

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIÓN
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



Trabajo de Fin de Grado

**Desarrollo de una interfaz gráfica en Matlab para
el análisis de problemas de difracción basados en
óptica de Fourier**

Carlos Sempere Chaves

20 de Junio de 2015

Directores: *Rafael Verdú Monedero, Jose Luis Gómez Tornero.*

1. Introducción	1
2. Óptica de Fourier	3
2.1. Análisis de sistemas lineales invariantes en dos dimensiones	7
2.1.1. Análisis de Fourier en dos dimensiones	7
2.1.2. Sistemas Lineales	10
2.2. Introducción al fenómeno de difracción	12
2.2.1. El espectro angular de las ondas planas	14
2.3. Difracción de Fresnel y Fraunhofer	18
2.3.1. Principio de Huygens-Fresnel en coordenadas rectangulares	18
2.3.2. La aproximación de Fresnel	19
2.3.3. La aproximación de Fraunhofer	20
2.3.4. Ejemplos de patrones de difracción de Fraunhofer	21
2.4. Sistemas ópticos lineales	24
2.4.1. Modelo general	24
2.4.2. Función de dispersión de punto	24
2.4.3. Lentes y la transformada óptica de Fourier	25
2.5. Cámaras oscuras y formación de la imagen.	27
2.6. Deconvolución para recuperación de la imagen	29
3. Implementación	31
3.1. Especificaciones teóricas	31
3.2. Comparación del cálculo analítico con numérico	35
3.3. Cuantificación error según resolución	36
3.4. Desarrollo de la interfaz gráfica	37

3.4.1.	Panel de introducción de datos	37
3.4.2.	Representación gráfica	38
3.4.3.	Selección de unidades	38
3.4.4.	Opciones de entrada	38
3.4.5.	Control de visualización	39
3.4.6.	Guardado de imágenes	39
3.4.7.	Información de estado del programa	39
3.5.	Demostración de propiedades	40
3.5.1.	Demostración de la propiedad de linealidad.	40
3.5.2.	Demostración de reciprocidad	43
3.5.3.	Demostración de la propiedad de desplazamiento	44
4.	Resultados obtenidos con la interfaz	47
4.1.	Influencia de la forma de la apertura en el patrón.	47
4.1.1.	Apertura Poligonal	47
4.1.2.	Número tres	49
4.1.3.	Aperturas prácticas	51
4.2.	Interpretación para más de una fuente	59
4.2.1.	Ejemplo Osa Mayor	63
4.3.	Efecto del tamaño de la apertura, distancia de proyección y la frecuencia.	65
4.3.1.	Efectos de las dimensiones la apertura	65
4.3.2.	Efectos de la distancia de proyección	74
4.3.3.	Efectos de la frecuencia	78
5.	Conclusiones, líneas futuras de trabajo	83
	Bibliografía	85

CAPÍTULO 1

Introducción

En este proyecto se pretende desarrollar una interfaz gráfica en Matlab, que permita la resolución de problemas de difracción escalar usando la teoría de óptica de Fourier. El objetivo final es obtener una herramienta de análisis, que permita obtener patrones de difracción de diferentes tipos de aperturas y aplicar dicho patrón a imágenes ideales para obtener la imagen resultante.

La herramienta pretende ser rápida y sencilla, para permitir a otros alumnos entender conceptos de óptica física y estudiar el efecto de parámetros como el tamaño de la apertura, la longitud de onda o la forma de la apertura en el proceso de generación de una imagen.

El trabajo se centra en los efectos de difracción que se producen en aperturas de entrada a sistemas ópticos por fuentes situadas a una distancia infinita de la apertura. De esta manera, se supone que el frente de onda que ilumina la apertura es un frente de onda plano. También se supone que la apertura tiene las dimensiones cercanas a la longitud de onda suficientes para generar un patrón de difracción. Si la apertura es muy grande, no se generará imagen, y se propagaría el frente de onda plano por el interior del sistema óptico. Estas situaciones se ven representadas en la figura 1.1, en las que se modelan los sistemas de cámara oscura para los dos casos cuando la apertura es de tamaño cercano a la longitud de onda y cuando el tamaño es demasiado grande como para formar una imagen. Estos fenómenos se detallan en el apartado 2.5 del trabajo.

Para que se forme una imagen, debe de existir algún método por el cual se pueda restringir

la información que llega desde otros objetos. En los sistemas que se considerarán en este proyecto siempre se cumple que:

- 1. La imagen se encuentra invertida, debido a la propagación recta de la luz.
- 2. La imagen conseguida es de intensidad más débil que la luz recibida, debido a que la mayor parte no penetra en el sistema.
- 3. La imagen no se verá nítida, debido a que las ondas a la entrada del sistema sufren un proceso de difracción que desvía sus trayectorias.
- 4. Cada punto de la imagen generada se corresponde con otro punto del objeto fuente.

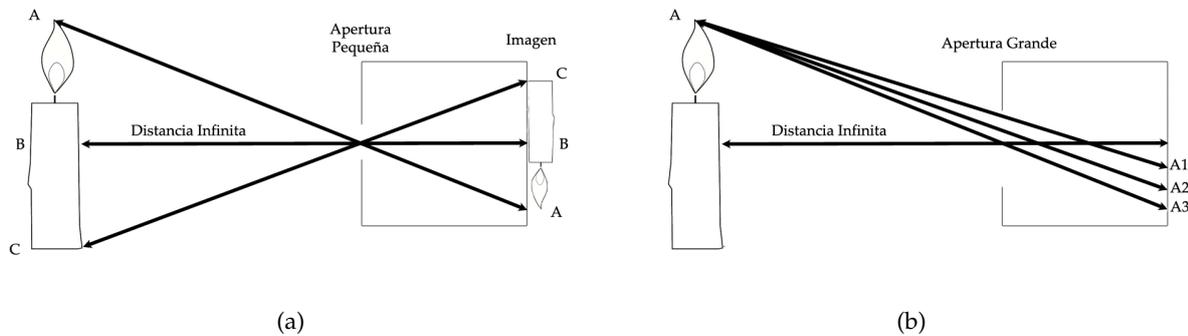


Figura 1.1: Formación de una imagen (a) y visualización de la necesidad de una pequeña apertura (b).

Se estudiará cómo las lentes puede ayudar a aumentar la nitidez de las imágenes recuperadas en el sistema óptico, además de como afectan otros parámetros a la formación de patrones, y que influencia tienen estos sobre las imágenes recuperadas por el sistema. Se estudiará el proceso de formación de la imagen, el efecto de la distancia de proyección, la frecuencia y la apertura en su generación. También se darán ejemplos prácticos de telescopios reales, y se estudiará el efecto que tienen en la recuperación de la imagen sus distintas configuraciones.

CAPÍTULO 2

Óptica de Fourier

Se quiere implementar una herramienta en Matlab que permita realizar estudios en la formación de imágenes en los sistemas ópticos. La herramienta realizará el cálculo de los patrones de difracción de Fraunhofer asociados a cierta distribución de ondas electromagnéticas de entrada al sistema, pudiéndose controlar las variables significativas del problema a simular. A lo largo del trabajo se desarrollarán los elementos de un sistema óptico que resulten de interés para la implementación de la herramienta y el modelado del sistema, así como los fenómenos físicos que acontezcan dentro del mismo que puedan ser interesantes para estudiar desarrollos futuros.

Lo primero es definir los elementos con los que se va a interactuar en los sistemas bajo estudio, y aclarar ciertas propiedades físicas de dichos elementos. Si se supone una fuente puntual, la cual radia de forma constante un campo esférico a su alrededor, al desplazarnos una distancia infinita de dicha fuente, el campo radiado podría considerarse como un frente de onda plano. Dicho frente de onda plano, visto desde un punto de vista matemático, puede verse como la transformada de Fourier del campo radiado por la fuente, dada la relación de la figura 2.1:

Una propiedad interesante de las lentes plano-convexas, es que permiten conseguir ese frente de onda plano que se vería a una distancia infinita, a la salida de su cara plana. Como se aprecia en la figura 2.2, la lente consigue en el punto B un frente de onda plano para un frente de onda esférica entrante.

Otro tipo de lentes comunes son las lentes biconvexas, que combinan los efectos de las plano-

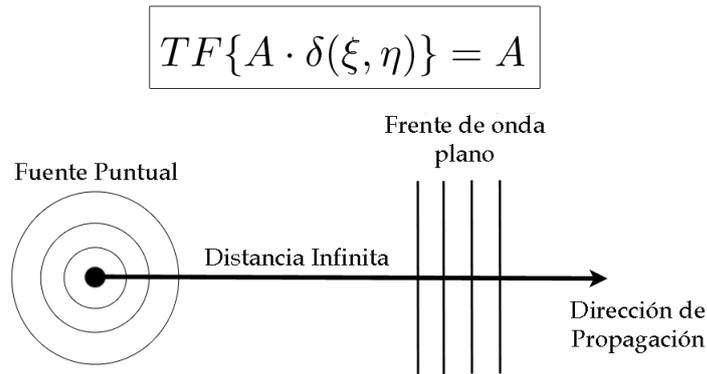


Figura 2.1: Evolución de frente del onda esférico a lo largo de una distancia infinita de propagación.

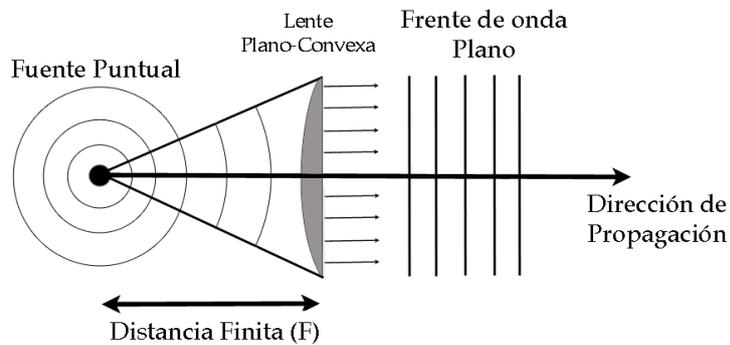


Figura 2.2: Efecto de la lente plano-convexa sobre un frente de onda esférico.

convexas en sus dos caras de entrada y salida, véase la figura 2.3. Estas permiten concentrar la energía que reciben de nuevo en el foco de las mismas en lugar de permitir que esta se propague como un frente de onda plano. De esta manera, se permite la proyección de imágenes a una distancia finita en pantallas fotosensibles u otros elementos de captación de la energía.

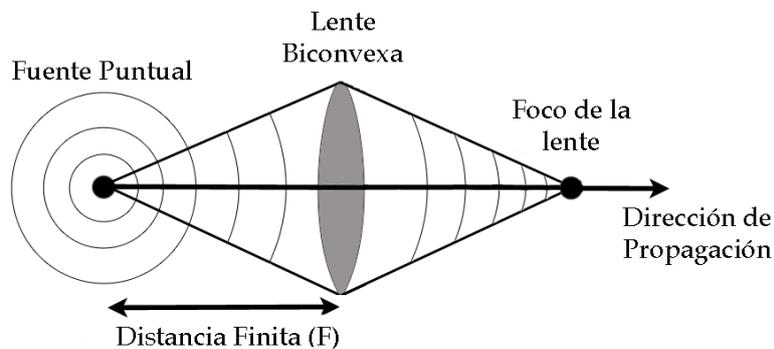


Figura 2.3: Concentración de la energía en el foco de una lente biconvexa.

Se podría decir que la lente biconvexa revierte el efecto de transformación de Fourier de la cara de entrada al atravesar la energía la cara de salida, provocando la proyección de la imagen de la fuente. Es decir, la cara de salida de la lente biconvexa está realizando una transformada de Fourier de nuevo sobre el frente de onda plano que la atraviesa, el cual es consecuencia de la transformación del frente de onda esférico de entrada.

Gracias al principio de Huygens y al experimento de Young, que permitieron estudiar los fenómenos de difracción de las ondas electromagnéticas al atravesar rendijas o aperturas, se sabe que un frente de onda plano que atraviesa una apertura de longitud cercana a la longitud de onda del frente entrante, provoca a la salida de la apertura un patrón de interferencia o de difracción. Dicho patrón de interferencia puede verse como un nuevo foco, ya que se genera un frente de onda esférico a la salida de la apertura. Es decir, se está provocando a la entrada de la apertura una transformada de Fourier de la energía entrante, la cual se propaga por el sistema óptico y se proyecta en la lente o sistemas de captado de la energía del sistema óptico. La figura 2.4 muestra los bloques que se modelan en un sistema óptico convencional.

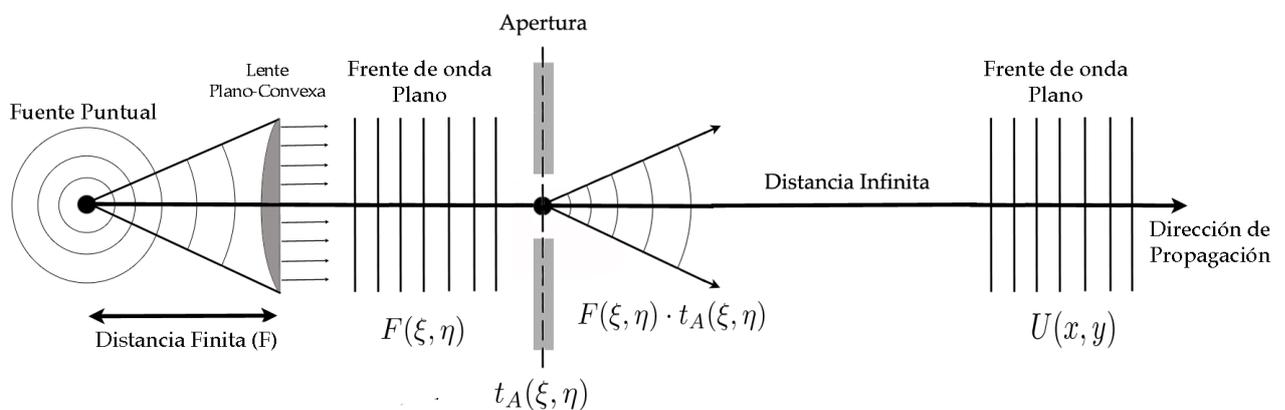


Figura 2.4: Representación de los elementos de un sistema óptico convencional.

Al igual que en el caso anterior, en el modelo mostrado en la figura 2.5 se introduce una lente biconvexa tras la apertura para lograr ese frente de onda plano a una distancia finita:

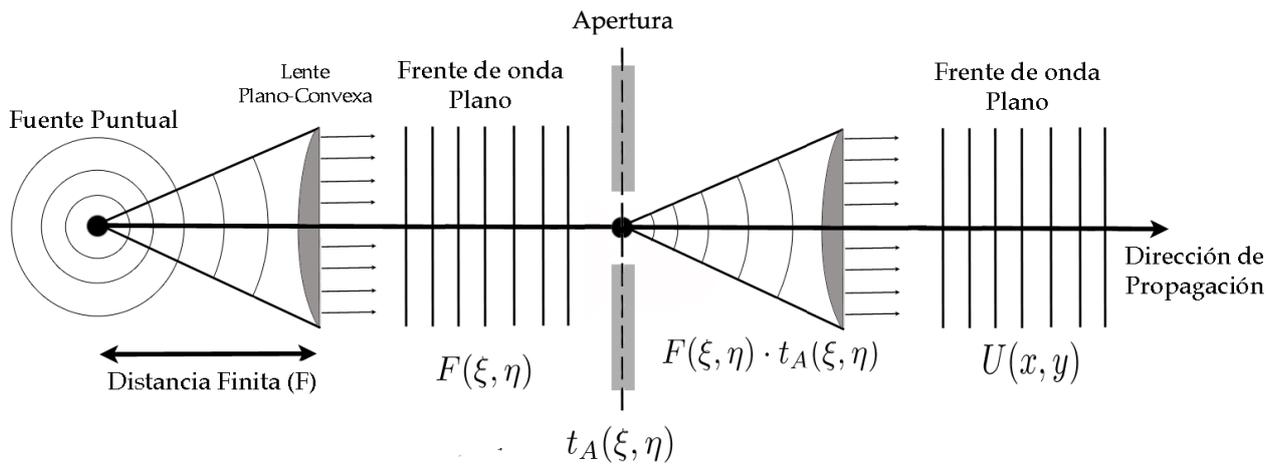


Figura 2.5: Representación de los elementos de un sistema óptico convencional.

Por último, al atravesar el sistema óptico, la señal puede ser proyectada en el plano de proyección. En la figura 2.6 se representa este sistema óptico por su diagrama de bloques, y en la figura 2.7 se modelan las operaciones que se realizan en cada bloque.

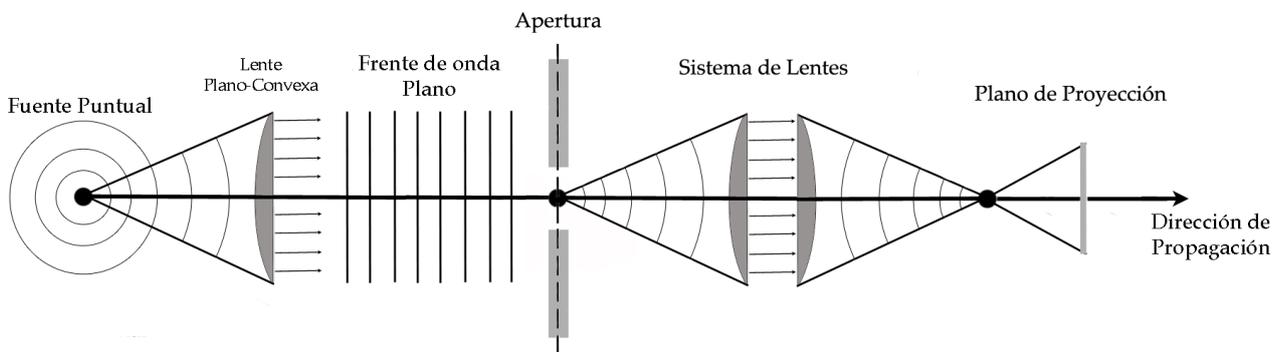


Figura 2.6: Representación de los elementos de un sistema óptico convencional.

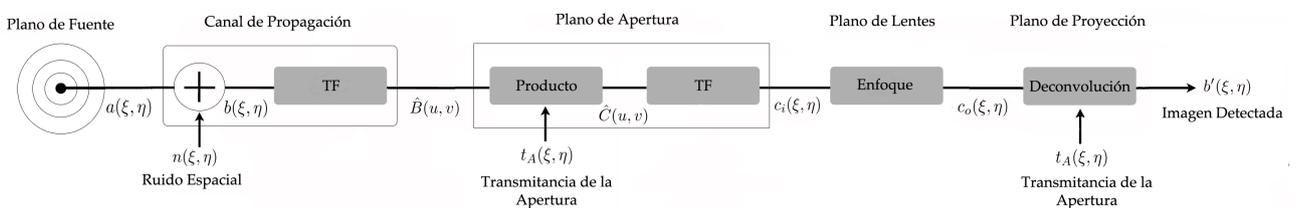


Figura 2.7: Representación de la señal a través de un sistema óptico convencional.

La energía que atraviesa la apertura generará un patrón de difracción, fruto del producto del frente de onda plano con la función de transmitancia de la apertura. Esto expresa una clara

dependencia de las imágenes que atraviesan el sistema óptico con la forma de la apertura de entrada al mismo.

En los siguientes apartados se definen herramientas matemáticas y desarrollos teóricos que pretenden describir con mayor detalle las explicaciones llevados a cabo en esta introducción.

2.1. Análisis de sistemas lineales invariantes en dos dimensiones

2.1.1. Análisis de Fourier en dos dimensiones

El análisis de Fourier es una herramienta matemática de gran utilidad para analizar fenómenos tanto lineales como no lineales. Dicha herramienta es ampliamente usada en el estudio de redes eléctricas y sistemas de telecomunicación. A continuación se pretende introducir al análisis de Fourier aplicado a dos dimensiones, es decir, al análisis de funciones con dos variables independientes[4].

Definición y condiciones de existencia

La transformada de Fourier de una función $g(x, y)$ siendo x e y dos variables independientes puede ser definida como:

$$F\{g\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)] dx dy. \quad (2.1)$$

La transformada de Fourier es una función de dos variables independientes f_X y f_Y , a las que nos referimos generalmente como variables frecuenciales. De manera similar la transformada inversa de Fourier de una función $G(f_X, f_Y)$ se define como:

$$F^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_X, f_Y) \exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)] df_x df_y. \quad (2.2)$$

Nótese que las operaciones matemáticas de las transformada directa e inversa son bastante similares, difiriendo únicamente en el signo del exponente del integrando y en los diferenciales de las integrales.[4]

Para poder tratar con la transformada de Fourier, se debe definir en que dominios tiene sentido hablar de operar con ella. Para ciertas funciones, las integrales de Fourier no están definidas en el sentido matemático, por ello se definen las condiciones de existencia de Dirichlet de la transformada de Fourier[4].

- 1. $g(x, y)$ debe ser absolutamente integrable sobre el plano (x, y) .

- 2. $g(x, y)$ debe tener un número finito de discontinuidades, máximos y mínimos.
- 3. $g(x, y)$ no debe tener discontinuidades infinitas.

A pesar de la existencia de estas condiciones, en el análisis de sistemas para representar señales ondulatorias reales, se utilizan funciones matemáticas ideales, y para ciertas funciones dichas condiciones de existencia son violadas. Por ejemplo la delta de Dirac, una función que para dos dimensiones queda representada por la siguiente ecuación:

$$\delta(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi(x^2 + y^2)]. \quad (2.3)$$

Dicha función toma valores infinitos en el origen y cero en cualquier otro punto, es decir, tiene una discontinuidad infinita y por tanto no cumple la condición de existencia número tres. Afortunadamente, es posible encontrar una transformada para aquellas funciones que no cumplan de manera estricta todas las condiciones de existencia. Dada una de esas funciones, su transformada puede ser definida como el límite de una secuencia de funciones que si sean transformables. Transformando cada miembro de la secuencia se obtiene una secuencia de transformadas a las que su límite será llamado como transformada de Fourier generalizada:

$$F\{N^2 \exp[-N^2 \pi(x^2 + y^2)]\} = \exp\left[-\frac{\pi(f_x^2 + f_y^2)}{N^2}\right] \quad (2.4)$$

Para ilustrar el cálculo de la transformada de Fourier generalizada, se considera la función Delta de Dirac, que se ha visto que viola la condición de existencia 3.

$$F\{\delta(x, y)\} = \lim_{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{\pi(f_x^2 + f_y^2)}{N^2}\right] \right\} = 1 \quad (2.5)$$

Nótese que el espectro de la función delta de Dirac se extiende uniformemente sobre todo el dominio frecuencial.

Funciones con simetría circular. Transformadas de Fourier-Bessel

Sea una función g con simetría circular, esta puede ser escrita en función del radio r :

$$g(r, \theta) = g \cdot R(r). \quad (2.6)$$

Dichas funciones con simetría circular juegan un papel de interés, puesto que muchos de los sistemas ópticos existentes tienen precisamente este tipo de simetría. Para manejar de manera más cómoda la simetría circular de la función g , aplicamos las transformaciones a coordenadas polares

tanto para los planos (x, y) como (f_X, f_Y) :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & x &= r \cos \theta, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & y &= r \sin \theta \\ \rho &= \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}, & f_X &= \rho \cos \phi, \\ \phi &= \arctan\left(\frac{f_Y}{f_X}\right), & f_Y &= \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (2.7)$$

De tal manera que podemos escribir la transformada en función del radio y del ángulo:

$$F\{g\} = G_0(\rho, \phi). \quad (2.8)$$

Aplicando las transformadas de coordenadas polares a la ecuación de definición de la transformada de Fourier de g se obtiene:

$$G_0(\rho, \phi) = \int_0^\infty dr r g_R(r) \int_0^{2\pi} d\theta \exp[-j2\pi r \rho \cos(\theta - \phi)]. \quad (2.9)$$

Se define la función de Bessel de orden cero para simplificar la expresión de la transformada en coordenadas polares:

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-ja \cos(\theta - \phi)] d\theta. \quad (2.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2,10) en (2,9), la dependencia del ángulo ϕ desaparece, dejando G_0 en función del radio ρ [4]:

$$G_0(\rho, \phi) = G_0(\rho) = 2\pi \int_0^\infty r g_R(r) J_0(2\pi r \rho) dr. \quad (2.11)$$

Dado que dicha transformada de Fourier tiene simetría circular, y es una transformación que es necesaria en una gran variedad de casos relativos a problemas ópticos, se le asignó el nombre de *Transformada de Fourier-Bessel*. Para dicha transformada se usará la notación $B\{\}$. Se define la transformada inversa de Fourier Bessel ($B^{-1}\{\}$) de un espectro circular y simétrico $G_0(\rho)$ como:

$$g_R(r) = 2\pi \int_0^\infty \rho G_0(\rho) J_0(2\pi r \rho) d\rho \quad (2.12)$$

Como se observa, para funciones circularmente simétricas, no existe diferencia entre la operación de transformada directa e inversa. Por lo que se puede concluir que:

$$BB^{-1}\{g_R(r)\} = B^{-1}B\{g_R(r)\} = BB\{g_R(r)\} = g_R(r) \quad (2.13)$$

En definitiva, cuando se usa la transformada de Fourier-Bessel (2.11) no se debe olvidar que se trata de un caso especial de la transformada de Fourier bidimensional, y por tanto toda propiedad de la transformada de Fourier, es completamente adaptable a la terminología empleada para las transformadas de Fourier-Bessel.

2.1.2. Sistemas Lineales

Para los temas que se tratarán posteriormente, se debe definir un sistema de un modo lo suficientemente general que incluya los casos de sistemas de redes eléctricas y sistemas ópticos[4]. Un sistema puede ser definido como un conjunto de elementos que tienen unas funciones de entrada y generan una serie de funciones de salida. En el caso de las redes eléctricas las entradas y salidas pueden ser funciones dependientes de valores reales (voltajes o corrientes) y en los sistemas ópticos pueden ser funciones dependientes de variables bidimensionales independientes (espacio). Los sistemas no tienen por qué generar una única salida para una única entrada, de hecho pueden existir entradas que no generen una salida. Una representación conveniente de un sistema es el operador matemático $S\{\}$, el cual suponemos que opera en funciones de entrada para generar funciones de salida:

$$g_2(x_2, y_2) = S\{g_1(x_1, y_1)\}. \quad (2.14)$$

Sin definir más propiedades detalladas del operador $S\{\}$ es difícil caracterizar el comportamiento de un sistema. En el resto del trabajo se asumen sistemas de distintas clases, pero todos cumplen la propiedad de linealidad. La asunción de linealidad dará resultado unos sistemas con representación física simple y con significado, y que permitirán por tanto el desarrollo de relaciones útiles entre entradas y salidas.

Linealidad y la integral de superposición

Un sistema es lineal si cumple la propiedad de superposición para todas las funciones de entrada p y q y las constantes complejas a y b [4]:

$$S\{ap(x_1, y_1) + bq(x_1, y_1)\} = aS\{p(x_1, y_1)\} + bS\{q(x_1, y_1)\}. \quad (2.15)$$

Como se dijo anteriormente, la gran ventaja de tratar con sistemas lineales es la posibilidad de expresar la respuesta de un sistema a una entrada arbitraria en términos de las respuestas que se obtendrían con la entrada de las funciones elementales que en las que puede ser descompuesta. Es importante pues, encontrar un método sencillo para descomponer la entrada. Una descomposición puede ser deducida de la propiedad de desplazamiento de la función δ , la cual establece que:

$$g_1(x_1, y_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta. \quad (2.16)$$

La ecuación expresa que una función g_1 puede ser expresada como la combinación lineal de deltas desplazadas y ponderadas. Las funciones elementales de descomposición son, por supuesto, dichas funciones δ . La respuesta de un sistema puede ser expresada pues de la siguiente manera, al sustituir la ecuación (2.16) en (2.14):

$$g_2(x_2, y_2) = S \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) \delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta \right\}. \quad (2.17)$$

Si introducimos el operador $S\{\}$ dentro de la función se obtiene un término $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$, que representa la respuesta del sistema en el punto (x_2, y_2) para una δ de entrada en las coordenadas (ξ, η) en el espacio de entrada, es decir:

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = S\{\delta(x_1 - \xi, y_1 - \eta)\}. \quad (2.18)$$

Esta respuesta h se llama respuesta al impulso (función de dispersión de punto en el dominio óptico, *point spread function - PSF*). La salida del sistema puede ser expresada ahora con una simple ecuación:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2, y_2; \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (2.19)$$

Esta expresión fundamental, conocida como la *integral de superposición*, demuestra el importante concepto de que un sistema lineal puede ser completamente caracterizado por las respuestas a sus impulsos unitarios. Para completar de definir la salida, las respuestas deben ser, en general impulsos situados en cualquier punto del plano de entrada. Para el caso de sistemas lineales con imágenes, el resultado tiene la interpretación física de los efectos de los elementos ópticos (lentes, filtros...). Estos pueden ser perfectamente descritos y modelados especificando la salida para una fuente puntual situada en la entrada del sistema.

