



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Optimización mediante modelos en red de aletas rectas recubiertas en función de la longitud bajo condiciones de convección

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Autor: Paola Tomás Peinado
Directores: Francisco Alhama López
Juan Francisco Sánchez Pérez



Universidad
Politécnica
de Cartagena

Cartagena, 18 de Junio de 2015

ÍNDICE

Capítulo 1: <i>Introducción</i>	2
1.1 Antecedentes	2
1.2 Objetivos	4
1.3 Medios utilizados	5
Capítulo 2: <i>Fundamentos teóricos</i>	6
2.1 Introducción	6
2.2 Mecanismos básicos de transmisión del calor.....	6
2.3 Convección	7
2.4 Superficies adicionales	10
2.5 Coeficientes de rendimiento en aletas	13
2.6 El problema de optimización.....	18
Capítulo 3: <i>Método de Simulación por Redes (MESIR)</i>	19
3.1 Introducción	19
3.2 Método de Simulación por Redes (MESIR)	19
3.3 El programa PSpice.....	22
3.4 La simulación del modelo en red	23
3.5 Funcionamiento de PROCCA-09.....	24
Capítulo 4: <i>Modelo de transferencia de calor</i>	26
4.1 Ecuaciones y condiciones de contorno	26
Modelo físico y matemático.....	26
4.2 Circuito eléctrico equivalente	29
Capítulo 5: <i>Sistema aleta-pared para aleta recta rectangular con extremo convectivo</i>	31
5.1 Introducción	31
5.2 Análisis.....	39
5.3 Conclusiones finales	60
Bibliografía	63
Apéndice1. Nomenclatura	65

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 1

Capítulo 1: Introducción

1.1 Antecedentes

El presente proyecto fin de carrera forma parte de una serie de trabajos en los que se trata la optimización de aletas con diferentes perfiles y sujetas a diferentes condiciones de contorno. Concretamente, este proyecto trata de caracterizar el proceso de disipación de calor que se lleva a cabo en aletas rectas rectangulares cuando se tiene en cuenta la disipación de calor que se produce en su superficie primaria, es decir, en la pared en el caso de que el coeficiente de transferencia de calor en el extremo y en la superficie lateral de la aleta sean iguales y todo ellos en base a 4 variables: conductividad térmica del material de la aleta-pared, coeficientes de convección de la aleta y de la pared, y volumen de material de la aleta. En resumen, se ha realizado el estudio del sistema aleta-pared con extremo convectivo, buscando aquellos valores de estas cuatro variables, que optimizan el flujo de calor transferido a través del conjunto.

La importancia del presente proyecto se sustenta en el hecho de que un creciente número de disciplinas de la ingeniería se ven afectadas por la transferencia térmica, requiriendo el rápido flujo de calor. Estas disciplinas producen una demanda creciente de componentes de alto rendimiento de transferencia de calor con un peso, volumen y coste cada vez menor, y de además formas más simples o cómodas. El estudio de componentes de alto rendimiento en transferencia de calor con respecto a estos parámetros y de sus comportamientos ante diversos ambientes térmicos conforma la transferencia de calor en superficies extendidas.

Los componentes típicos destinados a transmitir calor se encuentran en situaciones tales como: recintos de aire climatizado, vehículos y sus ondas de poder, química, refrigeración, procesos criogénicos, equipamientos eléctricos y electrónicos, en hornos convencionales y turbinas de gas, en procesos disipadores de calor, incineradores de basura y módulos de combustible nuclear.

En el diseño y construcción de varios tipos de equipos de transferencia de calor, de formas simples como cilindros, barras, y láminas; dichos componentes han de implementar el flujo de calor entre fuente y sumidero al proporcionar superficies absorbentes o disipantes de calor conocidas como superficies primarias. Cuando una superficie primaria es extendida por unión con tapas de metal y espigas tubulares, a la superficie adicional se le conoce con el nombre de superficie extendida o aleta.

En la mayoría de aplicaciones se enfatiza en la compacidad de la superficies que intercambian calor, particularmente en las que inducen pequeños gradientes de presión en los fluidos que circulan a su través. La palabra compacidad se refiere a la relación entre el calor transferido superficialmente por unidad de volumen intercambiador.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 1

Las superficies adicionales, o aletas, están ampliamente difundidas y se utilizan para mejorar la transferencia de calor de una superficie al medio que lo rodea. Se basan en el principio de que una mayor superficie va a permitir una mayor disipación de calor. Debido a su gran campo de aplicación, existe una vasta literatura dedicada a su análisis.

Las aletas, quedan caracterizadas por su geometría, sus secciones transversales, laterales y perfiles, que se corresponden con figuras geométricas con posibilidades de fabricación en serie, tales como las rectangulares, triangulares, trapezoidales, parabólicas e hiperbólicas, con dimensiones en las que la relación longitud/espesor es del orden de 5/1 a 50/1, siendo el espesor del orden de 0.5 a 10mm.

El primer intento significativo para proporcionar un análisis matemático de la interesante interacción entre convección y conducción en una única extensión de superficie, es decir, en aletas, comenzó hace casi noventa años, concretamente en 1922, con la aparición del primer trabajo de Harper y Brown [1]. En el mismo, el cual era un informe para NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), se investiga la transferencia de calor en motores refrigerados por aire con aletas rectangulares. Analizando este trabajo, Jakob [2] reitera la definición que Harper y Brown [1] hacen sobre la efectividad de la superficie, definida como «el calor disipado por la aleta, comparado con el que se disiparía bajo las mismas condiciones si toda la superficie de la aleta estuviera a la temperatura de la base», o lo que es lo mismo si su conductividad térmica fuera infinita.

Posteriormente, Gardner [3] (1945) renombra la efectividad como eficiencia, tal y como hoy se conoce. En un amplio trabajo, analiza y determina la eficiencia de aletas con perfiles longitudinales, radiales y espines, las tres geometrías fundamentales de la aleta, basándose en unas hipótesis simplificadoras. La aplicación de estas hipótesis propuestas por Murray [4] (1938) y Gardner [3] (1945), es importante para el análisis de geometrías de aletas pues ayuda a definir y limitar el problema y frecuentemente a simplificar su solución. Conocidas como las hipótesis de Murray – Gardner, son:

1. El flujo de calor en la aleta y su temperatura permanecen constante en el tiempo.
2. El material de la aleta es homogéneo, su conductividad térmica es igual en todas direcciones, y permanece constante.
3. El coeficiente convectivo de transferencia de calor en las caras de la aleta es constante y uniforme sobre toda la superficie de la aleta.
4. La temperatura del medio que rodea a una aleta es uniforme.
5. El espesor de la aleta es pequeño, comparado altura y longitud, así que el gradiente de temperatura a través del espesor de la aleta y el calor transferido desde el filo de la aleta puede ser despreciado.
6. La temperatura de la base de la aleta es uniforme.
7. No existe resistencia de contacto donde la base de la aleta se une a la superficie primaria.
8. La aleta por sí misma no genera calor en su interior.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 1

9. El calor transferido a través de la punta de la aleta es despreciable en comparación con el calor que cede su superficie lateral.
10. El calor de transferencia que va o viene de la aleta es proporcional al exceso de temperatura entre la aleta y el medio que la rodea.

Asimismo, Gardner [3] introduce también un nuevo concepto, el de efectividad, y lo define como «el calor disipado por la aleta, comparado con el que se disiparía bajo las mismas condiciones en ausencia de aleta», añadiendo que la eficiencia es un parámetro que puede llevar a confusión, debido a que la adición de una superficie adicional a una pared supone un decremento de la temperatura de la zona donde se ha añadido.

Las herramientas empleadas para el análisis de la transferencia de calor han ido avanzando a lo largo del tiempo, disponiendo hoy en día una gran tecnología y medios que permiten solucionar multitud de casos para los que hace años, sino décadas, se hubiera empleado una ingente cantidad de tiempo. En este proyecto se obtienen e interpretan gran cantidad de curvas y de valores por medio de la herramienta del Método de Simulación por Redes (MESIR). El método es aplicable a fenómenos físicos y consiste en la obtención de un modelo en red o modelo eléctrico equivalente a partir de las ecuaciones que definen el proceso, resolviéndose el modelo por medio del programa informático PSpice. Gracias al MESIR y a herramientas informáticas como PSpice, han sido posibles los resultados que se exponen en esta memoria.

1.2 Objetivos

El objetivo de este proyecto es buscar el valor del espesor y la longitud de una aleta rectangular recta, integrada en un conjunto aleta-pared, para conseguir el máximo flujo o disipación de calor a través del conjunto, considerando solo la posibilidad de aleta con extremo convectivo (descartamos extremo adiabático). Calcularemos la geometría óptima en función de tres variables en la región exterior del conjunto aleta-pared para un volumen constante de material. Dichas variables son:

- “Coeficiente de convección sobre la aleta, h_a ” (de valor constante en toda la superficie de la aleta)
- “Coeficiente de convección sobre la pared, h_p ”
- “Conductividad térmica, K ” (del material del conjunto aleta-pared)

Analizaremos la influencia de cada una de estas variables individualmente en la curva que representa el flujo de calor a través del conjunto en función del espesor de la aleta e (y por tanto de la longitud L , ya que ambos parámetros son linealmente dependientes por ser un volumen constante de material $V_0=L \cdot e \cdot 1$). Calcularemos los valores del espesor y longitud de la aleta, que para un rango de valores predeterminados de estas tres variables, dan lugar a una máxima transferencia de calor a través del conjunto. Así, tendremos que empleando un mismo volumen de material en la fabricación de una aleta, conseguiremos una mayor o menor transferencia de calor a través del conjunto aleta-pared dependiendo de cómo este distribuido dicho material, es decir, dependiendo de la geometría que tenga la aleta. Nosotros buscaremos la geometría óptima para la máxima disipación de calor.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 1

Finalmente analizaremos la influencia de la variable “volumen de material de la aleta, V_a ” sobre la curva espesor aleta-flujo de calor, “ $e-Q_t$ ”. En este caso para unos valores prefijados de las otras tres variables en estudio (coeficiente de convección de la aleta h_a , coeficiente de convección de la pared h_p , y conductividad térmica del conjunto aleta-pared K), podremos definir la influencia del volumen de la aleta en la capacidad de evacuar calor a través del conjunto.

El estudio se va a llevar a cabo sobre una aleta con una sección longitudinal de 25mm^2 ($L \cdot e = 25\text{mm}^2$) es decir, del orden de magnitud de la aleta del procesador de un ordenador de sobremesa actual. Integrada en una pared de 2mm de espesor y 10mm de longitud.

Estos valores permanecen constantes en todo el desarrollo del trabajo.

Los valores de las variables en estudio son valores próximos a los que nos podremos encontrar en un caso real, intentando abarcar toda la casuística posible. El coeficiente de convección, h , comprende desde condiciones de convección natural a condiciones de convección forzada, mientras que la conductividad térmica, k , va desde valores más pequeños como el del acero (50 W/mK), pasando por conductividades térmicas elevadas en el caso de materiales sin alear como la plata (400 W/mK), hasta conductividades de materiales superconductores del orden de 1500 W/mK.

1.3 Medios utilizados

Para conseguir los objetivos que este proyecto persigue, se han utilizado:

- Un ordenador portátil ASUS con las características que se detallan a continuación:
 - Procesador Intel Core i7
 - 8GB de memoria
 - 1TB HDD
- El programa de simulación de circuitos PSpice, versión 10.5, perteneciente a la familia de análisis OrCAD.
- Oracle VM Virtualbox
- El programa base para “Simulación por Redes” conocido como PROCCA -09.
- El programa de hojas de cálculo Microsoft Excel, versión 2010, perteneciente a la suite ofimática Microsoft Office.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

Capítulo 2: Fundamentos teóricos

2.1 Introducción

El propósito de este capítulo es exponer con la mayor claridad posible los conceptos básicos de transmisión del calor por convección en aletas. Estos conceptos son fundamentales para un posterior entendimiento de la metodología seguida a lo largo del proyecto.

En primer lugar, se presentan brevemente los mecanismos básicos de transmisión del calor, a saber, conducción, convección y radiación. A continuación, se profundiza un poco más en el fenómeno que entra en relación más directa con este proyecto, la convección térmica, sus fundamentos, leyes y propiedades.

Posteriormente, y tras introducir el concepto de superficie adicional, así como algunos ejemplos, se explicará cómo se caracterizan las prestaciones de una aleta a través de los coeficientes más habituales, su significado, evolución y valor práctico a la hora de cuantificar el rendimiento de la pared aleteada.

Por último se hablará del problema de la optimización, dando una definición formal del mismo. Se distinguirán diferentes casos, exponiendo algunos comentarios que aclaren el caso concreto que se va a estudiar en este proyecto.

2.2 Mecanismos básicos de transmisión del calor

En termodinámica, el calor es definido como energía transferida debida a gradientes o diferencias de temperatura. Desde este punto de vista, la termodinámica reconoce solamente dos formas de transferencia de calor: conducción y radiación. Por ejemplo: la transferencia de calor a través de la pared de un tubo de acero, es mediante conducción; la transferencia de calor desde el sol hasta la tierra, es mediante radiación. Estas formas o modos de transferencia de calor ocurren en una escala molecular o subatómica.

En aire a presión normal, la conducción se realiza mediante moléculas que viajan distancias muy pequeñas ($\sim 0.65 \mu\text{m}$) antes de colisionar con otras moléculas e intercambiar energía. Por su parte la radiación se realiza mediante fotones, que viajan casi sin dificultad de una superficie a otra.

Todos los procesos de transferencia de calor implican transporte y la conversión de la energía. Estrictamente hablando, la convección es el transporte de energía mediante el movimiento de masa de un medio (un sólido en movimiento también puede realizar la convección de energía en este sentido).

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

La ecuación de flujo estable de energía viene dada por la expresión:

$$\dot{m} \cdot \Delta \left(i + \frac{v^2}{2} + gz \right) = Q + W$$

La convección de energía interna está contenida en el término $\dot{m}\Delta i$, mientras que la transferencia de calor por conducción y radiación viene representada por Q.

Es una práctica habitual en ingeniería usar el término convección en términos generales para describir la transferencia de calor entre superficies mediante un fluido en movimiento; aunque la conducción y radiación son los que juegan un papel dominante en la superficie, donde el fluido es estacionario.

2.3 Convección

El fenómeno de transferencia de calor por convección es un proceso de transporte de energía que se lleva a cabo como consecuencia del movimiento de un fluido (líquido o gas) y está íntimamente relacionado con el movimiento de éste. Si existe una diferencia de temperatura en el interior de un líquido o un gas, es casi seguro que se producirá un movimiento del fluido.

La figura muestra una placa con la temperatura superficial T_s y un fluido con temperatura T_∞ que fluye paralelo a ella.

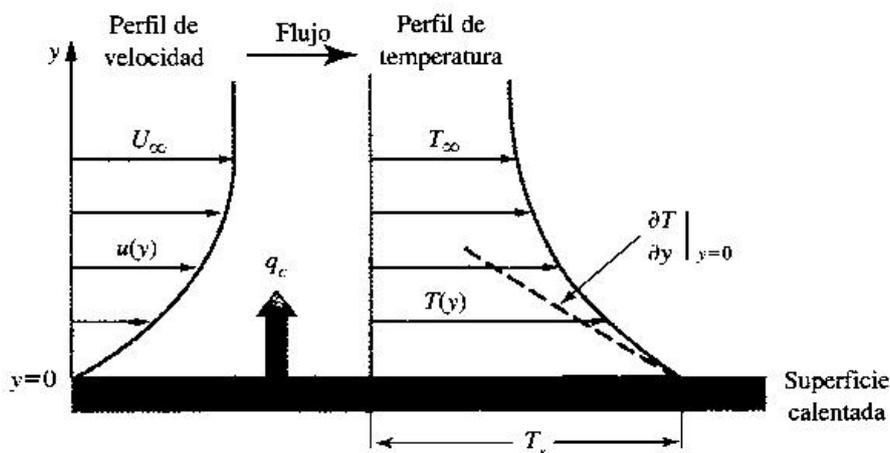


Figura 2.1: Perfil de velocidad y temperatura de transferencia de calor por convección de una placa calentada con flujo sobre su superficie.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

Puesto que la velocidad relativa del fluido con respecto a la placa es en general idénticamente igual a cero en la interfase sólido-fluido ($y = 0$), el calor se transfiere por conducción solamente en este plano del fluido.

Sin embargo, aun cuando el calor disipado por la placa puede computarse mediante la ecuación:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

el gradiente de temperaturas en el fluido depende de las características, a menudo complejas, de flujo de éste. Por ello resulta más conveniente calcular el flujo de calor disipado por el sistema en términos de la diferencia total de temperaturas entre la superficie y el fluido. Es decir:

$$q = h A (T_s - T_\infty) \quad (2.3)$$

, donde:

q = tasa de transferencia de calor por convección, W

A = área de transferencia de calor, m^2

h = coeficiente de transferencia de calor por convección (o coeficiente de película) a través del área A , $W/m^2 K$

$T_s - T_\infty$ = diferencia entre la temperatura superficial y la del fluido en un lugar específico, K

La ecuación anterior se conoce como la ley de Newton de enfriamiento.

El fenómeno de transferencia de calor por convección usualmente se clasifica como convección forzada y convección libre o manual. En el primer caso, el fluido se desplaza sobre la superficie sólida mediante la acción de algún agente externo, como un ventilador, una bomba o agentes meteorológicos. Un ejemplo típico de convección forzada sería el radiador en el sistema de enfriamiento de un motor de automóvil u otro intercambiador de calor.

En la convección natural el movimiento del fluido resulta como consecuencia de los gradientes de densidad, que se originan al estar el fluido en contacto con una superficie a mayor temperatura en presencia del campo gravitatorio. Así pues, este tipo de movimiento, se debe exclusivamente a la no uniformidad de la temperatura del fluido.

Ejemplos típicos de convección libre serían el calentamiento de agua en un recipiente antes de llegar a la ebullición, el enfriamiento de un equipo eléctrico (transformadores, transistores) o los radiadores de calefacción sin ventilador.

En la convección forzada el movimiento del fluido se logra sometiendo el fluido a un gradiente de presiones, con lo que se fuerza su movimiento de acuerdo a las leyes de la mecánica de fluidos.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

Así mientras que en la convección forzada la velocidad casi siempre se le impone al sistema por medio de una bomba o ventilador y puede especificarse de manera directa, en la convección natural la velocidad de dilatación térmica del fluido, y el campo de fuerza en el cuerpo, que para los sistemas localizados en la tierra es simplemente la fuerza de la gravedad.

El coeficiente de transferencia de calor en algunas geometrías sencillas puede determinarse mediante una combinación de las ecuaciones (2.2) y (2.3):

$$h = -\frac{-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0}}{T_s - T_\infty} \quad (2.4)$$

En el caso de geometrías más complejas, el coeficiente de transferencia de calor puede evaluarse mediante el uso de correlaciones empíricas o recurriendo a la experimentación.

En la tabla siguiente se muestra algunos valores del coeficiente de transferencia de calor o de película h.

Situación	h (W / m ² . K)
Convección libre, aire	5-25
Convección forzada, aire	10-500
Convección forzada, agua	100-1500
Agua en ebullición	2500-25000
Condensación de vapor de agua	5000-100000

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

2.4 Superficies adicionales

Las pérdidas por convección de calor de una superficie pueden ser sustancialmente mejoradas si se le añaden extensiones en esa superficie que incrementen su área. Estas extensiones pueden tomar varias formas.

Las superficies adicionales tienen un extenso campo de aplicaciones en problemas de transmisión de calor, desde radiadores de automóviles o equipos de aire acondicionado, hasta los elementos combustibles de reactores nucleares refrigerados por gases, o los elementos de absorción y disipación de energía en vehículos espaciales, o los equipos de refrigeración y calentamiento en la industria química, etc. Se basan en el principio de que una mayor superficie va a permitir una mayor disipación de calor hacia el medio.

Antes de entrar en la resolución de los problemas térmicos en superficies específicas, es conveniente hacer una interpretación intuitiva de la necesidad de las superficies ampliadas, conocidas como aletas, así como sus secciones transversales, laterales y perfiles (sección recta), que se corresponden con figuras geométricas con posibilidades de fabricación en serie, tales como las rectangulares, triangulares, trapezoidales, parabólicas e hiperbólicas.

Las tres geometrías fundamentales de superficies adicionales suelen ser “aletas rectas o longitudinales”, “aletas anulares o radiales” y “agujas o espinas”. La aleta recta es una superficie unida a una pared plana o bien cilíndrica, en cuyo caso está colocada siguiendo una generatriz, la aleta anular va unida concéntricamente a un cilindro, y las agujas o espines son varillas cónicas o cilíndricas, unidas por un extremo.

