delta')}}{\cos(\delta) + \sqrt{\cos^2(\delta) - \cos^2(\delta')}}$$

Problema 4.37

Dibuje una recta de falla de un suelo de cohesión nula y el círculo de rotura en la que los esfuerzos principales son de compresión. Elija un punto P_P como polo y demuestre los planos de falla son planos conjugados (una hipótesis no cierta para suelos cohesivos).

Respuesta:

La figura 4.37a muestra el círculo de Mohr, líneas de rotura, polo, y los puntos A y A' que representan los esfuerzos en los planos de rotura π_A y $\pi_{A'}$, respectivamente.

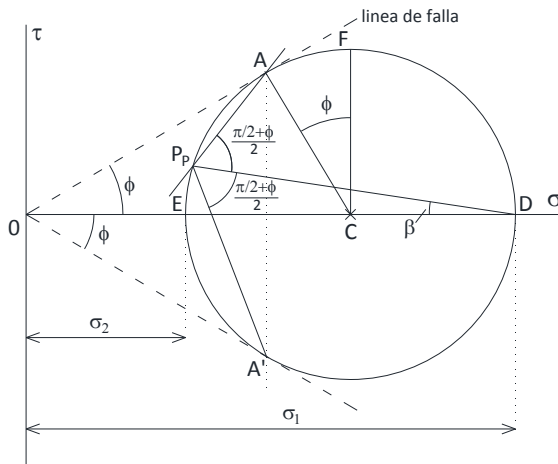


Figura 4.37a. Planos conjugados de rotura

De acuerdo con las propiedades del polo, PD y PE representan la orientación de los planos en los que actúan los esfuerzos principales mayor y menor mientras que PA y PA' son las orientaciones de los planos de falla. Los puntos A y A' sobre las líneas de falla informan sobre los esfuerzos críticos en sus respectivos planos de falla. De la geometría de la figura es fácil deducir los ángulos entre planos. La Figura 4.37b representa elementos de la muestra limitados por planos principales (izquierda) y planos de falla, con sus respectivos esfuerzos.

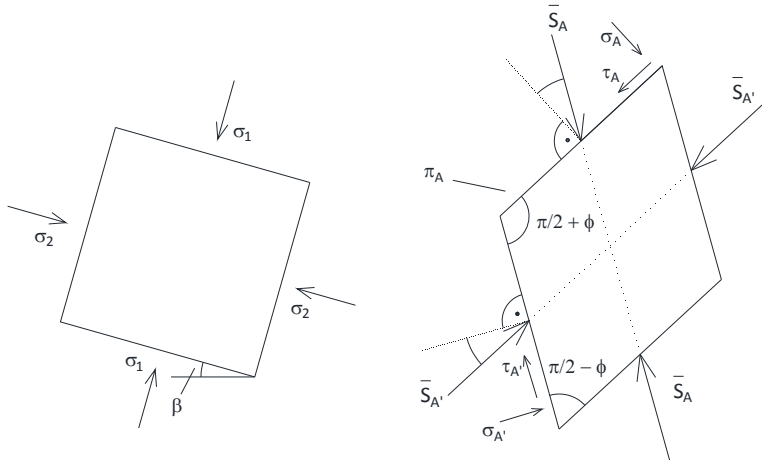


Figura 4.37b. Tensiones en planos principales (izquierda) y planos de rotura (derecha)

Problema 4.38

Una muestra 2-D de suelo cohesivo, con ángulo de rozamiento $\phi=20^\circ$, rompe cuando los esfuerzos aplicados a sus caras son:

$$\sigma_z=0.34 \text{ Mpa}, \sigma_x=-0.06 \text{ Mpa}, \tau_{zx}=-\tau_{xz}=0.15 \text{ Mpa}$$

- i) Dibujar el círculo de Mohr y la línea de rotura,
- ii) Obtener el polo asociado al punto de círculo que define los esfuerzos anteriores,
- iii) Calcular la orientación de los planos principales en relación a los planos anteriores,
- iv) Utilizar el polo para calcular los esfuerzos en planos orientados ángulos $\beta_1=30^\circ$ (a favor de las agujas del reloj) y $\beta_2=30^\circ$ (en contra) respecto a los planos originales,
- v) Determinar la cohesión y los esfuerzos en los planos de corte y la orientación de estos planos.

Respuesta:

i) La Figura 4.38 representa el elemento de suelo donde se aplican los esfuerzos de compresión ($\sigma_z=0.34 \text{ Mpa}$), tracción ($\sigma_x=-0.06 \text{ Mpa}$) y corte ($\tau_{zx}=-\tau_{xz}=0.15 \text{ Mpa}$) del enunciado. Los planos de aplicación de estos esfuerzos se han representado horizontales y verticales en el sistema de referencia de la figura.

El estado tensional del elemento de suelo se representa por los puntos A ($\sigma_z=0.34, \tau_{zx}=0.15$), cuyos esfuerzos actúan sobre el plano horizontal (Figura 4.38a), y A' ($\sigma_x=-0.06, \tau_{xz}=-0.15$), cuyos esfuerzos actúan sobre el plano vertical. Dichos puntos se encuentran sobre el círculo de falla puesto que la muestra rompe bajo esta sollicitación de esfuerzos, Figura 4.38b.

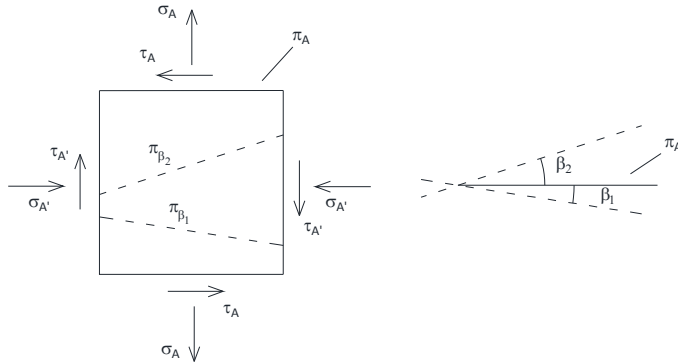


Figura 4.38a. Elemento de suelo y esfuerzos

El centro, radio del círculo y esfuerzos principales vienen dados por

$$C = \left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2}, 0 \right) = (0.14, 0)$$

$$r_o = \sqrt{0.2^2 + 0.15^2} = 0.25$$

$$\sigma_1 = 0.14 + 0.25 = 0.39 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0.14 - 0.25 = -0.09 \text{ MPa}$$

