

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial  
Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE FENÓMENOS  
DE TRANSPORTE APLICANDO ANALOGÍA ELÉCTRICA Y  
EL PROGRAMA PSPICE**

**TESIS DOCTORAL**

**Verónica Rubio Hernández**

Dirigida por  
Joaquín Zueco Jordán

2014



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial  
Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE FENÓMENOS DE  
TRANSPORTE APLICANDO ANALOGÍA ELÉCTRICA Y EL  
PROGRAMA PSPICE**

Memoria para aspirar al grado de Doctora en modalidad de compendio  
de publicaciones presentada por

Verónica Rubio Hernández

*“Network modelling to study the unsteady unidirectional flows of a non - Newtonian fluid problem”*, Mathematical and Computer Modelling 54, 2839 – 2847 (2011)

*“Effects of heat generation / absorption and chemical reaction on magnetohydrodynamic flow in a permeable moving plate”*, Chemical Engineering Communications, Taylor & Francis 199, 1205 – 1224 (2012)

*“Network method to study magnetohydrodynamic flow and heat and mass transfer about a rotating disk”*, Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics 6, 336-345 (2012)

*“Network numerical analysis of radiation absorption and chemical effects on unsteady MHD free convection through a porous medium”*, International Journal of Heat and Mass Transfer 64, 375 - 383 (2013)

*“Numerical analysis of unsteady laminar hydromagnetic mixed convection flow in a vertical channel”*, International Communications in Heat and Mass Transfer 45, 16 – 22 (2013)

# Resumen

La presente tesis doctoral aborda el estudio y resolución de diferentes problemas relacionados con la transferencia de calor y mecánica de fluidos, mediante el Método de Simulación por Redes (MESIR). Los resultados numéricos obtenidos son suficientemente precisos y con margen de error característico del campo de la Ingeniería Térmica.

El análisis de los estudios acerca de la transferencia en masa y calor por un fluido hidromagnético sobre determinadas superficies, como un disco giratorio o canal de placas paralelas se han elaborado ampliamente en esta memoria. Se presta especial atención en el estudio de flujos magnetohidrodinámicos y aspectos de transferencia de calor en varias geometrías considerando además la relevancia de este tema en numerosas investigaciones en los ámbitos de la Ciencia y la Ingeniería.

La convección mixta laminar en un canal de placas paralelas por un fluido newtoniano conductor de electricidad es analizada, estudiándose la influencia de los parámetros de convección mixta, disipación viscosa y magnética, coeficiente de generación/absorción de calor y campo magnético, tanto en el estudio estacionario como en el transitorio.

Se han presentado las soluciones analíticas y numéricas para una clase de flujos unidireccionales transitorios de un fluido de segundo grado. Además, se discuten dos situaciones de flujos distintas de un fluido entre dos fronteras paralelas. El interés sobre los fluidos no-newtonianos se ha incrementado en los últimos años considerablemente. También se ha realizado un análisis numérico sobre los efectos de radiación y reacción química sobre convección libre magnetohidrodinámica a través de un medio poroso.

Se han comparado las soluciones analítica y numérica con éxito y se ha verificado la exactitud de los resultados. El diseño de los modelos en red así como la implementación de las condiciones de contorno, se explican en el Capítulo 2. Se han desarrollado los ficheros fuentes (C++) para resolver posteriormente todos los casos analizados. Este programa permite la introducción de todos los parámetros que define cada caso estudiado, generando un archivo de texto con el formato de un circuito eléctrico, para poder ejecutar el programa Pspice y obtener los resultados en formato de texto o gráfico, empleando el osciloscopio virtual Probe disponible en el paquete de Pspice.

# *Numerical solution of transport phenomena problems applying electrical analogy and the Pspice program*

## **Abstract**

The present doctoral thesis tackles the study and resolution of different problems related to the heat transfer and fluids mechanics, by means of the Network Simulation Method (NSM). The numerical results are sufficiently precise and with characteristic error margin of the Thermal Engineering field.

The analysis of heat and mass transfer studies for a hydromagnetic fluid on certain surfaces, such as a rotating disk or parallel plates channel have been widely elaborated herein. Special attention is paid to the study of magnetohydrodynamic flows aspects with heat transfer in several geometries also considering the importance of this issue in numerous investigations in the Science and Engineering fields. Laminar mixed convection in a vertical parallel plate channels for a newtonian electrically conducting fluid is analyzed. Both steady and transient studies were made considering the influences of mixed convection parameter, viscous and magnetic dissipation, heat generation / absorption coefficient and magnetic field.

The analytical and numerical solutions are presented for a class of unsteady unidirectional flows of a second grade fluid. Furthermore, two different situations of fluid flows between two parallel borders are discussed. The interest on non-Newtonian fluids has increased considerably in recent years. In addition, a study has been conducted about the radiation and chemical reaction effects on MHD free convection through a porous medium.

Analytical and numerical solutions have been compared successfully and the accuracy of results was verified. Models network design as well as the implementation of the boundary conditions are explained in Chapter 2. The source files have been developed (C++) to solve all cases analyzed later. This program allows the introduction of all the parameters that defines all studied cases, generating a text file in the format of an electrical circuit to be run in the Pspice simulator and get the results as text or graphic, using the virtual oscilloscope Probe available in the package Pspice.

# Agradecimientos

Quiero recordar aquí a quienes me han sostenido y alentado en estos años de estudio e investigación. La realización y defensa de esta Tesis Doctoral es para mí, una experiencia fundamental desde el punto de vista académico y personal. Gracias al apoyo recibido, esta tesis es hoy una realidad. Estoy agradecida a mi familia, especialmente a mi hermano por su apoyo incondicional y por su inestimable ayuda sobre las continuas reflexiones de mi trabajo. Su participación y motivación han sido un estímulo más para la realización de esta memoria.

Por otro lado, quiero expresar mi sincero agradecimiento al director de esta tesis, el profesor Joaquín Zueco, por haber confiado en mí desde el principio y darme la oportunidad de conocer el mundo de la investigación, por su dedicación, ayuda constante y magistral que me ha prestado y por su trato siempre cordial. Debo destacar sus consejos valiosos, sus críticas atentas y su paciente corrección de los capítulos de esta tesis, y sobre todo su actitud siempre alentadora y optimista.

A todos, muchas gracias

A mis padres



---

# ÍNDICE

---

|   |    |
|---|----|
| <b>1. PRESENTACIÓN</b>  | 1  |
| 1.1. Antecedentes e introducción  | 2  |
| 1.2. Objetivos y desarrollo   | 5  |
| 1.3. Perspectivas   | 7  |
| 1.4. Referencias  | 7  |
| <br>  |    |
| <b>2. MODELO NUMÉRICO PROPUESTO</b>   | 9  |
| <br>  |    |
| 2.1. Fundamentos del método   | 10 |
| 2.1.1. Monopuertas  | 11 |
| 2.2. Analogía termo - eléctrica   | 15 |
| 2.3. Implementación del método  | 17 |
| 2.3.1. El Mesir y otros métodos numéricos   | 18 |
| 2.4. Software: Pspice - Orcad   | 20 |
| 2.5. Simulación, presentación de resultados   | 23 |
| 2.6. Referencias  | 26 |
| <br>  |    |
| <b>3. ESCENARIOS DE APLICACIÓN</b>  | 29 |
| 3.1. Introducción   | 30 |
| 3.2. Estudio de un fluido magnetohidrodinámico y transferencia de calor sobre un disco giratorio  | 32 |
| 3.2.1. Referencias  | 35 |
| 3.3. Estudio de los efectos de generación/absorción de calor y reacción química sobre flujo magnetohidrodinámico en una placa permeable en movimiento | 39 |
| 3.3.1. Referencias  | 43 |
| 3.4. Estudio del flujo de calor por convección mixta de un fluido hidromagnético en un canal vertical de placas paralelas                             | 46 |
| 3.4.1. Referencias  | 50 |



|  |     |
|--|-----|
| 3.5. Estudio de flujos unidireccionales no estacionarios de un fluido no-newtoniano  | 55  |
| 3.5.1. Referencias   | 58  |
| 3.6. Estudio de los efectos de absorción de radiación y reacción química sobre convección magnetohidrodinámica a través de un medio poroso | 62  |
| 3.6.1. Referencias   | 65  |
| <b>4. MODELOS EN RED</b>   | 71  |
| 4.1. Introducción  | 72  |
| 4.1.1. Generalidades del método en red   | 72  |
| 4.2. Protocolos de resolución  | 76  |
| 4.2.1. Disco giratorio   | 76  |
| 4.2.2. Superficie permeable vertical en movimiento   | 83  |
| 4.2.3. Placas verticales paralelas   | 90  |
| 4.2.4. Fluido no-newtoniano  | 99  |
| 4.2.5. Convección libre magnetohidrodinámica en un medio poroso  | 104 |
| <b>5. ANÁLISIS Y VALIDACIÓN DE RESULTADOS</b>  | 109 |
| 5.1. Introducción  | 110 |
| 5.1.1. Fluido magnetohidrodinámico y transferencia de calor sobre un disco giratorio   | 110 |
| 5.1.2. Transferencia en masa y calor mediante un flujo hidromagnético en una superficie vertical en movimiento                             | 120 |
| 5.1.3. Convección mixta de un fluido hidromagnético laminar en un canal vertical de placas paralelas                                       | 131 |
| 5.1.4. Flujos inestables de fluidos de segundo grado no-newtonianos  | 139 |
| 5.1.4.1. Fluido rodeado por dos límites con inicio repentino de movimiento   | 139 |
| 5.1.4.2. Flujo debido al repentino movimiento de uno de los límites  | 143 |
| 5.1.5. Convección libre magnetohidrodinámica sobre una superficie permeable vertical en un medio poroso                                    | 148 |
| <b>6. CONCLUSIONES</b>   | 157 |
| 6.1. Conclusiones  | 158 |

# Simbología

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| A                                | gradiente de presión constante ( $\text{Pa m}^{-1}$ )                            |
| B                                | vector de inducción magnética (tesla)  |
| $B_0$                            | inducción magnética (tesla)  |
| Br                               | número adimensional de Brinkmann   |
| C                                | concentración de especie adimensional  |
| $c_p$                            | calor específico a presión constante ( $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ )        |
| $c_w$                            | concentración de especie de la pared ( $\text{mol m}^{-3}$ )                     |
| $C_f$                            | coeficiente de fricción  |
| $D = 2L$                         | diámetro hidráulico (m)  |
| $D_m$                            | coeficiente de difusión en masa ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )                   |
| $F = J \times B$                 | Fuerza de Lorentz (N)  |
| $F_r, F_\phi$                    | componentes de F (N)   |
| F                                | velocidad radial adimensional  |
| g                                | aceleración de gravedad ( $\text{m/s}^2$ )                                       |
| G                                | velocidad tangencial adimensional  |
| $G_{rc}$                         | número adimensional de Grashof, $gBCv (C_w - C_\infty)/u_w v_w^2$                |
| $G_{rt}$                         | número adimensional de Grashof térmico, $gBT v (T_w - T_\infty)/u_w v^2$         |
| h                                | coeficiente de transferencia de calor ( $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ )          |
| H                                | velocidad axial adimensional   |
| I                                | vector unitario  |
| $I_z$                            | vector unidad en dirección z   |
| J                                | vector de densidad corriente ( $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$ )                    |
| k                                | conductividad térmica del fluido ( $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$ )   |
| K                                | parámetro de reacción química adimensional                                       |
| L                                | longitud del canal (m)   |
| $m = \sigma B_0^2 / \rho \omega$ | parámetro magnético  |
| M                                | número de Hartmann   |
| P                                | presión adimensional   |
| $P = p + \rho g x$               | diferencia entre presión y presión hidrostática (Pa)                             |
| Pr                               | número de Prandtl, $\nu/\alpha$  |
| $q_1, q_2$                       | flujos de calor predefinidos ( $\text{Wm}^{-2}$ )                                |
| Q                                | medida de transferencia de calor ( $\text{Js}^{-1}$ )                            |
| $Q_0$                            | coeficiente de generación de calor o absorción ( $\text{Wm}^{-3}\text{K}^{-1}$ ) |
| $Re$                             | número adimensional de Reynolds  |
| $R_{qt} = (T_2 - T_0)/\Delta T$  | parámetro de radio térmico para el caso ( $q_1 - T_2$ )                          |
| $R_t = (T_2 - T_1)/\Delta T$     | parámetro de radio térmico para el caso ( $T_1 - T_2$ )                          |
| $R_{iq} = (T_1 - T_0)/\Delta T$  | parámetro de radio térmico para el caso ( $T_2 - q_1$ )                          |
| Sc                               | número adimensional de Schmidt   |
| Sh                               | número adimensional de Sherwood  |
| T                                | temperatura (K)  |
| $T_0$                            | temperatura de referencia para paredes isotérmicas (K)                           |
| $T_w$                            | temperatura de pared (K)   |
| $T_\infty$                       | temperatura ambiente (K)   |

|                      |   |
|----------------------|---|
| $T_1, T_2$           | temperaturas de contorno predefinidas (K)                   |
| $u$                  | velocidad del fluido en la dirección-x ( $\text{ms}^{-1}$ ) |
| $u_0 = AD^2/(48\mu)$ | velocidad de referencia ( $\text{ms}^{-1}$ )                |
| $u_w$                | velocidad de la superficie vertical ( $\text{ms}^{-1}$ )    |
| $U$                  | velocidad axial adimensional                                |
| $v$                  | velocidad transversal ( $\text{ms}^{-1}$ )                  |
| $V$                  | voltaje   |
| $V_r$                | velocidad en dirección radial ( $\text{ms}^{-1}$ )          |
| $V_z$                | velocidad en dirección axial ( $\text{ms}^{-1}$ )           |
| $V_\phi$             | velocidad en dirección angular ( $\text{ms}^{-1}$ )         |
| $X$                  | coordenada espacial horizontal (m)                          |
| $y$                  | coordenada transversal (m)                                  |
| $Y$                  | coordenada espacial vertical (m)                            |
| $z$                  | oordenada axial (m)   |

## Letras griegas

|                       |  |
|-----------------------|--|
| $\Delta T$            | diferencia de temperatura (K)  |
| $\alpha = k/(\rho c)$ | difusividad térmica ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )                         |
| $\alpha_1, \alpha_2$  | módulos de tensión normal  |
| $\beta_c$             | coeficiente de expansión de concentración ( $\text{m}^3 \text{mol}^{-1}$ ) |
| $\beta_t$             | coeficiente de expansión térmica ( $\text{K}^{-1}$ )                       |
| $\gamma$              | parámetro de reacción química  |
| $\eta$                | coordenada transversal adimensional  |
| $\theta$              | temperatura adimensional   |
| $\mu$                 | viscosidad dinámica (Pa s)   |
| $\mu_m$               | permeabilidad magnética ( $\text{N/A}^2$ )                                 |
| $\nu = \mu/\rho$      | viscosidad cinemática ( $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ )                       |
| $\xi$                 | variable adimensional  |
| $\rho$                | densidad ( $\text{kg m}^{-3}$ )  |
| $\sigma$              | conductividad eléctrica del fluido ( $\text{mho m}^{-1}$ )                 |
| $\tau$                | tiempo adimensional  |
| $u$                   | velocidad transversal del fluido ( $\text{ms}^{-1}$ )                      |
| $\phi$                | coordenada angular (rad)   |
| $\omega$              | velocidad angular del disco ( $\text{rad s}^{-1}$ )                        |

### ***Subíndices***

W pared

$\infty$  ambiente

### ***Operador***

$$d/dt = V_r \partial/\partial r + V_z \partial/\partial z$$

c concentración

$c_p$  calor específico del fluido a temperatura constante

$c_w$  concentración de la pared

$C_f$  coeficiente de fricción



# CAPÍTULO UNO

## **Presentación**

---

- 1.1. Antecedentes e introducción
  - 1.2. Objetivos y desarrollo
  - 1.3. Perspectivas
  - 1.4. Referencias
-

## 1.1. Antecedentes e introducción

El estudio de flujo y transferencia de calor sobre cuerpos en rotación es un tema de considerable interés debido a su aparición en muchas aplicaciones industriales, energía geotérmica, geofísicas, tecnológica y de ingeniería. Dicho estudio ha sido importante en el diseño de turbinas, en la estimación de vuelo de ruedas giratorias, en misiles y en el modelado de vórtices geofísicos. El disco giratorio es una geometría popular para el estudio de diferentes flujos de fluidos, debido a su simplicidad y al hecho de que representa un problema de dinámica clásica de fluidos. En esta memoria, uno de los problemas tratados, ha sido el estudio de un flujo y transferencia de calor de un fluido conductor de electricidad incompresible sobre un disco giratorio infinito en presencia de un campo magnético.

Los problemas de transferencia de calor y masa combinados con una reacción química son también considerados en esta memoria, debido a su importancia en muchos procesos industriales, principalmente en el sector energético, en la generación, intercambio y el consumo de calor. Estos problemas han recibido una considerable atención en los últimos años, ya que poseen numerosas aplicaciones, como por ejemplo, los procesos de secado, distribución de temperatura y humedad en campos agrícolas y plantaciones frutales o la transferencia de energía en torres de refrigeración húmedas.

El estudio de la generación y/o efectos de absorción de calor en fluidos en movimiento es muy importante en varios problemas de ingeniería, fluidos bajo reacciones químicas endotérmicas y exotérmicas. El estudio realizado está basado en el estudio de un flujo hidromagnético de una superficie permeable vertical en continuo movimiento en presencia de los efectos de generación de absorción de calor, campo magnético y de reacción química de primer orden.

Los principales estudios realizados abordan diferentes temas como son el efecto de reacción química sobre ciertos fluidos, el efecto de reacciones químicas homogéneas sobre fluidos no estacionarios en placas verticales infinitas o fluidos magnetohidrodinámicos que atraviesan superficies permeables verticales en movimiento, en presencia de los efectos de generación/absorción de calor y un campo magnético transversal.

Otro de los problemas tratados en presente documento es el flujo de convección mixta en un canal vertical, se trata en la actualidad de un objetivo de numerosas investigaciones debido a sus posibles aplicaciones en procesos de ingeniería industrial. Entre las aplicaciones más importantes se incluyen la refrigeración de equipos electrónicos, transformadores de calor, reactores refrigerados por un gas nuclear y otros.

Las investigaciones más relevantes tratan el estudio de flujos de convección mixta laminar completamente desarrollados sobre canales verticales de placas paralelas. Además, se ha centrado el interés sobre el estudio de fluidos de convección combinada libre y forzada tanto para flujos desarrollados y completamente desarrollados.

Los flujos de convección sobre fluidos conductores de electricidad con efectos de un campo magnético también constituyen el objetivo de numerosas investigaciones por sus múltiples aplicaciones industriales. Por otro lado, se destaca la investigación sobre los flujos de transferencia en masa y la convección libre de fluidos conductores de electricidad, viscosos e incompresibles sobre una placa vertical en continuo movimiento.

En esta memoria también se ha planteado el estudio de flujos unidireccionales no estacionarios de fluidos no newtonianos mediante el análisis de las soluciones analítica y numérica. El fluido de segundo grado es uno de los modelos utilizados más populares para describir la conducta de los fluidos no newtonianos. Recientemente, se han realizado un número importante de estudios relacionados con los fluidos no newtonianos.

Se han abordado diversos temas entre los que se destaca, el movimiento repentino de una superficie plana en un fluido no newtoniano. Se han obtenido soluciones exactas para una clase de flujos unidireccionales no estacionarios bajo diferentes situaciones de flujo. Otras relevantes investigaciones muestran las soluciones exactas para los flujos de un fluido no-newtoniano entre dos placas paralelas infinitas. Los flujos son generados por oscilaciones de cada una de las placas. Muy relacionado con este estudio, se publicaron algunos trabajos sobre el flujo de un fluido de segundo orden entre placas paralelas giratorias. Posteriormente, se abordó la convección libre de fluidos no newtonianos sobre cuerpos bidimensionales no isotérmicos.



Son destacables los esfuerzos realizados durante los últimos años de investigación, al estudio de los fluidos no newtonianos debido a sus interesantes y fundamentales aplicaciones. Aunque algunos de los problemas lineales estudiados en esta memoria tienen solución analítica, si bien frecuentemente mediante series complicadas de convergencia lenta (particularmente en geometrías cilíndricas y esféricas), la solución presentada por los programas se basa en cálculos numéricos bien contrastados.

La herramienta usada a este fin es el método de simulación por redes (MESIR) que hace uso de la similitud entre el transporte de calor y el de carga eléctrica, si bien no se trata de la conocida analogía termoeléctrica contenida en muchos libros de texto [Incropera y de Witt, 1996], [Chapman, Grigull y Sandner, 1984], [Kakaç y Yener, 1985], [Özisik, 1993], [Lienhard, 1987] [White, Brodkey Hershey, 1988], [Bayazitoglu y Özisik, 1988], [Thomas, 1998], [Mills, 1999] cuyo objetivo, además de orientarse exclusivamente a problemas lineales, es frecuentemente académico o formal, resolviendo problemas en los que la analogía se establece entre partes finitas del medio en el que tiene lugar la transmisión del calor que, a su vez, están conectadas en serie o paralelo con otras partes del mismo u otro medio.

El Método de Simulación por Redes (MESIR) está basado en la teoría de redes de [Peusner, 1987] y constituye la herramienta muy que utilizaremos para abordaremos los problemas de estudio en este proyecto. Es útil tanto para la investigación de modelos como para la obtención de resultados numéricos. Para el desarrollo de este capítulo utilizaremos como bibliografía los resultados de [González Fernández y Alhama, 2002a y 2002b] y el manual PSPICE 6.0.

En los años 60 la analogía termo-eléctrica llegaba a implementar físicamente los circuitos y tuvo un cierto auge pues los cálculos numéricos no se habían desarrollado suficientemente. Sin embargo, tal simulación analógica tuvo pocas dificultades que propiciaron su abandono como herramienta de cálculo; entre ellas, los relativamente elevados márgenes de tolerancia en la fabricación de componentes y su elevado número en problemas complejos. El enorme desarrollo en capacidad y velocidad que experimentaron los equipos informáticos hizo que estos desbancaran sin esfuerzo las técnicas analógicas de simulación. Sin embargo, el desarrollo de numerosas mejoras en los diseños de los simuladores de circuitos eléctricos modernos, hace que el MESIR tenga su protagonismo desde los años 90, hasta la actualidad.

## I.2. Objetivos y desarrollo

El primer objetivo fundamental de esta memoria consiste en el estudio numérico de problemas en los campos de la Mecánica de Fluidos y de la Transferencia de Calor. Se centra la atención en los problemas directamente relacionados con la magneto-hidrodinámica de los fluidos conductores de electricidad en presencia de varios efectos como son campos magnéticos, reacciones químicas y la absorción/generación de calor.

Se estudia la transferencia de masa y de calor inducida por varias superficies en movimiento con velocidad uniforme. Se han considerado el problema estacionario y transitorio aplicado a un tipo de fluido viscoso, incompresible, conductor de electricidad y con la propiedad de absorción/generación de calor. En la mayoría de los casos, el flujo es considerado laminar y bidimensional. También ha sido investigado el flujo de convección mixta laminar hidromagnético en un canal vertical. Se han determinado los campos de velocidades, temperaturas y concentraciones, para diferentes combinaciones de todos los parámetros involucrados en cada proceso físico, analizándose el efecto de los mismos sobre la transferencia de calor y la dinámica de los fluidos.

Un segundo objetivo es **proponer** al MESIR como método de resolución de este tipo de problemas, proporcionando resultados suficientemente precisos (con márgenes de error propios de los campos de la Ingeniería Térmica y la Mecánica de Fluidos). El tercer objetivo es, **analizar** la incidencia en los resultados de diferentes parámetros adimensionales que intervienen en cada uno de los problemas estudiados.

Este trabajo de investigación agrupa una serie de conocimientos que han permitido desarrollar una modelización en red de los fenómenos de transporte en mecánica de fluidos y en transferencia de calor. Este trabajo ha sido estructurado de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 se presentan los conceptos fundamentales del modelo numérico propuesto MESIR, mediante una detallada explicación acerca de la descripción como método numérico, origen y simulación del proceso así como sus ventajas y desventajas.

El Capítulo 3 abarca las distintas aplicaciones del método de simulación en red, mediante varios estudios. En primer lugar, el análisis del flujo magnetohidrodinámico (MHD) a través de una superficie permeable en movimiento en presencia de generación/absorción de calor, efectos de un campo magnético y una reacción química de primer orden.

Se realiza en este problema el estudio del problema transitorio de transferencia de calor y masa de un flujo newtoniano, viscoso, conductor de la electricidad, con efectos de generación/absorción de calor a través de una placa porosa en movimiento en presencia de un campo magnético.

El estudio numérico de flujo y transferencia de calor de un fluido MHD sobre un disco giratorio es también resuelto mediante el método de redes. En esta ocasión, el objetivo de la investigación es el estudio de los efectos del flujo magnetohidrodinámico (MHD) con transferencia de calor sobre un fluido viscoso incompresible en un disco giratorio. Se resuelve el caso no estacionario del fluido conductor, viscoso e incompresible en un disco que está girando con una velocidad angular inversamente proporcional al tiempo.

Excelentes resultados se han obtenido en el estudio del flujo de convección mixta hidromagnético laminar en un canal vertical de placas paralelas en presencia de un campo magnético. El fluido se considera newtoniano, conductor de electricidad y los resultados obtenidos reflejan la incidencia de los parámetros involucrados en el problema.

El estudio realizado acerca de flujos unidireccionales no estacionarios de un fluido no newtoniano, ha supuesto resultados altamente fiables mediante la aplicación de la técnica en red, se ha realizado un estudio transitorio con la influencia de ciertos parámetros.

En el Capítulo 4, se realiza el diseño de los modelos en red para cada uno de los problemas estudiados en esta memoria. En primer lugar, se define el modelo matemático y físico de cada problema en estudio, mediante las ecuaciones diferenciales pertinentes. Dichas ecuaciones son adimensionalizadas junto con las correspondientes condiciones iniciales y de contorno para completar la definición matemática del estudio. Mediante el proceso de discretización mediante la técnica de diferencias finitas, se obtienen las ecuaciones discretizadas, para a continuación aplicar la analogía eléctrica y poder definir los flujos de corrientes y los potenciales eléctricos. Así, es posible diseñar los correspondientes modelos en red para poder determinar los campos de velocidad, temperatura, concentración y presión.

Los resultados obtenidos son detallados en el Capítulo 5. En la mayoría de los casos estudiados, se han obtenido los casos estacionario y transitorio de cada problema, representando gráficamente las principales variables independientes, en función de los parámetros adimensionales más significativos. La exactitud de los resultados logrados ha resultado satisfactoria en la totalidad de problemas estudiados.

Finalmente, en el Capítulo 6 se recogen las conclusiones aportadas en cada estudio realizado.

La descripción de cada uno de los símbolos utilizados a lo largo del texto se recoge al principio del trabajo bajo el epígrafe “Simbología”.

### **I.3. Perspectivas**

En la presente memoria se aborda la resolución de diferentes problemas de fenómenos de transporte, aplicados en los campos de la transferencia calor y masa y la mecánica de fluidos, empleando como herramienta numérica el MESIR, quedando demostrada la potencialidad de dicho método.

En un futuro puede emplearse toda la experiencia acumulada hasta el momento para abordar diversos problemas de cualquier área del ámbito de la ingeniería. Otra acción a abordar en el futuro es el desarrollo de una interface programa-usuario para que el empleo de todos los algoritmos de cálculo diseñados sea de fácil manejo para el usuario.

### **1.4. Referencias**

Alhama, F. y González Fernandez, C.F., “*Network simulation method for solving phase change heat transfer problems with variable thermal properties*”. Heat Mass Transfer 38, 327-339 (2002a)

Alhama, F. y González-Fernández, C.F., “*Transient thermal behaviour of phase-change processes in solid foods with variable thermal properties*”. Journal of Food Engineering, 54(4), 331-336 (2002b)

Bayazitoglu, Y.Y. y Özisik, M.N., “*Elements of heat transfer*”. Chapters 4 and 11, McGraw-Hill, New York (1988)

Brodkey, R.S. y Hershey, H.C., “*Transport phenomena*”. Cap. 11, Mc Graw-Hill, New York, 187 (1988)

Chapman, A.J., "*Heat transfer*". Macmillan Publishing Company, New York 1984

Grigull, U. y Sandner, H., "*Heat conduction*", Springer-Verlag, Berlin (1984)

Incropera, F.P. y De Witt, D.P., "*Fundamentals of heat and mass transfer*", 3rd. ed., Wiley, New York

Kakac, S. y Yener, Y., "*Heat conduction*", 2ª ed. Hemisphere Publishing Corporation, New York (1985)

Lienhard, J. H., "*A heat transfer textbook*", 2º ed. Prentice-Hall, New Jersey (1987)

Mills, A. F., "*Heat Transfer*", Prentice Hall, (1999)

Özisik, M.N., "*Heat conduction*", 2ª ed. John Wiley and Sons, New York (1993)

Peusner, L., "*The Principles of Network Thermodynamics*": Theory and Biophysical Applications (1987)

Pspice 6.0 Microsim Corporation, 20 Fairbanks, Irvine, California 927 18 (1994)

Thomas, L.C., "*Heat transfer*". Chapters 3 and 5, Prentice Hall, New Jersey (1998)

White, F.M., "*Heat and mass transfer*", Addison-Wesley Publishing Company New York (1988)

# CAPÍTULO DOS

## Modelo numérico propuesto

### MÉTODO DE SIMULACIÓN EN RED

---

- 2.1. Fundamentos del método
    - 2.1.1. Monopuertas
  - 2.2. Analogía termo - eléctrica
  - 2.3. Implementación del método
    - 2.3.1. El Mesir y otros métodos numéricos
  - 2.4. Software: Pspice-Orcad
  - 2.5. Simulación, presentación de resultados
  - 2.6. Referencias
-

## Método de Simulación por redes

A continuación, se introducen brevemente los fundamentos del Método de Simulación por Redes (MESIR), herramienta de cálculo para la simulación numérica de los problemas que el programa propuesto es capaz de abordar. El MESIR es un método versátil y potente, muy extendido en la literatura científica, capaz de modelar, en principio, cualquier problema matemático definido (uni y bi-dimensional) mediante un conjunto de ecuaciones matemáticas que rigen el proceso físico y de condiciones de contorno. La aplicación del MESIR precisa de un programa de resolución de circuitos eléctricos. De entre los existentes en el mercado se ha adoptado OrCAD-Pspice en sus diferentes versiones. Un objetivo de este capítulo se dedica a las posibilidades de análisis y simulación de este programa.

### 2.1. Fundamentos del método

El Método de Simulación por Redes (MESIR o NSM, Network Simulation Method) es una técnica para el estudio numérico de diferentes procesos físicos que puedan definirse mediante un conjunto de ecuaciones, o modelo matemático. Partiendo de éstas el procedimiento consiste, en primer lugar, en elaborar un “modelo en red” o circuito eléctrico equivalente al proceso, y en segundo lugar en simular dicho proceso, obteniendo la solución del modelo mediante un programa adecuado de resolución de circuitos eléctricos.

El MESIR, que utiliza la teoría de redes para modelar el proceso físico objeto de estudio, es un método de simulación en tanto que incluye la resolución numérica del modelo en red obtenido mediante la reticulación espacial. Así, las variables flujos y fuerzas características del mismo deben satisfacer las leyes de Kirchhoff y sus relaciones determinarán los elementos de circuito correspondientes. Ahora bien, en cada proceso concreto y una vez elegidas las variables conjugadas, la información de qué elementos de circuito intervienen en el modelo en red y cómo se conectan entre sí, se obtiene del modelo matemático y no de consideraciones de tipo físico acerca del papel que juegan estas variables. Un modelo en red se considera equivalente a un determinado proceso cuando, en su descripción, las ecuaciones del modelo matemático discretizadas, y las ecuaciones del modelo en red para un elemento del volumen o celda elemental, correspondientes a variables análogas, coinciden.

La técnica de elaboración del modelo consiste en reticular el espacio en celdas elementales, de forma que al aplicar a estas reticulaciones las ecuaciones diferenciales, se obtiene un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas que constituyen el punto de partida para la obtención del modelo en red correspondiente a cada celda elemental, y una vez seleccionada la correspondencia entre variables dependientes del problema, variables físicas y variables eléctricas (tensiones e intensidades), permite interpretar los resultados de la simulación. La asociación de celdas, de acuerdo con la geometría del problema, configura el modelo en red correspondiente a todo el medio finito, que es tanto más preciso cuanto mayor sea el número de estas celdas. Las condiciones de contorno e iniciales se incorporan al modelo de manera simple mediante dispositivos eléctricos adecuados (fuentes de tensión y/o corriente, resistencias de valor infinito, ect.).

### 2.1.1. Monopuertas

Los dispositivos o componentes característicos que representan el modelo en red, llamados monopuertas, pueden ser de los siguientes tipos:

a- **Monopuertas pasivas.** En función de la relación expresada entre las variables de flujo de calor y temperatura que obedecen a la ley de corrientes de Kirchhoff, LCK, y a la ley de voltajes de Kirchhoff, LVK, las monopuertas pasivas tienen nombres específicos:

-Monopuerta resistiva. Es un elemento de circuito asociado a una relación entre las derivadas temporales de las variables flujo de calor que circula por una rama  $J$  y la diferencia de temperatura entre los extremos de dicha rama,  $X$ , mediante una función independiente del tiempo que llamaremos resistencia,  $R$ , que puede depender o no del flujo de calor o de la temperatura:  $dX(t)/dt = R dJ(t)/dt$  Por tanto,  $R = dX(t)/dJ(t)$

Una monopuerta resistiva es lineal cuando la relación entre las variables  $X(t)$  y  $J(t)$  lo es, es decir  $X(t) = R J(t)$ ; naturalmente  $R$  es una constante en este caso. Su acción es instantánea, no importa cual sea su estado anterior, en este sentido carecen de memoria. En su analogía física representan efectos disipativos, fricciones, efectos viscosos, energías de reacción, etc., y desde el punto de vista termodinámico son elementos generadores de entropía.



Las monopuertas resistivas no lineales se definen a través de las funciones que las caracterizan,  $J(t) = F_R^{-1}(X)$ . Constituyen, en definitiva, fuentes controladas de corriente. La traducción al modelo en red es una resistencia eléctrica de valor  $R$  ohmios para el caso lineal o una fuente controlada de corriente para el caso no lineal.

*-Monopuertas capacitivas.* Monopuertas capacitivas. Es un elemento de circuito asociado a una relación entre la variable flujo de agua y la derivada temporal de la variable contenido volumétrico de agua en una misma profundidad de suelo, mediante una función no dependiente del tiempo que designaremos como capacidad,  $C$ .

$$J(t) = C \, dX(t)/dt$$

En estas monopuertas se producen algún tipo de almacenamiento, sin pérdidas (no hay disipación energética), y su estado que no cambia instantáneamente, tiene en cuenta todas las operaciones llevadas a cabo en el pasado (se trata de elementos con memoria).

Los procesos de almacenamiento y disipación de energía, bajo la hipótesis de continuidad del medio, se originan en todos los puntos del sistema. Los elementos  $R$  y  $C$  se identifican sin embargo con regiones pequeñas y finitas del medio y sus conexiones con las otras puertas se realizan con enlaces ideales de energía, es decir, con conductores de resistencia nula. El que cada elemento pueda ser caracterizado por un par de variables conjugadas con una única ecuación constitutiva entre ellas es una hipótesis básica en el MESIR que deriva de la teoría de redes.

Físicamente equivalente a decir que es posible elegir un elemento de volumen lo suficientemente pequeño como para que su tiempo de relajación interna sea mucho menor que el del sistema global, pero suficientemente grande como para que las fluctuaciones de las variables que describe el sistema en él sean despreciables.

**b- Monopuertas activas.** En éstas se produce una aportación o extracción de energía al sistema. Entre éstas cabe distinguir:

**Fuentes constantes.** Son monopuertas definidas de acuerdo con las expresiones  $F_j(J) = 0$  y  $F_x(X) = 0$  para fuentes de flujo o fuerza respectivamente. Tienen asignado un sentido (o signo) que indica la dirección en que fluye la energía.

**Fuentes controladas.** Se trata de monopuertas especiales asociadas a relaciones constitutivas entre variables, conjugadas o no, expresadas mediante cualquier función que no contiene explícitamente el tiempo. Se trata de elementos de entrada múltiples con una única salida que corresponde a un flujo o una fuerza que depende funcionalmente de otros flujos o fuerza de distintas ramas o nudos del mismo circuito. En ocasiones las fuentes controladas no aportan energía desde el exterior sino desde un punto u otro del circuito. Estas fuentes van a permitir especificar acoplamientos energéticos de distinto tipo.

$X = E(X_c)$  fuente de tensión controlada por tensión.

$X = H(J_c)$  fuente de tensión controlada por corriente.

$J = G(J_c)$  fuente de corriente controlada por corriente.

$J = F(X_c)$  fuente de corriente controlada por tensión.

E, H, G y F designan funciones arbitrarias de la variable de control (subíndice c). La acción de control puede ser ejercida por una o más variables y las funciones de control pueden ser complejas. Aunque las funciones que especifican el control de estas fuentes cubren un espectro suficientemente grande, en ocasiones es necesario recurrir a la implementación de circuitos auxiliares en el modelo en red para conseguir su equivalencia con el modelo matemático.

En el caso de los procesos de transmisión de calor, la posibilidad de elaborar modelos en red representativos de los mismos, es decir, el hecho de que admitan redes eléctricas equivalentes, supone no sólo la equivalencia matemática sino, también, la equivalencia física entre las variables características de unos y otros procesos (térmicos y eléctricos). La equivalencia física permite, en casos muy concretos, determinar cualitativa y cuantitativamente ciertas magnitudes asociadas a la red que pueden jugar un papel, en la descripción del fenómeno de transporte.

A partir del modelo matemático y siguiendo los planteamientos de lo que se conoce como “Teoría de redes”, se obtiene un grafo equivalente al proceso cuya simulación (solución) se lleva a cabo mediante un adecuado programa de ordenador. Con el método de simulación por redes, el grafo es del tipo eléctrico (un circuito eléctrico) y la simulación se realiza mediante el software de simulación de circuitos. En este trabajo se ha utilizado [Nagel, 1977] y [Vladimirescu, 1994].

El modelo en redes, pues, el formato que se da al modelo matemático para que pueda ser utilizado como entrada (fichero) en un programa de resolución de circuitos eléctricos. Este software es el que resuelve las ecuaciones de la red y proporciona la solución numérica del modelo matemático.

## 2.2. Analogía termo-eléctrica

La analogía termoeléctrica se ha venido utilizando de una u otra forma desde hace varias décadas por numerosos investigadores, bien como una representación alternativa de los problemas térmicos, sin ningún otro objetivo, bien como un método de solución del problema, construyendo los circuitos en el laboratorio y realizando medidas.

La equivalencia general establecida entre las variables térmicas (temperatura,  $T$ , y densidad de flujo de calor,  $j$ ) y las variables eléctricas (potencial eléctrico,  $V$ , y corriente eléctrica,  $J$ ) establece en un caso de transporte general:  $V \leftrightarrow$  variable potencial,  $i \leftrightarrow$  variable flujo. Particularizando en un caso de transmisión de calor, afirma que el potencial eléctrico  $V$  es equivalente a la temperatura y la variable flujo  $i$  es equivalente al flujo de calor.

Si tenemos en cuenta un proceso de Mecánica de fluidos:  $V \leftrightarrow$  velocidad, presión,  $i \leftrightarrow \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial p/\partial x, \partial p/\partial y$ .

Por último, en procesos de transferencia en masa:  $V \leftrightarrow$  concentración,  $i \leftrightarrow \partial c/\partial x, \partial c/\partial y$ .

Con el MESIR se construye un modelo en red, que es un circuito eléctrico equivalente al proceso a analizar, basándose en la similitud formal de las ecuaciones de comportamiento del sistema y las de los circuitos eléctricos, que se resuelve mediante un software adecuado. La respuesta del circuito eléctrico coincide con la del sistema sometido a estudio.

Una amplia y detallada discusión sobre todo esto, con numerosas referencias bibliográficas, se puede ver en [Alhama, 1999]. Es frecuente el uso de analogías eléctricas de procesos simples de transmisión de calor por un interés meramente académico; sencillamente porque las ecuaciones algebraicas del proceso de transporte (no diferenciales) aplicadas a medios finitos son exactamente iguales a las que relacionan la intensidad y la tensión (ley de Ohm) en los componentes pasivos de los circuitos eléctricos.

Otros textos clásicos y modernos no hacen referencia alguna a la analogía termo-eléctrica [Carslaw y Jaeger, 1959]; [Özisik y Gebhart, 1993] o la mencionan muy de pasada [Bennett y Myers, 1982], [Bejan y Taine, 1993].

Textos modernos, específicos de tratamiento numérico, [Patankar, 1980] y [Shih, 1984] no hacen, obviamente, referencia alguna a analogías eléctricas ni mencionan el “network method” de [Oppenheim, 1956].

Las aportaciones reales de interés científico de la analogía termo-eléctrica se reducen a las derivadas de la técnica “resistance-network model”, que mediante el uso exclusivo de resistencias se llega a la construcción de complicados circuitos en los que manipulando el intervalo de tiempo permiten simular problemas no lineales, que incluyen procesos de cambio de fase; [Liebmann, 1954a, 1954b, 1954a y 1956b] estudia la elevación térmica en cuerpos de turbina durante el transitorio y [Bonilla y Strupezewsky, 1965] que estudian el comportamiento térmico de carcasas de reactores ante pruebas de fuego. A ellas hay que añadir las derivadas del MESIR ya mencionadas.

El paréntesis de casi tres décadas que separa estas publicaciones es debido a las dificultades inmensas en la realización práctica de los circuitos para obtener pruebas fiables; en los últimos años los programas de resolución de circuitos disponibles en el mercado han salvado este obstáculo. El método analógico de redes eléctricas, usado a menudo por [Kreith y Romi, 1955], [Otis, 1956] y [Baxter, 1961] ha sido desplazado por la aplicación de métodos numéricos puros a causa de la gran potencialidad de los ordenadores digitales. Los computadores digitales actuales hacen posible la solución de complicados problemas por aplicación directa de métodos numéricos.

De todo ello se puede deducir que el Método de Simulación por Redes es algo sustancialmente diferente a la analogía termo-eléctrica clásica esencialmente por su capacidad de abordar cualquier tipo de problemas lineales o no, acoplados o no, y con condiciones de contorno arbitrarias.

Las aportaciones reales de interés científico de la analogía termo-eléctrica se reducen a las derivadas de la técnica “resistance-network model”, que mediante el uso exclusivo de resistencias se llega a la construcción de complicados circuitos en los que manipulando el intervalo de tiempo permiten simular problemas no lineales, que incluyen procesos de cambio de fase; a ellas hay que añadir las derivadas del MESIR ya mencionadas.

## 2.3. Implementación del método

En el método de simulación por redes, el punto de partida es siempre el modelo matemático del proceso o problema, esto es, el conjunto de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) espacio-temporales cuya discretización de la variable espacial conduce a un conjunto de ecuaciones diferenciales en diferencias finitas del cual se obtiene tanto el modelo en red de la celda elemental, que por acoplamientos entre sí reproduce el modelo en red del medio completo, como los dispositivos o componentes que implementan las condiciones de contorno. Ésta es la única manipulación directa que se hace de las ecuaciones. Se ha representado el algoritmo general de resolución en la figura II.1.

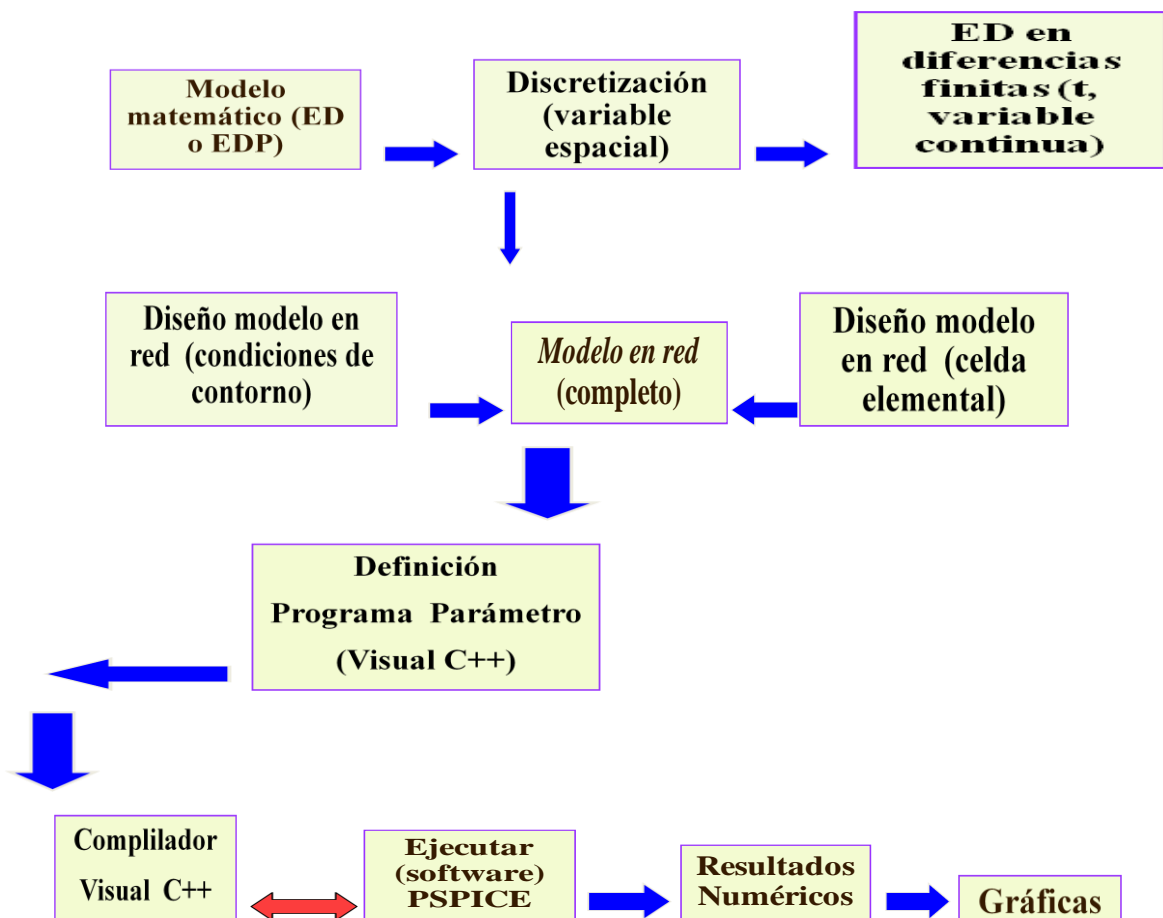


Figura II.1. Diagrama del algoritmo general de resolución

Dado que teoremas de conservación y unicidad de las variables flujo de corriente y potencial eléctrico, respectivamente (leyes de Kirchhoff), se satisfacen en los circuitos, algunas de las ecuaciones que habitualmente forman parte del modelo matemático no necesitan ser consideradas para el diseño del modelo en red. Esto ocurre con la conservación del flujo calorífico en la frontera de distintos medios y la unicidad en el valor de la temperatura en la misma.

Cuando en una ecuación en derivadas parciales se hace una doble reticulación, espacial y temporal, se reemplazan las derivadas parciales por aproximaciones finitas que conducen a un conjunto de ecuaciones algebraicas. Para la solución numérica de éstas se utiliza un software adecuado, generalmente un software de lenguaje propiamente matemático. Este procedimiento es la base de los bien conocidos métodos numéricos de diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos para la solución de las EDP.

Como ya se ha comentado, la elaboración del modelo en red pasa por la reticulación espacial, pero no temporal. Esta es una diferencia esencial entre el MESIR y los métodos numéricos clásicos.

Conviene mencionar que tanto el método de líneas (MOL) [Liskovets, 1965], [Schiesser, 1991] como el método de líneas transversal (TMOL) [Rothe, 1930] y [Rektorys, 1982] siguen estrategias similares a las del MESIR. En el primer caso (MOL), se reticula la variable espacial para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en diferencias finitas, con el tiempo como variable continua, con ayuda de un adecuado software matemático. Mientras, en el segundo caso se reticula la variable tiempo y se mantiene como variable continua la variable espacial, recurriendo también a un software matemático adecuado para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales en diferencias finitas resultante.

### **2. 3.1. El Mesir y otros métodos numéricos**

Ya se ha comentado anteriormente que la elaboración del modelo en red pasa por la reticulación espacial, pero no temporal. Se parte de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuya reticulación espacial las convierte en ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo, que son las del circuito correspondiente a una celda elemental.