Se denomina *base de la aleta* (Fig. 2.2) a la superficie en contacto con la pared sobre la que descansa la aleta o superficie *primaria*; el *extremo* o *punta* de la aleta es la superficie o línea más alejada de la base; los *flancos* o *superficies laterales* son las principales superficies de disipación de calor y los *bordes* son las superficies que cierran el volumen de la aleta, cuyo efecto sobre la transmisión de calor es despreciable en ciertos tipos de aletas (longitudinales). Esta será la terminología que se emplee en esta memoria.

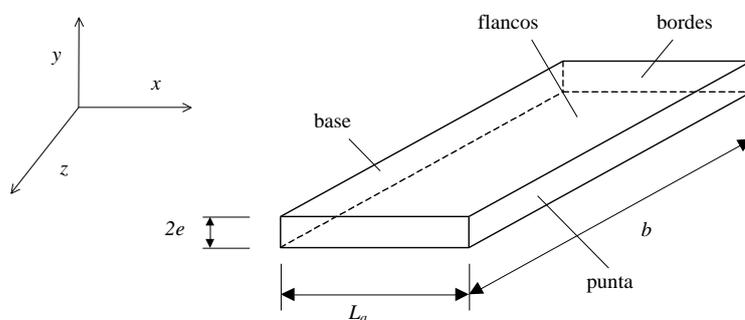
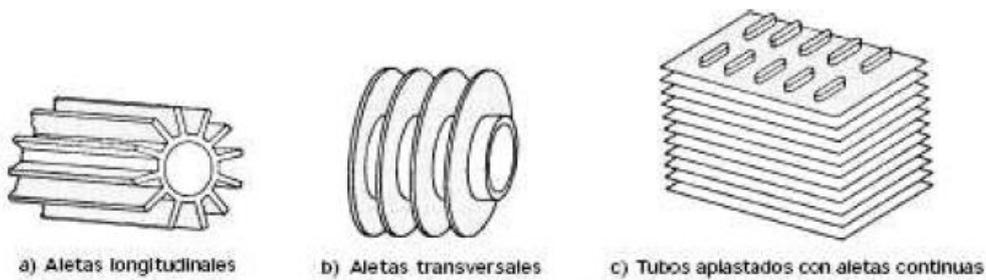


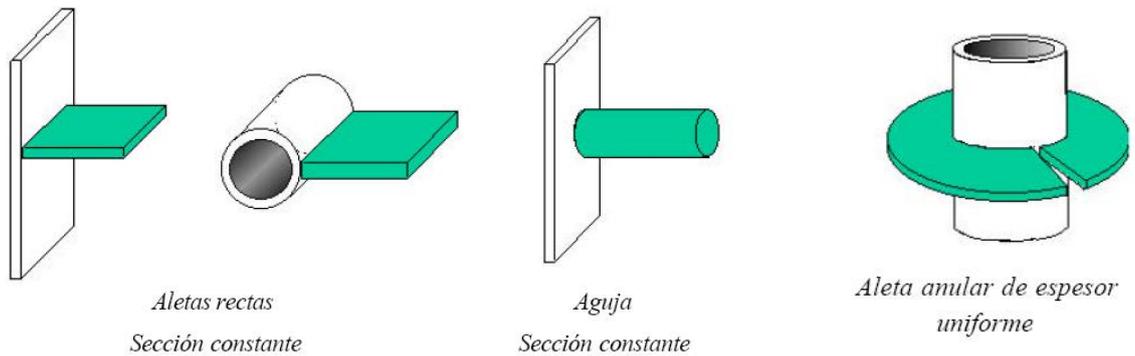
Figura 2.2. Aleta longitudinal o recta

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

A continuación se muestran diferentes tipos de superficies aleteadas, tanto cuando las aletas son de sección constante como cuando ésta es variable:



SECCIÓN CONSTANTE



SECCIÓN VARIABLE

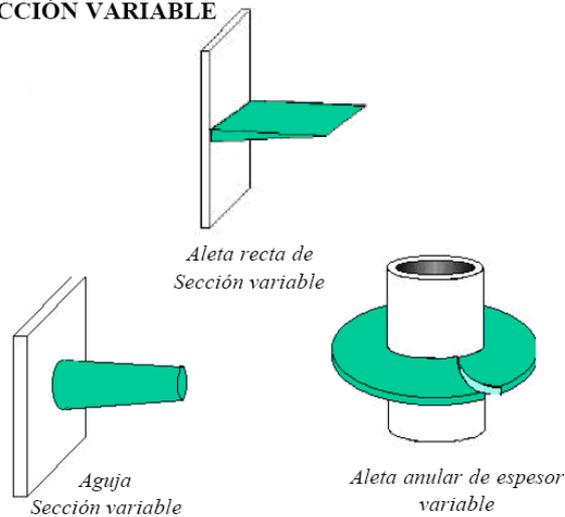


Figura 2.3. Diferentes tipos de aletas

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

Las aletas se pueden disponer sobre superficies planas o curvas. Si la disposición es de tipo longitudinal, se puede admitir que la superficie de encastre donde se apoya la aleta es plana, siempre que el radio del tubo sea elevado frente al espesor de la aleta.

Cuando las aletas son sólidos de revolución o paralelepípedos se denominan protuberancias. Las protuberancias se tratan con distribución de temperaturas constante para cada sección recta paralela a la base, lo que equivale a admitir que la relación entre la longitud L de la protuberancia y el diámetro o longitud equivalente en la base, es elevada, se puede considerar la transmisión de calor como unidireccional; sino se cumple esta hipótesis el fenómeno de la transmisión del calor se estudia en tres dimensiones.

Para satisfacer las necesidades térmicas, los elementos se acoplan a la superficie base en serie o paralelo constituyendo un intercambiador de calor. Se incrementa así la superficie de transmisión de calor, aunque al hacerlo pueda disminuir la temperatura superficial media. Si las proporciones de las nuevas superficies son las adecuadas, aumentará el calor intercambiado entre la estructura y el medio ambiente fluido.

Cuando el fluido que circula por las aletas está confinado y se mueve mediante un sistema de bombeo, hay que tener en cuenta la energía necesaria para mantener el coeficiente de convección h_c a través de las aletas, procurando que la energía térmica extraída sea máxima frente a la energía utilizada en mover el fluido.

La aplicación de las superficies adicionales supone enfrentarse al siguiente problema técnico: dada una aleta de una forma y un tamaño determinado, unida a una superficie (la pared) de temperatura fija, (la temperatura de la base de la aleta), y rodeada por un fluido de temperatura también fija, ¿qué cantidad de calor es disipado por la aleta y qué cantidad es disipado por la pared o superficie primaria?, y ¿cómo varía la temperatura a lo largo de la aleta?

En la mayoría de los casos, las proporciones de la aleta son tales que la longitud de ésta, medida normalmente a la superficie primaria a la que esté unida, es grande comparada con su espesor máximo. Así pues, se supone que la temperatura de la aleta depende sólo de la coordenada longitudinal. Por ejemplo, si una varilla cilíndrica que sobresale de una pared caliente es muy larga comparada con su diámetro, podemos considerar que la temperatura es uniforme dentro de cualquier sección normal al eje. Por consiguiente, la temperatura en un punto de la varilla depende sólo de la coordenada axial. En una aleta delgada anular, la temperatura sólo dependería de la coordenada radial.

Si se hacen estas simplificaciones, el problema de la distribución de temperaturas y del flujo de calor, se reduce a uno de conducción unidimensional.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

Esta situación conduce a un estudio de métodos, costes de fabricación, mantenimiento y rendimiento de los elementos de las aletas, cuyos valores óptimos pueden no coincidir con los óptimos térmicos, por lo que un análisis de estos últimos es importante desde el punto de vista de la fabricación de modelos normalizados, así como de la elección del modelo más adecuado para el usuario.

Las ecuaciones que gobiernan los casos particulares del sistema aleta recta rectangular-pared se presentan con detalle en el *capítulo 4* junto con su traducción a un modelo eléctrico que las represente. No se han incluido en este resumen, que tiene como misión explicar los aspectos básicos de la convección en aletas como medio de transmisión del calor, sin entrar en la complejidad matemática de los modelos que posteriormente se describirán.

2.5 Coeficientes de rendimiento en aletas

Generalmente, el calor disipado por una superficie aleteada se evalúa a través de unos coeficientes, llamados genéricamente coeficientes de rendimiento o de prestaciones. Los coeficientes clásicos, eficiencia y efectividad, fueron definidos en el ámbito de las hipótesis simplificadoras, también conocidas como hipótesis de Murray – Gardner. Sin embargo, sus limitaciones a la hora de afrontar configuraciones geométricas y procesos más complejos han hecho necesaria la definición de nuevos coeficientes, entre los que destaca la admitancia térmica inversa relativa (*ATIR*).

Los coeficientes de rendimiento pueden ser divididos en dos grandes grupos, según la tesis del Dr. D. M. Alarcón [5]:

- Los que comparan el calor disipado por la aleta con el de un cierto estándar: la eficiencia.
- Los que son proporcionales al calor disipado por la aleta: la efectividad, el factor de aumento, la admitancia de entrada y el coeficiente de mejora, entre otros.

Los coeficientes del segundo grupo se aplican con facilidad en cálculo y diseño de equipos. Así, el calor disipado por una aleta es el que disiparía la superficie base multiplicado por la efectividad o el factor de aumento, o simplemente el producto de la admitancia por el gradiente térmico en la superficie base de la aleta.

La eficiencia es probablemente el coeficiente más familiar entre los ingenieros. La contribución de una aleta a la disipación de calor se calcula de forma sencilla por el aumento de la superficie de intercambio, ponderada con el valor de la eficiencia.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

La eficiencia de la aleta, η , se define de manera general como la relación entre el calor disipado por la aleta en la unidad de tiempo, J_a , y el que disiparía si toda su superficie exterior A_a estuviera a la temperatura de la base T_b :

$$\eta = \frac{J_a}{J_{isotermo}} = \frac{J_a}{h \cdot A_a \cdot \Delta T_b} \quad (2.5)$$

, donde h es el coeficiente de película o de transferencia de calor por convección, A_a la superficie de la aleta y $\Delta T_b = T_b - T_0$ el exceso o sobrettemperatura de la base de la aleta respecto al entorno de ésta. Una definición alternativa es la relación entre el calor disipado por la aleta y el que disiparía la misma aleta de conductividad infinita.

Para el sistema o montaje aleta-pared que se estudia en este proyecto fin de carrera, la expresión de la eficiencia de la aleta será la siguiente:

$$\eta = \frac{J_a}{J_{isotermo}} = \frac{J_a}{h_1 \cdot A_1 \cdot \Delta T_1 + h_2 \cdot A_2 \cdot \Delta T_2 + h_3 \cdot A_3 \cdot \Delta T_3} \quad (2.6)$$

, donde h son los coeficientes de película, A las superficies de intercambio de calor y DT los excesos de temperatura entre la base de las superficies y el entorno de éstas. Los subíndices 1, 2 y 3 indican las distintas superficies que conforman el sistema intercambiador de calor: pared, cara superior de la aleta y extremo de la aleta, respectivamente. Análogamente, a los coeficientes de convección se les ha denominado: $h_1=h_{cn}$, $h_2=h_{cf}$ y $h_3=h_{ce}$

Para los casos con extremo convectivo, se considera el mismo coeficiente de convección en todas las superficies por lo que se la expresión de la eficiencia se escribe:

$$\eta = \frac{J_a}{J_{isotermo}} = \frac{J_a}{h \cdot (A_1 \cdot \Delta T_1 + A_2 \cdot \Delta T_2 + A_3 \cdot \Delta T_3)} \quad (2.7)$$

La efectividad ε es la relación entre el calor conducido a través de la base de la aleta y el que se disiparía por la misma área de la base de la superficie primaria, a la misma temperatura, si la aleta no estuviera presente:

$$\varepsilon = \frac{\text{Calor disipado por la aleta}}{\text{Calor disipado sin aleta}} = \frac{J_a}{h \cdot A_b \cdot \Delta T_b} = \frac{A_a}{A_b} \eta \quad (2.8)$$

, donde S_b es la superficie de la pared soporte antes de añadirle la aleta, que coincide con el área transversal de la base de la aleta, A_b .

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

La efectividad se prefiere en los casos en que hay generación interna de calor. Valores de $\varepsilon \leq 0$ implican que el calor generado en la aleta supera o iguala el que procede de la pared, teniendo entonces la aleta ningún sentido como elemento que mejore la transmisión de calor del sistema.

La eficiencia cuenta a su favor que es un número adimensional y que compara el calor disipado con una referencia, la de la aleta de conductividad infinita. Sin embargo, no se puede afirmar que a mayor eficiencia se obtiene una mejor aleta. Además el concepto de eficiencia puede resultar engañoso al comparar aletas de distintas dimensiones o materiales. La eficiencia óptima, en términos de material empleado para una disipación de calor dada y un mismo material, para aletas rectas rectangulares es 0.625 y para aletas de perfil triangular 0.595, mientras que esta última transmite más calor que la primera, a pesar de su menor eficiencia. También, al comparar las prestaciones de la aleta con las de una aleta de conductividad infinita, la eficiencia prima a aquellos materiales con elevada conductividad.

Las medidas de eficiencia y efectividad probablemente atraen el interés de los diseñadores no porque sus valores absolutos dictaminen los diseños, sino porque son útiles en la caracterización de aletas de formas más complejas. En tales casos, las soluciones son a menudo tan complejas que los diagramas de eficiencia y efectividad sirven como ahorro de soluciones gráficas.

El inconveniente más importante con el que tropiezan ambos coeficientes a la hora de ser utilizados para predecir las prestaciones de una aleta es que ambos contienen explícitamente en su definición la sobretemperatura en la base de la aleta, que en la práctica es desconocida y no coincide con la de la superficie primaria desnuda. Por lo tanto, la información que se deriva de ambos coeficientes puede resultar engañosa, en particular la efectividad.

Otra crítica que se hace a ambos coeficientes es que están definidos para aletas bajo hipótesis clásicas y no consideran, por ejemplo, procesos dependientes del tiempo, como los transitorios.

Estas diferentes desventajas propiciaron la utilización de un nuevo concepto: el de admitancia térmica. La caracterización térmica de un sistema aleta-pared u otras superficies adicionales puede realizarse por medio de funciones de transferencia térmica, que relacionan estímulo y respuesta térmica del sistema. Así, el conjunto aleta-pared puede ser considerado como un sistema de dos entradas, en el que la entrada es el exceso en la fuente térmica y la salida el calor disipado. La relación entre entrada y salida responde a un conjunto de ecuaciones, que constituyen el modelo matemático o su equivalente modelo en red. Desde la perspectiva de las funciones de transferencia térmica, el modelo en red tiene una admitancia eléctrica que reproduce exactamente la admitancia térmica del sistema aleta-pared.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

En principio se partirá de la definición más simple de admitancia térmica inversa:

$$Y_s = \frac{J_a}{\theta_e} \quad (2.9)$$

, donde Q_a es el calor disipado o de salida, disipado al entorno o transmitido a otros elementos sistema considerado y ϑ_e la sobretemperatura en la sección de entrada del mismo.

Esta admitancia, tal como fue definida, es una conductancia, pues no se hace referencia a procesos dependientes del tiempo. La definición de admitancia inversa es general, no habiendo restricción alguna en cuanto a tipo de flujo o fenómenos a tener en cuenta: coeficientes y propiedades térmicas variables, generación interna, incluso comportamiento multidimensional. Se define instantáneamente, si bien se puede calcular la admitancia media en un intervalo temporal dado. Para su evaluación, en general, se recurre a la simulación numérica, siendo el Método de simulación por redes (MESIR) un procedimiento especialmente adecuado.

La admitancia inversa tiene dimensiones de potencia dividido por temperatura, o en términos de termodinámica de redes, de flujo dividido por fuerza, es decir, de inversa de resistencia o impedancia. La idea intuitiva que subyace tras este coeficiente es que el calor que disipa una aleta está directamente relacionado con el gradiente térmico que impulsa la transmisión de calor o sobretemperatura en su base. La aleta es un elemento que aumenta la superficie de transmisión térmica de la pared a la que se une, pero que también ofrece cierta resistencia al flujo térmico. Así pues, el concepto de admitancia es inherente al propio concepto de superficies adicionales.

Cabe preguntarse acerca de la funcionalidad del coeficiente, es decir, si es o no útil en cálculo y diseño de sistemas con aletas o superficies adicionales. La respuesta es que sí. Conocida la admitancia inversa, la sobretemperatura en la base de la aleta o en el fluido que baña la pared desnuda y el número de aletas por unidad de longitud o superficie, se puede conocer el calor total transmitido por el equipo.

El problema de la admitancia inversa reside en que es un coeficiente está referido al material empleado. Además de esto, no es adimensional ni alcanza el máximo en el óptimo, lo cual puede llevar a confusión. A raíz de estos inconvenientes surge el concepto de admitancia térmica inversa específica:

$$y_s = \frac{Y_s}{m} = \frac{J_a}{\theta_e \cdot m} \quad (2.10)$$

, donde m es la masa de la aleta. Su unidad es W/kgK. Este nuevo parámetro y_s es un indicador universal del aprovechamiento del material cuyo objetivo es la transmisión de calor, permitiendo comparar superficies adicionales de distinto tipo y perfil. Sin embargo es un coeficiente dimensional y su máximo está en el óptimo, pero no es la unidad.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha	18 Junio 2015
		CAPÍTULO 2	

Como parámetro que solventa todos los problemas anteriores surge el que se empleará en este proyecto en posteriores análisis, la admitancia térmica inversa relativa (ATIR)

$$y_r = \frac{y_s}{y_{opt}} \quad (2.11)$$

, siendo y_{opt} la admitancia específica en el óptimo de una aleta de tipología (longitudinal, anular, rectangular, triangular, etc.) y un material dados. La determinación de este coeficiente requiere la determinación del óptimo, que es específico de cada tipo o configuración de aletas.

La admitancia inversa relativa es un coeficiente adimensional y su valor máximo es la unidad y se alcanza en el punto óptimo. Este parámetro complementa los anteriores, proporciona mayor información, aunque requiere del conocimiento de otros datos suplementarios. Puede considerarse un coeficiente ideal en el sentido de que responde a todos los requerimientos que debe cumplir un buen coeficiente de prestaciones. La admitancia inversa relativa muestra el margen de mejora que se tiene en un diseño concreto (tipo o perfil de aleta).

A continuación se muestra la *tabla 2.1*, donde se recogen de manera esquemática las características básicas de los coeficientes que se han revisado en este capítulo:

	Eficiencia	Efectividad	Admitancia inversa	Admitancia inv. específica	Admitancia inv. relativa
Sistema aleta-pared	NO	NO	SI	SI	SI
Transitorio	NO	NO	SI	SI	SI
Consistente	NO	NO	SI	SI	SI
Referencia a estándar	SI	NO	NO	NO	SI
Máximo en el óptimo	NO	NO	NO	SI	SI
Máximo en la unidad	NO	NO	NO	NO	SI
Adimensional	SI	SI	NO	NO	SI

Tabla 2.1. Resumen comparativo de coeficientes de rendimiento en aletas

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 2

2.6 El problema de optimización

Uno de los objetivos de esta memoria es optimizar montajes aleta longitudinal rectangular-pared, sujeta a restricciones dimensionales y trabajando en la condición de convección térmica. El problema de optimización se puede enunciar de la siguiente manera, tal y como propone Razelos [6]: «dado el volumen o la cantidad deseada de calor disipado en la aleta, determinar las dimensiones que maximizan la disipación de calor o que minimizan el volumen».

Las aletas aisladas no son más que una idealización que conduce a conclusiones informáticas erróneas del comportamiento de paredes aleteadas. No basta sólo con el conocimiento de los documentos, actualmente publicados, relacionados con el tema para abordar adecuadamente la optimización del sistema-aleta pared. En términos generales, el óptimo obtenido con una aleta aislada no coincide con el óptimo de un montaje aleta-pared, la diferencia se debe al grosor de la pared y el espaciado entre aletas. Por otra parte, las aletas aisladas no pueden ser debidamente utilizadas para el estudio de series de aleta desde el espaciado entre aletas y las dimensiones de la aleta base, las cuales dependen de la forma de la aleta para un volumen dado, que condiciona el número de aletas por unidad de longitud. Además, son muy pocos los trabajos publicados hasta la fecha que consideran las restricciones geométricas para las variables de diseño, que resultan aletas excesivamente delgadas e impracticable.

Enunciado de esta manera, el problema no está completamente definido, ya que se necesita un dato más que separa el problema en dos casos distintos: en el primero, el perfil de la aleta es dato, mientras que en el segundo se busca obtener este perfil. Así pues, hay dos formas clásicas de hacer frente a la optimización de aletas y se explican más detalladamente a continuación:

- Limitar la búsqueda a un determinado perfil, generalmente rectangular, del cual se buscan las dimensiones que proporcionan una mayor transferencia de calor para una masa o volumen dado

El enfoque Schmidt [7], que consiste en buscar el perfil que alcanza la máxima transmisión de calor para una determinada masa o volumen. Si nos referimos al mismo material no existe ninguna diferencia en la optimización en lo que respecta a la masa o volumen. Esta estrategia conduce a aletas de formas difíciles y caras de fabricar.