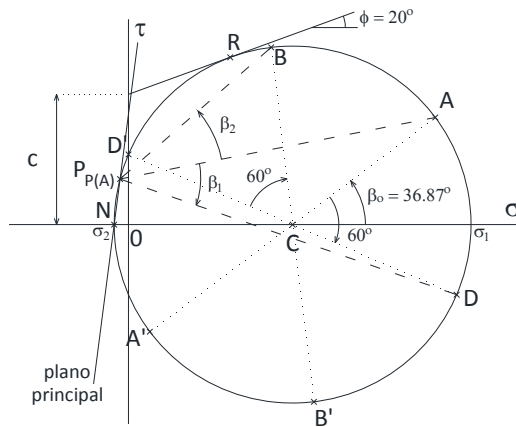


Figura 4.38b. Círculo de Mohr. Polo, y planos y esfuerzos de diferentes orientaciones

El ángulo entre el esfuerzo total y el normal sobre los planos horizontales es

$$\beta_o = \text{arctg} \left(\frac{0.15}{0.2} \right) = 36.87^\circ$$

ii) El polo $P_{P(A)}$, se determina trazando una horizontal desde A. Está definido por las tensiones

$$\sigma_{P_{P(A)}} = -0.06 \text{ y } \tau_{P_{P(A)}} = 0.15 \text{ MPa}$$

iii) Los planos principales son paralelos a las líneas $\overline{MP_{P(A)}}$ y $\overline{NP_{P(A)}}$. Estos planos se obtienen girando el plano horizontal $\frac{\beta_0}{2} = 18.43^\circ$ y $\frac{180-2\beta_0}{2} = 71.56^\circ$ en sentido a favor y en contra, respectivamente de las agujas del reloj, Figura 4.38c.

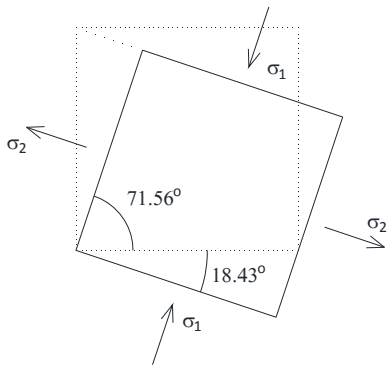


Figura 4.38c. Orientación de los planos principales

iv) Basta trazar desde el polo líneas paralelas a estas direcciones, $\overline{P_{P(A)}D'}$ para la dirección $\beta_1 = -30^\circ$ y $\overline{P_{P(A)}B}$ para $\beta_2 = 60^\circ$ (respecto de la horizontal). Los esfuerzos sobre estos planos son:

Dirección $\overline{P_{P(A)}D'}$: $\sigma_{D'} = 0.25 \cos(60 - \beta_0) = 0.230 \text{ MPa}$,
 $\tau_{D'} = 0.25 \sin(60 - \beta_0) = -0.113 \text{ MPa}$

Dirección $\overline{P_{P(A)}B}$: $\sigma_B = 0.25 \cos(180 - 60 - 2\beta_0) = 0.173 \text{ MPa}$,
 $\tau_B = 0.25 \sin(60 - \beta_0) = 0.181 \text{ MPa}$

v) Para determinar la cohesión basta usar la expresión

$$\sigma_1 = \sigma_3 \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} + 2c \frac{\cos\phi}{1 - \sin\phi}$$

que permite deducir

$$c = 0.015 \text{ MPa}$$

A partir del círculo, los esfuerzos en los planos de corte son:

Punto R: $\sigma_R = OC - 0.25 \sin(20) \text{ MPa}$,
 $\tau_R = 0.25 \cos(20) \text{ MPa}$

4.7. Círculo de Mohr (2-D) de deformaciones. Ángulo de dilatancia

Si conocemos las deformaciones (de tracción o compresión y corte) en un elemento causadas por determinados esfuerzos sobre el mismo, es posible conocer las existentes en cualquier otro plano del elemento, de orientación conocida respecto del primero, mediante el llamado círculo de Mohr de deformaciones cuya construcción y uso sigue pasos idénticos a los explicados para el círculo de esfuerzos. La nomenclatura usada en esta sección es:

- ε_x y ε_z : deformaciones unitarias (directas) en las direcciones x y z, respectivamente,
- ε_{xz} : deformación de corte puro en la dirección z (perpendicular al plano x),
- ε_{zx} : deformación de corte puro en la dirección x (perpendicular al plano z)

En cuanto a los signos de estas deformaciones, el convenio adoptado en ingeniería del terreno es el siguiente:

- deformaciones de compresión positivas,
- deformaciones de tracción negativas,
- deformaciones de corte (desplazamientos angulares de los lados) en sentido contrario a las agujas de reloj, positivas,
- deformaciones de corte en sentido de las agujas de reloj, negativas.

La Figura 22 (izquierda) muestra un elemento antes y después de ser deformado por la aplicación de un conjunto generalizado de esfuerzos representados en la misma figura (derecha). Por simplicidad, el lado del elemento sin deformar (un cuadrado) es la unidad. Sin pérdida de generalidad, se ha fijado el punto A del elemento en el esquema de la izquierda para poder apreciar mejor las deformaciones con referencia al elemento sin deformar (eludiendo los movimientos de sólido rígido del cuerpo). En realidad, con los esfuerzos representados (asumiendo únicamente que $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$) el único punto que no se mueve es el centro del elemento, de ahí la necesidad de superponer los elementos original y deformado con los puntos A y A' en común y poder expresar así la deformación (horizontal y vertical) de los lados mediante las expresiones $1 - \varepsilon_x$ (lado inicialmente horizontal) y $1 - \varepsilon_z$ (lado vertical).