La diferencia esencial con los métodos numéricos clásicos, ya se comentado anteriormente, es que en éstos se realiza una reticulación simultánea de las dos variables independientes, espacio y tiempo, mientras que en el MESIR la reticulación es sucesiva; 1ª etapa, una reticulación espacial de la que se obtiene el modelo en red y 2ª etapa, una reticulación temporal, realizada de manera interna por el propio software en el proceso de simulación.

[Alhama y col., 1997] demostraron que la precisión de los resultados de la simulación o error respecto de la solución exacta, en problemas lineales, depende del tamaño de la reticulación, pero son suficientes reticulaciones del orden de 40 a 60 elementos de volumen para reducir estos errores a valores por debajo del 0.5-0.2%. Cuando se trata de problemas fuertemente no lineales, por ejemplo problemas de cambio de fase con frontera móvil, fluidos no-newtonianos, acoplamientos magnéticos entre fluidos, condiciones de contorno complejas, etc., basta en muchos de estos casos, duplicar el tamaño de la retícula para obtener soluciones con errores del mismo orden. Algunas veces, como en cualquier método numérico, no es posible vencer las trabas que implican los errores de convergencia y el método no es capaz de suministrar una solución estable y exacta del problema estudiado.



## 2.4. Software: Pspice-Orcad

Una vez obtenido el modelo en red se procede a su análisis mediante su simulación. Para ello hemos buscado un software adecuado para la solución de circuitos eléctricos tal y como se ha indicado en las referencias del apartado I.4. PSpice ha sido utilizado por otros autores para resolver problemas de otras disciplinas. [Baker y Shortt, 1990] estudiaron el comportamiento de componentes integrados en diferentes rangos de temperatura, [Bello, 1991] lo aplicó a la resolución de problemas mecánicos, Herbert a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, [Hamill, 1993] a problemas estadísticos y relacionados con el caos, etc.

En el proceso de simulación el circuito se presenta al ordenador como un conjunto de ecuaciones matemáticas y éste, mediante procedimientos de análisis numérico, proporciona toda la información solicitada por el investigador para cada tipo de análisis. De esta forma, se obtienen los datos correspondientes a medidas típicas de laboratorio con un margen de error despreciable y sin afectar al circuito; más aún, pueden alterarse las condiciones iniciales, de contorno, y las características térmicas del medio con sencillos cambios en el programa, y el análisis puede aportar datos sobre el comportamiento del circuito más allá de los límites que virtualmente se pueden obtener con medidas reales.

En el proceso de simulación, el modelo en red o circuito equivalente es introducido en el ordenador como un fichero que puede ser simbólico (fichero esquemático con la simbología típica de los circuitos eléctricos) o de texto (cuya elaboración utiliza muy pocas reglas, sencillas y muy intuitivas). El software Pspice asocia a cada uno de los componentes del modelo en red una ecuación (o conjunto de ellas) matemática que relaciona las variables flujo (corriente eléctrica) y fuerza (voltaje).

El resultado de la simulación sería equivalente al obtenido experimentalmente construyendo físicamente el circuito en el laboratorio, pero con un margen de error prácticamente despreciable y pudiendo obtener datos sobre el comportamiento del circuito más allá de los límites que virtualmente se pueden obtener con medidas reales. La simulación está estructurada en cinco subprogramas principales, que interaccionan entre ellos a través de una estructura de datos que es almacenada en un área común del programa. Estos subprogramas son: entrada, organización, análisis, salida y utilidades, de acuerdo con la figura II.2.

El subprograma de entrada lee el archivo de entrada, construye una estructura de datos y chequea el circuito. El de organización, una vez que el programa se ha ejecutado con éxito, construye las estructuras adicionales de datos que serán requeridas en el programa de análisis, parte esencial de la simulación. El subprograma de salida genera y organiza, en la memoria central o en discos, los resultados solicitados por el usuario en forma tabular o gráfica. Las utilidades son aspectos secundarios no relacionados directamente con la simulación; éstas permiten, por ejemplo, almacenar componentes o partes de modelos para ser compartidos por otros usuarios.

El subprograma análisis es la parte importante del programa de simulación. Ejecuta los análisis del circuito requeridos, de acuerdo con las indicaciones del archivo de entrada; la información resultante se almacena en la memoria central o en discos para su posterior procesamiento en los archivos de salida. Mientras que la facilidad de uso del programa reside en los subprogramas de entrada y salida, el programa de análisis, que contiene algoritmos más complejos y consume la fracción mayor del tiempo de computación, determina la eficiencia de la simulación.

En el proceso de simulación, se obtiene la solución numérica de la representación matemática del modelo en red. Esta contiene i) las ecuaciones matemáticas de los diferentes tipos de monpuertas, ii) las ecuaciones correspondientes a las restricciones impuestas por las leyes de Kirchhoff, propias de la teoría de circuitos, que han de satisfacerse entre las ramas y nudos del circuito, y iii) la información particular sobre la interconexión de los diferentes componentes eléctricos de cada modelo.

Toda esta información compone un extenso sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales. El conjunto de tareas que componen el proceso de simulación puede ser agrupado en los siguientes tópicos (o algoritmos de computación): i) formulación de las ecuaciones, ii) solución de ecuaciones lineales, iii) solución de ecuaciones no lineales e iv) integración numérica.

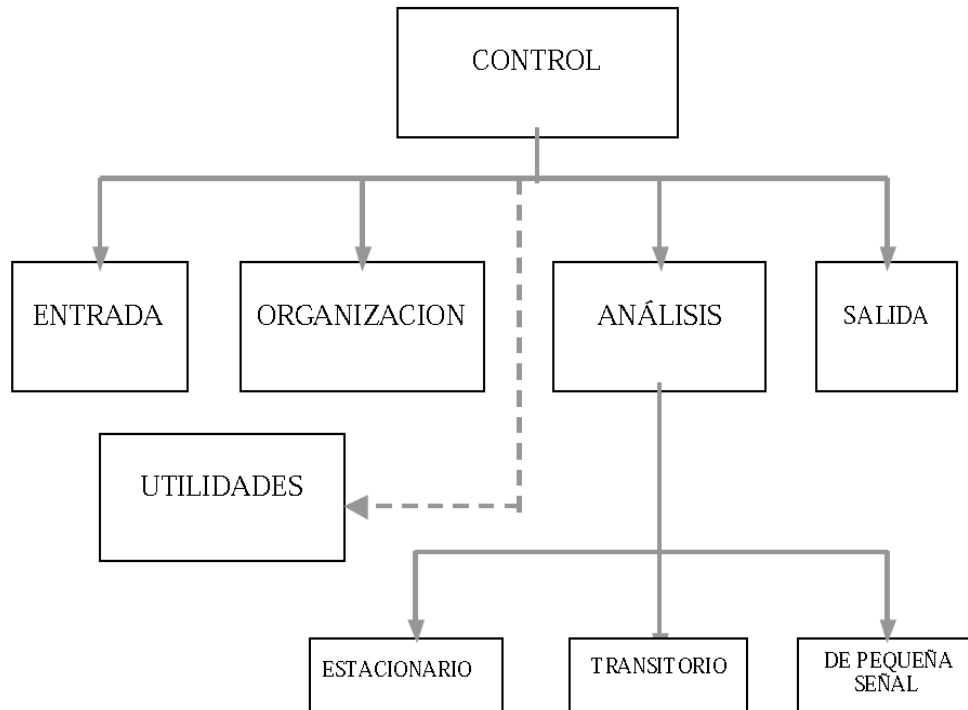


Figura II.2. Diagrama bloques del programa de simulación de circuitos Pspice

Pspice es miembro de la familia de programas de simulación de circuitos Pspice2 [Nagel, 1977] mucho más potente y rápido que sus predecesores, fue desarrollado en la Universidad de California en los años setenta y utiliza algoritmos numéricos más refinados con formatos de entrada-salida idénticos. En el análisis de continua Pspice determina el punto de trabajo, es decir, los valores de polarización de sus componentes en ausencia de excitaciones alternas.

Para este cálculo se elimina la acción de los condensadores y bobinas, los primeros quedan como circuitos abiertos y las bobinas se cortocircuitan. Para el análisis transitorio Pspice parte del intervalo de tiempo  $(0, t)$  solicitado, que puede ser menor o mayor que la duración del transitorio, y facilita los datos en forma de listado o mediante gráficas. Si los resultados se quieren en forma tabular el usuario debe indicar el instante inicial, el final, el paso temporal y el número de variables listadas; si se solicitan en forma gráfica, una sentencia de programa permite organizarlos y almacenarlos para ser utilizados con ese propósito en cada momento.

## 2.5. Simulación, presentación de resultados

El software PSpice se programa en su forma clásica por sentencias, elaborando archivos de texto, en un lenguaje relativamente simple (alternativamente es posible elaborar archivos por medio de la opción gráfica ‘schematics’ seleccionando directamente los elementos de circuito y conectándolos eléctricamente entre sí en forma de esquema eléctrico).

La sintaxis de entrada no requiere especiales disposiciones ordenadas de datos, su estilo puede catalogarse más bien como libre y dispone de una razonable fuente de datos que se adjudican por omisión a los componentes cuando éstos no se especifican en detalle. También realiza un buen número de chequeos para asegurar que el circuito ha sido introducido correctamente y el resto de las sentencias de programa están bien escritas, advirtiendo al programador de posibles errores mediante mensajes previos a la ejecución. En definitiva, un usuario principiante necesita especificar un número mínimo de parámetros y controles de simulación para extraer unos resultados de simulación aceptables.

El resultado de la simulación sería equivalente al obtenido experimentalmente construyendo físicamente el circuito en el laboratorio, pero con un margen de error prácticamente despreciable y pudiendo obtener datos sobre el comportamiento del circuito más allá de los límites que virtualmente se pueden obtener con medidas reales. Más aún, la simulación permite la “parametrización”, es decir, la modificación controlada mediante rutinas de programación de cualquiera de los parámetros del circuito (que se corresponden por ejemplo a las características térmicas del medio, a los diferentes coeficientes o parámetros del proceso, a las condiciones de contorno, etc.). De esta forma se puede observar las tendencias en la respuesta ante variaciones de cualquier parámetro y determinar valores de comportamientos límite; todo ello sin alterar el modelo en red.

El conjunto de tareas que componen el proceso de simulación puede ser agrupado en los siguientes tópicos (o algoritmos de computación),

- a) Formulación de ecuaciones
- b) Solución de ecuaciones lineales
- c) Solución de ecuaciones no lineales
- d) Integración numérica

El uso extendido de Pspice da fe de su capacidad para el tratamiento de una extensa variedad de problemas en simulación de circuitos, resolviendo:

- a) Respuesta en corriente continua
- b) Respuesta transitoria y análisis de Fourier en el dominio de la frecuencia
- c) Análisis de pequeña señal en corriente alterna y distorsión

Los algoritmos utilizados en Pspice, que se documenta en la tesis de [Nagel, 1977] son el resultado de implementaciones, modificaciones y comparaciones cuidadosas de los métodos numéricos existentes en el contexto especial de la simulación especial de circuitos. El objeto de la tesis es seleccionar los métodos de simulación de circuitos más exactos y eficaces, con una mínima interacción por parte del usuario. La síntesis de entrada no requiere especiales disposiciones ordenadas de datos, su estilo puede catalogarse más bien como libre y dispone de una razonable fuente de datos que se adjudican por omisión a los componentes cuando estos no se especifican en detalle. También realiza un buen número de chequeos para asegurar que el circuito ha sido introducido correctamente y que el resto de las sentencias de programa están bien escritas, advirtiendo al programador de posibles errores mediante mensajes previos a la ejecución.

En definitiva, un usuario principalmente necesita especificar un número mínimo de parámetros y controles de simulación para extraer unos resultados de simulación aceptables. El programa se estructura como un listado que contiene todos los componentes eléctricos del circuito (aunque existe la posibilidad de organizar el programa mediante subcircuitos), resistencias, condensadores, fuentes, interruptores, etc., que se introducen uno a uno indicando el nombre, valor, nudos de conexión y otros parámetros característicos.

La familiaridad con el uso y comprensión de la teoría de circuitos eléctricos es una ventaja apreciable, sin duda, a la hora de diseñar el modelo en red, o dicho de otra forma, una formación escasa en el campo de la teoría de circuitos puede dar lugar a alguna dificultad para el programador. Sin embargo, y particularmente en el caso de problemas lineales, este tipo de dificultades es fácilmente subsanable ya que son muy pocos los componentes que contienen estos circuitos.

Para problemas no lineales también son pocos los componentes que entran en juego (un problema fuertemente no lineal como el cambio de fase, por ejemplo, requiere tan solo el concurso de seis componentes en el modelo de la celda elemental); ello es debido a que la mayor parte de las no linealidades se implementan por medio de las llamadas fuentes controladas de las que existen 4 tipos diferentes que cubren todo el espectro de necesidades. En definitiva, unos cuantos ejemplos podrían ser suficientes para resolver la mayor parte de los problemas que surgen en la fase de elaboración del modelo.

*Entre las ventajas del MESIR podemos citar:*

- La única manipulación matemática que se requiere es la conversión de las ecuaciones en derivadas parciales del modelo en ecuaciones diferenciales en diferencias finitas para la variable espacial.
- El tiempo permanece como variable continua. En este sentido no es necesario el uso del software matemático (común en la mayor parte los métodos numéricos) que se requiere para la resolución del conjunto de ecuaciones algebraicas obtenidas de las ecuaciones en diferencias finitas.
- No es preciso ocuparse de los problemas de convergencia. Pspice asigna automáticamente valores al intervalo de tiempo de simulación,  $\Delta t$ , derivados del compromiso entre el error y el tiempo de computación.
- Los componentes eléctricos del modelo permiten en cierto modelo una visualización directa del proceso de transmisión de calor, permitiendo el acceso a ciertas magnitudes de interés tales como energía acumulada, diferencias de temperatura entre dos puntos cualesquiera, etc.
- La implementación de componentes o circuitos auxiliares permite también obtener magnitudes no directas tales como calores totales (o integrados).
- Pspice dispone de un programa llamado Probe con gran número de opciones que da acceso directo a los resultados de la simulación y los representa en forma gráfica.
- Los tiempos de computación para tipos de problemas idénticos son comparables a los de otras técnicas numéricas comunes.

- Las amplias librerías de dispositivos eléctricos que dispone Pspice permite simular en la práctica cualquier tipo de proceso, lineal o no lineal, por complejo que sea.

*Entre los principales inconvenientes podemos destacar:*

- El diseño del modelo en red requiere de conceptos sobre materia de teoría de circuitos.
- Para algunos problemas específicos es muy complicado obtener el modelo en red, y/o modelizar las condiciones de contorno.
- Cuando el número de celdas es muy alto, el tiempo de computación se incrementa. Además podemos tener problemas de convergencia (en problemas 3D).
- Al realizar Pspice de manera interna la integración espacial, no es posible modificar el esquema numérico ni resolver posibles problemas de convergencia.
- Pspice no permite la visualización de los resultados durante la simulación.

Podemos concluir diciendo:

*El MESIR es un método numérico que se aprovecha de los importantísimos avances en el campo de la resolución numérica de problemas eléctricos (el software es muy potente para la resolución de este tipo de problemas), para resolver otro tipo de problemas numéricos, en los campos de la transmisión de calor, la transferencia de masa, y la mecánica de fluidos, etc.*

## 2.6. Referencias

Alhama, F., “*Estudio de respuestas térmicas transitorias en procesos no lineales de transmisión de calor mediante el método de simulación por redes*”. Tesis doctoral, Universidad de Murcia (1999)

Alhama, F., López-Sánchez, J.F. y González-Fernández, C.F., “*Heat conduction through a multilayered wall with variable boundary conditions*”. Energy 22, 797-803 (1997)

Baker, W.E. y Shortt, D.J., “*Integrated electrical/thermal component modeling*”. Naval Research Laboratory, Washington (1990)

Baxter, D.C., "*The fusion times of slabs and cylinders*", American Society of Magazine Editors 61-WA (1961)

Bejan, A., "*Heat transfer*", John Wiley and Sons, New York (1993)

Bello, V.G., "*Electrical models of mechanical units widens simulator's scope.*" Electronics Design News, March (1991)

Bennett, C.O. y Myers, J.E., "*Momentum, heat and mass transfer*". McGraw-Hill International Editions, Singapore (1982)

Bonilla, C.F y Strupczewsky, A.L., "An electric analogy computer for nuclear fuel shipping cask fire tests", Nuclear Structural Engineering 2, 40-47 (1965)

Carslaw, H. S. y Jaeger, J.C., "*Conduction of heat in solids*", 2<sup>a</sup> ed., Oxford Science Publications (1959)

Gebhart, B., "*Heat conduction and mass diffusion*", McGraw-Hill Book College, Singapore 170 (1993)

Hamill, D.C., "*Learning about chaotic circuits with Pspice*", Transactions on education 36, 28-35 (1993)

Herbert, D.B., "*Simulations differential equations with Pspice 2*". Circuits and devices 8, 11-14 (1992)

Kreith, F.Y. y Romie, F.E., "*A study of the thermal diffusion equation with boundary condition corresponding to solidification or melting of materials initially at the fusion temperature*", Proceedings of the Physical Society 68, 277-291 (1955)

Liebmann, G., "A new electrical analog method for the solution of transient heat conduction problems". Transactions of the Asme 78, 655 - 665 (1956a)

Liebmann, G., "*Note on the resistance network analogue solution of field problems of spherical symmetry*", British Journal of Applied Physics 5, 412 (1954 b)



- Liebmann, G., “*Resistance-network analogues with unequal meshes or subdivides meshes*”, British Journal of Applied Physic 5, 362 - 266 (1954a)
- Liebmann, G., “*Solution of transient heat-transfer problems by the resistance-network analog*” method. Transactions of The ASME 78, 1267 - 1272 (1956b)
- Liskovets, O.A., “*The method of lines (Review)*”, Differential equations 1, 1308-1323 (1965)
- Nagel, L. W., “*SPICE (Simulation program with integrated circuit emphasis)*”. University of California, Electronics Res. Lab., ERL-M380, Berkeley, CA (1977)
- Oppenheim, A. K., “*Radiation analysis by the network Method*”. Transactions of The Asme 78, 725 (1956)
- Otis, D.R., “*Solving the melting problem using the electric analog to heat conduction*”, Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University (1956)
- Patankar, S.V., “*Numerical heat transfer and fluid flow*”, Hemisphere Publishing Corporation, New York (1980)
- Rektorys, K., “*The method of discretization in time for partial differential equations*”, Reidel Publishers Dordrecht The Netherlands (1982)
- Rothe, E., “*Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben*”, Mathematische Annalen 102, 650-660 (1930)
- Schiesser, W.E., “*The numerical method of lines. Integration of partial differential equations*”, Academic Press, (1991)
- Shih, T.M., “*Numerical heat transfer*”. Hemisphere Publishing Corporation, New York (1984)
- Taine, J. y Petit, J.P., “*Heat transfer*”. Prentice Hall International, New York (1993)
- Vladimirescu, A., “*The spice book*”, Journal Wiley and Sons, New York (1994)

# CAPÍTULO TRES

## Escenarios de aplicación

---

### 3.1. Introducción

### 3.2. Estudio de un fluido magnetohidrodinámico y transferencia de calor sobre un disco giratorio

#### 3.2.1. Referencias

### 3.3. Estudio de los efectos de generación/absorción de calor y reacción química sobre flujos hidromagnéticos en una placa permeable vertical en movimiento

#### 3.3.1. Referencias

### 3.4. Estudio del flujo de calor por convección mixta de un fluido hidromagnético laminar en un canal vertical de placas paralelas

#### 3.4.1. Referencias

### 3.5. Flujos unidireccionales no estacionarios de un fluido de segundo grado no-newtoniano

#### 3.5.1. Referencias

### 3.6 Estudio de los efectos de absorción de radiación y reacción química sobre convección libre magnetohidrodinámica a través de un medio poroso

#### 3.6.1. Referencias

---

### 3.1. Introducción

Se destacan en este apartado, los casos investigados y donde se ha aplicado la técnica numérica descrita en el capítulo anterior, MESIR. Este método numérico ha sido aplicado con éxito a diversos problemas de fenómenos relacionados con la mecánica de fluidos y transferencia de calor.

El flujo inestable y transferencia de calor de un fluido viscoso, incompresible y conductor de electricidad sobre un disco infinito giratorio, es un ejemplo de los múltiples estudios en los que ha resultado notablemente eficaz y precisa la aplicación del método de simulación en red. El estudio de los fluidos conductores de electricidad desempeña un papel importante en varias ramas de geofísica y astrofísica.

Los primeros estudios sobre este asunto, surgieron en el año 1921 con una investigación sobre el flujo viscoso incompresible estacionario sobre un disco giratorio en un ambiente fluido. Este problema es uno de los problemas clásicos de la mecánica de fluidos. La importancia de la transferencia de calor en régimen estacionario ha sido tratada numérica y experimentalmente por numerosos investigadores. Además, se han estudiado y comentado otros artículos relacionados con el efecto del campo magnético sobre el flujo de un disco giratorio.

El MESIR también ha sido aplicado al análisis del flujo magnetohidrodinámico a través de una superficie permeable en movimiento en presencia de generación/absorción de calor, efectos de un campo magnético y una reacción química de primer orden. Sobre este estudio el método ha conseguido resultados numéricos coincidentes satisfactoriamente con los analíticos.

Los aspectos sobre transferencia de calor y el estudio magneto hidrodinámico ha recibido un gran interés en los últimos años. Han sido estudiados sobre diferentes geometrías debido al efecto de los campos magnéticos sobre el flujo y sobre el desempeño de muchos sistemas que usan fluidos conductores de electricidad.

Hemos de destacar que los efectos de absorción o generación de calor en fluidos en movimiento son importantes en varios tipos de problemas físicos. Además, resultan relevantes las continuas investigaciones sobre el efecto de las reacciones químicas sobre determinadas superficies en movimiento.

El estudio del flujo de calor por convección mixta sometido a un campo magnético en capas laminares en canales verticales ha sido además resuelto y analizado por el método presentado en esta memoria.

El flujo de convección mixta en un canal de placas paralelas ha sido el objetivo de previos estudios debido a sus múltiples aplicaciones industriales. Tras estos estudios siguieron otras investigaciones similares relacionadas con la convección libre y forzada. Además de los estudios de los efectos del campo magnético sobre la transferencia de calor de convección.

El siguiente problema estudiado se trata del estudio de los flujos unidireccionales de fluidos no- newtonianos. El método de resolución nos aporta gratificantes resultados con la solución analítica y numérica. Se han abordado con gran interés el estudio de las diversas investigaciones relacionadas con los flujos unidireccionales de un fluido de segundo grado. Así, se pueden citar las soluciones obtenidas para los estudios de flujos unidireccionales de un fluido de segundo grado en casos estacionario y transitorio.

Los temas restantes abordados en esta memoria, también ponen de manifiesto la potencialidad y fiabilidad de la técnica numérica utilizada.

## **3.2. Estudio de un fluido magnetohidrodinámico y transferencia de calor sobre un disco giratorio**

El estudio pionero de un flujo de fluido debido a un disco en rotación lo hizo [Karman, 1921]. En su labor desempeñada, consiguió una formulación del problema introduciendo sus famosas transformaciones que reducen las ecuaciones diferenciales principales del problema a ecuaciones diferenciales ordinarias. Posteriormente [Cochran, 1934] resolvió el problema hidrodinámico estacionario formulado por [Karman, 1921]. [Benton, 1996] mejoró las soluciones obtenidas por [Cochran, 1934] y resolvió el problema transitorio.

Debemos considerar, que el tema de la transferencia de calor de un disco en rotación manteniendo la temperatura constante fue considerado en primer lugar por los investigadores, [Millsaps y Pohlhausen, 1952] para una variedad de números de Prandtl en estado estacionario. El efecto de un campo magnético uniforme aplicado a un fluido conductor sobre un disco que está rotando fue estudiado por [El-Mistikawy y Attia, 1990]. Más tarde, este mismo equipo de investigación obtuvo las soluciones asintóticas del caso estacionario, para diferentes valores del campo magnético. [Attia, 2001], [Takhar, 1968] y [Sparrow y Cess, 1960] plantearon el mismo objetivo que los investigadores anteriores, considerando un ambiente fluido.

La investigación de la rotación de fluidos conductores de electricidad es importante en varias situaciones astrofísicas y geofísicas, por ejemplo en el caso del campo magnético terrestre, la dinámica de rotación, etc. Desde el punto de vista matemático el tema también tiene relevancia, pues como ya se ha destacado, es posible una determinada transformación de las ecuaciones. Por otro lado, el flujo estacionario de un fluido no-newtoniano debido a un disco en rotación con sección uniforme fue considerado por [Mithal, 1961]. Posteriormente, [Attia, 28, 2001] extendió el estudio hasta el caso transitorio con transferencia de calor y obtuvo una solución numérica para las ecuaciones no-lineales la cual resultó válida para el amplio rango de valores del parámetro no-newtoniano.

[Aboul-Hassan y Attia, 2004] estudiaron el flujo hidromagnético estacionario, considerando el efecto de Hall y ofreciendo una solución numérica para las ecuaciones del problema.

Se debe destacar también la labor desempeñada por los investigadores [Ockendon, 1972] y [Kuiken, 1971] que dedicaron su investigación al estudio de la succión uniforme o inyección a través de un disco poroso en rotación sobre el flujo hidrodinámico estacionario inducido por el disco. Más tarde en el año 1972, Ockendon utilizó los métodos asintóticos para determinar el problema para valores menores del parámetro de succión.

Mientras, en el caso de la rotación en el infinito, [Cuijen, 1971] estudió el efecto de la inyección uniforme a través del disco en rotación sobre el flujo inducido por el disco. Tras estas investigaciones, [Tatita, 1998] extendió el problema al caso de un flujo hidromagnético transitorio en presencia de un campo magnético uniforme externo, pero no consideró el efecto Hall. Este último aspecto fue considerado en trabajos posteriores.

El efecto Hall también fue tratado por otros investigadores en el ámbito de la rotación de discos, [Aboul-Hassan y Attia, 2004]. Estos investigadores estudiaron el efecto del flujo magnetohidrodinámico, considerando la velocidad angular uniforme, el campo magnético en dirección perpendicular, además del efecto Hall.

El trabajo realizado por [Maleque y Sattar, 2005] resultó interesante por su interés en el flujo estacionario laminar sobre un disco giratorio poroso. En este estudio se emplearon propiedades variables (densidad, viscosidad y conductividad térmica), junto con el efecto Hall, efecto magnético y el parámetro de succión-inyección sobre el flujo laminar magnetohidrodinámico estacionario de un fluido conductor de electricidad, sobre un disco en rotación con la presencia de un campo magnético uniforme.

Se comprueba por lo tanto que el flujo a través de la rotación de un disco con transferencia de calor, es uno de los problemas clásicos en Mecánica de Fluidos, lo cual tiene un gran valor práctico y teórico. Relacionado con los últimos trabajos de propiedades variables, también se destacan [Zaquerullah y Acroyd, 1979] quienes investigaron el flujo de convección libre sobre un disco rotatorio horizontal. [Anwar y col., 2001] investigaron el flujo transitorio de un fluido viscoso e incompresible, con viscosidad dependiente de la temperatura debido a la rotación de un disco, en presencia de un campo magnético transversal y con transferencia de calor.

[Roger y Lance, 1960] estudiaron el flujo rotacional simétrico de un fluido viscoso en presencia de un disco en rotación infinito. [Wagner, 1948] determinó la transferencia de calor de un disco con temperatura superficial uniforme.

Tras la publicación de estos trabajos, [Ostrach y Thornton, 1958] consideraron el mismo disco isotérmico, ampliando su investigación para un fluido con diferentes valores del número de Prandtl y propiedades físicas variables.

Otros trabajos relevantes con dos discos de rotación pueden ser destacados, tal es el caso de los investigadores: [Hossain y Raman, 1989] quienes trataron el flujo estacionario entre ambos discos y en presencia de un campo magnético transversal. Estos trabajos han considerado la viscosidad del fluido constante.

Aunque es conocido que esta propiedad física podría cambiar significativamente con la temperatura, para predecir la conducta del fluido con exactitud conviene considerar la variación de viscosidad en fluidos incompresibles. [Frusteri y Osalusi, 2007] publicaron un reciente trabajo en donde realizaron un estudio sobre el flujo magnetohidrodinámico (MHD) en un disco en rotación con propiedades variables. Siguieron una línea de trabajo similar a la empleada por investigadores anteriores, considerando el flujo MHD viscoso y conductor de electricidad junto y las propiedades del fluido variables.

Junto a los estudios pioneros sobre el tema de este capítulo, no debemos olvidar la labor de otros autores como [Rogers y Lance, 1960] quienes consiguieron soluciones más exactas que las proporcionadas por el ya comentado autor [Karman, 1921] en el estudio que llevaron a cabo sobre el flujo simétrico rotacional en presencia de un disco infinito. [Owen y Rogers, 1989] trataron también la misma situación en un sistema de rotación integrado por dos discos.

Se demuestra por tanto la enorme relevancia de este tema en muchos aspectos de la ingeniería. Podemos seguir comentando otros resultados destacables. [Sparrow y col, 1971] realizaron una extensión diferente del problema formulado por [Karman, 1921] quienes realizaron la investigación de un fluido newtoniano sobre un disco en rotación. Por otro lado es destacable la investigación de [Kasiviswanathan y Ramachandra Rao, 1987] en la que se estudia un flujo transitorio debido a la rotación de un disco excéntrico y un fluido en el infinito.

[Reddy, 1980] estudió un año antes la transferencia de calor debido a un flujo incompresible entre dos discos porosos paralelos e infinitos, suponiendo una velocidad angular moderada y resolviendo las ecuaciones del modelo mediante un método numérico particular. Otros artículos más recientes han demostrado el interés sobre este tema, en concreto sobre sus aplicaciones. [Yoong y col., 2007] investigaron el flujo y transferencia de calor a través de un disco en rotación en una superficie rugosa.

El tema de la aceleración negativa de un disco en rotación poroso en un fluido viscoso fue el objetivo del estudio publicado por [Watson, 1985].

Esta novedosa investigación se centró en un disco en movimiento rotacional desacelerado con una velocidad angular inversamente proporcional al tiempo. Las ecuaciones en estado transitorio de Navier-Stokes son transformadas en ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales, mediante unas transformaciones adecuadas. De esta manera, el autor consiguió representar gráficamente los resultados más relevantes de la investigación, en los que se mostró la influencia de los parámetros más significativos involucrados en el problema.

Otros interesantes trabajos son los siguientes: el realizado por [Dandapat y Ray, 1993] quienes estudiaron el flujo transitorio de una lámina líquida sobre un disco en rotación frío ó caliente. Posteriormente se realizó un estudio experimental, que se centró en el enfriamiento por transpiración de un disco en rotación, realizado por [Costar, 1975].

### 3.2.1. Referencias

Von Karman, T., “*Über laminare and tubulente Reibung*”, Journal of Applied Mathematics and Mechanics 1, 233 – 252 (1921)

Aboul-Hassan, L.A. y Attia, H.A., “*Flow due to a rotating disk with Hall Effect*”, Physics Letters A 228, 286 – 290 (1997)

Aboul Hassan, A.L. y Attia, H.A., “*On Hydromagnetic flow due to a rotating disk.*” Applied Mathematical Modelling 28, 1007 – 1014 (2004)

Anwar Hossain, M.D, Hossain, A. y Wilson, M., “*Unsteady flow of viscous incompressible fluid with temperature dependent viscosity due to a rotating disc in presence of transverse magnetic field and heat transfer*”. International Journal of Heat and Mass Transfer 40, 11 – 20 (2001)

Attia, H.A., “*Effect of Hall current on the unsteady MHD flow due to a rotating disk with uniform suction or injection*”, Applied Mathematical Modelling 25, 1089 – 1098 (2001)



Attia, H.A., “*Transient flow of a conducting fluid with heat transfer due to an infinite rotating disk*”, Fluid Dynamics Research 28, 439 – 448 (2001)

Attia, H.A., “*Unsteady mhd flow near a rotating porous disk with uniform suction or injection*”, Fluid Dynamics Research 23, 283 – 290 (1998)

Benton, E.R., “*On the flow due to a rotating disk*”, Journal of Fluid Mechanics 24, 781- 800 (1996)

Cochran, W.G., “*The flow due to a rotating disk*”, Physics Letters 30, 365- 375 (1934)

Cosart, W.P., “*Transpiration cooling of a rotating disk: An experimental study*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 18, 433 – 441 (1975)

Ddandapat, B.S. y Ray, P.C., “*Flow of a thin liquid film over a cold hot rotating disk*”, International Journal of Non-linear Mechanics 28, 1993 489 – 501 (1993)

El-Mistikawy, T.M.A. y Attia, H.A., “*The rotating disk flow in the presence of strong magnetic field*”, Journal of Applied Mathematics and Mechanic 3, 1211 – 1122 (1990)

Frusteri, F. y Osalusi, E., “*On MHD slip flow over a rotating porous disk with variable properties*”, International Communications in Heat and Mass Transfer 34, 492 – 501 (2007)

Hossain, M.A. y Rahman, A.F.M.A., “*On the steady flow between two porous rotating discs in presence of transverse magnetic field*”, Journal of Applied Mathematics and Mechanics 15, 187 – 194 (1989)

Kasiviswanathan, S.R. y Ramanchandra Rao, A., “*An unsteady flow due to eccentrically rotating porous disk and a fluid at infinity*”, Journal of Applied Mathematics and Mechanics 25, 1419 – 425 (1987)

Kuiken, H.K., “*The effect of normal blowing on the flow near a rotating disk of infinite extent*”, Journal of Fluid Mechanics 47, 784 – 798 (1971)

Maleque, A.K. y Sattar, A.M., “*Steady laminar convective flow with variable properties due to a porous rotating disk*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 127 2005 1406 - 1409

Millsaps, K.M. y Pohlhausen, K., “*Heat transfer by laminar flow from a rotating disk*”, Journal of the Aeronautical Sciences 19, 120 – 136 (1952)

Mithal, K.G., “*On the effects of uniform high suction on the steady flow of a non-Newtonian liquid due to rotating disk*”, International Communications in Heat and Mass Transfer 14, 403 – 410 (1961)

Ockendon, H., “*Asymptotic solution for steady flow above an infinite rotating disk with suction*”, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics 25, 291 – 301 (1972)

Ostrach, S. y Thornton, P.R., “*Compressible laminar flow and heat transfer about a rotating isothermal” disc*”, The National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note 4320 1-18 (1958)

Owen, J.M. y Rogers, R.H., “*Flow and heat transfer in rotating-disk system*”, Rotor-Stator System. Editorial John Wiley and Sons, New York, NY, USA 93 – 124 (1989)

Reddy, K.G., “*Heat Transfer due to the flow between two moderately rotating porous disk*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 78, 277- 280 (1980)

Rogers, M.G. y Lance, G.N., “*The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in presence of infinite rotating disk*”, Journal of Fluid Mechanics 7, 617 – 631 (1960)

Sparrow, E.M., Beaver, G.S. y Hung, L.Y., “*Flow about a porous surface rotating disk*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 14, 993 – 996 (1971)

Sparrow, E.M. y Cess, R.D., “*Magnetohydrodynamic Flow and Heat Transfer about a Rotating Disk*”, Journal of Heat Transfer 82, 87 – 90 (1960)

Takhar, H.S., “*Free convection from a flat plate*”, Journal of Fluid Mechanics 84, 9 (1968)

Von Karman, Th., “*Über laminare and turbulente Reibung*”, Journal of Applied Mathematics and Mechanics 1, 1921 233 – 252 (1921)

Wagner, C., “*Heat transfer from a heated disc to ambient air*”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 19, 837 – 841 (1948)

Watson, L.T., “*Deceleration of a porous rotating disk in a viscous fluid*”, *International Journal of Engineering Science* 23, 131- 137 (1985)

Yoon, M. S., Hyun, J. M. y Park, J. Flow and heat transfer over a rotating disk with surface roughness. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 28 2007 262 – 267.

Zakerullah, M. y Ackroyd, J.A.D., “*Free convection above a horizontal circular disc for variable fluid properties*”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 30, 427 – 438 (1979)

### **3.3. Estudio de los efectos de generación/absorción de calor y reacción química sobre flujos hidromagnéticos en una placa permeable vertical en movimiento**

El problema del movimiento de un fluido con transferencia de calor inducido por una superficie en movimiento con velocidad uniforme o no uniforme en un ambiente fluido ha sido objetivo de numerosas investigaciones en procesos industriales. Se han llevado a cabo numerosas investigaciones anteriores relevantes. Se destaca en primer lugar [Sakiadis, 1961] cuyo estudio se centró en el flujo inducido por una superficie en movimiento con velocidad constante en ambiente fluido.

El problema de la transferencia de calor fue considerado teóricamente por [Tsoy y col., 1967] con [Erickson y col., 1966]. Posteriormente [Griffin y Throne, 1967] resolvieron el problema de manera experimental. [Crane, 1979] investigó el mismo problema que [Sakiadis, 1961], pero supuso que la velocidad de la superficie dependía de la distancia axial.

La magneto hidrodinámica de los fluidos que conducen electricidad en presencia de un campo magnético es un tema presente en muchos problemas de geofísica y astrofísica. El interés se ha centrado en tratar los aspectos de transferencia de calor y flujo magneto hidrodinámico en varias geometrías debido al efecto de los campos magnéticos sobre el flujo de control y sobre la ejecución de muchos sistemas que usan fluidos de conducción eléctrica tales como metales líquidos, agua mezclada con ácido y otros.

En relación a este tema, se pueden citar los trabajos realizados por [Chakrabarti y Grupta, 1979] quienes consideraron transferencia de calor y flujo hidromagnético sobre una extensa placa. Autores como [Vajravelu y Hadjinicolaou, 1997] también publicaron algunos trabajos relacionados con la convección de calor en fluidos que conducen electricidad sobre una superficie en movimiento.

[Vajravelu, 1986] asumió la aproximación de Boussinesq para obtener soluciones exactas al problema de transferencia de calor de convección natural laminar en una superficie en continuo movimiento. Posteriormente se interesó también por el estudio de la convección hidromagnética de una superficie en movimiento.

En esta investigación además de la aproximación de Boussinesq, se analizaron factores como la disipación viscosa y la absorción o generación de calor interno, el cual desempeña un papel importante cuando la diferencia de temperatura entre la superficie y el ambiente del fluido es considerable. El análisis del campo de temperatura según lo modificado por la generación-absorción de calor, es importante en varios problemas físicos tales como en aquellos donde una reacción química se lleva a cabo y también en problemas relacionados con fluidos en disociación.

El índice volumétrico de la generación de calor se asume constante ó como una función de variables espaciales, mientras que otros estudios han considerado directamente el calentamiento por fricción y el efecto de expansión según se puede comprobar en los trabajos publicados por [Madejski, 1963], [Sparrow y Cess, 1961], donde el flujo fue estacionario, existía una transferencia de calor, y se consideró una generación-absorción de calor volumétrico dependiente de la temperatura. [Topper, 1962] analizó el flujo del pistón en tubos de sección circular cuando el índice de la generación de calor depende linealmente de la temperatura local.

[Foraboschi y Federico, 1964] asumieron el índice volumétrico de la generación de calor del tipo:  $Q = Q_0 (T - T_0)$  cuando  $T \geq T_0$  y  $Q = 0$  cuando  $T < T_0$  (siendo  $T_0$  la temperatura inicial y  $Q_0$  es el calor inicial, en su estudio de los resultados de temperatura en el estado estacionario para el flujo, lineal, parabólico y de pistón en tubos circulares. La relación anterior según lo explicado por los autores, es válida como una aproximación del índice de algún proceso exotérmico que se incrementa con la temperatura y que parte de la temperatura inicial  $T_0$ .

Cuando las temperaturas de entrada no resultaban ser inferiores a la temperatura inicial  $T_0$ , empleaban  $Q = Q_0 (T - T_0)$  y estudiaron su efecto sobre la transferencia de calor en el flujo laminar de los fluidos generadores de calor no-newtonianos. Por otro lado, también se debe destacar la labor realizada por [Mollen, 1976] quien estudió el efecto de las fuentes de calor dependientes de la temperatura de la forma:  $Q_0 \propto (a + bT)^{-1}$ , como ocurre en un calentamiento eléctrico.

En todas estas investigaciones se ha de destacar la relevancia de los efectos de la absorción generación de calor sobre fluidos en movimiento para diversos procesos de la ingeniería química como son las reacciones químicas endotérmicas y exotérmicas. El orden de una reacción química depende de varios factores. Una de las reacciones químicas más simples es la reacción de primer orden en la que el índice de reacción es directamente proporcional a la concentración de especie.

Existe un estudio reciente realizado por [Muthucumaraswamy, 2002] quien estudió el efecto de una reacción química sobre una gran superficie vertical isotérmica en movimiento. Estudió los resultados de concentración y velocidad para diferentes parámetros como el número de Schmidt, número de Prandtl y el parámetro de reacción química. En el análisis de datos realizados observó que tanto la velocidad como concentración se incrementaban durante la reacción generativa, mientras que ambas disminuían durante la reacción destructiva.

Las reacciones químicas pueden ser codificadas mediante procesos homogéneos y heterogéneos dependiendo del momento en el que ocurran en la interfase. Una reacción química es de primer orden si el índice de reacción es directamente proporcional a la concentración. En muchos procesos de ingeniería química se lleva a cabo la reacción entre la masa de calor y el fluido en el que se encuentra en movimiento la placa. Este proceso se realiza en numerosas aplicaciones industriales.

En relación a este tema se pueden destacar diversas investigaciones realizadas analizando el efecto de calentamiento y enfriamiento sobre la superficie en movimiento. Se destaca la labor de [Das y col., 1994], quienes estudiaron el efecto de una reacción química de primer orden homogéneo sobre una placa vertical infinita con flujo de calor constante.

En este caso, la técnica de resolución numérica empleada es la conocida técnica de transformación de Laplace. Se debe destacar que actualmente no existen suficientes estudios relacionados con la solución teórica de un flujo hidrodinámico sobre una superficie vertical isotérmica en movimiento con sección uniforme y difusión de una especie reactiva químicamente. Tan sólo se puede encontrar la investigación llevada a cabo por [Schlichting, 1968].

Existe otro reciente estudio por [Ibrihem y col., 2005], quienes publicaron soluciones analíticas para la transferencia en masa y calor mediante un flujo de convección libre magnetohidrodinámico transitorio, sobre una superficie permeable vertical en movimiento con velocidad constante y en presencia de una radiación y una reacción química de primer orden homogénea. Se destaca además, el problema de un campo magnético que actúa perpendicularmente a la superficie porosa, la cual absorbe el fluido con una velocidad de sección que varía con el tiempo.

Los problemas de transferencia en masa y calor combinados con reacciones químicas han recibido mucha atención en los últimos años, debido a importantes aplicaciones industriales como pueden ser los métodos de generación de poder eléctrico en los que la energía eléctrica se extrae directamente de una superficie en movimiento. El interés se centra particularmente en los casos en los que la difusión y la reacción química ocurren a la vez. Cuando la difusión es más rápida que la reacción química entonces únicamente influyen los factores químicos sobre el índice de reacción química. Por otro lado, cuando la difusión es más lenta que la reacción química, la difusión y la cinética interactúan para producir efectos diferentes.

Como ejemplo de algunas de estas aplicaciones, se pueden encontrar en centrales nucleares, turbinas de gas, misiles, satélites, e incluso en vehículos espaciales. Se destacan interesantes investigaciones como la realizada por [Makinde y Olanrewajub, 2011] en la cual se refleja la interacción del flujo de convección libre transitorio con la radiación térmica que emite un fluido en una superficie permeable vertical en movimiento. Posteriormente [Raptis y Perdikis, 2002] estudiaron el flujo de convección transitorio del agua sobre una superficie vertical porosa en movimiento.

Otros estudios que reflejan el efecto de una reacción química de primer orden sobre un flujo bidimensional que atraviesa una superficie en presencia de un campo magnético, son los realizados por [Anjalidevi y Kandasamy, 1999] quienes analizaron el efecto de una reacción química sobre un flujo a lo largo de una placa horizontal infinita en presencia de transferencia de calor. Un estudio similar es el que realizaron los investigadores [Muthucumaraswamy y Ganesan, 2001, 2002] mediante el cual, trataron el efecto de la reacción química de un flujo transitorio a través de una placa vertical semi-infinita sometida a un flujo de calor uniforme.

Es conocida la gran importancia de la generación/absorción de calor en varios problemas de la física. Algunos modelos matemáticos pueden explicar la respuesta física en determinados problemas. Se pueden citar el estudio analizado por [Crepeau y Clarksean, 1997] sobre flujo y transferencia de calor a través de una placa vertical, empleando un valor de generación/absorción de calor, espacio-dependiente, exponencialmente decreciente. En la misma línea de investigación, [Abd El-Aziz, 2007] estudió el efecto de corrientes Hall, con una generación/absorción de calor dependiente de la temperatura, sobre un flujo de convección libre magnetohidrodinámico en una placa vertical semi-infinita.

Recientemente se puede destacar la labor de investigación realizada por [Abo-Eldahad y Abd El-Aziz, 2004] mediante la cual publicaron un artículo en el que estudiaron el flujo y transferencia de calor de un fluido micropolar situado en un medio poroso en presencia de generación ó absorción de calor.

También se dedicaron a analizar el efecto de transferencia de calor hidromagnético mediante convección mixta a través de una superficie inclinada y con el efecto de generación/absorción de calor, la cual en este caso es una función del espacio y la temperatura.

[Chamkha, 2003] se interesó por la transferencia en masa y calor hidromagnético mediante convección natural, a través de una placa inclinada con los efectos de absorción /generación de calor y un campo magnético. Un estudio paramétrico de todos los parámetros involucrados así como un conjunto gráfico de resultados, concluyeron su interesante investigación.

### 3.3.1. Referencias

Abd El-Aziz, M., “*Temperature dependent viscosity and thermal conductivity effects on combined heat and mass transfer in MHD three-dimensional flows over a stretching surface with Ohmic heating*”, *Meccanica* 42, 375 – 86 (2007)

Abo-Eldahab, E.M. y Abd El-Aziz, M., “*Hall current and Ohmic heating effects on mixed convection boundary layer flow of a micropolar fluid from a rotating cone with power-law variation in surface temperature*”, *International Communications in heat and mass transfer* 31, 751 – 62 (2004)

Anjalidevi, S.P. y Kandasamy, R., “*Effects of chemical reaction heat and mass transfer on laminar flow along a semi finite horizontal plate*”, *Heat Mass Transfer* 35, 465-467 (1999)

Chakrabarti, A. y Gupta, A.S., “*Hydromagnetic flow and heat transfer over a stretching sheet*”, *Quarterly of Applied Mathematics* 37, 73 – 78 (1979)

Chamkha, A.J., “*MHD Flow of a uniformly stretched vertical permeable surface in the presence of heat generation/absorption and a chemical reaction*”, *International Communications in heat and mass transfer* 30, 413- 422 (2003)

Crane, L.J. y Amgiew, Z., “*Flow past a stretching plane*”, *Journal of Mathematical Physics* 21, 645 – 647 (1979)



Crepeau, J.C. y Clarksean, R., “*Similarity solutions of natural convection with internal heat generation*”, American Society of Magazine Editors, Journal and Heat Transfer 119, 183 - 185 (1997)

Das, U.N., Deka, R.K. y Soundalgekar, M., “*Effects of mass transfer on flow past an impulsively started infinite vertical plate with constant heat flux and chemical reaction*”, Forsch Ingenieurwes 60, 284 – 293 (1994)

Erickson, L.E., Fan, L.T. y Fox, V.G., “*Heat and mass transfer on a moving continuous at plate with suction or injection*”, Journal of Industrial and Engineering Chemistry 5, 19 – 25 (1966)

Foraboschi, F.P. y Federico, I.D., “*Heat transfer in laminar flow of non-Newtonian heat generating fluids*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 7, 315 – 323 (1964)

Griffin, J.F. y Throne, J.L., “*On thermal boundary layer growth on continuous moving belts*”, American Institute of Chemical Engineers Journal 13, 1210 – 1211 (1967)

Ibrihem, F.S., Hassanien, I.A. y Bakr, A.A., “*Nonclassical thermal effects in stokes’ second problem for micropolar fluids*”, Journal of Applied Mathematics and Mechanics 72, 468 – 474 (2005)

Madejski, J., “*Temperature distribution in channel flow with friction*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 10, 49 – 51 (1963)

Makinde, O.D. y Olanrewajub, P.O., “*Unsteady mixed convection with Soret y Dufour effects past a porous plate moving through a binary mixture of chemically reacting fluid*”, Chemical Engineering Communications 198, 920 – 938 (2011)

Mollem, D., “*Steady state heat transfer within porous medium with temperature dependent heat generation*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 19, 529 – 547 (1976)

Muthucumaraswamy, R., “*Effects of suction on heat and mass transfer along a moving vertical surface in the presence of chemical reaction*”, Journal Forsch Ingenieurwes 67, 129 – 136 (2002)

Muthucumaraswam, R. y Ganesan, P., “*Effect of the chemical reaction and injection on flow characteristics in an unsteady upward motion of an isothermal plate*”, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics 42, 665–71 (2001)

Muthucumaraswamy, R. y Ganesan, P., “*Diffusion and first-order chemical reaction on impulsively started infinite vertical plate with variable temperature*”, International Journal of Thermal Sciences 41, 475 – 9 (2002)

Raptis, A. y Perdikis, C., “*Free convection flow of water near 4 C past a moving plate*”, Forschung im Ingenieurwesen 67, 206 – 8 (2002)

Sakiadis, B.C., “*Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces: Boundary-layer on a continuous flat surface*”, American Institute of Chemical Engineers Journal 7, 221 – 225 (1961)

Satapathy, S., Bedford, A., Bless, S. y Raptis, A., “*Radiation and free convection flow through a porous medium*”, International Communications in heat and mass transfer 25, 289 – 95 (1998)

Schlichting, H., “*Boundary layer theory*”, 6th New York: McGraw-Hill (1968)

Sparrow, E.M. y Cess, R.D., “*Temperature dependent heat sources sinks in a stagnation point flow*”, Journal of Applied Sciences Research 10, 185 – 197 (1961)

Topper, L., “*Heat transfer in cylinders with heat generation*”, American Institute of Chemical Engineering Journal 12, 653 – 670 (1962)

Tsou, F. K., Sparrow, E.M. y Goldstein, R.J., “*Flow and heat transfer in the boundary layer on a continuous moving surface*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 10, 219 – 235 (1967)

Vajravelu, K., “*Hydromagnetic flow and heat transfer over a continuous moving porous flat surface*”, International Journal Acta Mechanica 64, 179 – 185 (1986)

### **3.4. Estudio del flujo de calor por convección mixta hidromagnética laminar en un canal vertical de placas paralelas**

El flujo de convección mixta en un canal vertical ha sido objetivo de muchas investigaciones en los últimos años debido a sus posibles aplicaciones en muchos procesos industriales. Podemos empezar destacando el estudio realizado por [Tao, 1960] quien analizó el flujo de convección mixta laminar en un canal de placas paralelas vertical con temperatura uniforme en las paredes.