En este documento, sólo se considera la primera opción. Una variación de ambas estrategias es buscar la mínima masa o volumen para un determinado ratio de calor.

Además de esto habrá que comprobar si las aletas optimizadas son efectivas. Esto es, dada una aleta con un perfil óptimo, ¿disipa mucho más calor que el que se podría evacuar sin poner la aleta? Cuando se dice «mucho más calor» se hace referencia a un valor de efectividad mayor de dos, es decir, se busca una aleta óptima que disipe por lo menos el doble de calor que el que se disiparía en ausencia de la misma. Como se puede comprobar, al final el problema resulta ser una cuestión meramente práctica y económica.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 3

Capítulo 3: Método de Simulación por Redes (MESIR)

3.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es explicar de una manera concisa qué es el Método de simulación por redes, método que va a permitir discretizar y resolver los circuitos que modelizan el problema de transmisión del calor que se presenta en este proyecto.

Una vez entendido este método, se explicará cómo representar los circuitos mediante el programa simulador de circuitos *PSpice*, software que se encargará de resolverlos. Se explicará entonces cómo se estructura este programa, así como su funcionamiento interno de una forma básica.

La combinación del Método de simulación por redes junto con la potencia del programa de análisis de circuitos *PSpice* va a permitir obtener respuestas a las preguntas que se plantean en los objetivos de esta memoria.

3.2 Método de Simulación por Redes (MESIR)

El Método de simulación por redes, *MESIR* (*Network Simulation Method, NSM*) es un método numérico empleado para el estudio de sistemas o procesos que puedan describirse mediante un conjunto de ecuaciones matemáticas. Ha sido impulsado por F. González-Fernández y F. Alhama [8].

En el *MESIR*, se parte de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, tanto en el tiempo como en el espacio, que modelizan el comportamiento de un sistema. Lo que se hace entonces es discretizar la variable espacial, obteniendo una serie de ecuaciones discretizadas a partir de las cuales se elabora el modelo en red.

El modelo en red consiste en un circuito eléctrico equivalente al sistema considerado. Para poder resolver este circuito, se ha de traducir a un lenguaje que el programa simulación *PSpice* entienda, tras lo cual se podrá simular con las condiciones pertinentes para la obtención de resultados. La discretización de las ecuaciones y su posterior resolución en el ordenador implica estar hablando de un método numérico.

El *MESIR* guarda cierta relación con otros métodos numéricos, en particular con el método de diferencias finitas y con el método de líneas. La diferencia esencial con el primero es que utiliza de manera directa una única discretización, la de la variable espacial, mientras que en las diferencias finitas se discretizan tanto las variables espaciales como las temporales. En cuanto al método de líneas la diferencia está en la técnica de resolución de las ecuaciones en diferencias finitas discretizadas en el espacio; el método de líneas utiliza un software matemático directo mientras que el *MESIR* lo resuelve mediante *PSpice*.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	 industriales <small>en UCT</small>
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 3

Un modelo en red se considera equivalente a un determinado proceso cuando, en su descripción, las ecuaciones del modelo matemático discretizadas, y las ecuaciones del modelo en red para un elemento del volumen o celda elemental, correspondientes a variables análogas, coinciden.

La elaboración del modelo en red consiste en reticular el espacio en elementos de volumen o celdas elementales; al aplicar estas reticulaciones a las ecuaciones diferenciales, se obtienen un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas que se constituyen en el punto de partida para la obtención del modelo en red correspondiente a cada celda elemental; una clara correspondencia entre variables dependientes del problema y variables eléctricas, tensiones e intensidades, permite interpretar los resultados de la simulación en términos del proceso que se modela. La asociación de celdas, de acuerdo con la geometría del problema, configura el modelo en red correspondiente a todo el medio finito, que es tanto más preciso cuanto mayor sea el número de éstas. Las condiciones de contorno e iniciales se incorporan al modelo de manera simple.

En el caso de los procesos de transmisión de calor, la posibilidad de elaborar modelos en red representativos de los mismos, es decir, el hecho de que admitan redes eléctricas equivalentes, supone no sólo la equivalencia matemática sino, también, la equivalencia física entre las variables características de unos y otros procesos (térmicos y eléctricos). Además la equivalencia física permite, en casos muy concretos, determinar cualitativa y cuantitativamente ciertas magnitudes asociadas a la red que pueden jugar un papel, en la descripción del fenómeno de transporte, similar al correspondiente en el transporte de carga eléctrica, como es el caso de la impedancia, por ejemplo.

La analogía termoelectrónica se ha venido utilizando de una u otra forma desde hace varias décadas por numerosos investigadores, bien como una representación alternativa de los problemas térmicos, bien como un método de solución del problema, construyendo los circuitos en el laboratorio y realizando medidas. No obstante, el *MESIR* es significativamente diferente a los métodos anteriores, como se ha aclarado anteriormente.

En primer lugar el *MESIR* es un método numérico, lo que lo hace esencialmente diferente de la implementación de la analogía térmico-eléctrica clásica. En ésta los elementos eléctricos representan el comportamiento del sistema térmico y permiten obtener relaciones entre las variables que intervienen en el mismo, pero no se utiliza directamente como un procedimiento de cálculo, salvo en aplicaciones muy sencillas.

En segundo lugar, el *MESIR* parte de las ecuaciones en derivadas parciales del sistema y proceso considerados, que son aplicadas a una discretización del medio.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 3

En tercer lugar, el *MESIR* construye un modelo en red, que es un circuito eléctrico equivalente al proceso térmico, basándose en la similitud de las ecuaciones de comportamiento del sistema y las de los circuitos eléctricos, que se resuelve como tal mediante un software adecuado, en este caso el *PSpice*. La respuesta del circuito eléctrico coincide con la del sistema térmico. En ciertos métodos numéricos se ha aplicado la analogía térmico-eléctrica a las celdas resultantes de la discretización del sistema, pero siempre ha sido como forma de representación del proceso y para obtener las ecuaciones en derivadas parciales, pero nunca para resolverlo como tal.

Se podría decir que el *MESIR* aúna la riqueza analítica e intuitiva de la analogía térmico-eléctrica con la potencia de los métodos numéricos actuales, dando como resultado un método capaz de abordar sofisticados problemas de transmisión de calor (y otras disciplinas) en una forma relativamente simple. Uno de los grandes atractivos del método es que, siendo un método numérico, apenas requiere armazón matemático, ya que el ensamblaje y resolución de las ecuaciones diferenciales se deja al software de resolución de circuitos.

El planteamiento formal que sirve de base para el desarrollo del *MESIR* es la Teoría de redes de Peusner [9]. Ésta, a su vez se sustenta en la teoría de circuitos a partir de una generalización de sus variables conjugadas, corriente eléctrica y diferencia de potencial.

El *MESIR*, que utiliza la teoría de redes para modelar el proceso físico objeto de estudio, es un método de simulación en tanto que incluye la resolución numérica del modelo en red obtenido mediante la reticulación. Así, las variables flujos y fuerzas características del mismo deben satisfacer las leyes de Kirchhoff y sus relaciones determinarán los elementos de circuito correspondientes. Ahora bien, en cada proceso concreto y una vez elegidas las variables conjugadas, la información de qué elementos de circuito intervienen en el modelo en red y cómo se conectan entre sí, se obtiene del modelo matemático y no de consideraciones de tipo físico acerca del papel que juegan estas variables.

En síntesis, en la teoría de redes, la viabilidad de un modelo en red supone:

- La existencia de una red independiente del tiempo;
- La existencia de una magnitud $j_{N-N'}$ llamada flujo, asociada a cada rama que conecta los nudos $N-N'$ y que va de N a N' . $j_{N-N'}$ obedece las leyes de Kirchhoff para corrientes;
- La existencia de una magnitud, φ , asociada a cada nudo, tal que la diferencia $X_{N-N'} = \varphi_N - \varphi_{N'}$, llamada fuerza, obedece la ley de los voltajes de Kirchhoff.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 3

3.3 El programa PSpice

Una vez obtenido el modelo en red se procede a su análisis. Para ello se recurre a un software adecuado para la solución de circuitos eléctricos tal como *PSpice*. En el proceso de simulación el circuito se presenta al ordenador como un conjunto de ecuaciones matemáticas y éste, mediante procedimientos de análisis numérico, proporciona toda la información solicitada por el investigador para cada tipo de análisis. De esta forma se obtienen los datos correspondientes a medidas típicas de laboratorio con un margen de error despreciable y sin afectar al circuito; más aún, pueden alterarse las condiciones iniciales, de contorno, y las características térmicas del medio con sencillos cambios en el programa, y el análisis puede aportar datos sobre el comportamiento del circuito más allá de los límites que virtualmente se pueden obtener con medidas reales.

La simulación está estructurada en cinco subprogramas principales, que interaccionan entre ellos a través de una estructura de datos que es almacenada en un área común del programa. Estos subprogramas son: entrada, organización, análisis, salida y utilidades, y se describirán brevemente a continuación, partiendo de la base que se expone en el libro de uso de *PSpice* [10].

El subprograma de entrada lee el archivo de entrada, construye una estructura de datos y chequea el circuito. El de organización, una vez que el programa se ha ejecutado con éxito, construye las estructuras adicionales de datos que serán requeridas en el programa de análisis, parte esencial de la simulación. El subprograma de salida genera y organiza, en la memoria central o en discos, los resultados solicitados por el usuario en forma tabular o gráfica. Las utilidades son aspectos secundarios no relacionados directamente con la simulación; éstas permiten, por ejemplo, almacenar componentes o partes de modelos para ser compartidos por otros usuarios.

El subprograma análisis es la parte más importante del programa de simulación. Ejecuta los análisis del circuito requeridos, de acuerdo con las indicaciones del archivo de entrada; la información resultante se almacena en la memoria central para su posterior procesamiento en los archivos de salida. Mientras que la facilidad de uso del programa reside en los subprogramas de entrada y salida, el programa de análisis, que contiene algoritmos más complejos y consume la fracción mayor del tiempo de computación, determina la eficiencia de la simulación.

En el análisis de continua *PSpice* determina el punto de trabajo, es decir, los valores de polarización de sus componentes en ausencia de excitaciones alternas. Para este cálculo se elimina la acción de los condensadores y bobinas, los primeros quedan como circuitos abiertos y las bobinas se cortocircuitan.

Para el análisis transitorio *PSpice* parte del intervalo de tiempo solicitado, que puede ser menor o mayor que la duración del transitorio, y facilita los datos en forma de listado o mediante gráficas. Si los resultados se quieren en forma tabular el usuario debe indicar el instante inicial, el final, el paso temporal y el número de variables listadas; si se solicitan en forma gráfica, una sentencia de programa permite organizarlos y almacenarlos para ser utilizados con ese propósito en cada momento.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 3

3.4 La simulación del modelo en red

El software *PSpice* se programa en su forma clásica por sentencias, en un lenguaje relativamente simple. La sintaxis de entrada no requiere especiales disposiciones ordenadas de datos, su estilo puede catalogarse más bien como libre y dispone de una razonable fuente de datos que se adjudican por omisión a los componentes cuando éstos no se especifican en detalle. También realiza un buen número de chequeos para asegurar que el circuito ha sido introducido correctamente y el resto de las sentencias de programa están bien escritas, advirtiendo al programador de posibles errores mediante mensajes previos a la ejecución. En definitiva, un usuario principiante necesita especificar un número mínimo de parámetros y controles de simulación para extraer unos resultados de simulación aceptables.

El programa, por fin, se estructura como un listado que contiene todos los componentes eléctricos del circuito (existe la posibilidad de organizar el programa mediante subcircuitos), resistencias, condensadores, fuentes, interruptores, etc., que se introducen uno por uno indicando el nombre, valor, nudos de conexión y otros parámetros característicos.

También admite la programación a través de una interfaz gráfica (aplicación *Schematics*), que construye y ejecuta los programas de análisis, aumentando rapidez de programación y la versatilidad del método en determinadas aplicaciones (por ejemplo en varias dimensiones). La forma de circuito eléctrico del modelo en red es muy familiar e intuitiva para ingenieros y científicos, lo que es una inestimable ayuda en la programación de los distintos procesos estudiados.

En el proceso de simulación, se obtiene la solución numérica de la representación matemática del modelo en red. Esta contiene las ecuaciones matemáticas de los diferentes tipos de monopuertas (elementos de circuito asociados a una relación entre variables), las ecuaciones correspondientes a las restricciones impuestas por las leyes de Kirchhoff, propias de la teoría de circuitos, que han de satisfacerse entre las ramas y nudos del circuito, y la información particular sobre la interconexión de los diferentes componentes eléctricos de cada modelo, dando lugar toda esta información a un extenso sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales.

El programa *PSpice* (como, en general, cualquier otro software de resolución de circuitos eléctricos) ofrece muchas posibilidades para el estudio de los sistemas térmicos. A continuación se destacan algunas utilizadas en esta memoria:

- La aplicación *Probe* muestra de forma gráfica los resultados de la simulación con la máxima precisión que da el programa. Esta aplicación permite la representación de funciones resultado de operaciones entre variables de la simulación, habiéndose complementado en este proyecto con la herramienta de cálculo *Excel*.
- El software admite la parametrización del modelo en red (sentencia *PARAM*), lo que constituye un modo ventajoso de utilizar la técnica de cambiar de valores los componentes del circuito para obtener soluciones de problemas similares.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 3

- Las sentencias *PARAM* y *STEP* combinadas obtienen la variación secuencial de la respuesta del sistema ante la variación de un parámetro, lo que es una herramienta muy útil para problemas sencillos de optimización (una o dos variables).
- El programa admite la simulación sucesiva de circuitos, técnica que permite resolver el problema planteado para una amplia gama de valores de los componentes, habiendo preparado previamente un circuito por cada caso que se pretenda resolver.

Una vez se ha explicado el concepto y el modo de funcionamiento del Método de simulación por redes y del programa informático PSpice, es interesante describir el proceso de simulación que se ha llevado a cabo para el sistema aleta-pared que está siendo objeto de estudio en esta memoria:

- A partir de la idea de un modelo en red, se discretiza el sistema aleta-pared en celdas de un cierto número de unidades tanto en la dirección longitudinal como en la transversal de las aletas. El número exacto de unidades se explica con mayor detalle en el *capítulo 4*.
- Se realiza una modelización de dichas celdas mediante elementos eléctricos para su estudio con el programa PSpice (esto se consigue mediante analogías físico-eléctricas).
- Una vez simulados los ficheros que representan el modelo, se analiza el comportamiento de las aletas en función de los parámetros de eficiencia, efectividad y admitancia térmica inversa relativa.

Como ya se ha comentado, sin menoscabar esta breve descripción del proceso de simulación, en el capítulo 4 se ahonda con mayor detenimiento en los pormenores de citado proceso.

3.5 Funcionamiento de PROCCA-09

El programa PROCCA-09 hace uso de la analogía o equivalencia entre el transporte eléctrico y la conducción térmica. Los archivos de modelos en red como bien se ha comentado antes se ejecutan en PSpice, y los resultados de simulación se ofrecen directamente en el entorno, gráfico o tabulado, de salida de PSpice o bien, mediante manipulaciones adecuadas en el entorno gráfico del propio programa y (en mayor detalle) en el entorno gráfico del programa MATLAB merced a rutinas auxiliares incorporadas al programa. PROCCA-09 permite también presentar soluciones animadas de las isotermas en problemas transitorios.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 3

Procca-09 será un sustituto del trabajo en el laboratorio, pues se trata de una herramienta virtual del método de simulación por redes, aplicado a la resolución de problemas en ingeniería que requieran una analogía termo-eléctrica, tal y como se ha descrito anteriormente. Gracias al dominio de este programa será posible la obtención de la solución real al estudio sin limitaciones de ningún tipo. Esto no era posible mediante los métodos numéricos de elementos finitos, estudiados durante el grado, dónde solamente era posible conseguir aproximaciones de la solución real.

A continuación se presenta una explicación del funcionamiento básico del programa:

Su puesta en marcha permite seleccionar el módulo de trabajo (CONCBA “Conducción de calor básica” o CONCAL “Conducción de calor en aletas”), en donde se incardina el problema objeto de simulación, procediéndose directamente a la entrada de datos: geometría de la reticulación, características térmicas, condiciones de contorno, etc.

En nuestro estudio se utiliza el módulo de trabajo CONCAL.

Una vez completada la especificación del problema se puede crear un archivo de texto básico del modelo que permite su manipulación directa y su modificación. La introducción de datos complementarios relativos al tipo de simulación, tales como la precisión en los cálculos, número de dígitos, tiempo de simulación, operaciones de presentación y otros, se realizan paralelamente o al final de la creación del archivo del modelo.

La ejecución o simulación y consiguiente solución del modelo da acceso al entorno de salida gráfico de PSpice, el cual permite representar simultáneamente las variables de salida más comunes, a saber, los fluidos de calor y las temperaturas (corrientes y tensiones) en los distintos elementos y nudos del medio elegidos.

La asignación de nombres a los elementos del modelo en red así como la asignación de nodos, sigue una regla sencilla e intuitiva independiente del tipo de geometría, permitiendo localizar inmediatamente el elemento, sección o punto del modelo del que se desea obtener información acerca del valor de las variables dependientes, flujos de calor y temperaturas.

PROCCA-09 incorpora un gráfico directo en el que se muestra la disposición de cada celda o volúmenes de control mostrando la leyenda de los nudos centrales de cada celda, que sirve también para identificar todos los componentes de la misma (resistencias y condensadores). En este gráfico también se muestra las celdas en las que se incorporan las condiciones de contorno particulares.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 4

Capítulo 4: Modelo de transferencia de calor

4.1 Ecuaciones y condiciones de contorno

El modelo de transferencia de calor que gobierna al sistema aleta-pared aquí estudiado es el de convección. Una vez explicada la teoría que rige la convección así como aspectos básicos sobre superficies adicionales, se va a analizar el problema concreto que se presenta en este proyecto. En la *Figura 4.1* se describe la geometría del conjunto aleta recta rectangular-pared. Los parámetros que la definen han sido obtenidos de los artículos de J. P. Luna y F. Alhama [11, 12, 13, 14].