Puede advertir la coherencia entre las deformaciones directas y de corte con los esfuerzos aplicados. Por ejemplo, con independencia de las contracciones del elemento causadas por los esfuerzos de compresión aplicados (σ_x y σ_z , no necesariamente del mismo valor), las componentes diagonales de los esfuerzos de corte tienden a comprimir el elemento en la dirección BD y a estirarlo en la dirección AC, lo que a su vez fuerza a girar los lados AB, BC, CD y DA en relación con sus posiciones originales un mismo ángulo γ_{xz} (positivo) = $-\gamma_{zx}$ (negativo), con el sentido indicado en la figura.

Las deformaciones longitudinales de los lados, ε_x y ε_z , quedan determinadas por las tensiones normales σ_x y σ_z las cuales, no siendo necesariamente las mismas, causan deformaciones de diferente valor ($\varepsilon_x \neq \varepsilon_z$, en general).

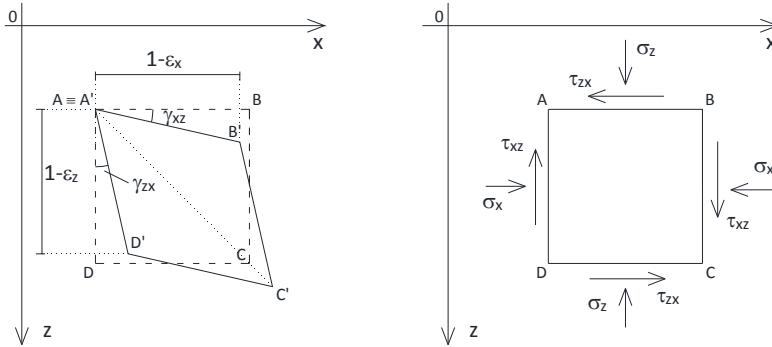


Figura 22. Elemento cúbico (2-D) antes y después de la deformación (izquierda). Esfuerzos generales que causan la deformación (derecha)

En una deformación puramente de corte ya estudiada al principio del texto, la disposición de las tensiones en el elemento además de originar un giro en sus caras verticales (AD y BC) determina alargamientos longitudinales en sus lados AD y BC (recuérdese el momento no está totalmente equilibrado pues el centro de masas del elemento se desplaza), Figura 23 izquierda. A la derecha de esta figura se muestran los elementos deformado y sin deformar haciendo coincidir los centros de ambos para apreciar mejor las deformaciones. Los lados AD y BC giran en sentido contrario a las agujas del reloj produciendo una deformación de corte positiva ($\gamma_{zx} > 0$) mientras que los lados AB y CD giran a favor de las agujas del reloj produciendo una deformación de corte negativa ($\gamma_{xz} < 0$), del mismo valor absoluto.

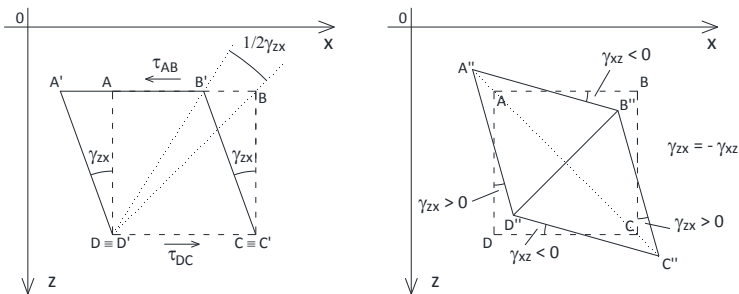


Figura 23. Elemento cúbico (2-D) antes y después de una deformación de corte pura (izquierda). Elementos con el centro común, deformaciones de corte de sus lados (derecha)

Recuérdese que el esfuerzo de corte asumido generalmente en ingeniería, γ_{ing} , se define como el ángulo de distorsión total del elemento, suma de las deformaciones de corte γ_{xz} y γ_{zx} . Al ser ambos del mismo valor,

$$\gamma_{ing} = \gamma_{xz} - \gamma_{zx} = 2\gamma_{xz}$$

La Figura 24 (superior) presenta un elemento ABCD que ha sufrido sólo deformaciones unitarias $\delta\epsilon_z$ de compresión ($\delta\epsilon_z > 0$ de acuerdo con el criterio de signos) en sentido vertical, y $\delta\epsilon_x$ de tracción ($\delta\epsilon_x < 0$) en sentido horizontal; A'B'C'D' es el elemento deformado. En su interior se muestra un elemento más pequeño EFGH, con diferente orientación al elemento ABCD, antes (línea discontinua) y después (línea continua) de la deformación. Teniendo en cuenta que las deformaciones se asumen pequeñas, las caras FG (o F'G') resultan de girar las caras originales CD (o C'D') un ángulo θ , y lo mismo las caras EF (o E'F') respecto de las caras originales BC (o B'C'); es decir, la orientación del elemento interior es el resultado de girar el exterior un ángulo θ .

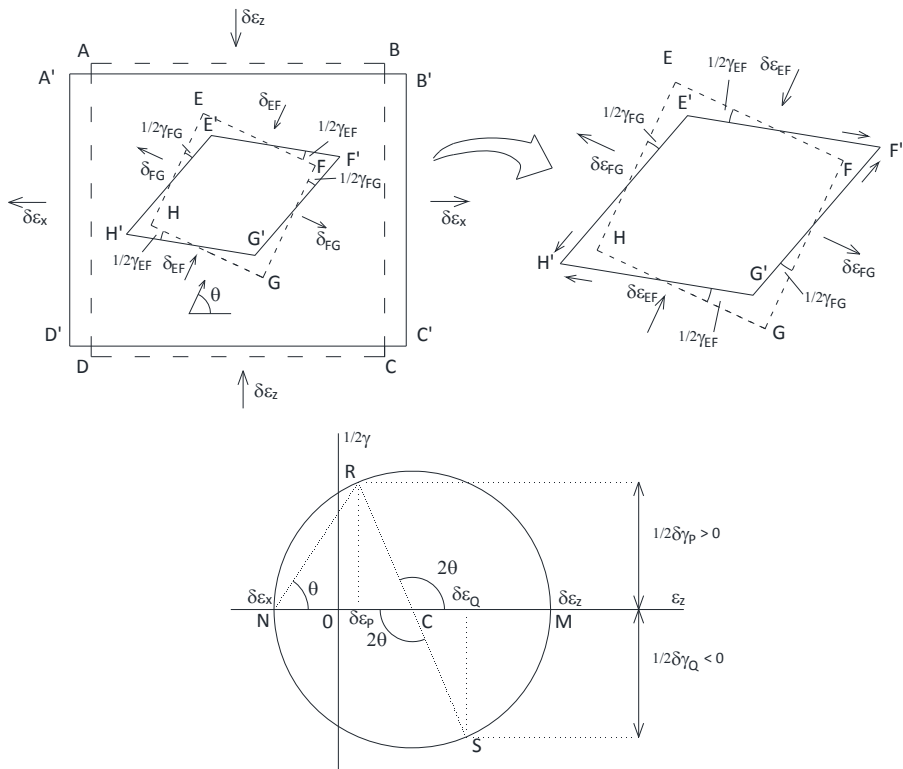


Figura 24. Elementos originales y deformados con diferente orientación (superior)
Representación de las deformaciones unitarias en el círculo de Mohr (inferior)