Los investigadores [Aung y Worku, 1986] trabajaron sobre la teoría de convección libre y forzada mediante condiciones reversibles de flujo. Posteriormente, los mismos autores analizaron el flujo de convección en conductos con transferencia de calor.

Una revisión comprensiva de la literatura que trata la convección mixta en flujo interno fue publicada por [Aung, 1987], [Cheng y col., 1990]. Se destaca la investigación de [Hamadah y Wirtz, 1991] con [Ingham y col., 1988] quienes trabajaron con situaciones de flujos reversibles en convección mixta en canales verticales para diferentes condiciones de contorno en la pared.

[Kou y Lu, 1993] analizaron la convección mixta en un canal poroso, discutiendo las situaciones de flujo reversible. El empleo de fluidos conductores de electricidad con la influencia de campos magnéticos ha sido de interés de investigadores como [Sparrow y Cess, 1967], quienes consideraron el efecto del campo magnético sobre la transferencia de calor en procesos de convección libre.

Se destaca la labor de [Raptis y Kafoussias, 1982] quienes analizaron el flujo y la transferencia de calor a través de un medio poroso rodeado por una placa vertical infinita mediante la acción de un campo magnético. [Chamkha, 1998] estudió el caso de un proceso de convección mixta bidimensional estacionario de un fluido que absorbe calor y que además es conductor de electricidad, cerca de un punto de estancamiento sobre una superficie permeable vertical semi-infinita en presencia de un campo magnético.

Un estudio más reciente que aborda el tema de la convección mixta fue estudiado por [Kumari, 1983] quien investigó el flujo de convección mixta laminar no estacionario de un fluido termomicroscópico en un cilindro vertical. [Cho y Ortega, 1993] también investigaron la convección mixta en un canal inclinado con una fuente de calor.

[Anilkumar y Roy, 2004] se interesaron por este tema, tratando el flujo de convección mixta sobre un cono giratorio debido a los efectos combinados de la difusión de masa y térmica. [Cheng, 2009] analizó el interesante problema del flujo de convección mixta magnetohidrodinámica y transferencia de calor de un fluido conductor de electricidad que atraviesa una superficie en presencia de generación/absorción de calor y radiación térmica.

[Abdelkhalek, 2006] centró el objetivo de su investigación en los resultados numéricos para los efectos de la transferencia de masa sobre la convección mixta magnetohidrodinámica laminar bidimensional estacionaria, debido a un flujo que atraviesa una superficie vertical permeable infinita. La convección mixta también fue el objetivo del estudio realizado por [Takhari y col., 1990] quienes se interesaron por el flujo de convección mixta bidimensional estacionario de un fluido a través de una placa permeable vertical caliente.

Se pueden citar otros artículos muy relacionados con los anteriores, concretamente con la convección mixta. [Cheng, 1977] abordó el tema de la convección combinada forzada y libre sobre superficies impermeables inclinadas en medios porosos. [Lai y Kulacki, 1990] completaron el estudio de [Cheng, 1977] y consideraron el flujo de masa lateral sobre superficies inclinadas.

[Barletta, 1998] centró su investigación en la convección combinada libre y forzada con disipación viscosa en un canal vertical. Posteriormente [Barletta y Zanchini, 2001] estudiaron nuevamente la convección mixta con disipación viscosa en un canal inclinado.

Un estudio similar fue realizado por [Salah El-Din, 2002] quien de nuevo abordó la convección mixta laminar completamente desarrollada en un canal vertical de doble paso. Consideró además temperaturas uniformes de la pared con calentamiento asimétrico y simétrico y obtuvo la solución analítica del problema sin considerar la disipación viscosa.

El tema de la convección mixta ha sido el objetivo de otras muchas investigaciones bajo diferentes condiciones. Se pueden destacar otros trabajos relevantes como el publicado por [Cheng y col., 1990] quienes se centraron en la convección mixta en un canal inclinado con una fuente de calor discreta. La convección libre y forzada también fue estudiada en cilindros y esferas en medios porosos. Este estudio fue considerado por [Pop y Ingham, 2001].

La convección mixta de nuevo fue el objetivo de la investigación realizada por [Umavathi y Malashetty, 2005] quienes consideraron además las disipaciones viscosa y óhmica. [Hayat y col., 2008] investigaron el flujo de convección mixta bidimensional estacionario de un fluido micropolar.

Resultan interesantes los estudios experimentales de la transferencia de calor y convección mixta en un canal convergente vertical. [Huang y col., 1995] publicaron un interesante artículo sobre este tema. La convección mixta laminar de aire húmedo en un canal vertical con condensación ó evaporación de pared, fue propuesto por [Hammou y col., 2004].

[Anilkumar y col., 2004] investigaron el flujo de convección mixto inestable sobre un cono en rotación en un fluido giratorio debido a los efectos combinados de la difusión térmica y de masa. Este equipo de investigadores presentó los resultados numéricos para el coeficiente de fricción, número de Nusselt y número de Sherwood. Además realizaron un amplio análisis del efecto de estos parámetros sobre los campos de velocidad, temperatura y concentración.

El problema de flujo de convección mixta en un cono vertical ha atraído la atención de muchos investigadores. Así, se destacan los siguientes trabajos realizados: [Himasekhar y Sarma, 1986] quienes estudiaron la convección combinada laminar de un cono giratorio a un entorno térmicamente estratificado. [Hering y Grosh, 1996] quienes abordaron la convección libre y forzada en un cono giratorio vertical para  $Pr = 0.7$ . [Wang y col., 1990] publicaron un artículo sobre la transferencia de calor combinada por convección de un cono y un disco giratorio para fluidos no newtonianos.

Se han publicado recientemente otros artículos interesantes sobre la convección combinada. El análisis de los flujos de convección mixta dentro de una cavidad cuadrada con un calentamiento uniforme y no uniforme, fue publicado por [Basak y col., 2009]. [Papanicolaou y Jaluria, 1990] se interesaron en la convección mixta de una fuente de calor discreta en un recinto rectangular.

[Hsu y How, 1997] publicaron otro estudio sobre la convección mixta no estacionaria en un recinto parcialmente dividido. El recinto cuenta con una fuente de calor de tamaño finito incrustada en la pared vertical y está parcialmente dividido por un divisor de conductores verticales que sobresalen del suelo.

[Chamkha, 2002] también realizó otra investigación en la cual estudió el flujo de convección combinada en una cavidad vertical considerando los efectos de la absorción/generación de calor y un campo magnético. [Lok y col., 2006] realizaron otra relevante investigación en la cual abordaron la convección combinada no estacionaria de un fluido micropolar cerca de la región del punto de estancamiento en una región vertical.

En este estudio se ha supuesto que la inestabilidad está causada por el movimiento impulsado de la velocidad del flujo libre y por el cambio repentino de la temperatura ambiente. Es evidente que todas las investigaciones citadas, completan la información que actualmente se dispone del tema de este capítulo.

La temática de los fluidos micropolares ha recibido recientemente una atención considerable debido a sus aplicaciones en un número importante de procesos industriales. Un estudio de este tipo de fluidos fue llevado a cabo por [Hassanien y col., 1990], quienes estudiaron la convección libre y forzada en flujos de estancamiento de fluidos micropolares en una superficie no isotérmica.

La investigación de la transferencia de calor por convección mixta en un canal horizontal con una fuente de calor discreta en la pared superior y en el fondo, fue desarrollada por [Dogan y col., 2006]. La convección libre y forzada entre planos paralelos horizontales fue el objetivo del trabajo realizado por [Kennedy y col, 1983].

El uso de la fuente de calor discreta en el estudio de la convección mixta fue también estudiado por [Turkoglu y col., 1995]. [Moukalled y col., 2000] se interesaron en la convección mixta en canales con superficies cóncavas y convexas. En el estudio que realizó, obtuvo resultados sobre la transferencia de calor por convección en canales con una superficie caldeada curva limitada por una superficie adiabática vertical.

[Tao, 1960] realizó un estudio similar a los anteriores, y publicó otro artículo sobre la convección mixta en canales. [Habchi y col., 1986] realizaron una interesante labor estudiando la convección mixta en un canal vertical asimétrico. [Acharaya y col., 1986] trataron también la convección mixta pero en un canal vertical parcialmente bloqueado.

[Narusawa, 1993] se interesó en el análisis numérico de la convección mixta en la región de entrada de un conducto rectangular. [Ozsunar y col., 2001] realizaron el análisis numérico del número de Grashof, número de Reynolds y los efectos de inclinación sobre la transferencia de calor por convección mixta en canales rectangulares. [Dutta y col., 1998] aportaron un nuevo trabajo con el estudio de la transferencia de calor por convección mixta en un canal lateral de dos cuadrados con calefacción.

### 3.4.1. Referencias

Abdelkhalek, M.M., “*The skin friction in the MHD mixed convection stagnation point with mass transfer*”, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 33, 249 – 258 (2006)

Acharaya, S. y Habchi, S., “*Laminar mixed convection in a partially blocked vertical channel*”, *International Journal and Heat Mass Transfer* 29, 1711-1722 (1986)

Anilkumar, D. y Roy, S., “*Unsteady mixed convection flow on a rotating cone in a rotating fluid*”, *Applied Mathematics and Computation* 6, 545 – 561 (2004)

Aung, W., “*Mixed convection in internal flow*”. *Handbook of single phase, Convective Heat Transfer Chapter 15*, (1987)

Aung, W. y Worku, G., “*Developing flow and flow reversal in a vertical channel with asymmetric wall temperatures*”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 108, 299 – 304 (1986)

Barletta, A., “*Laminar mixed convection with viscous dissipation in a vertical channel*”. *International Journal and Heat Mass Transfer* 41, 3501 – 3513 (1998)

Barletta, A. y Zanchini, E., “*Mixed convection with viscous dissipation in an inclined channel with prescribed wall temperatures*”, *International Journal and Heat Mass Transfer* 22, 4267 – 4275 (2001)

Basak, T., Roy, S., Kumar Sharma, P. y Pop, I., “*Analysis of mixed convection flows within a square cavity with uniform and non-uniform heating of bottom wall*”, *International Journal of Thermal Sciences* 48, 891- 912 (2009)

Chamkha, A.J., “*On laminar hydromagnetic mixed convection flow in a vertical channel with symmetric and asymmetric wall heating conditions*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 45, 2509 – 2525 (2002)

Chamkha, A. J., “*Hydromagnetic mixed convection stagnation flow with suction and blowing*”, International Communications in Heat and Mass Transfer 25, 417 – 426 (1998)

Cheng, P., “*Combined free and forced boundary layer flows about inclined surfaces in a porous medium*”, International Journal and Heat Mass Transfer 20, 807 – 814 (1977)

Cheng, C.H., Kou, H.S. y Huang, W.H., “*Flow reversal and heat transfer of fully developed mixed convection in vertical channels*”, Journal of Thermophys and Heat Transfer 4, 375 – 383 (1990)

Chen, C.H., “*Magnetohydrodynamic mixed convection of a power-law fluid past a stretching surface in the presence of thermal radiation and internal heat geration/absorption*”, International Journal of Non-Linear Mechanics 44, 596 – 603 (2009)

Cho, C.Y. y Ortega, A., “*Mixed convection in an inclined channel with a discrete heat source*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 12, 3119 – 3134 (1993)

Dogan, A., Sivrioglu, M. y Baskaya, S., “*Investigation of mixed convection heat transfer in a horizontal channel with discrete heat sources at the top and at the bottom*”, International Journal and Heat Mass Transfer 49, 2652 – 2662 (2006)

Dutta, S., Zhang, X., Khan, J.A. y Bell, D., “*Adverse and favorable mixed convection heat transfer in a two - side heated square channel*”, Experimental Thermal and Fluid Science 18, 314 – 322 (1998)

Habchi, S. y Acharya, S. L., “*Laminar mixed convection in a symmetrically or asymmetrically heated vertical channel*”, Numerical Heat Transfer 9, 605 – 616 (1986)

Hamadah, T.T. y Wirtz, R.A., “*Analysis of laminar fully developed mixed convection in a vertical channel with opposing buoyancy*”, Journal of Heat Transfer 13, 507- 510 (1991)



Hammou, Z.A., Benhamou, B., Galanis, N. y Orfi, J., “*Laminar mixed convection of humid air in a vertical channel with evaporation or condensation at the wall*” 43, 531 – 539 (2004)

Hassanien, I.A. y Gorla, R.S.R., “*Combined forced and free convection in stagnation flows of micropolar fluids over vertical non-isothermal surfaces*”, International Journal of Engineering Science 28, 783 – 792 (1990)

Hayat, T., Abbas, Z. y Javed, T., “*Mixed convection flow of a micropolar fluid over a non-linearly stretching sheet*”, Physics Letters 372, 637 – 647 (2008)

Hering, R.G. y Gros, R.J., “*Laminar combined convection from a rotating cone*”, American Society of Magazine Editors. Journal of Heat Transfer 85, 29 – 34 (1996)

Himasekhar, K. y Sarma, P.K., “*Laminar combined convection from a rotating cone to a thermally stratified environment*”, American Society of Magazine Editors, Journal of Heat Transfer 108, 973 – 976 (1986)

Huang, T.M., Gau, C. y Aung, W., “*Mixed convection flow and heat transfer in a heated vertical convergent channel*”, International Journal and Heat Mass Transfer 38, 2445 – 2456 (1995)

Hsu, T.H., Hsu, P.T. y How, S.P., “*Mixed convection in a partially divided rectangular enclosure*”, Numerical Heat Transfer 3, 655 – 683 (1997)

Ingham, D.B., Keen, D.J. y Heggs, P.J., “*Flows in vertical channels with asymmetric wall temperatures and including situations where reverse flows occur*”, Journal of Heat Transfer 110, 910 – 917 (1988)

Kennedy, K.J. y Zebib, A., “*Combined free and forced convection between horizontal parallel planes: some case studies*”, International Journal and Heat Mass Transfer 26, 417- 474 (1983)

Kou, H. S. y Lu, K. J., “*Combined boundary and inertia effects for fully developed mixed convection in a vertical channel embedded in porous media*”, International Communications in Heat and Mass Transfer 20. 333 – 345 (1993)

Lai, F.C. y Kulacki, K.A., “*The influence of lateral mass flux on mixed convection over inclined plates in saturated porous media*”, International Journal Heat Transfer 112, 515 – 518 (1990)

Lok, Y.Y., Amin, N. y Pop, I., “*Unsteady mixed convection flow of a micropolar fluid near the stagnation point on a vertical surface*”, International Journal of Thermal Sciences 45, 1149 -1157 (2006)

Moukalled, F., Doughan, A. y Acharya, S., “*Parametric study of mixed convection in channels with concave and convex surfaces*”, International Journal and Heat Mass Transfer 43, 1947 – 1963 (2000)

Narusawa, U., “*Numerical analysis of mixed convection at the entrance region of a rectangular duct heated from below*”, International Journal and Heat Mass Transfer 9, 2375 – 2384 (1993)

Ozsunar, A., Baskaya, S. y Sivrioglu, M., “*Numerical analysis of Grashof number, Reynolds number and inclination effects on mixed convection heat transfer in rectangular channels*”, International Communications in Heat and Mass Transfer 28, 985 – 994 (2001)

Papanicolaou, E. y Jaluria, Y., “*Mixed convection from an isolated heat source in a rectangular enclosure*”, Numerical Heat Transfer 18, 427- 461 (1990)

Pop, I. y Ingham, D.B., “*Free and mixed convection from cylinders and spheres in porous media*”. Convective Heat Transfer 491- 531 (2001)

Raptis, A. y Kafoussias, N., “*Heat transfer in flow through a porous medium bounded by an infinite vertical plate under the action of a magnetic field*”. International Journal of Heat and Mass Transfer 6, 241-245 (1982)

Salah El-Din, M.M., “*Effect of viscous dissipation on fully developed laminar mixed convection in a vertical double-passage channel*”, International Journal of Thermal Sciences 41, 253- 259 (2002)

Sparrow, E.M. y Cess, R.D., “*Effect of magnetic field on free convection heat transfer*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 3, 267- 274 (1967)

Takhar, H.S., Soundalgekar, V.M. y Gupta, A.S., “*Mixed convection of an incompressible viscous fluid in a porous medium past a hot vertical plate*”, International Journal of Non-Linear Mechanics 25, 723 – 728 (1990)

Tao, L.N., “*On combined free and forced convection in channels*”, International Journal of Engineering Science 82, 233 – 238 (1960)

Turkoglu, H. y Yucel, N., “*Mixed convection in vertical channels with a discrete heat source*”, International Journal and Heat Mass Transfer 30, 159 – 166 (1995)

Umavathi, J.C. y Malashetty, M.S., “*Magnetohydrodynamic mixed convection in a vertical channel*”, International Journal of Non Linear Mechanics 40, 91 – 101 (2005)

Wang, T.Y. y Kleinstreuer, C., “*Similarity solutions of combined convection heat transfer from a rotating cone or disk to non-newtonian fluids*”, ASME Journal of Heat Transfer 112, 934 – 944 (1990)

### **3.5. Estudio de los flujos unidireccionales no estacionarios de un fluido de segundo grado no-newtoniano**

En los últimos años el interés del problema no estacionario de fluidos no newtonianos se ha incrementado considerablemente. [Rajagopal, 1982] investigó las soluciones exactas para una clase de flujos unidireccionales no estacionarios de un fluido de segundo grado, en cuatro situaciones de flujos diferentes.

[Erdogan, 2005] estudió el inicio del movimiento en una superficie plana. Actualmente en las aplicaciones industriales son más apropiados los fluidos no-newtonianos que los fluidos newtonianos. Es considerable el número de artículos publicados vinculados directamente con los fluidos no-newtonianos. Se trata de fluidos cuyas propiedades de flujo no están descritas por un valor constante simple de viscosidad. Aunque el concepto de viscosidad es usado normalmente para caracterizar un material, puede ser inadecuado para describir la conducta mecánica de una sustancia, particularmente fluidos no-newtonianos. Estos fluidos se tratan mejor mediante propiedades reológicas.

Se destaca la labor realizada por [Fetecau, 2005], quien estudió las soluciones para algunos flujos unidireccionales no estacionarios de un fluido de segundo grado. Este investigador consiguió soluciones exactas para los casos estacionario y transitorio de los movimientos de fluidos de grado dos, mediante las transformaciones de Fourier.

El movimiento de un fluido debido a las oscilaciones de una placa, es el llamado problema segundo de Stoke, y tiene además de un interés teórico, una gran aplicación práctica. El estudio de flujos periódicos estacionarios de un fluido no newtoniano entre placas paralelas fue realizado por [Siddiqui y col., 1999]. En su trabajo de investigación consiguieron soluciones exactas mediante las transformaciones de Fourier, considerando los flujos generados por oscilaciones de una de las placas.

Un trabajo similar lo realizó [Brutyan, 1999], quien investigó los flujos unidireccionales de un fluido no lineal viscoso en tubos. [Bandelli, 1995], se interesó en el mismo tema pero con algunas diferencias.

En su labor de investigación el objetivo era la convección térmica del fluido de segundo grado en el contexto de los flujos unidireccionales. [Chun-I Chen y col., 2003] consideraron otro estudio similar en el que obtuvieron resultados de velocidad y gradiente de presión de un flujo unidireccional en estado estacionario, para fluidos de segundo grado.

De acuerdo con las investigaciones presentes sobre el contenido de este nuevo tema, se debe comentar la dificultad de encontrar un modelo simple que describa las propiedades de los fluidos no newtonianos. Además existe cierta confusión sobre su clasificación y sobre la ecuación que describe su comportamiento. Uno de los modelos más populares de los fluidos no newtonianos es el modelo conocido como: fluido de segundo grado. El objetivo principal de los trabajos comentados consiste generalmente en determinar las propiedades de los flujos unidireccionales.

Podemos destacar ciertos trabajos sobre los fluidos de segundo orden. [Rajagopal y Gupta, 1981] discutieron sobre el flujo y la estabilidad de la solución entre dos placas paralelas en rotación. Por otro lado, [Bandelli y Rajagopal, 1995] también examinaron flujos transitorios unidireccionales de un fluido de segundo grado en un dominio de una dimensión, mediante el método de las transformaciones integrales.

Un estudio más reciente es la transferencia de calor conjugado de una convección mixta magnética con efectos de disipación viscosa para un fluido visco elástico de segundo grado a través de una extensa lámina. Son destacables otros nombres de autores, quienes se interesaron en el comportamiento de los fluidos visco elásticos de segundo grado en diferentes condiciones. Entre otros se pueden citar: [Rajeswari y Rathna, 1962], [Mishra y Panda, 1979] y [Hsu y col., 1997].

El estudio de los flujos no newtonianos transitorios a través de un cilindro infinito, fue el propósito de [Siddique y Sajid, 2011]. Existe un gran número de trabajos actualmente publicados que tratan sobre los flujos no newtonianos. En consecuencia, podemos seguir destacando otras investigaciones de relevante interés, sobre este tipo de flujos. [Asghar y col., 2004] trataron los flujos magnetohidrodinámicos para estos fluidos. Al igual que en otros trabajos anteriores, los flujos pueden ser generados por el movimiento impulsado por una de las fronteras o por un gradiente de presión constante. Con esta investigación, se demostró la importancia en determinadas áreas de la ciencia de los movimientos de flujos no newtonianos.

Posteriormente [Asghar y col., 2005] volvieron a estudiar este tipo de fluidos, presentando una solución analítica para el flujo de un fluido de tercer grado, sobre una placa porosa que oscila sobre su propio plano. El mismo propósito consiguieron [Mansutti y col., 1993] cuando trataron los fluidos estacionarios no newtonianos, sobre una placa porosa con succión o inyección.

Podemos seguir detallando otras investigaciones interesantes vinculadas a las anteriores. Así [I-Chung Liu, 2005] se interesó por los flujos magnetohidrodinámicos unidireccionales transitorios de una clase de fluidos no newtonianos en un medio poroso. Este estudio es esencialmente una extensión de los trabajos realizados por los investigadores [Hayat y col., 2000] y [Rajagopal, 1982].

Muchos materiales como soluciones de polímeros, elastómeros, ciertos aceites y grasas y muchas otras emulsiones pueden ser considerados como fluidos no newtonianos. Es cierto que algunos fluidos no newtonianos son conductores de electricidad, consecuentemente las características del flujo estarán influenciadas por los efectos magnéticos. Podemos citar el trabajo de [Sarpkaya, 1961] pues también consideró estos fluidos, en presencia de un campo magnético.

En otros trabajos similares como el elaborado por [Pascal, 1992], se estudia de nuevo las soluciones similares para algunos flujos no newtonianos, considerando efectos no lineales importantes. Por otro lado, la transferencia de calor en procesos de convección forzada y libre laminar combinada debido a los fluidos no newtonianos fue el objetivo perseguido por [Kubair y col., 1968]. Para este último caso, la solución numérica estaba desarrollada para una fina placa con temperatura en pared uniforme, diferentes flujos y diferentes valores del parámetro de control de convección libre y forzada.

Se destacan otros trabajos más novedosos que también son relevantes para este capítulo. Es el caso de [Som y col., 1984] quienes trataron la convección libre sobre los flujos no-newtonianos en cuerpos bidimensionales no-isotérmicos. [Tsung Yen y col., 1966] se centraron en otro problema parecido al anterior, estudiando las soluciones del flujo de convección natural laminar en los fluidos no newtonianos. [Abd-el-Malek y col., 2002] estudiaron el flujo no estacionario de un fluido de conducción eléctrica no newtoniano, en un campo magnético transversal de extensión infinita.

[Liao, 2003] también se interesó en estos fluidos, obteniendo la solución analítica de los mismos sobre una extensa lámina. Los flujos unidireccionales inestables han sido el objetivo de otros estudios que debemos de considerar. Podemos destacar el estudio de [Baris, 2002] quien consideró los flujos unidireccionales no estacionarios de una mezcla binaria para fluidos incompresibles newtonianos. Esta mezcla de fluidos es realmente importante por sus aplicaciones en diversas ramas de ingeniería y tecnología. [Chen y col., 2000] publicaron un nuevo trabajo relacionado con el anterior, en el que consideraron los resultados de velocidad y gradiente de presión para los fluidos unidireccionales estacionarios en un conducto circular.

### 3. 5.1. Referencias

Abd-el-Malek, M.B., Badran, N.A. y Hassan. H.S., “*Solution of the Rayleigh problem for a power law non-Newtonian conducting fluid via group method*”, International Journal of Engineering Science 40, 1599 – 1609 (2002)

Asghar, S., Khan, M. y Hayat, T., “*Magnetohydrodynamic transient flows of a non-Newtonian fluid*”, International Journal of Non-Linear Mechanics 40, 589 – 601 (2005)

Asghar S., Mohyuddin, M.R., Hayat, T. y Siddiqui, A.M., “*The flow of a Non Newtonian fluid induced due to the oscillations of a porous plate*”, Mathematical Problems in Engineering 5, 133 – 143 (2004)

Bandelli, R., “*Unsteady unidirectional flows of second grade fluids in domains with heated boundaries*”, International Journal of Non-Linear Mechanics 30, 263 – 269 (1995)

Bandelli, R. y Rajagopal, R., “*Start-up flows of second grade fluids in domain with one finite dimension*”, International Journal of Non-Linear Mechanics 30, 817 – 839 (1995)

Baris, S., “*Some simple unsteady unidirectional flows of a binary mixture of incompressible Newtonian fluids*”, Journal of Mechanical Engineering Science 40, 2023 – 2040 (2002)

Brutyan, M.A., “*Unidirectional flows of a non-linearly viscous fluid in tubes*”, Journal of Applied Mathematics y Mechanics 60, 641- 645 (1999)

Chen, C.K., Chen, C.I. y Yang, Y.T., “*Unsteady unidirectional flow of a Maxwell fluid in a circular duct with different given volume flow rate conditions*”, *Journal of Mechanical Engineering Science* 216, 583 – 590 (2000)

Chun- I.C., Chao-Kuang, C. y Yue-Tzu, Y., “*Unsteady unidirectional flow of second grade fluid between the parallel plates with different given volume flow rate conditions*”, *Applied Mathematics and Computation* 137, 437 – 450 (2003)

Ellahi, R., “*Effects of the slip boundary condition on non-Newtonian flows in a channel*”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 14, 1377 – 1384 (2009)

Erdogan, M.E. y Imrak, C.E., “*On unsteady unidirectional flows of a second grade fluid*, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40, 1238 – 1251 (2005)

Fetecau, C., “*Starting solutions for some unsteady unidirectional flows of a second grade fluid*”, *International Journal of Engineering Science* 43, 781 – 789 (2005)

Hayat, T., Asghar, S. y Siddiqui, A.M., “*Some unsteady unidirectional flows of a Non- Newtonian fluid*”, *International Journal of Engineering Science* 38, 33 – 346 (2000)

Hsiao, K., “*Conjugate heat transfer of magnetic mixed convection with radiative and viscous dissipation effects for second-grade viscoelastic fluid past a stretching sheet*”, *Applied Thermal Engineering* 27, 1895 – 1903 (2007)

Hsu, C.H., Chen, C.S. y Teng, J.T., “*Temperature and flow fields for the flow of a second-grade fluid past a wedge*”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 20, 34 – 45 (1997)

I-Chung, L., *Journal of the Chinese Institute of Engineers* 28, 569 – 578 (2005)

Kubair, V. G. y Pei, D.C.T., “*Combined laminar free and forced convection heat transfer to non-Newtonian fluids*”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 11, 855 – 869 (1968)



- Liao, S.J., “*On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet*”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 488, 189 – 212 (2003)
- Mansutti, D., Pontrelli, G. y Rajagopal, K.R., “*Steady flows of non-Newtonian fluids past a porous plate with suction or injection*”, *Internal Journal for Numerical Methods in Fluids* 17, 927 – 941 (1993)
- Mishra, S.P. y Panda, T.C., “*Effect of injection on the flow of second order fluid in the inlet region of a channel*”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 15, 11 – 17 (1979)
- Pascal, H., “*Similarity solutions to some unsteady flows of non-Newtonian fluids of power law behavior*”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 27, 759 – 771 (1992)
- Rajagopal, K.R., “*A note on unsteady unidirectional flows of a non-Newtonian fluid*”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 17, 369 – 373 (1982)
- Rajagopal, K.R. y Gupta, A.S., “*Flow and stability of a second grade fluid between two parallel plates rotating about non-coincident axes*”, *International Journal of Engineering Science* 19, 1401 – 1409 (1981)
- Rajeswari, G. y Rathna, S.L., “*Flow of a particular class of non-Newtonian viscoelastic and visco-inelastic fluids near a stagnation point*”, *Applied Mathematics and Computation* 10, 43 – 57 (1962)
- Sarpkaya, T., “*Flow of Non-Newtonian Fluids in a Magnetic Field*”, *Aiche Journal* 7, 324 – 328 (1961)
- Siddique, I. y Sajid, Z., “*Exact solutions for the unsteady axial flow of Non-Newtonian fluids through a circular cylinder*”, *Communications in Non Linear Science and Numerical Simulation* 16, 226 – 238 (2011)
- Siddiqui, A.M., Hayat, T. y Asghar, S., “*Periodic flows of a non-Newtonian fluid between two parallel plates*”, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 34, 895- 899 (1999)
- Som, A. y Chen, J.L.S., “*Free convection of non-Newtonian fluids over non-isothermal two-dimensional bodie*”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 27,791 – 794 (1984)

Tong, D. y Liu, Y., “*Exact solutions for the unsteady rotational flow of non-Newtonian fluid in an annular pipe*”, International Journal of Engineering Science 43, 281 – 259 (2005)

Tsung Yen, N. y Hansen, A.G., “*Possible similarity solutions of the laminar natural convection flow of non-newtonian fluids*”, International Journal of Heat and Mass Transfer 9, 261- 262 (1996)

### **3.6. Estudio de los efectos de absorción de radiación y reacción química sobre convección libre magnetohidrodinámica a través de un medio poroso**

El problema sobre el efecto de absorción de radiación de flujo y transferencia de calor se ha convertido en un tema importante a nivel industrial. A elevada temperatura de funcionamiento, el efecto de la radiación puede ser bastante significativo. Muchos procesos se producen en áreas de la ingeniería a elevada temperatura y el conocimiento de la transferencia de calor por radiación se vuelve muy importante para el diseño del equipo pertinente. Las centrales nucleares, turbinas de gas y los diversos dispositivos de propulsión para aviones, misiles, satélites y vehículos espaciales son ejemplos de tales áreas de ingeniería. [Makinde, 2005] examinó la interacción de convección libre transitoria con un fluido emisor-receptor de radiación térmica a lo largo de la placa permeable vertical. [Ibrihem y col. 2005] investigaron los efectos térmicos no clásicos del problema en el problema de Stokes para fluidos micropolares por el método de perturbación.

[Muthucumaraswamy y Meenakshisundaram, 2006] investigaron el estudio teórico de los efectos de las reacciones químicas en una placa oscilante vertical con temperatura variable y difusión masiva. [Muthuraj y Srinivas. 2010] estudiaron el flujo magnetohidrodinámico de un fluido viscoso y micropolar mediante el método homotópico. El estudio de los efectos de generación/absorción de calor de fluidos en movimiento es importante en vista de varios problemas físicos como reacciones químicas endotérmicas o exotérmicas. Los posibles efectos de generación de calor pueden alterar la distribución de la temperatura y, en consecuencia, la tasa de deposición de partículas en los reactores nucleares, chips eléctricos y obleas semiconductoras. [Seddeek, 2005] estudió los efectos de reacción química, termoforesis y variable viscosidad sobre flujo magnetohidrodinámico estable con transferencia de masa y calor en presencia de los efectos de generación/absorción de calor.

[Patil y Kulkarni, 2008] estudiaron los efectos de reacción química sobre el flujo de convección libre de un fluido polar a través de un medio poroso en presencia de generación interna de calor. [Prakash y col., 2008] estudiaron la convección libre magnetohidrodinámica de un fluido micropolar con reacción química con transferencia en masa y en presencia de un campo magnético transversal y variable succión.

[Rajeswari y col., 2009] estudiaron los efectos de reacción química sobre transferencia en masa y calor en un fluido magnetohidrodinámico sobre una superficie porosa vertical y en presencia de la variable succión.

El calor radiactivo y la transferencia en masa desempeñan un papel importante en las industrias de fabricación para el diseño de las aletas, laminados de acero, plantas de energía nuclear, turbinas de gas y los distintos dispositivos de propulsión para aviones, misiles, satélites y vehículos espaciales son ejemplos de este tipo de aplicaciones de ingeniería. El calor de convección y la transferencia en masa en un flujo hidromagnético de un fluido de segundo grado sobre una placa semi-infinita en presencia de radiación térmica y la difusión térmica fueron considerados por [Olajuwon, 2011]. El efecto de la radiación sobre el flujo de convección forzada y libre de un fluido incompresible viscoso ópticamente denso a lo largo de una placa vertical caliente con corriente uniforme y temperatura superficial uniforme fue investigado por [Kesavaiah y col., 2011].

[Singh y col., 2007] abordaron un estudio del efecto de la reacción química y absorción de radiación sobre transferencia en masa y calor por convección de un fluido magnetohidrodinámico a través de una placa vertical en movimiento en presencia de la variable succión. [Kumar y col., 2010] han estudiado recientemente, el problema del flujo de convección libre completamente desarrollado de un fluido viscoso y micropolar en un canal vertical. [Dulal Pal y col., 2010] estudiaron la transferencia en masa y calor por convección magnetohidrodinámico inestable sobre una placa permeable vertical con radiación térmica y reacción química.

[Kai-Long Hsiao, 2012] abordó la característica multimedia para la convección forzada bidimensional estacionaria con el efecto de radiación de un fluido incompresible sobre una fuente de calor no uniforme. [Chaudhary y Jha, 2008] estudiaron los efectos de las reacciones químicas en flujo de fluido micropolar magnetohidrodinámico a través de una placa vertical. [Ramesh y col., 2012] investigaron el flujo magnetohidrodinámico de un fluido en presencia de una fuente de calor. [Reddy y col., 2010] investigaron los efectos de absorción de radiación de un fluido de convección libre magnetohidrodinámico en un medio poroso en presencia de generación/absorción de calor

[Nandeppanavar y col., 2012] estudiaron la transferencia de calor en una superficie extensible. El efecto de reacción química y absorción de radiación sobre convección libre magnetohidrodinámica inestable sobre una placa en movimiento permeable semi-infinita con una fuente de calor y succión fue analizado por [M. Sudheer Babu y P. V. Satya Narayana, 2009].

El flujo de convección en medios porosos ha sido ampliamente estudiado en los últimos años debido a sus múltiples aplicaciones en ingeniería como son los colectores solares, los procesos de secado, intercambiadores de calor, la energía geotérmica y la recuperación de petróleo, construcción de edificios, etc.

Actualmente, los medios porosos se suelen utilizar para aislar a un cuerpo caliente para mantener su temperatura. Los medios porosos también se consideran útiles en la disminución de la convección libre la cual ocurriría de otra manera sobre una superficie vertical climatizada. [Kai-Long Hsiao, 2010] estudió la convección mixta de masa y calor para un fluido elástico viscoso y magnetohidrodinámico. [Ahmed, 2007] investigó los efectos de flujo de convección libre magnetohidrodinámica inestable a través de un medio poroso delimitada por una placa porosa vertical de infinito.

La transferencia en masa y calor en un medio poroso en presencia de los efectos de flotabilidad fue discutida por [Trevisan y Bejan, 2012]. [Turkyilmazoglu, 2012] investigó el flujo tridimensional magnetohidrodinámico sobre un disco giratorio. [Singh y col., 2011] consideraron los efectos de reacción química y absorción de radiación sobre convección libre magnetohidrodinámico sobre una placa vertical en movimiento permeable con el efecto de la variable succión dependiente de tiempo.

[Elbashbeshy y col., 2010] estudiaron los efectos de radiación térmica y campo magnético sobre la capa límite de convección mixta y el problema de transferencia de calor a través de una superficie extensible vertical y porosa. Estos autores investigaron la capa límite de un flujo inestable sobre una superficie extensible en un medio poroso en presencia de una fuente de calor.

Además, [Kai-Long Hsiao, 2011] abordó la convección mixta en un medio poroso. El efecto de radiación sobre el fluido a través de una superficie ha sido analizado por [El-Aziz, 2009]. [Singh y col., 2010] investigaron la transferencia de calor en un medio poroso en presencia de un campo magnético transversal.

[Singh y col., 2010] también estudiaron el flujo de estancamiento con transferencia de calor para los casos estacionario y transitorio. Los efectos de reacción química y transferencia en masa sobre convección libre inestable magnetohidrodinámica con succión constante y fuente de calor fueron analizados por [Gireesh Kumar y col., 2009].

[Al-Oldat y Al-Azab, 2007] se interesaron en la influencia de reacción química sobre la convección libre magneto hidrodinámica inestable sobre una placa vertical en movimiento. [Mohamed, 2009] abordó la interacción de radiación con convección de doble difusión sobre un flujo magnetohidrodinámico sobre una placa porosa en movimiento con generación de calor. [Ahmed Sahin, 2010] abordó el efecto de reacción química sobre convección libre magneto hidrodinámica en una placa vertical.

El problema estacionario y transitorio de transferencia de masa y calor sobre convección libre en una placa vertical finita o semi-infinita con un posible efecto de reacción química ha sido extensamente analizado. Un análisis de convección libre inestable con transferencia de masa y calor de un fluido micropolar en un medio poroso con permeabilidad variable y rodeado por una placa vertical semi-infinita en presencia de generación de calor fue publicado por [Babu y Narayana, 2013].

El flujo magnetohidrodinámico laminar inestable sobre una superficie extensible fue investigada por [Ishak, 2010] quien determinó que la inestabilidad en el flujo y la temperatura eran ocasionados por la velocidad dependiente del tiempo y por la temperatura de la superficie. Los estudios a cerca de la transferencia de masa y calor con la presencia de reacción química son de gran importancia práctica para ingenieros y científicos debido a sus múltiples aplicaciones.

### 3.6.1. Referencias

Ahmed, S., "Effects of unsteady free convective MHD flow through a porous medium bounded by an infinite vertical porous plate ", Bull. Calcutta Math. 99, 511–522 (2007)

Ahmed, S., "Influence of chemical reaction on transient MHD free convective flow over a vertical plate in slip-flow regime ", Emirates J. Eng. Res. 15, 25–34 (2010)

Al-Odat, M.Q. y Al-Azab, T.A., "Influence of chemical reaction on transient MHD free convection over a moving vertical plate ", Emirates J. Eng. Res. 12, 15–21 (2007)

Chaudhary, R.C y Jha, A.K., "Effects of chemical reactions on MHD micro polar fluid flow past a vertical plate in slip-flow regime ", Appl. Math. Mech. 29, 1179–1194 (2008)

Dulal, P y Talukdar B., ”*Perturbation analysis of unsteady magneto hydro dynamic convective heat and mass transfer in a boundary layer slip flow past a vertical permeable plate with thermal radiation and chemical reaction*“, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.1813–1830 (2010)

El-Aziz, M.A.,”*Radiation effect on the flow and heat transfer over an unsteady stretching sheet*“, Int. Commun. Heat Mass Transfer 36, 521–524 (2009)

Elbashbeshy, E.M.A., Yassmin, D.M, y Dalia, A.A., ” *Heat transfer over an unsteady porous stretching surface embedded in a porous medium with variable heat flux in the presence of heat source or sink* “, Afr. J. Math. Comput. Sci. Res. 3, 68–73 (2010)

Gireesh Kumar J., Satya Narayana, P.V, Ramakrishna, S., “*Effects of the chemical reaction and mass transfer on MHD unsteady free convection flow past an infinite vertical plate with constant suction and heat sink*”, Ultra Sci. 21 (2009) 639–650.

HarishBabu, D, y SatyaNarayana, P.V.,” *Influence of variable permeability and radiation absorption on heat and mass transfer in MHD micro polar flow over a vertical moving porous plate* “, ISRN Thermodynamics 2013 Article ID 953536.

Ibrahim, F.S, Elaiw A.M y Bakr, A.A., “ *Effect of the chemical reaction and radiation absorption on the unsteady MHD free convection flow past a semi infinite vertical permeable moving plate with heat source and suction* “ 13, 1056–1066 (2008)

Ibrihem, F.S., Hassanien, I.A. y Bakr, A.A., “*Nonclassical thermal effects in Stokes’second problem for micro polar fluids*, J. Appl. Mech. 72, 468–474 (2005)

Ishak, A., “*Unsteady MHD flow and heat transfer over a stretching plate* “, J. Appl.Sci. 10, 2127–2131 82010)

Kai-Long Hsiao, “*Heat and mass transfer for micro polar flow with radiation effect past a nonlinearly stretching sheet* “, Heat Mass Transfer 64, 413–419 (2010)

Kai-Long Hsiao,“*Heat and mass mixed convection for MHD viscoelastic fluid past a stretching sheet with ohmic dissipation*“, July 2010, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 15, 1803–1812 (2010)

Kai-Long Hsiao, “*MHD mixed convection for viscoelastic fluid past a porous wedge*“, Int. J. Non-Linear Mech. 46, 1–8 (2011)

Kai-Long Hsiao, “*Multimedia feature for unsteady fluid flow over a non-uniform heat source stretching sheet with magnetic radiation physical effects*“, Appl. Math. Inf. Sci. 6, 59S–65S (2012)

Kesavaiah, D.Ch., Satyanarayana, P.V., Venkataramana, S., ”*Effects of the chemical reaction and radiation absorption on an unsteady MHD convective heat and mass transfer flow past a semi-infinite vertical permeable moving plate embedded in a porous medium with heat source and suction*“, Int. J. Appl. Math.Mech. 7, 52–69 (2012)

Kumar, J.P., Umavathi, J.C., Chamkha, A.J., Pop I., ”*Fully developed free-convective flow of micro polar and viscous fluids in a vertical channel*“, Appl. Math. Model. 34, 1175–1186 (2010)

Makinde, O.D., “*Free convection flow with thermal radiation and mass transfer past a moving vertical porous plate*“, Int. Commun. Heat Mass Transfer 32, 1411–1419 (2005)

Mohamed, R.A., “*Double-diffusive convection-radiation interaction on unsteady MHD flow over a vertical moving porous plate with heat generation and Soret effects*“, Appl. Math. Sci. 3, 629–651 (2009)

Muthucumaraswamy, A. y Meenakshisundaram, R.S., “*Theoretical study of chemical reaction effects on vertical oscillating plate with variable temperature*“, J. Theor. Appl. Mech. 33, 245–257 (2006)

Muthuraj, R. y Srinivas, S., “*Fully developed MHD flow of a micro polar and viscous fluid in a vertical porous space using HAM*“, Int. J. Appl. Math. Mech. 6, 79–97 (2010)

Nandeppanavar, M.M., Mahantesh, M., Vajravelu, K., Subhas Abel, M., Ravi, S, y Jyoti, H., “*Heat transfer in a liquid film over an unsteady stretching sheet*“, Int. J.Heat Mass Transfer 55, 1316–1324 (2010)



- Olajuwon, B., "Convection heat and mass transfer in a hydromagnetic flow of a second grade fluid in the presence of thermal radiation and thermal diffusion", *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 38, 377–382 (2011)
- Patil, P.M. y Kulkarni, P.S., "Effects of chemical reaction on free convective flow of a polar fluid through a porous medium in the presence of internal heat generation", *Int. J. Therm. Sci.* 4, 1043–1054 (2008)
- Prakash, J. Ogulu, A. y Zhandire, E., "MHD free convection and mass transfer flow of a micro-polar thermally radiating and reacting fluid with time dependent suction", *Indian J. Pure Appl. Phys.* 46, 679–684 (2008)
- Ramana Reddy, G.V., Ramana Murthy, Ch.V, y Reddy, N.B., "Mass transfer and radiation effects of unsteady MHD free convective fluid flow embedded in porous medium with heat generation/absorption", *J. Appl. Math. Fluid Mech.* 2, 85–98 (2010)
- Ramesh, G.K., Gireesha, B.J, y Bagewadi, C.S., "MHD flow of a dusty fluid near the stagnation point over a permeable stretching sheet with non-uniform source/sink", *Int. J. Heat Mass Transfer* 55, 4900–4907 (2012)
- Rajeswari, R., Jothiram, B, y Nelson, V.K., "Chemical reaction, heat and mass transfer on non linear MHD boundary layer flow through a vertical porous surface in the presence of suction", *Appl. Math. Sci.* 3, 2469–2480 (2009)
- Shateyi, S, y Motsa, S., "Unsteady magneto hydrodynamic convective heat and mass transfer past an infinite vertical plate in a porous medium with thermal radiation, heat generation/absorption and chemical reaction", *Adv. Topics Mass Transfer* 45–62 (2012)
- Shateyi, S., Sibanda, P, y Motsa, S.S., "Magnetohydrodynamic flow past a vertical plate with radiative heat transfer", *J. Heat Transfer* 129, 1708–1714 (2007)
- Seddek, M.A., "Finite-element method for the effects of chemical reaction, variable viscosity, thermophoresis and heat generation/absorption on a boundary-layer hydromagnetic flow with heat and mass transfer over a heat surface", *J. Acta Mech.* 177, 1–18 (2005)

Seethamahalakshmi, G.V, Ramana Reddy y Prasad, B.D.C.N.,” *Effect of the chemical reaction and radiation absorption on an unsteady mhd convective heat and mass transfer flow past a semi-infinite vertical permeable moving plate embedded in a porous medium with heat source and suction*”. IOSR Journal of Engineering 1,1, 028-036

Singh, A., Jangid, N.S., Tomer, S., Kumar, S, y Sinha, D.,” *Effects of thermal radiation and magnetic field on unsteady stretching permeable sheet in presence of free stream velocity* “, Int. J. Inf. Math. Sci. 6, 63–66 (2010)

Singh, H., Ram, P, y Kumar, A., “*A study of the effect of chemical reaction and radiation absorption on MHD convective heat and mass transfer flow past a semi-infinite vertical moving plate with time dependent suction*,” Int. J. Appl. Math. Mech. 7, 38–58 (2011)

Singh, P., Tomer, N.S., Kumar, S, y Sinha, D.,” *MHD oblique stagnation-point flow towards a stretching sheet with heat transfer*”, Int. J. Appl. Math. Mech. 6, 94–111 (2010)

Singh, P., Tomer, N.S, y Sinha, D., “*Numerical study of heat transfer over stretching surface in porous media with transverse magnetic field*“, Proceeding of International Conference on Challenges and application of Mathematics in Sciences and Technology, ISBN 023-032-875-X, 422–430 (2010)

Sudheer Babu, M, y Satya Narayana, P.V., “*Effects of the chemical reaction and radiation absorption on free convection flow through porous medium with variable suction in the presence of uniform magnetic field* “, J. Heat Mass Transfer 3, 219–234 (2009)

Turkyilmazoglu, M., “*Three dimensional MHD stagnation flow due to a stretchable rotating disk*“, Int. J. Heat Mass Transfer 55, 6959–6965 (2012)

Seethamahalakshmi, G.V, Ramana Reddy y Prasad, B.D.C.N.,”*Effect of the chemical reaction and radiation absorption on an unsteady mhd convective heat and mass transfer flow past a semi-infinite vertical permeable moving plate embedded in a porous medium with heat source and suction*”, IOSR Journal of Engineering 1,1, 028-036



# CAPÍTULO CUATRO

## Modelos en red

---

### 4.1. Introducción

#### 4.1.1. Generalidades del método en red

### 4.2. Protocolos de resolución

#### 4.2.1. Disco giratorio

#### 4.2.2. Superficie permeable vertical en movimiento

#### 4.2.3. Placas veticales paralelas

#### 4.2.4. Fluido no – newtoniano

#### 4.2.5 Convección libre magnetohidrodinámica en un medio poroso

---

## 4.1. Introducción

En el presente capítulo se presentan los modelos en red propuestos para la resolución de los diferentes problemas estudiados en esta memoria y que fueron presentados en el capítulo anterior. El diseño del modelo en red parte de la discretización o reticulación del medio continuo en elementos de volumen (o celdas), de modo que cada término de la ecuación diferencial en diferencias finitas (resultante de la discretización espacial del modelo matemático), se implementa buscando la relación existente entre las variables potencial y corriente eléctrica con las variables que intervienen en cada problema a resolver en el modelo matemático. Así, por ejemplo en problemas de transferencia de calor, estas variables son formalmente equivalentes a las variables temperatura y densidad de flujo de calor, respectivamente.