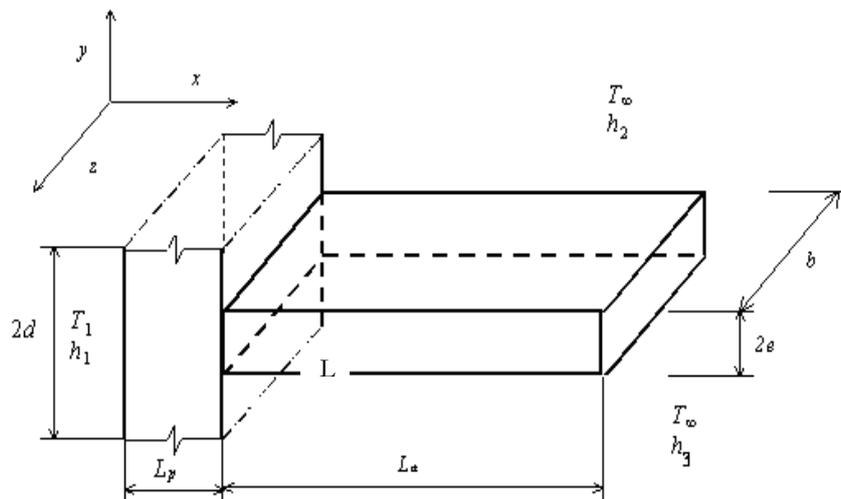


Figura 4.1. Conjunto aleta-pared longitudinal de sección constante, 3D

Modelo físico y matemático

Considere la aleta longitudinal de perfil rectangular adjunta a la pared de un avión, cuya sección está representada en la *Figura 4.2*. Se asumen por su sencillez la mayor parte de las hipótesis clásicas de Murray-Gardner o hipótesis limitadoras: flujo dimensional, isotrópico y homogéneo, propiedades térmicas constantes y coeficientes de transferencia de calor en ambos lados del conjunto aleta-pared; perfecta continuidad entre el muro y aleta y la no generación de calor interno. Por otra parte, el flujo es inestable y se considera que la temperatura en la base de la aleta, T_b , no se conoce. También se asume que el extremo de la aleta es adiabático. El ancho del sistema, b , se considera, pero el asumir la hipótesis de flujo unidimensional implica que los efectos en el extremo son insignificantes.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 4

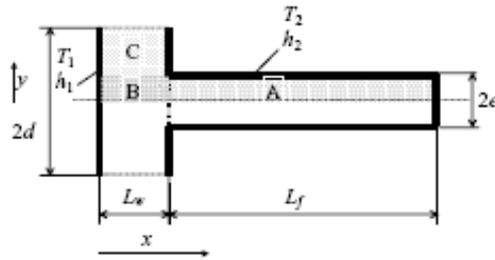


Figura 4.2. Conjunto aleta-pared de perfil rectangular constante, 2D

En la figura se pueden observar los parámetros geométricos del ensamble. Debido a la simetría, sólo la sección entre $y = 0$ e $y = d$, tiene que analizarse. El modelo matemático que gobierna el fenómeno de la convección en este tipo de geometría es el conjunto de ecuaciones:

$$0 < x < L_w : \quad \frac{\partial j_w}{\partial x} + \rho \cdot c \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = 0; \quad j_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4a)$$

$$L_w < x < L_w + L_f : \quad \frac{\partial j_f}{\partial x} + \rho \cdot c \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + h_2 \cdot \left(\frac{2e+b}{e \cdot b} \right) \cdot (T - T_2) = 0; \quad j_f = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4b)$$

$$x = 0: \quad -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = h_1 \cdot (T_1 - T) \quad (4c)$$

$$x = L_w: \quad -db \cdot k \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -eb \cdot k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + (d - e) \cdot b \cdot h_2 \cdot (T - T_2) \quad (4d)$$

$$x = L_w + L_f: \quad -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = h_2 \cdot (T - T_2) \quad (4e)$$

$$t \geq 0: \quad T_1 = 1; \quad T_2 = 0 \quad (4f)$$

$$t = 0; \quad 0 < x < L_w + L_f \quad T = 0 \quad (4g)$$

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 4

donde T es la temperatura en la posición x y t , el tiempo; e es el espesor medio de la aleta, d la mitad de la longitud (altura) de la pared, L_w el grosor de la pared, L_f la longitud de la aleta y b la anchura de la aleta longitudinal (en dirección z); k es la conductividad térmica; h los coeficientes de transferencia de calor, ρ la densidad, c el calor específico, y los subíndices 1 y 2 indican los distintos fluidos que rodean los confines de las distintas superficies intercambiadoras: interespaciado entre aletas (pared), y los laterales y extremos de las aletas (en los casos donde estos se consideran convectivos)

Las ecuaciones (4a) y (4b) son las ecuaciones para la conducción de calor local para la pared y las aletas, respectivamente, los flujos j_w y j_f (W/m^2) se definen por la ecuación de Fourier.

Como se puede ver en esta ecuación, se está considerando transmisión de calor bidimensional estacionaria, tanto por la presencia de las dos variables espaciales como por la ausencia de la variable temporal.

Las ecuaciones (4c), (4d) y (4e) constituyen las condiciones límite.

La ecuación (4f) es la condición de excitación y (4g) es la condición inicial, con un valor cero en equilibrio con el medio circundante que se supone. Se considera un ancho b del conjunto, porque el método numérico lo exige, pero si $b \gg e$ no tiene sentido considerar los efectos en el extremo.

Con el fin de aplicar la optimización solicitada, se construye un modelo de red basado en NSM. El diseño de este modelo se basa en el modelo matemático indicado arriba, de modo que la red de ecuaciones son formalmente equivalentes a las ecuaciones diferenciales obtenidas por discretización de coordenadas en el espacio ecuaciones (4a) y (4b). El tiempo, como en el método de líneas, se mantiene como una variable continua. El modelo de red de un montaje aleta longitudinal-pared y una breve descripción de NSM figuran en Alarcón et al., 2002. Una vez que el modelo de red ha sido diseñada, su simulación se llevará a cabo por medio de circuitos adecuados de resolución de software, PSpice en es este caso. NSM ofrece hipótesis menos restrictivas y realistas que las hipótesis limitadoras asumiendo unos costos de programación relativamente bajos; los diferentes coeficientes h pueden ser fácilmente adoptados para el interespaciado, y los laterales y extremos de las aletas.

En cuanto al número de elementos de volumen, el modelo está formada por 40 celdas: 20 en la aleta (zona A) (ver Fig.4.2), 10 en la pared, a la izquierda de la aleta (zona B), y 10 en la pared desnuda (zona C). A pesar de que se ha considerado una configuración unidimensional para la aleta, las paredes de las células son, a grandes rasgos bidimensionales ya que esta condición es necesaria para parametrizar el modelo como una función de las variables e y d .

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 4

4.2 Circuito eléctrico equivalente

Como ya se adelantó en el capítulo anterior, es posible simular el comportamiento de nuestras aletas mediante su discretización en celdas para su posterior resolución numérica mediante el Método de simulación por redes. Cada una de estas celdas puede ser a su vez representada a través de la analogía térmico-eléctrica, mediante subcircuitos que se conectan entre sí para formar conjuntamente la aleta problema.

De este modo, para el sistema aleta recta rectangular-pared se tienen, por un lado, las celdas que pertenecen al interior y al exterior de la aleta, y por otro lado, las celdas interiores y exteriores pertenecientes a la pared. Tanto a las celdas exteriores pertenecientes a la aleta, como a las pertenecientes a la pared, se les impone algún tipo de condición de contorno, condiciones que se detallan en el apartado anterior.

La *Figura 4.3* representa el circuito que modela una celda interior de la aleta. Cada uno de los extremos libres estaría a su vez conectado a otras celdas, ya sean interiores o exteriores. El carácter bidimensional del problema se aprecia en las cuatro resistencias que componen el subcircuito: dos de ellas para la coordenada longitudinal y las otras dos para la coordenada transversal. En la figura, la letra j indica flujo de calor, existiendo flujos entrantes y salientes, cuyo balance debe ser nulo, ya que se trata de un problema estacionario.

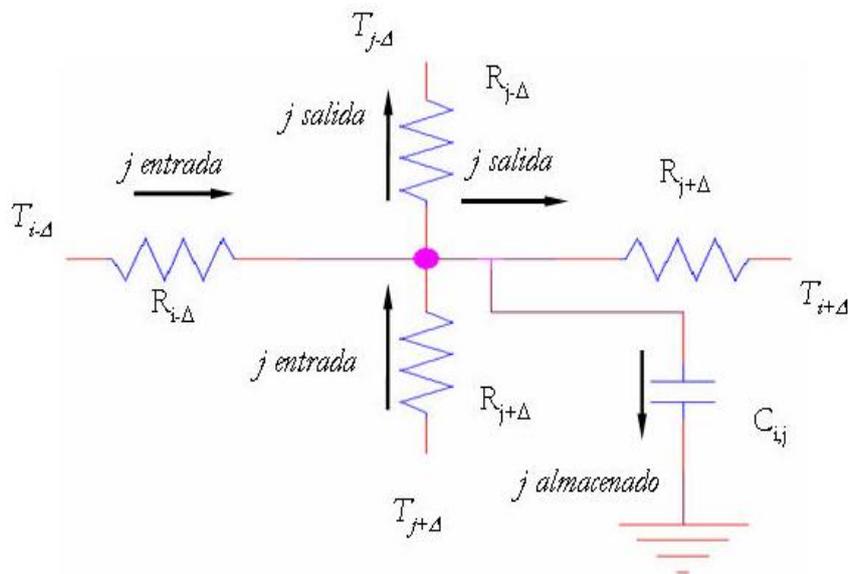


Figura 4.3. Modelo eléctrico de una celda de la aleta. Subcircuito interior

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 4

En el caso de una celda exterior, el circuito presenta además, como se puede ver en la *Figura 4.4*, una fuente de intensidad dependiente de tensión, que es la que modeliza el calor que se transmite al exterior por radiación térmica. El valor de esta fuente de tensión dependerá de la temperatura ambiente que se imponga en el problema.

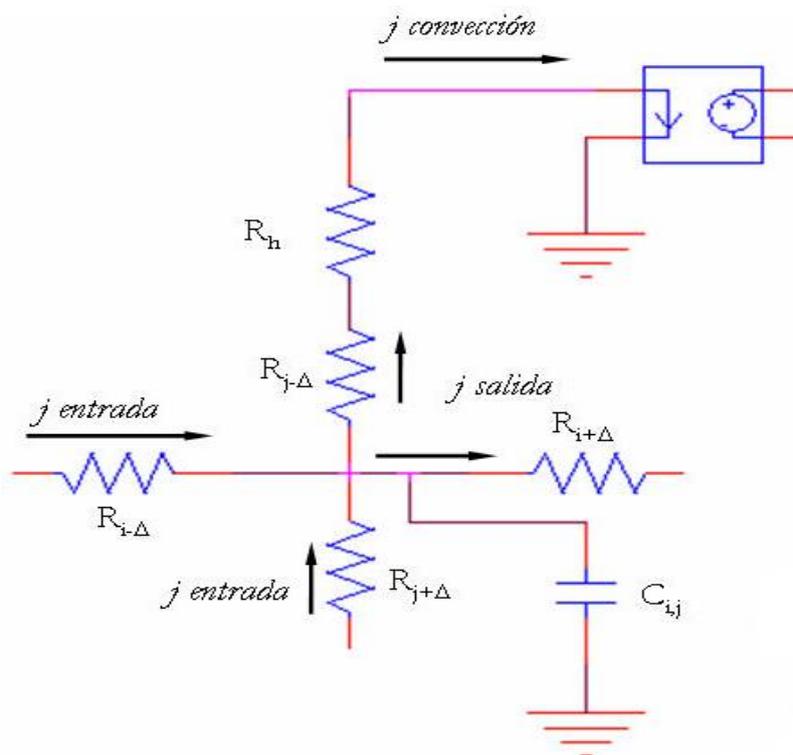


Figura 4.4. Modelo eléctrico de una celda de la aleta. Subcircuito exterior con condición de contorno convectiva

Si el problema dependiera del tiempo y, por lo tanto, existiera la posibilidad de almacenamiento de calor, este almacenamiento quedaría representado por el condensador que aparece en la figura. Pero en el caso que se estudia el condensador estará siempre descargado y sin ninguna capacidad de carga, es decir, se procederá como si no existiera. Esto es también válido para el exterior, es decir, el condensador no se utilizará en el problema que aquí se trata, que se ha considerado estacionario.

Quedan descritas entonces las celdas interiores y exteriores, entendiéndose por exteriores aquellas que se encuentran en contacto directo con el ambiente. El último tipo de celda que se puede encontrar en una aleta correspondería a las celdas de la base de la aleta, a la que se impone una temperatura T_b . Este caso sería en realidad muy similar al caso de las celdas exteriores, dependiendo esta vez la fuente de tensión no de la temperatura del ambiente, sino de esta temperatura que se impone para la base.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

Capítulo 5: Sistema aleta-pared para aleta recta rectangular con extremo convectivo

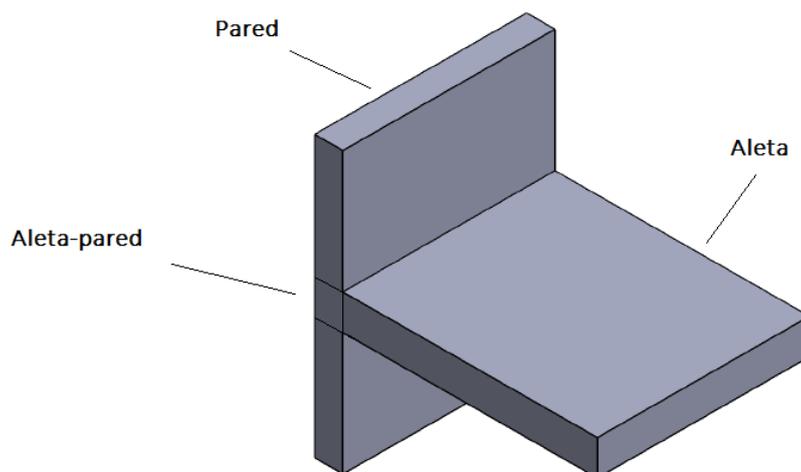
5.1 Introducción

Este capítulo se va a dedicar al estudio de la optimización del sistema aleta-pared para aleta recta rectangular bajo la condición de extremo convectivo y en régimen estacionario.

Como se ha venido repitiendo a lo largo de esta memoria, se puede enunciar la optimización de la siguiente manera: “Dado el volumen o la cantidad deseada de calor disipado en la aleta, determinar las dimensiones que maximizan la disipación de calor o que minimizan el volumen”.

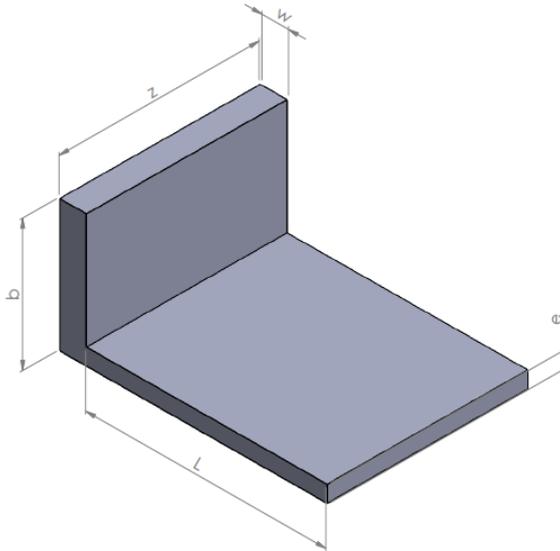
De esta definición se deduce que el problema admite dos variantes posibles: una primera, en la cual se conoce el perfil de la aleta y se optimiza a partir de dicho dato; y una segunda variante donde se busca precisamente obtener un perfil óptimo. En esta memoria se tratará el segundo caso, para un flujo de calor determinado se busca la geometría óptima.

En primer lugar, para comenzar nuestro análisis de la geometría óptima se presenta la geometría inicial del conjunto aleta pared.



	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

Por simetría simplificaremos el estudio en cuestión y analizaremos solo la mitad, tal y como se muestra a continuación:



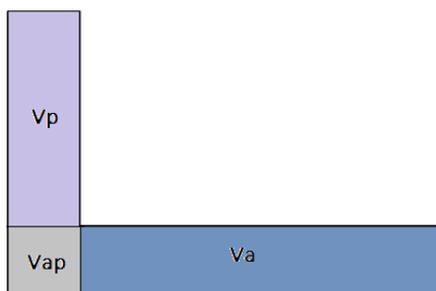
De donde tomaremos preestablecidos unos valores geométricos que son:

- El espesor de la pared $w = 2 \text{ mm}$
- La longitud de la pared $b = 10 \text{ mm}$
- La profundidad de la pared $z = 1 \text{ m}$
- El volumen constante de material $V_0 = 25 \text{ mm}^3$
- Coeficiente de convección en el interior de la pared $h_h = 1 \cdot 10^6$
(con este valor se pretende simular una pared isoterma)

Por tanto las variables a optimizar serán:

- El semi espesor de la aleta original e
- La longitud de la aleta L

Como el valor de la profundidad siempre tendrá valor de 1 m, lo que hacemos es trabajar directamente en un sistema plano, por tanto trabajaremos con volúmenes como si fuesen superficies. De esta manera se simplifica aún más el sistema, y quedará como se muestra a continuación:



V_p Volumen de la pared
 V_a Volumen de la aleta
 V_{ap} Volumen interior comprendido
entre la aleta y la pared

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

De esta manera el volumen total será la suma de los tres volúmenes: $V_T = V_p + V_a + V_{ap}$

Las variables a optimizar “e” y “L” están relacionadas mediante la ecuación:

$$V_a = e \cdot L \cdot 1 \text{ m}^3$$

Al considerar constante $V_a = 25 \text{ mm}^3$, tanto el espesor como la longitud estarán parametrizadas o discretizadas dentro de un rango de valores.

El espesor tendrá un valor mínimo de 0,5 mm y un valor máximo de 8mm, e iremos tomando un valor incremental de 0,1mm.

NOTA: El motivo de elegir 8 mm como valor máximo es debido a que el espesor de la aleta no debe sobrepasar el 80% de la superficie total de pared, que en total mide 10 mm, ya que tiene que haber un espacio mínimo entre aletas, y al mismo tiempo tampoco podrá ser menor de 0,5mm.

Esto significa que la aleta más esbelta posible será aquella con un espesor de $e = 0,5 \text{ mm}$ y una longitud de $L = 50 \text{ mm}$, despejando de la ecuación del volumen:

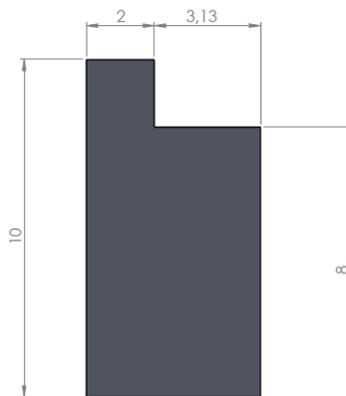
$$L = \frac{V_a}{e} = \frac{25}{0,5} = 50 \text{ mm}$$



	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

Por otro lado la aleta más corta posibles tendría un espesor de $e = 8 \text{ mm}$ y una longitud de 3,125mm, calculada de igual manera que antes:

$$L = \frac{V_a}{e} = \frac{25}{8} = 3,125 \text{ mm}$$



Entre la aleta más esbelta (y fina) y la aleta más corta (y gruesa), existen un total de 76 casos posibles de valores de espesor, que están comprendidos entre 0,5 mm y 8 mm, con variaciones de 0,1 en 0,1mm.

Esta discretización para pasar de una variable continua "e" a una discreta (de 76 casos posibles) es una solución de compromiso entre una exactitud suficiente en el resultado de los cálculos y un coste operacional por parte del programa también elevado.

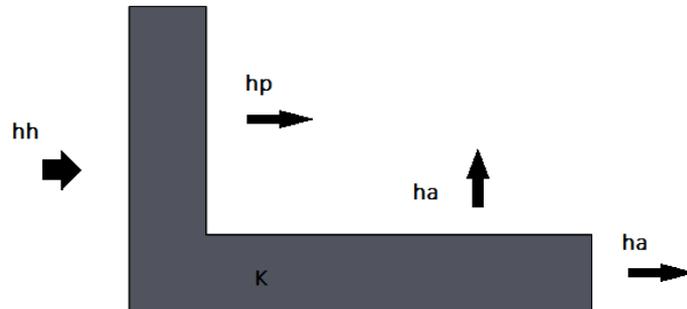
Un mayor número de divisiones entre 0,5 mm y 8 mm, por ejemplo con un incremento de 0,01mm, hubiera supuesto una precisión mayor en los cálculos pero un coste de operacional mucho mayor para el programa, y un retraso en el tiempo de ejecución de los archivos ejecutados en Pspice (también más elevado)

Las variables que se ponen en juego en función de las cuales optimizo la geometría son:

- El coeficiente de convección en la aleta h_a
(Se trata del mismo coeficiente para la cara y para el extremo de la aleta)
- El coeficiente de convección en la pared h_p
- La conductividad térmica del conjunto k
(Es igual para la aleta y para la pared)

Así todas estas variables irán variando para el volumen de material fijo de la aleta que se ha considerado de 25 mm^3 .

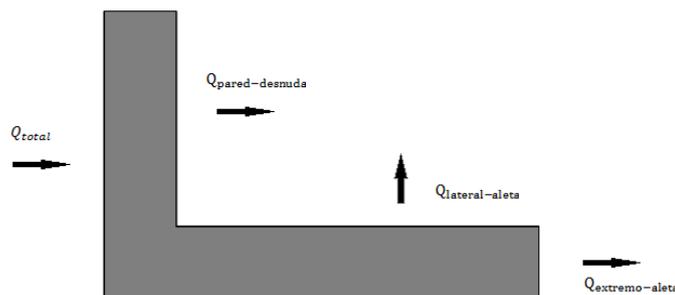
	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5



A continuación, una vez definidas las variables puestas en juego en el diseño óptimo de la geometría, veremos en qué rango de valores se va a realizar el estudio. Dado que los valores usados para la temperatura de la pared interna y la temperatura ambiente exterior es de 1°C o (1°K), los resultados en cuanto a la disipación se interpretan como calores por unidad de temperatura.