En el diagrama de Mohr de deformaciones, el estado de deformación correspondiente a las caras originales viene dado por los puntos M (deformación $\delta\epsilon_z$ en las caras horizontales AB y CD, de compresión, positiva) y N (deformación $\delta\epsilon_x$ en las caras verticales BC y DE, de tracción, negativa). Para obtener los puntos del diagrama asociados a la nueva orientación, basta girar los anteriores M y N un ángulo 2θ en sentido contrario a las agujas de reloj para llegar a los puntos P y Q, respectivamente. P

representa las deformaciones longitudinales y de corte en la cara FG y Q en la cara EF. Puede apreciarse que las nuevas deformaciones longitudinales son ambas positivas ($\delta\varepsilon_p$ y $\delta\varepsilon_q$), mientras que la de corte es positiva en R ($0.5\delta\gamma_p$) y negativa en S ($0.5\delta\gamma_q$). De esta forma, los lados EH y FG del interior experimentan un giro $0.5\delta\gamma_p$ positivo (en sentido contrario a las agujas del reloj) y los lados EF y HG experimentan un giro idéntico pero negativo (en el sentido de las agujas del reloj).

El polo de este círculo (punto N) obtenido trazando la horizontal desde M (ya que $\delta\varepsilon_z$ actúa sobre el plano horizontal) permite obtener directamente las deformaciones unitarias y de corte en el plano FG trazando sencillamente una línea desde N con la orientación θ respecto a la horizontal en sentido de las agujas del reloj (línea NR).

Deformación volumétrica

En condiciones de pequeñas deformaciones y deformación plana (ausencia de deformaciones directas en la dirección perpendicular al plano XOZ), el círculo de Mohr permite deducir la deformación volumétrica, ε_v . Como $\varepsilon_v \cong \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, de la Figura 24 se deduce

$$\varepsilon_v \cong OM - ON = (OC + CM) - (CN - OC) = 2OC$$

La deformación volumétrica es el doble de la distancia del origen de coordenadas al centro del círculo. Es positiva cuando el centro está a la derecha del origen y negativa cuando lo está a la izquierda.

Ángulo de dilatación

Existe un ángulo asociado al círculo de Mohr de deformaciones cuyo papel es equivalente al ángulo de resistencia a la fricción (o ángulo movilizado de resistencia a la fricción ϕ) llamado ángulo de dilatación. En las Figuras 25 y 26 se representan círculos de esfuerzos y deformaciones, respectivamente, representativos de sendas muestras incluidas en las mismas. El círculo de esfuerzos está asociado a una muestra sometida a esfuerzos principales en las direcciones horizontal (esfuerzo menor, σ_3) y vertical (esfuerzo mayor, σ_1), mientras que el de deformaciones está asociado a una muestra cuyas deformaciones unitarias principales son $\delta\varepsilon_3$ y $\delta\varepsilon_1$ ($=\gamma_{zx}/2$); la primera (deformación mayor, positiva) está asociada a la dirección horizontal (movimiento de los planos verticales de la muestra) y la segunda (deformación menor, positiva o negativa) asociada a la dirección vertical (movimiento de los planos horizontales de la muestra).

Asumiremos deformaciones pequeñas (de ahí el uso del símbolo $\delta\varepsilon$ en todas las deformaciones unitarias) con objeto de aproximar la deformación de volumen en la forma $\varepsilon_v \cong \varepsilon_1 + \varepsilon_3$. En relación con la Figura 25, de la expresión

$$\text{sen}(\phi_m) = \frac{r_0}{c_0} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}$$

se deduce

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \operatorname{tg}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \phi_m \right) \right]$$

que permite obtener la relación de tensiones principales en función del ángulo de resistencia al corte (normalmente conocido) o al revés. Los ángulos α y β en esta figura, trazados desde el polo hasta el punto de rotura, informan sobre la orientación de los planos en los que tiene lugar la rotura en relación con el plano principal horizontal. Como estos ángulos son inscritos valen la mitad de los arcos que abarcan, así

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \phi_m \right)$$

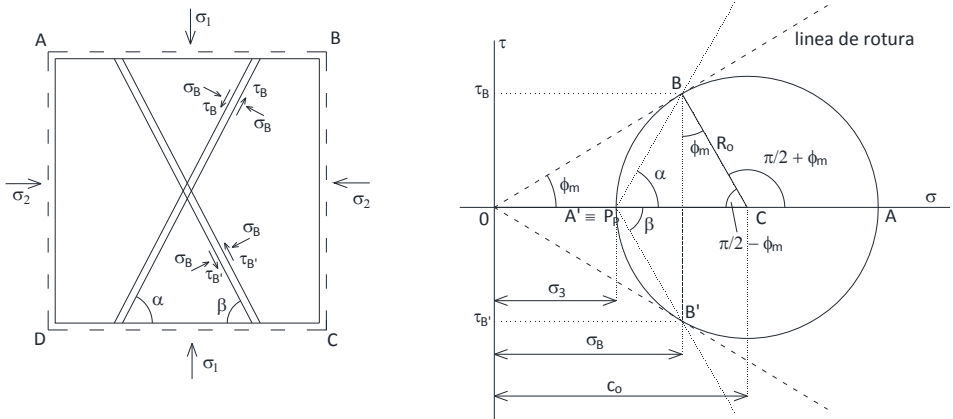


Figura 25. Elemento bajo esfuerzos principales, círculo de Mohr y ángulo de resistencia al corte