La estructura de este capítulo muestra el modelo en red, junto con la geometría y nomenclatura de cada celda elemental. Además, se representa gráficamente la asociación de las  $N$  celdas, que reproducen el medio en red completo. Este apartado realiza también, una detallada exposición sobre la implementación de las diferentes condiciones de contorno utilizadas en la resolución de los problemas abordados en esta memoria.

### 4.1.1. Generalidades del método en red

La nomenclatura correspondiente al modelo en red de una celda elemental, común para los problemas estudiados, se muestra en la figura IV.1. Las celdas, de tamaño  $\Delta x$  (geometría cartesiana) o  $\Delta r$  (geometría cilíndrica), se han diseñado en forma simétrica. El modelo en red completo se obtiene de la agrupación de un número de celdas  $N$ , junto con los dispositivos adecuados que modelizan las condiciones de contorno, de cada problema a estudiar.

Con carácter general se consideran tres posiciones para la variable dependiente (que para el caso general, consideramos la temperatura), las de los extremos de la celda  $T_{i-\Delta}$ ,  $T_{i+\Delta}$ , y la central  $T_i$ , al ser todos los casos tratados en esta Tesis problemas unidimensionales. De esta forma existen, al menos, tres posiciones (en la celda elemental) para formular las dependencias de cualquiera de las características termofísicas, conductividad y calor específico, con la temperatura. La asociación en serie (para el caso más simple, el unidimensional) de las  $N$  celdas reproduce el modelo en red de todo el medio, figura IV.2. Los requisitos de la variable temperatura y de conservación de flujo térmico se satisfacen de manera automática, sin ningún requisito añadido, ya que estas condiciones son equivalentes a los teoremas de circuitos (de Kirchhoff), de voltajes y corrientes eléctricas, respectivamente.

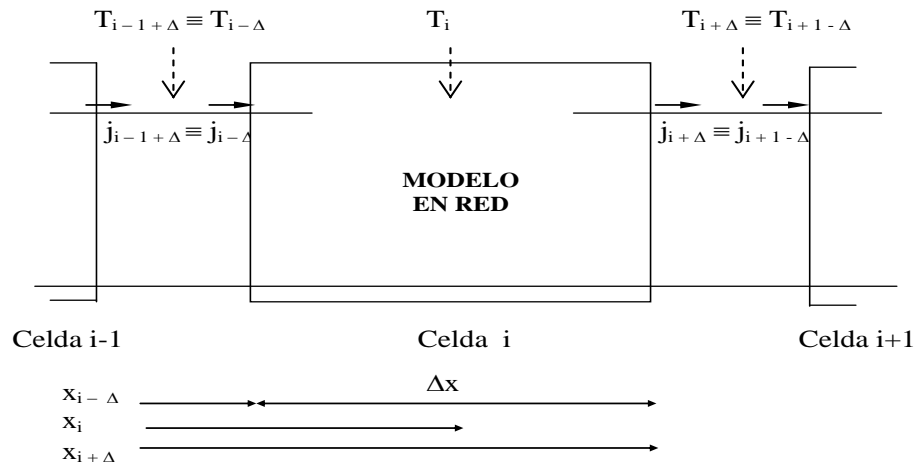


Figura IV.1. Geometría y nomenclatura de la celda elemental  $i$  (voltajes y tensiones)

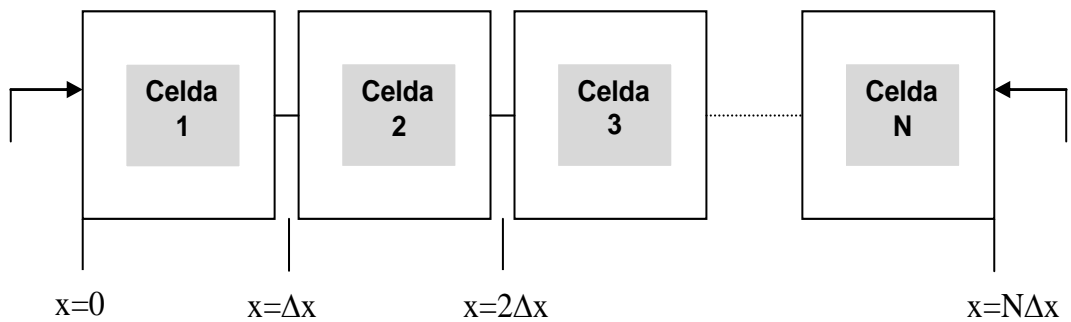


Figura IV.2. La asociación en serie de las  $N$  celdas reproduce el modelo en red de todo el medio

### Modelos en red de las diferentes condiciones de contorno

La figura IV.3 muestra la implementación en el modelo de algunas de las condiciones de contorno más generales. Se aprecia las condiciones de contorno de primera clase (temperatura constante) mediante pilas, flujo convectivo mediante una fuente de corriente controlada por tensión y una resistencia de valor muy elevado que simula una condición de contorno adiabático.

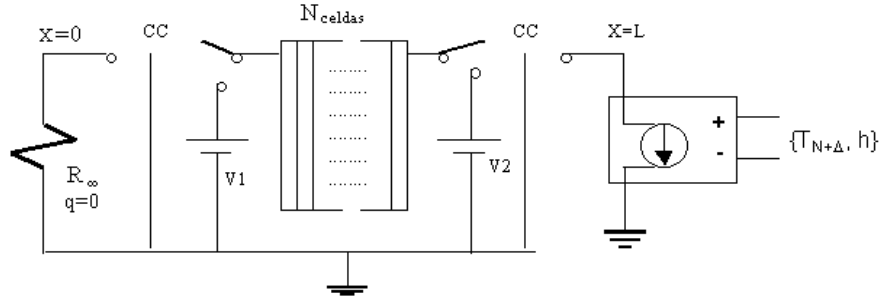


Figura IV.3. Implementación de diferentes tipos de condiciones de contorno

### Diferentes condiciones de contorno

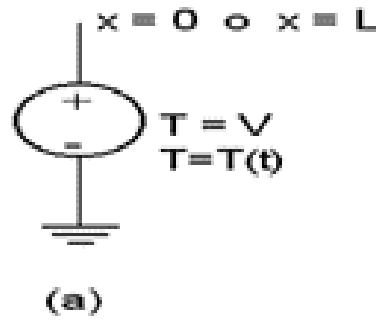


Figura IV.4

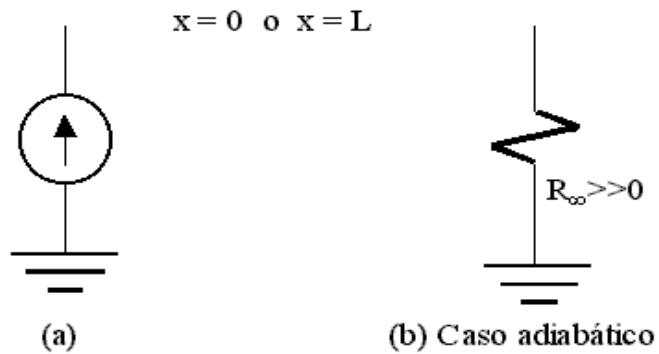


Figura IV.5

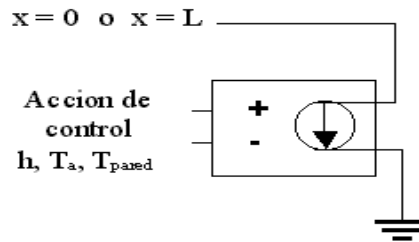


Figura IV.6

La figura IV.3 muestra la implementación en el modelo de algunas de las condiciones de contorno más generales, ya especificadas.

*Especificación de la temperatura* (condición de frontera de primera clase). Se implementa mediante una fuente de tensión dependiente o independiente del tiempo, figura IV.4.

- *Especificación del flujo de calor* (condición de frontera de segunda clase). Se implementa mediante una fuente de corriente dependiente o independiente del tiempo, figura IV.5. La condición adiabática (flujo nulo) es un caso particular que puede implementarse alternativamente mediante una resistencia de valor infinito entre el extremo del medio y el nudo de referencia, figura IV.5.

- *Condición de contorno convectiva* (condición de frontera de tercera clase). El caso más general de dependencia del coeficiente de convección con la temperatura en la frontera del medio (convección natural, p. ej.) se implementa mediante una fuente de corriente controlada por tensión, figura IV.6; la acción de control viene dada por la expresión del flujo de calor por convección obtenida a partir de las correlaciones a dimensionales conocidas. La convección forzada (ley de Newton) puede implementarse, alternativamente, de forma más sencilla mediante una simple resistencia óhmica.

Otra condición de contorno es *la condición de contorno por radiación*. Es una condición fuertemente no lineal cuya implementación se lleva a cabo, también, mediante un generador de corriente controlado por tensión, figura IV.6. La acción de control viene dada por la ley de Stefan-Boltzmann de la radiación. Por último, se destaca la condición de contacto entre medios.



## 4.2. Protocolos de resolución

### 4.2.1. Disco giratorio

#### Análisis matemático

Consideramos el movimiento transitorio de un fluido conductor de electricidad incompresible y viscoso, sobre un disco rotando con una velocidad angular inversamente proporcional al tiempo ( $\Omega = A/t$ ; siendo  $A > 0$ ,  $t > 0$ ). En la figura adjunta IV.7, se puede observar un esquema del problema a resolver, así como también el sistema de coordenadas polares cilíndricas empleadas:  $(r, \varphi, z)$ . Además podemos observar las componentes de la velocidad en las direcciones  $r$ , (radial),  $\varphi$  (angular) y  $z$  (normal).

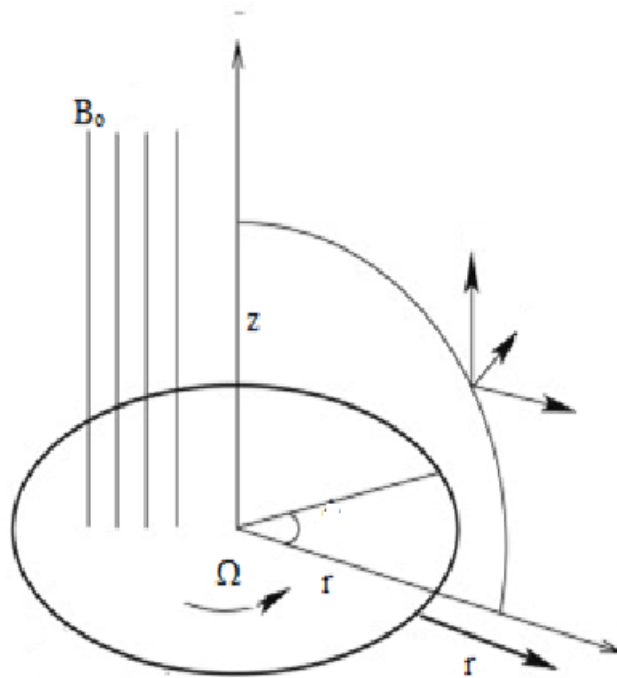


Figura IV.7. Disco giratorio (sistema de coordenadas)

El campo magnético uniforme de magnitud  $B_0$ , es aplicado en la dirección perpendicular a la coordenada  $z$ .

El numero de Reynolds magnético viene representado por  $Re_m = \mu_0 \sigma V L \ll 1$ , donde en esta expresión  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética,  $\sigma$  es la conductividad eléctrica, mientras  $V$  y  $L$  representan la velocidad y la longitud característica, respectivamente. La presencia de un campo magnético requiere la presencia de una fuerza adicional en la ecuación de movimiento del fluido. Esta fuerza viene representada mediante la expresión:

$F = J \times B$ , donde  $J$  representa la densidad de corriente, y  $B$  es vector de inducción magnético.

La densidad de corriente puede ser representada mediante la expresión:  $J = \sigma(E + V \times B)$ : conocida como la ley de Ohm, los términos  $\sigma E$ ,  $\sigma(V \times B)$  respectivamente representan las corrientes de conducción e inducción.

La fórmula de la ley de Ohm se puede combinar con la ecuación de fuerza  $F$ , para dar lugar a las componentes de la fuerza,  $F_r = -\sigma V_r B_0^2$ ,  $F_\phi = -\sigma V_\phi B_0^2$ . Estas fuerzas son incorporadas a las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Navier-Stokes). En coordenadas cilíndricas sobre la condición de simetría angular, las ecuaciones que resultan son:

$$\rho(\partial u/\partial t + u\partial u/\partial r + w\partial u/\partial z - v^2/r) + \sigma B_0^2 u + 1/\rho \partial P/\partial r = \mu (\partial^2 u/\partial r^2 + 1/r \partial u/\partial r - u/r^2 + \partial^2 u/\partial z^2) \quad \text{IV.1}$$

$$\rho(\partial v/\partial t + u\partial v/\partial r + w\partial v/\partial z + uv/r) + \sigma B_0^2 v = \mu (\partial^2 v/\partial r^2 + 1/r \partial v/\partial r - v/r^2 + \partial^2 v/\partial z^2) \quad \text{IV.2}$$

$$\rho(\partial w/\partial t + u\partial w/\partial r + w\partial w/\partial z) + 1/\rho \partial P/\partial z = \mu (\partial^2 w/\partial r^2 + 1/r \partial w/\partial r + \partial^2 w/\partial z^2) \quad \text{IV.3}$$

$$\partial u/\partial r + u/r + \partial w/\partial z = 0 \quad \text{IV.4}$$

Donde  $P$  denota la presión,  $\mu$  representa el coeficiente de viscosidad y  $\rho$  es la densidad del fluido.

Introduciendo las transformaciones de Karman:

$$u = r\omega F, v = r\omega G, w = (\omega\nu)^{1/2} H, z = (\nu/\omega)^{1/2} \xi, p = \rho\nu\omega P, \theta = (T - T_w) / (T_w - T_\infty) \text{ y } M = \sigma B_0^2 / \rho\omega \quad \text{IV.5}$$

En estas transformaciones,  $\xi$  representa la distancia adimensional medida a través del eje de rotación. Mientras,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  y  $P$  son las variables adimensionales en función de  $\xi$  y  $t$ ,  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido. Se ha definido el número de interacción magnético  $M = \sigma B_0^2 / \rho\omega$ . Empleando estas transformaciones se pueden obtener nuevas ecuaciones estacionarias:

- Las ecuaciones IV.6, IV.7, IV.10 para las componentes de velocidad.
- La ecuación IV.8 para la temperatura.
- La ecuación IV.9 para la presión.

$$\partial^3 H / \partial \xi^3 = H \partial^2 H / \partial \xi^2 - (\partial H / \partial \xi)^2 / 2 + M \partial H / \partial \xi + 2G^2 \quad \text{IV.6}$$

$$\partial^2 G / \partial \xi^2 = H \partial G / \partial \xi - G \partial H / \partial \xi + MG \quad \text{IV.7}$$

$$\partial^2 \theta / \partial \xi^2 = Pr H \partial \theta / \partial \xi \quad \text{IV.8}$$

$$\partial^2 H / \partial \xi^2 - H \partial H / \partial \xi = \partial P / \partial \xi \quad \text{IV.9}$$

$$F = - \partial H / \partial \xi / 2 \quad \text{IV.10}$$

Mediante la ecuación IV.10 hemos eliminado la consideración específica de F en las ecuaciones. Para completar la formulación del problema, es necesario definir las condiciones iniciales y de contorno:

$$\begin{aligned} H = 0, \partial H / \partial \xi = 0, G = 1 \text{ y } \theta = 1 \text{ para } \xi = 0 \\ \partial H / \partial \xi = 0, \theta = 0 \text{ y } G = 0 \text{ para } \xi = \infty \end{aligned} \quad \text{IV.11}$$

La ecuación IV.9 se puede utilizar para obtener la presión P, sin más que integrar dicha expresión y teniendo en cuenta la condición sobre P. Así, se obtiene una solución para la presión P:

$$P = \partial^2 H / \partial \xi^2 - H \partial H / \partial \xi \quad \text{IV.12}$$

La ecuación IV.6 se reduce a una ecuación de segundo grado, mediante un cambio de variable así empleando

$U = \partial H / \partial \xi$  y  $\partial^2 U / \partial \xi^2 = \partial^3 H / \partial \xi^3$ , la ecuación obtenida es:

$$\partial^2 U / \partial \xi^2 = H \partial U / \partial \xi - U^2 / 2 + MU + 2G^2 \quad \text{IV.13}$$

A las ecuaciones anteriores le podemos incorporar el término dependiente del tiempo, de forma que las ecuaciones que obtendremos en ese caso, son las ecuaciones correspondientes a la velocidad, temperatura y la presión:

$$\partial U/\partial t = \partial^2 U/\partial \xi^2 - H \partial U/\partial \xi + U^2/2 - MU - 2G^2 \quad \text{IV.14}$$

$$\partial G/\partial t = \partial^2 G/\partial \xi^2 - H \partial G/\partial \xi + G \partial H/\partial \xi - MG \quad \text{IV.15}$$

$$\text{Pr} \partial \theta/\partial t = \partial^2 \theta/\partial \xi^2 - \text{Pr} H \partial \theta/\partial \xi \quad \text{IV.16}$$

$$\partial H/\partial t = -\partial^2 H/\partial \xi^2 - H \partial H/\partial \xi + \partial P/\partial \xi \quad \text{IV.17}$$

De la ecuación IV.17, se puede obtener por integración otra solución para la presión.

### Modelado en red

A continuación, se representarán los circuitos en red, con las equivalencias correspondientes, en las que se basa este método. Así para este problema, las variables F, G, H,  $\theta$  y P son equivalentes a la variable eléctrica voltaje, mientras que sus derivadas parciales frente a la coordenada espacial,  $\partial F/\partial \xi$ ,  $\partial G/\partial \xi$ ,  $\partial H/\partial \xi$  y  $\partial P/\partial \xi$ , equivalen a la variable corriente eléctrica. Discretizando las ecuaciones correspondientes:

$$\Delta \xi \, dU_i/dt + 2(U_i - U_{i+\Delta \xi})/\Delta \xi - 2(U_{i-\Delta \xi} - U_i)/\Delta \xi + (U_{i+\Delta \xi} - U_{i-\Delta \xi})H_i - U_i^2/2\Delta \xi + MU_i\Delta \xi + 2G_i^2\Delta \xi = 0 \quad \text{(a)}$$

$$\Delta \xi \, dG_i/dt + 2(G_i - G_{i+\Delta \xi})/\Delta \xi - 2(G_{i-\Delta \xi} - G_i)/\Delta \xi + H_i(G_{i+\Delta \xi} - G_{i-\Delta \xi}) + G_i M \Delta \xi - G_i(H_{i+\Delta \xi} - H_{i-\Delta \xi}) = 0 \quad \text{(b)}$$

$$\text{Pr} \Delta \xi \, d\theta_i/dt + 2(\theta_i - \theta_{i+\Delta \xi})/\Delta \xi - 2(\theta_{i-\Delta \xi} - \theta_i)/\Delta \xi + \text{Pr}(H_{i+\Delta \xi} - H_{i-\Delta \xi})H_i = 0 \quad \text{(c)} \quad \text{IV.18}$$

A partir de estas ecuaciones discretizadas definimos los flujos de velocidad, temperatura y presión :

### Flujos de velocidad

$$J_{U,i+\Delta \xi} = (U_i - U_{i+\Delta \xi}) / (\Delta \xi / 2) \quad \text{IV.19a}$$

$$J_{U,i-\Delta \xi} = (U_{i-\Delta \xi} - U_i) / (\Delta \xi / 2)$$

$$J_{Uit} = \Delta \xi \, dU_i/dt$$

$$J_{UHi} = (U_{i+\Delta \xi} - U_{i-\Delta \xi}) H_i$$

$$J_{Ui} = U_i^2/2\Delta \xi$$

$$J_{MUi} = MU_i \Delta \xi$$

$$J_{2Gi} = 2G_i^2 \Delta \xi$$

IV.19b

$$J_{G_{i+\Delta\xi}} = (G_i - G_{i+\Delta\xi}) / (\Delta\xi/2)$$

$$J_{G_{i-\Delta\xi}} = (G_{i-\Delta\xi} - G_i) / (\Delta\xi/2)$$

$$J_{G_{it}} = \Delta\xi dG_i/d\tau$$

$$J_{GH_i} = (G_{i+\Delta\xi} - G_{i-\Delta\xi}) H_i$$

$$J_{MG_i} = G_i M \Delta\xi$$

$$J_{HG_i} = (H_{i+\Delta\xi} - H_{i-\Delta\xi}) G_i$$

**Flujos de temperatura**

IV.19c

$$J_{\theta_{i+\Delta\xi}} = (\theta_i - \theta_{i+\Delta\xi}) / (\Delta\xi/2)$$

$$J_{\theta_{i-\Delta\xi}} = (\theta_{i-\Delta\xi} - \theta_i) / (\Delta\xi/2)$$

$$J_{\theta_{it}} = Pr \Delta\xi d\theta_i/d\tau$$

$$J_{\theta_{Hi}} = Pr (\theta_{i+\Delta\xi} - \theta_{i-\Delta\xi}) H_i$$

Los flujos anteriores son las Ecuaciones de Kirchhoff IV.20 siguientes:

$$J_{U_{it}} + J_{U_{i+\Delta\xi}} - J_{U_{i-\Delta\xi}} + J_{UH_i} - J_{U_i} + J_{MU_i} + J_{2G_i} = 0$$

$$J_{G_{it}} + J_{G_{i+\Delta\xi}} - J_{G_{i-\Delta\xi}} - J_{GH_i} + J_{HG_i} + J_{MG_i} = 0$$

$$J_{\theta_{it}} + J_{\theta_{i+\Delta\xi}} - J_{\theta_{i-\Delta\xi}} + J_{\theta_{Hi}} = 0$$

Todo lo anterior se puede representar en los siguientes modelos en red:

Diseño de circuitos

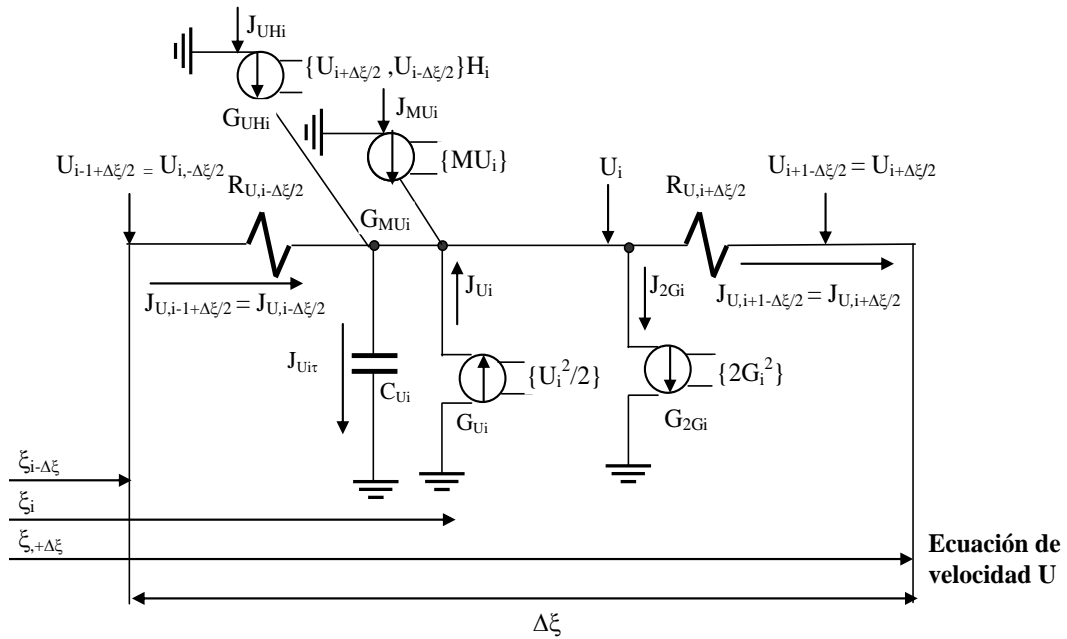


Figura IV.8. Modelo en red para la ecuación de la velocidad U

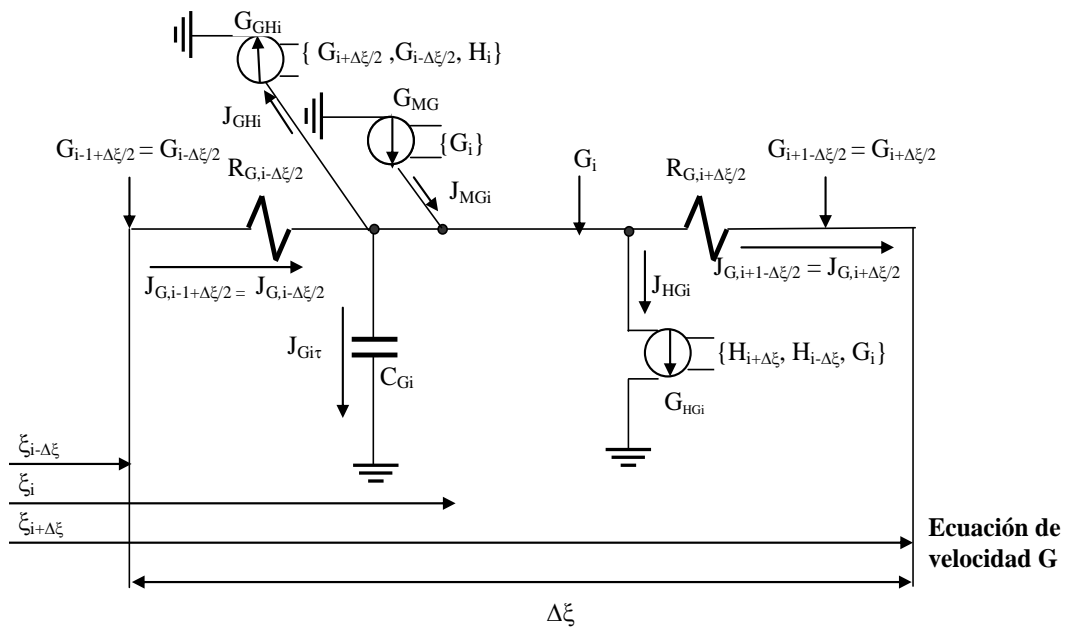


Figura IV.9. Modelo en red para la ecuación de la velocidad G

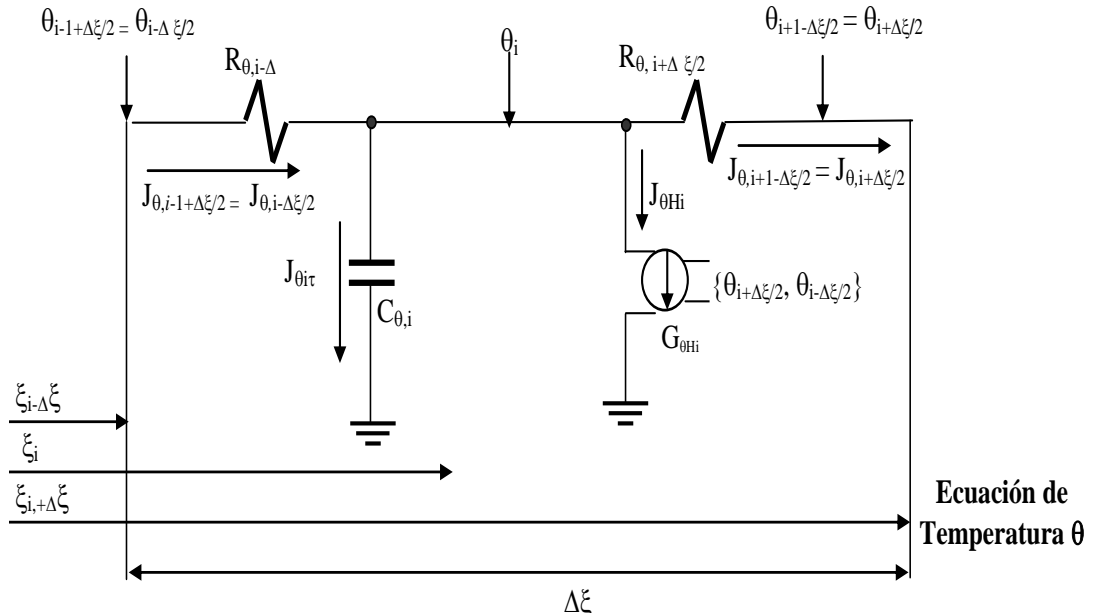


Figura IV.10. Modelo en red para la ecuación de temperatura

Se han representado los modelos en red para las ecuaciones de velocidades (U y G) y temperatura. Las figuras IV.8 y IV.9 representan los modelos en red para las ecuaciones de velocidad IV.18 a-b, mientras la figura IV.10 representa el modelo en red para la ecuación de la energía IV.18 c.

En la Figura IV.8,  $J_{U, i+\Delta\xi}$  y  $J_{U, i-\Delta\xi}$  son las corrientes que salen y entran de la celda, respectivamente. Estas corrientes son implementadas mediante dos resistencias de valores  $\Delta\xi/2$ . La corriente  $J_{U\tau}$  es implementada mediante un condensador de capacidad  $\Delta\xi$ . Han sido necesarios cuatro generadores de control ( $G_{U_i}$ ,  $G_{2G_i}$ ,  $G_{UH_i}$ ,  $G_{MU_i}$ ) para generar las corrientes,  $J_{U_i}$ ,  $J_{2G_i}$ ,  $J_{UH_i}$  y  $J_{MU_i}$ , respectivamente.  $G_{U_i}$  genera " $U_i^2/2\Delta\xi$ ", siendo  $U_i$  el voltaje correspondiente al nodo i. De igual modo se describen el resto de generadores,  $G_{2G_i}$  genera " $2G_i^2\Delta\xi$ " siendo  $G_i$  voltaje (velocidad G) en el nodo i (figura IV.9). Finalmente los generadores  $G_{UH_i}$  y  $G_{MU_i}$  generan las corrientes " $(U_{i+\Delta\xi} - U_{i-\Delta\xi})H_i$ " y " $MU_i\Delta\xi$ ", respectivamente. Es evidente que  $U_{i+\Delta\xi}$  y  $U_{i-\Delta\xi}$  representan los voltajes de los nodos  $i+\Delta\xi$  e  $i-\Delta\xi$ , respectivamente. La condición inicial ha sido aplicada en el condensador  $C_{U_i}$ .

En la figura IV.9, se observan las corrientes  $J_{G, i+\Delta\xi}$  y  $J_{G, i-\Delta\xi}$  que salen y entran de la celda, respectivamente. Estas corrientes son modeladas mediante dos resistencias de valor  $\Delta\xi/2$ . La corriente  $J_{G_{it}}$  es implementada con un condensador cuya capacidad es  $\Delta\xi/2$ . En este circuito son necesarios tres generadores de corriente,  $G_{GH_i}$ ,  $G_{MG_i}$  y  $G_{HG_i}$ , cuyas salidas respectivas son: " $(G_{i+\Delta\xi} - G_{i-\Delta\xi})H_i$ ", " $G_{iM\Delta\xi}$ " y " $(H_{i+\Delta\xi} - H_{i-\Delta\xi})/\Delta\xi G_i$ ", respectivamente. Para este caso,  $G_{i-\Delta\xi}$ ,  $G_i$  y  $G_{i+\Delta\xi}$  representan los voltajes (velocidades) en los nodos  $i - \Delta\xi$ ,  $i$ , e  $i + \Delta\xi$  respectivamente.

El circuito IV.10, se observan las corrientes  $J_{\theta, i+\Delta\xi}$ ,  $J_{\theta, i-\Delta\xi}$  que salen y entran de la celda, respectivamente; modeladas mediante dos resistencias de valor  $\Delta\xi/2$ . La corriente  $J_{\theta_{it}}$  es nuevamente implementada por un condensador de capacidad " $Pr\Delta\xi$ ". Se aprecia un generador de corriente  $G_{\theta H_i}$ , cuya salida es la corriente " $Pr (\theta_{i+\Delta\xi} - \theta_{i-\Delta\xi}) H_i$ ", siendo  $\theta_{i-\Delta\xi}$  y  $\theta_{i+\Delta\xi}$  los voltajes (temperaturas) en los nodos  $i - \Delta\xi$  e  $i + \Delta\xi$ , respectivamente.

## 4.2.2. Superficie permeable vertical en movimiento

### Análisis matemático

Consideramos la capa límite de un fluido transitorio, laminar y bidimensional sobre una superficie extensible vertical en continuo movimiento incrustada en un medio poroso, de la que surge una estrecha abertura en el origen ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ). De acuerdo con la figura IV.11, el eje  $x$  se toma a lo largo de la superficie extensible en la dirección del movimiento con la abertura como el origen, el eje  $y$  es perpendicular a la superficie. Se consideran los efectos de los coeficientes de generación/absorción de calor, campo magnético y reacción química de primer orden.

La superficie se mantiene a temperatura uniforme. El campo magnético transversal aplicado es uniforme y el número magnético de Reynolds es reducido de modo que el campo magnético inducido está omitido. Se debe destacar que no se han considerado los efectos de disipación viscosa, calor de Joule, efecto de Hall, y tampoco la aplicación del campo eléctrico. El modelo físico está representado mediante la siguiente figura IV.11:



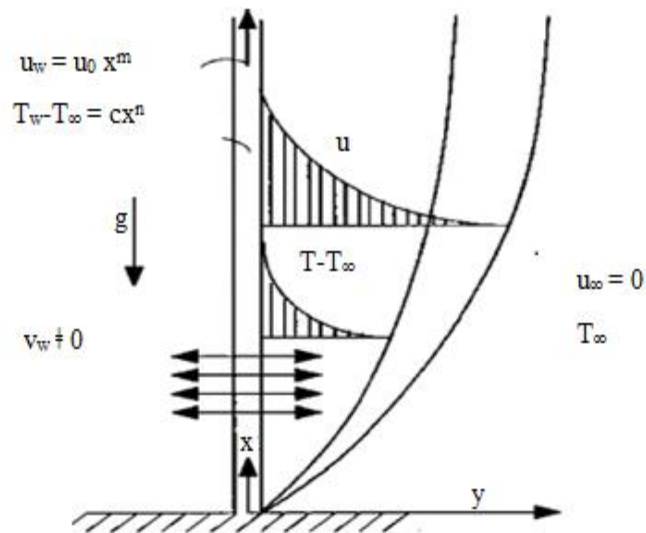


Figura IV.11. Modelo físico de la capa límite del flujo sobre una superficie vertical

Teniendo en cuenta estas suposiciones, las ecuaciones que describen la situación física son las siguientes:

Ecuación de velocidad U:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \beta_T (T - T_\infty) + g \beta_c (c - c_\infty) - u \sigma B_0^2 / \rho \quad \text{IV.21}$$

Ecuación de temperatura T:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \rho c_p \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q_0 (T - T_\infty) \quad \text{IV.22}$$

IV.23

Donde "y" es la coordenada horizontal o transversal, \$v\$ es la velocidad transversal, \$T\$ es la temperatura del fluido, \$c\$ es la concentración de especie, \$T\_\infty\$ es la temperatura ambiental, \$c\_\infty\$ es la concentración ambiental y \$\rho\$, \$g\$, \$\beta\_T\$, \$\beta\_c\$, \$\mu\$, \$\sigma\$, \$B\_0\$, \$Q\_0\$, \$D\_m\$ and \$\gamma\$ son la densidad, aceleración gravitacional, coeficiente de expansión térmica, coeficiente de expansión de concentración, viscosidad dinámica, conductividad eléctrica del fluido, inducción magnética, coeficiente de generación/absorción de calor, coeficiente de difusión en masa y el parámetro de reacción química, respectivamente.

De acuerdo con el modelo expresado en la anterior figura IV.11,  $u$  es la componente de velocidad en la dirección de la componente "x",  $u_w$  representa la velocidad de la superficie vertical,  $T_w$  es la temperatura de la superficie vertical. Además, la diferencia de temperaturas entre el fluido y la pared se considera proporcional a la coordenada vertical elevada al exponente de temperatura  $n$ . Además, la velocidad de la superficie es proporcional a la coordenada vertical elevada al exponente  $m$  y  $\partial v/\partial y = 0$ .

Las condiciones de contorno para el problema son las siguientes:

$$\begin{aligned} u(0) = u_w, v(0) = -v_w, T(0) = T_w \text{ y } c(0) = c_w & \quad \text{IV.24} \\ y \rightarrow \infty: u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty \text{ y } c \rightarrow c_\infty & \end{aligned}$$

$u_w, v_w > 0$ ,  $T_w$  y  $c_w$  representan respectivamente, la velocidad de la superficie, la velocidad de inserción del fluido en la superficie, la temperatura en la pared y la concentración en la pared. Las ecuaciones pueden ser escritas en forma adimensional mediante los siguientes parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} Y = y v_w / \nu, U = u / u_w, \Theta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty), C = (c - c_w) / (c_w - c_\infty), \tau = \nu y_w^2 / \nu, G_{Tt} = g \beta_T \nu (T_w - T_\infty) / u_w v_w^2, \\ G_{Tc} = g \beta_c \nu (c_w - c_\infty) / u_w v_w^2, Pr = \mu c_p / k, Sc = \nu / D, K = \gamma \nu / v_w^2, M^2 = \nu \sigma B_o^2 / \rho v_w^2, \phi = \nu Q_o / \rho c_p v_w^2 & \quad \text{IV.25} \end{aligned}$$

Las ecuaciones definitivas correspondientes son las siguientes : IV.26

La ecuación de velocidad:

$$\partial U / \partial \tau = \partial^2 U / \partial Y^2 + \partial U / \partial Y + G_{Tt} \Theta + G_{Tc} C - M^2 U$$

Ecuación de temperatura:

$$\partial \Theta / \partial \tau = \partial^2 \Theta / \partial Y^2 + Pr \partial \Theta / \partial Y + \Theta \Phi$$

Ecuación de concentración:

$$\partial C / \partial \tau = \partial^2 C / \partial Y^2 + Sc \partial C / \partial Y - K Sc C$$

Estas ecuaciones se completan mediante las siguientes condiciones de contorno: IV.27

$$Y = 1, U(0) = 1, \Theta(0) = 1, C(0) = 1$$

$$Y \rightarrow \infty: U \rightarrow 0, \Theta \rightarrow 0 \text{ y } C \rightarrow 0$$

## Modelado en Red

Discretizando las ecuaciones de velocidad, temperatura y concentración adimensionales resultan IV.28:

$$\Delta Y dU_i/d\tau = 2 (U_{i+\Delta Y} - U_i)/\Delta Y - 2 (U_i - U_{i+\Delta Y})/\Delta Y + (U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y}) + G_{rt} \Theta_i \Delta Y + G_{rc} C_i \Delta Y - M^2 U_i \Delta$$

$$\Delta Y d\Theta_i/d\tau = 2 (\Theta_{i+\Delta Y} - \Theta_i)/\Delta Y - 2 (\Theta_i - \Theta_{i+\Delta Y})/\Delta Y + Pr (\Theta_{i+\Delta Y} - \Theta_{i-\Delta Y}) + \Theta_i \Phi \Delta Y$$

$$\Delta Y dC_i/d\tau = 2 (C_{i+\Delta Y} - C_i)/\Delta Y - 2 (C_i - C_{i+\Delta Y})/\Delta Y + Sc (C_{i+\Delta Y} - C_{i-\Delta Y}) - K Sc C_i \Delta Y$$

### Flujos de velocidad

IV.29 (a)

$$J_{U, i+\Delta Y} = (U_i - U_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{U, i-\Delta Y} = (U_{i-\Delta Y} - U_i) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{U, \tau} = \Delta Y dU_i/d\tau$$

$$J_{U, G_{rt}} = G_{rt} \Theta_i \Delta Y$$

$$J_{U, G_{rc}} = G_{rc} C_i \Delta Y$$

$$J_{U, M^2} = M^2 U_i \Delta Y$$

$$J_{U, i} = (U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})$$

### Flujos de temperatura

IV.29 (b)

$$J_{\Theta, i+\Delta Y} = (\Theta_i - \Theta_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{\Theta, i-\Delta Y} = (\Theta_{i-\Delta Y} - \Theta_i) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{\Theta, \tau} = \Delta Y d\Theta_i/d\tau$$

$$J_{\Theta, Pr} = Pr (\Theta_{i+\Delta Y} - \Theta_{i-\Delta Y})$$

$$J_{\Theta, \Phi} = \Theta_i \Phi \Delta Y$$

**Flujos de concentración**

IV.29 (c)

$$J_{C,i+\Delta Y} = (C_i - C_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{C,i-\Delta Y} = (C_{i-\Delta Y} - C_i) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{C_{it}} = \Delta Y dC_i/dt$$

$$J_{Sci} = S_c (C_{i+\Delta Y} - C_{i-\Delta Y})$$

$$J_{KSci} = KScC_i\Delta Y$$

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones de Kirchoff siguientes:

IV.30

$$-J_{U_{it}} + J_{U,i+\Delta Y} - J_{U,i-\Delta Y} + J_{U_i} + J_{UGrti} + J_{UGrci} - J_{U^2_{Mi}} = 0$$

$$-J_{0_{it}} + J_{0,i-\Delta Y} - J_{C,i+\Delta Y} + J_{P_{ti}} + J_{P_{\phi i}} = 0$$

$$-J_{C_{it}} + J_{C,i-\Delta Y} - J_{C,i+\Delta Y} + J_{Sci} - J_{KSci} = 0$$

Con todo lo anterior es posible diseñar los siguientes modelos en red:

**Diseño de circuitos**

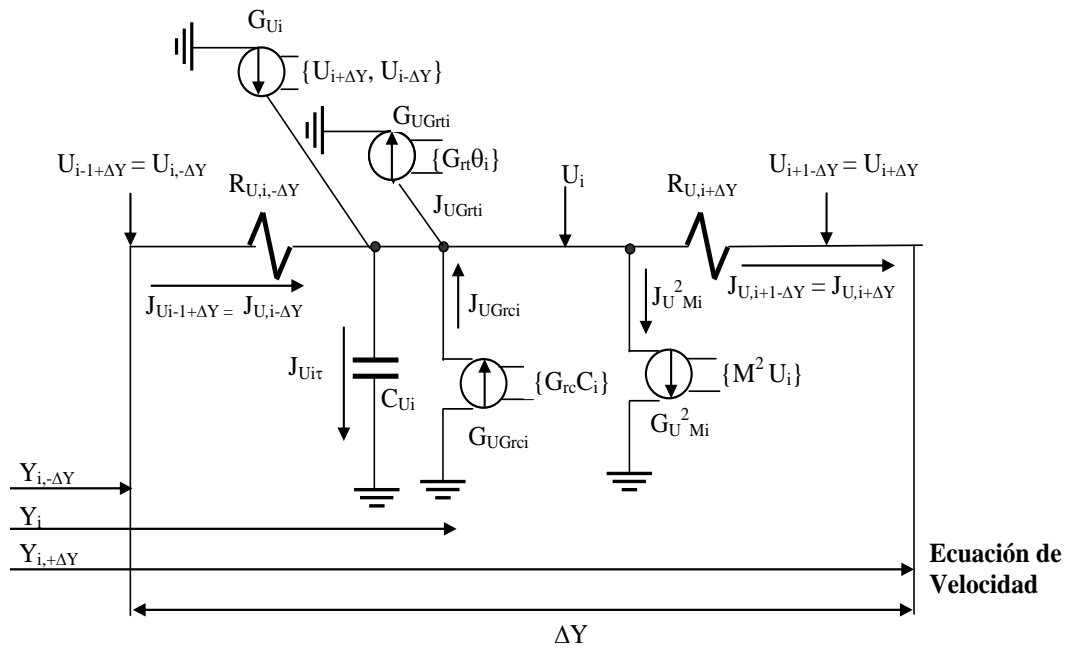


Figura IV.12. Nomenclatura y modelo en red del volumen de control válido para la ecuación de velocidad

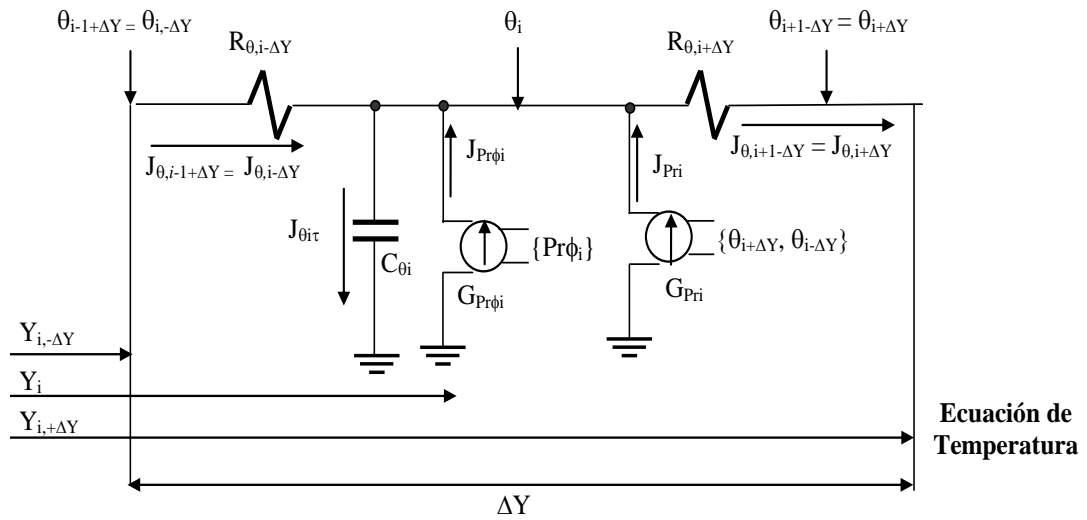


Figura IV.13. Nomenclatura y modelo en red del volumen de control válido para la ecuación de temperatura

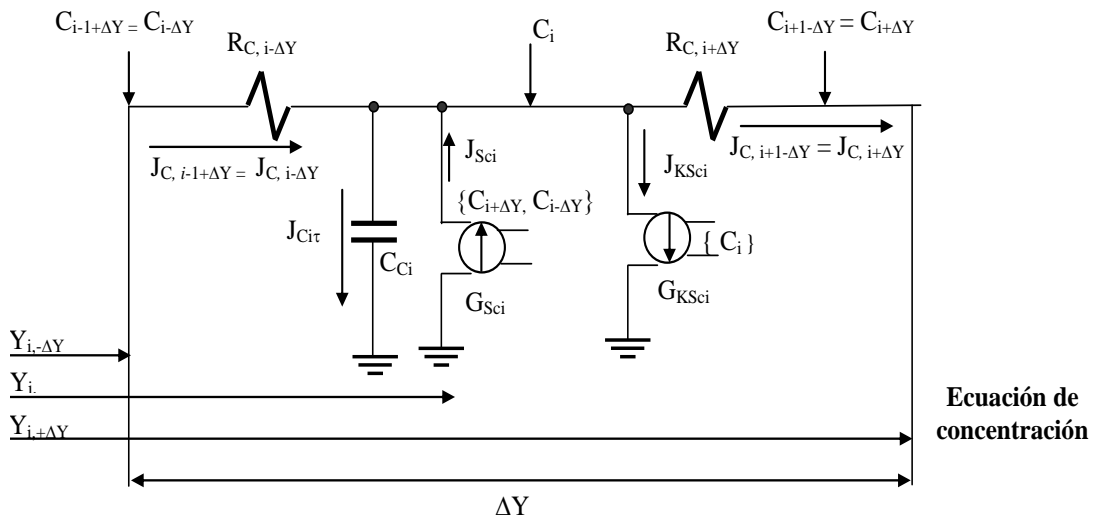


Figura IV.14. Nomenclatura y modelo en red del volumen de control válido para la ecuación de concentración

## Descripción de los circuitos

El circuito de la figura IV.12 muestra las corrientes  $J_{U, i+\Delta Y}$  y  $J_{U, i-\Delta Y}$  (corrientes que abandonan y entran a la celda, respectivamente) de velocidad implementadas mediante dos resistencias de valores  $\Delta Y/2$ . De igual modo, la corriente  $J_{U\tau}$  se implementa mediante el condensador de capacidad  $C_{U\tau} = \Delta Y$ . Por último se destacan cuatro generadores de corriente ( $G_{U^2 M_i}, G_{UGmi}, G_{UGi}, G_{U_i}$ ) para generar las corrientes  $J_{U^2 M_i}, J_{UGmi}, J_{UGi}$  y  $J_{U_i}$ , respectivamente.  $G_{U^2 M_i}$  genera " $M^2 U_i \Delta Y$ ", siendo  $U_i$  el voltaje (velocidad) del nodo  $i$ .  $G_{UGmi}$  proporciona " $G_{rc} C_i \Delta Y$ " siendo  $C_i$ , el voltaje (concentración) en el nodo  $i$  (figura IV.14).