Para establecer el punto de partida de dichos valores a la hora de iniciar el análisis se ha considerado la condición de que el flujo de calor a través de la pared es aproximadamente el mismo que se evacúa a través de la aleta, es decir:

$$\frac{Q_{\text{pared-desnuda}}}{Q_{\text{lateral-aleta}} + Q_{\text{extremo-aleta}}} \cong 1$$



Ahora realizaremos un estudio de los distintos flujos de calor en los que se descompone el término general Q_t (Calor total de entrada) en función de la zona o el contorno por el que se evacúe al exterior (Calores de salida) en el conjunto aleta – pared:

- Flujo de calor a través de la pared $Q_{\text{pared}} (W)$
- Flujo de calor a través del extremo de la aleta $Q_{\text{aleta-extremo}} (W)$
- Flujo de calor a través del lateral de la aleta $Q_{\text{aleta-lateral}} (W)$
- Flujo de calor total $Q_{\text{total}} (W)$

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

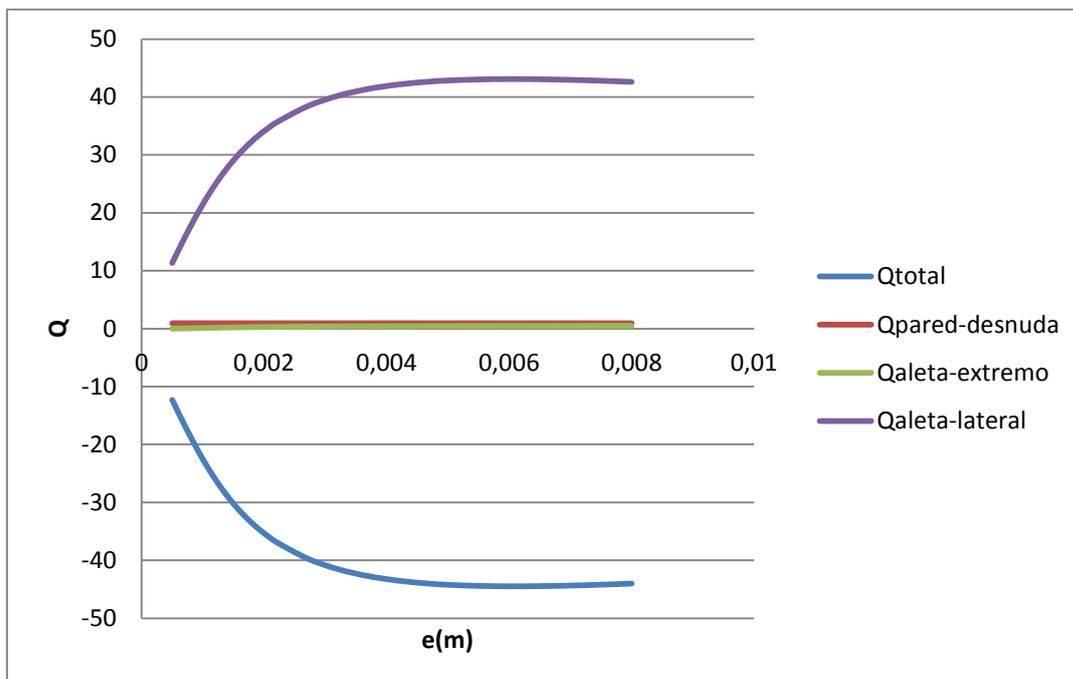
Antes de comenzar el análisis en cuestión de la influencia de las variables anteriormente definidas, vamos a representar gráficamente la evolución de todos los flujos de salida (Q_{pared} , $Q_{aleta-extremo}$, $Q_{aleta-lateral}$) y del flujo total de entrada (Q_t) en función del espesor “e”.

Establecemos unos valores determinados de las variables que después analizaremos. Estos valores estimados a priori son representativos de toda la casuística que se va a desarrollar:

- $h_a = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$
- $h_p = 100 \text{ W/m}^2\text{K}$
- $k = 300 \text{ W/mK}$

Este análisis previo nos ayudará a entender la influencia en mayor o menor grado de los coeficientes de convección h_a y h_p en las conclusiones finales sobre el flujo de calor total evacuado a través del conjunto.

Así, habiendo realizado la ejecución del programa Procca 09 de un sistema aleta- pared y obtenido los resultados a través del Pspice, mediante el archivo .cir que Procca-09 genera, se ha conseguido la siguiente representación gráfica de los flujos de calor con los valores asignados a las variables mencionados previamente:



	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

Para interpretar correctamente las curvas de la gráfica es necesario explicar el criterio de signos que se ha establecido para los flujos de calor. De esta manera, se adopta el signo negativo para el flujo de calor que penetra en el conjunto (Q_t) mientras que serán positivos aquellos calores que salen del conjunto aleta – pared (Q_{pared} , $Q_{aleta-extremo}$, $Q_{aleta-lateral}$)

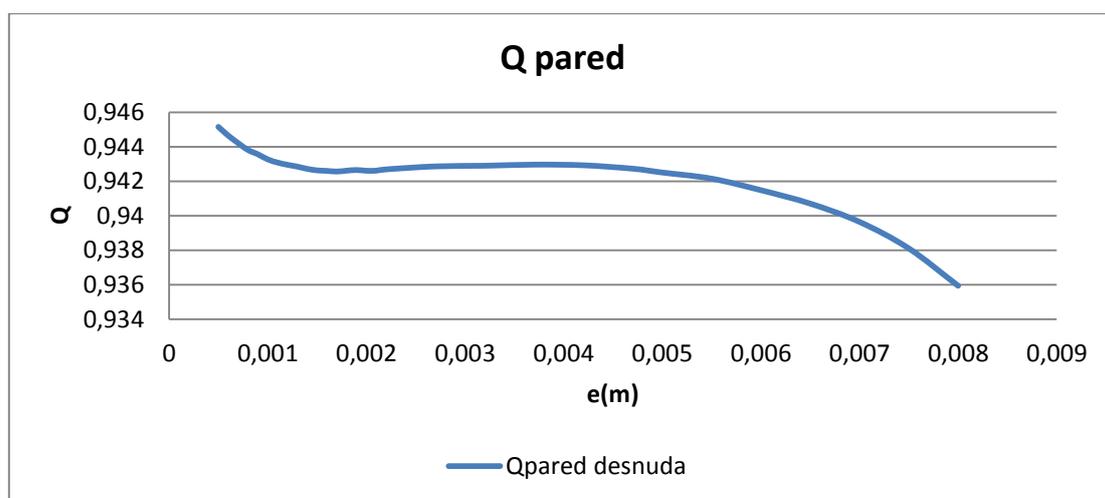
El balance total de flujos es:

$$Q_t = Q_{pared} + Q_{aleta-extremo} + Q_{aleta-lateral}$$

Tal y como se aprecia en los resultados podemos afirmar que:

- El calor que penetra en la pared desde el fluido interno para ser evacuado (Q_t), presenta un máximo cuando el espesor de la aleta $e=6\text{mm}$. Si nos alejamos de este espesor por encima, la cantidad de calor total disipado se mantiene constante e irá disminuyendo poco a poco, mientras que si nos alejamos por debajo del espesor mencionado, la cantidad de calor total disipado disminuye.
- El calor evacuado a través de la pared (Q_{pared}), es el sumando más pequeño en el miembro de la derecha de la ecuación del balance total de flujo. Se puede confirmar que su influencia sobre el calor total evacuado es mínima, y disminuye de forma constante a medida que aumenta el espesor de la aleta, ya que va quedando menos superficie de pared desnuda sin aleta.

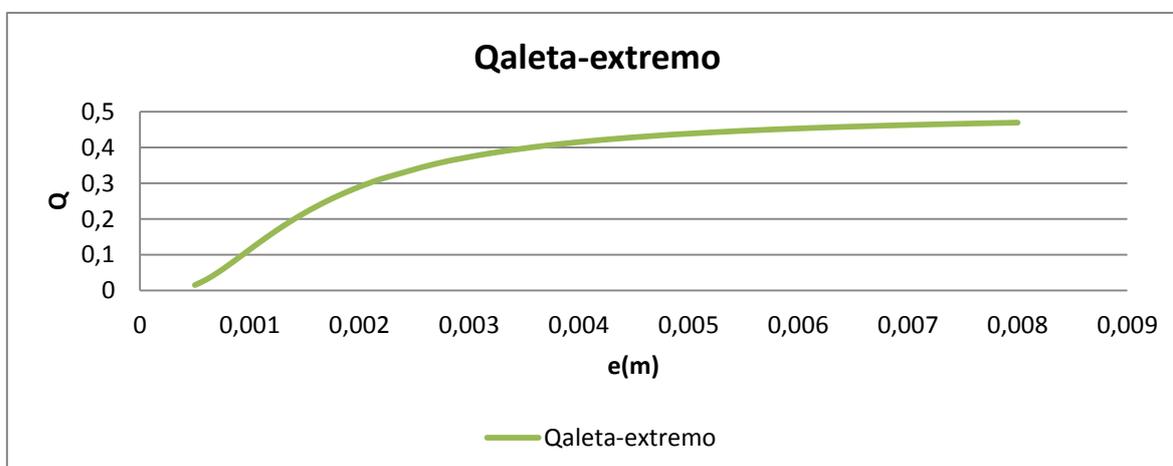
En la siguiente gráfica del calor evacuado a través de la pared, representada individualmente en función del espesor, se puede apreciar mejor esta disminución. A continuación también se adjunta una tabla de algunos de los valores obtenidos para cada espesor.



	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

ESPESOR (mm)	ESPESOR(m)	Q PARED DESNUDA
0,5	0,0005	0,9451569
1	0,001	0,943271
1,5	0,0015	0,942633
2	0,002	0,942611
2,7	0,0027	0,942863
3,7	0,0037	0,942965
4,7	0,0047	0,94273
5	0,005	0,942508
5,5	0,0055	0,942153
6	0,006	0,941482
6,5	0,0065	0,940704
7	0,007	0,939643
7,5	0,0075	0,938102
8	0,008	0,935935

- El calor evacuado a través de los flancos de la aleta ($Q_{\text{aleta-lateral}}$). Este término es el que más relevancia y peso tiene en la ecuación del balance del flujo. Tal y como podemos observar en la gráfica donde se representan todos los flujos de calor, esta curva es simétrica a la del flujo total de calor. Por tanto, también existe un máximo en torno a $e=6\text{mm}$.
- El calor disipado en el frontal de la aleta ($Q_{\text{aleta extremo}}$). La importancia de este término va aumentando con forme aumenta el espesor. Su valor es directamente proporcional al espesor, y es por ello que alcanza su valor máximo cuando el espesor es máximo, pues hay mayor superficie en el extremo de la aleta. En la gráfica siguiente se puede comprobar, al igual que en la tabla de valores obtenidos que se adjunta.



	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

ESPELOR (mm)	ESPELOR(m)	Q PARED DESNUDA
0,5	0,0005	0,0152341
1	0,001	0,114729
1,5	0,0015	0,216967
2	0,002	0,290089
2,7	0,0027	0,354637
3,7	0,0037	0,405235
4,7	0,0047	0,43277
5	0,005	0,438592
5,5	0,0055	0,446647
6	0,006	0,453118
6,5	0,0065	0,458396
7	0,007	0,462757
7,5	0,0075	0,466398
8	0,008	0,469465

Podemos concluir que el factor de convección en la aleta (h_a) tiene una relevancia mayor y por tanto una mayor influencia sobre el calor total evacuado (Q_{total}) que el coeficiente de convección en la pared (h_p).

El coeficiente de convección en la aleta se ha estimado igual en todo el contorno, es decir tanto en los flancos como en el extremo. Y este valor (h_a) nunca deberá ser superior a h_p .

5.2 Análisis

En este apartado vamos a presentar toda la casuística de curvas de flujo de calor total en función del espesor de la aleta, en régimen estacionario, dentro de los rangos marcados para las variables de estudio.

Los datos los obtenemos de la ejecución del programa Pspice. En el archivo se va modificando el valor de las variables puestas en juego (h_a , h_p , k y finalmente el volumen) así como las dimensiones de la aleta.

Para visualizar como se obtienen los resultados de los parámetros fundamentales en el circuito de estudio, a continuación, se muestra las líneas de programa que se modifican dentro del archivo .cir

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

LÍNEAS DE PROGRAMA

.PARAM TempRefIsolzquierda = 1

.PARAM ConvCoefDerecha = 100

* **coeficiente de convección de la pared (hp)**

.PARAM ConvTempRefDerecha = 0

.PARAM ConvCoefSuperior = 1000

* **coeficiente de convección de la aleta en el lateral (ha)**

.PARAM ConvTempRefSuperior = 0

.PARAM ConvCoefDerecha2 = 1000

* **coeficiente de convección de la aleta en el extremo (ha)**

.PARAM ConvTempRefDerecha2 = 0

.PARAM PAREDAAncho = 0.0004

* **ancho de la pared**

.PARAM PAREDAAlto = 0.00132857

* **alto de la pared**

.PARAM PAREDDens = 300

* **conductividad de la pared**

.PARAM PAREDDens = 0

.PARAM PAREDCalorEsp = 0

.PARAM ALETAPAREDAAncho = 0.0004

* **ancho de la aleta-pared**

.PARAM ALETAPAREDAAlto = 0.000233333

* **alto de la aleta-pared**

.PARAM ALETAPAREDDens = 300

* **conductividad de la aleta- pared**

.PARAM ALETAPAREDDens = 0

.PARAM ALETAPAREDCalorEsp = 0

.PARAM ALETAAncho = 0.00357143

* **ancho de la aleta**

.PARAM ALETAAlto = 0.000233333

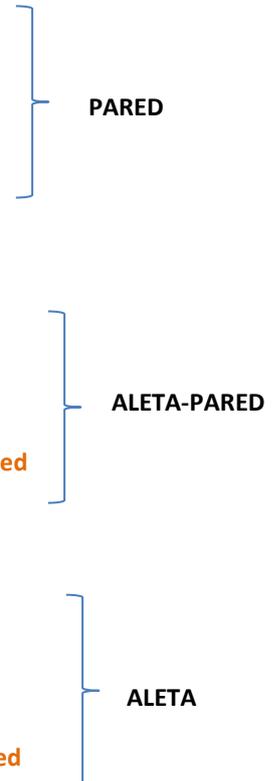
* **alto de la aleta**

.PARAM ALETACond = 300

* **conductividad de la aleta- pared**

.PARAM ALETADens = 0

.PARAM ALETACalorEsp = 0



	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

Para analizar la influencia de cada una de las variables sobre el calor total evacuado realizaremos una primera parte en la que se definen los rangos de los valores de cada variable, de manera que simulemos las condiciones de un caso bastante aproximado a la realidad. Y posteriormente, habrá una segunda parte en la que hallaremos las representaciones gráficas de los datos, obteniendo las diferentes familias de curvas. En cada grupo de curvas se fijarán todas las variables excepto la variable en estudio, a la que se le irá otorgando distintos valores dentro del rango establecido en la primera parte.

De esta manera quedará definida individualmente la influencia de cada una de las variables sobre el flujo total de calor a través del conjunto aleta-pared.

PRIMERA PARTE

Como ya se ha mencionado anteriormente, definimos el rango de valores de cada variable en estudio, y justificaremos dicho rango:

- **Coefficiente de convección en la aleta, h_a (W/m²K)**

A esta variable se le asignarán valores entre 100 y 1000 W/m²K. De manera que este rango de valores abarca una convección natural para valores próximos a 100 y una convección forzada para aquellos valores más elevados. Dentro de ese rango se analizarán los siguientes casos:

$$h_a = \{100, 200, 300, 500, 700, 800, 1000\} W/m^2K$$

- **Coefficiente de convección en la pared, h_p (W/m²K)**

Se le asignará valores entre 1 y 1000 W/m²K. En la zona de la pared por encontrarse entre aletas se presupone una dificultad añadida a la evacuación de calor. Dentro de ese rango se analizarán los siguientes casos:

$$h_p = \{1, 25, 50, 75, 100, 200, 300, 500, 700, 800, 1000\} W/m^2K$$

- **Conductividad térmica, k (W/mK)**

El valor de la conductividad varía en función del material, así se adjunta una tabla de los valores de K para distintos materiales:

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha	18 Junio 2015
		CAPÍTULO 5	

MATERIAL	K(W/mK)	MATERIAL	K(W/mK)	MATERIAL	K(W/mK)
Acero	47-58	Corcho	0,03-0,04	Mercurio	83,7
Agua	0,58	Estaño	64	Mica	0,35
Aire	0,02	Fibra de vidrio	0,03-0,07	Niquel	52,3
Alcohol	0,16	Glicerina	0,29	Oro	308,2
Alpaca	29,1	Hierro	80,2	Parafina	0,21
Aluminio	209,3	Ladrillo	0,8	Plata	406,1-418,7
Amianto	0,04	Ladrillo refractario	0,47-1,05	Plomo	35
Bronce	116-186	Latón	81-116	Vidrio	0,6-1
Zinc	106-140	Litio	301,2	Cobre	372,1-385,2
Madera	0,13	Tierra húmeda	0,8	Diamante	2300

Podemos observar que el valor de conductividad más elevado lo alcanza el diamante con 2300 y le sigue la plata con un valor de en torno a 400 unidades.

Por tanto para tener en cuenta el hipotético empleo de materiales superconductores en la fabricación de nuestro conjunto aleta-pared, realizaremos el estudio para un rango de valores de hasta 1500 unidades.

Dentro de este rango, analizaremos los siguientes casos:

$$K = \{1,50,100,500,1000,1500\}$$

- Volumen de la aleta, $V_a(\text{mm}^3)$

Hemos establecido un volumen constante de la aleta para la mayoría de los cálculos ($V_a=25\text{mm}^3$). Este volumen es del orden de magnitud de una aleta convencional en un procesador de un PC.

Para analizar la influencia del volumen del material que conforma la aleta (sin incluir el volumen de material de la pared) estudiaremos los casos en los que el volumen toma distintos valores, manteniendo constantes las demás variables.

$$V_a = \{5,10,15,25,50\} \text{ mm}^3$$

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

SEGUNDA PARTE

Una vez definidos los rangos, vamos a representar las 4 familias de curvas, analizando en cada una de ellas la influencia de una sola de las variables en estudio (h_a , h_p , k y V_a) sobre el flujo total de calor evacuado a través del conjunto aleta-pared.