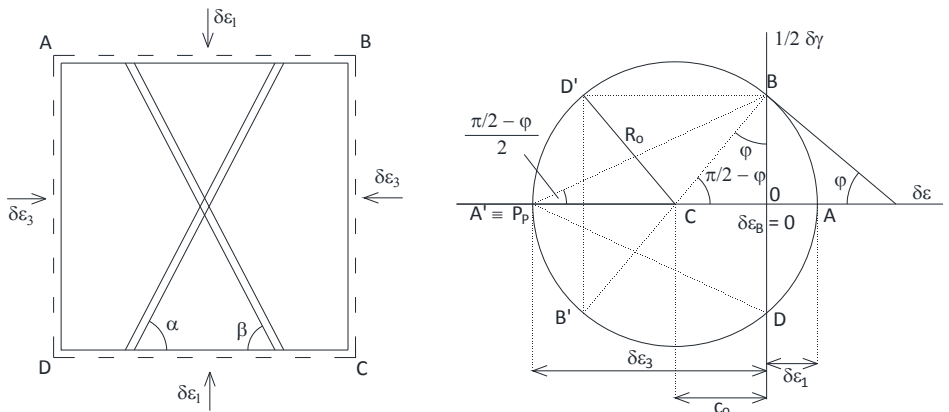


Figura 26. Elemento bajo deformaciones unitarias principales, círculo de Mohr y ángulo de dilatancia

En cuanto a la Figura 26, el ángulo de dilatancia se define en la forma

$$\operatorname{sen}(\psi) = \frac{c_o}{r_o} = \frac{\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_3}{\delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_3}$$

de donde se deduce

$$\frac{\delta\varepsilon_1}{\delta\varepsilon_3} = \operatorname{tg}^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right) \right]$$

que permite obtener el ángulo de dilatacia en función de la relación de deformaciones específicas o al revés. Para los puntos B y D (sobre el círculo, definidos por los ángulos centrales $\frac{\pi}{2} - \psi$ y $\psi - \frac{\pi}{2}$, no existen deformaciones unitarias directas o normales (sólo de corte). Los planos sobre los que se dan estas deformaciones son los marcados por las líneas discontinuas en la figura; planos que definen las líneas trazadas desde el polo en las direcciones P_pB y P_pD (advierta que las deformaciones unitarias de corte no son las máximas en estos planos). En la deformación, el plano P_pB giraría (sin moverse relativamente respecto a los planos paralelos vecinos) en sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo $\gamma_B/2$ (ya que $\gamma_B/2$ es positivo), mientras que el plano P_pD lo haría en sentido de las agujas del reloj el mismo ángulo $\gamma_B/2$ (ya que $\gamma_B/2$ es negativo).

En las direcciones perpendiculares a los planos anteriores, como hemos dicho, el valor de la deformación unitaria directa es nulo, $\delta\varepsilon_{\text{directa}} = 0$; estas direcciones vienen dadas por los ángulos α_d y β_d de valor (v. Problema 4.41)

$$\alpha_d = \beta_d = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right)$$

La Figura 27 muestra tales direcciones mediante dos líneas continuas en el círculo de Mohr. La línea P_pB' perpendicular a la dirección línea P_pB y la línea P_pD' perpendicular a la dirección línea P_pD.

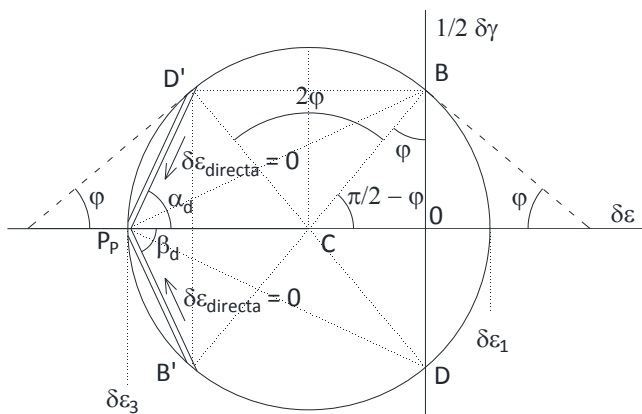


Figura 27. Detalles de las direcciones de deformación directa nula

Problema 4.39 (círculo de Mohr de deformaciones)

La deformación de un elemento del suelo confinado por un muro puede caracterizarse por desplazamientos unitarios horizontales y verticales de valores

$$\delta\epsilon_h = -0.16 \text{ y } \delta\epsilon_v = 0.12\%, \text{ caso 1, y } \delta\epsilon_h = 0.02 \text{ y } \delta\epsilon_v = 0.14\% \text{ (caso 2)}$$

- i) Dibujar el círculo de Mohr de los desplazamientos y definir su centro, el polo y la deformación unitaria de corte máxima,
- ii) Usar el círculo y las propiedades del polo para calcular las deformaciones existentes en un plano de orientación 30° (en sentido contrario a las agujas del reloj) respecto al plano horizontal,
- iii) Determinar la deformación volumétrica del elemento.

Respuesta:

Caso 1. $\delta\epsilon_h = -0.16$ y $\delta\epsilon_v = 0.12\%$

i) Los planos horizontales y verticales son planos principales en tanto que no existen deformaciones de corte en las mismas; el elemento se contrae verticalmente acercando los planos horizontales superior e inferior entre sí (ya que $\delta\epsilon_v$ es positivo), y se dilata horizontalmente separando los planos verticales izquierdo y derecho (ya que $\delta\epsilon_h$ es negativo), Figura 14.39a (izquierda).

El círculo de deformaciones se muestra en la Figura 4.39a (derecha). El centro está en el punto $(0.02\%, 0)$, el radio y la deformación unitaria de corte máxima valen 0.14% . El corte del círculo con la horizontal desde M define el polo de planos, P_p .