$G_{UGi}$  genera " $G_{rt} \Theta_i \Delta Y$ " siendo  $\Theta_i$  el voltaje (temperatura) del nodo  $i$  (figura IV.13). Finalmente, el generador  $G_{U_i}$  proporciona: " $(U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})$ ", donde  $U_{i+\Delta Y}, U_{i-\Delta Y}$  corresponden a los voltajes en los nodos  $i+\Delta Y, i-\Delta Y$  de la celda elemental. El requerimiento final es la incorporación de las condiciones iniciales y condiciones de contorno. De acuerdo con las condiciones iniciales de este problema, el voltaje  $U$  ( $\tau = 0$ ) = 1 es aplicado al condensador  $C_{U\tau}$ . La correspondiente condición de contorno de primera clase, requiere una fuente de voltaje constante en cada extremo del medio.

El segundo circuito representa la ecuación de la energía, para obtener la temperatura  $\Theta$ .  $J_{\Theta, i+\Delta Y}$  y  $J_{\Theta, i-\Delta Y}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda, respectivamente. Estas corrientes son implementadas mediante dos resistencias de valores  $\Delta Y/2$ . La corriente  $J_{\Theta\tau}$  se implementa mediante un condensador de capacidad  $C_{\Theta\tau} = \Delta Y$ . Por último, se destacan dos generadores de control de corriente,  $G_{Pr\phi_i}$  y  $G_{Pr_i}$ , para generar las corrientes  $J_{Pr\phi_i}$  y  $J_{Pr_i}$  respectivamente.  $G_{Pr\phi_i}$  proporciona " $\Theta_i \Phi \Delta Y$ ", siendo  $\Theta_i$  el voltaje (temperatura) del nodo  $i$ .  $G_{Pr_i}$  genera " $Pr (\Theta_{i+\Delta Y} - \Theta_{i-\Delta Y})$ ", siendo  $\Theta_{i+\Delta Y}$  y  $\Theta_{i-\Delta Y}$  los voltajes correspondientes a los nodos  $i+\Delta Y, i-\Delta Y$ . La condición inicial se aplica al condensador con la temperatura inicial especificada  $\Theta$  ( $\tau = 0$ ) = 1. Al igual que en caso anterior, fuentes de voltaje constante serán necesarias para implementar las condiciones de contorno correspondientes.

En el último circuito,  $J_{C, i+\Delta Y}$  y  $J_{C, i-\Delta Y}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda, respectivamente. Estas corrientes son implementadas mediante dos resistencias de valores  $\Delta Y/2$ . La corriente  $J_{C_i}$  es implementada mediante el condensador de capacidad  $C_{C_i} = \Delta Y$ . Se necesitan dos generadores de control de corriente ( $G_{KSc_i}$ ,  $G_{Sc_i}$ ), para obtener las corrientes  $J_{Sc_i}$ ,  $J_{KSc_i}$  respectivamente.  $G_{KSc_i}$  proporciona " $(KScC_i) \Delta Y$ ", siendo  $C_i$  el voltaje (concentración) en el nodo  $i$ .  $G_{Sc_i}$  suministra " $Sc (C_{i+\Delta Y} - C_{i-\Delta Y})$ ", donde  $C_{i+\Delta Y}$  y  $C_{i-\Delta Y}$  representan los voltajes de los nodos del extremo derecho e izquierdo de la celda, respectivamente. Las condiciones inicial y de contorno se implementan del mismo modo que los casos anteriores.

### 4.2.3. Placas verticales paralelas

Se considera un flujo de convección mixta laminar transitorio en un canal vertical de placas paralelas en presencia de un campo magnético. Las placas verticales están separadas una distancia  $L$  y mantenidas a temperatura constante, de acuerdo con el modelo físico representado mediante la figura IV.15 en la que las paredes del canal están sometidas a una temperatura o flujo de calor. El campo magnético está aplicado dirección horizontal normal a la dirección del flujo.

El fluido de trabajo se supone que es newtoniano, conductor de la electricidad y el calor que generan o absorben y sus propiedades se suponen constantes a excepción de la densidad en el término fuerza de cuerpo de la ecuación de momento. Además, se supone que la componente "x" de la velocidad es el único componente distinto de cero. Bajo los supuestos anteriores e invocando a la aproximación de Boussinesq, las ecuaciones que gobiernan se puede escribir de la siguiente forma:

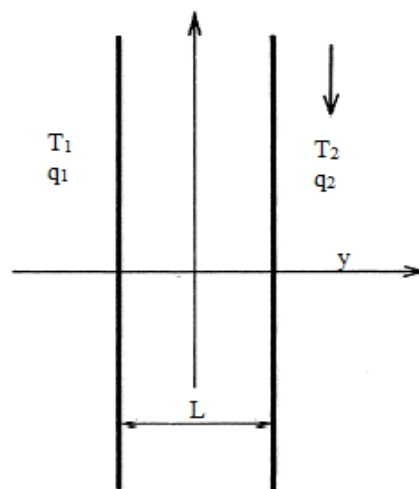


Figura IV.15. Modelo físico

$$\partial u / \partial x = 0 \quad \text{IV.31}$$

$$u \partial u / \partial x = -1/\rho \partial P / \partial x + \beta g (T - T_\infty) + \nu \partial^2 u / \partial y^2 - \sigma B_o^2 u / \rho \quad \text{IV.32}$$

$$u \partial T / \partial x = k / \rho c \partial^2 T / \partial y^2 + \mu / \rho c (\partial u / \partial y)^2 + (\sigma B_o^2 / \rho c) u^2 \pm Q_o / \rho c (T - T_o) \quad \text{IV.33}$$

En estas ecuaciones  $u$  y  $T$  son las  $x$ -componente de velocidad y la temperatura respectivamente.  $P = p + \rho g x$  está definida como la diferencia entre presión y presión hidrostática. Los símbolos  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $k$  y  $c$  representan densidad del fluido, viscosidad dinámica, viscosidad cinemática, conductividad térmica y calor específico a presión constante, respectivamente. Otros símbolos han sido también considerados:  $\beta$ ,  $g$ ,  $\sigma$ ,  $B_o$  y  $Q_o$  como los coeficientes de expansión térmica, aceleración de gravedad, conductividad eléctrica del fluido, inducción magnética y coeficiente de generación ó absorción de calor, respectivamente. Derivando la ecuación IV.32 respecto de la componente  $x$ , el resultado es:

$$\partial T / \partial x = 0 \quad \text{IV.34}$$

La ecuación IV.34 indica que la temperatura es una función de la componente  $y$ . Combinando los términos de las ecuaciones IV.32 y IV.33 se obtiene la siguiente ecuación:

$$\partial^4 u / \partial y^4 - (\sigma B_o^2 / \rho \nu) \pm Q_o / k \partial^2 u / \partial y^2 \pm Q_o / k (\sigma B_o^2 / \rho \nu) u \pm Q_o k A / \rho \nu - \rho \beta g / k (\partial u / \partial y)^2 - (\sigma B_o^2 \beta g / k \nu) u^2 = 0 \quad \text{IV.35}$$

Se ha de destacar para paredes isotérmicas el valor  $T_o = (T_1 - T_2) / 2$  si  $T_1 < T_2$ . En consecuencia para este caso  $R_i = 1.0$  y las condiciones de contorno son las siguientes:

$$u(-L/2) = 0, u(L/2) = 0$$

$$u''(-L/2) = A/\mu - (\beta g (T_1 - T_o)/\nu + (\sigma B_o^2/\mu) u(-L/2)) \quad \text{IV.36b}$$

$$u''(L/2) = A/\mu - (\beta g (T_1 - T_o)/\nu + (\sigma B_o^2/\mu) u(L/2)) \quad \text{IV.36c}$$

$$T(-L/2) = (T_1 - T_2) / 2\Delta T, T(L/2) = (T_2 - T_1) / 2\Delta T \quad \text{IV.36d}$$



Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas en forma adimensional empleando los siguientes parámetros adimensionales:

$$Y = y/D, U = u/u_o, \theta = (T - T_w)/\Delta T, Grt = \beta g \Delta T D^3 / \nu^2, M = (\sigma B_o^2 / \mu) D^2, Re = u_o D / \nu, Pr = \mu c / k, Br = \mu u_o^2 / k \Delta T, \\ \phi = Q_o D^2 / k, \tau = t u_o^2 / \nu, R_t = (T_2 - T_1) / \Delta T, R_{qt} = (T_2 - T_0) / \Delta T, R_{tq} = (T_1 - T_0) / \Delta T \quad IV.37$$

$u_o = AD^2 / (48\mu)$  es la velocidad de referencia,  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura,  $D = 2L$  es el diámetro hidráulico,  $Br$  es el número Brinkman,  $M$  el número Hartmann,  $Re$  el número Reynolds y  $\phi$  el coeficiente de absorción o generación de calor.

Las ecuaciones IV.33, IV.35 y IV.36 pueden ser expresadas en forma adimensional mediante las expresiones de IV.37 siendo:

$$\partial^2 U / \partial Y^2 + \phi \theta + Br (\partial U / \partial Y)^2 + Br M^2 U^2 = 0 \quad IV.38$$

$$\partial^4 U / \partial Y^4 - (M^2 \pm \phi) \partial^2 U / \partial Y^2 \pm M^2 \phi U - G_r / Re Br (\partial U / \partial Y)^2 - G_r / Re Br M^2 U^2 \pm 48 \phi = 0 \quad IV.39$$

$$U'' (-1/4) = -48 + R_t / 2 G_r / Re \quad IV.40a$$

$$U'' (1/4) = -48 + R_t / 2 G_r / Re \quad IV.40b$$

$$\theta (-1/4) = -R_t / 2, \theta (1/4) = R_t / 2 \quad IV.40c$$

La ecuación IV.39 puede ser reducida a una ecuación de segundo grado mediante el cambio de variable:

$$H = \partial^2 U / \partial Y^2 \quad IV.41$$

Así la nueva ecuación en términos de  $H$  se puede expresar:

$$\partial^2 H / \partial Y^2 - (M^2 \pm \phi) H \pm M^2 \phi U - G_r / Re Br (\partial U / \partial Y)^2 - G_r / Re Br M^2 U^2 \pm 48 \phi = 0 \quad IV.42$$

Incorporando el término transitorio en las ecuaciones IV.32 y IV.33:

$$\partial T / \partial t + u \partial T / \partial x = k / \rho c \partial^2 T / \partial y^2 + \mu / \rho c (\partial u / \partial y)^2 + (\sigma B_o^2 / \rho c) u^2 \pm Q_o / \rho c (T - T_o) \quad IV.43$$

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = -1 / \rho \partial P / \partial x + \beta g (T - T_\infty) + \nu \partial^2 u / \partial y^2 - \sigma B_o^2 u / \rho \quad IV.44$$

La forma adimensional de las ecuaciones IV.43 y IV.44 son escritas como:

$$\text{Re}^2 \partial U / \partial \tau = \theta \text{Gr} / \text{Re} + 48 + \partial^2 U / \partial Y^2 - M^2 U \quad \text{IV.45}$$

$$\text{Re}^2 \text{Pr} \partial \theta / \partial \tau = \partial^2 \theta / \partial Y^2 + \text{Br} (\partial U / \partial Y)^2 + \text{Br} M^2 U^2 + \phi \theta \quad \text{IV.46}$$

Para las paredes ( $q_1 - T_2$ ) las condiciones de contorno térmicas para las paredes del canal pueden ser escritas en forma adimensional:

$$q_1 = -k \, dT/dy \, (-L/2), \, T(L/2) = T_2 \quad \text{IV.47}$$

La forma adimensional de la ecuación IV.47 puede ser obtenida mediante el uso de las ecuaciones IV.37 con

$$\Delta T = q_1 D/k \text{ para dar } \theta'(-1/4) = -1, \, \theta(1/4) = (T_2 - T_0)/\Delta T \quad \text{IV.48}$$

Derivando la ecuación IV.32 con respecto a  $y$  con  $dP/dx = A$  obtenemos:

$$\partial^2 u / \partial y^2 - (\sigma B_0^2 / \mu) \partial u / \partial y + (\beta g / \nu) \partial T / \partial y = 0 \quad \text{IV.49}$$

La ecuación IV.49 expresada en forma adimensional:

$$U''' - M^2 U' + \text{Gr} / \text{Re} \, \theta' = 0 \quad \text{IV.50}$$

Evaluando la ecuación IV.50 en la pared izquierda:

$$U'''(-1/4) - M^2 U'(-1/4) = \text{Gr} / \text{Re} \quad \text{IV.51}$$

La condición de contorno en la pared derecha es:

$$U''(1/4) = -48 - R_{qf} / 2 \text{Gr} / \text{Re} \quad \text{IV.52}$$

La condición de contorno para el caso de paredes ( $T_1 - q_2$ ):

$$T(-L/2) = T_1, \quad \text{IV.53}$$

$q_2 = -k \, dT/dy \, (L/2)$  donde  $q_2$  es una constante

Estas ecuaciones pueden ser adimensionalizadas con  $\Delta T = q_2 D/k$ . Por lo tanto:

$$\theta(-1/4) = T_1 - T_0 / \Delta T, \, \theta'(1/4) = -1 \quad \text{IV.54}$$

Finalmente las condiciones de contorno para este caso son:

$$U'''(1/4) - M^2 U'(1/4) = \text{Gr} / \text{Re} \quad \text{IV.55}$$

$$U''(-1/4) = -48 - R_{qf} / 2 \text{Gr} / \text{Re} \quad \text{IV.56}$$

Las ecuaciones diferenciales en diferencias finitas que resultan de las ecuaciones adimensionales IV.41 IV.42, IV.45 e IV.46 son:

$$H_{i\Delta Y} + 2(U_i - U_{i+\Delta Y})/\Delta Y - 2(U_{i-\Delta Y} - U_i)/\Delta Y = 0 \quad \text{IV.57}$$

$$2(H_i - H_{i+\Delta Y})/\Delta Y - 2(H_{i-\Delta Y} - H_i)/\Delta Y + (M^2 \pm \phi)H_i\Delta Y \pm M^2\phi U_i\Delta Y + Br\Delta Y [(U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})^2/\Delta Y + G_r/Re Br M^2 U_i^2 \Delta Y \pm 48\phi\Delta Y = 0 \quad \text{IV.58}$$

$$(\Delta Y Re^2) dU_i/d\tau + 2(U_i - U_{i+\Delta Y})/\Delta Y - 2(U_{i-\Delta Y} - U_i)/\Delta Y - (\Theta_i G_r/Re + 48)\Delta Y + M^2 U_i \Delta Y = 0 \quad \text{IV.59}$$

$$(\Delta Y Re^2 Pr) d\theta_i/d\tau + 2(\theta_i - \theta_{i+\Delta Y})/\Delta Y - 2(\theta_{i-\Delta Y} - \theta_i)/\Delta Y - Br\Delta Y [(U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})^2/\Delta Y] - Br M^2 U_i \Delta Y^2 - \Delta Y \phi \theta_i = 0 \quad \text{IV.60}$$

Definiendo las corrientes para las ecuaciones IV.57 resulta:

$$J_{U,i+\Delta Y} = (U_i - U_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2) \quad \text{IV.61a}$$

$$J_{U,i-\Delta Y} = (U_{i-\Delta Y} - U_i) / (\Delta Y/2) \quad \text{IV.61b}$$

$$J_1 = H_i \Delta Y \quad \text{IV.61c}$$

$$\text{Las ecuaciones anteriores se puede expresar del modo siguiente: } J_{U,i+\Delta Y} - J_{U,i-\Delta Y} - J_1 = 0 \quad \text{IV.62}$$

Definiendo las corrientes para la ecuación IV.58 resulta:

$$J_{H,i+\Delta Y} = (H_i - H_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2) \quad \text{IV.63a}$$

$$J_{H,i-\Delta Y} = (H_{i-\Delta Y} - H_i) / (\Delta Y/2) \quad \text{IV.63b}$$

$$J_M^2 = (M^2 \pm \phi)H_i\Delta Y \quad \text{IV.63c}$$

$$J_{M^2\phi} = M^2\phi U_i\Delta Y \quad \text{IV.63d}$$

$$J_\phi = 48\phi\Delta Y \quad \text{IV.63e}$$

$$J_{GrUi} = Br\Delta Y [(U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})^2/\Delta Y] \quad \text{IV.63f}$$

$$J_{BrUi}^2 = G_r/Re Br M^2 U_i^2 \Delta Y \quad \text{IV.63g}$$

Estas corrientes se expresan mediante la ley de Kirchhoff:

$$J_{H,i+\Delta Y} - J_{H,i-\Delta Y} + J_M^2 - J_{M\phi}^2 + J_{GrU_i} + J_{BrU_i}^2 - J_\phi = 0 \quad \text{IV.64}$$

Definiendo las corrientes para la ecuación IV.59 resulta:

$$J_{U,i+\Delta Y} = (U_i - U_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2) \quad \text{IV.65a}$$

$$J_{U,i-\Delta Y} = (U_{i-\Delta Y} - U_i) / (\Delta Y/2) \quad \text{IV.65b}$$

$$J_{U_i\Theta_i} = (Gr / Re \Theta_i + 48) \Delta Y \quad \text{IV.65c}$$

$$J_{U_iC} = (\Delta Y Re^2) \partial U_i / \partial \tau \quad \text{IV.65d}$$

$$J_{U_iM_i} = M^2 U_i \Delta Y \quad \text{IV.65e}$$

Con estas corrientes la ecuación se puede expresar en forma de la ley de Kirchhoff

$$J_{U_iC} + J_{U,i+\Delta Y} - J_{U,i-\Delta Y} - J_{U_i\Theta_i} + J_{U_iM_i} = 0 \quad \text{IV.66}$$

Definiendo las corrientes para la ecuación IV.60 resulta:

$$J_{\theta,i+\Delta Y} = (U_i - U_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2) \quad \text{IV.67a}$$

$$J_{\theta,i-\Delta Y} = (U_{i-\Delta Y} - U_i) / (\Delta Y/2) \quad \text{IV.67b}$$

$$J_{\theta_i\phi} = \Delta Y \phi \theta_i \quad \text{IV.67c}$$

$$J_{\theta_iRe} = (\Delta Y Re^2 Pr) \partial \theta_i / \partial \tau \quad \text{IV.67d}$$

$$J_{\theta_iM} = Br M^2 U_i \Delta Y^2 \quad \text{IV.67e}$$

$$J_{\theta_iBr} = Br \Delta Y [(U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})^2 / \Delta Y] \quad \text{IV.67f}$$

Expresando estas corrientes mediante la ley de Kirchhoff

$$J_{\theta_iRe} + J_{\theta,i+\Delta Y} - J_{\theta,i-\Delta Y} - J_{\theta_iM} - J_{\theta_iBr} - J_{\theta_i\phi} = 0 \quad \text{IV.68}$$

Diseño de circuitos

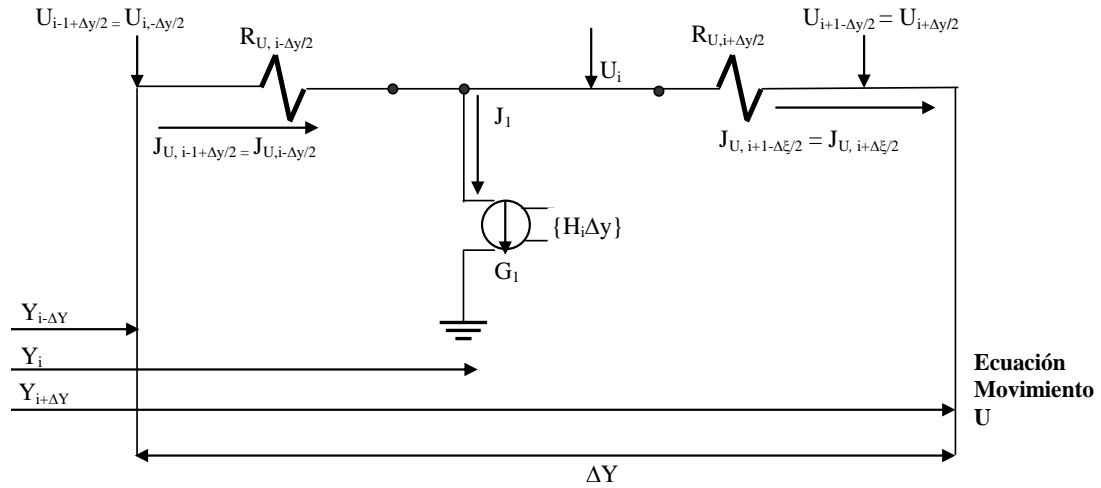


Figura IV.16. Nomenclatura y modelo en red válido para la ecuación IV.41 de cambio de variable

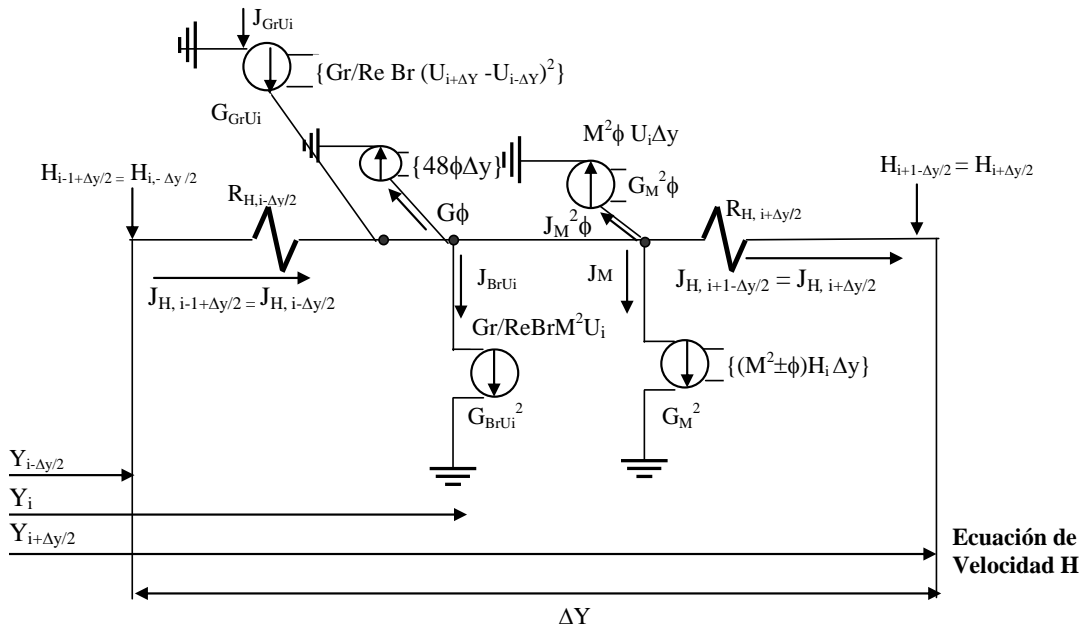


Figura IV.17. Nomenclatura y modelo en red válido para la ecuación IV.42 de velocidad del fluido H

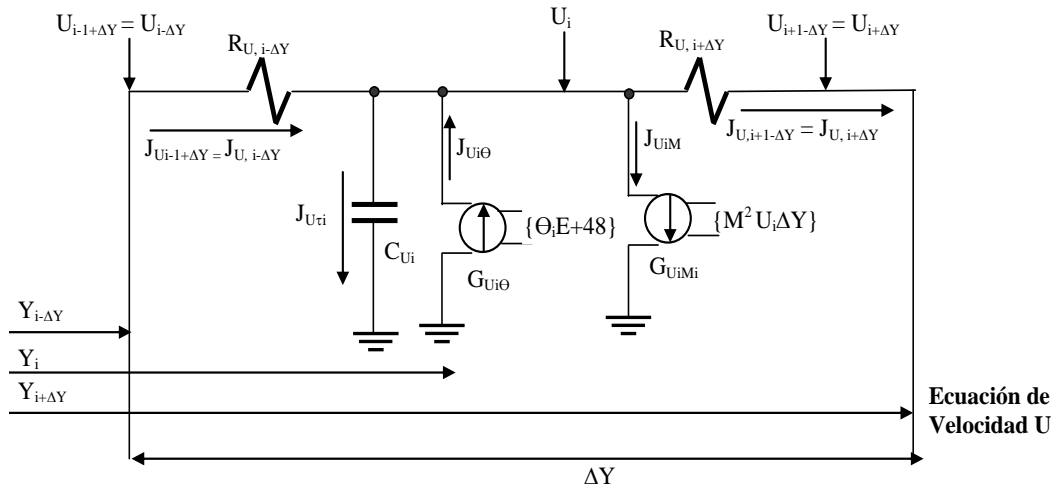


Figura IV.18. Nomenclatura y modelo en red válido para la ecuación IV.45 de velocidad del fluido  $U$

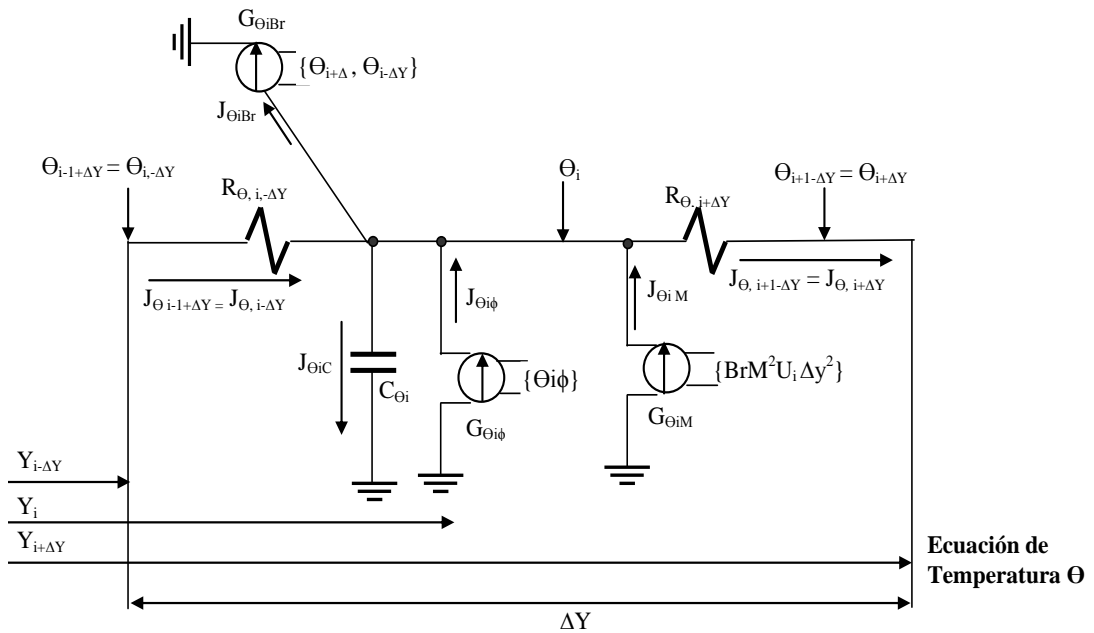


Figura IV.19. Nomenclatura y modelo en red válido para la ecuación IV.46 de temperatura  $\theta$

## Descripción de los circuitos

La figura IV.16 muestra el circuito para la ecuación IV.41. En este circuito  $J_{U, i+\Delta Y/2}$  y  $J_{U, i-\Delta Y}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda respectivamente, implementadas mediante dos resistencias de valor " $\Delta Y/2$ ". El único generador de corriente controlado por voltaje es G que proporciona " $H_{i\Delta Y}$ ".

La figura IV.17 muestra el circuito para la ecuación IV.42, para obtener la velocidad H del fluido. En este circuito,  $J_{H_{i+\Delta Y}}$  y  $J_{H_{i-\Delta Y}}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda, respectivamente, que son implementadas mediante dos resistencias de valor " $\Delta Y/2$ ". Se han utilizado cinco generadores de corriente controlados por voltaje ( $G_M^2$ ,  $G_{M\phi}^2$ ,  $G_\phi$ ,  $G_{GrUi}$  y  $G_{BrUi}^2$ ) para generar las corrientes  $J_M^2$ ,  $J_{M\phi}^2$ ,  $J_\phi$ ,  $J_{GrUi}$  y  $J_{BrUi}^2$ , respectivamente. El generador  $G_M^2$  proporciona " $(M^2 \pm \phi) H_i \Delta Y$ ".

$G_{M\phi}^2$  genera " $M^2 \phi U_i \Delta Y$ " siendo  $U_i$  el voltaje (velocidad) del nodo i.  $G_\phi$  genera " $48 \phi \Delta Y$ " y el generador  $G_{GrUi}$  proporciona " $Gr/ReBr (U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})^2$ ", siendo  $U_{i+\Delta Y}$  y  $U_{i-\Delta Y}$  los voltajes (velocidades) de los nodos  $i+\Delta Y$  y  $i-\Delta Y$ , respectivamente. Por último, el generador  $G_{BrUi}^2$  proporciona " $Gr/ReBr M^2 U_i^2 \Delta Y$ ".

Para generar las condiciones de contorno en el caso de paredes ( $T_1 - T_2$ ), es necesario emplear dos fuentes de tensión de valores  $U''(-1/4) = "-48 + R/2Gr/Re "$  y  $U''(1/4) = "-48 - R/2Gr/Re "$  junto con dos fuentes de voltaje constantes  $U(-1/4) = 0$  y  $U(1/4) = 0$ .

La figura IV.18 muestra el circuito para la ecuación IV.43.  $J_{U, i+\Delta Y/2}$  y  $J_{U, i-\Delta Y}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda, respectivamente, implementadas mediante dos resistencias de valor  $\Delta Y/2$ . La corriente  $J_{U_{iC}}$  es implementada mediante el condensador C que se rige por la expresión  $(\Delta y Re^2) \partial U / \partial \tau$ . Los generadores de control de corriente  $G_{U_{iM}}$  y  $G_{U_{i\Theta}}$ , proporcionan  $J_{U_{iM}}$  y  $J_{U_{i\Theta}}$ , respectivamente.  $G_{U_{iM}}$  proporciona " $M^2 U_i \Delta Y$ " siendo  $U_i$  el voltaje (velocidad) del nodo i.  $G_{U_{i\Theta}}$  proporciona " $(Gr/Re \Theta_i + 48) \Delta Y$ " siendo  $\Theta_i$  el voltaje (temperatura) en el nodo i. El último requisito para poder completar este circuito es la implementación de las condiciones de contorno, mediante fuentes de voltaje constantes nulas  $U(-1/4) = U(1/4) = 0$ .

La figura IV.19 muestra el circuito para la ecuación IV.60. En este circuito  $J_{\theta, i-\Delta Y/2}$  y  $J_{\theta, i+\Delta Y}$  representan las corrientes que abandonan y entran a la celda para la temperatura, implementadas mediante dos resistencias cuyo valor es  $\Delta Y/2$ . Para el diseño de este circuito son necesarios tres generadores de corriente controlados por voltaje, para generar las corrientes  $J_{\theta i\phi}$ ,  $J_{\theta iM}$  y  $J_{\theta iBr}$  respectivamente.  $J_{\theta i\phi}$  genera “ $\Delta Y\phi\theta_i$ ” siendo  $\theta_i$  el voltaje en el nodo  $i$ ,  $J_{\theta iM}$  genera “ $BrM^2U_i\Delta Y^2$ ” siendo  $U_i$  el voltaje del nodo  $i$  y la última corriente  $J_{\theta iBr}$  proporciona el valor “ $Br \Delta Y [(U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})^2 / \Delta Y]$ ”. El condensador del circuito  $C_{\theta iC} = \Delta Y Re^2 Pr$  genera la corriente  $J_{\theta iRe}$ .

Las condiciones de contorno para el caso de paredes ( $T_1 - T_2$ ) son implementadas mediante fuentes de voltaje constantes  $\theta(-1/4) = -R_f/2$  y  $\theta(1/4) = R_f/2$ .

## 4.2.4. Fluido no newtoniano

### Análisis matemático

La aproximación de segundo orden de la ecuación general dada por Rivlin y Erickson se puede escribir de la siguiente forma:

$$T = -pI + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2 \quad \text{IV.69}$$

$T$  es la tensión,  $p$  la presión,  $I$  el vector unitario,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  los módulos de tensión normal y  $A_1$  y  $A_2$  las tensiones cinemáticas definidas:

$$A_1 = \text{grad}V + (\text{grad}V)^T \quad \text{IV.70}$$

$A_2 = dA_1/dt + A_1 (\text{grad}V) + (\text{grad}V)^T A_1$ ,  $V$  es la velocidad,  $\text{grad}$  el gradiente y  $d/dt$  la diferencial con respecto al tiempo.

Para los fluidos del tipo IV.69 que son compatibles con la Termodinámica, verifican:

- i) Todos los movimientos del fluido cumplen la desigualdad de Clausius-Duhem.
- ii) Se asume que la energía libre específica de Helmholtz es mínima cuando el fluido esté en equilibrio.

$$\mu \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad \text{IV.71}$$

Podemos considerar los flujos unidireccionales de la forma:

$$V = u(y, t) i \quad \text{IV.72}$$



En la expresión IV.72,  $u$  es la velocidad en la dirección de coordenadas  $x$  e  $i$  el vector unitario en la dirección  $x$ .

Substituyendo en la expresión IV.69 la tensión  $T$  en el balance del momento lineal

$$\text{div } T + \rho b = \rho dV/dt \quad \text{IV.73}$$

y utilizando la expresión IV.72, considerando la condición de fluido incompresible, obtenemos

$$\mu \partial^2 u / \partial y^2 + \alpha_1 \partial^3 u / \partial y^2 \partial t - \rho \partial u / \partial t = \partial p / \partial x \quad \text{IV.74}$$

$\rho$  es la densidad del fluido y  $b$  es el campo conservativo. Esta ecuación implica la existencia del siguiente flujo, para el caso de un fluido de segundo grado.

**Primer caso:** “Flujo entre dos límites rígidos con inicio repentino de movimiento”

Supongamos ahora que el fluido está limitado por dos límites rígidos en  $y = 0$  e  $y = d$ .

Las superficies en  $y = 0$  e  $y = d$  están inicialmente en reposo y repentinamente alcanzan velocidades estacionarias  $U_0$  y  $U_1$ , respectivamente. La ecuación diferencial que rige este proceso es:

$$\rho \partial u / \partial t - \mu \partial^2 u / \partial y^2 - \alpha_1 \partial^3 u / \partial y^2 \partial t = 0 \quad \text{IV.75}$$

con las condiciones de contorno:

$$u(0, t) = U_0, u(d, t) = U_1 \quad \text{IV.76}$$

$u(y, 0) = 0$ , para  $0 < y \leq d$

$$u(y, t) = \Phi(y) - \Psi(y, t) \quad \text{IV.77}$$

$\Phi(y)$  es una función independiente del tiempo, que representa la solución en estado estacionario,  $\alpha_1$  es el modulo de esfuerzos normal, y  $\Psi(y, t)$  es una función que representa la desviación para el estado estacionario. Insertando la ecuación IV.77 en la ecuación IV.74, hallaremos que las funciones  $\Phi(y)$  y  $\Psi(y, t)$ , satisfacen respectivamente.

$$d^2 \Phi / dy^2 = 0 \quad \text{IV.78}$$

$$\mu \partial^2 \Psi / \partial y^2 + \alpha_1 \partial^3 \Psi / \partial y^2 \partial t - \rho \partial \Psi / \partial t = 0 \quad \text{IV.79}$$

con las condiciones de contorno:

$$\Phi(0) = U_0, \Phi(d) = U_1, \Psi(0, t) = 0, \Psi(d, t) = 0, t > 0, \quad \text{IV.80}$$

$$\Psi(y, 0) = \Phi(y) \quad \text{IV.81}$$

Resolviendo para  $\Phi(y)$ , utilizando las ecuaciones: IV. 78 y IV.80

$$\Phi(y) = U_0 + y/d (U_1 - U_0) \quad \text{IV.82}$$

La función  $\Psi(y, t)$  la obtendremos a partir de la ecuación IV.79, y las condiciones de contorno IV.80.

Una solución para  $\Psi$  que satisface estas dos condiciones de contorno es la siguiente:

$$\exp[-\beta_1(n\pi/d)^2 t] \sin(n\pi y/d) \quad \text{IV.83}$$

$$\text{siendo } \beta_1 = \mu / (\rho + \alpha_1(n\pi/d)^2) \quad \text{IV.84}$$

siendo  $n$  un número entero. Ahora intentaremos satisfacer la condición para  $\Psi$  en  $t = 0$ , utilizando todo el conjunto de soluciones:

$$\sum A_n \sin(n\pi y/d) = \Psi(y, 0) = U_0 + y/d (U_1 - U_0) \quad \text{IV.85}$$

Esto requiere:

$$A_n = 2/d \int_0^d (U_0 + y/d (U_1 - U_0)) \sin(n\pi y/d) dy = 2U_0/n\pi - 2U_1(-1)^n/n\pi \quad \text{IV.86}$$

La distribución de velocidad está dada por:

$$u(y, t) = (U_0 + y/d (U_1 - U_0)) - 2/\pi \sum 1/n (U_0 - U_1 \cos n\pi) \exp[-\beta_1(n\pi/d)^2 t] \sin(n\pi y/d) \quad \text{IV.87}$$

**Segundo caso:** “Flujo debido a dos límites infinitos, uno oscilante y otro libre”

En este caso el fluido está rodeado por un límite rígido en  $y = 0$  y otra libre en  $y = d$ . El fluido está inicialmente en reposo y comienza a moverse de repente debido al movimiento de la placa en  $y = 0$ . La ecuación que rige este proceso es de nuevo IV.75

La diferencia con el caso anterior, está en las condiciones de contorno. En esta ocasión las condiciones son:  $u(0,t) =$

$$U_0, \quad \partial u(d,t)/\partial y = 0 \text{ en } t > 0 \text{ y } (u(y,0) = 0 \text{ en } 0 < y \leq d) \quad \text{IV.88}$$

La solución analítica obtenida en este segundo caso es la siguiente:

$$u(y,t) = U_0 \left\{ 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} [\cos(2n+1) \frac{\pi}{2} - 1] \exp[-\beta_2 ((2n+1)\pi/2d)^2 t] \sin(2n+1) \frac{\pi y}{2d} \right\}$$

$$\text{siendo } \beta_2 = \mu / [\rho + \alpha_1 (2n+1)^2 \pi^2 / 4d^2]^{-1}$$

IV.89

## Modelado en red

Se presenta en este apartado, el modelo en red perteneciente al primer caso planteado en este apartado. El método empleado parte de la ecuación diferencial IV.75 obtenida mediante una discretización espacial en la que el tiempo permanece como una variable continua. La discretización correspondiente se presenta de la siguiente forma :

$$\rho \Delta y dU_i/dt + 2(U_i - U_{i+\Delta y})/\Delta y - 2(U_{i-\Delta y} - U_i)/\Delta y - 2(U_{i+\Delta y} - U_{i-\Delta y})(1/\Delta y + U_{hi}) \alpha_1 / (\rho \Delta y \Delta y) + 2(U_{i+\Delta y} - (1/\Delta y + U_{hi}) \alpha_1 / (\rho \Delta y \Delta y)) = 0$$

IV.90

A partir de esta ecuación discretizada, podemos definir los correspondientes flujos de velocidad, junto con la ley de Kirchoff, y el correspondiente diseño del circuito eléctrico.

### Flujos de velocidad:

IV.91

$$J_{U_{it}} = \rho \Delta y dU_i/dt$$

$$J_{G_{li}} = 2(U_i - U_{i+\Delta y})(1/\Delta y + U_{hi}) \alpha_1 / (\rho \Delta y^2)$$

$$J_{G_{2i}} = (U_{i+\Delta y} - U_i)(1/\Delta y + U_{hi}) \alpha_1 / (\rho \Delta y^2)$$

Estas ecuaciones son las de Kirchoff:

$$J_{U_{it}} - J_{G_{li}} + J_{G_{2i}} = 0$$

IV.92

## Diseño de circuitos

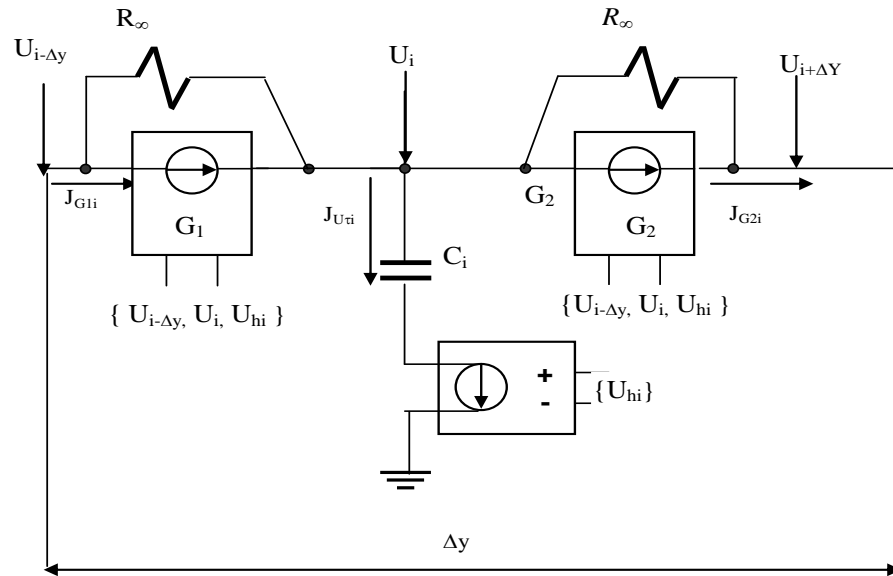


Figura IV.20. Nomenclatura y modelo en red válido para la ecuación movimiento U

En este último circuito  $J_{G1i}$  y  $J_{G2i}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda elemental, implementadas mediante dos generadores corrientes controlados por tensión ( $G_1$ ,  $G_2$ ), para generar las corrientes anteriores. De este modo,  $G_1$  genera:  $"2(U_{i+\Delta y} - U_{i-\Delta y}) (1/\Delta y + U_{hi}) \alpha_1 / (\rho \Delta y^2)"$ , siendo  $U_{i-\Delta y}$  y  $U_i$  los voltajes (velocidades) en los nodos  $i - \Delta y$ ,  $i$ , respectivamente y  $"U_{hi} = \rho \Delta y dU/d\tau"$ , obtenida mediante un convertidor corriente/tensión colocado en serie del condensador y a masa. Análogamente  $G_2$  genera:  $"2(U_{i+\Delta y} - U_{i-\Delta y}) (1/\Delta y + U_{hi}) \alpha_1 / (\rho \Delta y^2)"$ . Se han empleado dos resistencias de valores  $\Delta y/2$ . Mientras, la corriente  $J_{U\tau i}$  es implementada mediante un condensador de capacidad  $C_{U\tau} = \rho \Delta y$ , obteniéndose de esta forma la corriente  $J_{U\tau} = \rho \Delta y dU_i/d\tau$ . Las condiciones de contorno son implementadas por una fuente de voltaje constante en  $y = 0$  e  $y = d$  para simular las velocidades ( $U = U_0$ ,  $U = U_1$ ). La condición inicial  $U = 0$  para  $\tau = 0$  se aplica al condensador  $C_i$ .

## 4.2.5. Convección libre magnetohidrodinámica en un medio poroso

### Análisis matemático

En esta sección consideramos un fluido bidimensional inestable, laminar, viscoso, conductor de electricidad a través de una superficie vertical permeable semi-infinita en un medio poroso y en presencia de un campo magnético transversal uniforme y de los efectos de flotabilidad de concentración y térmica. Las propiedades del fluido son constantes. La concentración de difusión de especies es muy pequeña en comparación con otras especies químicas. Las ecuaciones que rigen el proceso son las siguientes:

$$\partial v / \partial y = 0 \quad \text{IV.93}$$

$$\partial u / \partial t' + v \partial u / \partial y = \nu \partial^2 u / \partial y^2 + g \beta_T (T - T_\infty) + g \beta_C (C' - C_\infty) - (\sigma B_0^2 / \rho + \nu / K^*) u \quad \text{IV.94}$$

$$\partial T / \partial t' + v \partial T / \partial y = k / \rho c_p \partial^2 T / \partial y^2 - Q_0 / \rho c_p (T - T_\infty) + R^* (C' - C_\infty) \quad \text{IV.95}$$

$$\partial C' / \partial t' + v \partial C' / \partial y = D \partial^2 C' / \partial y^2 - K_L (C' - C_\infty) \quad \text{IV.96}$$

En estas ecuaciones  $x$  e  $y$  son las distancias dimensionales a lo largo y ancho de la superficie respectivamente.  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad dimensional en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente,  $T$  es la temperatura dimensional,  $C$  es la concentración dimensional,  $C_w$  y  $T_w$  son la concentración y temperatura en la parte de la superficie, respectivamente,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $c_p$  es el calor específico a presión constante,  $\sigma$  es la conductividad eléctrica,  $B_0$  es la inducción magnética,  $K^*$  es la permeabilidad del medio poroso,  $Q_0$  es el coeficiente de absorción de calor dimensional,  $R$  es el coeficiente de proporcionalidad del coeficiente de absorción de radiación,  $D$  es la difusividad de masa,  $g$  es la aceleración de la gravedad, and  $\beta_T$  and  $\beta_C$  son los coeficientes de expansión de concentración y térmica, respectivamente y  $K_L$  es el parámetro de reacción química.

Las disipaciones viscosa y magnética son insignificantes en este estudio.  $D$  es la difusividad molecular química,  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $\sigma$  es la permeabilidad magnética del fluido,  $V_0$  es la velocidad de succión constante,  $k$  es la conductividad térmica,  $q$  es el flujo de calor por unidad de área. De la ecuación IV.93 se deduce que  $v = u_0$  correspondiente a la velocidad constante normal a la superficie.