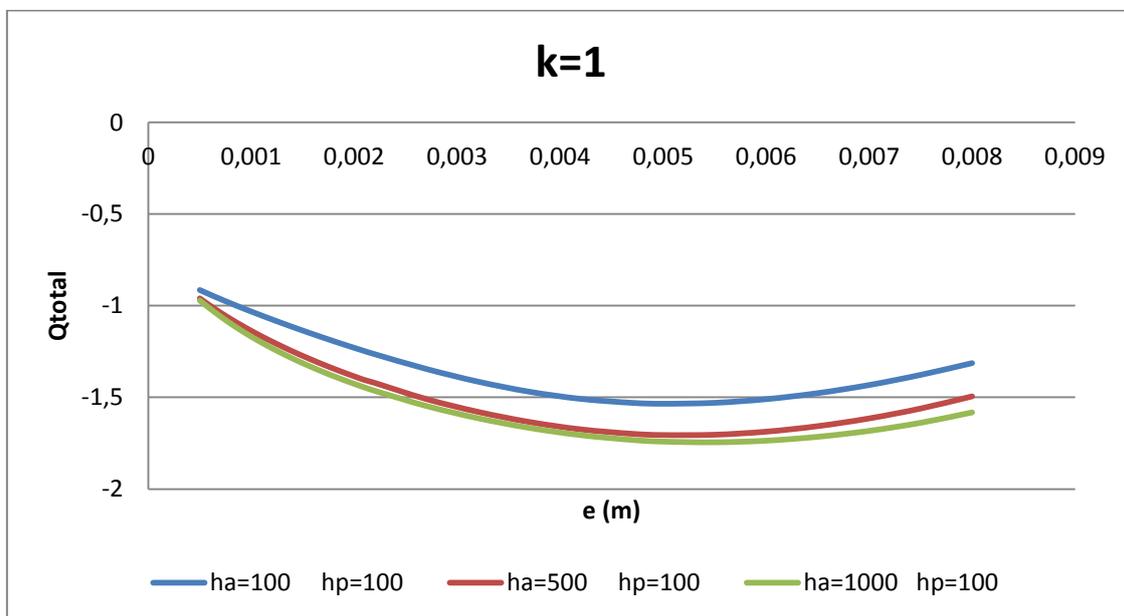
- Influencia de la variable h_a

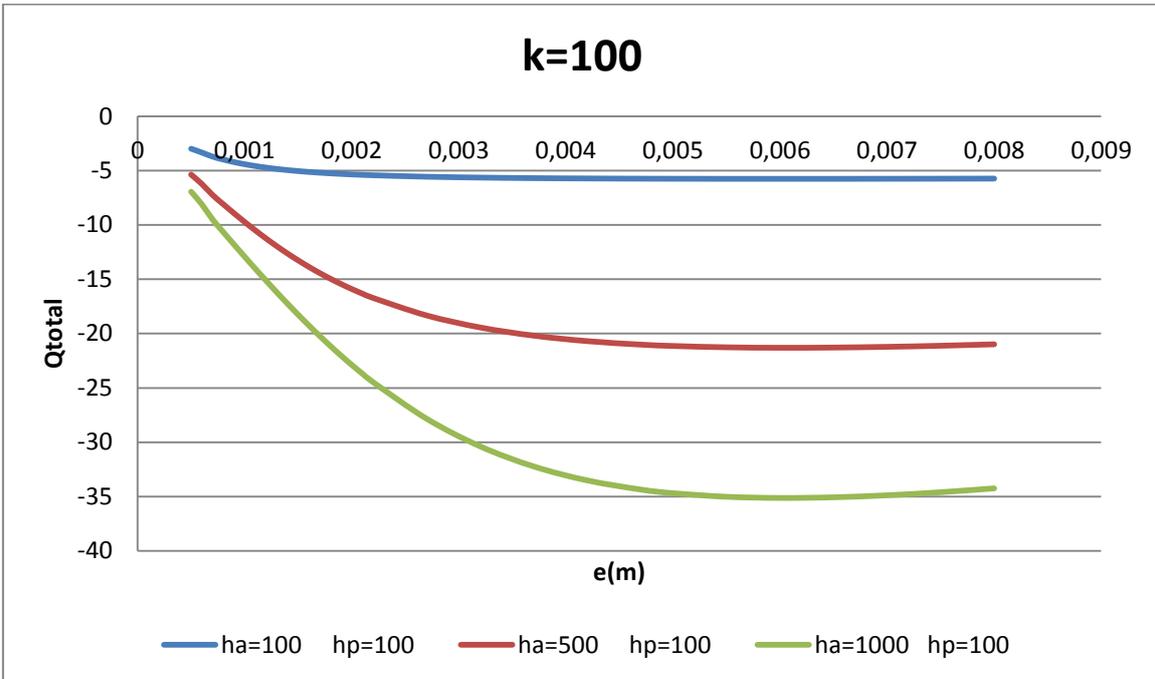
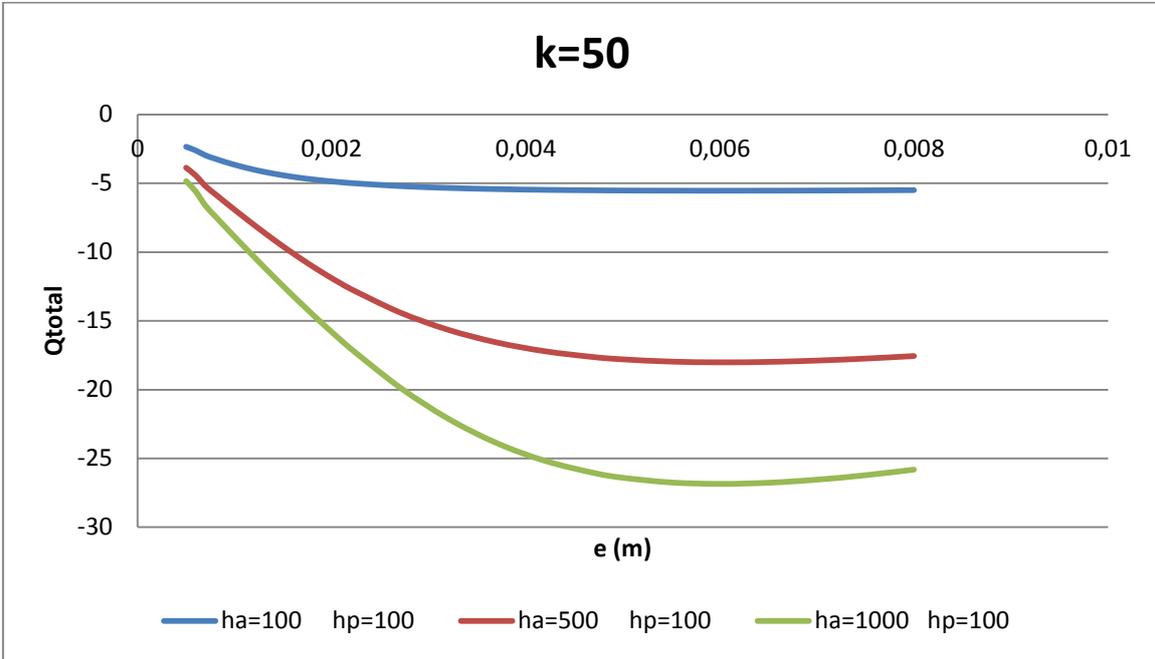
Para analizar la influencia del factor de convección de la aleta sobre el flujo de calor vamos a representar 6 gráficas distintas, y en cada una de ellas se representarán 3 curvas. En cada gráfica la conductividad tendrá un valor constante de entre los definidos en la primera parte del análisis ($K=1, 50, 100, 500, 1000, 150$); a su vez el coeficiente de convección en la pared también tendrá un valor constante ($h_p=100\text{W/m}^2\text{K}$) y el volumen será de 25mm^3 .

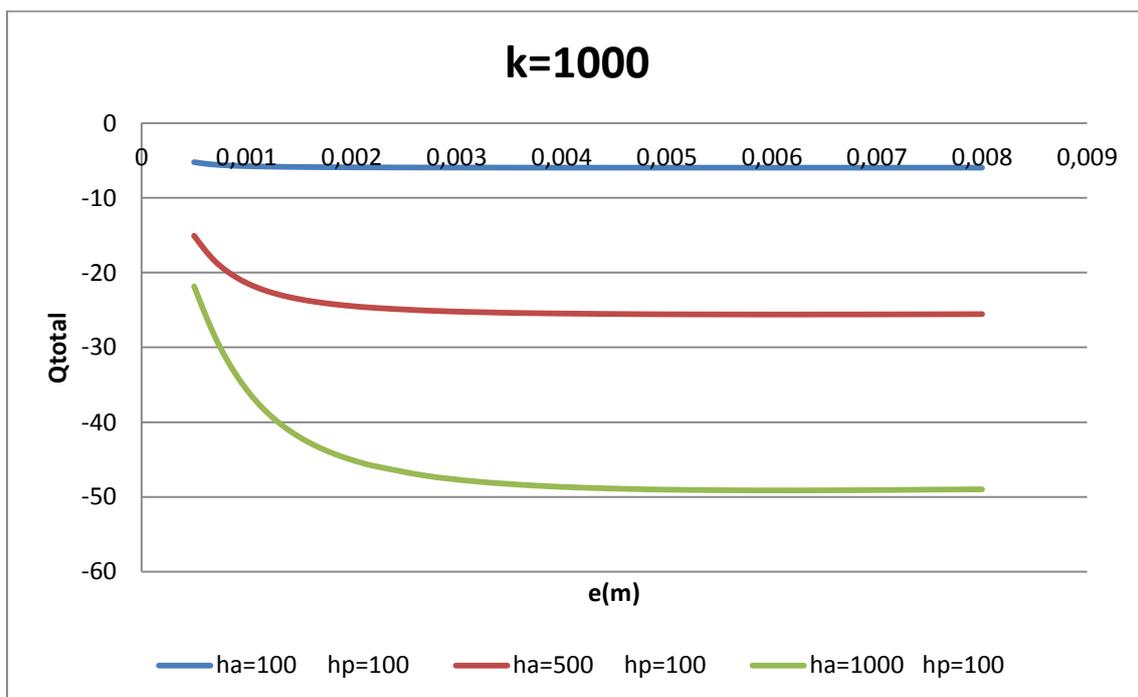
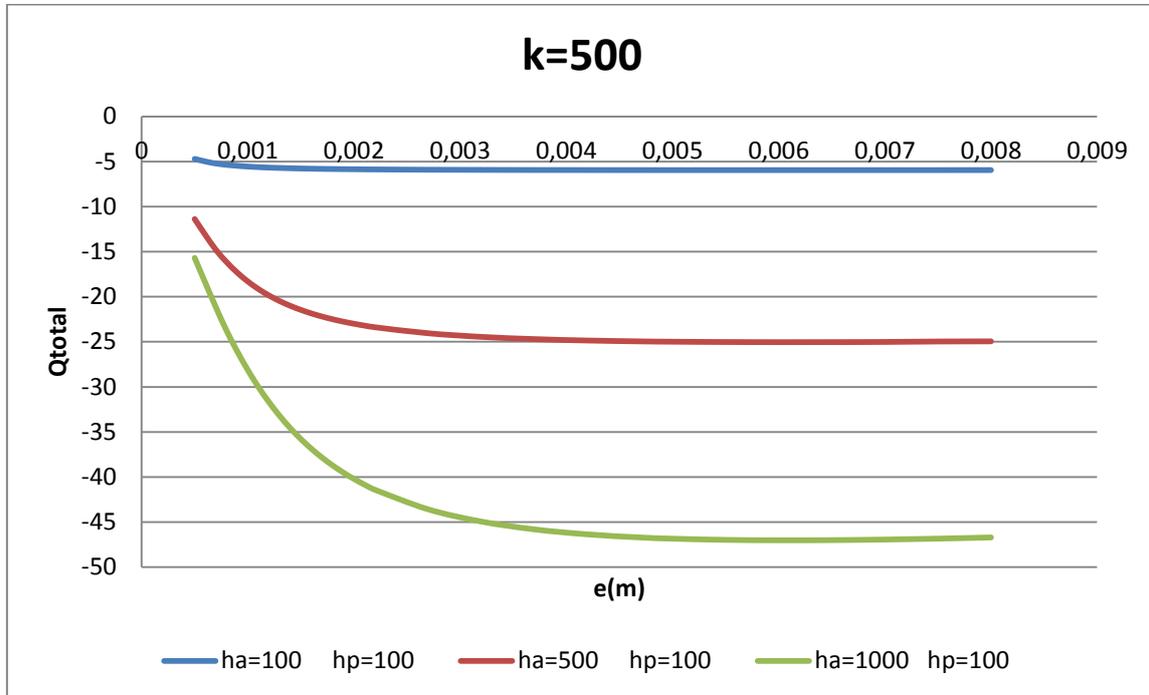
La diferencia entre las distintas curvas de una misma gráfica reside en el valor “ h_a ”

Casos estudiados: $h_a = \{100, 500, 1000\} \text{W/m}^2\text{K}$

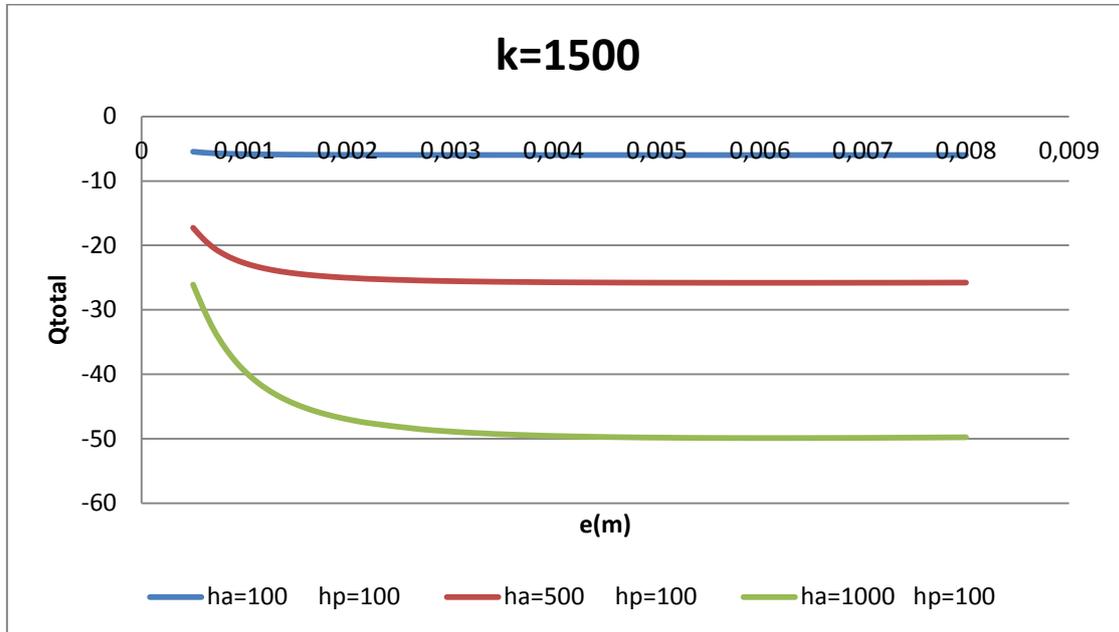
Los siguientes gráficos muestran la evolución de las curvas del flujo de calor total Q_{total} en función del espesor “ e ” para los distintos casos estudiados:







	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5



CONCLUSIONES CUALITATIVAS

- A medida que aumenta el valor de h_a , en todas las gráficas aumenta el valor del calor total disipado (Q_{total})
- Conforme aumentamos el valor de h_a con K constante, el máximo de la curva de Q_t se desplaza hacia la derecha, es decir, hacia espesores más altos. Sin llegar a superar en ningún caso el espesor de 6mm. La aleta óptima más gruesa, de mayor espesor ocupará el 60% del total de superficie de pared disponible.
- Observamos que para todos los casos es eficiente el uso de la aleta pues se evacúa más calor con ella que sin ella.

Por tanto el calor disipado es mayor a mayor coeficiente de convección de la aleta y el máximo alcanza espesores más elevados a medida que aumenta la conductividad del material.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

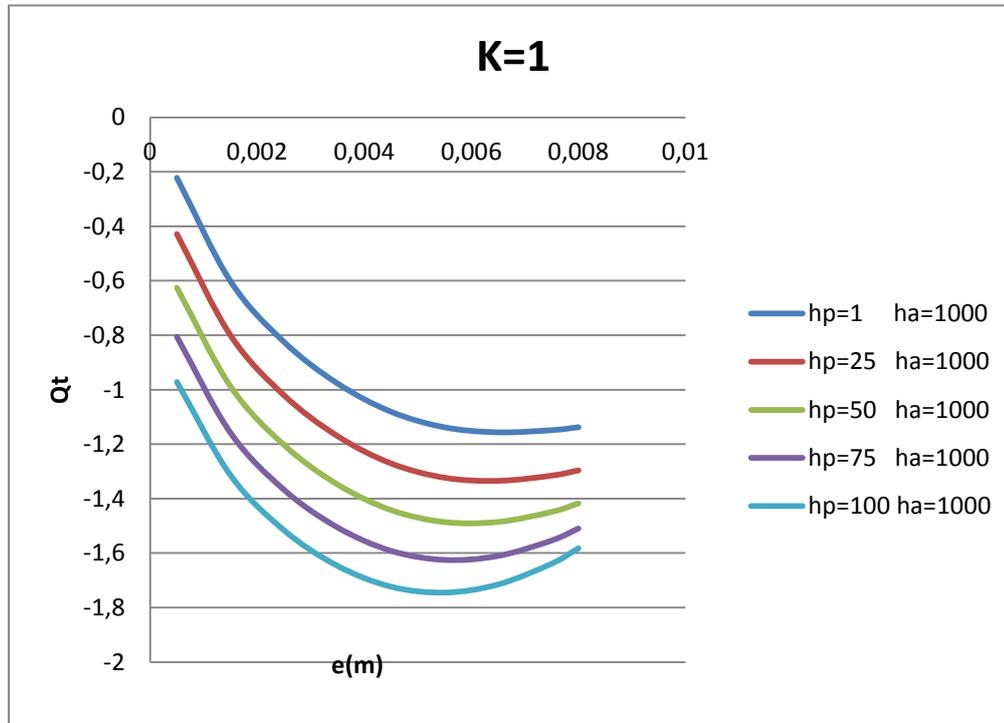
- Influencia de la variable hp

Para analizar la influencia del factor de convección en la pared sobre el flujo total de calor, vamos a representar 6 gráficas. En cada gráfica se presentan 4 curvas. Cada una de las gráficas mantendrá constante la conductividad térmica ($K=1, 50, 100, 500, 1000, 1500$ W/mK) y también el coeficiente de convección de la aleta $ha=1000$ W/m²K, así como el volumen del material de la aleta.

El coeficiente de convección de la pared tomará los siguientes valores:

$$hp = \{1, 25, 50, 75, 100\} \text{ W/m}^2\text{K}$$

NOTA: Tal y como ya se mencionó anteriormente, el rango de la variable “ hp ” es cualitativamente inferior al rango del coeficiente de convección de la aleta, esto se debe a la hipótesis considerada de que la convección en la región de la pared es menor debido a la dificultad del fluido refrigerante de penetrar entre las aletas y evacuar calor.



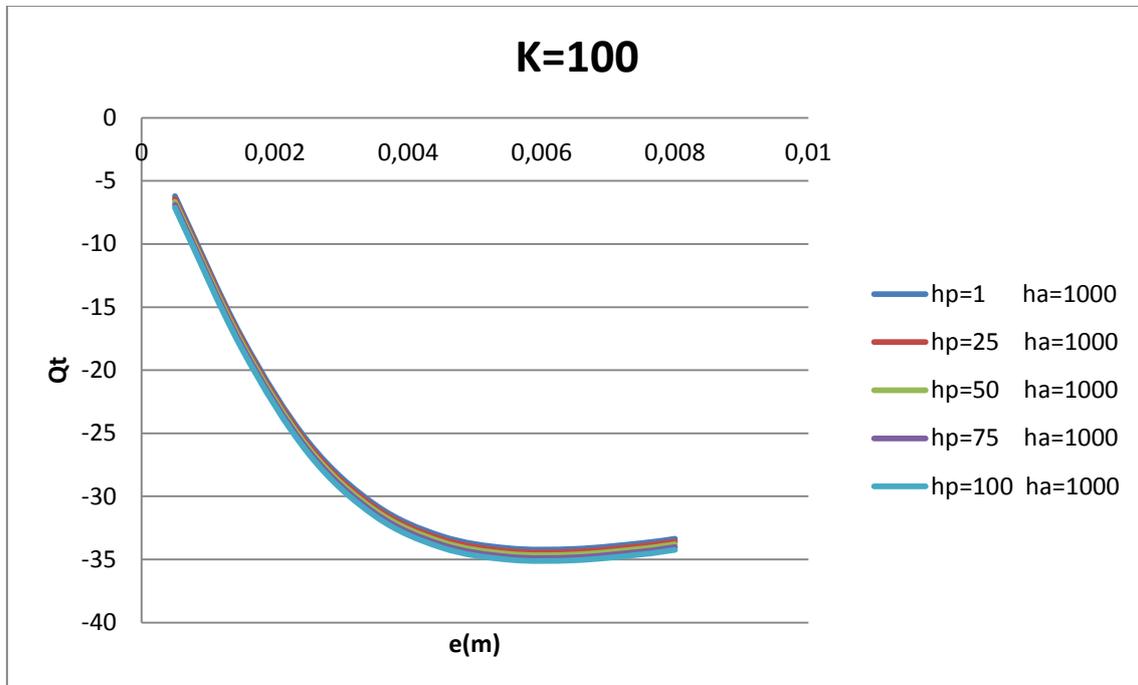
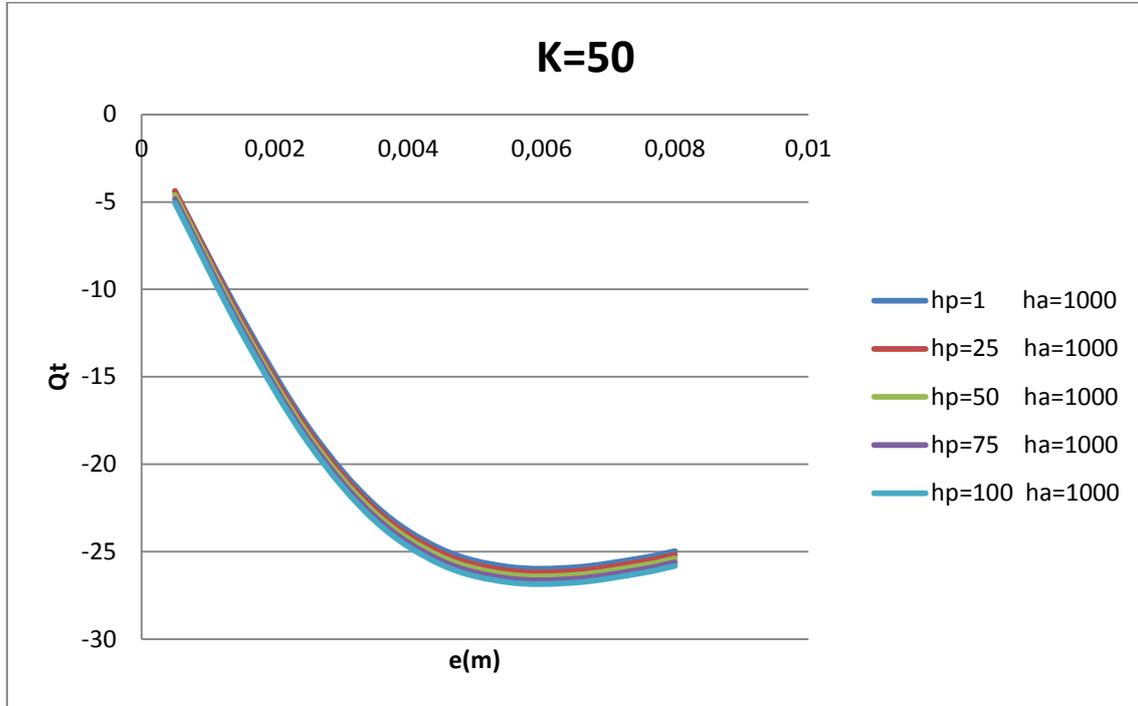