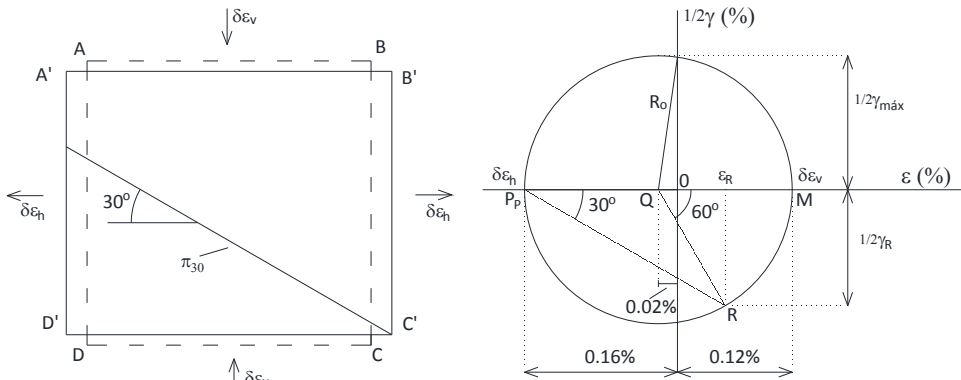


Figura 4.39a. Elemento sin deformar y deformado (izquierda), líneas de trazos y continua, respectivamente. Círculo de Mohr (derecha)

ii) Para obtener las deformaciones unitarias en un plano de orientación 30° , plano π_{30} de la figura anterior, basta proyectar desde el polo la línea PR (o recorrer la circunferencia desde M un arco de 60° en sentido contrario a las agujas del reloj). Los valores de estas deformaciones son, Figura 4.39 derecha:

$$\delta\epsilon_R = r_o \cos(60) - 0.02\% = 0.14\% \cos(60) - 0.02\% = 0.05\%$$

$$(1/2)\gamma_R = r_o \sin(60) = 0.14\% \sin(60) \%$$

iii) La deformación volumétrica es positiva y de valor

$$\epsilon_V \cong 2 \cdot 0.02\% = 0.04$$

Caso 2. $\delta\epsilon_h = 0.02$ y $\delta\epsilon_v = 0.14\%$

i) De nuevo, los planos horizontales y verticales son planos principales y el elemento se contrae en ambos sentidos pues tanto $\delta\epsilon_v$ como $\delta\epsilon_h$ son positivos, Figura 4.39b (izquierda). El círculo, Figura 4.39b (derecha) tiene el centro en $(0.08\%, 0)$, su radio vale 0.06 y la deformación unitaria de corte máxima 0.06%. El polo está en el mismo punto relativo, P_p .

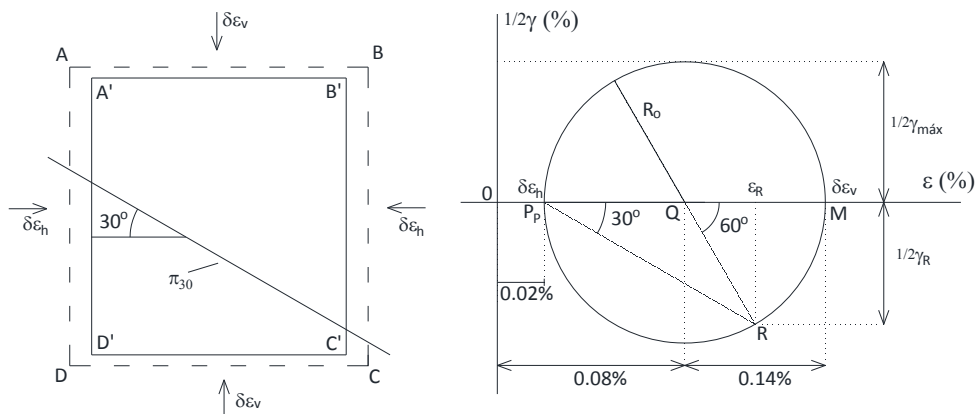


Figura 4.39b Elemento sin deformar y deformado (izquierda). Círculo de Mohr (derecha)

ii) Las deformaciones unitarias en un plano π_{30} se obtienen de igual forma. Sus valores son:

$$\delta\epsilon_R = r_o \cos(60) + 0.08\% = 0.06\% \cos(60) + 0.08\% = 0.11\%$$

$$(1/2)\gamma_R = r_o \sin(60) = 0.06\% \sin(60) \%$$

iii) La deformación volumétrica es positiva y de valor

$$\epsilon_V \cong 2 \cdot 0.06\% = 0.12$$

Problema 4.40 (círculo de Mohr de deformaciones)

Generalizar los resultados del problema anterior para el elemento cuadrado de suelo, de lado unidad, sometido al sistema generalizado de esfuerzos de la Figura 4.40a. Las deformaciones $(1/2)\gamma_{zx}$ y $(1/2)\gamma_{xz}$ se escriben también en la forma ε_{zx} y ε_{xz} , respectivamente.

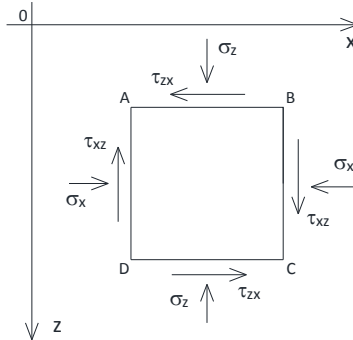


Figura 4.40a. Elemento sometido a un sistema generalizado de esfuerzos

- i) Dibujar el elemento deformado sobre el elemento no deformado manteniendo el punto A común para eliminar las deformaciones asociadas al movimiento de cuerpo rígido,
- ii) Dibujar el círculo de Mohr de deformaciones y sus posiciones potenciales en relación con el origen del sistema $(1/2)\gamma - \delta\varepsilon$,
- iii) Suponga ε_z y ε_x positivos. Dé las expresiones para ε_1 y ε_3 , r_0 y $(1/2)\gamma_{máx}$,
- iv) ¿En qué planos se dan las deformaciones unitarias principales y las deformaciones unitarias máximas de corte?,
- v) Utilice el polo para contestar a la pregunta anterior,
- vi) Averigüe mediante el polo las deformaciones unitarias para un plano orientado α grados respecto al plano horizontal,
- vii) Repita iii), iv) y v) para el caso $\varepsilon_z > 0$, $\varepsilon_x < 0$.