Las correspondientes condiciones de contorno para la velocidad, temperatura y concentración son las siguientes :

$$u = 0, T = T_w, C' = C_w \text{ para } t' \leq 0$$

$$u = 0, T = T_w, C' = C_w \text{ para } y' = 0, t' > 0$$

$$u \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty, C' \rightarrow C_\infty \text{ para } y' \rightarrow \infty, \text{ para } t' > 0 \quad \text{IV.97}$$

Las ecuaciones anteriores son adimensionalizadas mediante los siguientes parámetros:

$$Y = yu_0/\nu, U = u/u_0, \Theta = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty), C = (C' - C_w)/(C_w - C_\infty), t = t' u_0^2/\nu, G_{rt} = g \beta_T \nu (T_w - T_\infty)/u_0^3, G_{rc} = g \beta_C \nu (C_w - C_\infty)/u_0^3, Pr = \mu C_p/k, Sc = \nu/D, K' = \nu K^*/u_0^2, R = \nu \sigma R^* (C_w - C_\infty)/(T_w - T_\infty) V_0^2, M = \sigma B_0^2 \nu / \rho V_0^2, \phi = Q_0 \nu / p c_p V_0^2, K = K_L \nu / V_0^2 \quad \text{IV.98}$$

De acuerdo con las expresiones IV.98 las ecuaciones IV.94 - IV.96 pueden ser expresadas de la siguiente forma :

$$\partial U / \partial t - \partial U / \partial y = \partial^2 U / \partial Y^2 + G_{rt} \Theta + G_{rc} C - (M+1/K') U \quad \text{IV.99}$$

$$Pr \partial \Theta / \partial t - Pr \partial \Theta / \partial y = \partial^2 \Theta / \partial Y^2 - Pr \phi \Theta + Pr R C \quad \text{IV.100}$$

$$Sc \partial C / \partial t - Sc \partial C / \partial y = \partial^2 C / \partial Y^2 - Sc K C \quad \text{IV.101}$$

Las condiciones de contorno correspondientes: IV.102

$$U = 0, \Theta = 0, C = 0 \text{ para } t \geq 0$$

$$U = 0, \Theta = 1, C = 1 \text{ para } Y = 0, t > 0$$

$$U \rightarrow 0, \Theta \rightarrow 0, C \rightarrow 0, \text{ para } Y \rightarrow \infty, t > 0$$

## Modelado en Red

Las ecuaciones diferenciales en diferencias finitas son las siguientes :

$$\Delta Y dU_i/dt - (U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y}) = 2(U_{i-\Delta Y} - U_i)/\Delta Y - 2(U_i - U_{i+\Delta Y})/\Delta + G_{rt} \Theta_i \Delta Y + G_{rc} C_i \Delta Y - (M+1/K)U_i \Delta Y$$

$$\text{Pr} \Delta Y d\Theta_i/dt - \text{Pr} (\Theta_{i+\Delta Y} - \Theta_{i-\Delta Y}) = 2(\Theta_{i-\Delta Y} - \Theta_i)/\Delta Y - 2(\Theta_i - \Theta_{i+\Delta Y})/\Delta Y - \text{Pr} \phi \Theta_i \Delta Y + \text{Pr} R \Theta_i \Delta Y \quad \text{IV.103}$$

$$\text{Sc} \Delta Y dC_i/dt - \text{Sc} (C_{i+\Delta Y} - C_{i-\Delta Y}) = 2(C_{i-\Delta Y} - C_i)/\Delta Y - 2(C_i - C_{i+\Delta Y})/\Delta Y - \text{Sc} \phi C_i \Delta Y$$

Definiendo las correspondientes corrientes:

(i) *Ecuación de movimiento:* IV.104

$$J_{U_{i+\Delta Y}} = (U_i - U_{i+\Delta Y})/(\Delta Y/2)$$

$$J_{U_{i-\Delta Y}} = (U_{i-\Delta Y} - U_i)/(\Delta Y/2)$$

$$J_{U_{ir}} = \Delta Y dU_i/dt$$

$$J_{U_{igr}} = G_{rt} \Theta_i \Delta Y$$

$$J_{U_{irc}} = G_{rc} C_i \Delta Y$$

$$J_{U_i} = (U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})$$

$$J_{U_{im}} = (M+1/K) U_i \Delta Y$$

$J_{U_{i+\Delta Y}}$  y  $J_{U_{i-\Delta Y}}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda de velocidad implementadas mediante dos resistencias de valor  $\Delta Y/2$ . De igual modo, la corriente  $J_{U_{ir}}$  se implementa mediante el condensador  $C_{U_{ir}} = \Delta Y dU_i/dt$ . Por último se destacan cuatro generadores de corriente ( $G_{U_{igr}}$ ,  $G_{U_{irc}}$ ,  $G_{U_i}$  y  $G_{U_{im}}$ ) para generar las corrientes  $J_{U_{M_i}}$ ,  $J_{U_{G_{mi}}}$ ,  $J_{U_{Gi}}$  y  $J_{U_i}$ , respectivamente.  $G_{U_{igr}}$  genera “ $G_{rt} \Theta_i \Delta Y$ ”, con  $\Theta_i$  siendo el voltaje (temperatura) of the node i.  $G_{U_{irc}}$  proporciona “ $G_{rc} C_i \Delta Y$ ”, con  $C_i$  siendo el voltaje (concentración) del nodo i.  $G_{U_i}$  proporciona “ $(U_{i+\Delta Y} - U_{i-\Delta Y})$ ”, con  $U_{i+\Delta Y}$  y  $U_{i-\Delta Y}$  siendo los voltajes (velocidades) de los nodos  $i+\Delta Y$  y  $i-\Delta Y$ , respectivamente. Finalmente, el generador de corriente de control de voltaje  $G_{U_{im}}$  genera “ $(M+1/K)U_i \Delta Y$ ” con  $U_i$  siendo el voltaje (velocidad) del nodo i. El requerimiento final es la incorporación de las condiciones de contorno. La correspondiente condición de contorno de primer tipo, requiere una fuente de voltaje constante.

(ii) Ecuación de temperatura:

IV.105

$$J_{\theta, i+\Delta Y} = (\Theta_i - \Theta_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{\theta, i-\Delta Y} = (\Theta_{i-\Delta Y} - \Theta_i) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{\theta i} = Pr \Delta Y d\Theta_i / dt$$

$$J_{\phi \Theta_i} = Pr \phi \Theta_i \Delta Y$$

$$J_{\Theta_i} = Pr (\Theta_{i+\Delta Y} - \Theta_{i-\Delta Y})$$

$$J_{R\Theta_i} = Pr R \Theta_i \Delta Y$$

$J_{\theta, i+\Delta Y}$  y  $J_{\theta, i-\Delta Y}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda de temperatura implementadas por dos resistencias de valor  $\Delta Y/2$ .  $J_{\theta i}$  es la corriente implementada por el condensador de capacidad  $C_{\theta i} = Pr \Delta Y dU_i / dt$ . En este caso, son necesarios tres generadores de corriente de control de voltaje ( $G_{\phi \Theta_i}$ ,  $G_{\Theta_i}$  y  $G_{R\Theta_i}$ ) para generar las corrientes  $J_{\phi \Theta_i}$ ,  $J_{\Theta_i}$  y  $J_{R\Theta_i}$  respectivamente.  $G_{\phi \Theta_i}$  proporciona " $Pr \phi \Theta_i \Delta Y$ ", con  $\Theta_i$  siendo el voltaje (temperatura) del nodo  $i$ .  $G_{\Theta_i}$  proporciona " $Pr (\Theta_{i+\Delta Y} - \Theta_{i-\Delta Y})$ ", con  $\Theta_{i+\Delta Y}$  y  $\Theta_{i-\Delta Y}$  siendo los voltajes (temperaturas) de los nodos  $i+\Delta Y$  y  $i-\Delta Y$ , respectivamente, y  $G_{R\Theta_i}$  proporciona " $Pr R \Theta_i \Delta Y$ ".

(iii) Ecuación de concentración:

IV.106

$$J_{C, i+\Delta Y} = (C_i - C_{i+\Delta Y}) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{C, i-\Delta Y} = (C_{i-\Delta Y} - C_i) / (\Delta Y/2)$$

$$J_{C i} = Sc \Delta Y dC_i / dt$$

$$J_{C \phi} = Sc K' C_i \Delta Y$$

$$J_{C i} = Sc (C_{i+\Delta Y} - C_{i-\Delta Y})$$



$J_{C_{i+\Delta Y}}$  y  $J_{C_{i-\Delta Y}}$  son las corrientes que abandonan y entran a la celda de concentración implementadas por dos resistencias de valor  $\Delta Y/2$ .  $J_{C_{ir}}$  es la corriente implementada por el condensador de capacidad " $Sc\Delta Y dC_i/dt$ ". Se necesitan dos generadores de corriente ( $G_{C_{ip}}$  y  $G_{C_i}$ ) para generar las corrientes  $J_{C_{ip}}$  y  $J_{C_i}$  respectivamente.  $G_{C_{ip}}$  proporciona " $Sc\phi C_i \Delta Y$ ", con  $C_i$  siendo el voltaje (concentración) del nodo  $i$ , y  $G_{C_i}$  proporciona " $Sc(C_{i+\Delta Y} - C_{i-\Delta Y})$ ", con  $C_{i+\Delta Y}$  and  $C_{i-\Delta Y}$  los voltajes de los nodos  $i+\Delta Y$  and  $i-\Delta Y$ , respectivamente.

Las ecuaciones anteriores son las ecuaciones de Kirchhoff siguientes:

IV.107

$$-J_{U_{ir}} + J_{U_{i-\Delta Y}} - J_{U_{i+\Delta Y}} + J_{UG_{ii}} + J_{UG_{mi}} + J_{U_i} - J_{U_{im}} = 0$$

$$-J_{\theta_{ir}} + J_{\theta_{i-\Delta Y}} - J_{\theta_{i+\Delta Y}} + J_{R_{\theta i}} - J_{\phi_{\theta i}} + J_{\theta_i} = 0$$

$$-J_{C_{ir}} + J_{C_{i-\Delta Y}} - J_{C_{i+\Delta Y}} - J_{C_{ip}} + J_{C_i} = 0$$

# CAPÍTULO CINCO

## Análisis y validación de resultados

---

### 5.1. Introducción

5.1.1. Fluido magnetohidrodinámico y transferencia de calor sobre un disco giratorio

5.1.2. Transferencia en masa y calor mediante un flujo hidromagnético en una superficie vertical en movimiento

5.1.3. Convección mixta hidromagnética laminar en un canal vertical de placas paralelas

5.1.4. Flujos inestables de fluidos de segundo grado no newtonianos

5.1.4.1. Fluido rodeado por dos límites con inicio repentino de movimiento

5.1.4.2. Flujo debido al repentino movimiento de uno de los límites

5.1.5. Convección libre magnetohidrodinámica sobre una superficie permeable vertical en un medio poroso

### 5.2. Referencias

---

## 5.1. Introducción

En este capítulo se realiza una simulación numérica estacionaria y transitoria, de todos los problemas abordados en esta memoria. Los resultados de temperatura, velocidad, presión y concentración son presentados numéricamente mediante representaciones gráficas. Los resultados obtenidos nos revelan el efecto de la influencia de los parámetros involucrados en cada caso analizado, mostrándose además otros resultados obtenidos por otros autores, para hacer constar que los obtenidos con el MESIR son correctos. Se observa una gran precisión y fiabilidad en los problemas estudiados dentro del campo de la mecánica de fluidos.

### 5.1.1. Fluido magnetohidrodinámico y transferencia de calor sobre un disco giratorio

Las figuras V.1 y V.2 muestran el alto grado de fiabilidad entre los resultados estacionarios de las componentes axial y radial de velocidad, entre los datos numéricos ofrecidos por el MESIR y los datos obtenidos por el estudio realizado por los investigadores [Sparrow y Cess 1960, citada en la página 37] y [Takhar 1968, citada en página 37]. Este análisis comienza con la representación de las figuras de las componentes de velocidad  $H$ ,  $F$ ,  $G$  se corresponden con las, axial, radial y tangencial. A continuación se representarán los resultados de temperatura  $\theta$  y presión  $P$ . Las figuras expuestas representan los resultados de velocidad para los valores del parámetro  $M = 0, 0.5, 1, 2$  y  $4$  y los resultados de temperatura para los valores del número de Prandtl  $Pr = 0.7, 3, 7, 10$  y  $20$ .

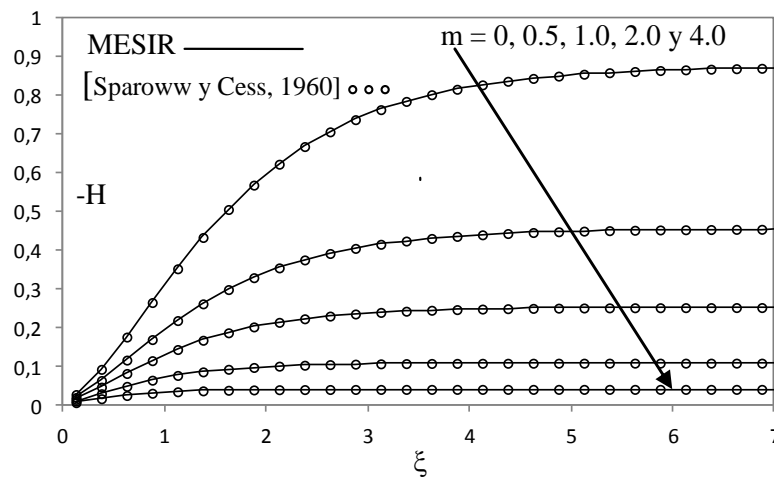


Figura V.1. Comparación de resultados para el efecto del parámetro magnético  $M$  sobre la componente axial de velocidad  $-H$

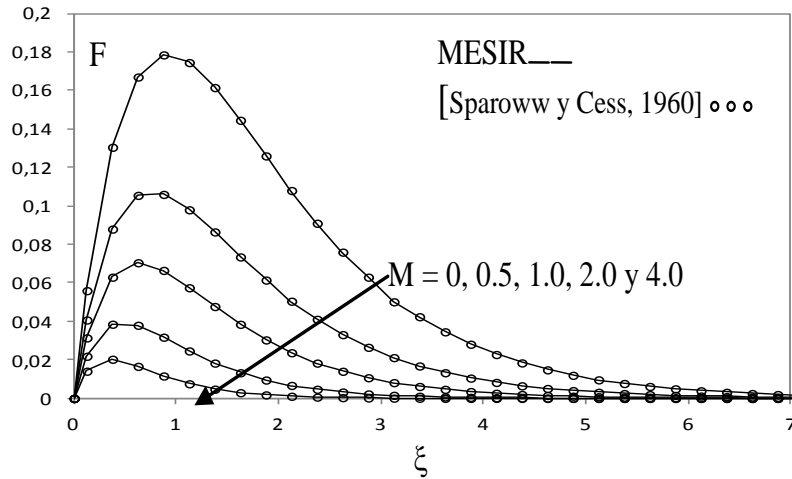


Figura V.2. Comparación de resultados para el efecto del parámetro magnético  $M$  sobre la componente radial de la velocidad  $F$

El campo magnético está aplicado en la dirección axial, y no hay una fuerza magnética que actúe retrasando la componente axial de velocidad. Existe la componente radial de la fuerza magnética,  $F_r = -\sigma r \omega B_0^2$  que se opone a la velocidad radial. El decrecimiento de la velocidad radial está reflejado como un decrecimiento de la velocidad axial, tal y como se refleja en las figuras V. 1 y V. 2.

De la figura V.1 se puede deducir que la velocidad en la dirección axial  $-H$ , se hace más constante cerca de la superficie del disco conforme el valor del parámetro magnético incrementa.

En la figura V.2 también se puede comprobar el decrecimiento de la velocidad en la dirección radial  $F$  conforme aumenta el valor del parámetro  $M$ .

El campo magnético también induce otra fuerza en la dirección tangencial  $F_\phi = -\sigma r \omega G B_0^2$ , la cual tiende a oponerse directamente a la velocidad tangencial, según se observa de la figura V.3 los valores de la velocidad tangencial decrecen cuando aumenta el valor del parámetro  $M$ .

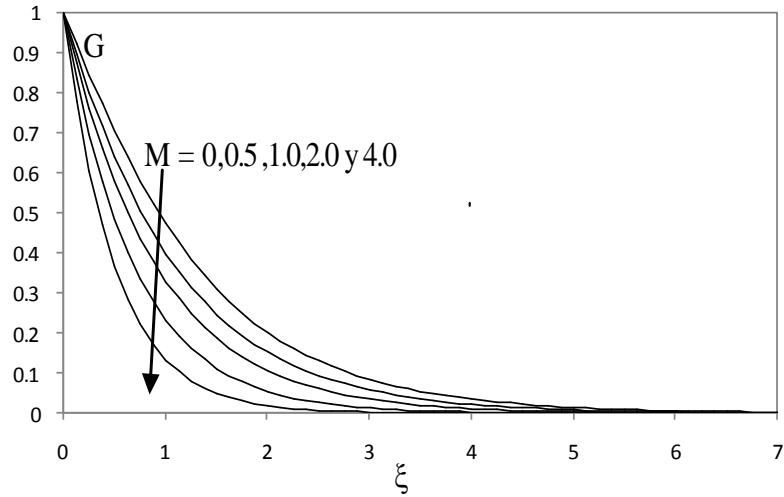


Figura V.3. Efecto del parámetro magnético  $M$  sobre la componente tangencial de velocidad  $G$

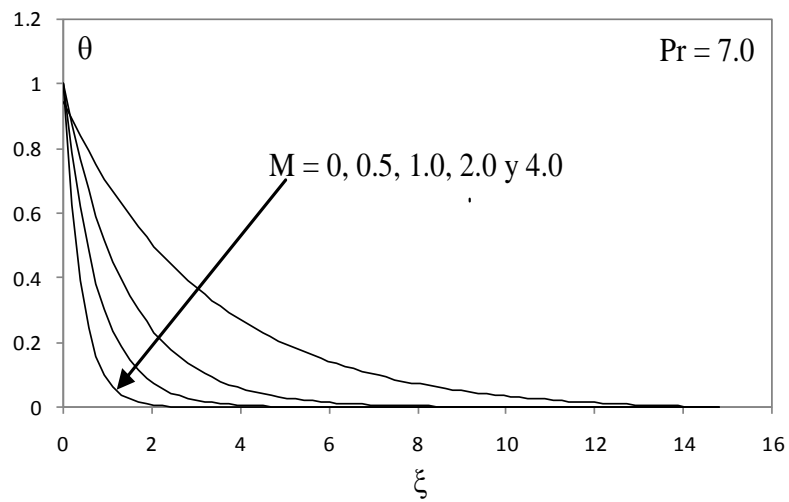


Figura V.4. Efecto del parámetro magnético  $M$  sobre la temperatura  $\theta$ , para  $Pr = 7.0$

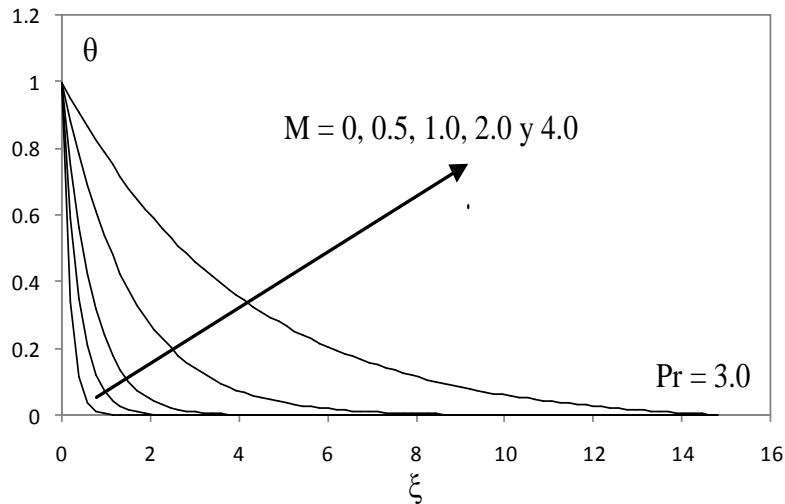


Figura V.5. Efecto del parámetro del parámetro magnético M sobre la temperatura  $\theta$ , para  $Pr = 3.0$

Una vez analizado el efecto del parámetro magnético M sobre las componentes de velocidad, se procede al análisis del efecto del mismo parámetro sobre los resultados de temperatura. En las figuras V.4 y V.5 se han representado los resultados de temperatura, para varios valores del parámetro magnético M y número de Prandtl Pr. La figura V.4 representa la variación de temperatura para los valores del parámetro magnético  $M = 0, 0.5, 1.0$  y  $2.0$  y  $Pr = 7.0$ .

La figura V. 5 expone los resultados de temperatura en función de los valores del parámetro magnético  $M = 0, 0.5, 1.0, 2.0$  y  $4.0$  y  $Pr = 3.0$ . Estas figuras muestran el crecimiento experimentado por los resultados de temperatura cuando el parámetro magnético M aumenta. Debemos destacar que el motivo de esta tendencia se debe al decrecimiento de la velocidad axial con el aumento del parámetro magnético.

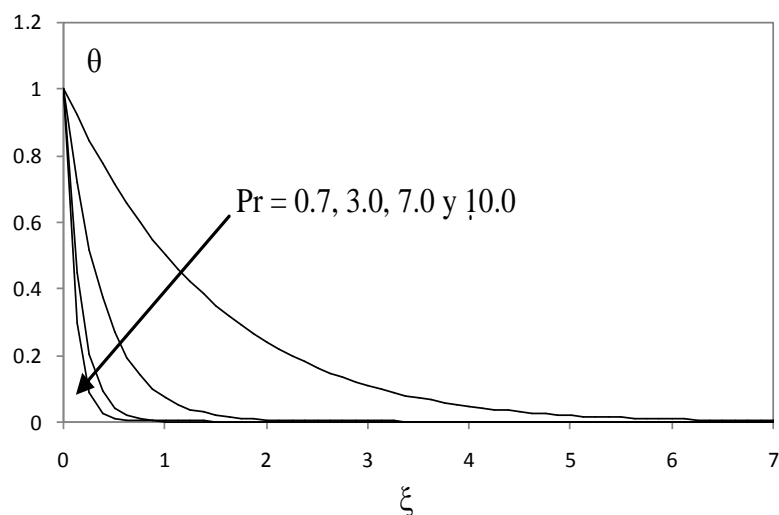


Figura V.6. Efecto del número de Prandtl Pr sobre la temperatura  $\theta$

La figura V.6 muestra el efecto del número Pr sobre los resultados de temperatura. Los resultados gráficos reflejan, el decrecimiento de la temperatura conforme aumenta el número de Prandtl Pr. Además, podemos comprobar, como era de esperar, que el espesor de la capa límite térmica disminuye al aumentar Pr.

Finalmente, del análisis realizado de la presión P en función del parámetro magnético M (no representado gráficamente), se observa el decrecimiento de los valores de presión a medida que incrementa el valor del parámetro M.

## Régimen transitorio

En este apartado se analizan los casos no estacionarios, por lo que en el modelo en red elemental omitimos el condensador aparecerá el condensador conectado del centro de la celda a tierra. El objetivo es determinar en este nuevo caso la influencia de los parámetros relacionados con la rotación del disco.

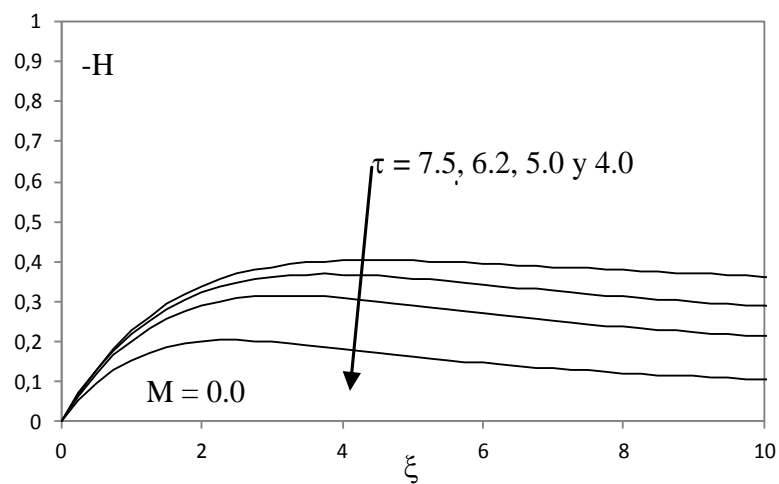


Figura V.7. Resultados de la componente axial de velocidad  $-H$ , en función de  $\tau$  para  $M=0$

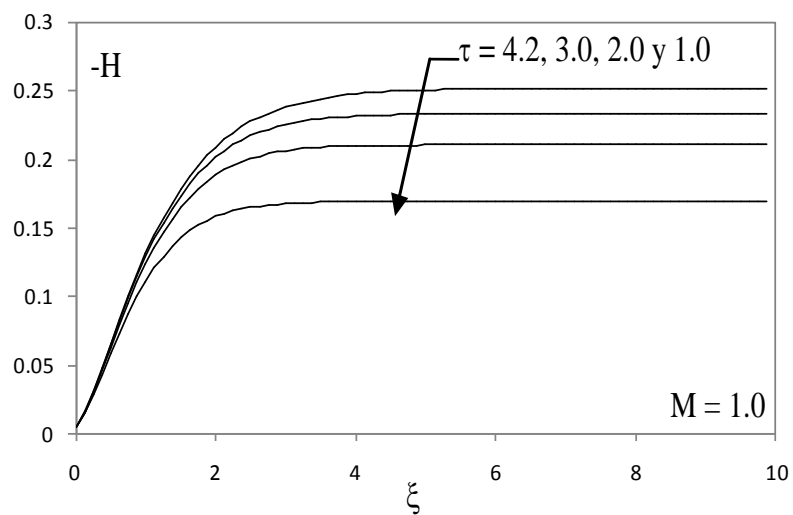


Figura V.8. Resultados de la componente axial de velocidad  $-H$ , en función de  $\tau$  para  $M = 1.0$



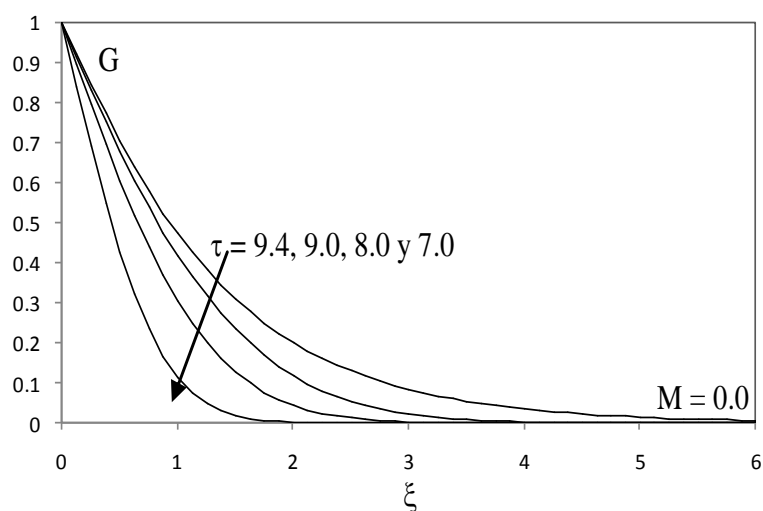


Figura V.9. Resultados de la componente tangencial de velocidad  $G$ , en función de  $\tau$  para  $M = 0$

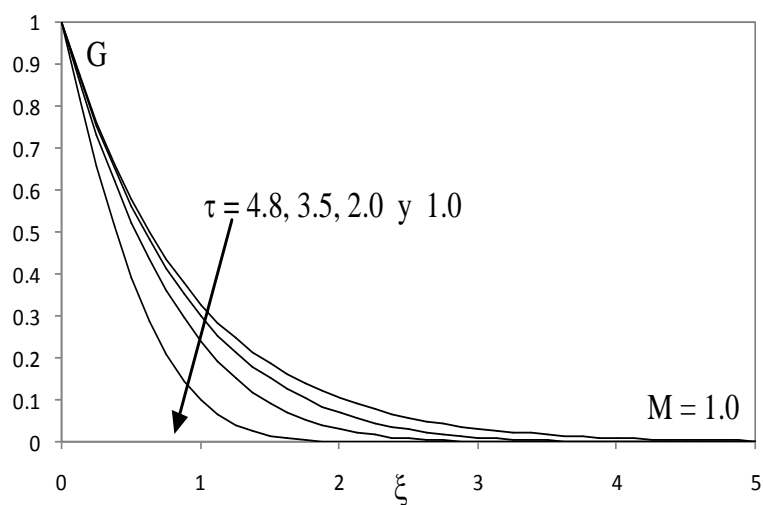


Figura V.10. Resultados de la componente tangencial de velocidad  $G$ , en función de  $\tau$  para  $M = 1.0$

Las figuras representadas en este análisis transitorio representan la evolución temporal de la velocidad, temperatura y presión, para varios valores de los parámetros  $M$  y  $Pr$ . Se puede observar en todos los casos como los valores de las componentes de velocidad  $F$ , temperatura  $\theta$ , y presión  $-P$ , incrementan con el tiempo adimensional  $\tau$ , hasta alcanzar el estado estacionario. Sin embargo, la componente axial de velocidad  $H$  decrece conforme aumenta el tiempo (esta caso no está representado). Este caso de velocidad axial  $H$ , no ha sido representado. Las figuras V.7 a V.16 reflejan respectivamente esta tendencia para las restantes componentes de velocidad, temperatura y presión.

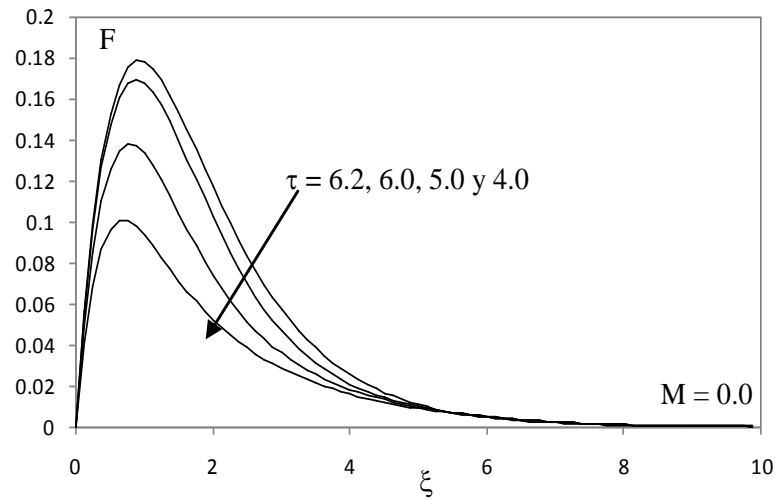


Figura V.11. Resultados de la componente radial de velocidad F, en función de  $\tau$  para  $M = 0$

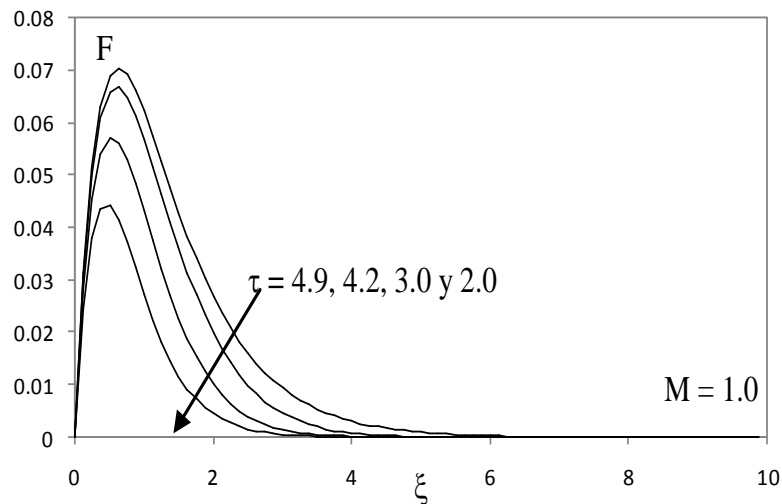


Figura V.12. Resultados de la componente radial de velocidad F, para diversos valores de  $\tau$  y  $M = 1.0$

A continuación analizaremos la repercusión del efecto del parámetro magnético  $M$ . Deducimos que la introducción del campo magnético reduce considerablemente el tiempo necesario en alcanzar el estado estacionario. Así, se puede verificar de las figuras de velocidad axial  $-H$ , para los valores  $M = 0$  y  $\tau_{est} = 7.5$  en la figura V.7 y  $M = 1.0$  y  $\tau_{est} = 4.2$  en la figura V.8.

Por otro lado, la componente tangencial  $G$  muestra  $M = 0$  y  $\tau_{est} = 9.4$  en la figura V.9,  $M = 1.0$  y  $\tau_{est} = 4.8$  en la figura V.10. Finalmente, para la componente radial  $F$ , se obtienen los siguientes valores:  $M = 0$  y  $\tau_{est} = 6.2$  en la figura V.11,  $M = 1.0$  y  $\tau_{est} = 4.9$  en la figura V.12.

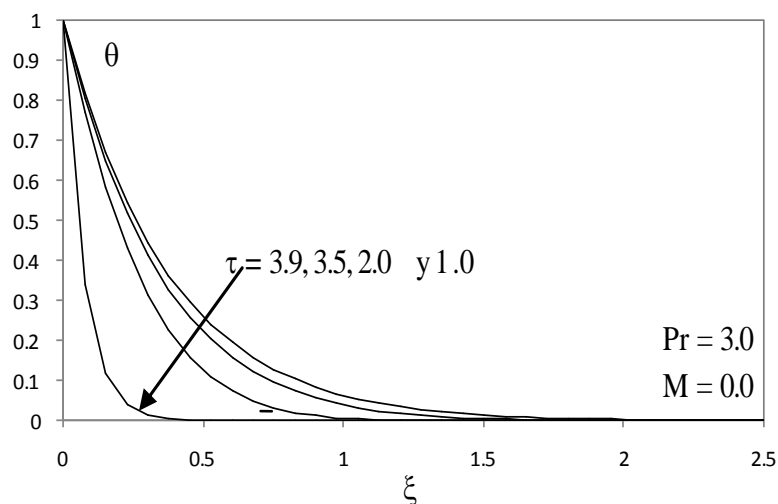


Figura V.13. Resultados de temperatura, en función de  $\tau$ , para  $M = 0$  y  $Pr = 3.0$

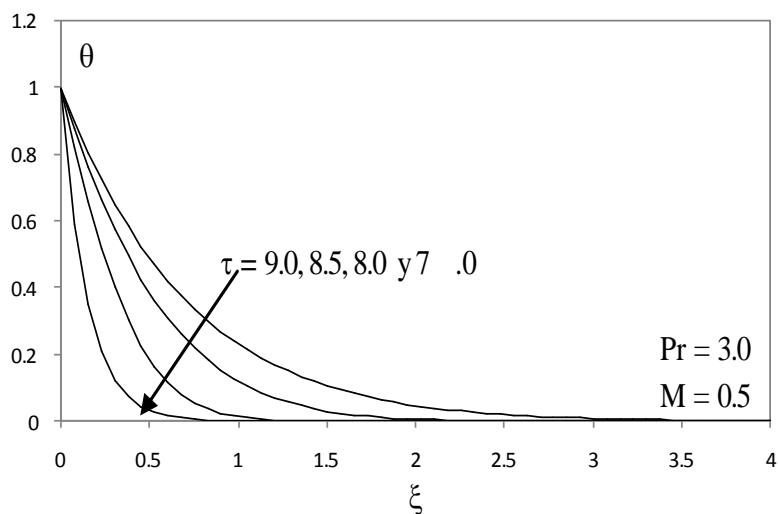


Figura V.14. Resultados de temperatura, en función de  $\tau$ , para  $M = 0.5$  y  $Pr = 3.0$

Las figuras V.13 y V.14 muestran la evolución temporal de la temperatura  $\theta$ , para diferentes valores del parámetro magnético  $M$ , para el valor del número de Prandtl  $Pr = 3$ . Se deduce el aumento del tiempo necesario en alcanzar el estado estacionario  $\tau_{est}$  cuando aumenta el valor del parámetro magnético  $M$ . Así, para  $M = 0$ ,  $Pr = 3.0$ , se obtiene  $\tau_{est} = 3.9$  (figura V.13) y para  $M = 0.5$ ,  $Pr = 3.0$ , se obtiene  $\tau_{est} = 9.0$  (figura V.14).

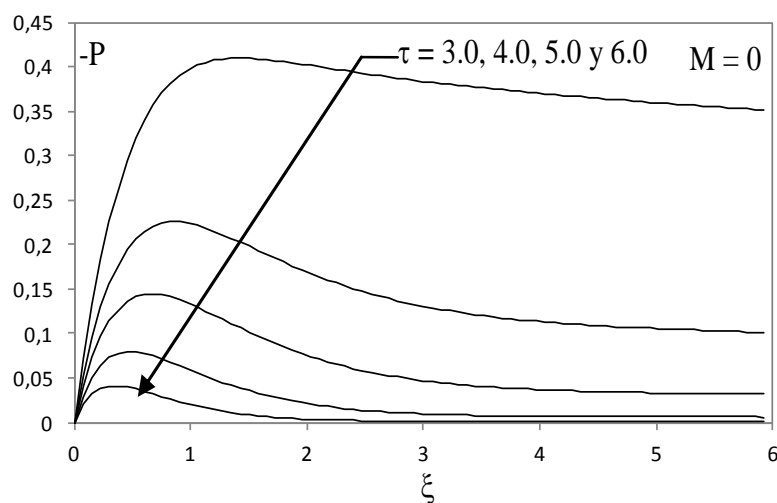


Figura V.15. Resultados de presión  $P$  en función de  $\tau$ , para  $M=0$

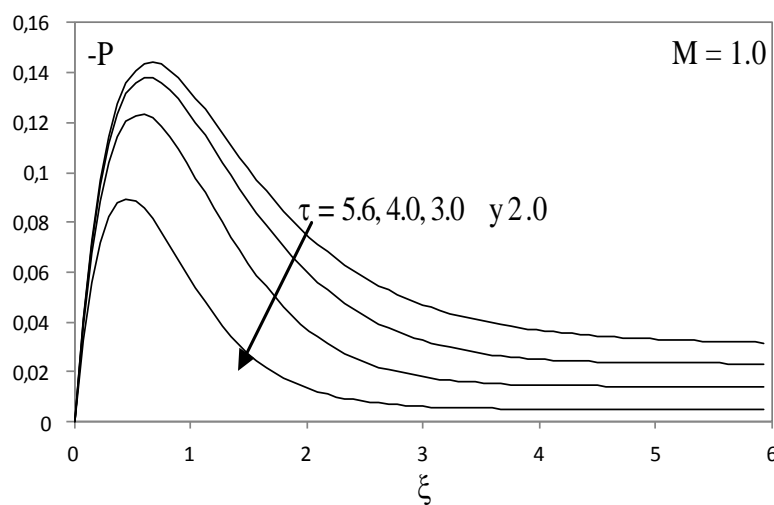


Figura V.16. Resultados de presión  $P$  en función de  $\tau$  para  $M=1,0$

Las figuras V.15 y V.16 representan la evolución de la presión en función del tiempo adimensional  $\tau$ . Se observa que la presión aumenta con el tiempo. El incremento del campo magnético para este caso, también reduce el tiempo requerido en alcanzar el estado estacionario, según reflejan la figura V.15 para  $M=0$  y  $\tau_{est}=6,0$ , y la figura V.16 para  $M=1,0$  y  $\tau_{est}=5,6$ .

## **5.1.2. Transferencia en masa y calor mediante un flujo hidromagnético en una superficie vertical en movimiento**

Un polímero o lámina metálica extruídos continuamente desde un boquilla, por medio del empuje generado por la acción de un determinado rodillo o componente cilíndrico, y por medio de un dispositivo de alimentación del polímero, son típicos ejemplos de superficies en continuo movimiento. Se asume que la cantidad de fluido eliminado de la corriente es demasiado pequeña y que únicamente las partículas cerca de la pared del extrusor serán succionadas hacia fuera del mismo.

En una superficie en movimiento de longitud finita la capa límite se desarrolla en dirección opuesta al movimiento del fluido, mientras que sobre una superficie en continuo movimiento, tal como una lámina o fibra de polímero larga y continua extruídas desde una determinada abertura (dado o boquilla) y conducidas mediante un dispositivo de succión hasta el otro extremo del extrusor; la capa límite sobre la lámina o fibra se origina en la abertura de la superficie y se desarrolla en la dirección del movimiento de la superficie. Una especie químicamente reactiva es emitida desde la superficie vertical en movimiento en un campo de flujo hidromagnético. Se difunde en el fluido donde es sometida a una reacción química simple, isotérmica y homogénea.

En esta sección presentamos los perfiles de velocidad, temperatura y concentración en el estado estacionario. Los resultados obtenidos por el método de simulación en red son comparados con los resultados de [Chamkha 2003, citada en página 43], siendo muy satisfactorios. Los resultados gráficos son obtenidos en ausencia de campo magnético  $M = 0.0$  y en presencia de los efectos de flotabilidad de concentración y térmica, tal y como se aprecia en la figura V.17.

Los valores de los parámetros empleados en este análisis son:  $K = -0.2, 0$  y  $2.0$ ;  $M = 0.0, 0.5, 1.0$  y  $2.0$ ;  $Pr = 0.71$  y  $7.0$ ;  $Sc = -0.16, 0, 0.6, 1.0$  y  $2.0$ ;  $G_{\tau} = G_{\tau c} = 1.0$  y  $3.0$ . Los valores fijos para la simulación numérica se han utilizado para poder evitar los errores de convergencia del método en red y también para representar los resultados gráficos más interesantes para esta memoria.

Las soluciones obtenidas para la velocidad y concentración son válidas en alguna distancia desde la abertura de la superficie, aunque la succión está aplicada desde la abertura de la superficie en adelante. Esto se debe a la suposición de que los campos de velocidad, temperatura y concentración son independientes de la distancia paralela a la superficie. Los fluidos considerados en este estudio son aire ( $Pr = 0.71$ ) y agua ( $Pr = 7.0$ ). Los efectos de velocidad y concentración son estudiados en presencia del parámetro de reacción química.

La figura V.17 representa el caso estacionario para la velocidad  $U$ . Los perfiles de velocidad son representados para varias combinaciones de los parámetros  $K$ ,  $Sc$ ,  $Pr$ ,  $\phi$ ,  $M$ ,  $G_{rt}$  y  $G_{rc}$ . Esta figura presenta el excelente acuerdo de las soluciones analítica [Chamkha 2003, citada en página 43] y numérica (MESIR) para diferentes combinaciones de parámetros. La plena coincidencia de los resultados es observada para los siguientes casos: (a), (b), (c) y (d) están representados para los valores  $K = -0.2, 0$  y  $2.0$ ,  $Sc = 0.6$  y  $2.0$ ,  $Pr = 0.71$  y  $\phi = 0$  (e), (f) y (g) representan los valores  $K = 2.0$ ,  $Sc = 0.6, 1.0$  y  $2.0$ ,  $Pr = 7.0$  y  $\phi = 0$ . Los valores  $G_{rt} = G_{rc} = 1.0$  y  $M = 0.0$  permanecen constantes en esta Figura

El caso (a) representa  $\phi = -0.1$ . Además. Los casos (a), (b), (c) y (d) son representados mediante líneas discontinuas para el valor  $\phi = 1.0$ . Debemos mencionar que  $K > 0$  indica una reacción destructiva,  $K < 0$  indica una reacción constructiva y  $\phi > 0$  y  $\phi < 0$  absorción y generación de calor respectivamente.

Se observa claramente que para una reacción química destructiva ( $K = 2.0$ ) con  $Sc = 2.0$ , incrementando  $Pr$  produce valores de velocidad menores. También, para valores menores de  $Pr$  ( $Pr = 0.71$ ) y cualquier valor del parámetro  $K$ , se observa un máximo en el perfil de velocidad.

Este hecho determina que el máximo de velocidad ocurre en la masa del fluido cercana a la superficie y no en la superficie. Además, una reducción de velocidad es apreciada cuando el parámetro de Schmidt  $Sc$  (el cual relaciona físicamente los espesores relativos de la capa hidrodinámica y la capa límite de transferencia en masa) se incrementa. El efecto del parámetro de reacción química  $K$  también puede ser explicado.

Cuando el parámetro de reacción química  $K$  se incrementa, la velocidad del fluido disminuye. Finalmente, el efecto del coeficiente de generación de calor ( $\phi < 0$ ) sobre la velocidad del fluido es más pronunciado que el efecto del coeficiente de absorción de calor ( $\phi > 0$ ).

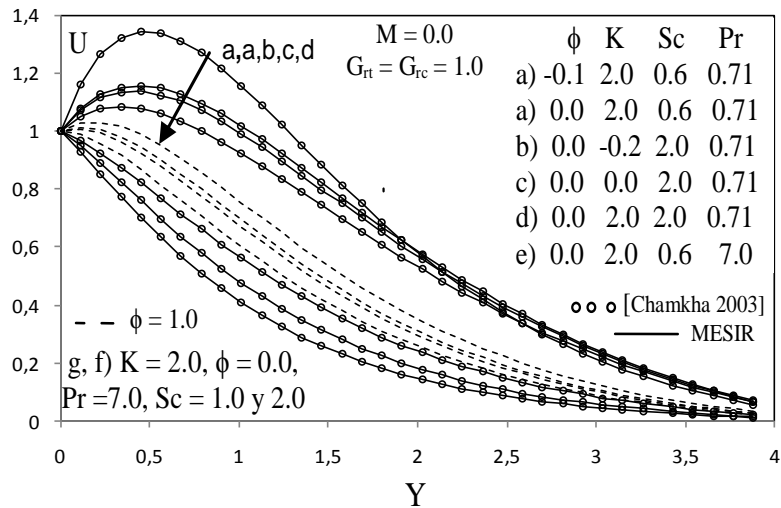


Figura V.17. Comparación de resultados de velocidad U (caso estacionario)

La figura V.18 también refleja un estudio estacionario de la velocidad, en la que se han utilizado los valores:

$K = 2.0$ ,  $Pr = 0.71$ ,  $Sc = 0.6$ ,  $\phi = 1.0$ ,  $G_{rt} = 1.0$  y  $3.0$ ,  $G_{rc} = 1.0$  y  $2.0$ . Las curvas continuas se han obtenido con el valor  $G_{rt} = 1.0$ , mientras que las de trazo discontinuo se han obtenido con  $G_{rt} = 3.0$ . La influencia del campo magnético  $M$  y los efectos de flotabilidad térmica son analizados en esta figura. Un incremento en el valor del parámetro  $G_{rt}$  también incrementa la velocidad del fluido. La aplicación de un campo magnético a un fluido conductor de electricidad produce la fuerza de Lorentz, la cual es la causa de la reducción en la velocidad del fluido. Afirmamos que la velocidad decrece conforme el parámetro magnético  $M$  se incrementa. Se puede observar de esta figura que para un campo magnético relativamente fuerte, el máximo de velocidad desaparece en el punto en que la velocidad máxima será la de la superficie.

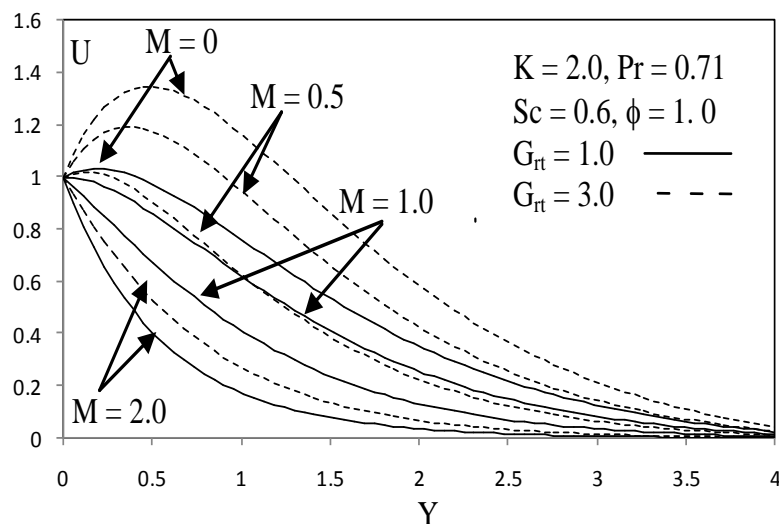


Figura V.18. Resultados de velocidad  $U$  (caso estacionario)

En la figura V.19 se representa la evolución de la temperatura  $\theta$  para el caso estacionario para distintas combinaciones de los parámetros que intervienen en el problema.

Se emplean los valores de  $\phi = -0.1, -0.2, 0$  y  $1.0$  y  $Pr = 0.71$  y  $7.0$ . Puede apreciarse que el máximo valor de temperatura se corresponde con el valor de generación de calor ( $\phi = -0.1$ ), mientras que cuando se incrementan los valores de los parámetros  $\phi$  ó  $Pr$  decrecen los valores de temperatura. El efecto del número de Prandtl  $Pr$  es el esperado y comentado anteriormente en otros casos analizados, su incremento hace disminuir la temperatura y la capa límite térmica. Se aprecia además, que para  $Pr = 7.0$ , el efecto de la absorción o generación de calor (incluso empleando valor superiores a los anteriores) es inapreciable.