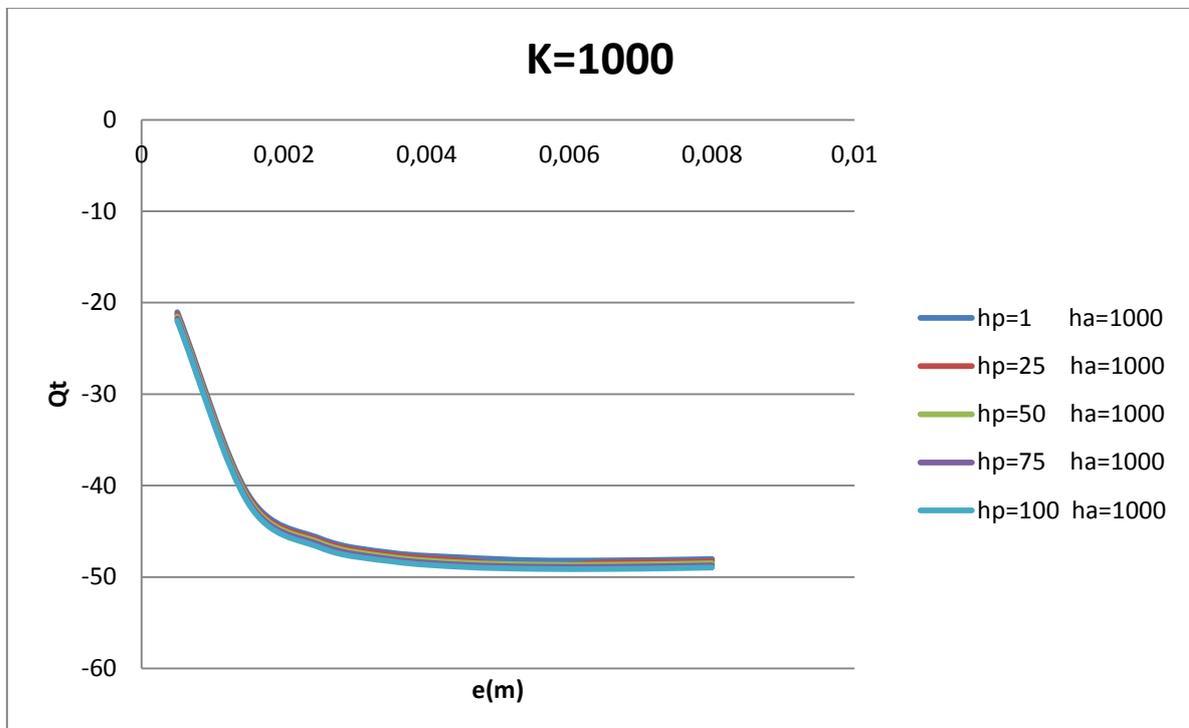
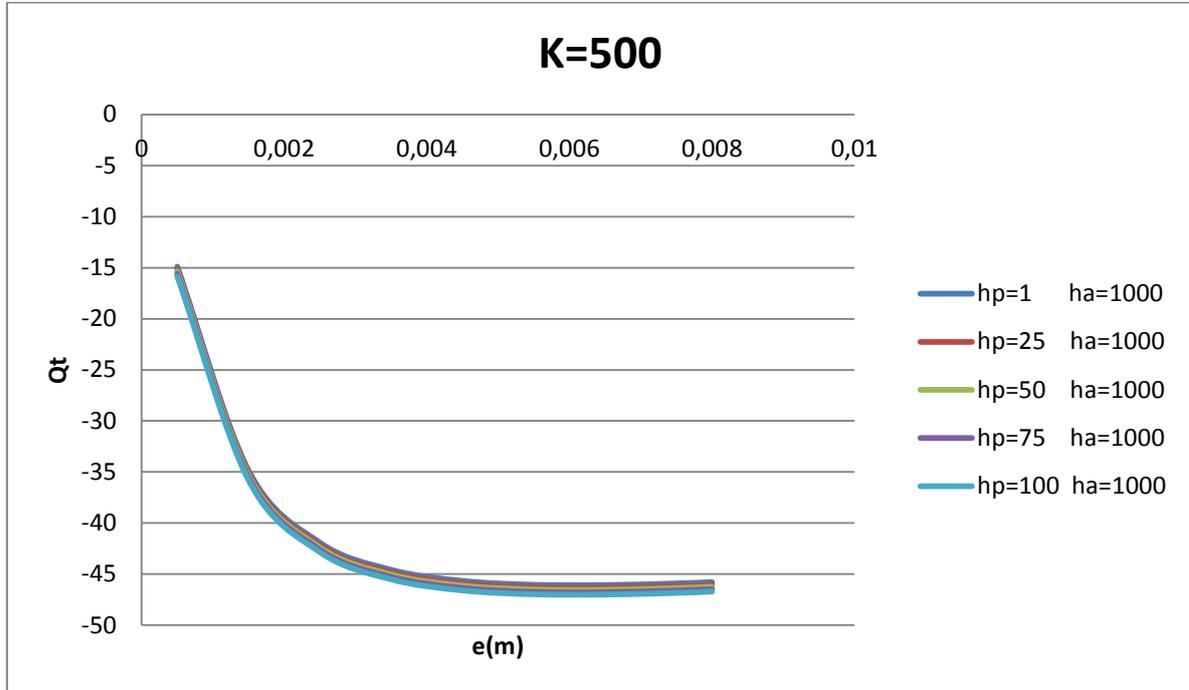
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE
ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA
LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN

Fecha

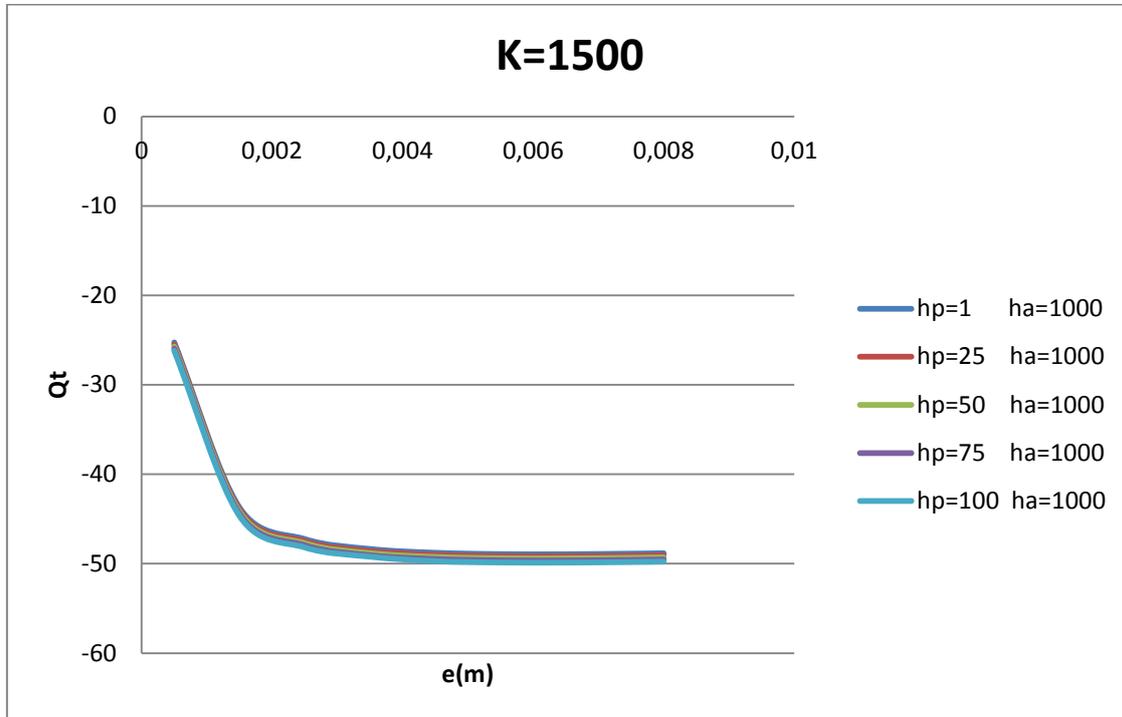
18 Junio 2015

CAPÍTULO 5





	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5



CONCLUSIONES CUALITATIVAS

- A medida que aumenta el valor de “hp”, el calor total evacuado (Q_{total}) también aumenta (para un “ha” y una “K” constantes) pero en menor medida que lo hacía con el valor de “ha”. Esta solución era previsible según comentamos en la introducción al analizar la ecuación del balance del flujo total de calor ($Q_t = Q_{pared} + Q_{aleta-lateral} + Q_{aleta-extremo}$), donde se obtuvo que la influencia de la variable “hp” sobre el flujo Q_{total} es menor que la influencia de la variable “ha” sobre dicho flujo.
- También podemos observar que la geometría de las curvas no cambia, se mantiene la forma de las curvas de $hp = 1, 25, 50, 75, 100$ para los distintos valores de K. Los máximos de Q_{total} se mantienen alineados en la misma recta vertical. Esto significa que el espesor óptimo no varía para distintos valores de “hp”.

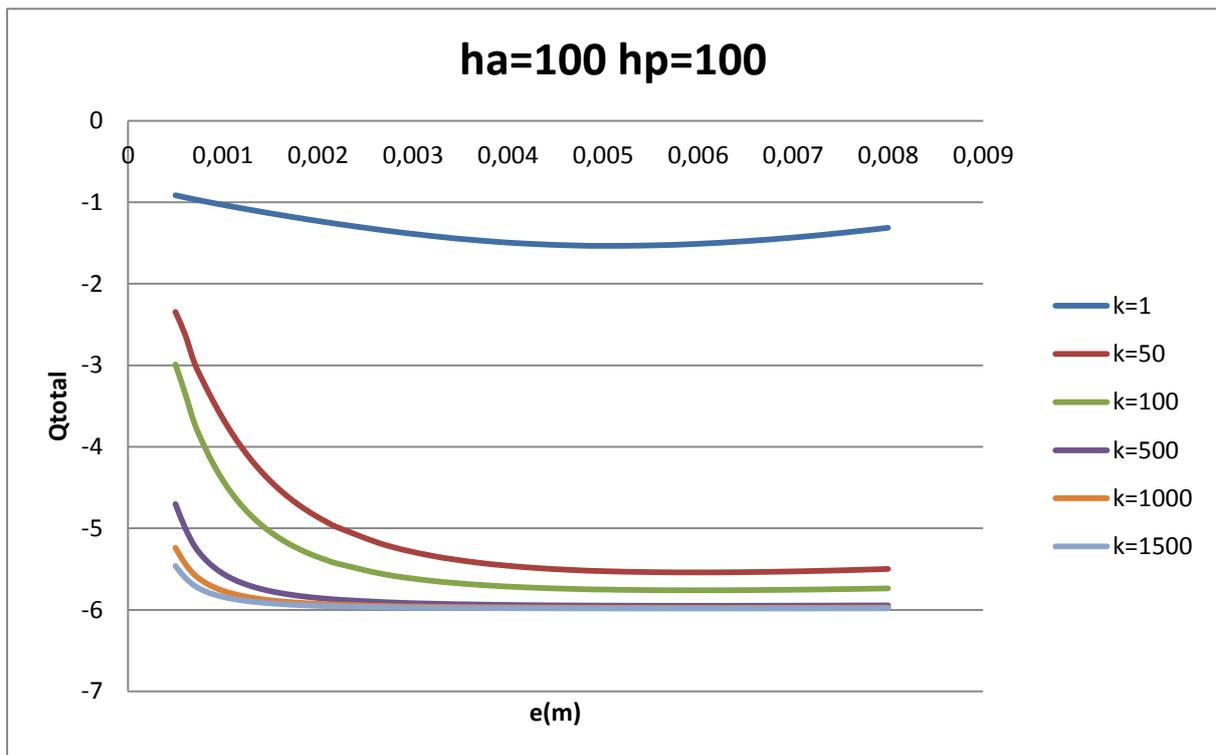
Así que se puede concluir que la influencia de “hp” sobre el espesor óptimo es nula y sobre el calor total es mínima y casi despreciable porque Q_{total} varía imperceptiblemente cuando modificamos el valor de “hp”.

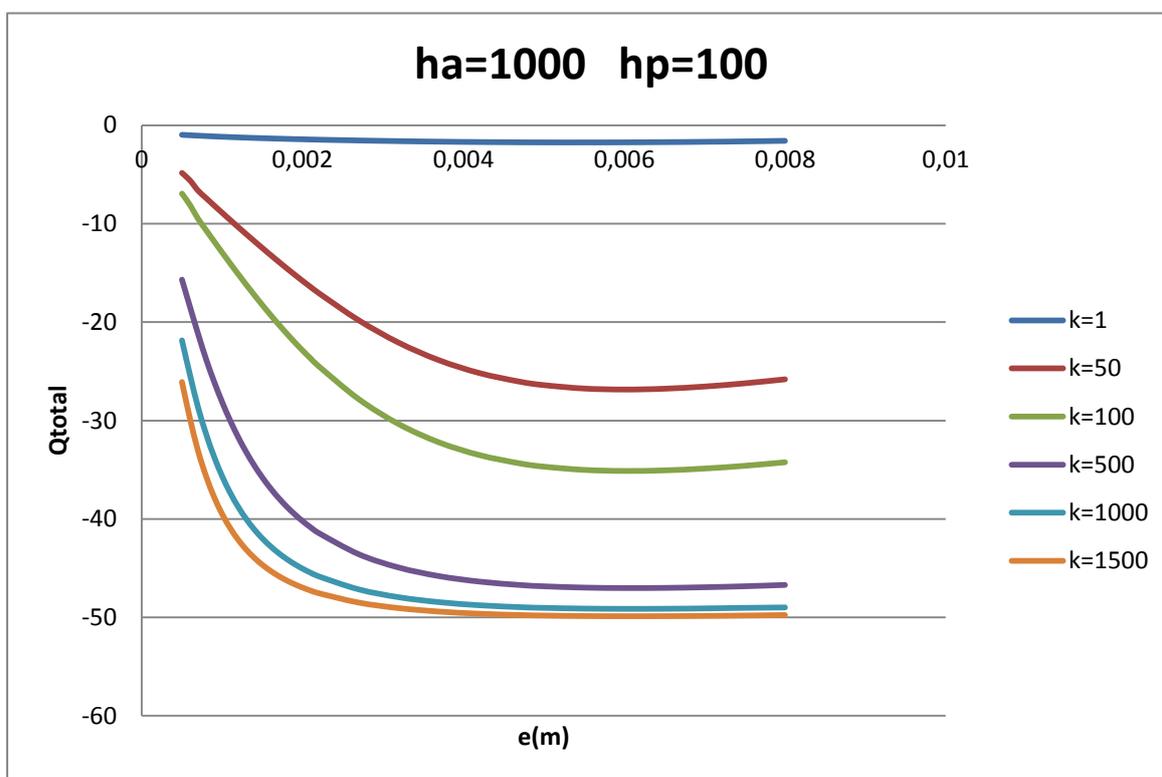
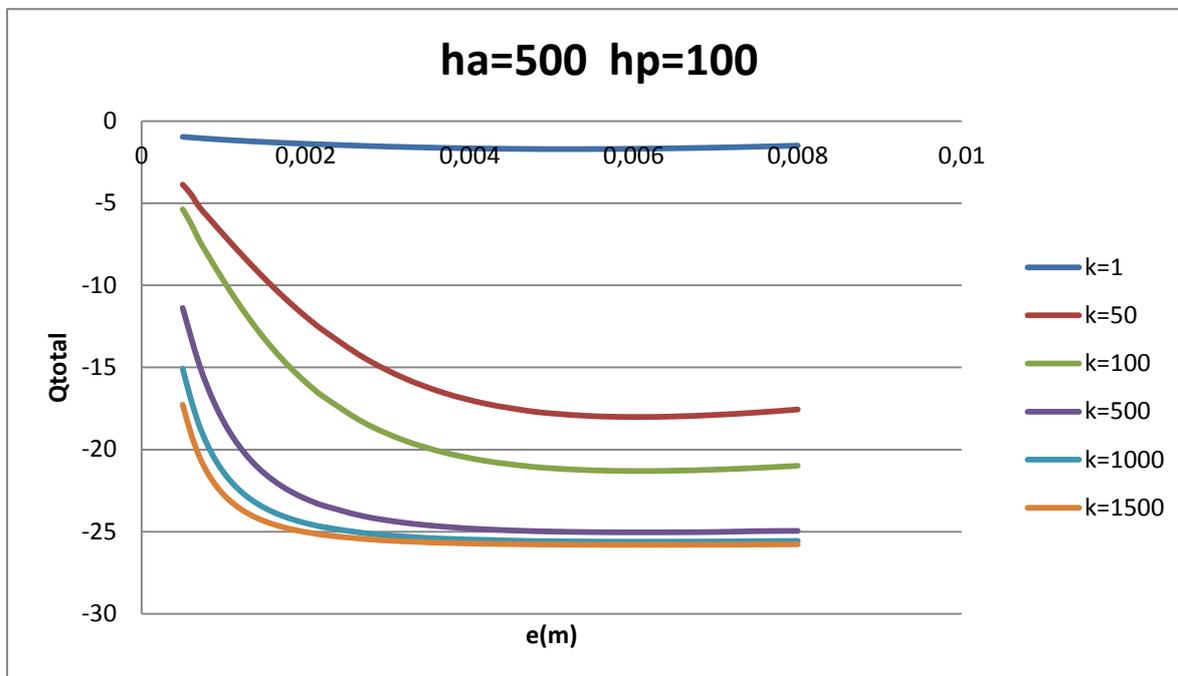
	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

- Influencia de la variable K

Para analizar la influencia de la conductividad térmica sobre el flujo total de calor, vamos a mostrar 3 gráficas. En cada una de ellas se representarán 6 curvas. Cada curva se refiere a un valor de K, de entre los siguientes $K=1, 50, 100, 500, 1000, 1500$.