Sistemas lineales invariantes: funciones de transferencia

Habiendo examinado las relaciones entrada-salida para un sistema lineal general, ahora se introduce una importante subclase de sistemas, los sistemas invariantes. Un sistema eléctrico será invariante en el tiempo si su respuesta al impulso es $h(t; \tau)$ siendo ésta la respuesta al impulso en el tiempo t , para una excitación de entrada impulsorial en el tiempo τ , y si depende solo de la diferencia de tiempo $(t - \tau)$. Básicamente un sistema eléctrico es invariante en el tiempo si sus componentes no varían a lo largo del mismo. Un sistema óptico, de la misma manera es invariante en el espacio (*isoplanar*) si su respuesta al impulso $h(x_2, y_2; \xi, \eta)$ depende solo de las distancias $(x_2 - \xi)$ y $(y_2 - \eta)$ [4]:

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta). \quad (2.20)$$

Entonces, un sistema óptico es invariante en el espacio si la imagen o el objeto fuente de la señal cambia tan solo su posición, no su forma funcional, en el sentido que la fuente se desplaza a lo largo del los ejes espaciales. En la práctica, los sistemas ópticos son raramente isoplanares en la totalidad del espacio, pero en ocasiones es posible dividir dicho espacio en pequeñas regiones (*paneles isoplanares*), en los cuales el sistema es aproximadamente invariante. Para poder describir un sistema óptico en su totalidad, es necesario definir claramente la respuesta al impulso para cada uno de los paneles isoplanares en los que dividamos nuestro sistema, pero si las porciones son suficientemente pequeñas, normalmente es suficiente considerar solamente el panel isoplanar en el eje óptico del sistema. Para un sistema invariante la integral de superposición toma la siguiente forma:

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_1 - \xi, y_1 - \eta) d\xi d\eta. \quad (2.21)$$

Donde se reconoce una convolución bidimensional de la función de entrada con la respuesta al impulso del sistema. A partir de ahora se realizará la siguiente notación para denominar esta ecuación:

$$g_2 = g_1 \otimes h. \quad (2.22)$$

Donde el símbolo \otimes indica la convolución de las dos señales entre las que se encuentre indicado.

Los sistemas lineales invariantes tienen asociados a ellos una estructura matemática más detallada que la gran mayoría de los sistemas lineales, y eso es precisamente por lo cual son sencillos de evaluar. Esta simplicidad de los sistemas lineales invariantes comienza a ser evidente cuando la relación de la convolución (2.21) se simplifica notablemente al realizar la transformada de Fourier, específicamente transformando ambos lados de la igualdad y aplicando el teorema de la convolución:

$$G_2(f_X, f_Y) = H(f_X, f_Y) \cdot G_1(f_X, f_Y), \quad (2.23)$$

siendo $G_2(f_X, f_Y)$ y $G_1(f_X, f_Y)$ los espectros de las señales de entrada y de salida del sistema lineal invariante, $H(f_X, f_Y)$ es la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, definida de manera extendida:

$$H(f_X, f_Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(f_X\xi + f_Y\eta)] d\xi d\eta. \quad (2.24)$$

Dicha función H es llamada la *función de transferencia del sistema*, indica los efectos del sistema en el dominio de la frecuencia. La tediosa operación de realizar una convolución ha sido reducida a una mera multiplicación escalar gracias a la transformación frecuencial que proporciona la transformada de Fourier.

Además, gracias a las ecuaciones (2.23) y (2.24) se observa que ahora la entrada puede ser descompuesta no solo en un conjunto de δ , sino que el espectro de la señal de entrada puede también ser interpretado como una suma de exponenciales complejas, para varias frecuencias espaciales (f_X, f_Y) . La multiplicación del espectro de entrada G_1 con la función de transferencia H , tiene en cuenta los efectos del cada una de las señales elementales que conforman el sistema. La transformada inversa de Fourier del resultado de la operación G_2 da como resultado g_2 , sumando el efecto de las señales elementales modificadas.

2.2. Introducción al fenómeno de difracción

Se define difracción como cualquier derivación de los rayos de luz de sus trayectorias rectilíneas que no pueda ser interpretada como reflexión o refracción[4]. La difracción es causada por el confinamiento de las regiones laterales de las ondas, y es más apreciable cuando este confinamiento es comparable a la longitud de la onda de radiación. Este fenómeno no debe ser confundido con el efecto de penumbra. Cuando una fuente de luz provoca que esta se propague a través de una

pequeña apertura, esta lo hace sin desviar su trayectoria de sus haces de luz, como se aprecia en la figura 2.8:

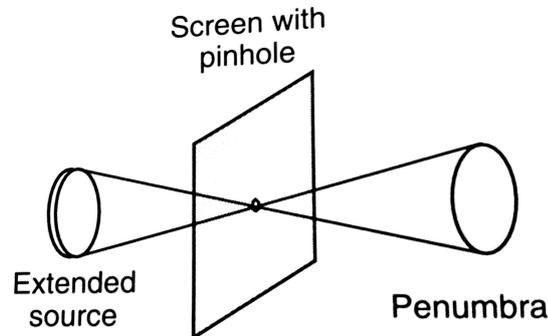


Figura 2.8: Efecto penumbra[4].

La primera descripción e investigación sobre este fenómeno fue realizada y publicada en el año 1665 por Grimaldi, poco antes de su muerte. En sus experimentos utilizaba un aparato similar al de la figura 2.9. Una apertura en una caja opaca era iluminada por una fuente, escogida lo suficientemente pequeña para que el efecto penumbra fuera despreciable. La luz se proyectaba sobre un plano a cierta distancia detrás de la apertura. La teoría corpuscular de la propagación de la luz predecía que la sombra detrás de la apertura en el plano de proyección sería abrupta y bien definida, sin embargo, las observaciones de Grimaldi concluyeron que las transiciones entre la luz y las sombras eran graduales. Estos efectos no podían ser explicados por la teoría corpuscular de la luz, la cual requiere una propagación rectilínea de los rayos en ausencia de refracción y reflexión.

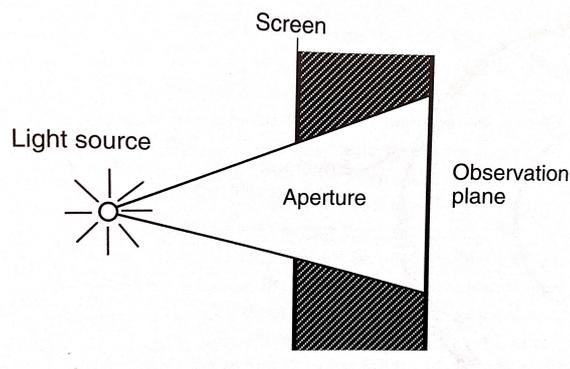


Figura 2.9: Experimento de difracción de Grimaldi [4].

Un paso inicial en la evolución de una teoría que pudiera explicar los efectos que se producen en el experimento de Grimaldi, viene de la mano del primer defensor de la teoría de la luz como onda, Christian Huygens, en el año 1678. Huygens propuso la intuitiva afirmación de que si cada punto de la perturbación fuera considerado como una nueva fuente de un frente de on-

da secundario, entonces el frente de onda en un instante posterior podría ser hallado mediante la construcción de la curva contorno de todas las ondas secundarias. Posteriormente Thomas Young, un físico inglés fortaleció la teoría de ondas de la luz introduciendo el concepto de interferencia. En 1818 el famoso científico Agustín Jean Fresnel agrupó las ideas de Huygens y Young, permitiendo la interferencia de frentes de onda secundarios. De este modo Fresnel consiguió calcular la distribución de la luz en patrones con gran precisión. En el año 1869 Maxwell identificó la luz como una onda electromagnética, pero no fue hasta 1882 cuando Gustav Kirchhoff consiguiera mostrar las amplitudes y fases de las ondas generadas como frentes de ondas secundarios, los cuales mostraban ciertas evidencias del comportamiento de la luz como onda. Dichas afirmaciones fueron posteriormente corroboradas y finalmente se estableció el llamado principio de Huygens-Fresnel, el cual debe ser considerado como una primera aproximación, pero que conseguía relacionarse muy bien con lo experimental en un gran número de condiciones. Esta teoría fue modificada por Sommerfeld, quien eliminó una de las asunciones relativas a la amplitud de la luz en el contorno haciendo uso de la teoría de la función de Green, quedando como la teoría de la difracción de Rayleigh-Sommerfeld.

Se debe destacar que las teorías mencionadas eran simplificaciones y aproximaciones. La luz era tratada como un fenómeno escalar, despreciando la naturaleza vectorial de los campos electromagnéticos. Sin embargo, experimentos en la región del espectro de las microondas han revelado que la teoría escalar es muy precisa cuando se cumple que la apertura es muy grande en comparación con la longitud de onda y que los campos difractados no se deben observar demasiado cerca de la apertura difractante. Dichas condiciones se cumplirán en los problemas que se traten de ahora en adelante.

2.2.1. El espectro angular de las ondas planas

Es posible formular la teoría de la difracción escalar en un entorno que se asemeje teóricamente a sistemas lineales invariantes. Como se verá, si la distribución del campo de una perturbación monocromática es analizada por Fourier a través de cualquier plano, las componentes espaciales de Fourier pueden ser identificadas como ondas planas viajando en diferentes direcciones a través de dicho plano. La intensidad de campo en cualquier otro punto (a través de cualquier plano paralelo) puede ser calculada añadiendo las contribuciones de esas ondas planas, teniendo en cuenta los desfases que puedan sufrir durante la propagación[4].

El espectro angular y su interpretación física

[4]Suponemos que dado un sistema de fuentes monocromáticas, una onda cuya incidencia es transversal a un plano (x, y) se propaga en dirección positiva por un eje z . Este campo viene

representado por $U(x, y, 0)$, siendo evaluado en este caso para $z = 0$. El objetivo es calcular el campo resultante $U(x, y, z)$ que aparece a través de un segundo plano paralelo a una distancia z positiva en el eje de distancias con respecto al plano situado en $z = 0$. En este plano $z = 0$ la función U tiene una transformada bidimensional de Fourier tal que:

$$A(f_X, f_Y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)] dx dy. \quad (2.25)$$

Como se señalaba en los apartados anteriores, la transformada de Fourier es una descomposición de funciones complicadas en otras más simples (exponenciales complejas). Para demostrar esto escribimos U como la transformada inversa de su espectro:

$$U(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(f_X, f_Y, 0) \exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)] df_X df_Y. \quad (2.26)$$

Para tratar de dar sentido físico a las funciones en el integrando o fuera de la integral, se considera la forma de una onda simple propagándose por el vector \vec{k} , donde \vec{k} tiene magnitud $\frac{2\pi}{\lambda}$ y tiene direcciones cosenos (α, β, γ) . Entonces, una onda plana tiene una representación compleja de la forma:

$$p(x, y, z; t) = \exp[j(\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\pi\nu t)], \quad (2.27)$$

donde $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ es una posición del vector, mientras que:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{z}). \quad (2.28)$$

Si se suprime la dependencia con el tiempo, el fasor complejo de la onda plana a través del plano z constante es:

$$p(x, y, z) = \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}) = e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}\gamma z}. \quad (2.29)$$

Nótese que las direcciones cosenos están relacionados por: $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$. A través del plano $z = 0$, una exponencial compleja $\exp[j2\pi(f_X x + f_Y y)]$ debe ser considerada como una onda plana propagándose en las direcciones cosenos:

$$\alpha = \lambda f_X, \quad \beta = \lambda f_Y, \quad \gamma = \sqrt{1 - (\lambda f_X)^2 - (\lambda f_Y)^2}. \quad (2.30)$$

En la descomposición de Fourier de U , la amplitud compleja de la componente espacial frecuencial de la onda plana (f_X, f_Y) es simplemente $A(f_X, f_Y; 0) df_X df_Y$, evaluada en $(f_X = \alpha/\lambda, f_Y = \beta/\lambda)$. Por tanto la función:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, 0) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy, \quad (2.31)$$

es llamada el *espectro angular* de la perturbación $U(x, y, 0)$.

Propagación del espectro angular

Se considera ahora el espectro angular de la perturbación U a través de un plano paralelo a los ejes (x, y) pero a una distancia z de este. Sea la función $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda, z)$ que representa el espectro angular de la función $U(x, y, z)$, esto es[4]:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy. \quad (2.32)$$

Una vez establecidas las definiciones, se tratará de averiguar una relación entre $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda, 0)$ y $A(\alpha/\lambda, \beta/\lambda, z)$, de este modo los efectos de propagación sobre el espectro angular de la perturbación serán evidentes. Para ello U puede ser escrito como:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) \exp\left[j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda}. \quad (2.33)$$

Además, se debe satisfacer la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 U + \vec{k}^2 U = 0$, en todos los puntos que no sean la fuente. Aplicando dicha propiedad directamente sobre la ecuación (2.33) da lugar a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dz^2} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 (1 - \alpha^2 - \beta^2) A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = 0. \quad (2.34)$$

Cuya solución elemental podría ser escrita de la siguiente manera:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z\right). \quad (2.35)$$

Este resultado demuestra que cuando las direcciones coseno (α, β) satisfacen $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, como todas las direcciones coseno deben, el efecto de la propagación con la distancia es simplemente un cambio de las fases relativas de los componentes del espectro angular. Como cada componente se propaga en un ángulo diferente, cada una viaja a través de diferentes distancias y entre dos planos paralelos, y por tanto se introducen distintos retardos de fase. De todos modos, cuando (α, β) satisfacen que $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ se debe dar una interpretación diferente. Siendo $A(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0)$ la transformada de Fourier de una distribución de campo tal que sus condiciones de contorno son impuestas en el plano de la apertura, es posible que el espectro contenga componentes que satisfagan la condición planteada. Bajo estas condiciones, α y β no pueden seguir interpretándose como direcciones coseno. Ahora la ecuación (3.11) puede ser reescrita como:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, 0\right) \exp(-\mu z) \quad (2.36)$$

donde $\mu = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}$. Si tomamos que μ es un número real positivo, dichas componentes ondulatorias son rápidamente atenuadas por el fenómeno de propagación. Estas componentes se llaman *ondas evanescentes* y son parecidas a las que se producen en una guía de onda de microondas funcionando por debajo de su frecuencia de corte. Como en este ejemplo, funcionando por

debajo del corte, estas ondas evanescentes no transportan energía más allá de la apertura. Finalmente, la perturbación dependiente de (x, y, z) puede ser escrita en términos del espectro angular inicial mediante la transformada inversa, obteniendo:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}, z\right) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z\right) \times \text{circ}\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \exp\left[j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] d\frac{\alpha}{\lambda} d\frac{\beta}{\lambda}. \quad (2.37)$$

Donde la función circ representa los límites de la región de integración donde la condición $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ se satisface. Nótese que no existen componentes más allá de la onda evanescente de corte que contribuyan a $U(x, y, z)$. Esto es la razón fundamental por la cual ningún sistema óptico convencional puede ser resuelto con una estructura periódica cuyo periodo es más pequeño que la longitud de onda de la radiación de trabajo. El trabajo está centrado en elementos ópticos convencionales, para los cuales las ondas evanescentes son despreciables.

Efectos de una apertura difractante en el espectro angular

Se supone un plano infinito y opaco que contiene una estructura difractante en $z = 0$. Se considerarán ahora los efectos de esa pantalla difractante en el espectro angular de la perturbación. Se define la *función de transmitancia en amplitud* de una apertura al cociente entre una amplitud de campo $U_t(x, y, 0)$ y una amplitud de campo incidente $U_i(x, y, 0)$ para las coordenadas (x, y) en el plano $z = 0$ [4]:

$$t_A(x, y) = \frac{U_t(x, y, 0)}{U_i(x, y, 0)}. \quad (2.38)$$

Entonces $U_t(x, y, 0) = U_i(x, y, 0) \cdot t_A(x, y)$ y por el teorema de la convolución podemos relacionar un espectro angular de un campo incidente $A_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$ con el espectro angular de un campo transmitido $A_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$:

$$A_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \left[A_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \otimes T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \right]. \quad (2.39)$$

Donde se define $T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$ como:

$$T\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \iint_{-\infty}^{\infty} t_A(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] dx dy. \quad (2.40)$$

Y donde \otimes representa la convolución de dos señales. El espectro angular de la perturbación transmitida es la convolución del espectro angular de la onda incidente con un segundo espectro angular característico de la estructura difractante. Para el caso de una onda plana de amplitud unidad iluminando la estructura difractante, normalmente el resultado toma la siguiente solución simple:

$$A_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \quad (2.41)$$

Y por tanto en ese caso:

$$A_t \left(\frac{\alpha}{\lambda'}, \frac{\beta}{\lambda} \right) = \delta \left(\frac{\alpha}{\lambda'}, \frac{\beta}{\lambda} \right) \otimes T \left(\frac{\alpha}{\lambda'}, \frac{\beta}{\lambda} \right) = T \left(\frac{\alpha}{\lambda'}, \frac{\beta}{\lambda} \right). \quad (2.42)$$

Entonces, el espectro angular transmitido se halla directamente mediante la transformada de Fourier de la amplitud de la función de transmitancia de la apertura. Nótese que si la estructura difractante es una apertura cuyos límites se encuentran dentro de la distribución de campo, el resultado es una expansión del espectro angular de la distribución, debido a las propiedades básicas de las transformadas de Fourier. Cuanto más pequeña sea la apertura, más expandido será el espectro angular detrás de la misma.

2.3. Difracción de Fresnel y Fraunhofer

En este apartado del trabajo, la atención se centra en ciertas aproximaciones de la teoría general de la difracción. Aproximaciones que permitirán el cálculo de patrones de difracción reduciéndolos a simples operaciones matemáticas. Estas aproximaciones, que son comúnmente utilizadas en muchos campos que tienen que ver con propagación de ondas, serán llamadas aproximaciones de *Fresnel* y *Fraunhofer*. Se tiene en consideración el punto de vista del fenómeno de propagación de las ondas como un sistema, y deben ser válidas para una amplia variedad de entradas de distribuciones de campo [4].

2.3.1. Principio de Huygens-Fresnel en coordenadas rectangulares

Antes de introducir las aproximaciones del principio de Huygens-Fresnel, se debe establecer primero un sistema de coordenadas rectangular sobre el que trabajar. Como se observa en la figura 2.10, la apertura descansa sobre el plano de coordenadas (ξ, η) y es iluminado en la dirección positiva z , el campo se calculará a través del plano (x, y) , el cual es paralelo al (ξ, η) y normal a la distancia z . Ambos planos se encuentran centrados en los orígenes de coordenadas para cada base tridimensional.

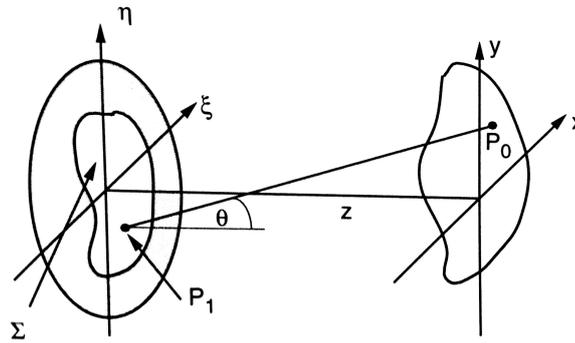


Figura 2.10: Geometría para problemas de difracción [4].

Una vez definido el entorno de la aproximación, se define el principio de Huygens-Fresnel como:

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos \theta \, ds, \quad (2.43)$$

donde θ es el ángulo entre el vector normal \hat{n} y el vector \vec{r}_{01} que apunta desde P_0 hasta P_1 . El término $\cos \theta$ viene dado por $\cos \theta = \frac{z}{r_{01}}$, y por tanto la ecuación de Huygens-Fresnel puede ser reescrita como:

$$U(x, y) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2} \cos \theta \, d\xi \, d\eta, \quad (2.44)$$

donde la distancia r_{01} viene dada por $r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Tan solo se han utilizado dos aproximaciones para lograr la última expresión. Una de estas dos aproximaciones es inherente a la teoría escalar. La segunda es la asunción de que la distancia de proyección z es muchas veces mayor a la longitud de onda del campo iluminante $r_{01} \gg \lambda$. A continuación se desarrollan aproximaciones adicionales.

2.3.2. La aproximación de Fresnel

Para reducir la expresión del principio de Fresnel a una ecuación más sencilla, se introducen las aproximaciones para la distancia r_{01} [4]. Estas aproximaciones están basadas en la expansión binomial de la raíz cuadrada. Sea un número b menor que la unidad, se considera la siguiente expansión en series de Taylor de la expresión $\sqrt{1+b}$:

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots \quad (2.45)$$

donde el número de términos necesario para una precisión determinada depende de la magnitud b . Para aplicar la expansión binomial al problema de la ecuación de Huygens-Fresnel, sacando el factor z de la ecuación de r_{01} obtenemos:

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2}. \quad (2.46)$$

Sea el término b el segundo y tercer término de la raíz cuadrada, entonces quedando solo con los dos primeros términos del desarrollo se tiene que:

$$r_{01} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right]. \quad (2.47)$$

La cuestión ahora es averiguar cuando se deben tener en cuenta más términos en la aproximación o porqué no es suficiente en todos los casos solo con el primero. Para r_{01}^2 que aparece en el denominador de la ecuación (2.44), el error introducido al eliminar todos los términos excepto z es aceptablemente pequeño. Sin embargo para el r_{01} que aparece en el exponente, los errores son mucho más críticos debido a los factores por los que está multiplicado, como k (del orden de 10^7) en la región visible del espectro. Además los cambios de fase de unos pocos radianes pueden cambiar el valor de la exponencial significativamente. Por ello retenemos al menos dos términos de la aproximación. La expresión del campo en (x, y) es entonces:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left[j \frac{k}{2z} \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right) \right] d\xi d\eta \quad (2.48)$$

Se ha incorporado los límites finitos de la apertura en la definición de $U(\xi, \eta)$ de acuerdo con las condiciones de contorno asumidas. Se puede expresar entonces el campo en $U(x, y)$ como una convolución expresada de la siguiente manera:

$$U(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.49)$$

donde el núcleo de la convolución es:

$$h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (2.50)$$

Se factoriza el término $\exp \left[\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right]$ quedando finalmente la integral:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) e^{j \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2)} \right\} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta)} d\xi d\eta. \quad (2.51)$$

donde se reconocen a ambos lados de los factores de multiplicación, las transformadas de Fourier del producto del campo complejo a la entrada de la apertura y una fase cuadrática exponencial. Las ecuaciones (2.48) y (2.51) se denominan las *Integrales de la Difracción de Fresnel*. Las cuales se cumplen cuando el observador se encuentra en la zona de difracción de Fresnel, es decir, en la zona de campo cercano a la apertura.

2.3.3. La aproximación de Fraunhofer

Antes de introducir algunos ejemplos de patrones de difracción calculados por la interfaz, se considera otra aproximación importante, que cuando es válida simplifica enormemente los cálculos. Como se introduce en la ecuación (2.51), en la región de difracción de Fresnel, se observa

que un campo $U(x, y)$ puede ser obtenido mediante el producto de la distribución de la apertura $U(\xi, \eta)$ y una función cuadrática de fase $\exp [j(k/2z)((\xi^2 + \eta^2))]$. Si se añade además de la aproximación de Fresnel, la aproximación de Fraunhofer resulta en [4]:

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{2}. \quad (2.52)$$

Si esta condición se satisface, entonces el factor cuadrático de fase en la integral de difracción de Fresnel (2.51) es aproximadamente unitario sobre la totalidad de la apertura, y el campo observado puede ser calculado directamente de la transformada de Fourier de la distribución de la propia apertura. Además en la región de *difracción de Fraunhofer*, o también llamada campo lejano se cumple que:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left[-j\frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta. \quad (2.53)$$

A ambos lados de los factores multiplicativos que preceden a la integral, esta expresión es simplemente la transformada de Fourier de la distribución de la apertura, evaluada en las frecuencias $f_x = x/(\lambda z)$ y $f_y = y/(\lambda z)$. Una condición un poco menos restrictiva, conocida como la fórmula del diseñador de antenas establece que para una apertura de dimensión máxima D , la aproximación de Fraunhofer viene dada por la distancia:

$$z > \frac{2D^2}{\lambda}. \quad (2.54)$$

Los patrones de difracción de Fraunhofer pueden ser vistos a distancias mucho más pequeñas que las establecidas por la ecuación (2.54), sin embargo se debe establecer que la apertura es iluminada por una onda esférica, lo cual implica un aumento de la complejidad de cálculo. La aproximación de Fraunhofer no es más que un caso específico de la aproximación de Fresnel, esto es por lo cual se pueden calcular campos difractados en la región de Fraunhofer, conservando la precisión de la aproximación de Fresnel.

2.3.4. Ejemplos de patrones de difracción de Fraunhofer

Los resultados que se van a desarrollar en este apartado, pueden ser aplicados directamente para calcular las distribuciones complejas de campo a través de los patrones de difracción de Fraunhofer para una apertura arbitraria dada. Aún así el interés primario de este capítulo es evaluar intensidades de campo de los patrones de difracción de Fraunhofer, sin embargo existe una componente en fase que es inherente a dichos cálculos [4].

Apertura rectangular

Se considera una apertura rectangular con una transmitancia en amplitud:

$$t_A(\xi, \eta) = \text{rect}\left(\frac{\xi}{2\omega_X}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{\eta}{2\omega_Y}\right) \quad (2.55)$$

Las constantes ω_X y ω_Y corresponden a la mitad de las anchuras de la apertura situada en el plano (ξ, η) . Si la apertura es iluminada por una onda plana de amplitud unitaria y monocromática, entonces la distribución de campo a través de la apertura es igual a la transmitancia t_A . Por lo tanto aplicando la ecuación (2.53), el patrón de difracción de Fraunhofer es:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z} F\{U(\xi, \eta)\}|_{f_X=x/(\lambda z), f_Y=y/(\lambda z)} \quad (2.56)$$

Teniendo en cuenta que $F\{U(\xi, \eta)\} = A \cdot \text{sinc}(2\omega_X f_X) \text{sinc}(2\omega_Y f_Y)$, donde A es el área de la apertura, en nuestro caso al ser rectangular queda $A = 4\omega_X\omega_Y$. Por lo tanto sustituyendo:

$$U(x, y) = \frac{e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z} \cdot A \cdot \text{sinc}(2\omega_X f_X) \text{sinc}(2\omega_Y f_Y) \quad (2.57)$$

Para ilustrar el ejemplo con mayor claridad, en la figura 2.11 se muestra una imagen del módulo de un patrón de difracción correspondiente a una apertura rectangular con una relación entre sus dimensiones de $\omega_X/\omega_Y = 2$

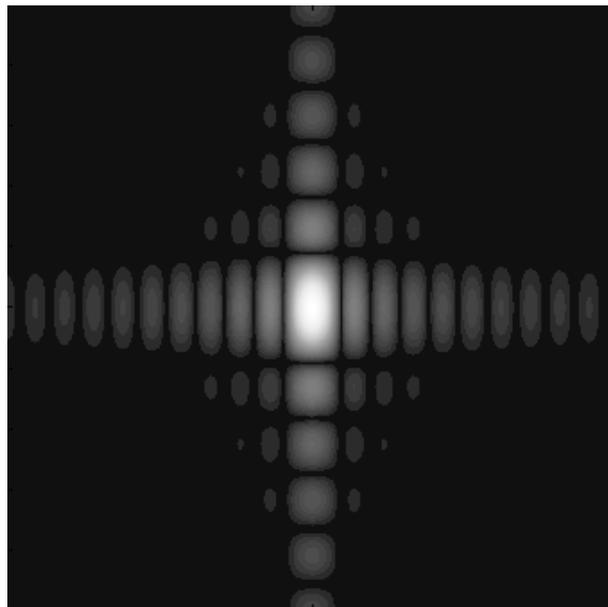


Figura 2.11: Módulo del patrón de difracción para apertura rectangular $\omega_X/\omega_Y = 2$.