Respuesta:

i) Los elementos deformado y sin deformar se muestran en la Figura 4.40b. Las deformaciones unitarias longitudinales (dependientes de todos los esfuerzos aplicados) son ε_z y ε_x , mientras que las de corte (dependientes de los esfuerzos de corte) son $(1/2)\gamma_{zx}$ (positiva, de acuerdo con el convenio de signos) y $(1/2)\gamma_{xz}$ ($=(1/2)\gamma_{zx}$, negativa). Estas últimas sólo dependen de los esfuerzos de corte.

En función de los valores de los esfuerzos puede ocurrir que el círculo de Mohr de deformaciones se ubique a la derecha del origen, lo que implica deformaciones de compresión (positivas) en todos los planos del elemento, o que el círculo contenga al origen, en cuyo caso existen deformaciones negativas (de tracción) en algunos de los planos del elemento.

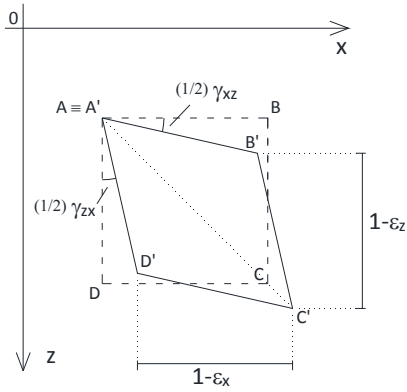


Figura 4.40b. Elementos deformado y sin deformar superpuestos

La Figura 4.40c muestra los círculos correspondientes a cada caso.

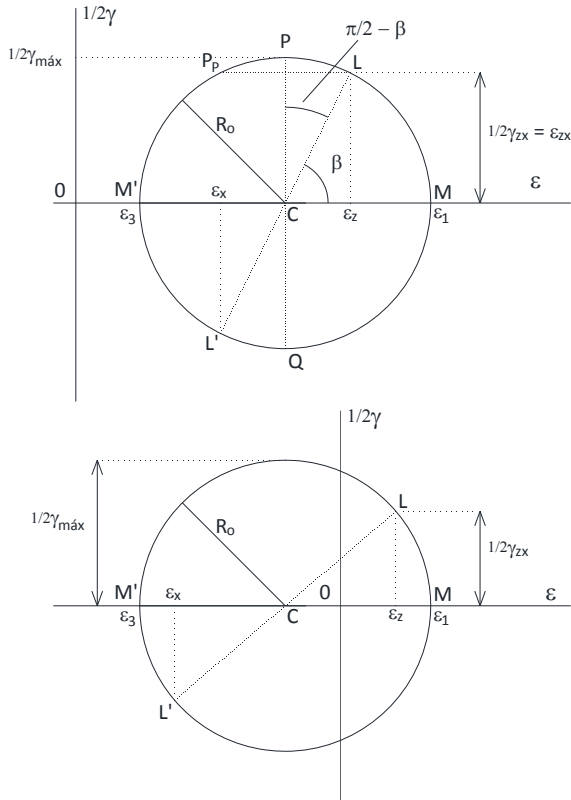


Figura 4.40c. Casos de representación del círculo de Mohr de deformaciones. Compresión en todos los planos (superior) y tracción en algunos planos (inferior)

En el círculo superior ε_z y ε_x son positivos (de compresión) mientras que en la inferior ε_z es de positiva (de compresión) y ε_x negativa (de tracción). En ambas, el esfuerzo unitario de corte $(1/2)\gamma_{zx}$ es positivo y $(1/2)\gamma_{xz}$ negativo. Las tensiones en los planos horizontales del elemento pueden leerse en el punto L mientras que las de los planos verticales en el punto L'. Las deformaciones unitarias longitudinales principales (ε_1 y ε_3), el radio del círculo y el valor de la máxima deformación unitaria de corte se determinan por los procedimientos ya conocidos.

iii) De la geometría de la Figura 4.40c (superior),

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{\frac{1}{2}(\gamma_{zx})}{\frac{1}{2}(\varepsilon_z - \varepsilon_x)}$$

En función de β y las deformaciones unitarias de elemento, los parámetros buscados son:

Centro del círculo $C = \left(\frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2}, 0 \right)$

Radio $r_o = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{zx}}{2} \right)^2}$

Deformación unitaria principal mayor $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2} + r_o = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{zx}}{2} \right)^2}$

Deformación unitaria principal menor $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2} - r_o = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{zx}}{2} \right)^2}$

Deformación unitaria de corte máxima $\frac{1}{2}\gamma_{\max} = r_o = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_x}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{zx}}{2} \right)^2}$

iv) La deformación unitaria máxima principal actúa sobre el plano que resulta de girar el plano horizontal (asociado a L) un ángulo $\frac{\beta}{2}$ en el sentido de las agujas del reloj (recorrido LM en el círculo), mientras que la mínima actúa sobre el plano que resulta de girar el mismo plano anterior un ángulo $\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2}$ también en el sentido de las agujas del reloj (recorrido LM'). La deformación unitaria de corte máxima actúa sobre planos perpendiculares a los anteriores (son planos que resultan de girar el plano horizontal ángulos $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ o $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$ en sentido contrario a las agujas del reloj (recorrido LQ en el círculo) o a favor (recorrido LQ), respectivamente. Los lados asociados a estos nuevos planos, sobre los que actúan los esfuerzos en P y Q, se deforman (girando) en contra o a favor de las agujas del reloj el ángulo $\frac{1}{2}\gamma_{\max}$ según que la deformación unitaria de corte máxima sea positiva o negativa, respectivamente.

v) El polo está en la intersección de la línea horizontal en L con el círculo, punto P_p. Como se sabe, con él, los planos asociados a cualquier valor de deformación (directa o de corte) se corresponden con la línea que une el polo con el punto del círculo que define tal deformación: planos P_pM para la

deformación unitaria principal mayor, P_pM' para la deformación unitaria principal menor, P_pP para la deformación unitaria de corte positiva y P_pQ para la deformación unitaria de corte negativa.

vi) Las deformaciones en un plano orientado α grados respecto al plano horizontal (en sentido contrario de las agujas del reloj) se definen por el punto T_1 (giro de la línea P_pL en este sentido el mismo ángulo), Figura 4.40d. Para el giro contrario las deformaciones se definen en el punto T_2 .