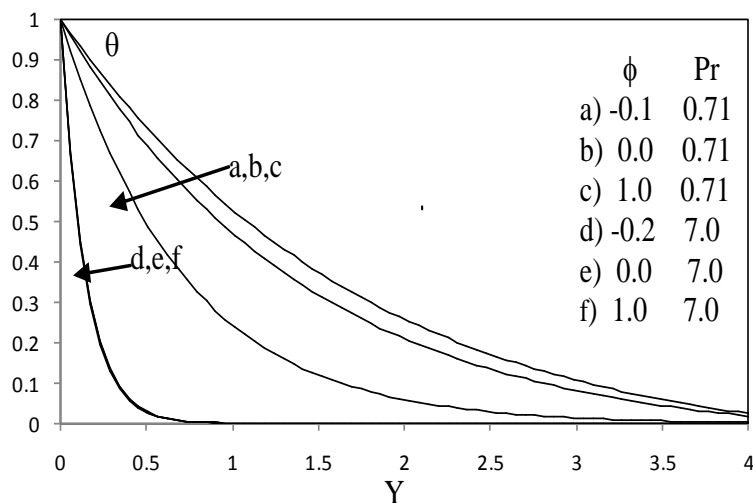


Figura V.19. Resultados de temperatura  $\theta$  (caso estacionario)

Por último, en la figura V.20 se muestran la evolución con la posición Y de la concentración en estado estacionario. Se muestran varias curvas que responden a diferentes combinaciones entre los valores de K y Sc. Como era de esperar, al aumentar el número de Schmidt Sc o el parámetro de reacción química decrece la concentración. Se han comparado satisfactoriamente los resultados numéricos proporcionados por el método numérico propuesto (MESIR) con los resultados obtenidos por el autor [Chamkha 2003, citada en página 43].

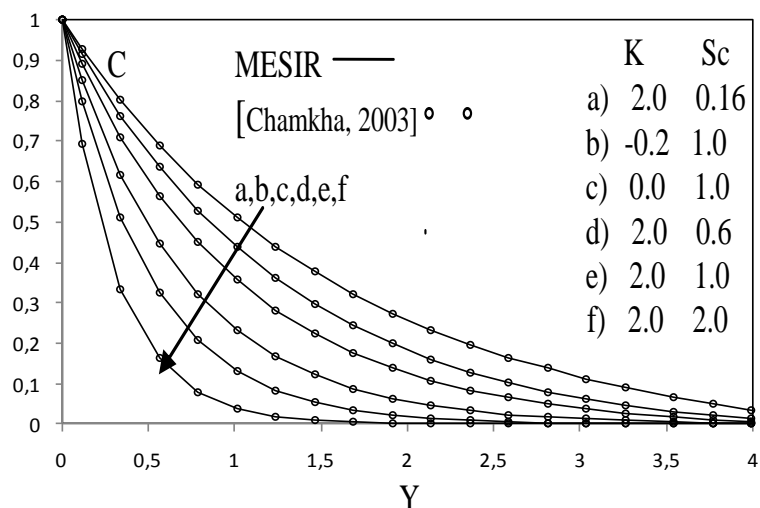


Figura V.20. Comparación de resultados de concentración  $C$  (caso estacionario)

## Régimen transitorio

En este apartado se aborda el caso de proceso transitorio. Se van a estudiar varios casos de velocidad, temperatura y concentración con diferentes combinaciones de los parámetros involucrados, representados en función de una coordenada espacial adimensional  $Y$ .

En la figura V.21 se representa el estudio transitorio de velocidad en dos casos particulares ( $\phi = 0.0$  y  $1.0$ ), en función de la coordenada espacial no-dimensional  $Y$ . Los resultados de velocidad  $U$  para los parámetros adimensionales  $Sc = 2.0$ ,  $K = 2.0$ ,  $G_{T1} = 1.0$ ,  $G_{Tc} = 1.0$ ,  $M = 0.0$  y  $Pr = 7.0$ .

Se observa que en el caso de  $\phi = 1.0$  (curvas continuas), la velocidad aumenta con el tiempo, alcanzando el estado estacionario en ( $\tau_{est} = 9.5$ ). A diferencia, el caso de curvas discontinuas con  $\phi = 0.0$ , la velocidad aumenta con el tiempo, y requiere un tiempo menor que el caso anterior para alcanzar el estado estacionario, en concreto

$\tau_{est} = 6.6$ .

Se observa el decrecimiento del tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario conforme disminuye el parámetro de absorción  $\phi$ . En la figura V.22 se muestra la evolución de la velocidad en función de la coordenada Y, para los valores de los parámetros:  $K = 2.0$ ,  $M = 0.0$  y  $0.5$ ,  $Pr = 0.71$ ,  $G_{rt} = 1.0$ ,  $G_{rc} = 1.0$ ,  $Sc = 0.6$  y  $\phi = 1.0$ .

Las curvas continuas, presentan valores de  $M = 0.0$  y  $\tau_{est} = 9.4$  mientras que las curvas no continuas presentan valores de  $M = 0.5$  y  $\tau_{est} = 8.2$ . Por lo tanto se deduce una disminución en el tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario conforme aumenta el parámetro magnético M.

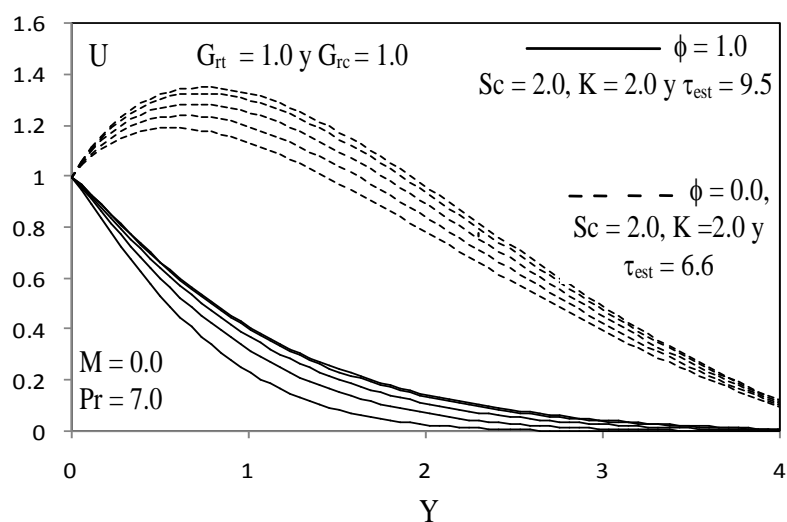


Figura V.21. Velocidad para diferentes valores de  $\tau$  e Y, con  $Sc = 2.0$ ,  $K = 2.0$ ,  $G_{rt} = 1.0$ ,  $G_{rc} = 1.0$ ,  $M = 0.0$ ,  $Pr = 7.0$ ,  $\phi = 0.0$  y  $1.0$

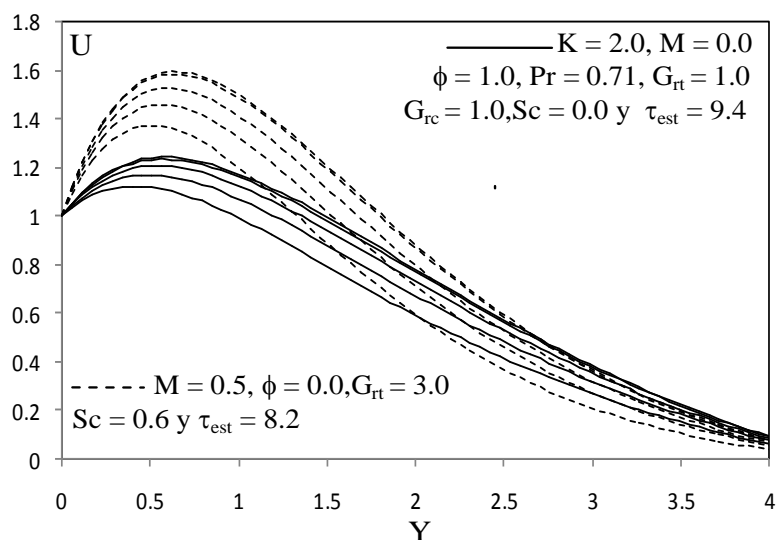


Figura V.22. Resultados de velocidad para diferentes valores de  $\tau$  e  $Y$ , con  $Sc = 0.6$ ,  $K = 2.0$ ,  $Gr_t = 1.0$ ,  $Gr_c = 1.0$ ,  $M = 0.0$  y  $0.5$ ,  $Pr = 0.71$  y  $\phi = 1.0$ .

La figura V.23 refleja el efecto de los parámetros  $Gr_t = 3.0$ ,  $Gr_c = 1.0$ ,  $K = 1.0$  y  $2.0$ ,  $M = 0.5$ ,  $Sc = 0.6$ ,  $\phi = -0.1$  y  $Pr = 0.71$ . Las curvas continuas están representadas para los valores:  $\tau_{est} = 7$  y  $K = 2$ , mientras que las curvas discontinuas presentan valores:  $\tau_{est} = 9$  y  $K = 1$ .

En la figura V.23 se presenta además una comparación satisfactoria de los resultados de velocidad en estado estacionario obtenidos por el MESIR con los resultados proporcionados por [Chamkha 2003, citada en página 43] para los siguientes valores:  $M = 0.0$ ,  $Sc = 1.0$ ,  $Pr = 7.0$  y  $\phi = 1.0$ . Se observa el decrecimiento en los valores para alcanzar el estado estacionario conforme aumenta el parámetro de reacción química  $K$ .

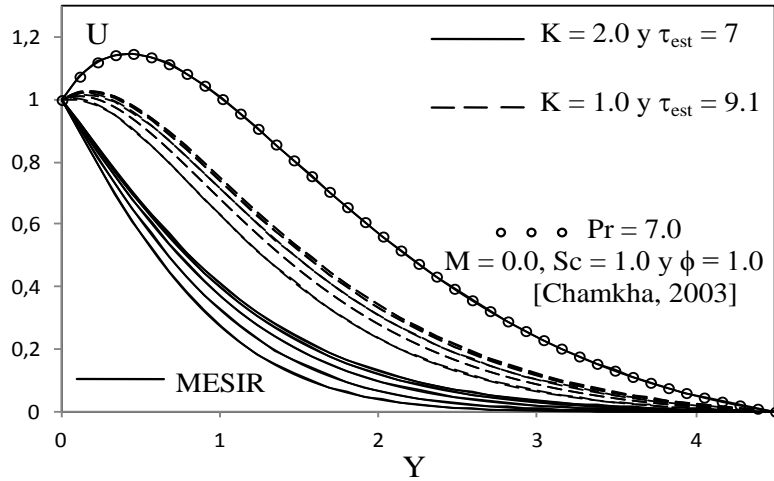


Figura V.23. Resultados de velocidad para diferentes valores de  $\tau$  e  $Y$ , con  $Sc = 0.6$ ,  $K = 1.0$  y  $2.0$ ,  $G_{it} = 3.0$ ,  $G_{rc} = 1.0$ ,  $M = 0.5$ ,  $Pr = 0.71$  y  $\phi = -0.1$

Se refleja en la figura V.24 otro estudio sobre los resultados de velocidad con la influencia de los siguientes parámetros:  $G_{it} = 3.0$ ,  $G_{rc} = 1.0$ ,  $K = 2.0$ ,  $M = 0.5$ ,  $Sc = 0.16$  y  $0.6$ ,  $\phi = 0.0$  y  $Pr = 0.71$ . Las curvas continuas presentan los valores:  $\tau_{est} = 7.3$  y  $Sc = 0.16$  mientras que las curvas de trazo no continuo:  $\tau_{est} = 9.1$  y  $Sc = 0.6$ . Se aprecia en esta figura un aumento en los valores para alcanzar el estado estacionario conforme aumenta el valor del parámetro de Schmidt  $Sc$ .

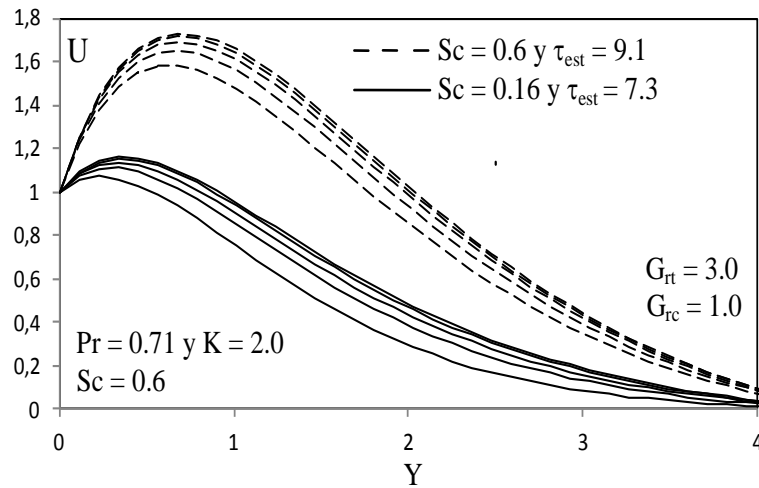


Figura V.24. Resultados de velocidad para diferentes valores de  $\tau$  e  $Y$ , con:  $G_{rt} = 3.0$ ,  $G_{rc} = 1.0$ ,  $K = 2.0$ ,  $M = 0.5$ ,  $Sc = 0.6$  y  $0.16$ ,  $\phi = 0.0$  y  $Pr = 0.71$

Comenzamos el análisis de temperatura por la figura V.25, que refleja la evolución de la temperatura con el tiempo. Conforme aumenta el parámetro  $\phi$  disminuye la temperatura y además disminuye el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario,  $\tau_{est}$ . Las curvas de trazo continuo presentan los valores:  $\phi = 1.0$ , y  $\tau_{est} = 7.3$  mientras que las curvas discontinuas presentan los valores  $\phi = 0$  y  $\tau_{est} = 8.3$ .

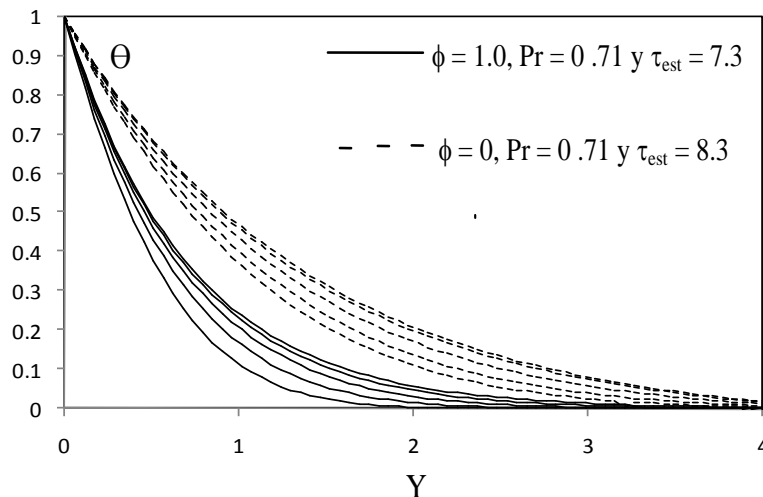


Figura V.25. Resultados de temperatura para diferentes valores de  $\tau$  e  $Y$ , con  $\phi = 0$  y  $1.0$  y  $Pr = 0.71$

En la figura V.26, aparecen dos casos representados de concentración. Las curvas continuas presentan:  $K = 2.0$  y  $Sc = 1.0$  crecientes con el tiempo y necesitan un valor de  $\tau_{est} = 1.7$  para alcanzar el estado estacionario. El caso de curvas discontinuas  $K = 0$  y  $Sc = 1.0$ , también crecientes con el tiempo, pero sin reacción química presente en el medio fluido, se precisa un valor de  $\tau_{est} = 8.8$ , mucho mayor que en el caso de curvas de trazo continuo. Esto nos indica que la fuerte influencia del parámetro de reacción química reduce considerablemente el tiempo necesario en estabilizarse y además, disminuye los valores de concentración. La figura V.27 corrobora lo citado en la figura V.26.

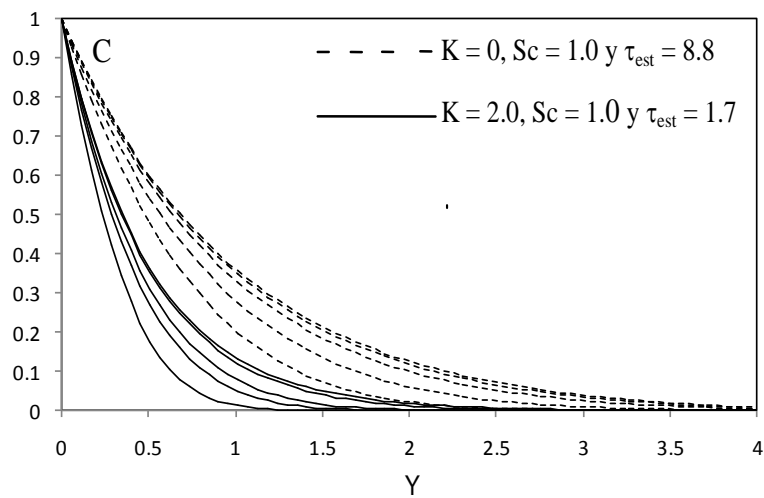


Figura V.26. Resultados de concentración para diferentes valores de  $\tau$  e  $Y$ , con  $K = 0$  y  $2.0$  y  $Sc = 1.0$

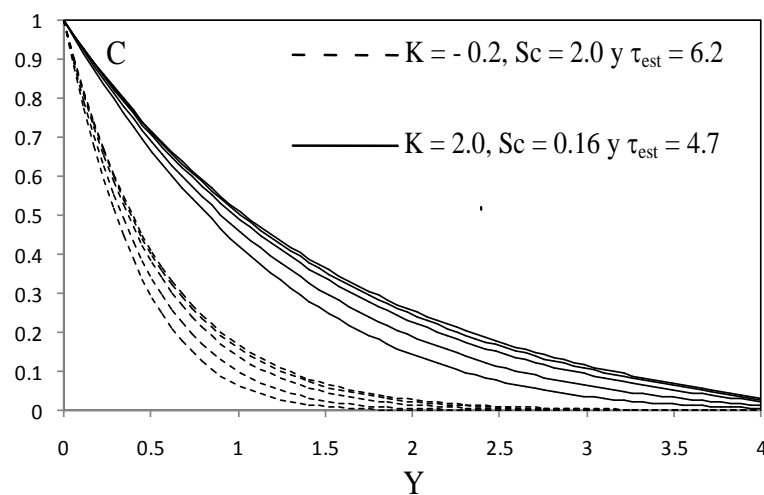


Figura V.27. Resultados de concentración para diferentes valores de  $\tau$  e  $Y$ , con  $K = -0.2$  y  $2.0$ ,  $Sc = 0.16$  y  $2.0$

### 5.1.3. Convección mixta hidromagnética laminar en un canal vertical de placas paralelas

En este apartado realizamos el análisis de los resultados para los casos estacionario y transitorio de los perfiles de velocidad. Primeramente se presenta una comparación de los resultados obtenidos con los proporcionados por [Chamkha 2002, citada en página 51]. Las figuras V.28 y V.29 muestran la coincidencia total de estos resultados, siendo por tanto excelente los resultados obtenidos.

Las siguientes figuras muestran los resultados de velocidad para diferentes valores de los parámetros  $Br$ ,  $M$ ,  $R_t$ ,  $Gr/Re$  y  $\phi$ . La figura V.28 representa el efecto del parámetro de convección mixta  $Gr/Re$  sobre el perfil de velocidad, para el caso de paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ ) con los siguientes valores:  $Gr/Re = -213, 0, 213$  y  $400$ ,  $Br = 0.0$ ,  $M = 5.0$ ,  $\phi = 2.0$  y  $R_t = 1.0$ . Cuando  $Gr/Re = 0$  (no existe convección natural), se obtiene el perfil de velocidades simétrico.

En la figura V.28 se observa que cuando  $Gr/Re$  es distinto de cero, la simetría en el perfil de velocidad desaparece y además, el incremento de la velocidad del fluido cerca de la pared derecha caliente (fluido ascendente), conforme el parámetro de convección mixta incrementa. Mientras, en la pared izquierda fría (fluido descendente) se produce el efecto contrario, es decir, disminuye la velocidad cuando el parámetro de convección mixta aumenta. Los valores de  $Gr/Re = 213$  y  $Gr/Re = -213$  representan los valores críticos de  $Gr/Re$ .

Esto es, para  $Gr/Re > 213$  una inversión de flujo se produce cerca de la pared fría y para  $Gr/Re < -213$  la inversión de flujo tiene lugar cerca de la pared caliente. Estos fenómenos físicos se representan claramente en la figura V.28.

La figura V.29 representa los efectos del parámetro de Brinkmann  $Br$  y el parámetro de convección mixta  $Gr/Re$  sobre el perfil de velocidad, para el caso de paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ ) con los siguientes valores:

$M = 1.0$ ,  $Br = 0.0$  y  $0.1$ ,  $\phi = 0$ ,  $R_t = 1.0$  y  $Gr/Re = 50, 100$  y  $150$ . Para un valor fijo del parámetro  $Gr/Re$  se puede apreciar un notable aumento de velocidad conforme disminuye el efecto del parámetro de Brinkmann  $Br$ .



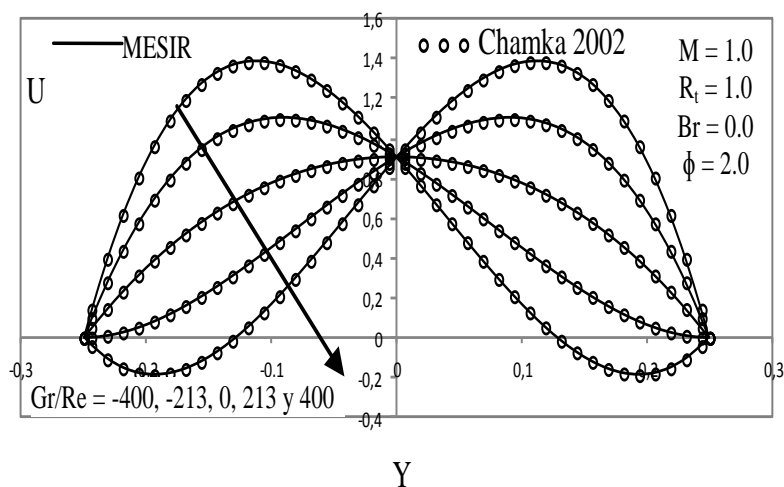


Figura V.28. Comparación analítica y numérica (MESIR) de los resultados de velocidad (caso estacionario) para los valores  $M = 1.0$ ,  $Br = 0.0$ ,  $\phi = 2.0$ ,  $R_t = 1.0$  y  $Gr/Re = -400, -213, 0, 213$  y  $400$ , en el caso de paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ )

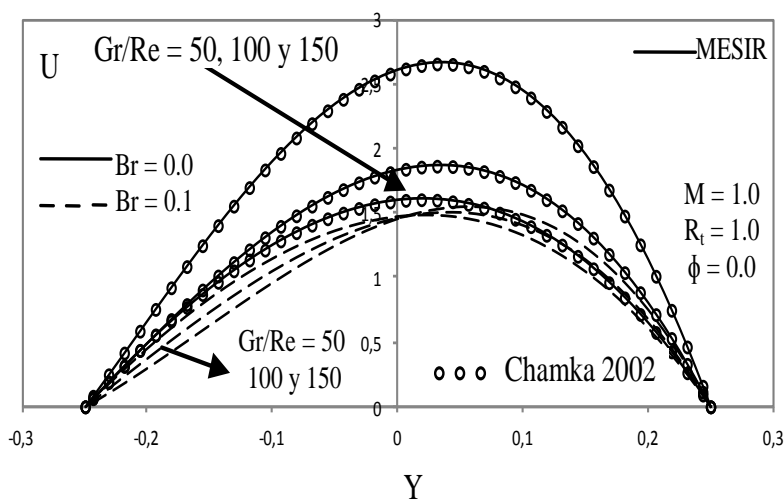


Figura V.29. Comparación analítica y numérica (MESIR) de los resultados de velocidad (caso estacionario) para los valores  $M = 1.0$ ,  $Br = 0.0$  y  $0.1$ ,  $\phi = 0$ ,  $R_t = 1.0$  y  $Gr/Re = 50, 100$  y  $150$  en el caso de paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ )

Los efectos del número de Hartmann  $M = 0, 5.0$  y  $10.0$  con la influencia del parámetro de convección mixta  $Gr/Re = -288$  y  $288$  (valores críticos para la inversión del flujo en ambas paredes, izquierda y derecha, en ausencia de campo magnético y generación o absorción de calor) son representados en la figura V.30.

Los valores del parámetro de convección mayores de 288 ( $Gr/Re > 288$ ) causan la inversión del flujo cerca de la pared izquierda, mientras que los valores menores de 288 ( $Gr/Re < 288$ ) producen el fenómeno de inversión cerca de la pared derecha.

La figura V.30 muestra el efecto del campo magnético transversal (incorporado en el número de Hartmann  $M$ ) sobre un fluido conductor de electricidad, en caso de paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ ) con los siguientes parámetros:  $Br = 0.0$ ,  $\phi = 0$  y  $R_t = 1.0$ . La aplicación de este campo magnético origina la fuerza magnética de Lorentz, la cual actúa en dirección contraria a la velocidad del fluido reduciendo su velocidad. Si incrementamos el número de Hartmann  $M$  en el caso  $Gr/Re = 288$ , el fluido disminuye cerca de la pared fría izquierda en la que se produce el fenómeno de inversión. Para el caso contrario  $Gr/Re = -288$ , la condición de inversión se produce cerca de la pared caliente derecha.

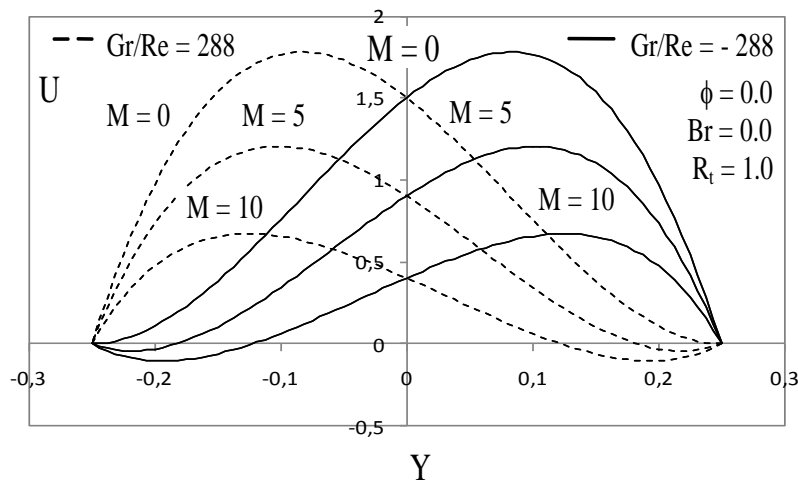


Figura V.30. Efecto del número de Hartmann  $M = 0, 5$  y  $10$  sobre velocidad (caso estacionario) para los valores  $Gr/Re = -288$  y  $288$ ,  $Br = 0.0$ ,  $R_t = 1.0$  y  $\phi = 0.0$  con paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ )

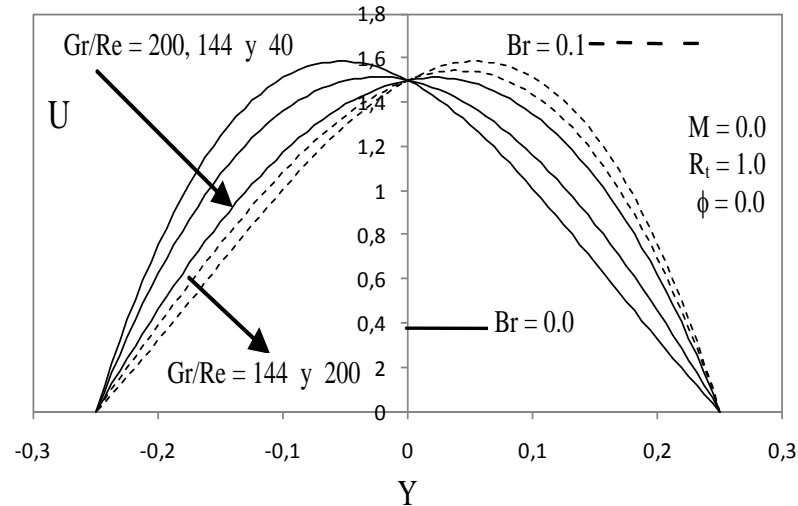


Figura V.31. Efecto de los parámetros  $Gr/Re = 40, 144$  y  $200$ ,  $Br = 0,0$  y  $0,1$ ,  $R_t = 1,0$ ,  $\phi = 0,0$  y  $M = 0,0$  sobre velocidad, (caso estacionario) con paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ )

La figura V.31 muestra el efecto del número Brinkman (considerado como el producto de los números Prandtl y Eckert) sobre el perfil de velocidades.

Puede observarse, que cuando  $Br > 0$  (existe disipación viscosa en el fluido), la velocidad incrementa en la zona desde el centro ( $Y = 0$ ) hasta el extremo de la pared caliente; mientras en la zona restante ocurre lo contrario, es decir, el perfil de velocidad decrece al aumentar la disipación viscosa.

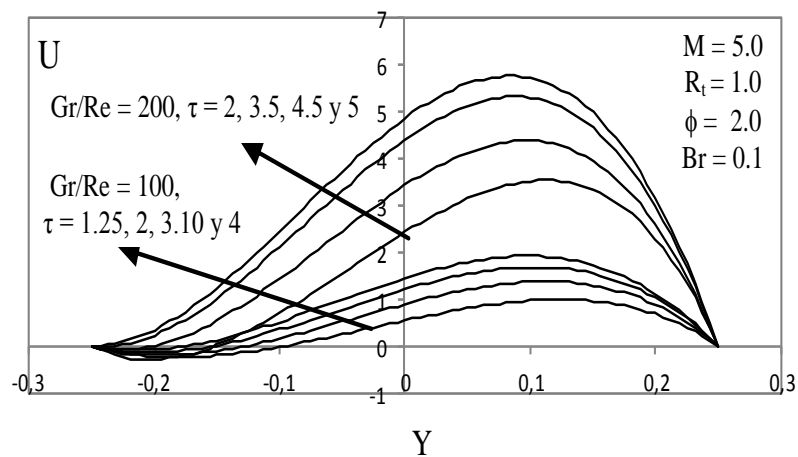


Figura V.32. Variación de velocidad para diversos valores de  $\tau$ , en paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ ), con diferentes valores del parámetro de convección mixta  $Gr/Re$  y con los parámetros  $Br = 0,1$ ,  $R_t = 1,0$ ,  $\phi = 2,0$  y  $M = 5,0$

La figura V.32 representa los resultados de velocidad para diversos valores de tiempo  $\tau$  y la combinación de parámetros:  $Gr/Re = 100$  y  $200$  (predominio de la convección natural frente a la convección forzada),  $Br = 0.1$ ,  $R_t = 1.0$ ,  $\phi = 2.0$  y  $M = 5.0$ .

También podemos observar la inversión del fluido cerca de la pared derecha del canal, conforme aumenta el efecto del parámetro de convección mixta  $Gr/Re$ . Es evidente que los incrementos en el valor del parámetro  $Gr/Re$  causan un considerable incremento en el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario, debido fundamentalmente a que el proceso se produce de manera natural y no se emplea la ayuda de un mecanismo mecánico que lo ayude a ejecutarse.

La evolución temporal de velocidad con los valores:  $Gr/Re = 0$ ,  $Br = 0.0$ ,  $M = 5.0$  y  $10.0$ ,  $\phi = 3.0$  y  $R_t = 1.0$  está representada en la figura V.33 para paredes isotérmicas. Se puede observar que en esta figura la velocidad incrementa con el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario en  $\tau_{est} = 1.7$  para  $M = 5$  y  $\tau_{est} = 1.3$  para  $M = 10$ . Deducimos por tanto la disminución del tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario, con el aumento del parámetro de campo magnético (representado por el número de Hartmann  $M$ ).

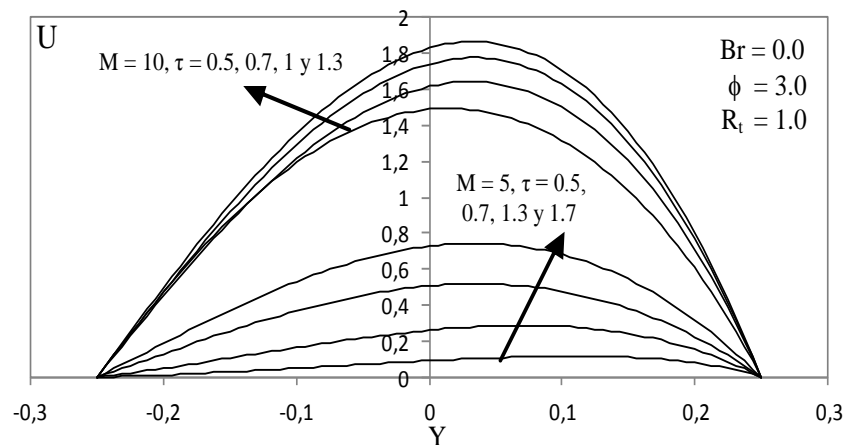


Figura V.33. Variación de velocidad para diversos valores de  $\tau$ , en paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ ), con diferentes valores del parámetro magnético  $M = 5$  y  $10$  y parámetros  $Br = 0.0$ ,  $R_t = 1.0$ ,  $\phi = 3.0$  y  $Gr/Re = 0$

El efecto del número de Brinkmann  $Br$  sobre el campo de velocidad está mostrado en la figura V.34 que representa los perfiles de velocidad en los estados transitorio y estacionario. La figura V.34 muestra la influencia de los parámetros:  $M = 10.0$ ,  $\phi = 1.0$ ,  $R_t = 1.0$ ,  $Gr/Re = 0$ . Se deduce el fenómeno de inversión del fluido cercano a la pared derecha isotérmica. Además el tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario aumenta conforme aumenta el parámetro de las disipaciones magnética y viscosa (número de Brinkmann  $Br$ ).

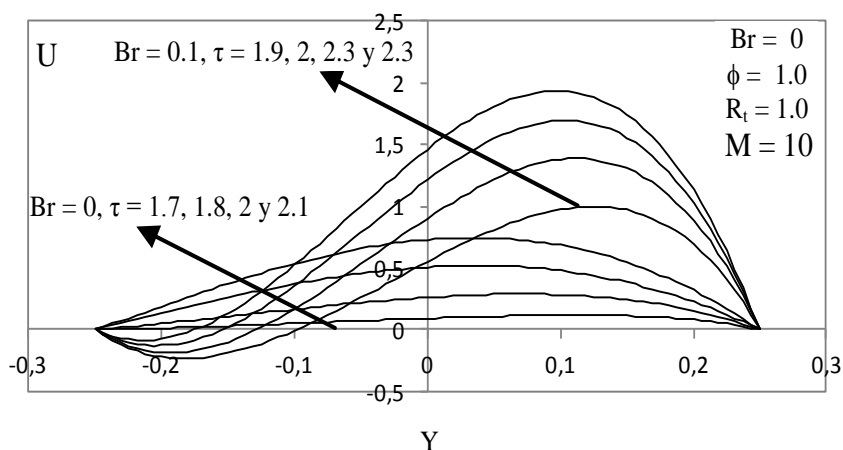


Figura V.34. Variación de velocidad para diversos valores de  $\tau$ , en paredes isotérmicas ( $T_1 - T_2$ ), para diferentes valores del número de Brinkmann  $Br$  y parámetros  $R_t = 1.0$ ,  $\phi = 1.0$ ,  $M = 10.0$  y  $Gr/Re = 0$

La evolución de velocidad para los estados transitorio y estacionario, con los siguientes parámetros:  $Gr/Re = -288$ ,  $Br = 0.0$ ,  $M = 5.0$ ,  $\phi = -4.0$  y  $-3.0$  y  $R_t = 1.0$  está representada en la figura V.35 para el caso de paredes ( $q_1 - T_2$ ), es decir, aplicando una condición de contorno de segunda clase a la pared fría y de primera clase (es decir un flujo de calor constante) en la pared caliente.

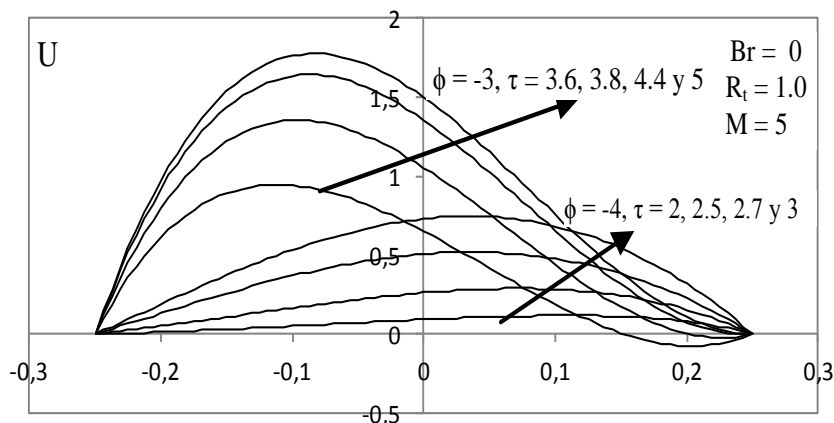


Figura V.35. Variación de velocidad para diversos valores de  $\tau$ , en paredes ( $q_1 - T_2$ ), para diferentes valores del parámetro  $\phi$  y parámetros  $Br = 0,0$ ,  $R_t = 1,0$ ,  $M = 5,0$  y  $Gr/Re = -288$

El análisis de los presentes resultados muestra el fenómeno de inversión del fluido cerca de la pared izquierda con flujo de calor constante. Se advierte además, una notable disminución en el valor del tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario, con el decrecimiento del valor de  $\phi$ .

Los resultados que se exponen en las siguientes figuras V.36 y V.37 corresponden a la evolución de la temperatura  $\theta$  en función de las coordenadas adimensionales  $Y$  y  $\tau$ . Los parámetros empleados en la figura V.36 son:  $Br = 4,0$ ,  $R_t = -0,5$ ,  $\phi = 3,0$ ,  $M = 5,0$ ,  $\tau_{est} = 9,1$  y  $Gr/Re = 50$  en el caso de pared derecha isotérmica ( $q_1 - T_2$ ).

En la figura V.37 se muestran los resultados de temperatura para los siguientes parámetros:  $Br = 2,0$ ,  $R_t = -0,5$ ,  $\phi = 3,0$ ,  $\tau_{est} = 9,8$ ,  $Gr/Re = 50$  y  $M = 5,0$  en el caso de pared derecha con flujo de calor constante y pared izquierda isotérmica ( $T_1 - q_2$ ). De estas dos figuras de temperatura se observa que la temperatura es creciente con el tiempo y además se observa un aumento en los valores para alcanzar el estado estacionario conforme decrece el número de Brinkmann  $Br$ .

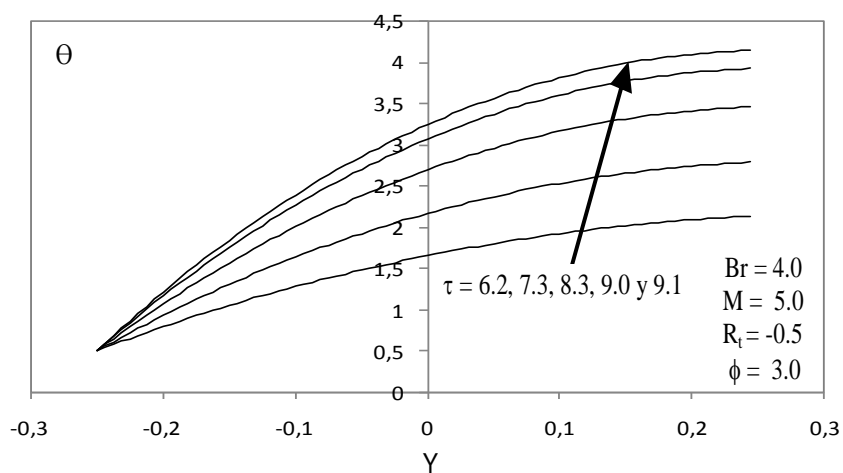


Figura V.36 Variación de temperatura, en paredes ( $T_1 - q_2$ ), para diferentes valores de  $\tau = 6.2, 7.3, 8.3, 9.0$  y  $9.1$  con los parámetros  $Br = 4.0, R_i = -0.5, \phi = 3.0, Gr/Re = 50$  y  $M = 5.0$

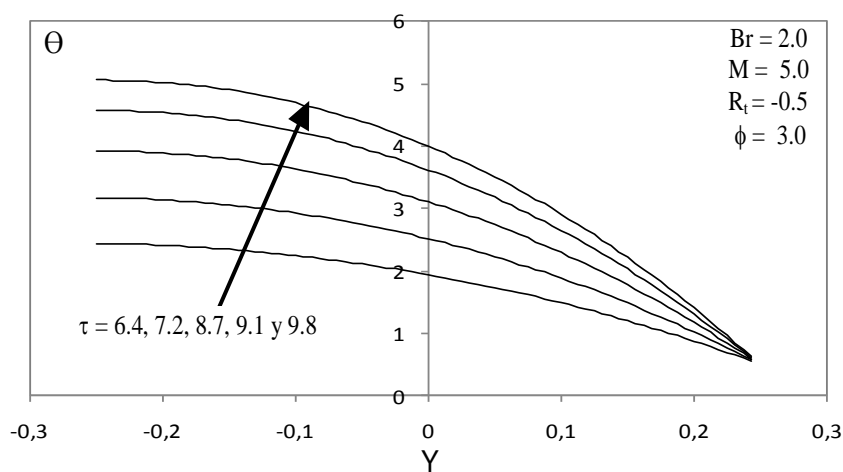


Figura V.37. Variación de temperatura, en paredes ( $T_1 - q_2$ ), para diferentes valores de  $\tau = 6.4, 7.2, 8.7, 9.1$  y  $9.8$  con los parámetros  $Br = 2.0, R_i = -0.5, \phi = 3.0, Gr/Re = 50$  y  $M = 5.0$

## 5.1.4. Flujos transitorios de fluidos de segundo grado no newtonianos

### 5.1.4.1. Fluido rodeado por dos límites con inicio repentino de movimiento

En primer lugar se muestra gráficamente la comparación de resultados en las figuras V.38 y V.39. En ellas se demuestra la coincidencia satisfactoria de resultados entre los proporcionados por el MESIR y los obtenidos mediante la solución analítica de [Hayat y col 2000, citada en página 59].

Se han representado las curvas de velocidad para los siguientes parámetros:  $\mu = 1$  y  $5 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.05$ , en la figura V.38 y  $\mu = 1$  y  $5 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.1$  en la figura V.39.

Las velocidades  $U_0$ ,  $U_1$  en  $y = 0$  e  $y = d$  respectivamente tienen asignado el valor uno, tal y como se demuestra en las gráficas expuestas a continuación.

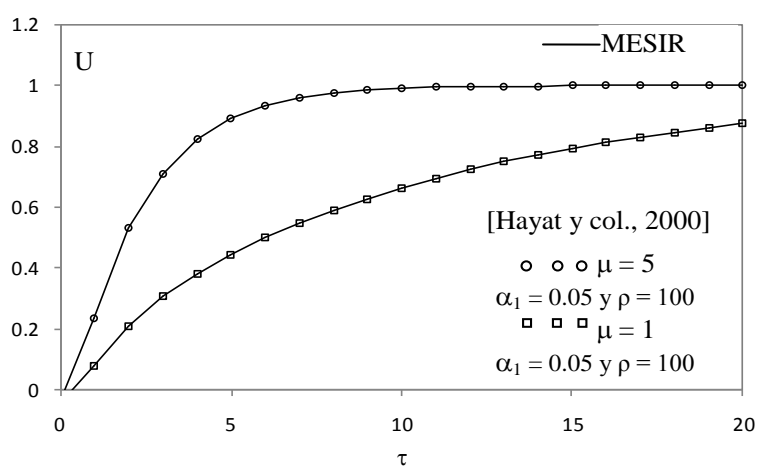


Figura V.38. Comparación de resultados de velocidad  $U$  para valores de parámetros  $\mu = 1$  y  $5 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.05 \text{ kg/m}$



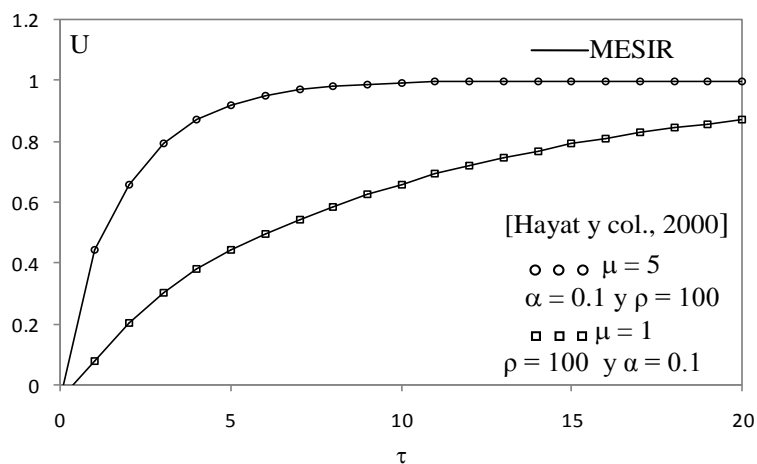


Figura V.39. Comparación de resultados de velocidad  $U$  para valores de parámetros  $\mu = 1$  y  $5 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.1 \text{ kg/m}$

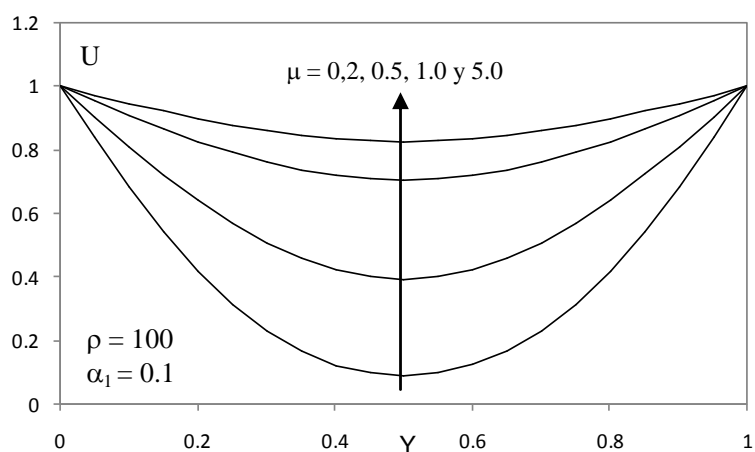


Figura V.40. Resultados de velocidad  $U$  en función de la coordenada espacial  $Y$  para valores de parámetros  $\mu = 0.2, 0.5, 1.0$  y  $5.0 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.1 \text{ kg/m}$

En la figura V.40 se muestra el efecto de la variación del parámetro  $\mu = 0.2, 0.5, 1.0$  y  $5.0 \text{ kg/ms}$  (viscosidad dinámica) sobre los resultados de velocidad, junto con el resto de parámetros  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.1 \text{ kg/m}$ . La figura V.41, nos muestra por otro lado, el efecto de la variación de densidad  $\rho = 50, 100, 120$  y  $150 \text{ kg/m}^3$  sobre velocidad junto con los parámetros  $\mu = 1.0 \text{ kg/ms}$  y  $\alpha_1 = 0.01 \text{ kg/m}$ .

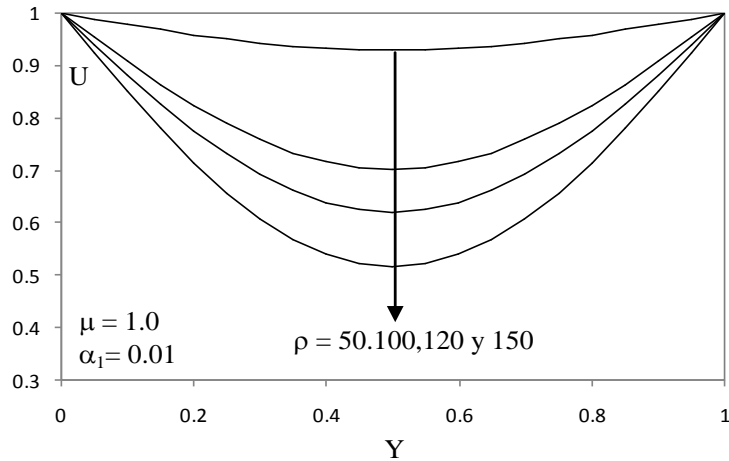


Figura V.41. Resultados de velocidad  $U$  en función de la coordenada espacial  $Y$  para varios valores de parámetros  $\mu = 1 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 50, 100, 120 \text{ y } 150 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.01 \text{ kg/m}$

El efecto del coeficiente de difusión sobre velocidad para varios valores de densidad  $\rho$ , está mostrado en las figura V.42. La figura V.42 está representada para los siguientes parámetros:  $\mu = 1 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100$  y  $\alpha = 0.01, 0.02, 0.03$  y  $0.005 \text{ kg/m}$ . Se puede apreciar el aumento de los valores de velocidad conforme aumenta el valor del parámetro de difusión  $\alpha_1$ .