Apertura circular

Se considera una apertura difractante circular de radio ω . Siendo q la coordenada radial del plano de la apertura, la transmitancia en amplitud de la apertura es:

$$t_A(q) = \text{circ} \left(\frac{q}{\omega} \right). \quad (2.58)$$

Dada la simetría circular del problema, se utilizará la transformada de Fourier en su forma de transformada de Fourier-Bessel. Entonces, si el radio r es el radio en el plano de proyección, tenemos:

$$U(r) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp \left(j \frac{kr^2}{2z} \right) B \{ U(q) \} \Big|_{\rho=r/(\lambda z)}, \quad (2.59)$$

donde $q = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ representa el radio en el plano de la apertura, y $\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ representa el radio en el dominio de la frecuencia espacial. Para una onda plana incidente monocromática y unitaria, el campo transmitido por la apertura es equivalente a su transmitancia. Además

$$B \left\{ \text{circ} \left(\frac{q}{\omega} \right) \right\} = A \frac{J_1(2\pi\omega\rho)}{\pi\omega\rho}, \quad (2.60)$$

donde $A = \pi\omega^2$ y J_1 es la función de Bessel de orden 1. La amplitud del patrón de difracción en este caso será al sustituir:

$$U(r) = e^{jkz} \exp \left(j \frac{kr^2}{2z} \right) \frac{A}{j\lambda z} \left[2 \frac{J_1(k\omega r/z)}{k\omega r/z} \right]. \quad (2.61)$$

La figura 2.12 muestra una sección del patrón de difracción generado a partir de una apertura circular

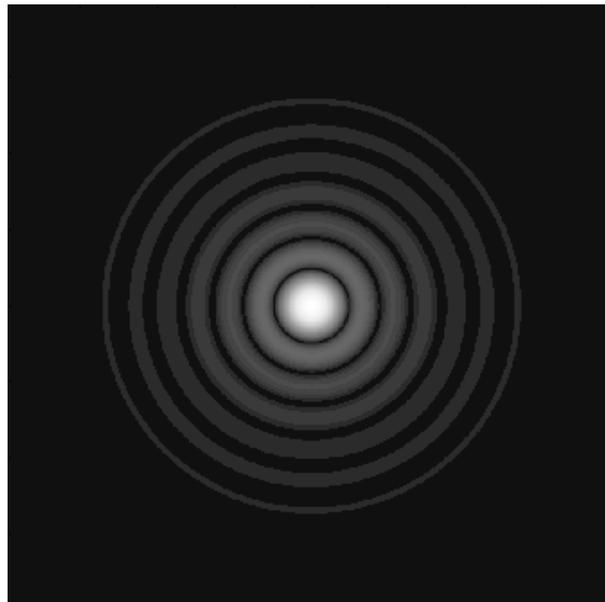


Figura 2.12: Patrón de difracción para apertura circular.

2.4. Sistemas ópticos lineales

2.4.1. Modelo general

Se asume que un sistema óptico de interés está compuesto no solo por una sola lente, sino por un sistema de lentes, tanto positivas como negativas, con varias distancias entre ellas. Se asume, sin embargo, que el sistema produce una imagen real en el espacio. Se agrupan todos los elementos dentro de una caja negra, donde las propiedades de la misma resultan del conjunto de elementos que lo componen. Se define la distancia z_0 como la distancia desde la apertura difractiva al sistema de lentes y z_1 como la distancia de las mismas al punto de enfoque [6].

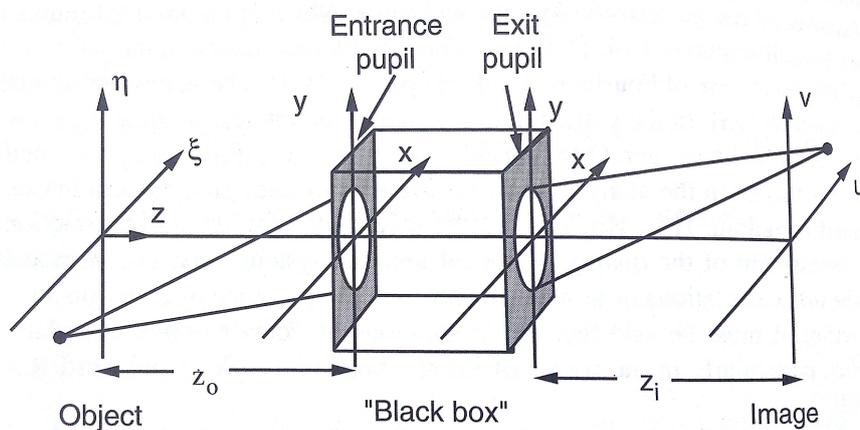


Figura 2.13: Modelo general para un sistema óptico [6]

Se asume que el paso de la imagen por la entrada y salida del sistema está perfectamente descrito por óptica geométrica. Las imágenes de entrada y salida del sistema óptico, tanto en el plano de coordenadas (ξ, η) como en el (u, v) son equivalentes. La imagen que llega al sistema caja negra, es la consecuencia de que el frente de onda incidente atraviese la apertura difractiva, y por tanto el objetivo del sistema de lentes intermedio es el de compensar dichos efectos difractivos y recuperar en el plano de enfoque la imagen de entrada.

2.4.2. Función de dispersión de punto

Uno de los conceptos básicos usados en óptica de Fourier es la función de dispersión de punto (*Point Spread Function*, o PSF). Esta función sirve para describir un sistema óptico complejo como la superposición lineal de imágenes de fuentes puntuales simples. Este concepto permite plantear problemas de imágenes de manera cuantitativa, tales como el desenfoque. Una imagen

de un objeto es una superposición de imágenes de todos los puntos que componen dicho objeto. En un sistema óptico ideal, cada punto del objeto se vería representado como el conjugado de si mismo en el plano de la imagen. Sin embargo, en el caso de desenfoque, los rayos que emergen del mismo objeto, no tienen su intersección en el plano de la imagen, sino en el plano conjugado al objeto que genera la imagen actual. Cada punto de la imagen genera a la salida de la lente una imagen, la cual es consecuencia de la interacción con la llamada función de dispersión de punto o PSF. Si se asume que la PSF no cambia para distintos puntos de un mismo objeto, el efecto de desenfoque puede ser descrito como la convolución de la imagen bien enfocada, con la PSF [7]. En muchos casos se supone que la forma de la PSF no varía para cualquier punto del objeto, independientemente de la distancia al plano de enfoque ideal. Entonces se puede describir la función PSF como una función de forma S con un factor de escalado σ , que varía según la distancia z :

$$PSF_z(x) = \frac{S\left(\frac{x}{\sigma(z)}\right)}{\int S\left(\frac{x}{\sigma(z)}\right) d^2x} \quad (2.62)$$

Quedando representado en la ecuación como x las variables espaciales. El denominador normaliza la PSF a $\int PSF_z(x) d^2x = 1$, forzando a la preservación de los valores en escala de grises. En la mayoría de los casos es suficiente con sustituir σ por el radio del círculo de desenfoque ϵ .

En el espacio de Fourier, la convolución se convierte en una multiplicación de la transformada de Fourier del objeto con la transformada de Fourier de la PSF. El resultado de la transformada de Fourier de la PSF se llama función de transferencia óptica (OTF). Sus valores expresan la transferencia de estructuras espaciales para distintas longitudes de onda a través del sistema óptico.

$$\begin{aligned} \text{Dominio Espacial} &\rightarrow G(x) = OTF(x) \otimes O(x) \\ \text{Dominio de Fourier} &\rightarrow \hat{G}(k) = P\hat{S}F(k) \cdot \hat{O}(k) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Una función de transferencia óptica típica actúa como un filtro paso bajo, eliminando las frecuencias espaciales altas, esto es los detalles de alta resolución.

2.4.3. Lentes y la transformada óptica de Fourier

Una lente está compuesta por un material óptico denso, generalmente vidrio, con un índice de refracción de aproximadamente 1.5 donde la velocidad de la propagación de la perturbación que incide sobre ella es menor que la velocidad de propagación en el aire [7].

Una de las propiedades más destacables y útiles de las lentes convergentes es su habilidad inherente para realizar transformadas de Fourier bidimensionales. Esta complicada operación

análoga puede ser implementada con extremada simplicidad en un sistema óptico coherente, aprovechando las leyes básicas de la propagación y difracción de la luz. La figura 2.14 muestra la geometría del problema,

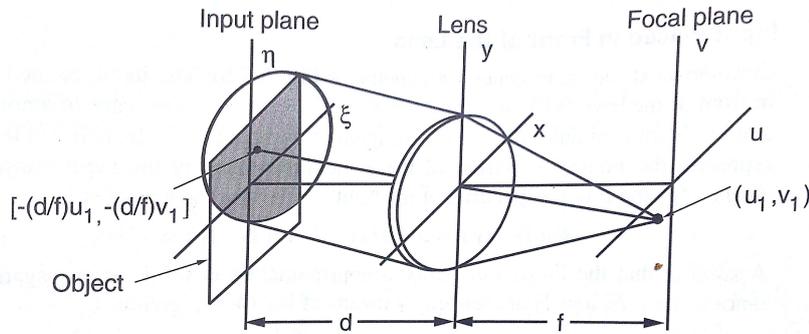


Figura 2.14: El área sombreada en el plano (ξ, η) representa la zona de la entrada que contribuye a la transformada de Fourier.[7]

donde el plano (ξ, η) es el plano donde descansa la apertura, el plano (x, y) donde descansa la lente y el plano (u, v) es el plano donde se encuentra el foco de la lente convergente.

La imagen de entrada, para ser transformada debe modular en amplitud la luz de entrada. La entrada más simple posible es una fuente monocromática situada enfrente de la lente. Para una lente infinita, la distribución en el plano del enfoque ideal sería:

$$I(u, v) = \frac{I_0}{\lambda^2 f^2} \left| \iint_{-\infty}^{\infty} t_A(x, y) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda f} (xu + yv)} dx dy \right|^2. \quad (2.64)$$

Por tanto $I(u, v)$ es proporcional a la potencia del espectro de la función de transmisión $t_A(x, y)$, esto es, la imagen de entrada a la lente para una fuente puntual infinita. Modificar la distancia d , entre la señal de entrada y el plano de la lente, tan solo genera cambios de fase, y por tanto no influye en la distribución de intensidad. Para tener en consideración las dimensiones finitas de la lente, una función P es incluida en la formulación. Dicha función es 1 dentro de la lente, y 0 fuera de la apertura. De este modo puede ser descrita una apertura de forma arbitraria. Incluyendo la función P , la ecuación queda como:

$$I(u, v) = \frac{I_0}{\lambda^2 f^2} \left| \iint_{\infty}^{\infty} t_A(x, y) P\left(x + \frac{d}{f}u, y + \frac{d}{f}v\right) e^{-j \frac{2\pi}{\lambda f} (xu + yv)} dx dy \right|^2. \quad (2.65)$$

Las distribuciones de amplitud y de fase en el plano del enfoque ideal, corresponden al espectro de Fourier de la señal de entrada, y la intensidad de la distribución a la potencia del espectro.

2.5. Cámaras oscuras y formación de la imagen.

Hasta ahora en apartados anteriores se ha presentado un sistema óptico como un conjunto de elementos capaces de formar una imagen a partir de una señal de entrada. Estos sistemas ópticos pueden ser más simples que los presentados en la introducción, el más simple de todos es el sistema mostrado en la figura 2.15 y que se conoce como cámara oscura.

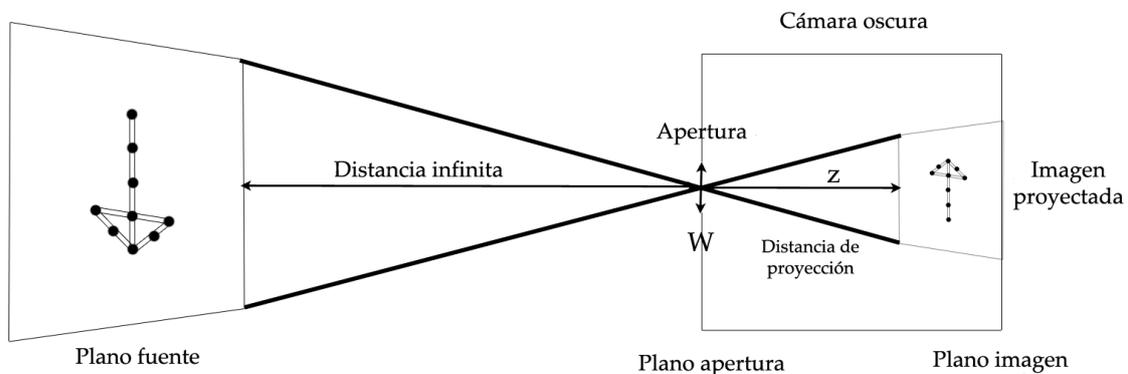


Figura 2.15: Esquema del sistema de Cámara Oscura

En este sistema se tiene un elemento fuente que radia a una distancia infinita del plano de la apertura de la cámara, es por tanto la superposición de los frentes de ondas planos de cada uno de los elementos puntuales del plano fuente. Al atravesar la apertura, y debido a los fenómenos difractantes que en ella se producen, se realiza una transformada de Fourier del frente de onda de entrada, recuperándose una imagen distorsionada por la apertura. Este efecto puede ser explicado con un ejemplo bidimensional.

Sea una delta situada a una distancia infinita del plano de la apertura, o equivalentemente, una fuente situada a una distancia finita con una lente plano-convexa que realice el efecto de la transformada de Fourier, debido a dicho efecto, lo que llega a la apertura es una señal plana. Al atravesar la apertura, cuya transmitancia es una función binaria correspondiente a un pulso cuadrado bidimensional, se multiplican ambas funciones y se realiza una transformada de Fourier. Este proceso se ilustra en las figuras 2.16 y 2.17.

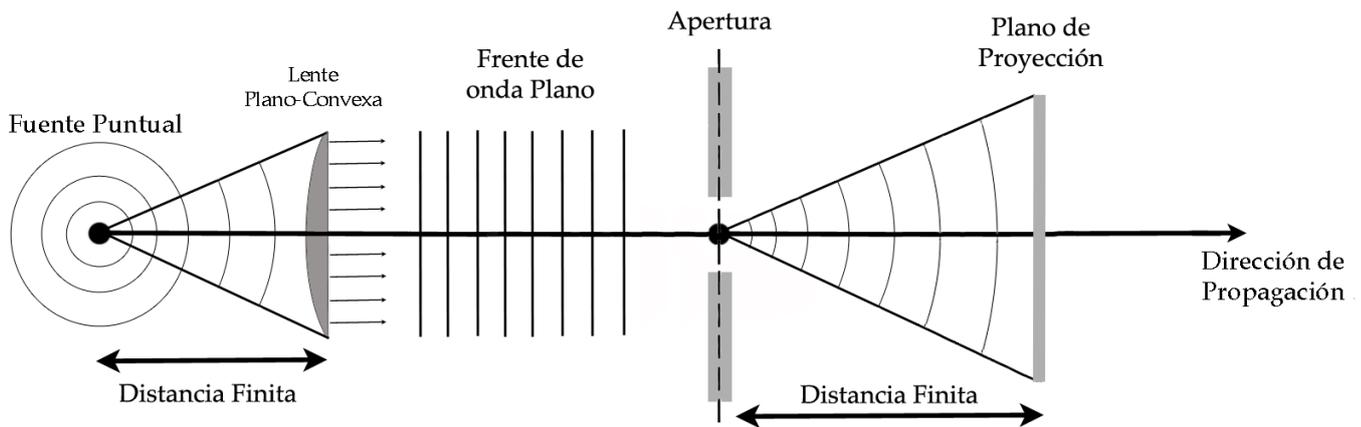


Figura 2.16: Propagación a través de la apertura.

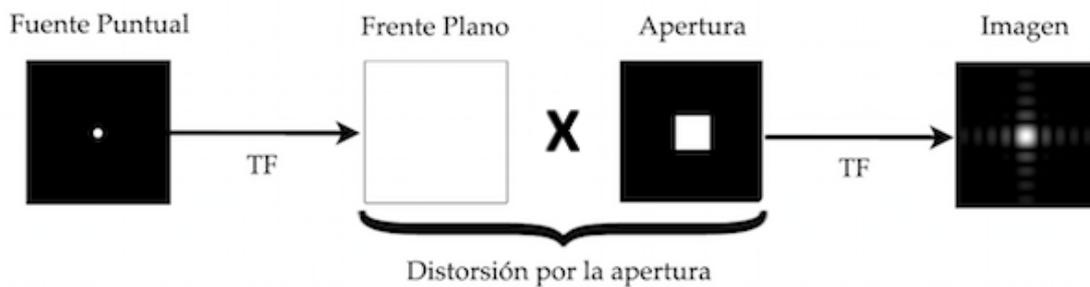


Figura 2.17: Esquema de efectos de la apertura.

Como se observa, la distorsión en la imagen recuperada es dependiente de la forma de la propia apertura. Si se hubiera hecho pasar el frente de onda plano por una apertura circular, cuya transmitancia sería una matriz binaria con un pulso circular, el resultado de la transformada de Fourier hubiera sido una sinc con simetría circular en el plano de la imagen proyectada.

Se puede concluir que a pesar de la distorsión que provocan en la proyección de las imágenes, las aperturas son necesarias para la formación de las mismas. El paso de un frente de onda por una apertura (de un tamaño cercano al de su longitud de onda), provoca en dicho frente una transformación de Fourier que devuelve la señal a su dominio original, generando una imagen de la fuente, que puede ser proyectada y procesada.

A lo largo del proyecto se harán estudios para determinar algunos aspectos relativos al tamaño de la apertura, frecuencia de la señal entrante, o la distancia de proyección en la formación de imágenes, así como estudios para imágenes con más de una fuente puntual.

2.6. Deconvolución para recuperación de la imagen

En ciertas aplicaciones, es posible que sea interesante recuperar la imagen lo más parecida a la fuente posible, es decir, eliminando en la medida de lo posible las distorsiones provocadas por la apertura en la propia generación de la imagen [10]. Esto es posible mediante la deconvolución de la imagen con la función de transmitancia de la apertura conocida. En este apartado se desarrolla el proceso matemático para la obtención de la imagen mediante la deconvolución.

Considérese una imagen caracterizada por su distribución de intensidad $I(x, y)$, correspondiente a la observación de una imagen real $O(x, y)$ a través de un sistema. Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, la relación entre los datos y la imagen real es una convolución como se dijo anteriormente:

$$I(x, y) = (O * t)(x, y) + N(x, y), \quad (2.66)$$

donde $t(x, y)$ es la función de transferencia del sistema (*Point Spread Function*, PSF, si se trata de un sistema óptico en el dominio frecuencial), y donde $N(x, y)$ es ruido aditivo. De tal manera en el espacio de Fourier tenemos:

$$\hat{I}(u, v) = \hat{O}(u, v)\hat{T}(u, v) + \hat{N}(u, v), \quad (2.67)$$

siendo (u, v) variables frecuenciales espaciales. Se quiere determinar $O(x, y)$ sabiendo $I(x, y)$ y $t(x, y)$. Este problema inverso, ha sido consecuencia de una gran cantidad de trabajo, debido a ciertas dificultades como la existencia de una frecuencia de corte de la PSF, y el ruido aditivo. La ecuación (2.67) es un problema en la práctica mal condicionado, es decir, que tiene varias soluciones, en función por ejemplo de si se supone un ruido Gaussiano o de Poisson. Los distintos algoritmos iterativos discretos tienen en cuenta unos u otros criterios.

El principal problema de realizar deconvoluciones de imágenes con aperturas, es la determinación de los contrastes en los bordes y las fases de las distintas configuraciones. La PSF, es la transformada de Fourier de la función de transferencia del sistema. La relación entre el objeto y la imagen que atraviesa el sistema es una convolución:

$$I(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} O(x, y)t(x - X, y - Y)dXdY, \quad (2.68)$$

donde $P(x, y)$ es la PSF del sistema. Se quiere determinar de nuevo $O(x, y)$ a la salida del sistema siendo $I(x, y)$ y $P(x, y)$ conocidas. La relación en el dominio transformado queda como:

$$I(\hat{u}, \hat{v}) = \hat{O}(u, v)\hat{T}(u, v). \quad (2.69)$$

Esta ecuación no puede ser resuelta a no ser que $|\hat{T}(u, v)| \neq 0$. Evidentemente, este no es el caso para síntesis de aperturas, no existiendo entonces una solución ideal. Sin embargo, existen una gran cantidad de algoritmos que son capaces de conseguir una imagen muy parecida al objeto en observación realizando un proceso deconvolutivo. Dependiendo de para que aplicación se necesite, existen diferentes algoritmos que tienen en cuenta los diferentes factores que influyen para

cada caso particular.

En resumen, es necesario para la recuperación de la imagen original a la salida del sistema óptico, realizar un proceso de deconvolución que tenga en cuenta la topología de la apertura de entrada al sistema, las perturbaciones de ruido que se produzcan además de otros factores determinantes como la frecuencia del frente de onda entrante.

Como se comenta en la introducción, se pretende desarrollar una herramienta en Matlab que calcule patrones de difracción a partir de determinados parámetros de entrada (dimensiones, distancia de proyección y frecuencia), que describen una apertura y el sistema por el cual se propaga la onda difractada. Como se ha visto en el apartado (2.3.4), a partir de una ecuación de la apertura se puede obtener una expresión matemática que represente el patrón de difracción de la misma. El primer paso es conseguir el mismo resultado a partir de la ecuación del patrón y operando sobre la apertura como se hace en las ecuaciones (2.55, 2.56, 2.57) para el caso de la apertura rectangular. Cuando se consigan los mismos resultados para ambos casos entonces se puede generalizar la herramienta para cualquier apertura de entrada. A continuación se desarrollan algunos pasos para lograr la implementación de la herramienta:

3.1. Especificaciones teóricas

Sean $f_X = \frac{x}{\lambda z}$ y $f_Y = \frac{y}{\lambda z}$ las variables frecuenciales espaciales utilizadas para la transformada de Fourier en la ecuación (2.56), donde $x = -X_{max} : \Delta x : X_{max}$. Se definirá Δx como un parámetro de resolución fijo en $\lambda/30$ y que se especifica porque se fija ese valor en el Apartado 3.2. Las variables X_{max} e Y_{max} son unos parámetros que expresan la distancia máxima desde el centro del plano de proyección del patrón de difracción (x, y) , hasta sus límites. Estos parámetros coinciden

con ξ_{max} y η_{max} en el plano (ξ, η) donde descansa la apertura. El cálculo de estos parámetros se desarrolla posteriormente. Si se despeja la x de la expresión de las variables frecuenciales se puede conseguir una expresión de la resolución Δx :

$$x = \lambda \cdot z \cdot f_X \longrightarrow \Delta x = \lambda \cdot z \cdot \Delta f_X \quad (3.1)$$

Se tiene una apertura en el plano (ξ, η) , la cual se discretiza. Se quiere hacer la transformada de Fourier bidimensional de N puntos para construir la ecuación (2.57). Para poder dar una expresión a ese número de puntos con el que realizar la transformada se debe despejar de la expresión de la variable frecuencial Δf_X para el caso analógico, en el cual, según las propiedades de las transformadas de Fourier, se cumple que para una transformada de N puntos:

$$\Delta f_{xc} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\Delta \xi} \quad (3.2)$$

Por tanto si se despeja N de las ecuaciones (3.1) y (3.2) se obtiene la siguiente expresión:

$$N = \frac{\lambda \cdot z}{\Delta x \cdot \Delta \xi} \quad (3.3)$$

donde se considera que los parámetros de resolución Δx y $\Delta \xi$ son iguales y fijos. Sin embargo, la notación diferente se debe a que cada una es la resolución en el eje x y ξ de los planos (x, y) y (ξ, η) .

Como se observa, para poder realizar una transformada de Fourier discreta, debemos discretizar una apertura dada por la ecuación que la define en el dominio continuo. Así pues, y siguiendo el proceso de muestreo y transformación que se observa en la figura 3.1, conseguimos el patrón de difracción de la apertura de entrada. El periodo de muestreo espacial resultado de discretizar estas señales es $\Delta \xi$ y $\Delta \eta$ para cada dimensión del plano de la apertura.

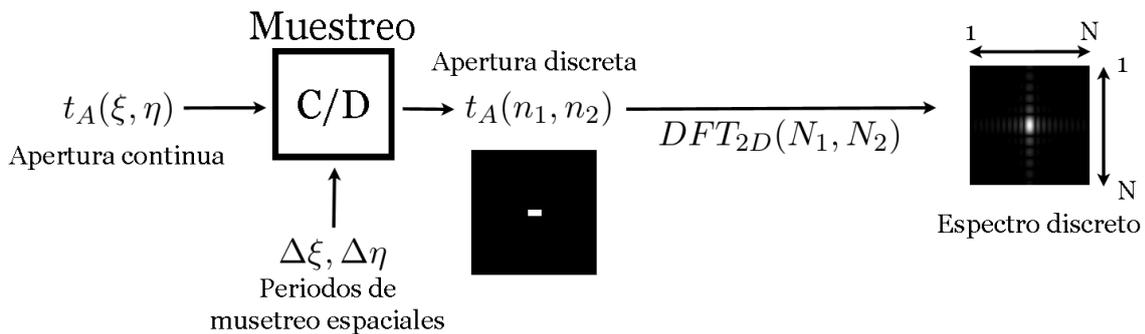


Figura 3.1: Proceso de muestreo y generación de espectro discreto

Hasta ahora se han realizado discretizaciones de señales continuas y transformaciones bidimensionales, en la figura 3.2 se pretende hacer una aclaración visual de los límites de ciertas variables para su mejor comprensión.

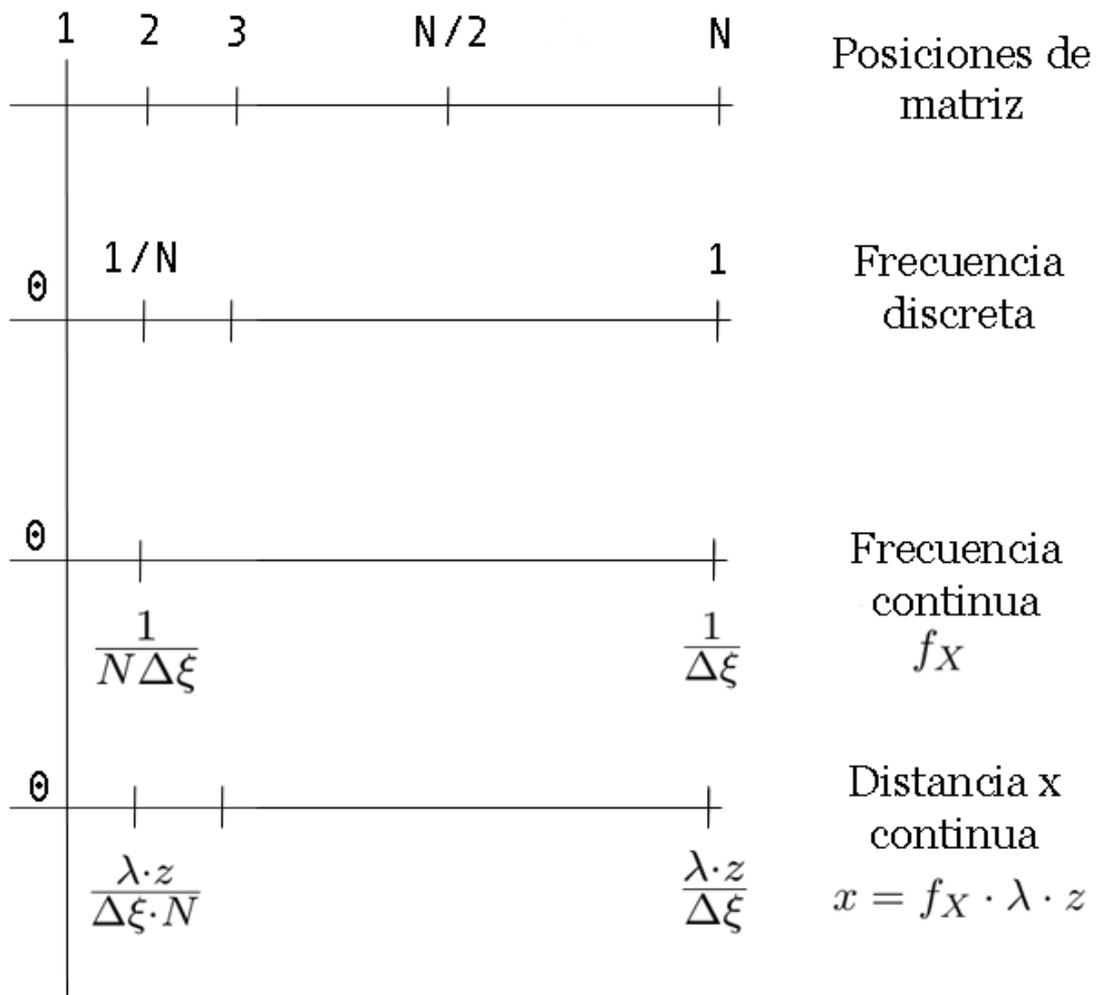


Figura 3.2: Gráfica resumen de algunas variables en el dominio transformado.