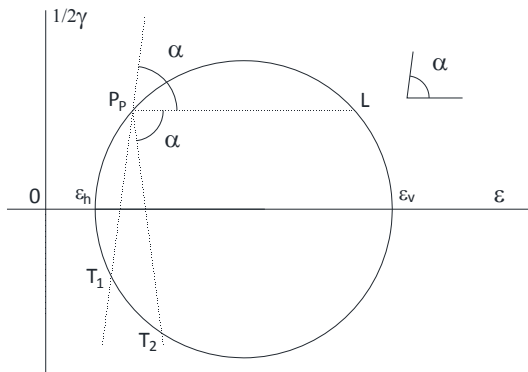


Figura 4.40d. Deformaciones unitarias en planos $\pm\alpha$ respecto a la horizontal

vii) Este apartado se deja como trabajo para el alumno.

Problema 4.41

Demostrar la relación entre el ángulo de dilatación y los ángulos que definen los planos sobre los que la deformación unitaria directa es nula.

Respuesta:

Esta relación viene dada (Figura 27) por

$$\alpha_d = \beta_d = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right)$$

Al ser las direcciones α_d y β_d perpendiculares a las líneas discontinuas P_pB y P_pD bastaría girar los planos definidos por ellas 90° en cualquier sentido. Este ángulo sobre el círculo equivale a un arco de 180° . Así, la dirección normal al plano P_pB es la definida por P_pB' mientras que la dirección normal al plano P_pD es la definida por P_pD .

Problema 4.42

La deformación de un elemento del suelo, Figura 4.42a, viene dada por desplazamientos unitarios generalizados de valores

$$\delta\varepsilon_h = -0.2\% \text{ y } \delta\varepsilon_v = 0.1\%, \gamma_{\pi_h} = 0.3\%, \gamma_{\pi_v} = -0.3\%$$

- i) Dibujar el círculo de Mohr de los desplazamientos. Calcular su centro, el radio, el polo y la deformación unitaria de corte máxima; ¿en qué plano se da esta deformación máxima?
- ii) Usar el círculo de Mohr para calcular las direcciones que dan los desplazamientos unitarios máximos principales y los planos sobre los que actúan estos desplazamientos,
- iii) Determine la deformación volumétrica,
- iv) Calcule el ángulo de dilatación,
- v) Señale las direcciones de los desplazamientos unitarios nulos y los planos sobre los que actúan,
- vi) Puede repetir el problema para los valores $\delta\varepsilon_h = 0.1\%$ y $\delta\varepsilon_v = 0.3\%$, $\gamma_{\pi_h} = 0.3\%$, $\gamma_{\pi_v} = -0.3\%$.

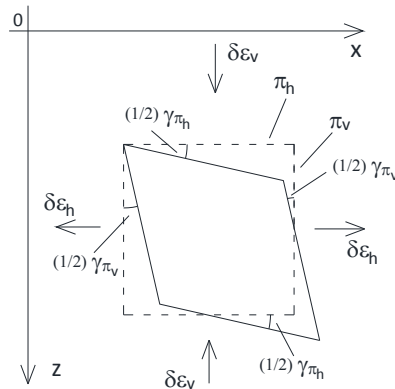


Figura 4.42a. Desplazamientos unitarios generalizados sobre un elemento de suelo

Respuesta:

i) La Figura 4.42b representa el círculo de Mohr de deformaciones; sobre él, el punto A define las deformaciones unitarias directa y de corte, ambas positivas, en las caras horizontales, mientras que A' define las mismas deformaciones, ambas negativas, en las caras verticales. El centro del círculo está en el punto $(0.05\%, 0)$, el radio es $r_o = 0.15\sqrt{5}$ y el polo (P_p) está localizado en $(-0.2\%, 0.3\%)$. La deformación unitaria de corte máxima es

$$\frac{1}{2} \delta\gamma_{\text{máx}} = \delta\varepsilon_{xz, \text{máx}} = r_o = 0.15\sqrt{5} \%$$

(punto M del círculo). El plano sometido a la máxima deformación de corte está dado por la línea P_pM .

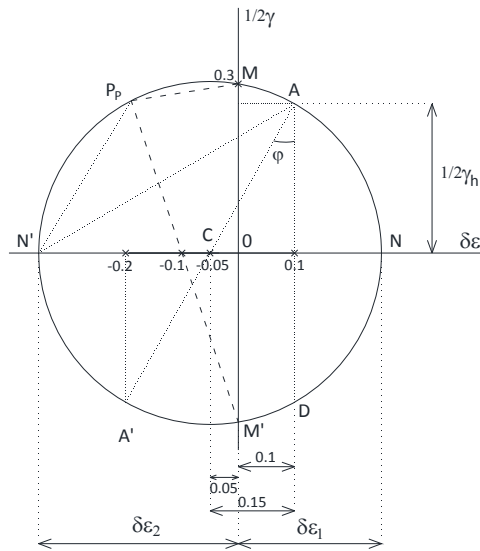


Figura 4.42b. Círculo de deformaciones

ii) Las deformaciones unitarias principales las definen los puntos C y C' del círculo. Sus valores son:

$$\delta\epsilon_1 = r_o - 0.05 = (0.15\sqrt{5} - 0.05)\%$$

$$\delta\epsilon_3 = -(r_o + 0.05) = -(0.15\sqrt{5} + 0.05)\%$$

Los planos sobre los que actúan estas tensiones se obtienen simplemente trazando líneas desde el polo a los puntos N (esfuerzo principal máximo) y N' (mínimo). Las direcciones de estas deformaciones son las perpendiculares a estos planos, líneas P_pN' y P_pN.

iii) La deformación volumétrica vale

$$\epsilon_v \cong \epsilon_1 + \epsilon_3 = -0.1\%$$

iv) El ángulo de dilatancia es

$$\psi = \arcsen\left(-\frac{\epsilon_v}{2r_o}\right) = \arcsen\left(\frac{0.1}{0.3\sqrt{5}}\right)$$

v) Los desplazamientos unitarios directos actúan sobre los planos P_pM y P_pM' (marcados con línea discontinua en el círculo), planos que no se desplazan frente a sus contiguos paralelos; las direcciones de estas deformaciones son, respectivamente, P_pM' y P_pM (perpendiculares a los anteriores planos).

vi) Se deja como tarea para el alumno.