El coeficiente de convección en la aleta (h_a) tomará un valor constante en cada gráfica, $h_a = (100, 500, 1000) \text{ W/m}^2\text{K}$; y el coeficiente de convección en la pared será constante en todas las curvas ($h_p=100\text{W/m}^2\text{K}$) y en todas las gráficas al igual que el valor del volumen ($V_a=25\text{mm}^3$)





	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES CUALITATIVAS

- A medida que aumentamos el valor de K el calor evacuado Q_{total} también aumenta, es decir, las curvas se desplazan hacia abajo.
- Si observamos una de las gráficas, podemos ver que a medida que aumenta el valor de K (nos vamos desplazando hacia la curva inmediatamente inferior según el eje de ordenadas), el máximo de la curva Q_{total} se desplaza hacia la izquierda. Esto equivale a decir que con forme aumentamos el valor de la conductividad la aleta óptima es más esbelta, va reduciendo su espesor y aumentando su longitud.
- A medida que aumenta en cada gráfica el valor de h_a , viendo las 3 graficas secuencialmente, podemos observar que las curvas evolucionan de dos maneras diferentes:
 - o Por un lado, las curvas con una conductividad pequeña ($K=1, 50, 100$) pasan de tener un espesor óptimo más pequeño (aleta esbelta) a tener un espesor óptimo que recubre casi toda la pared, es decir una aleta corta y gruesa.
 - o Por otro lado, las curvas con una conductividad elevada ($K=500, 1000, 1500$) pasan de tener un espesor óptimo en torno a $e=0,5-1mm$ (Q_{total} máximo casi sin la presencia de aleta) a un calor máximo para espesores $e=4-5mm$, o lo que es lo mismo una aleta esbelta para $h_a=1000W/m^2K$

- **Influencia de la variable V**

Para analizar la influencia del volumen, procedemos a considerar un caso particular de todos los estudiados previamente. De esta manera le damos a las variables h_a , h_p y K unos valores razonables intermedios:

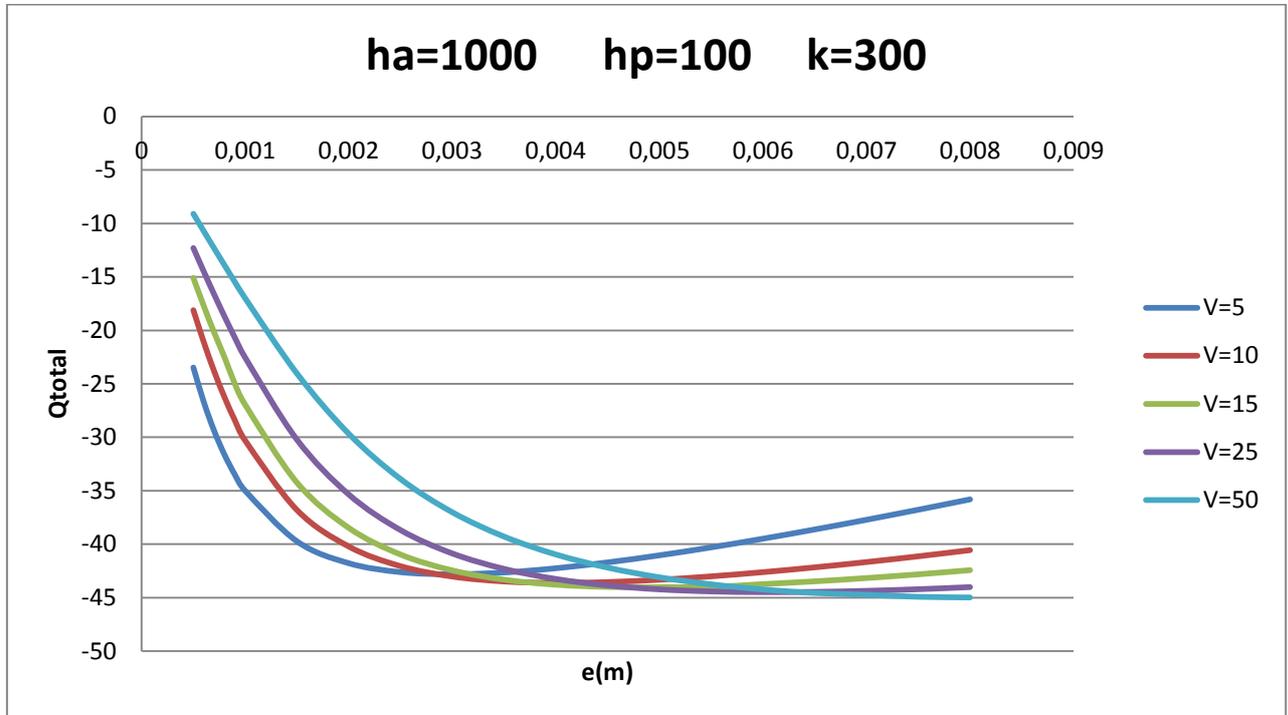
- $h_a= 1000 W/m^2K$
- $h_p= 100 W/m^2K$
- $K= 300 W/mK$

Ya estamos en disposición de analizar la influencia del volumen de la aleta sin tener en cuenta el volumen de la pared. En los casos ya estudiados con anterioridad el volumen ha permanecido constante a $25 mm^3$. Ahora en la gráfica que se muestra a continuación irá tomando distintos valores, y veremos cómo cambia el espesor óptimo de la aleta.

El valor del volumen se modificará desde $1/5$ del volumen original ($25mm^3$) hasta 2 veces el volumen original, de tal modo que presentamos la curva Q_{total} para estos casos:

$$V_a = \{5, 10, 15, 25, 50\}mm^3$$

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5



CONCLUSIONES CUALITATIVAS

Son dos las conclusiones que podemos destacar a partir de la gráfica que se ha representado:

- En primer lugar que a medida que aumenta el volumen, también aumenta el máximo calor evacuado Q_{total} máximo.
- La segunda de ellas es que con forme se aumenta el volumen, el espesor óptimo se desplaza hacia la derecha en el eje de abscisas, es decir, que la aleta óptima se hace más gruesa y por tanto más corta.

A continuación se presentan algunos de los valores obtenidos para cada volumen:

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

VOLUMEN DE 5 mm³

LONGITUD (m)	ESPEJOR(m)	Q
0,01	0,0005	-23,472
0,00833333	0,0006	-26,687
0,00714286	0,0007	-29,381
0,00625	0,0008	-31,621
0,00555556	0,0009	-33,479
0,005	0,001	-35
0,00333333	0,0015	-39,729
0,0025	0,002	-41,774
0,002	0,0025	-42,609
0,00166667	0,003	-42,81
0,00142857	0,0035	-42,643
0,00125	0,004	-42,246
0,00111111	0,0045	-41,696
0,001	0,005	-41,037
0,00090909	0,0055	-40,293
0,00083333	0,006	-39,483
0,00076923	0,0065	-38,619
0,00071429	0,007	-37,713
0,00066667	0,0075	-36,772
0,000625	0,008	-35,807

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha	18 Junio 2015
		CAPÍTULO 5	

VOLUMEN DE 10 mm³

LONGITUD (m)	ESPEJOR(m)	Q
0,02	0,0005	-18,11
0,01666667	0,0006	-21,09
0,01428571	0,0007	-23,805
0,0125	0,0008	-26,241
0,01111111	0,0009	-28,399
0,01	0,001	-30,298
0,00666667	0,0015	-36,801
0,005	0,002	-40,211
0,004	0,0025	-42,049
0,00333333	0,003	-43,023
0,00285714	0,0035	-43,48
0,0025	0,004	-43,614
0,00222222	0,0045	-43,538
0,002	0,005	-43,32
0,00181818	0,0055	-43,002
0,00166667	0,006	-42,611
0,00153846	0,0065	-42,162
0,00142857	0,007	-41,666
0,00133333	0,0075	-41,129
0,00125	0,008	-40,554

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha	18 Junio 2015
		CAPÍTULO 5	

VOLUMEN DE 15 mm³

LONGITUD (m)	ESPEJOR(m)	Q
0,03	0,0005	-15,099
0,025	0,0006	-17,711
0,02142857	0,0007	-20,187
0,01875	0,0008	-22,5
0,01666667	0,0009	-24,985
0,015	0,001	-26,953
0,01	0,0015	-34,236
0,0075	0,002	-38,468
0,006	0,0025	-40,961
0,005	0,003	-42,446
0,00428571	0,0035	-43,314
0,00375	0,004	-43,785
0,00333333	0,0045	-43,992
0,003	0,005	-44,018
0,00272727	0,0055	-43,992
0,0025	0,006	-43,728
0,00230769	0,0065	-43,471
0,00214286	0,007	-43,163
0,002	0,0075	-42,813
0,001875	0,008	-42,426

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

VOLUMEN DE 25 mm³

LONGITUD (m)	ESPEJOR(m)	Q
0,05	0,0005	-12,301391
0,04166667	0,0006	-14,489645
0,03571429	0,0007	-16,62482
0,03125	0,0008	-18,6895
0,02777778	0,0009	-20,6666
0,025	0,001	-22,543
0,01666667	0,0015	-30,2206
0,0125	0,002	-35,3417
0,01	0,0025	-38,675
0,00833333	0,003	-40,861
0,00714286	0,0035	-42,303
0,00625	0,004	-43,249
0,00555556	0,0045	-43,855
0,005	0,005	-44,221
0,00454545	0,0055	-44,414
0,00416667	0,006	-44,48
0,00384615	0,0065	-44,453
0,00357143	0,007	-44,357
0,00333333	0,0075	-44,206
0,003125	0,008	-44,011

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

VOLUMEN DE 50 mm³

LONGITUD (m)	ESPEJOR(m)	Q
0,1	0,0005	-9,1021
0,08333333	0,0006	-10,718
0,07142857	0,0007	-12,318
0,0625	0,0008	-13,902
0,05555556	0,0009	-15,464
0,05	0,001	-16,998
0,03333333	0,0015	-24,033
0,025	0,002	-29,664
0,02	0,0025	-33,897
0,01666667	0,003	-37,008
0,01428571	0,0035	-39,285
0,0125	0,004	-40,957
0,01111111	0,0045	-42,187
0,01	0,005	-43,092
0,00909091	0,0055	-43,752
0,00833333	0,006	-44,228
0,00769231	0,0065	-44,561
0,00714286	0,007	-44,725
0,00666667	0,0075	-44,915
0,00625	0,008	-44,977

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

5.3 Conclusiones finales

Finalmente, volvemos a representar gráficamente y analizar cómo influyen las variables “ha” y “hp” a la hora de seleccionar el espesor óptimo de la aleta.

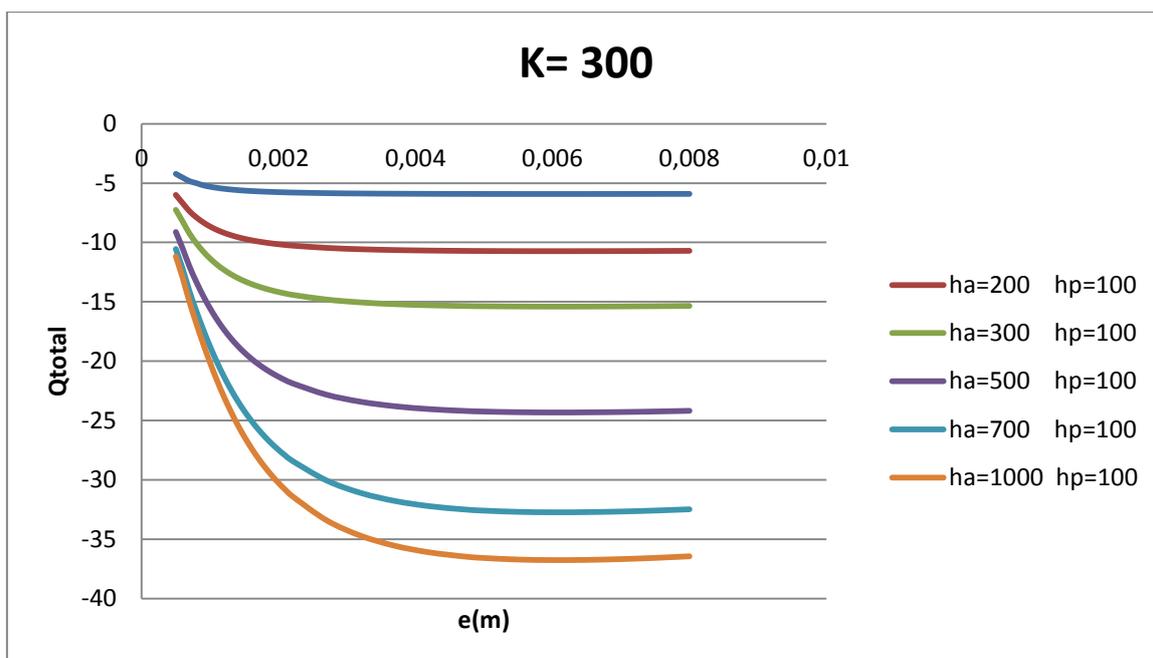
Para ello aplicaremos un caso particular, manteniendo constante la conductividad a un valor fijo $K=300W/mK$.

En la primera gráfica se representa el flujo de calor obtenido para diferentes valores de “ha” en función del espesor, siendo constante tanto el volumen ($25mm^3$) como el coeficiente de convección de la pared ($hp=100W/m^2K$)

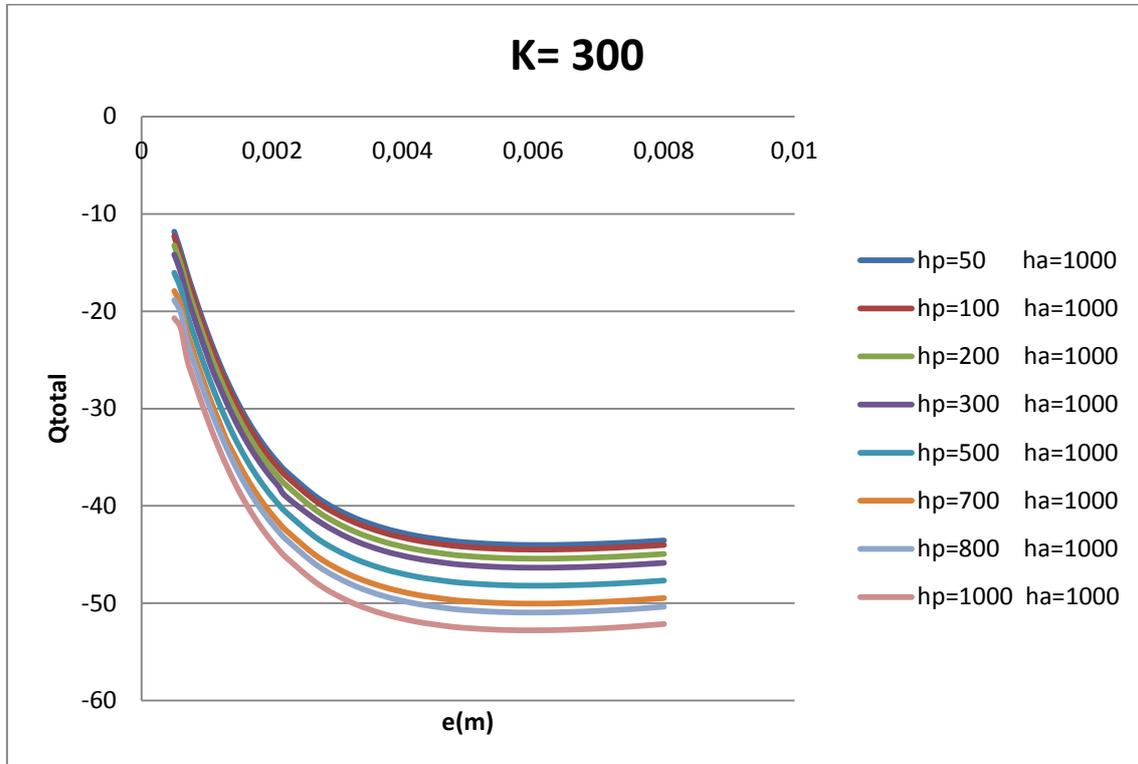
$$ha = \{100, 200, 300, 500, 700, 800, 1000\}$$

Y en la segunda gráfica se representa el flujo de calor obtenido para diferentes valores de “hp” en función del espesor, siendo constante tanto el volumen ($25mm^3$) como el coeficiente de convección de la aleta ($ha=1000W/m^2K$)

$$hp = \{50, 100, 200, 300, 500, 700, 800, 1000\}$$



	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5



Tal y como ya veníamos demostrando a lo largo de todo el estudio, con estas gráficas se termina de reflejar que la influencia del coeficiente de convección de la pared es despreciable frente a la influencia del coeficiente de convección de la aleta.

Como conclusión final, podríamos repetir las conclusiones obtenidas anteriormente durante el análisis, pero es preferible seguir destacando que de las 4 variables que hemos analizado (h_a , h_p , K y V), las que mayor influencia tienen sobre la geometría óptima de la aleta son tanto el coeficiente de convección de la aleta (h_a) como la conductividad térmica (K). El coeficiente de convección sobre la pared (h_p) y el volumen de material de la aleta, tienen una influencia despreciable sobre el valor del espesor óptimo.

De esta manera, nos vamos a centrar en analizar únicamente las dos variables influyentes obteniendo una conclusión de todo el trabajo desarrollado de manera esquemática.

	UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA	ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL	
OPTIMIZACIÓN MEDIANTE MODELOS EN RED DE ALETAS RECTAS RECUBIERTAS EN FUNCIÓN DE LA LONGITUD BAJO CONDICIONES DE CONVECCIÓN		Fecha 18 Junio 2015	CAPÍTULO 5

Existen principalmente tres casos que resumen de manera esquemática la conclusión del análisis:

CASO 1 → Valores elevados de “ha” y valores pequeños de “K”

Aleta óptima que recubrirá toda la pared, es decir, será corta y gruesa.

CASO 2 → Valores pequeños de “ha” y valores elevados de “K”

Aleta óptima no existe. Prácticamente el calor es el máximo con pared desnuda.

CASO 3 → Valores intermedios de “ha” y valores intermedios de “K”

Aleta óptima esbelta de espesor aproximadamente un 40%-60% de la longitud total de la pared.

Bibliografía

- [1] D. R. HARPER Y W. B. BROWN, *Mathematical Equations for Heat Conduction in the Fins in Air Cooled Engines*. NACA technical report, p. 158, 1922.
- [2] M. JAKOB, *Heat Transfer*, vol. 1. John Wiley & Sons, Nueva York, 1956.
- [3] K. A. GARDNER, *Efficiency of Extended Surfaces*. Trans. ASME, vol. 67, pp. A78-A80, 1938.
- [4] W.M. MURRAY, Heat Transfer Through an Annular Disk or Fin of Uniform Thickness, Trans. ASME, J.Appl. Mech. Vol. 60, 1938, A38.
- [5] ALARCÓN, M. *Transporte de Calor en Sistemas con Aletas. Coeficientes de Rendimiento y Red de Transferencia*. Ph.D Thesis, Universidad de Murcia (2001).
- [6] P. RAZELOS, *A Critical Review of Extended Surface Heat Transfer*. Heat Transfer Engineering, vol. 24 , no. 6, pp. 11-28, 2003.
- [7] E.SCHMIDT, Die Warmeubtragung durch Rippen, Z. VDI 70 (1926) 885.
- [8] C. F GONZÁLEZ-FERNÁNDEZ Y F. ALHAMA, *El Método de Simulación por Redes*. J. Horno Research Signpost Ed., India, 2002.
- [9] L. PEUSNER, *The Principles of Network Thermodynamics*. Entropy Ltd., 1987.
- [10] *PSpice 6.0*. Microsim Corporation Fairbanks, California, 1994.
- [11] J. P. LUNA Y F. ALHAMA, *Efficiency Universal Curves for Rectangular Fins Based on a Generalized Characteristic Length*. WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer. California, EEUU, 2006.
- [12] J. P. LUNA Y F. ALHAMA, *Caracterización de una Aleta Simple Sometida a Radiación y Convección*. XVI Congreso Nacional De Ingeniería Mecánica, Universidad de León, 2004.
- [13] J. P. LUNA Y F. ALHAMA, *Characterization of 1-D and 2-D Cylindrical Pin Fins from the Characteristic Length*. 3rd IASME/WSEAS Int. Conf. on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment. Proceedings, 2005.
- [14] J. P. LUNA Y F. ALHAMA, *A Generalization of the Characteristic Length Provided by Discriminated Dimensional Analysis for Cylindrical Spines*. IASME/WSEAS Journals Corfu, Grecia, 2005.
- [15] FRANCISCO ALHAMA LÓPEZ y FRANCISCO DEL CERRO VELÁZQUEZ. Simulación y diseño de problemas de conducción térmica con PROCCA-09. 1ªEdición, 2010 UM ISBN: 978-8371-060-2010

- [16] IVÁN ALHAMA y FRANCISCO DEL CERRO. Prácticas de transmisión del calor con el Programa PROCCA. 1ª Edición, 2013 UPCT. ISBN: 978-84-940692-2-2
- [17] ALAN J. CHAPMAN. Transmisión del calor. 3ª Edición. Bellisco ISBN: 84-85.198-42-5
- [18] FRANK KREITH, WILLIAM Z. BLACK. Basic Heat Transfer. 1980.
- [19] ISACHENKO, V. OSIPOVA, V. SUKOMEL, A. Heat transfer (traducción) Transmisión del calor. Marcombo 1973. ISBN: 84-267-0239-2.
- [20] A.F.MILLS. Heat Transfer. 2ª Edición 1999. Prentice Hall. ISBN: 0-13-947624-5
- [21] BERNHARD WEIGAND. Analytical Methods for Heat Transfer and Fluid Flow Problems. Springer ISBN: 3-540-22247-2

Apéndice1. Nomenclatura

Por orden de aparición en el texto:

\dot{m}	Flujo másico, kg/s
i	Entalpía específica, J/kg
v	Velocidad, m/s
g	Gravedad, 9.81 m/s ²
Q	Calor, W
Q_r	Calor transmitido por radiación, W
Q_d	Calor disipado por la aleta, W
W	Trabajo, W
c	Velocidad de la luz, 3.00·10 ⁸ m/s
λ	Longitud de onda, m
n	Frecuencia, s ⁻¹
E	Nivel energético, J
T	Temperatura, K
T_b	Temperatura de la base de la aleta, K
T_{ref}	Temperatura de referencia, K
A	Área, m ²
F	Factor de forma, adimensional
$\varepsilon_0, \varepsilon_1$	Emisividad, adimensional
L_x, L_y, L_z	Longitudes discriminadas de la base dimensional, m
Bi_t	Número de Biot transversal, adimensional
l^*	Longitud característica, m
l_g^*	Longitud característica generalizada, m
k	Conductividad térmica, W/m·K
ϑ	Relación de temperaturas, adimensional
$\Delta\vartheta$	Diferencia de temperaturas, K
z	Coordenada longitudinal adimensional
η	Eficiencia, adimensional
ε	Efectividad, adimensional
Y_s	Admitancia térmica inversa, W/K
y_s	Admitancia térmica inversa específica, W/kg·K
y_r	Admitancia térmica inversa relativa, adimensional
m	Masa de la aleta, kg
x, y, z	Coordenadas rectangulares, m
e	Espesor de la aleta, m
L	Longitud de la aleta, m