Finalmente, para conseguir la expresión de la ecuación (2.57), se debe multiplicar el resultado de la transformada de Fourier de la apertura discreta por un término en fase que termina de definir el patrón de difracción complejo como tal:

$$\frac{e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z}. \quad (3.4)$$

La transformada de Fourier bidimensional de la apertura discretizada es periódica, es decir, a partir de cierto valor del espectro, se produce una repetición infinita de los mismos patrones. No siempre veremos representada una secuencia periódica de patrones, puesto que la representación que se realiza es finita. Las representaciones de los patrones de difracción, se realizan en un plano de longitud máxima por eje de $2 \cdot X_{max}$ y $2 \cdot Y_{max}$, en una matriz de N puntos con N/2 puntos a ambos lados de un valor central 0. No todos los valores de la matriz del patrón de difracción calculada serán representativos en algunos casos, por tanto se podrán realizar recortes de n_0 puntos

a ambos lados del valor central 0. Por tanto se establece la condición de que:

$$n_0 \leq \frac{N}{2}. \quad (3.5)$$

Para aclarar la situación del recorte del patrón, la figura 3.3 pretende representarlo de una manera más visual para un caso unidimensional:

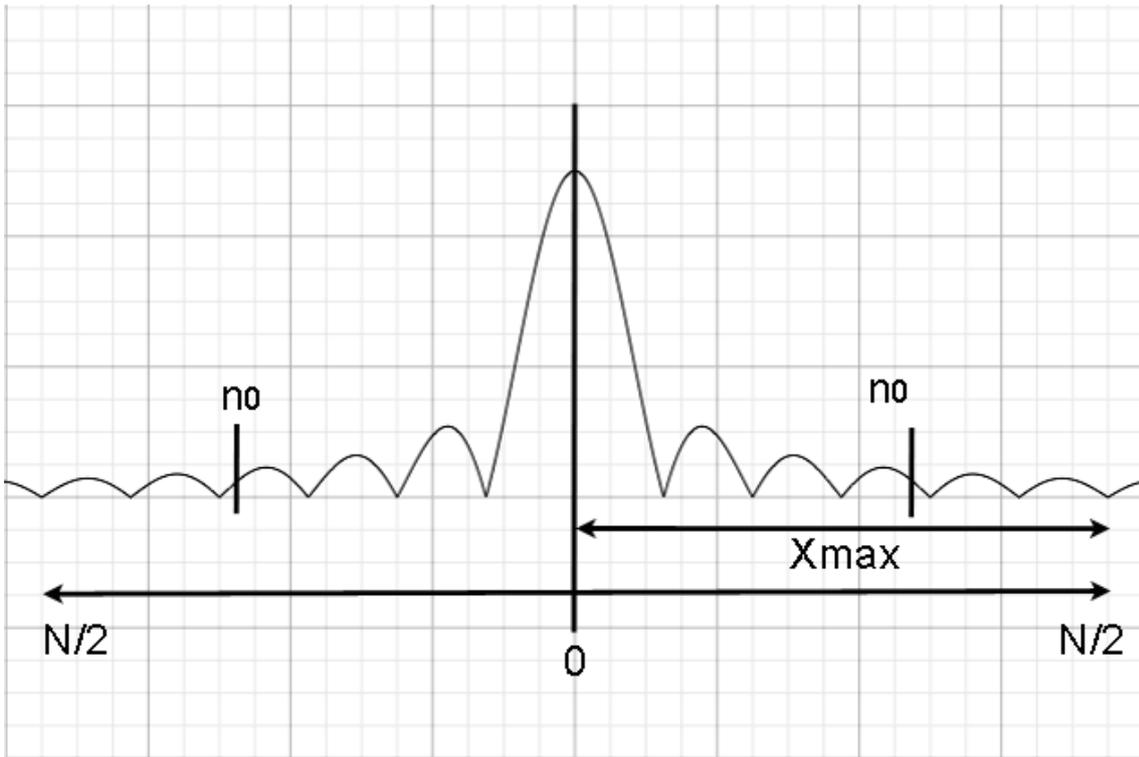


Figura 3.3: Ejemplo de recorte para un n_0 arbitrario, en el caso unidimensional.

Dicho recorte, puede verse como el patrón de difracción que se vería a medida que se aumenta la distancia z , puesto que el haz de ondas difractadas tienden a expandirse con la distancia, a medida que esta aumenta, tendremos representado para una misma distancia X_{max} menos información. Para dar interpretación física al recorte, se pretende relacionarlo con z , λ , X_{max} y N . Por ello y sabiendo que $X_{max} = \frac{N}{2} \cdot \Delta\xi$, se calcula n_0 mediante la siguiente expresión:

$$n_0 = \frac{X_{max}}{\frac{\lambda z}{\Delta\lambda N}} = \left[\frac{X_{max} \Delta\eta N}{\lambda z} \right]. \quad (3.6)$$

Una vez se han definido todos los parámetros necesarios para representar el problema que se trata, se realiza un script en Matlab que evalúa las dos representaciones del patrón de difracción, por el método analítico, calculando las ecuaciones que definen el patrón de difracción, y por el método numérico, mediante el cálculo de la transformada de Fourier bidimensional de la apertura discreta.

3.2. Comparación del cálculo analítico con numérico

Se desarrolla un script en Matlab que realiza el cálculo numérico del patrón de difracción de una apertura rectangular que cumple que $\omega_X/\omega_Y = 2$ a una distancia z igual a la distancia mínima de Fraunhofer a la que tienen sentido las ecuaciones. Se calcula por otro lado el patrón de difracción de manera numérica, es decir, realizando la transformada de Fourier bidimensional de la apertura rectangular discreta de entrada, y multiplicándola por el término de fase de la expresión analítica.

El script realiza los cálculos de los parámetros necesarios para la representación numérica, (n° de puntos de la transformada, X_{max}) a partir de las entradas que definen la apertura, la frecuencia y la distancia de proyección z . Para el caso rectangular se introducen las dimensiones en metros de la apertura para las dos dimensiones ξ y η del plano de la apertura. Una vez se han generado las matrices de datos que corresponden a los patrones de difracción calculados por ambos procedimientos, se representa en módulo y se evalúa el resultado (vease figura 3.4)

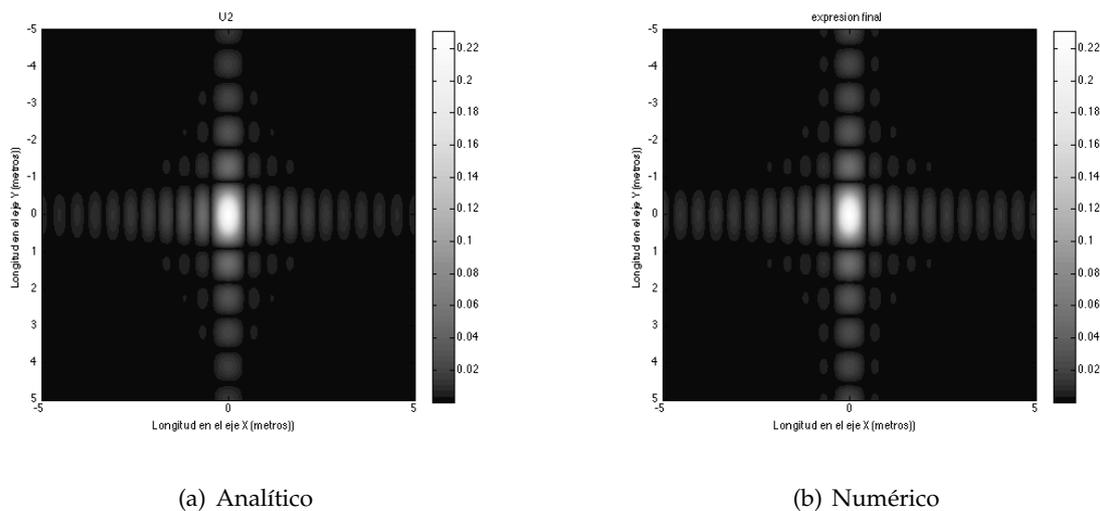


Figura 3.4: Comparación del cálculo analítico con el numérico.

Los dos patrones de difracción calculados son prácticamente iguales con un error que se considera suficientemente pequeño dada una cierta resolución. En el siguiente apartado se realiza la diferencia de los dos patrones de difracción calculados variando el valor de la resolución, con el objetivo de definir una resolución suficiente para el cálculo. Visto esto, se concluye que la herramienta que realiza el cálculo numérico funciona correctamente, y está lista para ser implementada de manera general.

3.3. Cuantificación error según resolución

El único parámetro que se establece de manera fija en el programa es la resolución Δ a la hora de discretizar la apertura. De este parámetro dependen el resto de valores calculados a lo largo de la ejecución del programa, como el número de puntos de las transformadas de Fourier o las distancias X_{max} . El valor que se le ha dado a este parámetro es resultado de una evaluación del error cometido en la generación del patrón de difracción con respecto al resultado analítico. Si se representa el error cometido en el cálculo del patrón de manera analítica y numérica, el resultado es un conjunto de valores que oscilan siguiendo un patrón similar al de los patrones de difracción generados. Sin embargo, el módulo de este error crece a medida que se mide a mayor distancia de la zona central de la matriz del patrón. Para distintas resoluciones introducidas, la siguiente tabla muestra los errores máximos y medios entre el patrón numérico y analítico:

Δ	Error Máximo	Error Medio
$\lambda/5$	0.0398	0.01
$\lambda/10$	0.0232	0.0031
$\lambda/20$	0.0106	$8,1375 \cdot 10^{-4}$
$\lambda/30$	0.0076	$4 \cdot 10^{-4}$
$\lambda/50$	0.0043	$1,57 \cdot 10^{-4}$

Puesto que los valores más significativos se encuentran más cercanos a la zona central de la matriz de datos, se considera admisible el error para una resolución de $\Delta = \lambda/30$. La figura 3.5 muestra la distribución del error en los patrones.

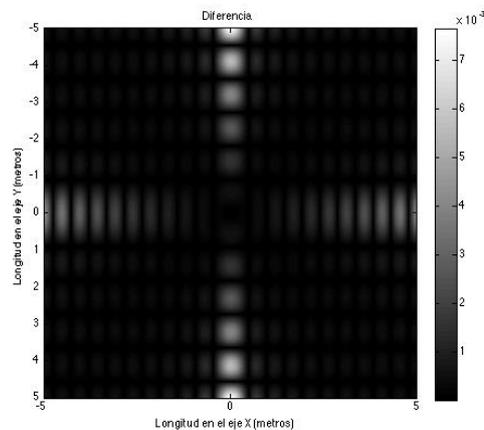


Figura 3.5: Error entre los cálculos numérico y analítico, para $\Delta = \lambda/30$.

3.4. Desarrollo de la interfaz gráfica

Uno de los objetivos del trabajo es el diseño de una interfaz gráfica que permita realizar los cálculos de los patrones de difracción para una apertura dada junto con otras funcionalidades. A continuación en la figura 3.6 se muestra una visión general de la interfaz gráfica implementada en Matlab y se desarrollan los apartados más significativos de la misma.

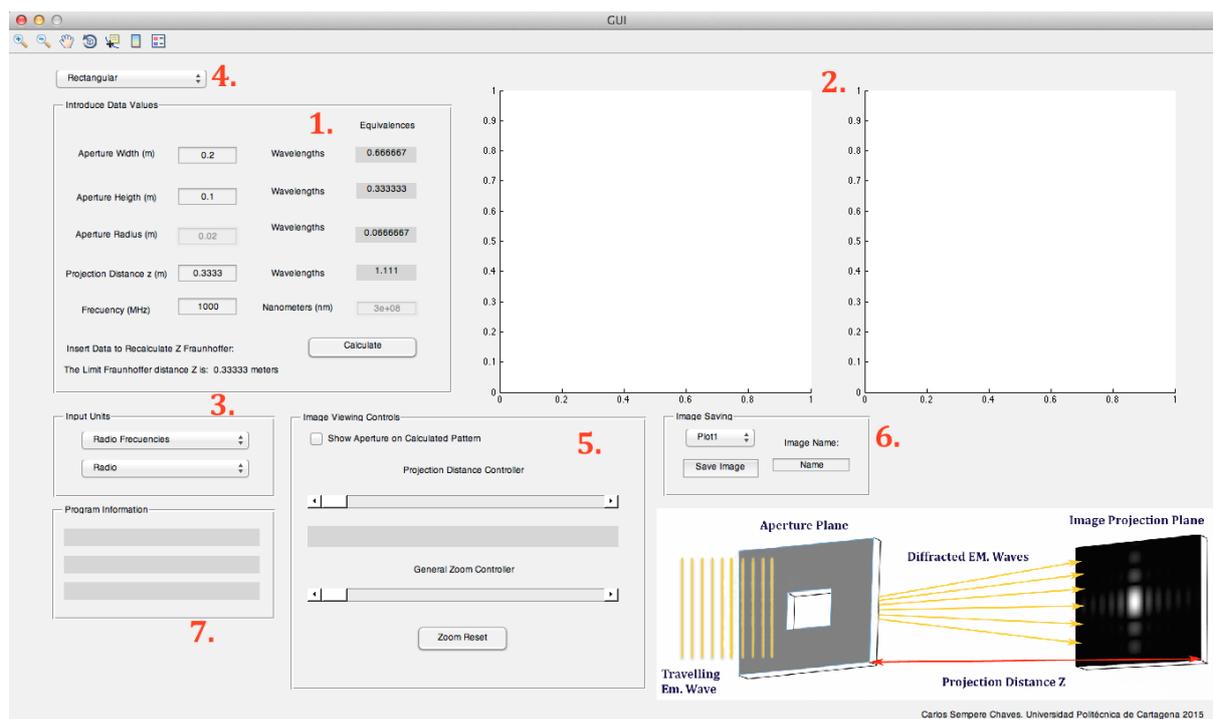


Figura 3.6: Visión general de la interfaz gráfica de usuario.

3.4.1. Panel de introducción de datos

En este panel se encuentran concentrados todas las variables que se pueden introducir para la ejecución del programa, tanto los que definen la apertura, es decir, las dimensiones de la misma, como la frecuencia de trabajo, y distancia de proyección z. Dentro de este panel se encuentra una zona en la que se expresa la equivalencia de los valores introducidos en longitudes de onda según la frecuencia de entrada. Estos valores cambian automáticamente al introducir un nuevo valor de entrada, y tienen el objetivo de conseguir una mejor interpretación del problema en cuestión. Dentro de la zona del panel de introducción de datos también se encuentra un texto de aviso en el que se indica la distancia de Fraunhofer para los datos introducidos, a partir de la cual los cálculos tienen sentido físico. Por último dentro del panel de introducción de datos, se encuentra el botón de calcular, el cual toma los datos de entrada y ejecuta los scripts para la generación de

los patrones de difracción correspondientes a la apertura introducida.

3.4.2. Representación gráfica

Los paneles de representación gráfica tienen como objetivo representar las matrices de salida del programa, por un lado la apertura que se introduce, y el patrón de difracción asociado a la misma. En ellas se indican las dimensiones en las medidas concordantes con las de los parámetros de entrada, y unas barras indicadoras de amplitud.

3.4.3. Selección de unidades

Puesto que el programa pretende ser lo más general posible, existe un panel de selección de unidades, que nos permite escoger entre dos tipos de frecuencias, radiofrecuencias y frecuencias ópticas, la selección de las cuales provoca un cambio en el método de entrada de datos, variando la entrada de frecuencia a longitud de onda respectivamente. Dentro de la opción de frecuencias dentro de la banda de radiofrecuencias, existen cuatro opciones más que permiten introducir la frecuencia en Hz, Mhz y Khz. Además, dependiendo de la opción que se escoja, el resto de entradas también modifica sus unidades, así como las representaciones posteriores están calculadas en función de dichas unidades de entrada.

3.4.4. Opciones de entrada

Una pestaña permite la selección de tres tipos de entrada para el programa:

Apertura rectangular: Seleccionando esta tipo de entrada se activan las opciones de introducción de datos en las direcciones de (ξ, η) sobre los que descansa la apertura.

Apertura circular: Seleccionando ese tipo de entrada se activa la opción de introducción de la dimensión radial que define dicha apertura circular

Apertura arbitraria: Esta opción permite la introducción de una imagen binaria arbitraria al programa. El programa utiliza las variables de entrada para el cálculo del patrón de difracción, ya que éstas no dependen de la apertura, sino de la frecuencia, distancia z y resolución.

3.4.5. Control de visualización

En el panel de control de visualización se encuentran dos *sliders*. El primero altera la visualización del patrón de difracción, controlando la visión en múltiplos de la distancia a la que se representa. Para representar la imagen a la distancia deseada, se realiza el recorte mediante el cálculo del n_0 correspondiente en cada caso, de esta manera se representa la expansión del haz del patrón de difracción a lo largo de la propagación por la distancia z . El segundo *slider* controla un zoom general de ambas representaciones de manera conjunta. Un *checkbox* controla si se desea representar sobre el patrón de difracción una silueta de la apertura que lo genera, visualizando la relación patrón, apertura, distancia de manera más directa .

3.4.6. Guardado de imágenes

Se programa un apartado para el guardado de las imágenes representadas en las gráficas en un archivo en formato PNG, el cual se almacena con el nombre introducido en el panel, en la carpeta del proyecto.

3.4.7. Información de estado del programa

Otra funcionalidad que se implementa es un panel de información del estado del programa. En este se indica si este está listo para calcular o si se encuentra en proceso, el número de puntos con el que se ha realizado la FFT, y el tiempo que se ha empleado en realizar el cálculo. De esta manera se puede controlar el delicado proceso de realizar transformadas de Fourier bidimensionales, que en función del número de puntos, el tiempo de cálculo crece de manera considerable.

3.5. Demostración de propiedades

Se debe demostrar que los scripts que funcionan en la interfaz gráfica Matlab, cumplen una serie de propiedades. Dichas propiedades se basan, en los casos que vamos a demostrar, con propiedades de la transformada de Fourier, linealidad, reciprocidad y desplazamiento.

3.5.1. Demostración de la propiedad de linealidad.

Se debe comprobar que la herramienta cumple la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier. Para dos señales arbitrarias, la transformada de Fourier de la suma de ambas debe de ser igual a la suma de las transformadas realizadas independientemente [1]. Sean dos señales arbitrarias $x_1(t)$ y $x_2(t)$:

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow TF\{x_3(t)\} = X_3(e^{j\omega}) \quad (3.7)$$

$$TF\{x_1(t)\} = X_1(e^{j\omega}) \quad (3.8)$$

$$TF\{x_2(t)\} = X_2(e^{j\omega}) \quad (3.9)$$

$$X'_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) \quad (3.10)$$

Se debe cumplir entonces que $X_3(e^{j\omega})$ sea igual a $X'_3(e^{j\omega})$ para que se cumpla la propiedad de linealidad.

Se hará un estudio de una apertura arbitraria, aperturas rectangulares desplazadas superior e inferiormente de un eje de coordenadas central. Se comprobará la propiedad de linealidad evaluando si el patrón resultante de la suma de los dos patrones generados por cada una de las dos aperturas rectangulares, equivale al patrón que genera la apertura total, producto de la superposición de las dos aperturas rectangulares.

Para ello se cargan las matrices de datos 1000×1000 que representarán las aperturas desplazadas superior e inferiormente en nuestra interfaz Matlab, las cuales se muestran en la figura 3.7.

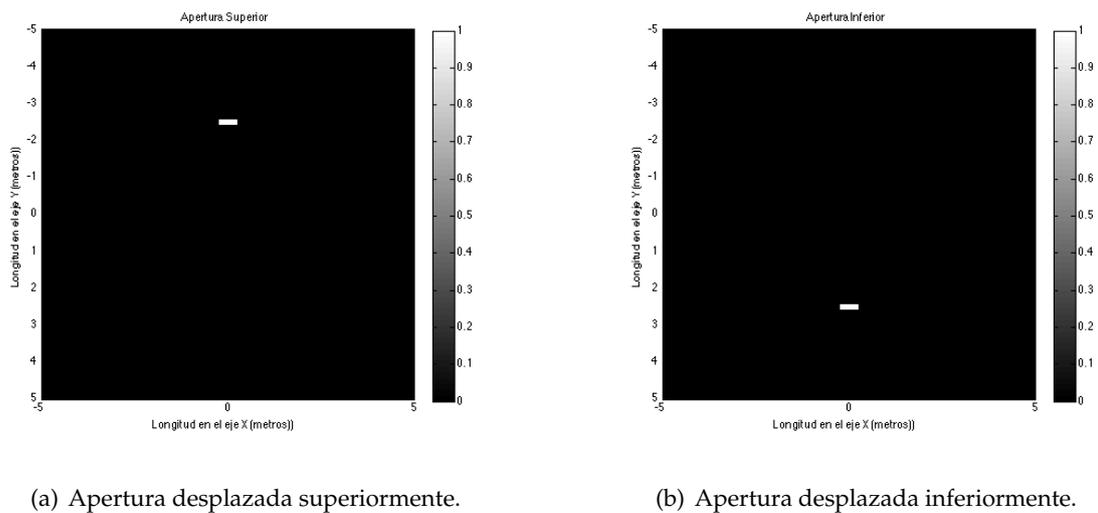


Figura 3.7: Visualización de las aperturas desplazadas.

A continuación se representan los patrones de difracción que generan estas dos aperturas de manera independiente. Se observa que no existe diferencia entre el módulo de estos dos patrones representados, pues se originaron a partir de una misma apertura, pero desplazada. Esto provocará aún así una variación en la fase de los patrones de difracción, esto se desarrollará con más detalle en la demostración de la propiedad de desplazamiento. En la figura 3.8 se muestra el módulo del patrón de difracción para las dos aperturas.

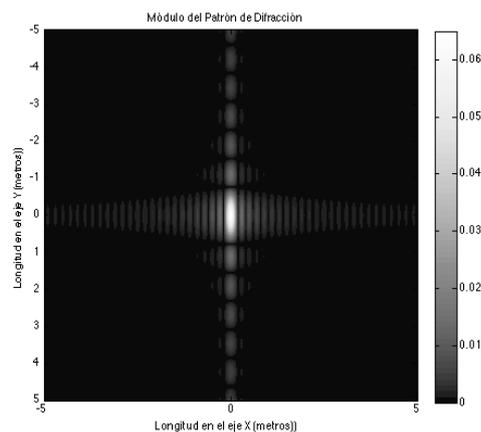


Figura 3.8: Módulo del patrón de difracción generado por las aperturas.

Una vez se han calculado los patrones de las aperturas por separado, se suman ambas matrices de datos, obteniendo la matriz superposición de las aperturas. Para corroborar la propiedad de linealidad, se introduce esta matriz superposición a través de la función de representación de patrones a partir de aperturas arbitrarias, obteniendo el patrón resultante que se muestra en la figura 3.9:

se cumple la propiedad de linealidad de la Transformada de Fourier.

3.5.2. Demostración de reciprocidad

Es interesante a la hora de representar patrones de difracción, saber si es posible recuperar una imagen de una apertura a partir de un patrón de difracción generado por la misma. Se debe cumplir la siguiente propiedad de la transformada de Fourier. [1] Sea una señal arbitraria $x(t)$:

$$TF\{x(t)\} = X(e^{j\omega}), \quad (3.11)$$

$$TF^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x(t). \quad (3.12)$$

Para poder estudiar qué apertura ha generado cierto patrón de difracción, se programa una función en Matlab que toma como parámetros de entrada un patrón de difracción, la frecuencia y distancia a la que ha sido proyectado dicho patrón. Dicha función opera en sentido contrario al programa que genera el patrón de difracción, realizando las mismas operaciones una a una a la inversa. Representando la apertura original que genera el patrón de difracción, así como la apertura recuperada a partir de dicho patrón, junto con la diferencia de estos dos patrones para cerciorarnos de que son exactamente iguales:

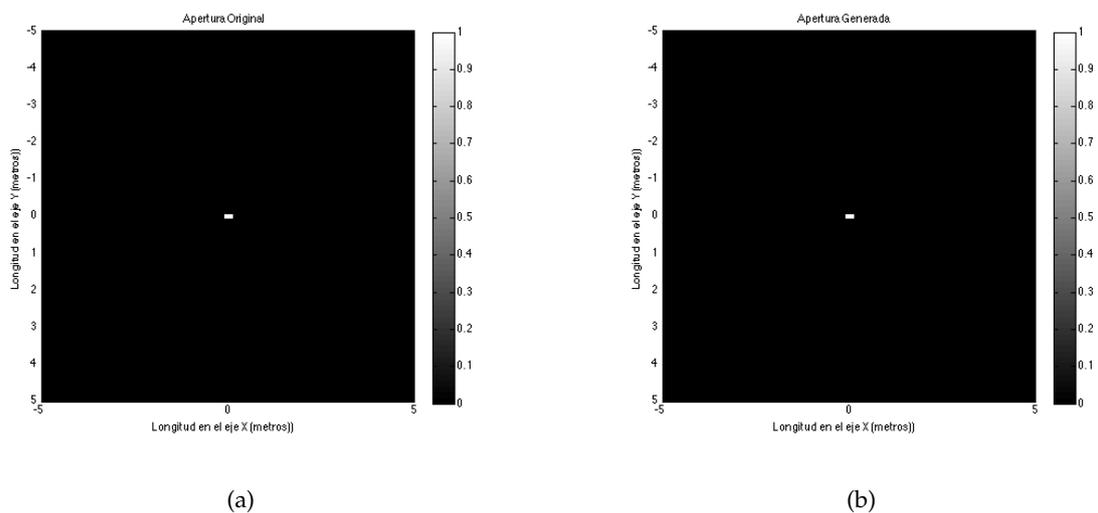


Figura 3.11: Apertura original (a) y apertura recuperada a partir del patrón de difracción (b).

Como se puede observar en la figura 3.12 la diferencia obtenida entre las dos aperturas es cercana a la resolución que nos puede aportar la herramienta Matlab ($\text{eps} = 2.224\text{e-}16$), por lo que se corrobora que se cumple la propiedad de reciprocidad de la transformada de Fourier.

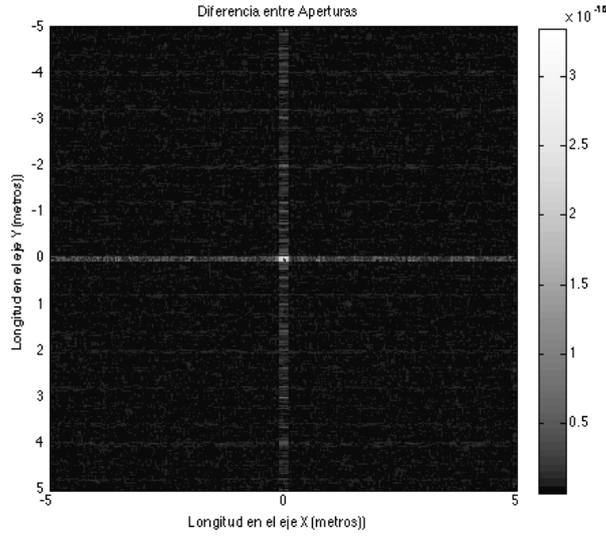


Figura 3.12: Diferencia entre apertura original y recuperada.

3.5.3. Demostración de la propiedad de desplazamiento

La propiedad de desplazamiento de la transformada de Fourier se enuncia de la siguiente manera: Sean dos señales $p_1[n]$ y $p_2[n]$ donde $p_2[n]$ es equivalente a $p_1[n]$ desplazado n_0 muestras, podemos enunciar sus transformadas de Fourier de la siguiente manera [1]:

$$TF\{p_1[n]\} \rightarrow P_1(e^{j\omega}), \quad (3.13)$$

$$TF\{p_2[n] = p_1[n - n_0]\} \rightarrow P_2(e^{j\omega}) = P_1(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega n_0}. \quad (3.14)$$

Donde dichas transformadas pueden expresarse en módulo y fase: $P_1(e^{j\omega}) = |P_1| \cdot (e^{j\angle P_1})$ y $P_2(e^{j\omega}) = |P_2| \cdot (e^{j\angle P_2})$, si se cumple la propiedad de desplazamiento, al hacer el cociente entre $P_1(e^{j\omega})$ y $P_2(e^{j\omega})$ los módulos al ser iguales deben desaparecer de la ecuación y lo que obtendremos será como resultado una exponencial elevada a $(j\omega n_0)$ de la siguiente manera:

$$\frac{P_1(e^{j\omega})}{P_2(e^{j\omega})} = \frac{|P_1| \cdot (e^{j\angle P_1})}{|P_2| \cdot (e^{j\angle P_2})} = e^{j(\angle P_1 - \angle P_2)} = e^{j\omega n_0}. \quad (3.15)$$

Para demostrar la propiedad de desplazamiento de nuestro programa, se debe llevar el caso de estudio a dos dimensiones, sin embargo solo será necesario un desplazamiento en una dimensión para comprobar la propiedad, por lo que de los dos desplazamientos posibles $w_0 n_0 + w_1 n_1$ para cada una de las dos dimensiones en las que se evaluarán las transformadas de Fourier será seleccionada por comodidad la correspondiente al desplazamiento vertical $w_0 n_0$.

Se cargan en el script dos matrices de datos 1000×1000 correspondientes a dos aperturas, una que se encontrará centrada y otra equivalente a la primera pero que ha sufrido un desplazamiento circular de $n_0 = 200$ muestras. Las figuras correspondientes al desplazamiento de la apertura se corresponden con la figura 3.13.

Se calculan $P_1(e^{j\omega})$ y $P_2(e^{j\omega})$ como los patrones de difracción correspondientes a la aperturas centrada ($p_1[n]$) y la apertura desplazada ($p_2[n]$). Lo siguiente será efectuar los cálculos en Matlab para tratar de obtener el valor de la exponencial resultante $e^{j\omega n_0}$ y finalmente mediante el comando "unwrap" en Matlab, obtenemos una matriz de datos que contiene los cálculos de los valores obtenidos. Existen ciertas diferencias para algunos valores de la matriz resultado con respecto al valor esperado n_0 , sin embargo el valor que más aparece es 200. Cumpliéndose así la propiedad de desplazamiento.

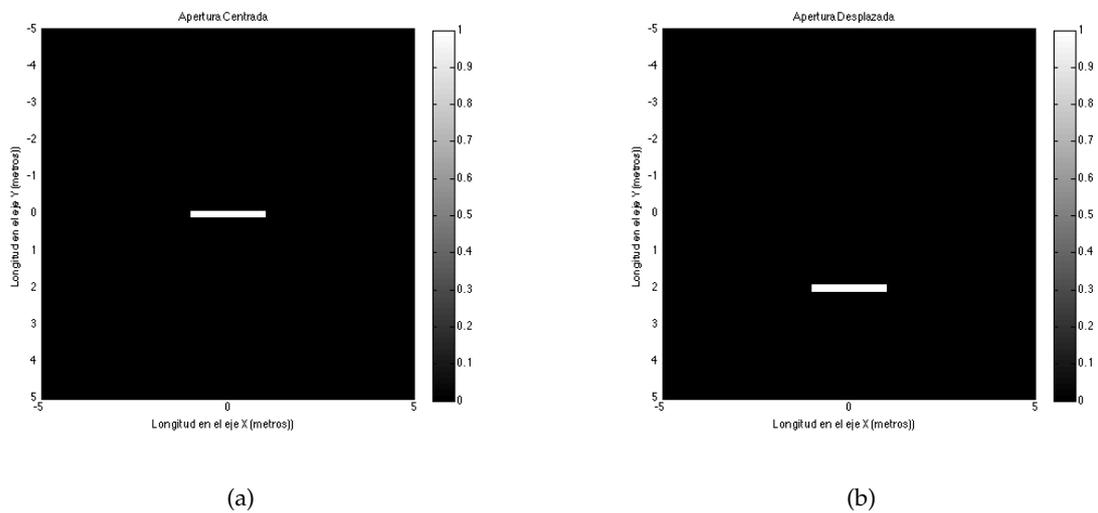


Figura 3.13: Apertura centrada (a) y apertura desplazada 200 muestras (b).

Resultados obtenidos con la interfaz

4.1. Influencia de la forma de la apertura en el patrón.

Se ha demostrado que la forma de la apertura de entrada influye en el patrón de difracción generado por la misma, esto es evidente, puesto que la distribución de los bordes difractantes varía de unas aperturas a otras. Para hacer más visible el efecto de la forma sobre el patrón de difracción, se ha utilizado la herramienta para la representación de algunas aperturas representativas.

4.1.1. Apertura Poligonal

Se introduce en el programa una apertura triangular que se supone iluminada por una fuente puntual situada en el infinito, la cual genera el siguiente patrón de difracción que se muestra en la figura 4.1.

En el patrón quedan representados los efectos asociados a cada uno de los tres límites de la apertura. La perturbación vertical se corresponde con el lateral inferior de la apertura triangular, así como se corresponden las perturbaciones diagonales con el lateral situado en la dirección opuesta a la que apuntan. Se observa una tendencia a reproducir el efecto que se genera en una apertura circular, es decir, una sinc bidimensional en el plano de la proyección del patrón a medi-

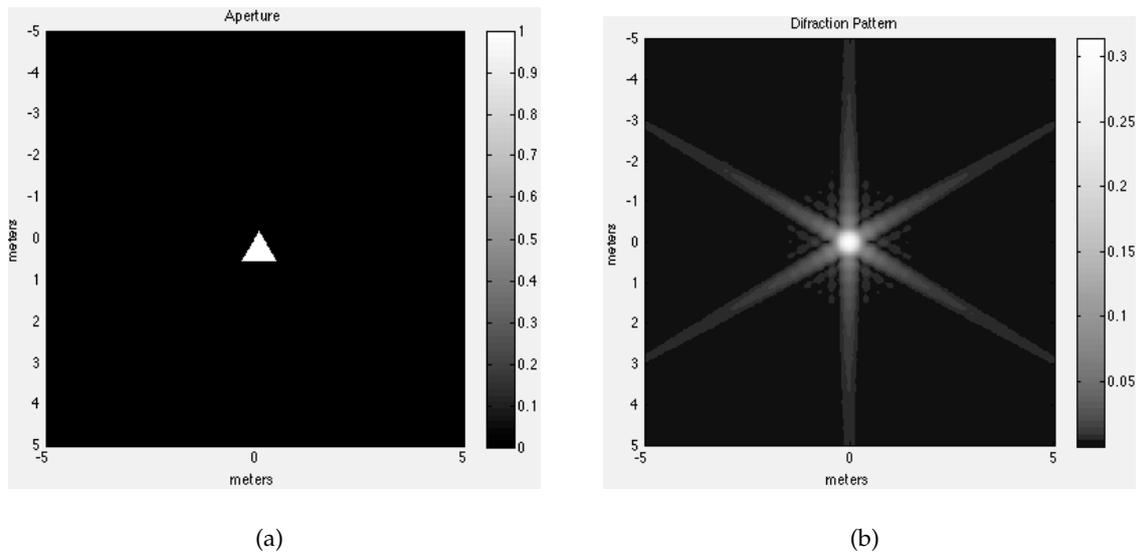


Figura 4.1: Apertura triangular (a) y patrón de difracción generado a partir de ella (b).

da que aumenta el número de lados del polígono que forma la apertura de entrada. Esto se debe a que la contribución de cada lado se superpone con la de los lados contiguos, provocando finalmente con un número de lados tendiendo a infinito, el patrón generado por el círculo, tal y como se aprecia en las figuras 4.2 y 4.3.

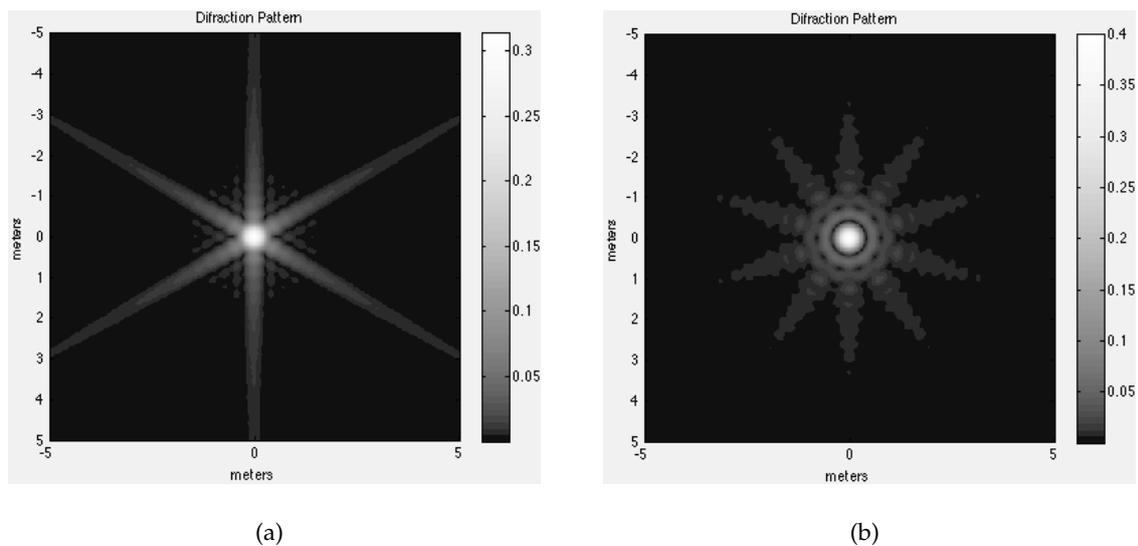


Figura 4.2: Patrón de difracción generado por una apertura triangular (a) y patrón generado por una apertura pentagonal (b)

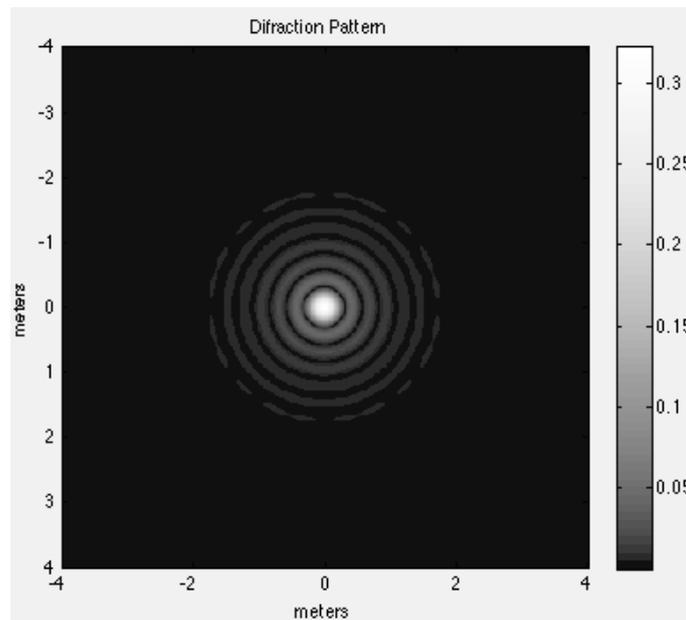


Figura 4.3: Patrón de difracción generado por apertura circular.

Se comprueba por las imágenes 4.2 y 4.3 que se consigue mayor similitud con el patrón generado por una apertura circular a medida que se aumenta el número de lados del polígono.

4.1.2. Número tres

Se carga también una imagen binaria en el programa con forma de número tres, puesto que presenta distintas secciones diferenciadas y se pretende evaluar el efecto de cada una de ellas en el patrón. En la figura 4.4 se muestra la apertura junto con su patrón de difracción.

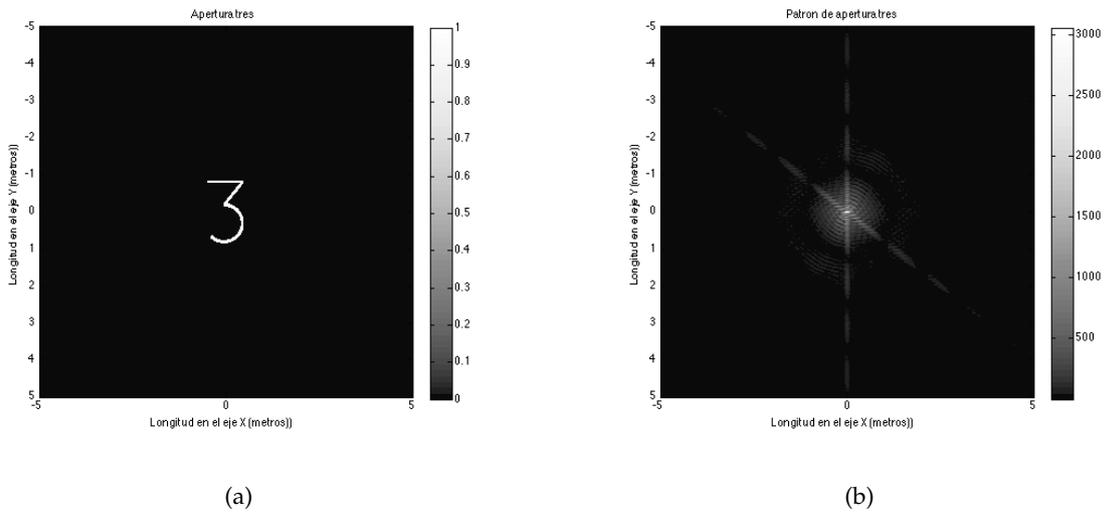


Figura 4.4: Apertura de entrada al programa (a) y patrón de difracción generado(b)

Como se observa, tenemos tres perturbaciones principales superpuestas, una vertical que correspondería a la apertura horizontal superior, una diagonal la cual se encuentra orientada en la dirección opuesta a la sección que la produce, y por último, una perturbación circular correspondiente a la sección inferior del número tres.

4.1.3. Aperturas prácticas

En este apartado, se pretende simular algunas de las aperturas más comunes en sistemas reales como los telescopios o las antenas parabólicas de microondas. En estos sistemas existen elementos reflectores que en ocasiones, bloquean el paso de la señal de cierto modo, modificando la función de transmitancia de la apertura, provocando una serie de patrones de difracción.

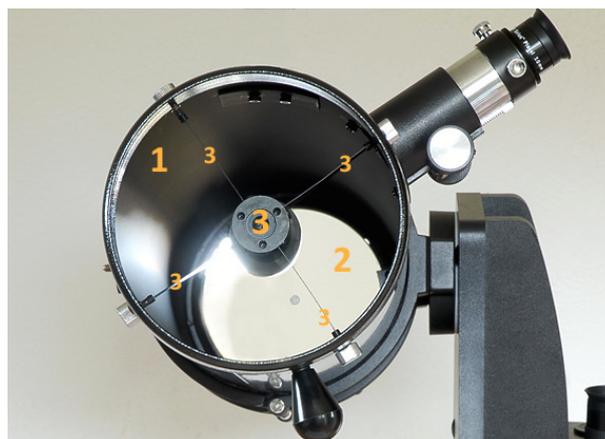


Figura 4.5: Ejemplo de elementos difractantes en telescopio newtoniano circular. [11].

La figura 4.5 se corresponde con un telescopio newtoniano, donde se observan los soportes y el espejo secundario(3) que boquean la luz que atraviesa la apertura(1) y que llegaría al espejo principal(2). El objetivo de este bloqueo es conseguir disposiciones como la que se muestra en la figura 4.6.

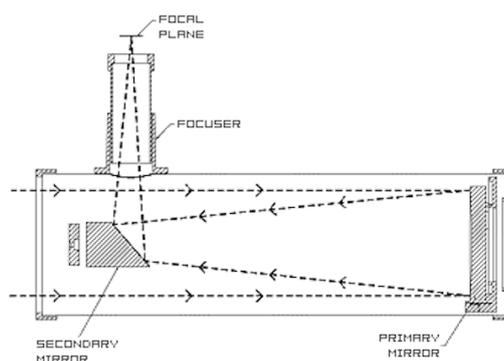


Figura 4.6: Esquema de funcionamiento del telescopio newtoniano [2].

La luz que se introduce por la apertura, llega al espejo reflector principal, el cual proyecta la energía sobre el secundario, desviando las ondas hacia otros elementos ópticos que procesen la información.

El patrón de difracción que generaría una apertura circular sin bloqueo ideal es la corres-

pondiente a la función de Bessel tal y como se aprecia en la figura 4.7

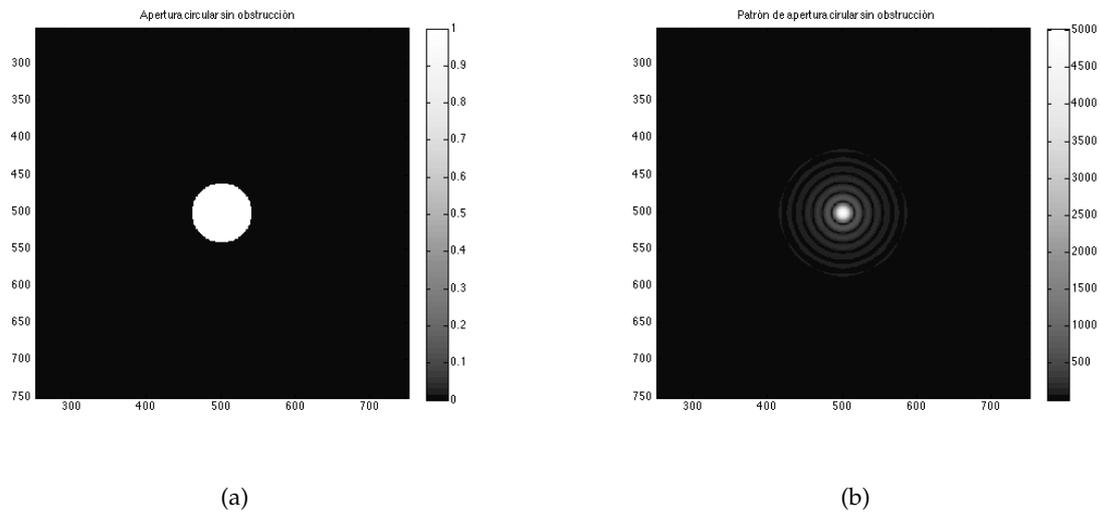


Figura 4.7: Apertura circular sin obstrucción (a) y patrón de la apertura sin obstrucción (b).

Para estudiar el efecto del bloqueo por el espejo secundario en un telescopio newtoniano, se introduce en la herramienta una matriz en la que se ha tenido el cuenta este efecto, generando el patrón de difracción de la figura 4.8.

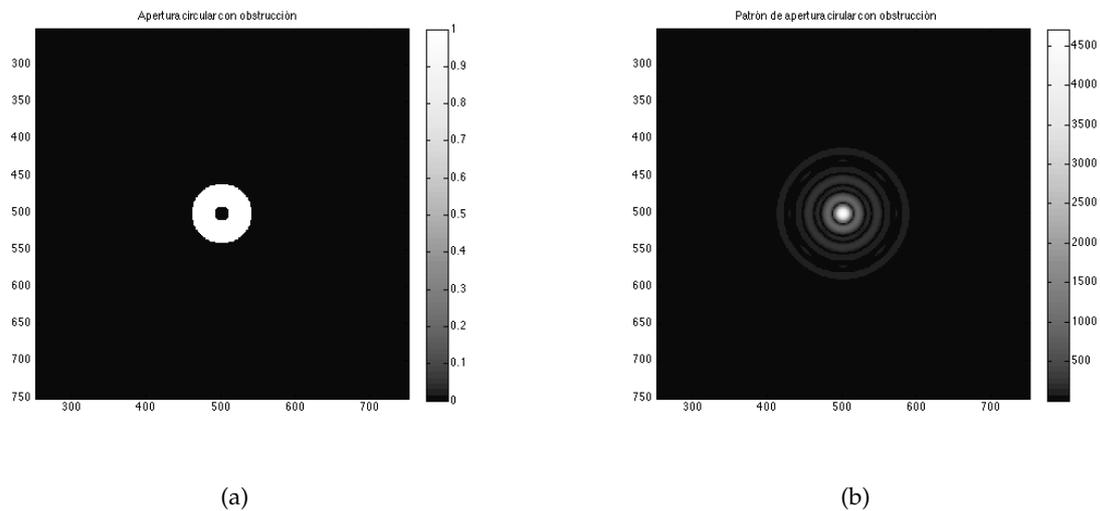


Figura 4.8: Apertura circular con obstrucción (a) y patrón de la apertura con obstrucción (b).

Como se observa en el patrón de difracción de la apertura con la obstrucción del espejo secundario, este ha variado en forma e intensidad, quedando un patrón de difracción distorsionado pero aún así circular. Sin embargo, estos espejos no pueden estar suspendidos sin un soporte, lue-

go dichos soportes producirán también una distorsión al interponerse en el camino de la onda entrante. Existen una gran cantidad de disposiciones de los soportes de los espejos secundarios en número y posición. Para evaluar el efecto de los soportes, se introduce un soporte vertical sobre la apertura y se evalúa su patrón de difracción. La figura 4.9 muestra un ejemplo para un soporte vertical y su patrón de difracción.

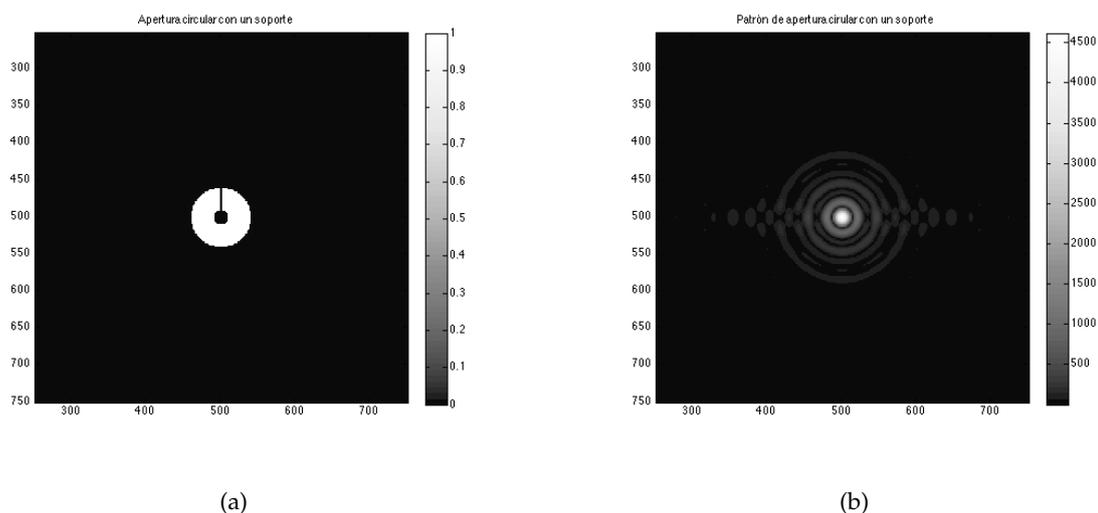
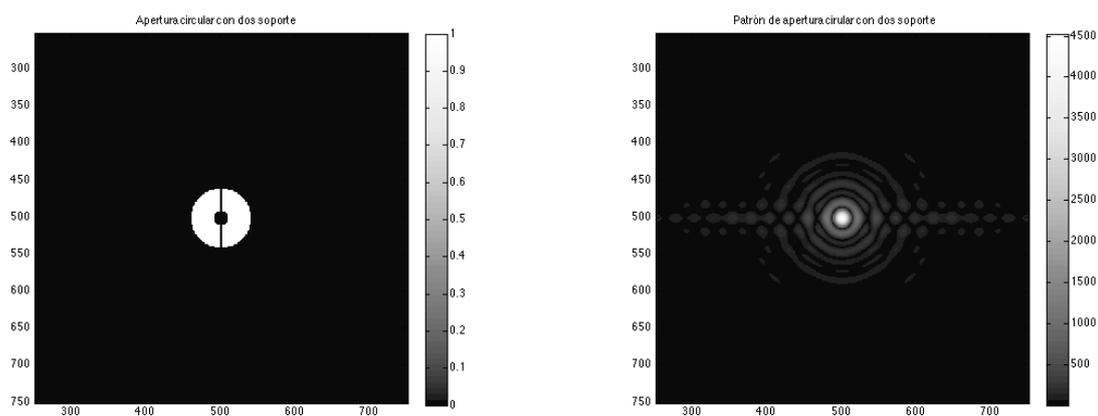


Figura 4.9: Apertura circular con soporte vertical (a) y patrón de difracción de la apertura (b)

Como se observa, se ha añadido una distorsión horizontal al patrón de difracción. Esta distorsión, se amplifica si en el caso de un soporte vertical el espejo se soporta por el caso más común de dos soportes, como se muestra en la figura 4.10.



(a) Apertura circular con dos soportes verticales. (b) Patrón de difracción de la apertura con dos soportes verticales.

Figura 4.10: Apertura circular con dos soportes verticales (a) y patrón de difracción de la apertura (b).

En este caso se aprecia una perturbación de mayor amplitud que para el caso de un solo soporte. Los soportes, en definitiva se comportan como elementos difractantes que perturban el patrón de difracción en la dirección opuesta en la que se encuentran orientados. Un caso común de distribuciones de soportes es el de tres soportes para el espejo secundario, como el que se muestra en la figura 4.11:

Para este caso se obtiene un patrón de difracción en el que habrá tres perturbaciones principales orientadas en la dirección opuesta al sentido en el que se encuentran situadas. Los resultados se muestran en la figura 4.12

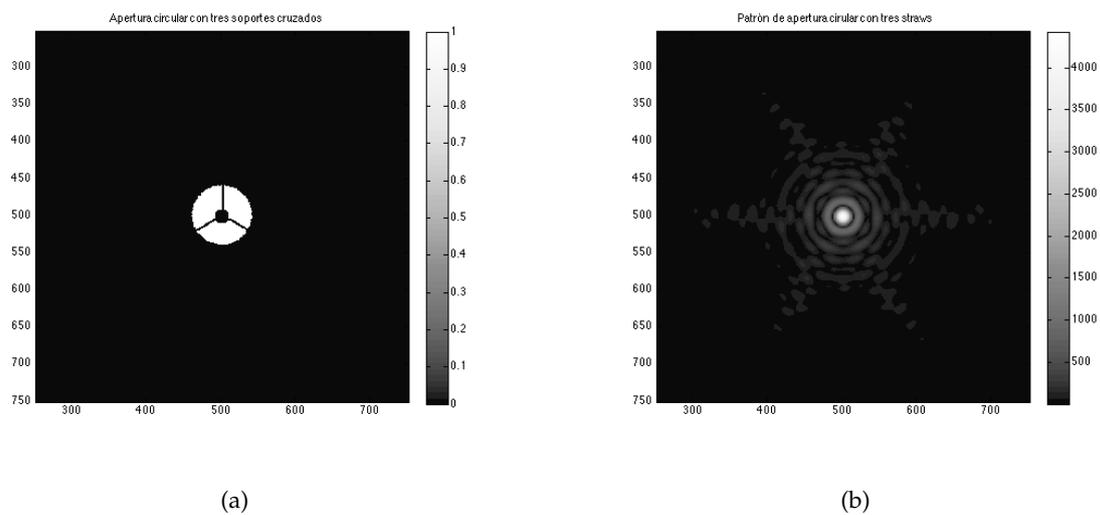


Figura 4.11: Apertura circular con tres soportes (a) y patrón de difracción de la apertura con tres soportes (b).

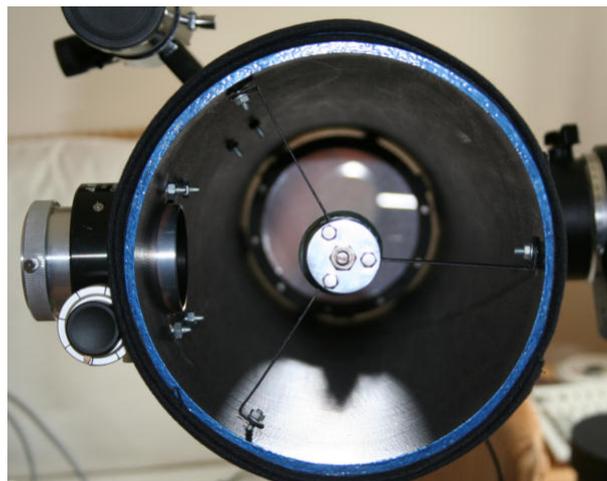


Figura 4.12: Ejemplo telescopio newtoniano con tres soportes.

Otro caso común de distribución de soportes para el espejo secundario es la distribución

cruzada, como en el caso de la primera fotografía del telescopio newtoniano. El efecto difractante de esta distribución es el que se muestra en la figura 4.13:

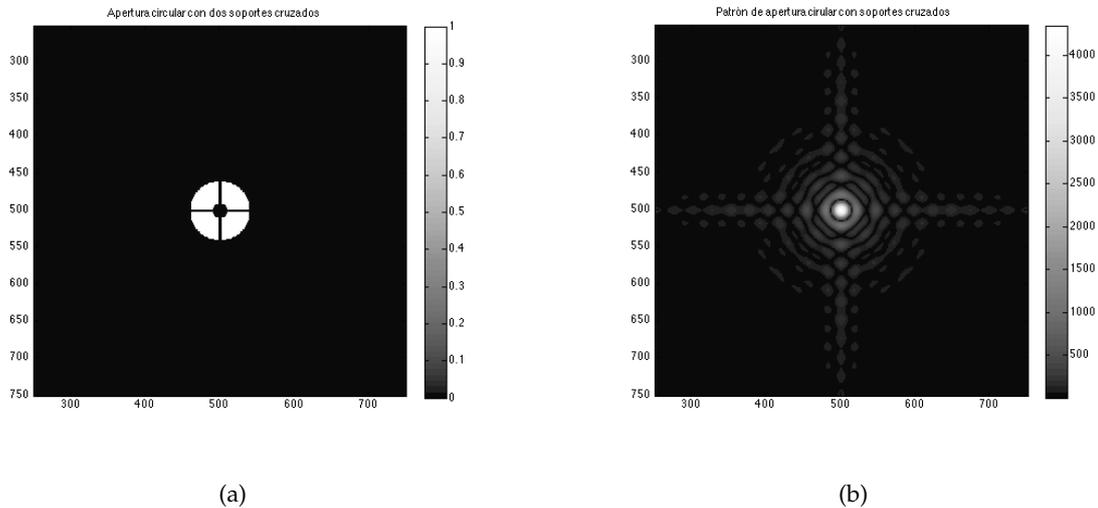


Figura 4.13: Apertura circular con distribución cruzada (a) y patrón de difracción de la apertura con distribución cruzada (b).

Esta distribución es típica de una gran cantidad de telescopios tales como el telescopio Hubble, el cual distorsiona las imágenes que captura introduciendo patrones de difracción idénticos al representado anteriormente. En la figura 4.14 se muestra un esquema de la apertura del telescopio Hubble (a) y un ejemplo de los patrones de difracción que este genera (b).

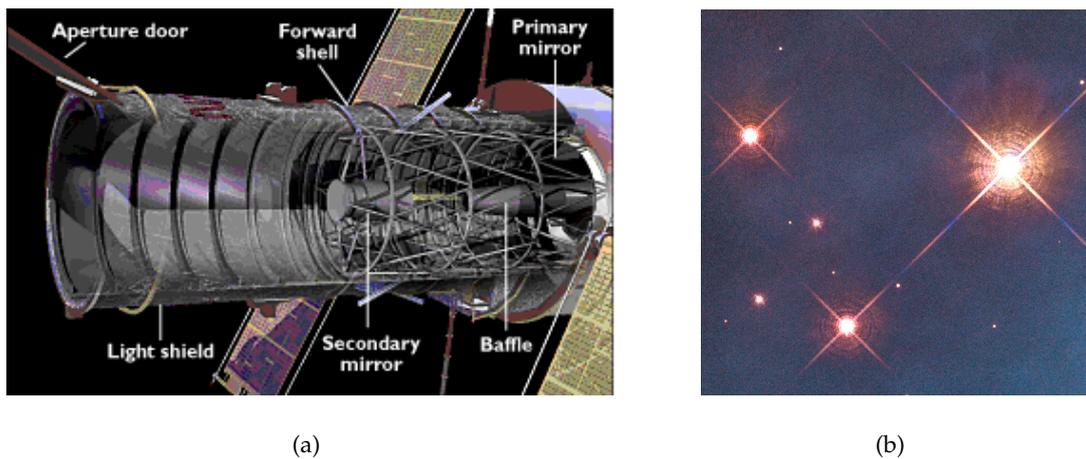


Figura 4.14: Esquema de entrada del telescopio Hubble (a) [3] y patrones de difracción en fotografías del telescopio Hubble (b) [3].

La forma de estrella que se acostumbra a ver representada, es similar a la que aparece en la

figura 4.14(b). Sin embargo, las estrellas no son más que puntos en el espacio. Esta forma estrellada y los círculos concéntricos que se superponen son consecuencia de los patrones de difracción también llamados "difraction spikes"[8], que se producen al interactuar con los componentes de los telescopios que las captan.



Figura 4.15: Distribución de soportes "spider vanes"(a) y distribución de tres soportes curvos.

Desde que el Hubble fue lanzado a la órbita terrestre en 1990, se han desarrollado otras distribuciones de soportes que obtienen resultados con una distorsión menor que las instaladas en el telescopio Hubble. Estos soportes se encuentran curvados, de tal manera que el patrón de difracción que generan interfiere más con la propia distorsión del espejo secundario. Esto provoca en lugar de distorsiones muy abruptas y significativas en la dirección opuesta a su orientación, otras distorsiones menos evidentes. Dos casos de este tipo de soportes se muestran en la figura 4.15. Los soportes curvos, dispersan más la energía del patrón de difracción a diferencia de los soportes rectilíneos, los cuales la dispersan en líneas rectas. Estos efectos de menor dispersión espacial pueden verse representados en las figuras (4.16 - 4.18).

A continuación se generan los tres soportes curvos y el modelo "spider vane" para evaluar sus efectos de distorsión. Los resultados se muestran en las figura 4.16 y 4.17.

Como se observa, la distorsión tiende a ser circular. En lugar de obtener unas distorsiones como en el caso de los soportes rectos, los soportes curvados eliminan el efecto de distorsión generando "sincs" que se orientan en la dirección opuesta al soporte, provocando que la distorsión sea similar a la obtenida cuando no existen soportes.

Se observa que el "spider vane", tiene un efecto de distorsión menos parecido que el caso anterior a la situación ideal sin soporte. Sin embargo reduce el efecto de los soportes en comparación con el modelo de soportes rectos.

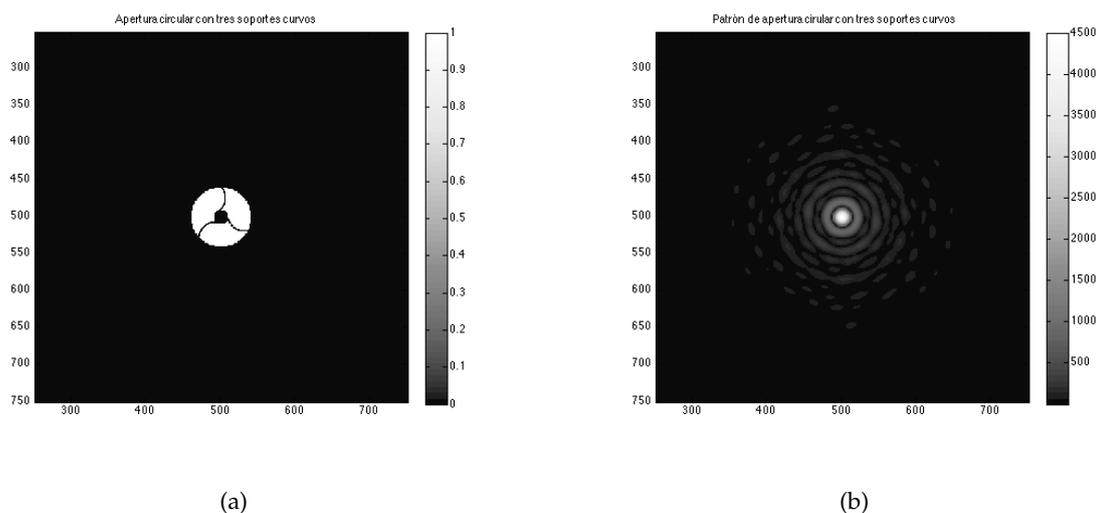


Figura 4.16: Apertura circular con tres soportes curvos (a) y patrón de difracción de la apertura con tres soportes curvos (b).

Un último se modela una distribución similar a "spider vane" pero con un solo soporte de menor radio. La apertura y el patrón de difracción correspondientes a este caso se muestran en la figura 4.18.

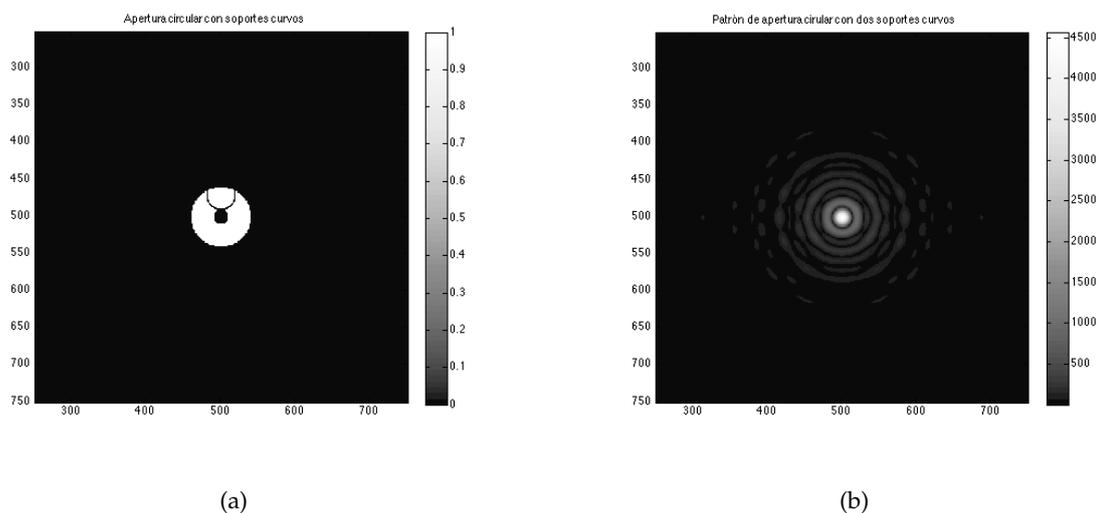


Figura 4.18: Apertura circular con soporte curvo único (a) y patrón de difracción de la apertura con soporte curvo único (b).

En este último caso de la figura 4.18 se consigue mejorar el efecto de difracción que ocurre

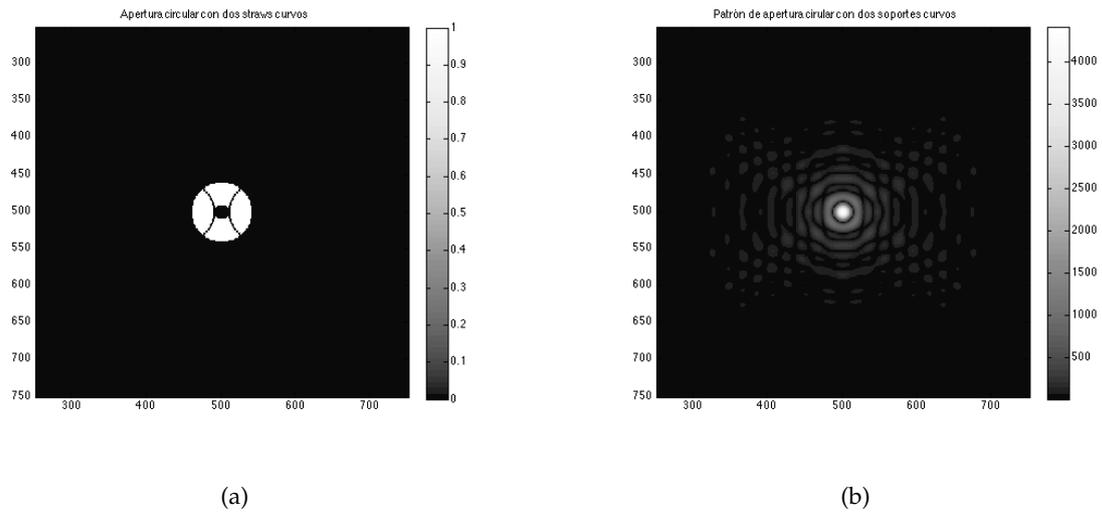


Figura 4.17: Apertura circular con soporte spider vane (a) y patrón de difracción de la apertura con soporte spider vane (b).

en el caso de los tres soportes curvos, pues se reduce en uno el número de soportes que se utilizan para la sujeción del espejo secundario.

4.2. Interpretación para más de una fuente

A lo largo del trabajo se ha supuesto que el sistema óptico es iluminado por una única fuente puntual situada en el infinito. Sin embargo en la práctica, la entrada al sistema óptico está compuesta por la superposición del efecto de infinitas fuentes puntuales que generan una imagen completa. Cuando se introduce una apertura en la herramienta Matlab, lo que realmente se introduce es la convolución de la señal de una fuente puntual situada en el infinito con la transmitancia de la apertura de entrada. Al ser a la entrada de la apertura esta señal un frente de onda plano, es decir, una señal constante resultado de la transformada de Fourier del frente de onda esférico de la fuente puntual, lo que se ve a la salida de la apertura es la multiplicación de la transmitancia de la misma por el frente de onda plano. Si se quiere modelar el efecto de varias fuentes en el infinito, se debe introducir en la herramienta el resultado de la multiplicación de la transmitancia de entrada al sistema con la superposición de las contribuciones de todas las fuentes. Esto se demuestra gracias a que todos los procesos son lineales y a que la multiplicación y la convolución cumplen la propiedad conmutativa [1]:

$$t_A \otimes (a + b) = t_A \otimes a + t_A \otimes b. \quad (4.1)$$

$$t_A * (a + b) = t_A * a + t_A * b. \quad (4.2)$$

Donde a y b representan las contribuciones de dos fuentes puntuales. Para ilustrar este efecto, se generan dos deltas en una imagen en matlab, una de ellas centrada, y la otra desplazada 150 pixeles horizontalmente.

A continuación se realiza la transformada de Fourier de las dos deltas y se multiplica el resultado con una apertura cuadrada arbitraria. Se introduce la matriz obtenida por la herramienta para evaluar el resultado. En la figura 4.20 se muestra el resultado de la transformada de Fourier de la superposición dos fuentes puntuales modeladas como dos deltas en la figura 4.19.

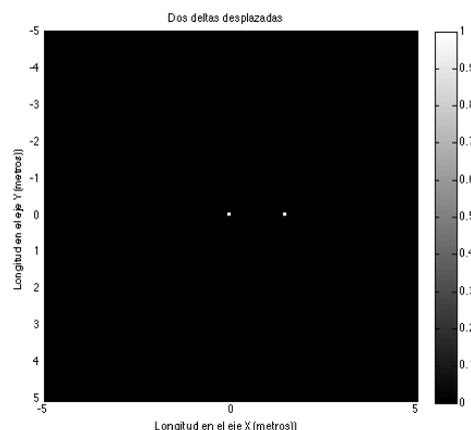


Figura 4.19: Imagen de las dos deltas desplazadas.

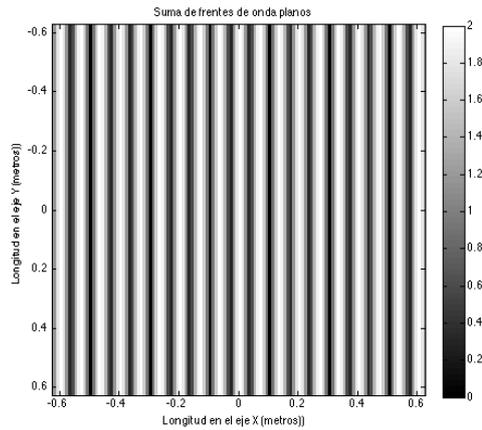


Figura 4.20: Detalle de la interferencia de los dos frentes de onda planos.

Se muestra un detalle de la imagen completa, para que se puedan apreciar los efectos de interferencia de la superposición de ondas planas. Estas interferencias se deben a las variaciones de fase con las que se superponen dichos frentes de onda planos. Al realizar la multiplicación de dicha señal con una apertura cuadrada arbitraria se obtiene lo que se muestra en la figura 4.21.

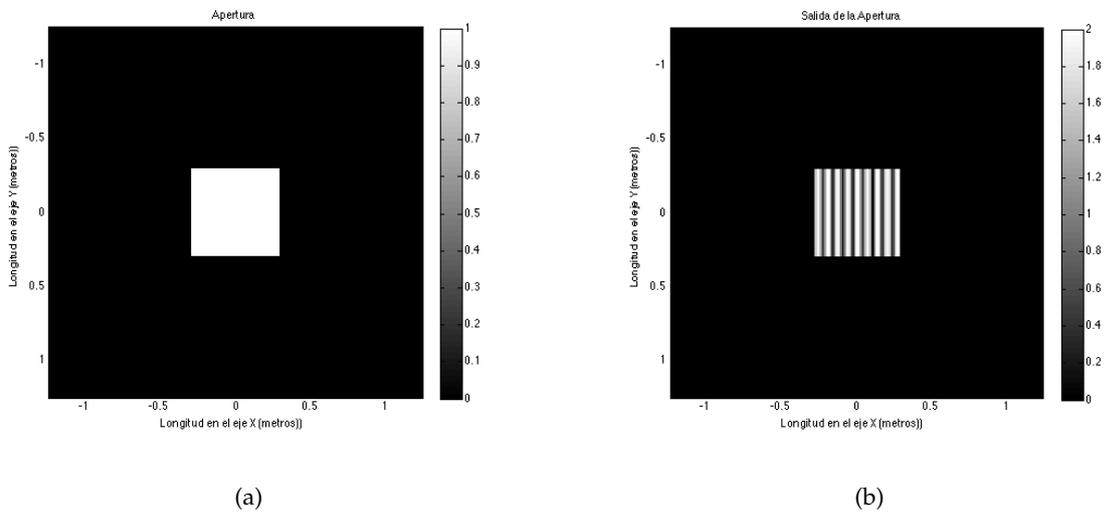


Figura 4.21: Apertura arbitraria de entrada (a) y resultado de la multiplicación de la apertura con el frente de onda plano (b).

Finalmente, la apertura realiza un efecto de transformación de Fourier sobre el resultado de la aplicación. Para evaluar este efecto, introducimos la matriz en la herramienta de cálculo de patrones de difracción y se obtiene la figura 4.22:

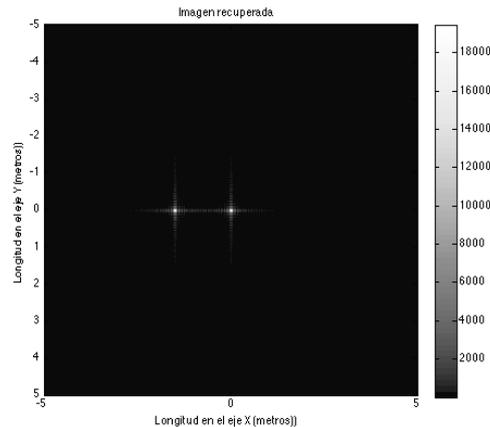


Figura 4.22: Patrón de Difracción generado por la herramienta.

Como se observa, se forman dos patrones que corresponden a la transformada de Fourier de la transmitancia de la apertura desplazadas a las posiciones de las deltas, en este caso, dos sincs bidimensionales. Sin embargo se produce un efecto de inversión del patrón, efecto de propia formación de la imagen. Lo que se recupera, es entonces una aproximación de la imagen de entrada, es decir las dos deltas, pero distorsionada por el efecto de la apertura, la cual es necesaria para la formación de la imagen.

Si se aumenta el número de fuentes, el efecto es similar. En la figura 4.24 se muestran tres deltas dos del las desplazadas 150 pixeles vertical y horizontalmente, en una matriz 1000x1000, para las cuales se realizarán los mismos cálculos que anteriormente.

Como en el caso anterior, superponemos el efecto de las tres contribuciones obteniendo el frente de onda plano de entrada al sistema, el cual se multiplica por la transmitancia de la apertura de entrada, y el resultado se introduce en la herramienta para evaluar los efectos de la propagación por el sistema y la formación de la imagen. En la figura 4.23 se muestran los resultados de el procedimiento.

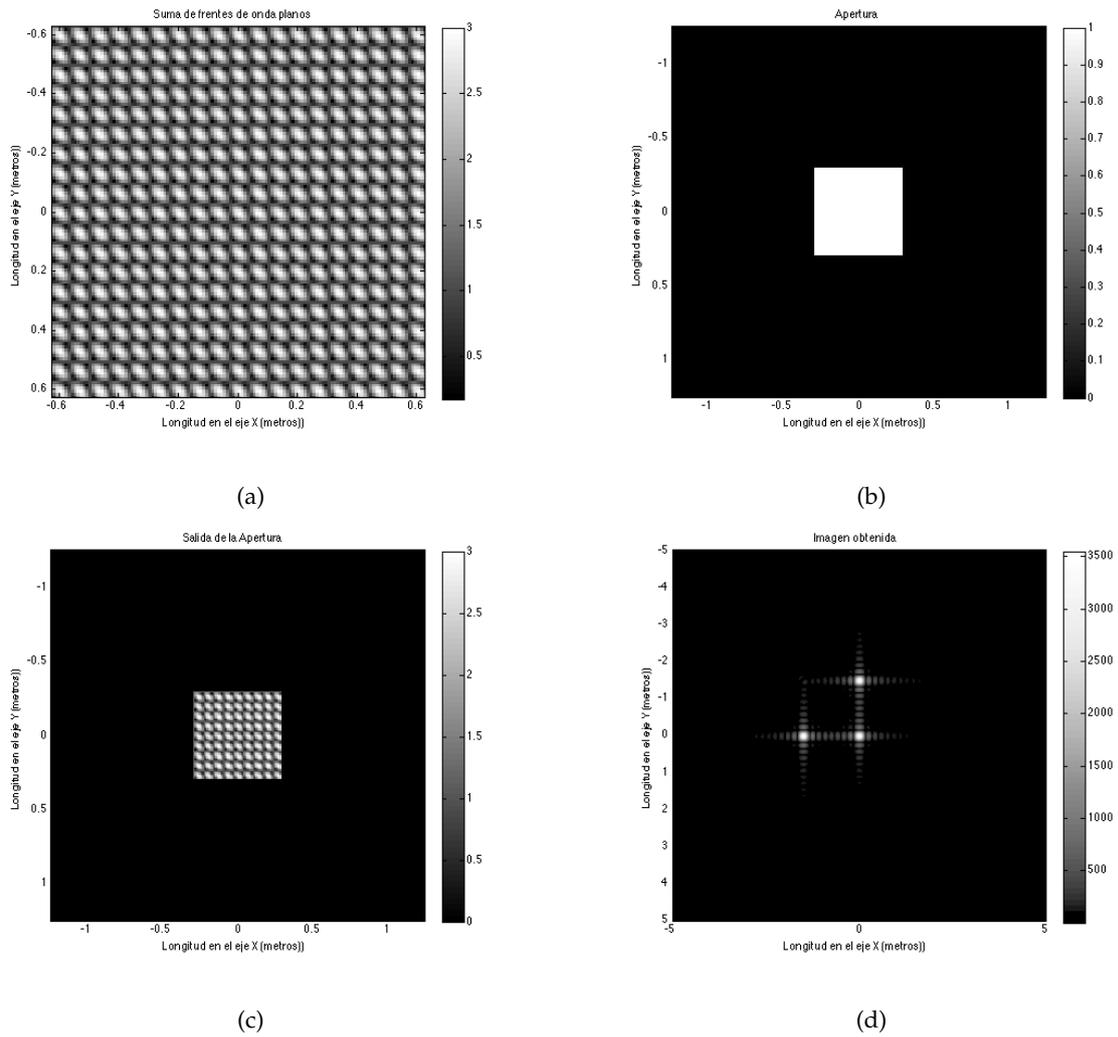


Figura 4.23: Superposición de los tres frentes de onda planos (a), apertura de entrada arbitraria (b), resultado de la multiplicación de la apertura arbitraria con el frente de onda plano (c) y patrón de difracción generado por la interfaz (d).

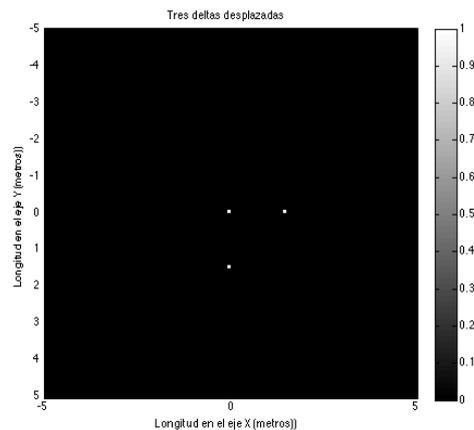


Figura 4.24: Tres deltas desplazadas.

Al igual que en el caso anterior, el resultado de la imagen recuperada son tres patrones de difracción (sincs cuadradas bidimensionales), desplazadas a las posiciones de las fuentes, produciéndose el efecto de inversión de nuevo en la imagen.

4.2.1. Ejemplo Osa Mayor

En este apartado se realiza el ejemplo de la generación de la imagen de la osa mayor a través del sistema óptico. Se carga una matriz de deltas correspondiente a la constelación de la osa mayor, y se realizan los procedimientos del apartado anterior para llegar a la imagen captada por el sistema óptico. En la figura 4.25 se muestra la matriz de deltas correspondiente a la Osa Mayor.

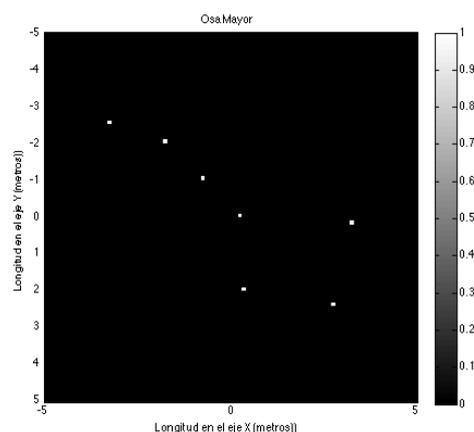


Figura 4.25: Constelación de la Osa Mayor.

La superposición de los frentes de onda planos de cada una de las deltas quedaría lo que se

aprecia en la figura 4.26:

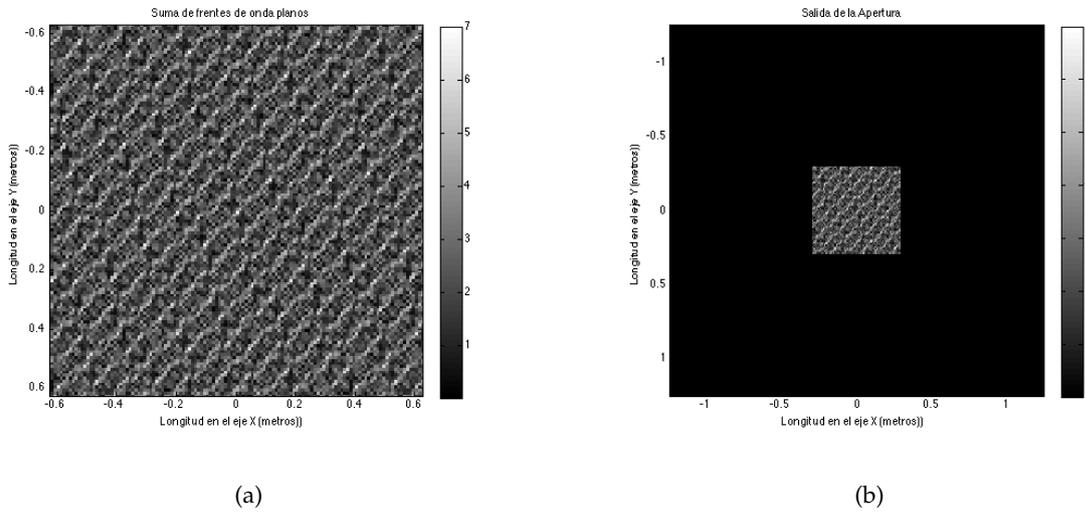


Figura 4.26: Superposición de contribuciones de las deltas de la constelación (a) y entrada al sistema a través de la apertura arbitraria cuadrada (b).

Finalmente, introduciendo la multiplicación de la apertura cuadrada con la superposición de los frentes de onda planos, obtenemos la imagen recuperada, la cual se visualiza en la figura 4.27.

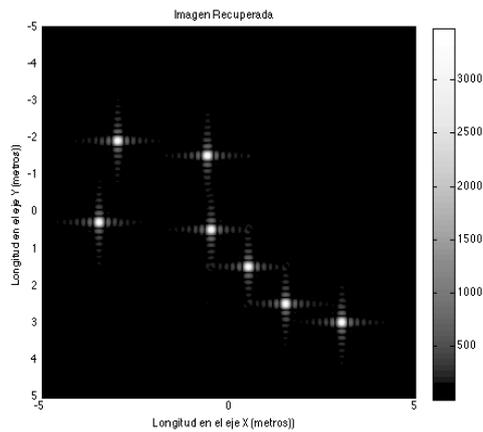


Figura 4.27: Imagen recuperada de la constelación

Como puede observarse en la imagen recuperada a través del sistema óptico, obtenemos la imagen de entrada, pero en lugar de recuperar las deltas que la componen, obtenemos en su lugar el patrón de difracción para una fuente puntual dada la apertura cuadrada arbitraria para este caso concreto. Se comprueba de nuevo, que la apertura distorsiona la imagen recuperada,

pero sin embargo es necesaria para la generación de la misma.

El efecto de difracción que se produce en el sistema óptico puede verse claramente en la fotografía de la figura 4.28 de la constelación de las Pléyades, donde sobre las estrellas que brillan con más intensidad se aprecia un patrón de difracción:



Figura 4.28: Constelación de las Pléyades[8]

Dicha imagen ha sido tomada con un tiempo de exposición elevado, de tal manera que las variaciones correspondientes a la sinc de los patrones se ven saturadas y no se aprecian con claridad. Se observan con claridad en este caso los "difraction spikes"[8], que se mencionan en el apartado 4.1.3, efecto de la difracción de los componentes que obstruyen la apertura de entrada al telescopio.

4.3. Efecto del tamaño de la apertura, distancia de proyección y la frecuencia.

En este apartado se van a evaluar los efectos del tamaño de la apertura, la frecuencia y la distancia del plano de proyección a la apertura dentro del sistema óptico. Estos factores son determinantes para la generación de una imagen, y sus variaciones pueden producir efectos significativos en la proyección de la misma.

4.3.1. Efectos de las dimensiones la apertura

Para evaluar los efectos de la variación del tamaño de la apertura sobre la generación de un patrón de difracción, se introducen en la herramienta tres aperturas de diferentes tamaños y se evalúa su patrón de difracción para cada uno de los casos. Se estudia para cada apertura la

anchura del lóbulo principal del patrón de difracción que genera, mediante un corte longitudinal. Primero se simula una apertura cuadrada arbitraria, de dimensiones 1x1 metros. Obteniendo los resultados que se observan en la figura 4.29.

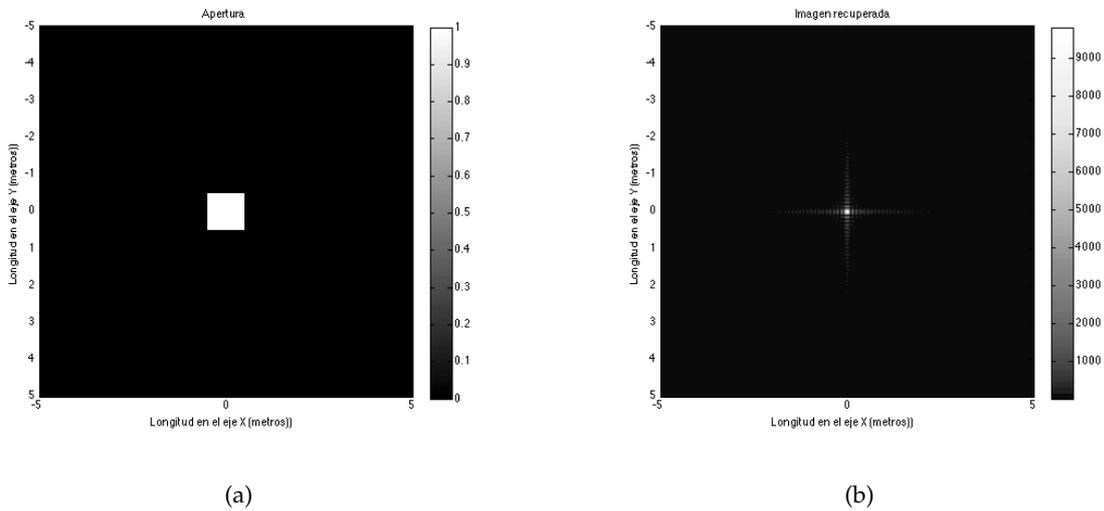


Figura 4.29: Apertura arbitraria cuadrada 1x1 (a) y patrón generado por la apertura cuadrada 1x1 (b).

Donde el corte longitudinal se representa en la figura 4.30

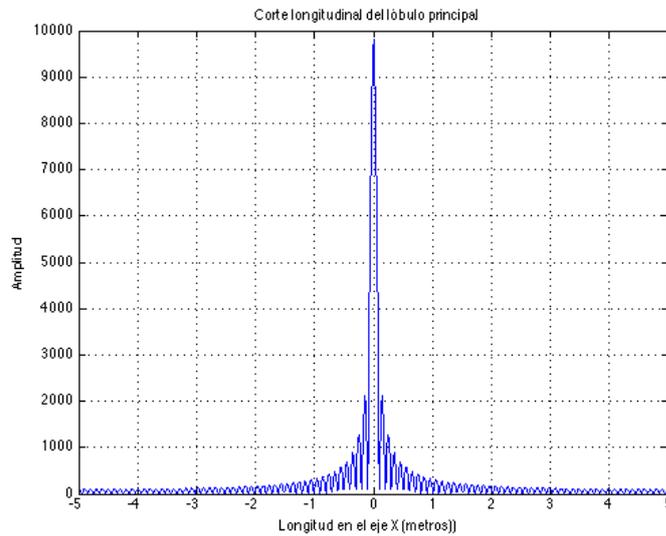


Figura 4.30: Corte longitudinal del patrón de difracción. Anchura de lóbulo principal $w = 0.2$ metros.

A continuación se genera una apertura dos veces mayor, de dimensiones 2x2 metros, y se evalúan las variaciones sobre el patrón de difracción que genera. En la figura 4.31 se muestran los

resultados para este caso:

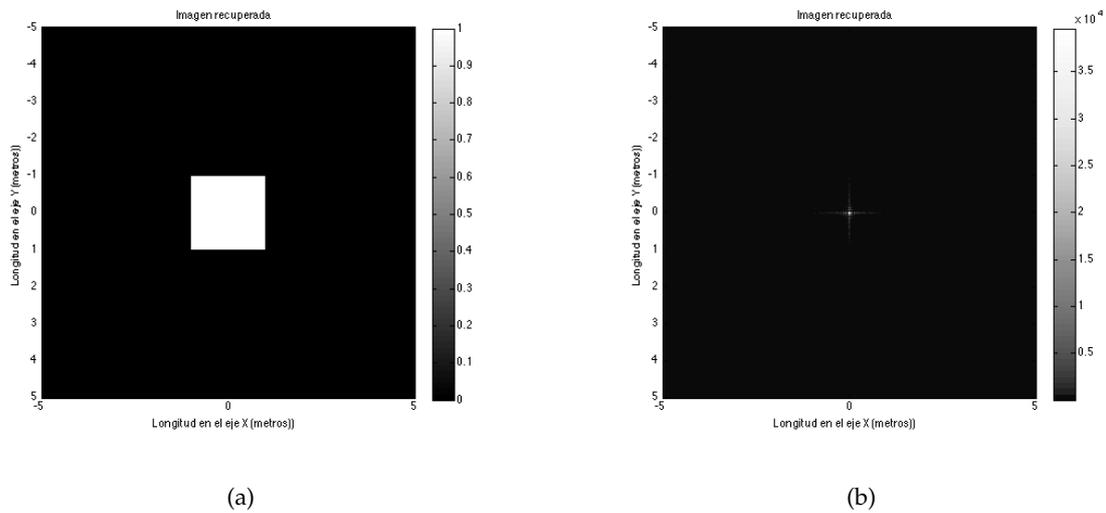


Figura 4.31: Apertura arbitraria cuadrada 2x2 (a) y patrón generado por la apertura cuadrada 2x2 (b)

Donde el corte longitudinal se representa en la figura 4.32

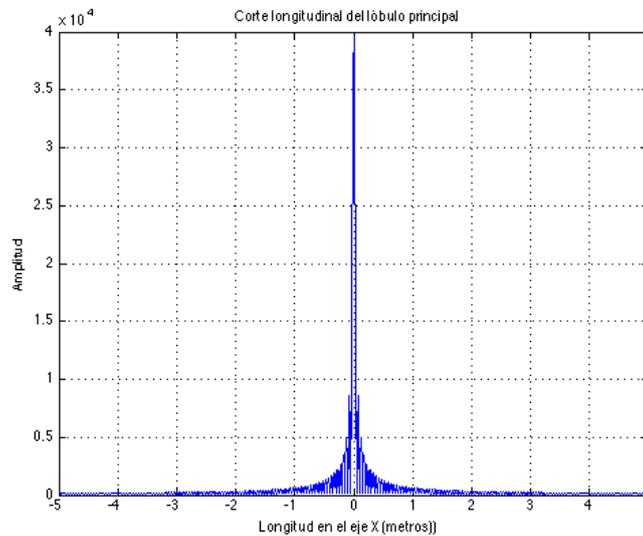


Figura 4.32: Corte longitudinal del patrón de difracción. Anchura de lóbulo principal $w = 0.1$ metros.

Se aprecia que al aumentar el tamaño de la apertura al doble, se ha reducido el tamaño del patrón de difracción, así como su anchura de lóbulo principal. A continuación se realiza el estudio para el caso de una apertura dos veces menor al primer caso, obteniendo los resultados de la figura 4.33.

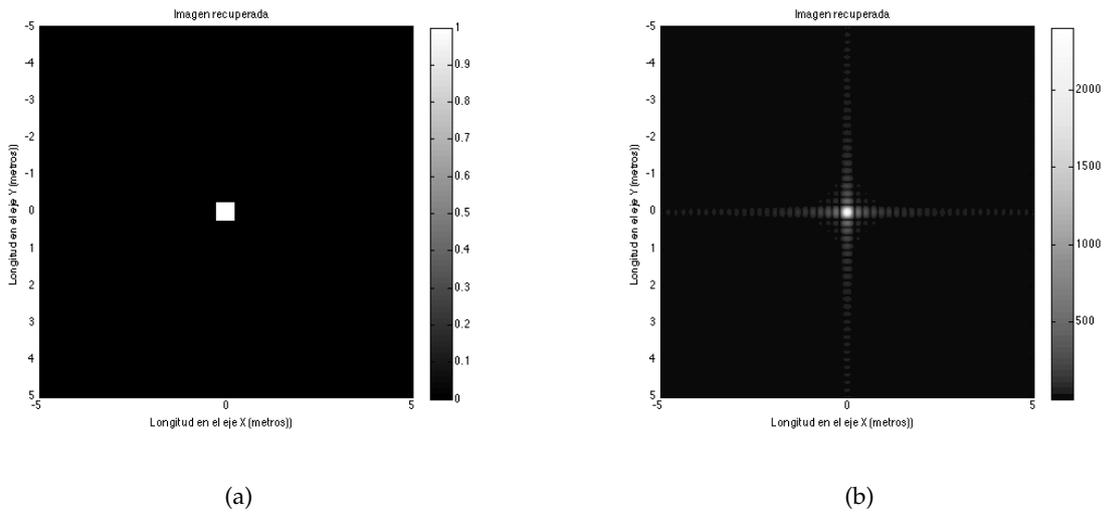


Figura 4.33: Apertura arbitraria cuadrada 0.5x0.5 (a) y patrón generado por la apertura cuadrada 0.5x0.5 (b).

Donde el corte longitudinal se representa en la figura 4.34.

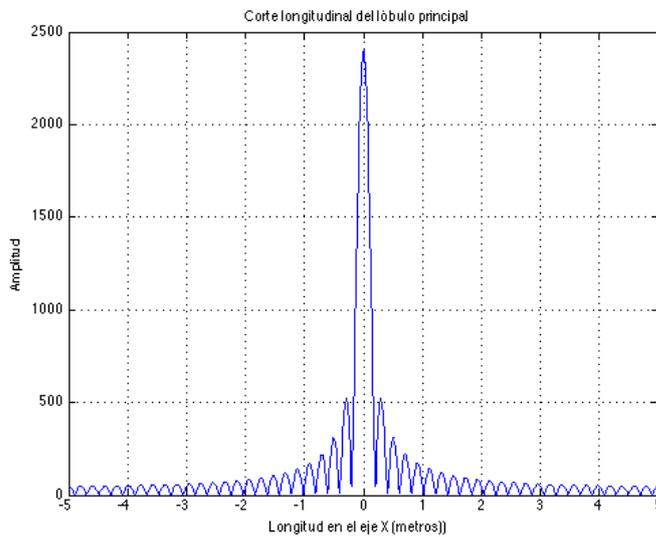


Figura 4.34: Corte longitudinal del patrón de difracción. Anchura de lóbulo principal $w = 0.4$ metros.

Se observa una dependencia de la anchura del patrón de difracción con las dimensiones de la apertura inversamente proporcional. Para estudiar en mayor profundidad los efectos de la variación de las dimensiones de la apertura en la generación de patrones de difracción evaluamos la ecuación del patrón rectangular (2.3.4 Ejemplos de patrones de difracción de Fraunhofer.), donde

la sinc depende de las dimensiones de la apertura ω_x :

$$U(x,y) = \frac{e^{jkz} e^{j\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{j\lambda z} \cdot A \cdot \text{sinc}(2\omega_x f_x) \text{sinc}(2\omega_y f_y) \quad (4.3)$$

Se puede estudiar como varía el tamaño de los patrones de difracción evaluando los cruces por cero de la sinc para una dimensión. Estos tienen lugar cuando se cumple que:

$$2\omega_x f_x = 1 \quad (4.4)$$

Entonces, y sabiendo que $f_x = \frac{X_m}{\lambda z}$ y despejando de la ecuación la anchura del lóbulo principal de la sinc que forma el patrón X_m se obtiene:

$$X_m = \frac{\lambda z}{\omega_x} \quad (4.5)$$

Por tanto se va a introducir en matlab la expresión anterior para evaluar la variación del parámetro ω_x que regula la dimensión de la apertura, y su efecto sobre a anchura del lóbulo principal del patrón de difracción. Se establece para una frecuencia de 2 GHz y para una distancia de 0.33 metros una serie de valores de dimensiones de apertura entre 0 y 5 metros. Se obtiene la gráfica de la figura 4.35 tras un análisis paramétrico:

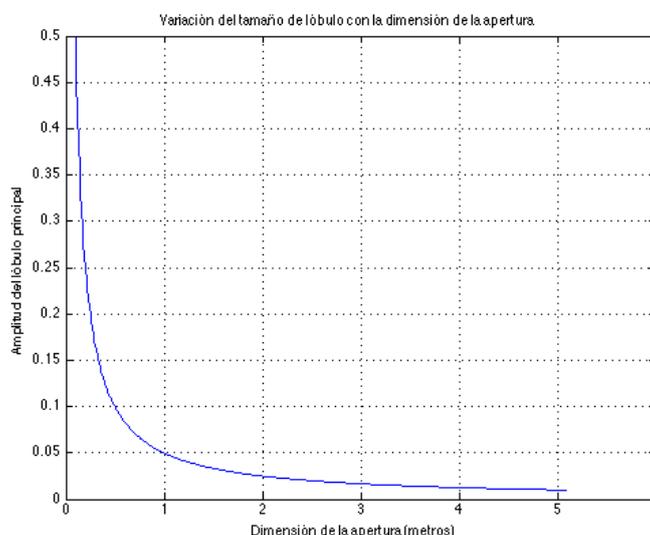


Figura 4.35: Curva anchura lóbulo principal frente a dimensión de la apertura.

En la figura 4.35 se aprecia un decrecimiento exponencial del tamaño del lóbulo principal del patrón de difracción a medida que se aumenta el tamaño de la apertura. Del mismo modo, la gráfica tiende a infinito conforme el valor de la dimensión de la apertura tiende a cero, por tanto existen dos limitaciones para la representación del patrón de difracción en función del tamaño de la apertura. Si la apertura es demasiado pequeña, los patrones de difracción que se generan

fruto de la distorsión de la apertura sobre la imagen correspondiente a cada una de las fuentes que provocan el frente de onda plano entrante al sistema óptico pueden llegar a superponerse, no pudiéndose interpretar la imagen correctamente. Esto supone una limitación para la recuperación de las fuentes. Este límite de difracción se modela mediante el ángulo θ , el cual se corresponde con el ángulo mínimo con el que pueden llegar dos frentes de ondas planos a la apertura de dimensión D para una frecuencia determinada y que sus patrones de difracción sean diferenciables. Estos parámetros quedan representados en la figura 4.36 :

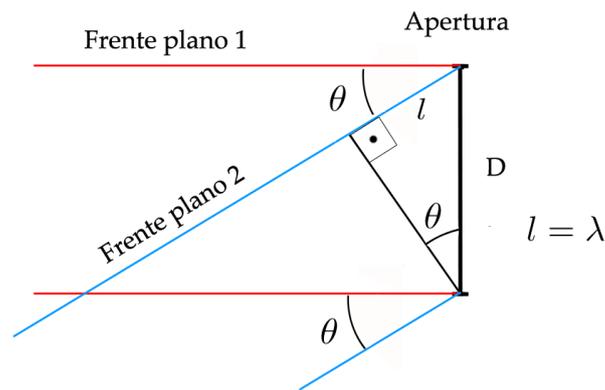


Figura 4.36: Curva ángulo θ frente a la dimensión de la apertura.

La figura 4.36 está representando una apertura que cumple con el criterio de Rayleigh para los límites de difracción [9]. Que enuncia que para una apertura no circular, el ángulo mínimo con el que se pueden detectar dos fuentes viene dado por la siguiente expresión que puede obtenerse de la figura:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\lambda}{D}, \quad (4.6)$$

donde para el caso circular hay que añadir un termino $\text{sen}(\theta) = 1,22 \frac{\lambda}{D}$ [9]. Si se aplica la aproximación $\text{sin}(\theta) \sim \text{tan}(\theta) \sim \theta$, la expresión finalmente queda como:

$$\theta = \frac{\lambda}{D} \quad (4.7)$$

Por tanto y como así lo expresa la fórmula, para una apertura de menores dimensiones, el ángulo mínimo es mayor. Esto se debe a que como se ha visto, el patrón de difracción crece conforme disminuye la dimensión de la apertura, por tanto, también debe crecer el ángulo mínimo de separación entre los focos para su detección. Para que se vea el efecto de el ángulo mínimo de detección con la dimensión de la apertura, se calcula un análisis paramétrico para una longitud de onda óptica $\lambda = 0,5e^{-6}$ metros. Se introducen unas distancias desde 1 hasta 10 metros y se obtiene la gráfica de la figura 4.37.

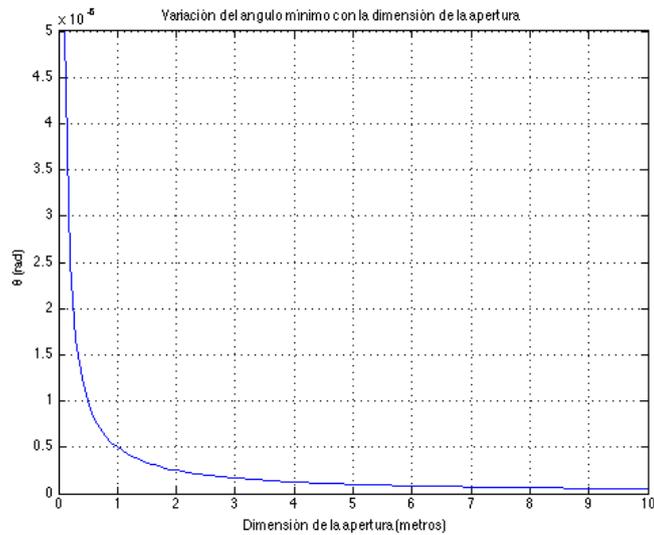


Figura 4.37: Curva ángulo θ frente a la dimensión de la apertura.

Como se observa, en la figura 4.37, el ángulo mínimo de detección disminuye conforme aumenta la dimensión de la apertura, como se comentó anteriormente. Para visualizar este efecto de manera gráfica, se introduce la superposición de los frentes de ondas planos generados por dos deltas por una apertura arbitraria cuadrada. Se variará el tamaño de la apertura para evaluar la superposición de los patrones de difracción y comprobar para que tamaño deja de ser posible detectar las deltas.

Para una frecuencia de 1 GHz y una distancia de proyección de 0.333 metros, se introducen dos deltas separadas un ángulo $\theta_0 = 0,375rad$. Esta imagen se muestra en la figura 4.39.

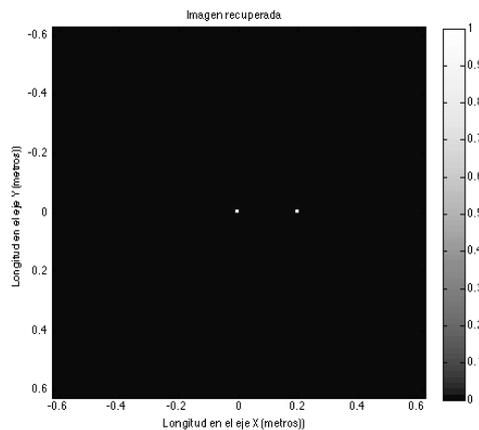


Figura 4.38: Deltas con separación $\theta_0 = 0,375rad$.

4 Resultados obtenidos con la interfaz

Para ese ángulo mínimo, el tamaño de la apertura que puede tener como mínimo es 0.6 metros. A continuación en la figura 4.38 se evalúan las representaciones de los patrones de difracción para estas deltas, para cuatro dimensiones de la apertura (0.6,0.8,1 y 1.2 metros.)

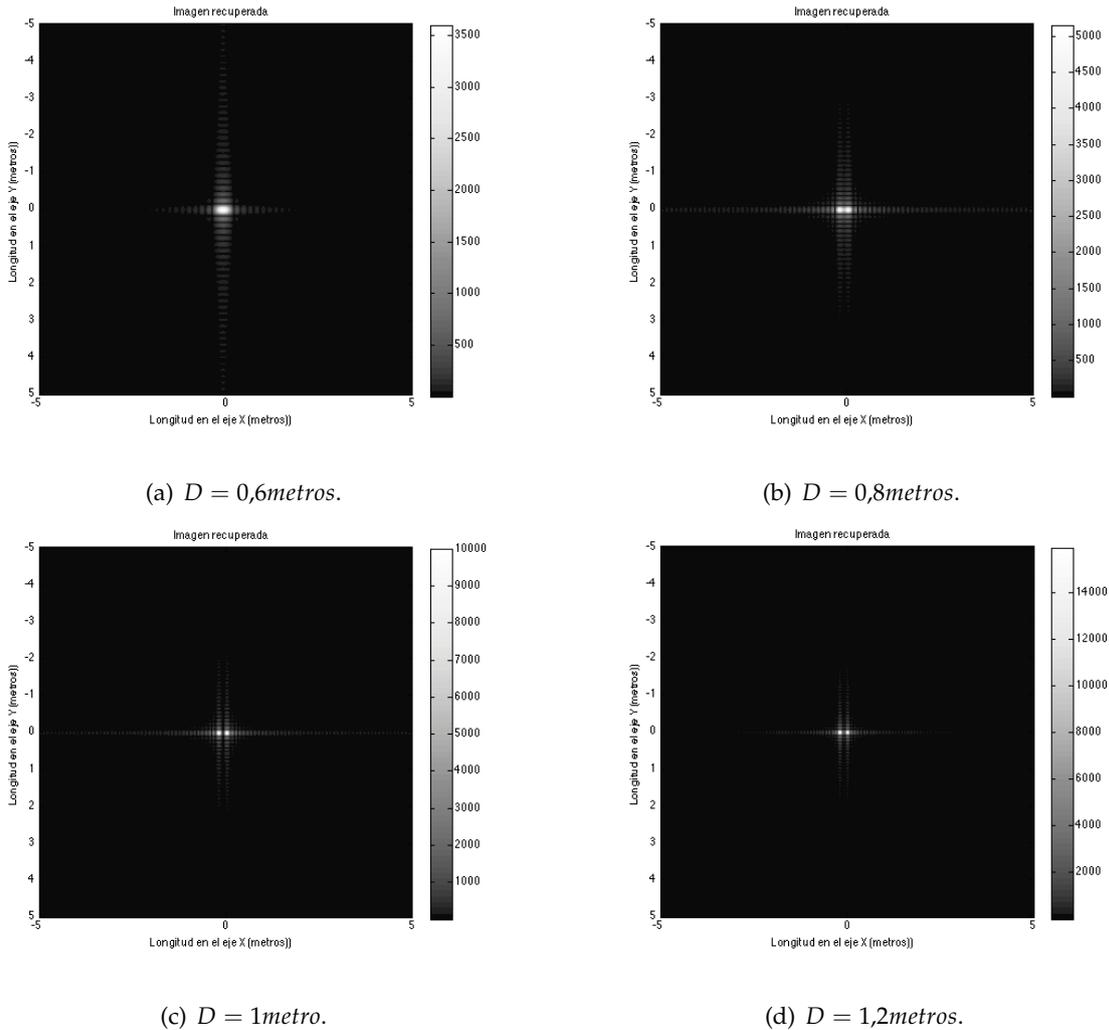
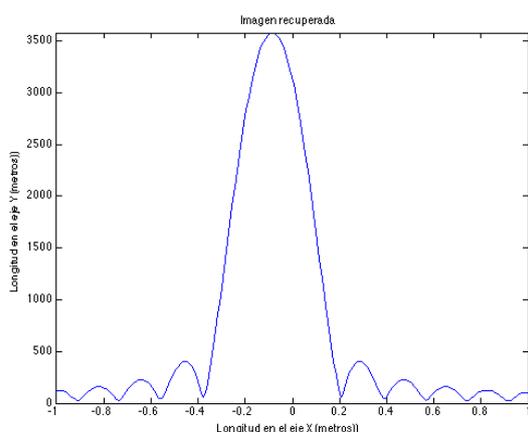


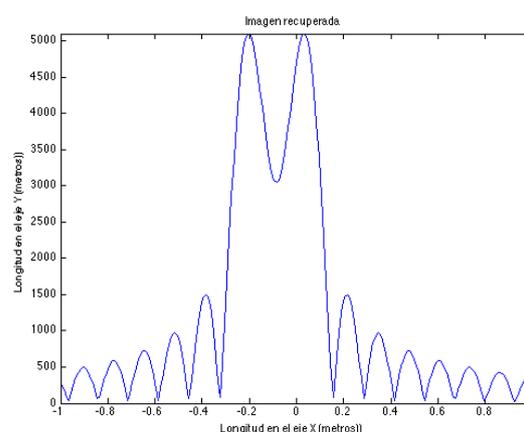
Figura 4.39: Patrones de difracción generados para distintas dimensiones de la apertura D

Como se observa, para el caso límite de $D = 0.6$ metros, no es posible diferenciar las deltas originales pues los patrones de difracción que se encuentran sobre ellas se superponen. En el corte longitudinal de los patrones de difracción mostrado en la figura 4.40 se aprecia mejor este efecto de superposición:

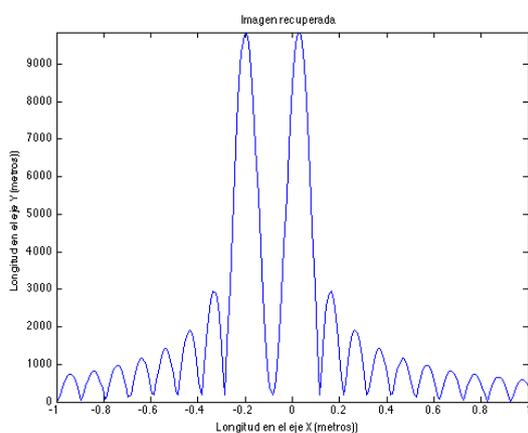
4.3 Efecto del tamaño de la apertura, distancia de proyección y la frecuencia.



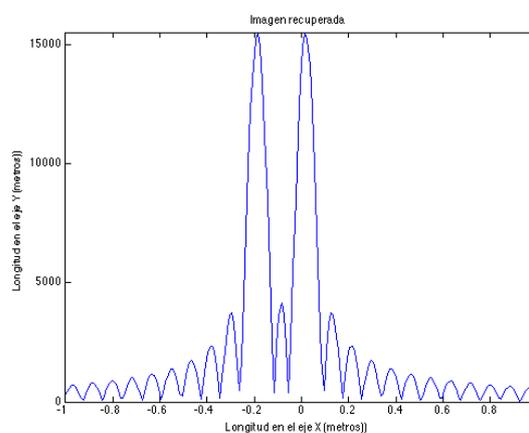
(a) Corte para $D = 0,6$ metros.



(b) Corte para $D = 0,8$ metros.



(c) Corte para $D = 1$ metro.



(d) Corte para $D = 1,2$ metros.

Figura 4.40: Representación de los cortes longitudinales de los patrones de difracción generados para cada uno de los valores de la dimensión de la apertura D .

A la vez que existe un límite superior por la difracción, por la superposición de patrones también existe un límite superior. Llega un momento en que la curva de anchura del lóbulo principal tiende a cero a medida que se aumenta la dimensión de la apertura para una determinada longitud de onda. Llegará a existir un punto incluso en el que no se produzcan efectos difractantes para esa longitud de onda determinada, puesto que el frente de onda plano no desvía su trayectoria al atravesar la apertura. Se debe ser cuidadoso a la hora de operar con la herramienta, pues es necesario tener estos hechos en cuenta para no perder el sentido físico de las representaciones.

4.3.2. Efectos de la distancia de proyección

Para estudiar los efectos de la distancia de proyección sobre los patrones de difracción, se carga en la herramienta una apertura arbitraria rectangular de dimensiones 0.1 metros horizontalmente y 0.2 metros verticalmente, la cual se aprecia en la figura 4.41.

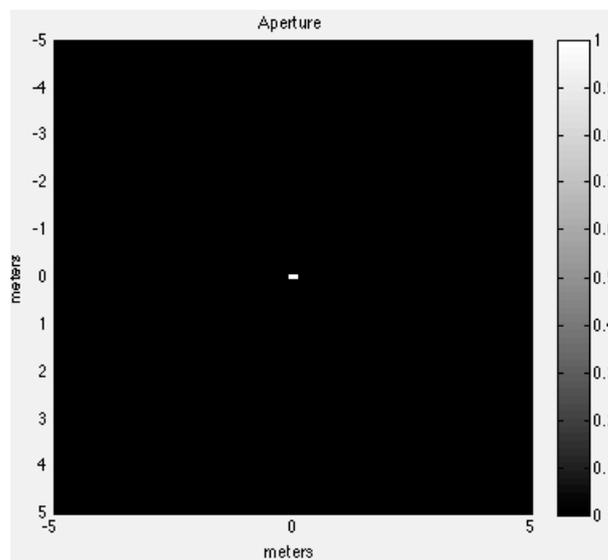


Figura 4.41: Apertura rectangular generada.

Se representará el patrón de difracción asociado a dicha apertura para una frecuencia de 1 GHz para cuatro distancias de proyección desde la distancia de Fraunhofer para este caso $z = 0.333$ metros. Se representa sobre el patrón de difracción la apertura para una mejor visualización del fenómeno. También se realiza una sección del patrón de difracción por el lóbulo principal para evaluar los efectos que se producen en dos dimensiones. Los resultados se muestran en las figuras 4.42- 4.45:

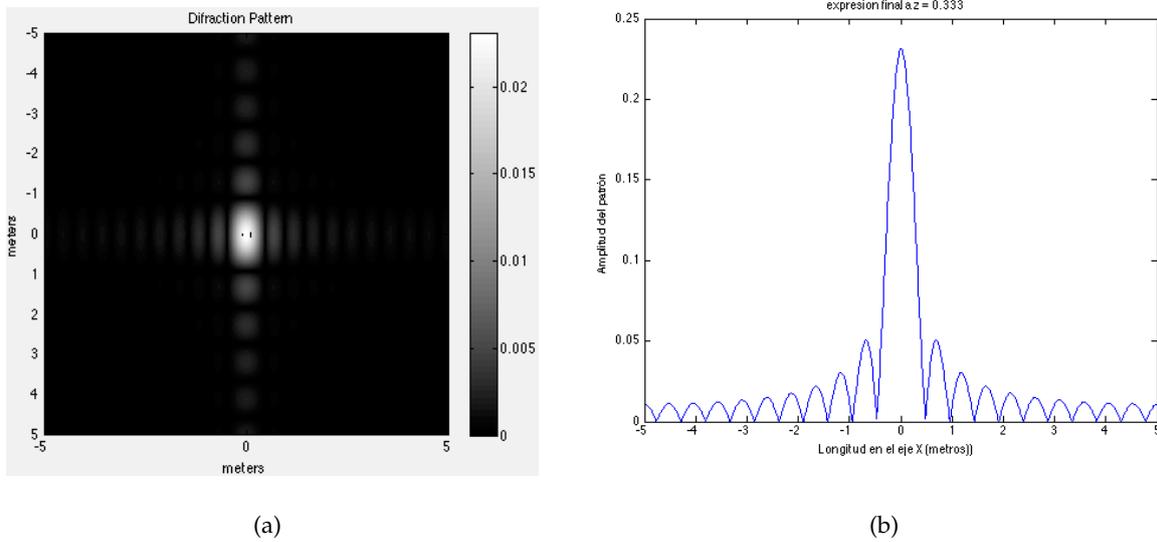


Figura 4.42: Patrón de difracción a $z = 0.333$ metros (a) y sección longitudinal en el eje x para $z = 0.333$ metros (b).

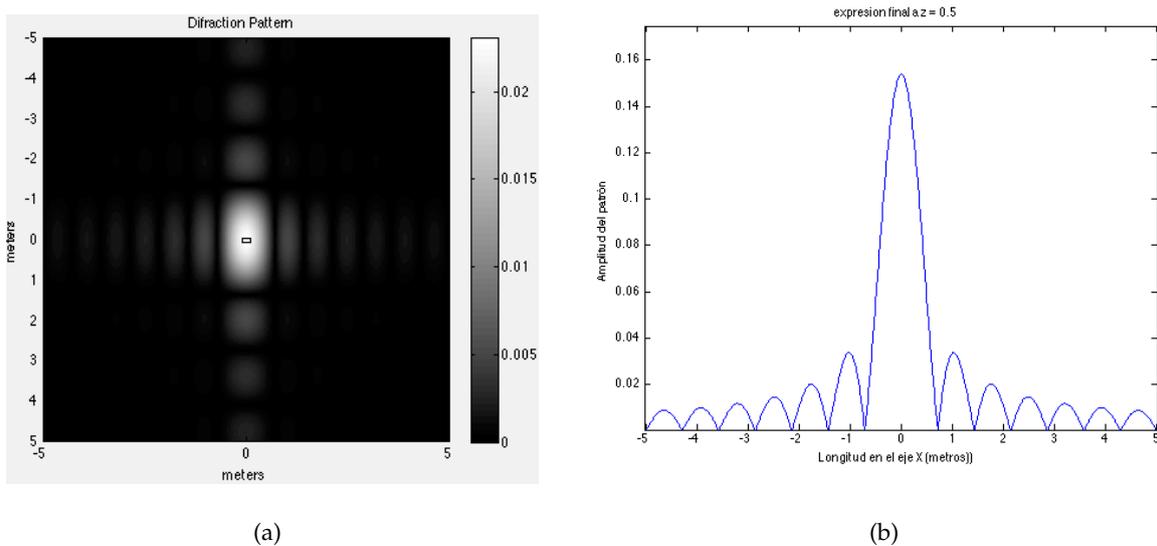


Figura 4.43: Patrón de difracción a $z = 0.5$ metros (a) y sección longitudinal en el eje x para $z = 0.5$ metros (b).

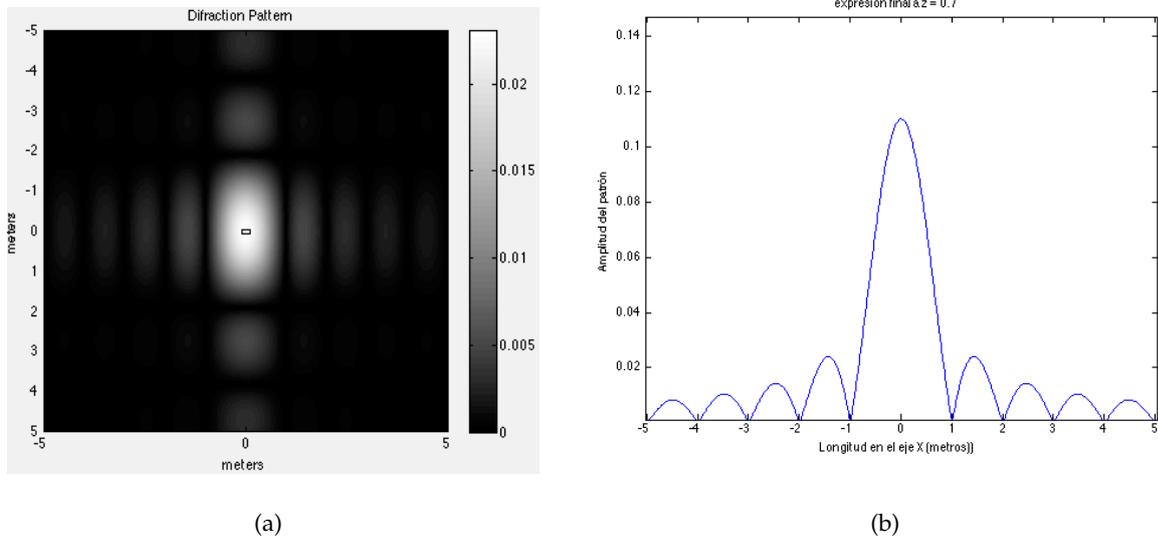


Figura 4.44: Patrón de difracción a $z = 0.7$ metros (a) y sección longitudinal en el eje x para $z = 0.7$ metros (b).

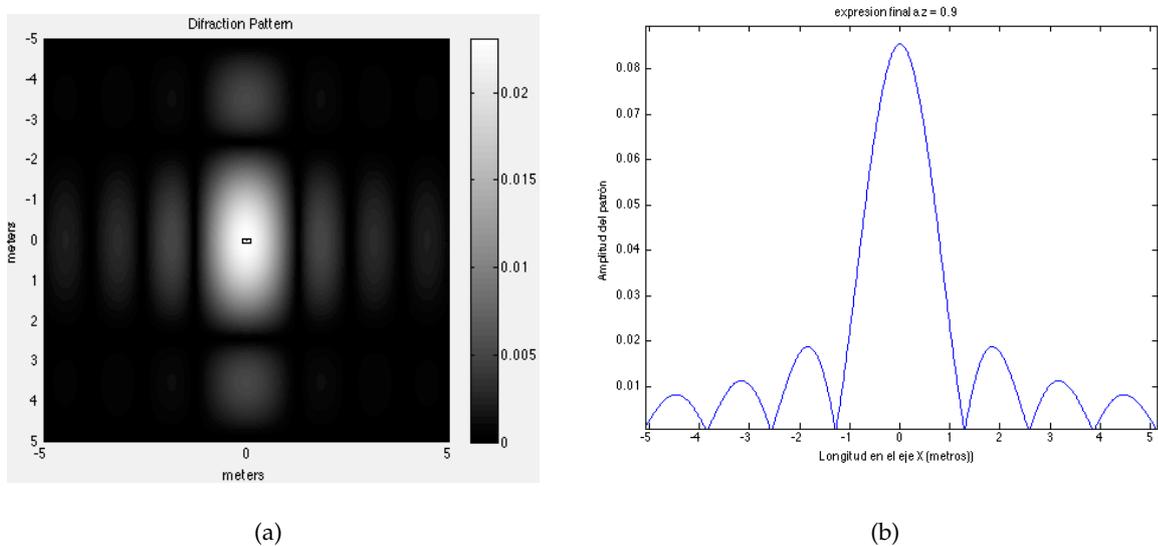


Figura 4.45: Patrón de difracción a $z = 0.9$ metros (a) y sección longitudinal en el eje x para $z = 0.9$ metros (b).

Como puede apreciarse en las representaciones 4.42-4.45, la distancia de proyección afecta al tamaño del patrón de difracción. Esto se debe a que a medida que se propaga la difracción a través del sistema óptico, el haz se expande y por tanto cuanto mayor distancia de propagación mayor será el patrón que se proyecte. También se aprecia el efecto de la atenuación con la distancia. A medida que se aumenta la distancia de proyección disminuye la intensidad de los

patrones de difracción.

Sin embargo, a pesar de que se amplíen o reduzcan los tamaños de los patrones de difracción el efecto no es similar al que se produce al variar las dimensiones de una apertura. Cuando se varían las dimensiones de una apertura para más de una fuente, los patrones de difracción que aparecen en la proyección varían su tamaño de manera independiente el uno del otro, pudiendo llegar a superponerse. En cambio, al variar la distancia de proyección no varía el espacio entre los patrones de difracción, sino que el conjunto de los patrones aumenta o decrece su tamaño. Esto puede verse si se realiza un ejemplo para más de una fuente, en el que se estudia un corte longitudinal en los patrones de difracción generados, estudiando el corte para distintas distancias de proyección. Sean los patrones de difracción mostrados en la figura 4.46 los correspondientes a dos deltas atravesando una apertura cuadrada:

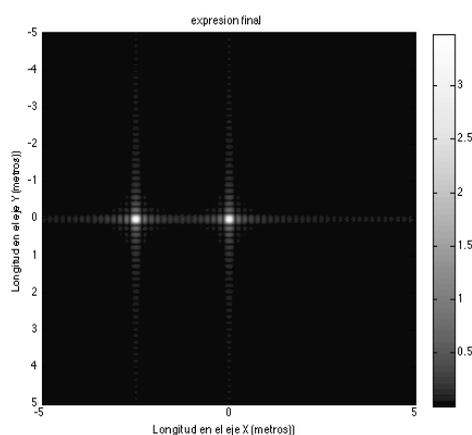


Figura 4.46: Patrones de difracción para dos deltas desplazadas y apertura cuadrada.

Para estos patrones de difracción se obtienen los efectos mostrados en la figura 4.47 al aumentar la distancia de proyección:

Como puede observarse, los patrones de difracción a medida que se aumenta la distancia de proyección, guardan la proporción de distancia entre ellos. Es decir, al aumentar la distancia de proyección, los patrones de difracción generados nunca llegan a superponerse, sino que el patrón conjunto de todos los patrones generados aumenta su tamaño a medida que aumenta la distancia de proyección.

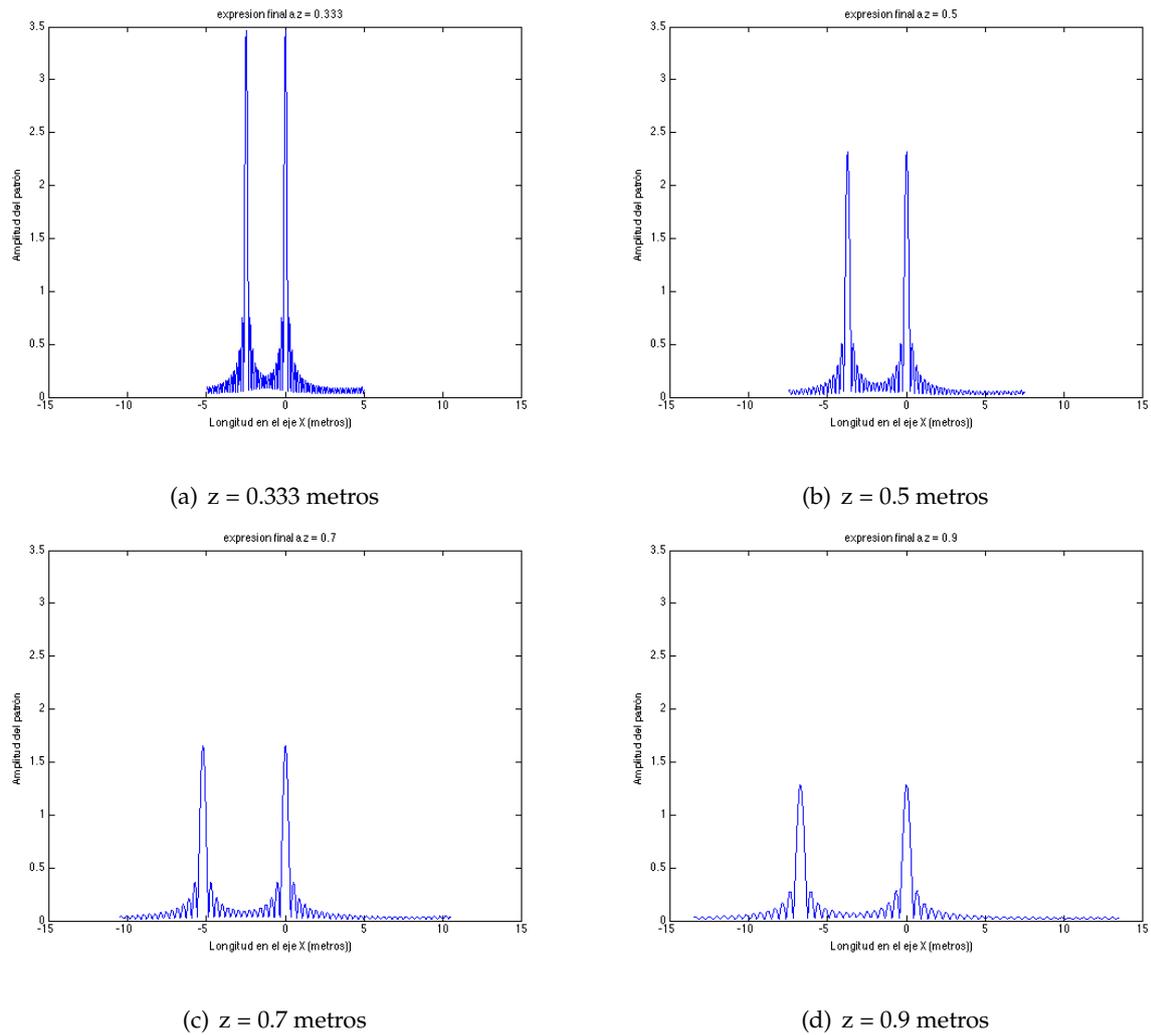


Figura 4.47: Cortes longitudinales en el eje x para los distintos valores de distancia de proyección z.

4.3.3. Efectos de la frecuencia

Para estudiar los efectos de la frecuencia sobre los patrones de difracción generados, se va a utilizar la herramienta de Matlab para generar un patrón de difracción a partir de una apertura circular arbitraria de dimensiones 0.1 metros de radio, a una frecuencia inicial de 1 GHz a la distancia mínima de Fraunhofer para este caso que es 0.26 metros. Se hará la representación de dicho patrón a las frecuencias de 2 GHz y 0.5 GHz para evaluar las variaciones en la representación. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.48.

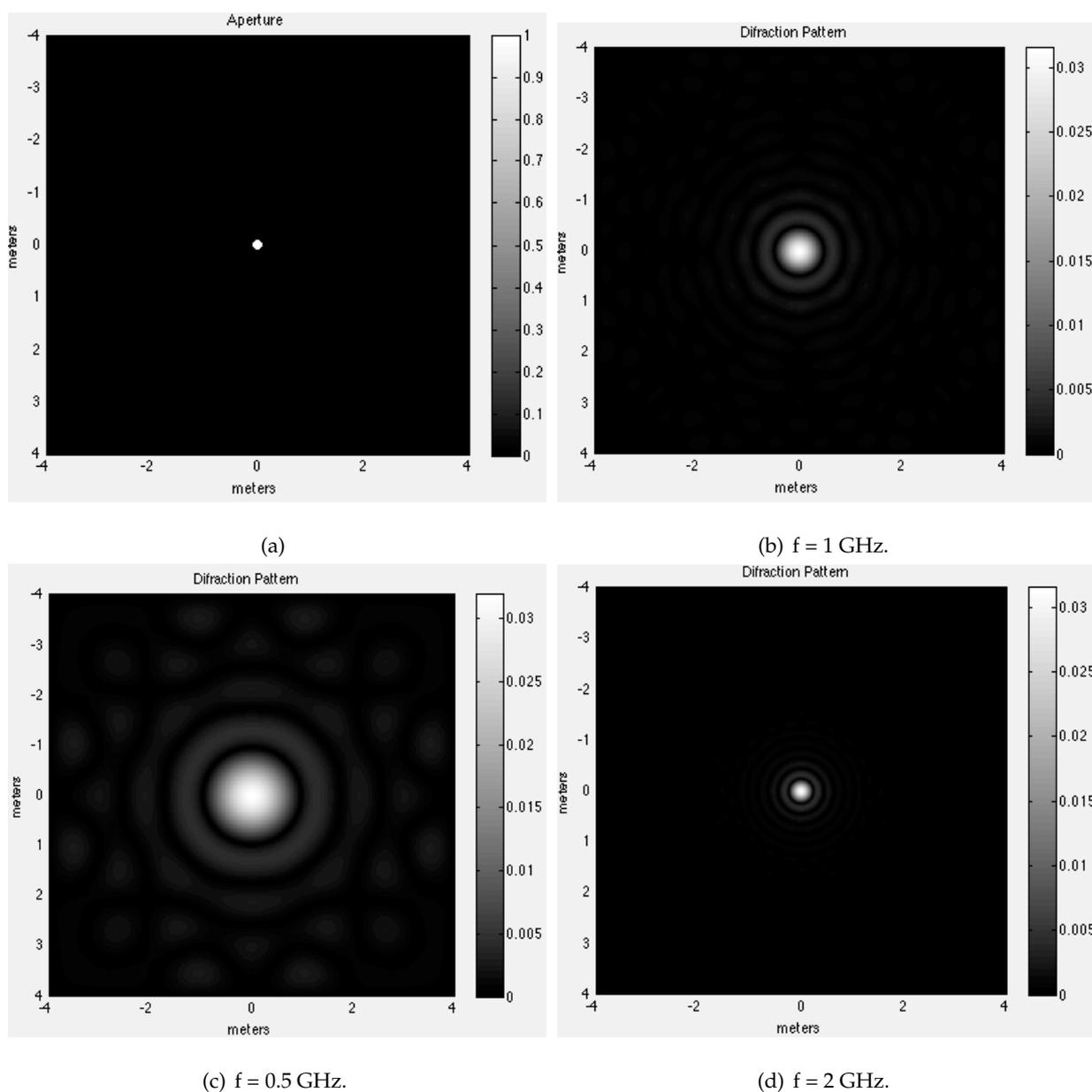


Figura 4.48: Apertura circular generada (a) y patrones de difracción para las frecuencias de 1GHz (b), 0,5GHz (c) y 2GHz (d).

Como puede observarse, a medida que aumenta la frecuencia, para una misma apertura de entrada al sistema, el patrón de difracción generado es de menor dimensión. Esto se debe a que el efecto de la apertura depende de las dimensiones de la misma y de la longitud de onda del frente de onda que se propaga a través de ella. El patrón de difracción será mayor cuanto menor sea la apertura en relación a la longitud de onda del frente que la excita. Las amplitudes se ven ligeramente afectadas, como puede observarse en la representación longitudinal de la figura 4.49.

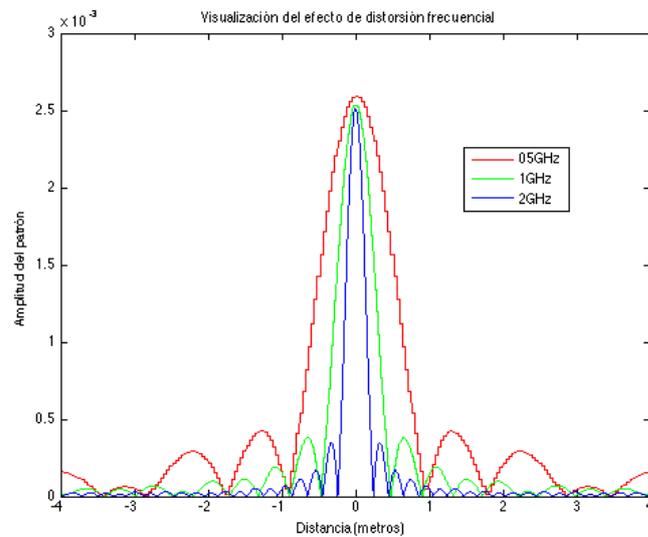


Figura 4.49: Corte de patrones de difracción superpuestos para distintas frecuencias

Puede concluirse entonces que la frecuencia afecta al patrón de difracción que se genera en el plano de proyección, provocando que cuando esta aumenta, las dimensiones del patrón disminuyan.

Este efecto de variación del tamaño del patrón en función de la frecuencia es visible en gran cantidad de fotografías espaciales como la que se observa en la figura 4.50:

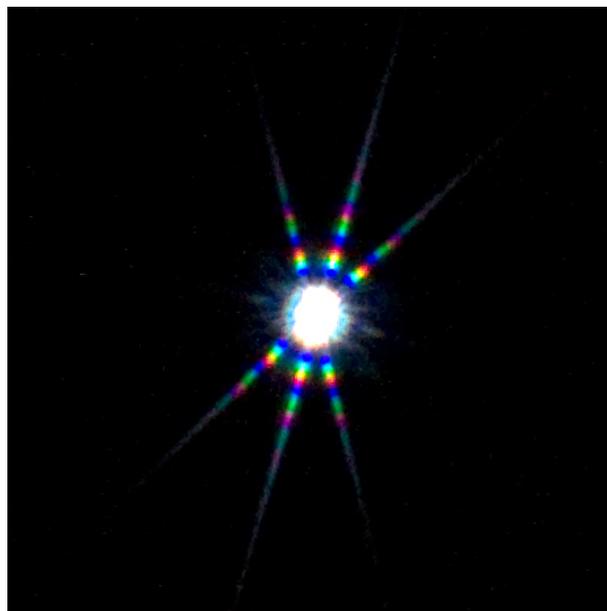


Figura 4.50: Efecto de distorsión frecuencial en el patrón generado por una máscara bahtinov.[12]

[5]Se observa en la figura 4.17 como las bajas frecuencias del espectro visible como el rojo se

4.3 Efecto del tamaño de la apertura, distancia de proyección y la frecuencia.

extienden más en el espacio que las altas frecuencias del espectro visible, como los tonos violetas.

Conclusiones, líneas futuras de trabajo

Como conclusión a este proyecto, se enumeran las distintas tareas que se han realizado a lo largo de la memoria:

- 1. Un estudio previo sobre los conocimientos básicos de la teoría de la difracción y de óptica de Fourier. Con el objetivo de establecer las bases matemáticas para la comprensión de los fenómenos físicos que se ven representados en los cálculos de la herramienta en Matlab.
- 2. Se ha realizado una herramienta programada en Matlab, que permite estudiar los patrones de difracción generados para una perturbación entrante a un sistema óptico. En la herramienta se han implementado una serie de funcionalidades que permiten el control de los parámetros necesarios para la generación de patrones de difracción y su estudio, dando en todo momento sentido físico a las representaciones.
- 3. Se han desarrollado en distintos apartados, las demostraciones de que la herramienta cumple con los requisitos establecidos de funcionamiento. Cumple con las propiedades de la transformada de Fourier y es capaz de calcular las expresiones de los patrones de difracción dadas por la óptica de Fourier de manera numérica. En el trabajo también se explican los procedimientos llevados a cabo para la programación de la herramienta.
- 4. Se han demostrado en el apartado de resultados las dependencias en el proceso de for-

mación de una imagen con la forma de la apertura, su dimensión, la frecuencia de la perturbación entrante al sistema óptico, así como la distancia de proyección de la imagen. Se han realizado ejemplos con reconstrucciones de imágenes reales para demostrar el funcionamiento y la correcta coherencia con la teoría para estudios de patrones para más de una fuente.

- 5. Se han evaluado ejemplos prácticos de funcionamiento, reconstruyendo las distorsiones que se producen en sistemas ópticos reales. Se han demostrado y explicado mediante el uso de la herramienta, distorsiones visibles en imágenes tomadas por telescopios espaciales.
- 6. Se ha podido usar la herramienta para comprender los fenómenos de difracción spikes en fotografía astronómica, así como el concepto de "límite de difracción".

Se proponen, una vez llegado a este punto de la memoria, una serie de líneas futuras de desarrollo para trabajos futuros:

- 1. Estudio en profundidad del efecto de las lentes en la generación de la imagen. Se debería tener en cuenta los efectos de restricción del paso de la energía en las lentes, y las distorsiones que estas provocan. Estudio de distintas topologías de lentes y sus propiedades en los sistemas ópticos.
- 2. Simulación de sistemas ópticos compuestos por lentes, prismas y espejos, de manera que usando los bloques de procesamiento óptico y las ecuaciones de difracción analizadas en la memoria, se simulen sistemas más complejos.
- 3. Un estudio de la generación de imágenes suponiendo una distancia desde el plano de la apertura al objeto finita. Con estas suposiciones no sería posible tener en cuenta que sobre la apertura incide un frente de onda plano, y por tanto no pueden ser usadas las ecuaciones tal y como se han definido en esta memoria.
- 4. Estudio de distintas topologías de aperturas, realizando combinaciones de las descritas en la memoria y evaluando sus efectos en la generación de la imagen mediante la utilización de la herramienta.

Bibliografía

- [1] S. Hamid Nawab Alan V. Oppenheim, Alan S. Villsky. *Oppenheim:Signals and Systems*. Prentice-Hall S.A., 1998.
- [2] Michael Gallant. Newtonian view.
- [3] National Geographic. The star journey.
- [4] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill Companie, INC., second edition, 1996.
- [5] J.W Hardy. *Adaptative optics for astronomical telescopes*. Oxford University Press, 1998.
- [6] Horst HauBecker H.Bernd Jahne, Peter GeiBler. *Handbook of Computer Vision and Applications. Sensors and Imaging.*, volume 1. Academic Press, 1999.
- [7] A.Bijaoui J.-L.Starck, F.Murtagh. *Image processing and data analysis. The multiscale approach*. Cambridge University Press, 1998.
- [8] Brian Koberlein. One universe at a time. diffraction spikes.
- [9] R Nave. The rayleigh criterion. hyperphysics, application to vision.
- [10] Richard M. Parton and Ilan Davis. *Image Restoration by Deconvolution*. Elsevier Science, 2006.

[11] Gary Seronik. Guide to newtonian telescope building.

[12] John Wunderlin. *The Bahtinov Focusing mask*. Astronomy Technology Today.