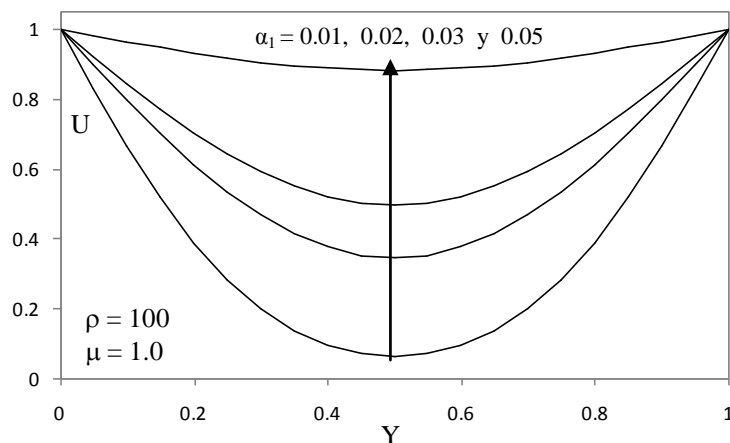


Figura V.42. Resultados de velocidad  $U$  en función de la coordenada espacial  $Y$  para varios valores de parámetros  $\mu = 1 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.01, 0.02, 0.03 \text{ y } 0.05 \text{ kg/m}$

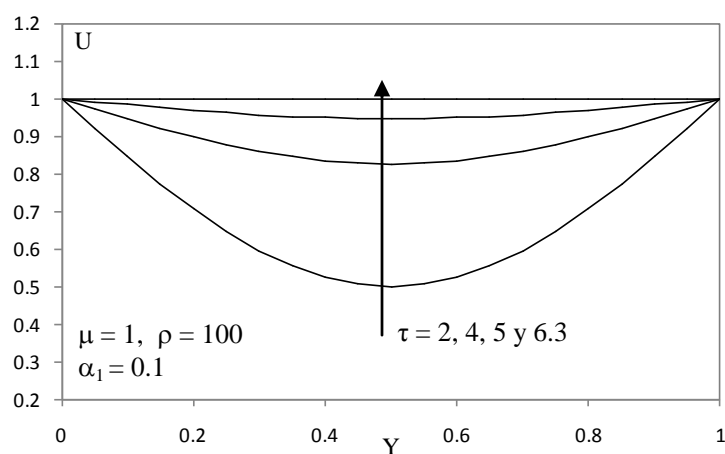


Figura V.43. Resultados de velocidad  $U$  en el estado estacionario en función de la coordenada espacial  $Y$ , con parámetros  $\mu = 1 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha_1 = 0.1 \text{ kg/m}$  y  $\tau_{\text{est}} = 6.3$

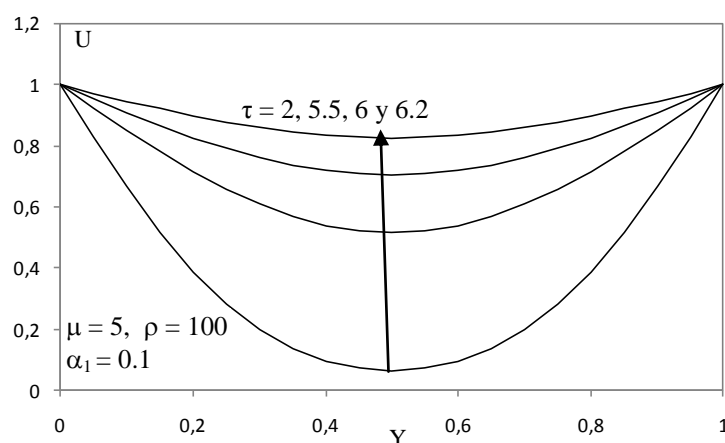


Figura V.44. Resultados de velocidad  $U$  en el estado estacionario en función de la coordenada espacial  $Y$ , con parámetros  $\mu = 5 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha_1 = 0.1 \text{ kg/m}$  y  $\tau_{\text{est}} = 6.2$

Las figuras V.43, V.44 y V.45 reflejan la evolución de velocidad con el tiempo para diferentes valores del parámetro de viscosidad dinámica  $\mu$ . La figura V.43 representa curvas crecientes con el tiempo con valores de parámetros  $\mu = 1 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha = 0.1 \text{ kg/m}$ , alcanzando el estado estacionario para  $\tau_{\text{est}} = 6.3$ . En la figura V.44 las curvas también crecen con el tiempo, necesitando un tiempo de  $\tau_{\text{est}} = 6.2$  para alcanzar el estacionario con valores de parámetros  $\mu = 5 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha = 0.1 \text{ kg/m}$ .

La figura V.45 refleja una situación similar a las anteriores, para los siguientes valores  $\mu = 10 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha = 0.1$  y el valor  $\tau_{\text{est}} = 0.7$  necesario para alcanzar el estado estacionario. Se observa la notable disminución en los valores del tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario conforme aumenta el valor de la viscosidad dinámica.

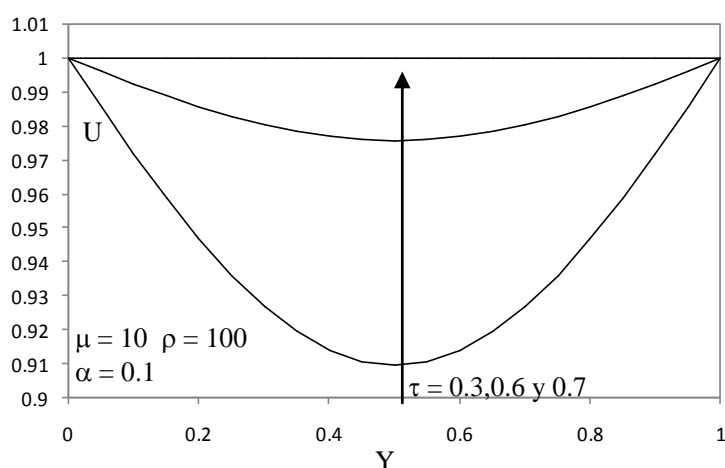


Figura V.46. Resultados de velocidad  $U$  en el estado estacionario en función de la coordenada espacial  $Y$ , con parámetros  $\mu = 10 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha = 0.1 \text{ kg/m}$ , con  $\tau_{\text{est}} = 0.7$

### 5.1.4.2. Flujo debido al repentino movimiento de uno de los límites

A continuación se presenta el análisis numérico correspondiente considerando diversos valores de las propiedades o variables que caracterizan este problema:  $\mu$ ,  $\alpha$  y  $\rho$ . En primer lugar se comparan los resultados en la figura V.47 con los proporcionados por el MESIR, obteniendo de nuevo una solución coincidente con la proporcionada por [Hayat y col. 2000, citada en página 59]. La figura V.47 muestra la evolución temporal de la velocidad, para los valores  $\mu = 0.1 \text{ kg/ms}$ ,  $\rho = 15$  y  $20 \text{ kg/m}^3$  y  $\alpha_1 = 0.05$  y  $0.01 \text{ kg/m}$ .

Las figuras V.48, V.49 y V.50 representan la evolución de la velocidad en función de la coordenada adimensional  $Y$  en estado estacionario, para diferentes combinaciones de los parámetros característicos de este problema.

La figura V.48 representa los resultados de velocidad para varios valores del parámetro  $\mu = 0.2, 0.5, 1.0$  y  $2.0$  kg/ms con  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup> y  $\alpha = 0.01$  kg/m. La figuras V.49 muestra la velocidad en función de los valores de la densidad  $\rho$ . El análisis realizado de estas figuras demuestra el decrecimiento de velocidad conforme aumenta el valor de la densidad  $\rho$  y el aumento de velocidad debido al aumento del parámetro de viscosidad dinámica  $\mu$ .

La figura V.49 está representada para los valores  $\mu = 1.0$  kg/ms,  $\alpha = 0.1$  kg/m,  $\rho = 30, 50, 100$  y  $150$  kg/m<sup>3</sup>.

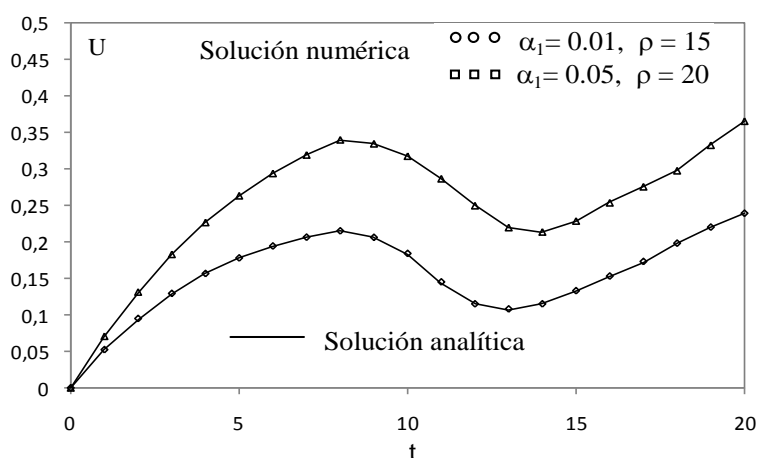


Figura V. 47. Comparación de resultados de velocidad  $U$  para valores de parámetros  $\mu = 0.1$  kg/ms,  $\rho = 15$  y  $20$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha_1 = 0.05$  y  $0.01$  kg/m

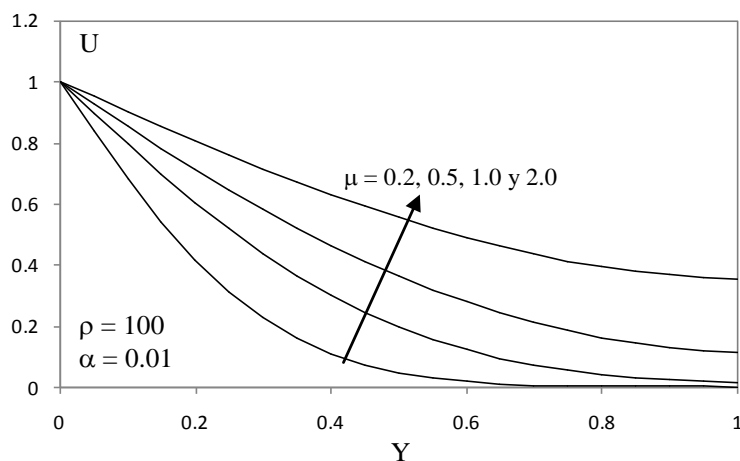


Figura V.48. Resultados de velocidad  $U$  en función de la coordenada espacial  $Y$  para valores de parámetros  $\mu = 0.2, 0.5, 1.0$  y  $2.0$  kg/ms,  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup> y  $\alpha_1 = 0.01$  kg/m

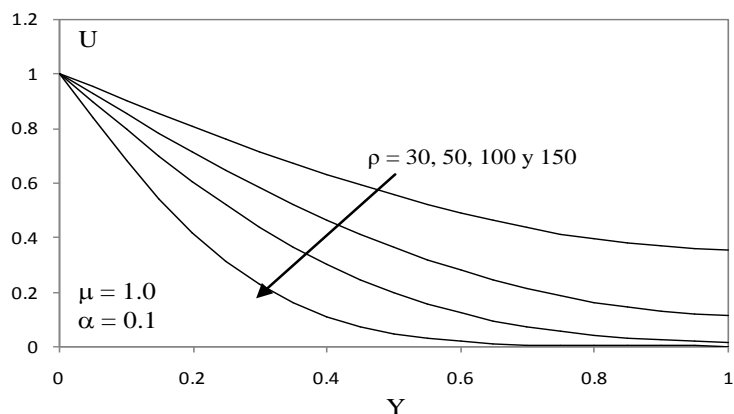


Figura V.49. Resultados de velocidad  $U$  en función de la coordenada espacial  $Y$  para valores de parámetros  $\rho = 30, 50, 100$  y  $150$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu = 1.0$  kg/ms y  $\alpha_1 = 0.1$  kg/m

El resto de figuras representadas, reflejan el estudio de la velocidad en función del tiempo  $\tau$ . Las siguientes figuras muestran curvas crecientes con el tiempo. La para los valores  $\mu = 1$  kg/ms,  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup> y  $\alpha_1 = 0.1$  kg/m, (figura V.50) y  $\mu = 10$  kg/ms,  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup> y  $\alpha = 0.1$  kg/m (figura V.51).

En la figura V.50 se obtiene un valor de  $\tau_{est} = 0.7$  mientras que la figura V.51 necesita un valor de  $\tau_{est} = 1.0$ . Por lo tanto se observa un decrecimiento en los valores del tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario conforme aumenta el valor de la viscosidad dinámica. La figura V.52 está representada mediante los valores:  $\mu = 1$  kg/ms,  $\rho = 50$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha = 0.01$  kg/m y  $\tau = 1.50$ . La figura V.53 refleja la evolución de la velocidad aumentando el valor de la densidad, de modo que sus parámetros son los siguientes:  $\mu = 1$  kg/ms,  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha = 0.01$  kg/m y  $\tau_{est} = 1.7$ . Se deduce de estas figuras el aumento del tiempo en alcanzar el estado estacionario conforme aumenta el valor de la densidad.

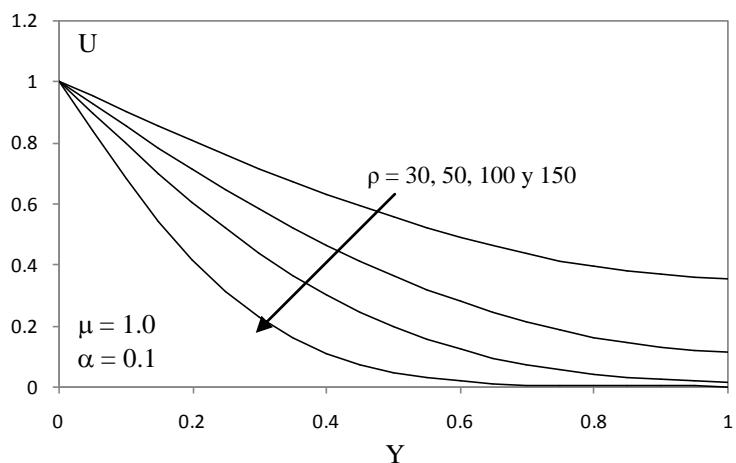


Figura V.50. Resultados de velocidad  $U$  en el estado estacionario en función de la coordenada espacial  $Y$ , con parámetros  $\mu = 1$  kg/ms,  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha_1 = 0.1$  kg/m y  $\tau_{est} = 6$

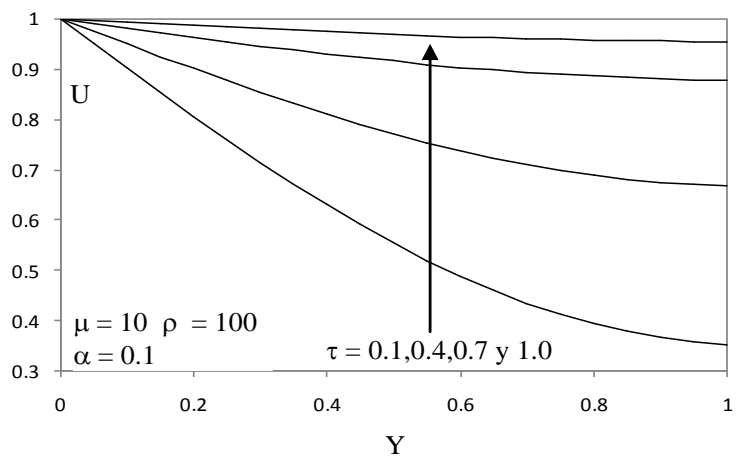


Figura V.51. Resultados de velocidad  $U$  en el estado estacionario en función de la coordenada espacial  $Y$ , con parámetros  $\mu = 10$  kg/ms,  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha = 0.1$  kg/m y  $\tau_{est} = 1.0$

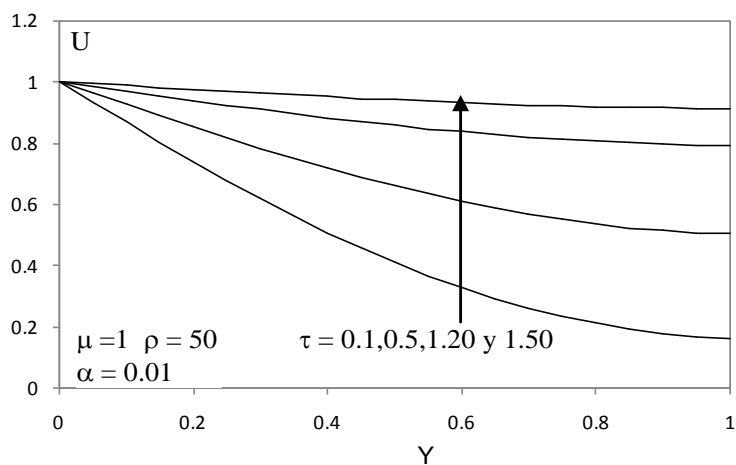


Figura V.52. Resultados de velocidad  $U$  en el estado estacionario en función de la coordenada espacial  $Y$ , con parámetros  $\mu = 1$  kg/ms,  $\rho = 50$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha = 0.01$  kg/m y  $\tau_{est} = 1.5$

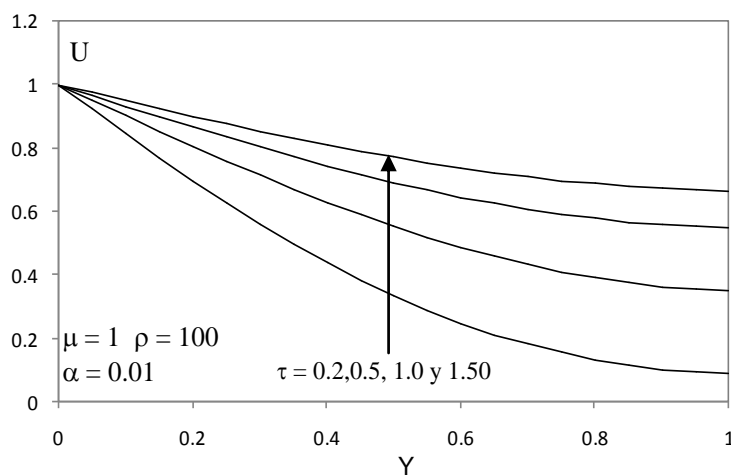


Figura V.53. Resultados de velocidad  $U$  en el estado estacionario en función de la coordenada espacial  $Y$ , con parámetros  $\mu = 1$  kg/ms,  $\rho = 100$  kg/m<sup>3</sup>,  $\alpha = 0.01$  kg/m y  $\tau_{est} = 1.7$



## 5.1.5. Convección libre magnetohidrodinámica sobre una superficie permeable vertical en un medio poroso

En esta sección vamos a analizar los efectos sobre los perfiles de velocidad, temperatura y concentración de absorción de radiación, difusión en masa, reacción química y fuente de calor. En este análisis se considera que la placa vertical permeable está situada en un medio poroso y además se mueve a velocidad constante en la dirección del flujo y en presencia de un campo magnético transversal. La validación de resultados ha permitido comparar exitosamente los resultados en estado estacionario obtenidos por el método numérico presentado en esta memoria (MESIR) con los proporcionados por otros autores.

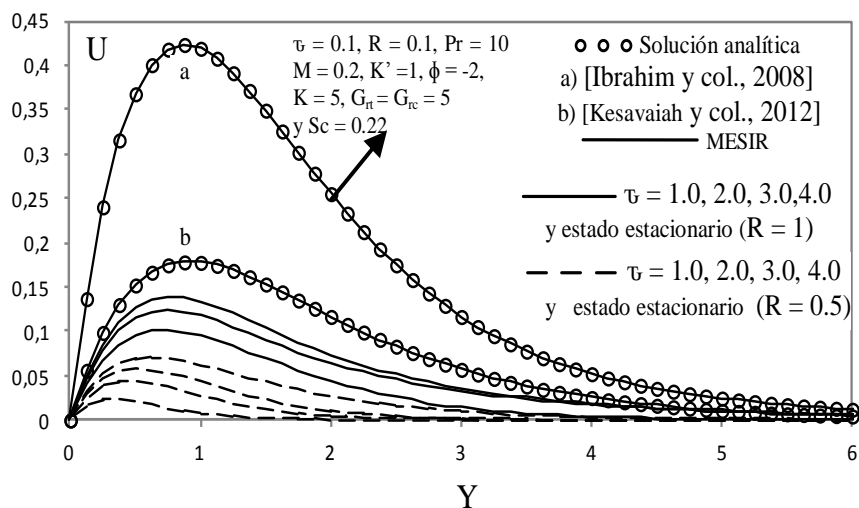


Figura V.54. Velocidad en los estados estacionario y transitorio para varios valores del parámetro de absorción de radiación  $R$  con los siguientes parámetros:  $Pr = 0.71, M = 1, K' = 1, \phi = 4, G_{\text{it}} = 1, G_{\text{rc}} = 1, Sc = 0.6$  y  $K = 1$ . Comparación de resultados.

Las siguientes figuras muestran la distribución de la velocidad dentro de la capa límite. La figura V.54 muestra el estado transitorio y estacionario de los perfiles de velocidad  $U$  para  $Pr = 0.71, M = 1, K' = 1, \phi = 4, G_{\text{it}} = 1, G_{\text{rc}} = 1, Sc = 0.6$  y  $K = 1$ . Podemos observar que las curvas continuas presentan el valor del parámetro de radiación  $R = 1$ , mientras que las curvas discontinuas presentan el valor  $R = 0.5$ . Esta figura presenta los resultados obtenidos por [Kesavaiah y col., 2012, citada en página 67] mediante la técnica de la transformada de Laplace para el caso estacionario, con  $R = 1$  y además los resultados proporcionados por [Ibrahim y col. 2008, citada en página 67] mediante el método de perturbación homotópica, para el caso transitorio con los siguientes parámetros:  $Pr = 10, \tau = 1, M = 0.2, K' = 1, \phi = -2, G_{\text{it}} = 5, G_{\text{rc}} = 5, Sc = 0.22, R = 0.1$  y  $K = 5$ .

La figura V.54 demuestra que incrementando el valor del parámetro de radiación acelera la velocidad del flujo en la capa límite, así como un aumento del espesor térmico. Esto se debe a que valores mayores del parámetro de radiación se corresponden con un aumento de la dominancia de la conducción sobre la absorción de radiación y de ese modo se incrementa la velocidad del flujo y el espesor de las capas límite de movimiento y térmica. También podemos observar que la velocidad aumenta con el tiempo y que conforme aumentan los valores del parámetro de radiación aumenta el valor del tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario,  $\tau_{est} = 4.8$  y  $\tau_{est} = 5.3$  para  $R = 0.5$  y  $1$  respectivamente.

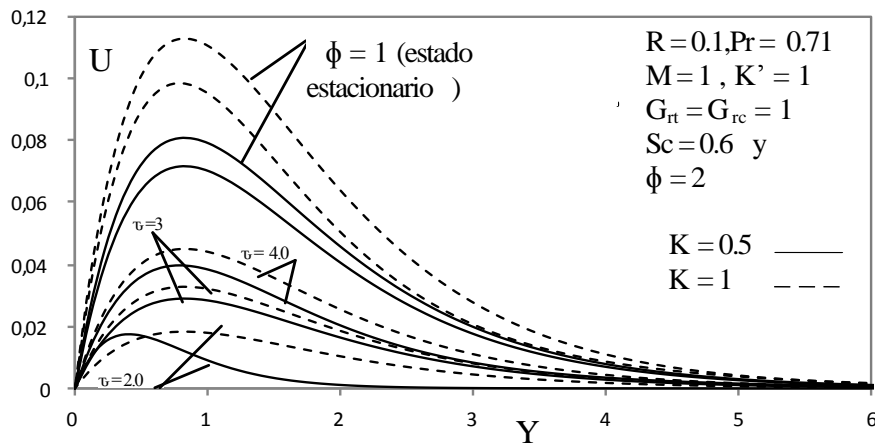


Figura V.55. Velocidad en los estados estacionario y transitorio para varios valores de los parámetros de reacción química  $K$  y generación de calor  $\phi$  con los siguientes parámetros:  $Pr = 0.71$ ,  $R = 1$ ,  $M = 1$ ,  $K' = 1$ ,  $G_{rt} = 1$ ,  $G_{rc} = 1$  y  $Sc = 0.6$

La figura V. 55 presenta los resultados de velocidad  $U$  para diferentes valores del tiempo adimensional  $\tau$  así como el estado estacionario de la velocidad para diferentes valores del parámetro de reacción química  $K$ . En esta figura se representan los efectos de los parámetros de generación de calor  $\phi$  y reacción química  $K$  con los siguientes parámetros:  $R = 0.1$ ,  $Pr = 0.71$ ,  $M = 1$ ,  $K' = 1$ ,  $G_{rt} = G_{rc} = 1$ ,  $Sc = 0.6$  y  $\phi = 2$ . Se observa que un incremento en el valor del parámetro de reacción química  $K$  causa un notable incremento en la velocidad del fluido y esto demuestra que la velocidad de difusión puede ser alterada por una reacción química. El tiempo requerido para alcanzar el estado estacionario disminuye conforme se incrementa el parámetro de reacción química  $K$ ,  $\tau_{est} = 5.7$  y  $5.1$  para  $K = 0.5$  y  $1$ , respectivamente. Físicamente los valores positivos del parámetro  $K$  implican una reacción destructiva y los valores negativos de  $K$  implican una reacción constructiva. Hemos representado el caso de una reacción destructiva.

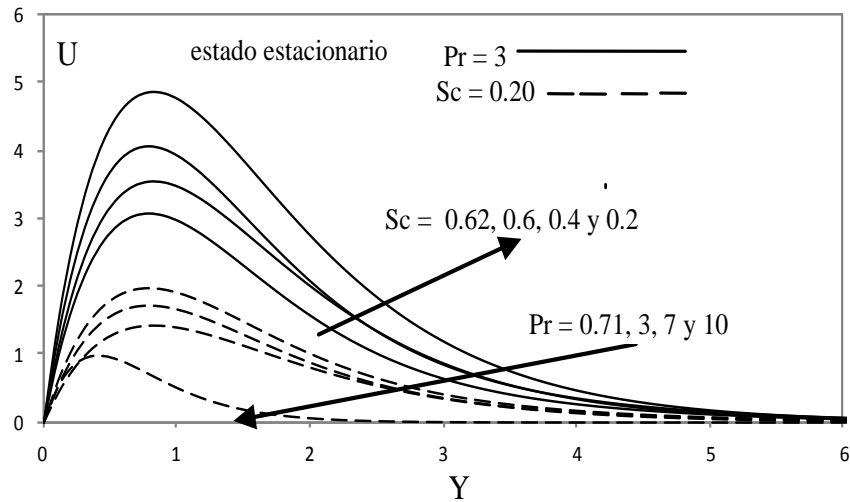


Figura V.56. Velocidad en estado estacionario para varios valores de los números de Schmidt  $Sc$  y Prandtl  $Pr$  con los siguientes parámetros:  $R = 1$ ,  $M = 1$ ,  $K' = 1$ ,  $G_{it} = 1$ ,  $G_{rc} = 1$ ,  $K = 1$  y  $\phi = 2$

Además, se observa que un incremento en el parámetro de generación de calor ocasiona un decrecimiento en los perfiles de velocidad. Es evidente que la velocidad se incrementa cuando disminuye los valores del parámetro de generación de calor.

Los resultados de velocidad en estado estacionario para varios valores del número de Schmidt  $Sc$  y del número de Prandtl  $Pr$  con los valores:  $R = 1$ ,  $M = 1$ ,  $K' = 1$ ,  $G_{it} = 1$ ,  $G_{rc} = 1$ ,  $K = 1$  y  $\phi = 2$  están representados en la figura V.56.

Un incremento en el número de Schmidt  $Sc$  da lugar a un incremento en la velocidad del fluido. Los valores inferiores del número de Prandtl  $Pr$  aumentan la conductividad térmica del fluido de calor y por tanto el calor se difunde fuera de la superficie más rápidamente que para valores superiores de  $Pr$ . Por lo tanto, cuanto mayor es el número de Prandtl, más gruesa será la capa límite de movimiento en comparación con la capa límite térmica. Físicamente el número de Prandtl  $Pr$  relaciona el espesor de la capa límite térmica y de cantidad de movimiento.

Por otra parte, el número de Schmidt  $Sc$  es un número adimensional definido como el cociente entre la difusión de cantidad de movimiento y la difusión de masa, y se utiliza para caracterizar flujos en los que hay procesos convectivos de cantidad de movimiento y masa. Físicamente, el número de Schmidt relaciona los grosores de las capas límite de cantidad de movimiento y de masa.

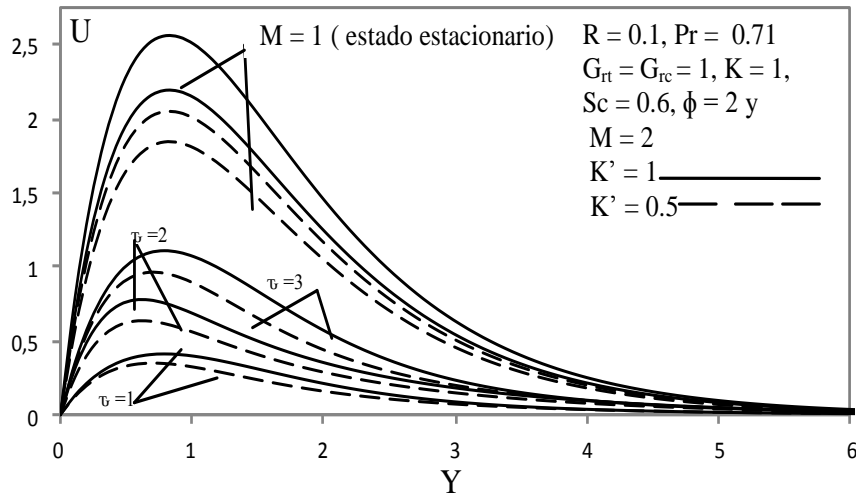


Figura V.57. Velocidad en los estado estacionario y transitorio para varios valores del parámetro de permeabilidad  $K'$  y del número magnético  $M$  con los siguientes parámetros:  $Pr = 0.71, R = 0.1, \phi = 2, K = 1, G_{rt} = 1, G_{rc} = 1$  y  $Sc = 0.6$

La figura V.57 presenta la respuesta temporal de velocidad  $U$  para los siguientes parámetros:  $R = 0.1, Pr = 0.71, G_{rt} = G_{rc} = 1, K = 1, Sc = 0.6, \phi = 2$  y  $M = 2$ . El efecto del campo magnético sobre los perfiles de velocidad en la capa límite se representa en esta figura. Se observa que la velocidad comienza desde el valor mínimo en la superficie y aumenta hasta que se alcanza el máximo y luego comienza a disminuir hasta que llega al valor mínimo en el extremo de la capa límite, para todos los valores del parámetro de campo magnético. Es interesante notar que el efecto del campo magnético consiste en disminuir el valor de los perfiles de velocidad a lo largo de la capa límite.

Se observa que el máximo de velocidad decrece drásticamente con el incremento del campo magnético debido a que la presencia de un campo magnético en un fluido conductor de electricidad produce la conocida fuerza de Lorentz.

Este tipo de fuerza de resistencia se ralentiza la velocidad del fluido. También podemos observar el aumento de los valores de velocidad conforme aumenta el parámetro de permeabilidad  $K'$ . Se observa el incremento en los valores del tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario conforme decrece el parámetro magnético,  $\tau_{est} = 4.3$  y  $4.9$  para  $M = 2$  y  $1$ , respectivamente, mientras que decrece conforme aumenta el parámetro de permeabilidad,  $\tau_{est} = 5.1$  y  $4.7$  para  $K' = 0.5$  y  $1$  respectivamente.

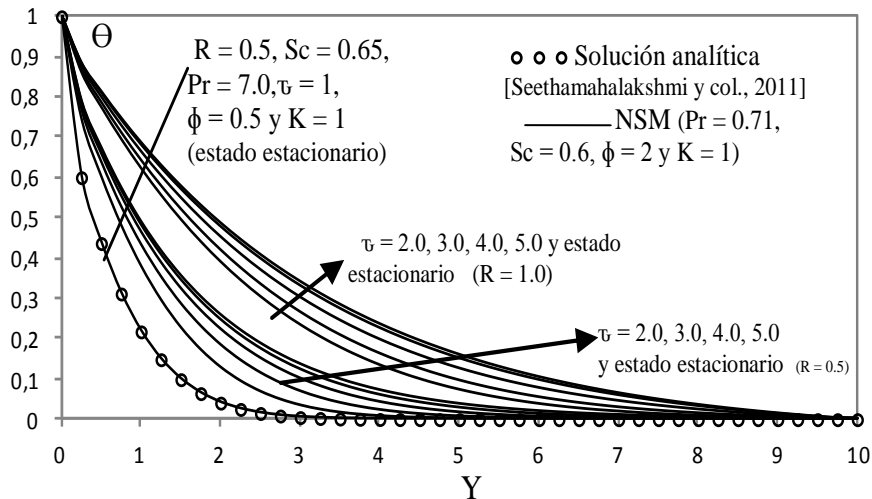


Figura V.58. Temperatura en los estados estacionario y transitorio para varios valores del parámetro de absorción de radiación  $R$  con los siguientes parámetros:  $Pr = 0.71, \phi = 2, K = 1$  y  $Sc = 0.6$ . Comparación de resultados

La figura V.58 presenta la respuesta temporal de los resultados de temperatura  $\Theta$  para diferentes valores del parámetro de radiación  $R$  con  $Pr = 0.71, \phi = 2, K = 1$  y  $Sc = 0.60$ . Esta figura también compara los resultados de temperatura obtenidos por [Seethamahalakshmi y col. 2011, citada en página 69] y los obtenidos por el MESIR para el caso transitorio con los siguientes valores:  $R = 0.5, Sc = 0.65, Pr = 7.0, \tau = 1, \phi = 0.5$  y  $K = 1$ .

El excelente grado de acuerdo de los presentes resultados por el método de simulación en red con los obtenidos por el método de perturbación homotópica puede ser apreciado. Se observa que el efecto de la radiación de absorción es aumentar la temperatura en la capa límite ya que el calor irradiado es absorbido por el fluido, que por su parte aumenta la temperatura muy cerca de la capa límite porosa y su efecto disminuye lejos de la capa límite. El tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario disminuye conforme el parámetro de radiación aumenta,  $\tau_{est} = 6.7$  y  $6.3$  para  $R = 0.5$  y  $1$ , respectivamente.

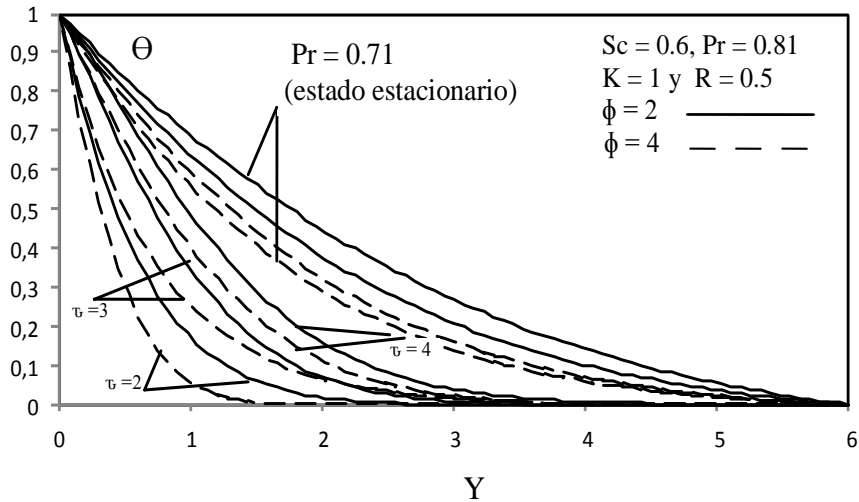
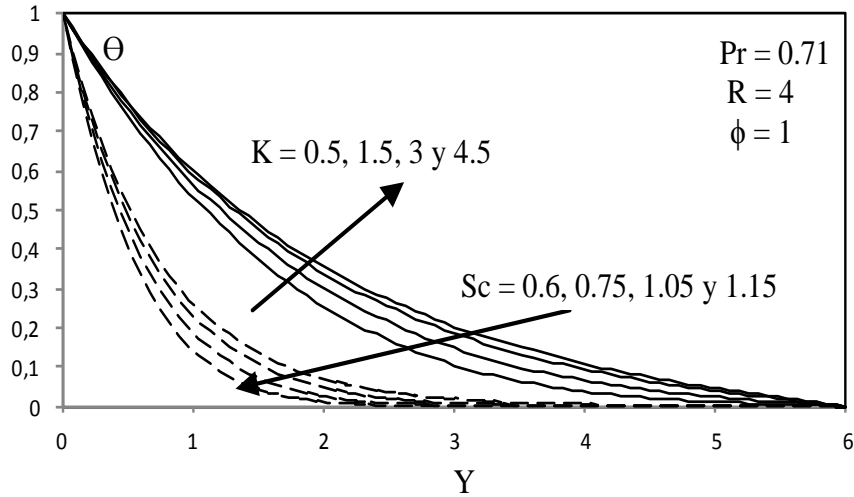


Figura V.59. Temperatura en los estados estacionario y transitorio para varios valores del número de Prandtl  $Pr$  y del parámetro de generación de calor  $\phi$  con los siguientes parámetros  $Sc = 0.6, R = 0.5$  y  $K = 1$

Los efectos del número de Prandtl  $Pr$  y el parámetro de generación de calor  $\phi$  sobre los resultados de temperatura están representados en la figura V.59 para diferentes valores del tiempo  $\tau$  con los siguientes parámetros:  $Sc = 0.6, R = 0.5$  y  $K = 1$ . Esta figura demuestra que un incremento en el número de Prandtl ocasiona un decrecimiento en la capa límite térmica. En relación al efecto del parámetro de generación de calor se puede apreciar un decrecimiento en los valores de temperatura conforme se incrementa el parámetro de generación de calor  $\phi$  pues cuando el calor es absorbido, la fuerza de flotabilidad disminuye los valores de temperatura. Se debe destacar que el tiempo requerido para alcanzar el estado estacionario se incrementa cuando aumentan el número de Prandtl y el parámetro de generación de calor  $\tau_{est} = 5.25$  and  $5.4$  para  $Pr = 0.71$  and  $0.81$  respectivamente y  $\tau_{est} = 6.15$  y  $6.3$  para  $\phi = 2$  y  $4$ , respectivamente.



FiguraV.60. Temperatura en estado estacionario para varios valores del parámetro de reacción química  $K$  y del número de Schmidt  $Sc$ , con los siguientes parámetros:  $Pr = 0.71$ ,  $R = 1.0$  y  $\phi = 4$

La figura V.60 representa los resultados estacionarios de temperatura  $\Theta$  para varios valores del número de Schmidt  $Sc$  y del parámetro de reacción química con los siguientes valores:  $Pr = 0.71$ ,  $R = 1.0$  y  $\phi = 4$ . Las curvas continuas están representadas para los valores:  $K = 0.5, 1.5, 3$  y  $4.5$  y  $Sc = 0.75$ . Por otro lado, las curvas discontinuas están representadas por los valores:  $Sc = 0.6, 0.75, 1.05$  and  $1.15$ , and  $K = 1.5$ . Es evidente que la temperatura del fluido se incrementa con el incremento del parámetro de reacción química. Físicamente este hecho es debido al efecto de la intensidad de la radiación sobre la pared del canal. Se deduce también de esta figura que la temperatura del fluido decrece con el incremento de  $Sc$ .

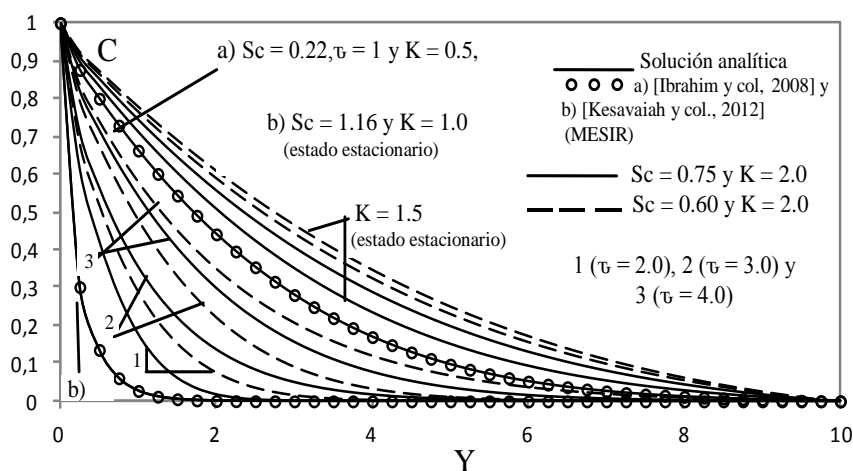


Figura V.61. Concentración en los estados estacionario y transitorio para varios valores del parámetro de reacción química  $K$  y del número de Schmidt  $Sc$  con los siguientes parámetros:  $Pr = 0.71$ ,  $R = 0.5$  y  $\phi = 4$ . Comparación de resultados

Los resultados temporales de concentración están representados en la última figura V.61 para varios valores del número de Schmidt  $Sc$  y parámetro de reacción química  $K$ . La respuesta transitoria está representada mediante curvas continuas y discontinuas para  $Sc = 0.75$  y  $Sc = 0.60$  respectivamente. En ambos casos el valor del parámetro de reacción química es  $K = 2.0$ . El caso estacionario también ha sido representado mediante curvas continuas y discontinuas. Las curvas continuas están representadas por los siguientes valores:  $K = 1.5$  y  $Sc = 0.75$ , mientras que las curvas discontinuas están representadas por  $K = 1.5$  y  $Sc = 0.60$ .

Se han representado las soluciones analíticas obtenidas por [Kesavaiah y col. 2012, citada en página 67] con los valores:  $Sc = 1.16$  y  $K = 1.0$  para el caso estacionario y las obtenidas por [Ibrah y col. 2008, citada en página 66] con los valores:  $Sc = 0.22$ ,  $\tau = 1$  y  $K = 0.5$ . Se demuestra por tanto el excelente grado de acuerdo entre las soluciones analíticas y las proporcionadas por el MESIR. En esta figura se deduce que el decrecimiento en los valores del número de Schmidt ocasiona el incremento del espesor de la capa límite de concentración. Se deduce por tanto un incremento en la concentración del fluido conforme aumenta el valor del parámetro de Schmidt  $Sc$ . Por otro lado, observamos un notable decrecimiento en la concentración del fluido con el incremento del parámetro de reacción química  $K$ . Finalmente, el tiempo requerido para alcanzar el estado estacionario aumenta cuando el número de Schmidt o el parámetro de reacción química se incrementan,  $\tau_{est} = 6.55$  y  $6.8$  para  $Sc = 0.6$  y  $0.75$  respectivamente y  $\tau_{est} = 5.7$  y  $6.4$  para  $\phi = 1.5$  y  $2$  respectivamente.





# CAPÍTULO SEIS

## Conclusiones

---

### 6. 1. Conclusiones

---

En este capítulo expondremos un apartado de conclusiones sobre cada estudio llevado a cabo en esta memoria. Se ha tenido en consideración el detallado estudio gráfico realizado en el Capítulo 5, indicando según el caso la influencia de los parámetros más relevantes para la correcta determinación de conclusiones. Los resultados obtenidos han sido comparados con los proporcionados con otros métodos numéricos o métodos analíticos, siendo excelente el resultado.

## 6.1. Conclusiones

Como se expuso en el Capítulo 1, los objetivos de esta Memoria se pueden agrupar en dos objetivos principales. En primer lugar, se la aplicabilidad del MESIR a la simulación numérica de fenómenos físicos relacionados con la Mecánica de Fluidos y la Transferencia de Calor. En concreto, esta técnica numérica ha sido aplicada a varios procesos físicos, como la rotación de un disco o superficies de placas paralelas en movimiento. Demostrando en todos los casos, la validez de los resultados obtenidos.

En segundo lugar, también se ha abordado el estudio de la eficacia del método de simulación en red, para la obtención de los resultados en los distintos escenarios de aplicación presentados en esta Memoria, tanto en estudios espaciales como temporales.

En el Capítulo 4, se ha diseñado los modelos en red para la simulación con el MESIR de los problemas definidos, ayudando a cumplir con el primer objetivo perseguido. En el Capítulo 5, se ha expuesto y analizado gráficamente la influencia de todos los parámetros que proporcionan información relevante en los diferentes problemas numéricos investigados en esta memoria.

- La sección **5.1.1** comienza con el flujo magnetohidrodinámico de un fluido conductor de electricidad viscoso e incompresible sobre un disco giratorio. Tras el análisis realizado se concluye que la presencia de un campo magnético disminuye significativamente la velocidad de las componentes de velocidad, radial  $F$ , tangencial  $G$  y axial  $-H$ . Sin embargo, su efecto sobre la componente axial  $H$  es el contrario.

La transferencia de calor del fluido, indica que su temperatura se incrementa cuando el parámetro magnético  $M$  también se incrementa. Por otro lado, el efecto del número de Prandtl revela una reducción significativa en los valores de la temperatura del fluido cuando el número de Prandtl aumenta. La presión ejercida sobre el fluido ha sido también analizada, concluyendo en una reducción considerable en los valores de la misma, si los valores del parámetro magnético aumentan.

La incorporación del término transitorio sobre las ecuaciones que rigen el movimiento de la rotación del disco, ha proporcionado nuevos resultados aquí presentados. Los datos analizados demuestran que las curvas de las componentes de velocidad, temperatura y presión crecen con el tiempo hasta alcanzar el estado estacionario. La única componente que difiere del resto mostrando un efecto contrario, es la componente axial de la velocidad  $H$ . El proceso transitorio realizado sobre el disco giratorio, es completado con el estudio del tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario para las componentes de velocidad, presión y temperatura del fluido, en función de las variables más significativas del problema.

- La siguiente sección **5.1.2** muestra el análisis de la transferencia de masa y calor de un flujo hidromagnético que recorre una superficie permeable vertical en movimiento, en presencia de absorción y/o generación de calor, un campo magnético y una reacción química de primer orden. Esta sección también evidencia una comparación óptima de los resultados obtenidos numéricamente con los proporcionados por [Chamkha, 2003].

La velocidad estacionaria del fluido disminuye conforme se incrementan el número de Prandtl  $Pr$ , el número de Schmidt  $Sc$  o la intensidad del campo magnético  $M$ . Por otro lado, se concluye que la velocidad del fluido se incrementa debido al incremento de los efectos de flotabilidad de concentración y térmica. El análisis realizado en esta memoria también demuestra que la velocidad del fluido se incrementa durante una reacción química constructiva y disminuye durante una reacción química destructiva. Además se debe destacar la presencia del efecto de generación de calor como causante del incremento de la velocidad del fluido, mientras que el efecto de absorción de calor produce una reducción en la velocidad del fluido.

En relación al estudio estacionario sobre temperatura realizado se concluye el decrecimiento en la capa límite térmica debido al incremento de los valores del parámetro de absorción/generación de calor  $\phi$  y el número de Prandtl. La evolución de los perfiles de concentración en estado estacionario permite concluir el decrecimiento obtenido debido al aumento en los valores del número de Schmidt o el parámetro de reacción química  $K$ .

Se ha analizado el estudio transitorio sobre los perfiles de velocidad, temperatura y concentración. Los resultados obtenidos permiten demostrar en primer lugar el crecimiento de la velocidad con el tiempo. Además se ha concluido que el tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario de velocidad, disminuye con el decrecimiento del parámetro de absorción de calor ( $\phi > 0$ ) y con el aumento de los parámetros magnético  $M$  y reacción química  $K$  destructiva. Asimismo, el tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario aumenta conforme aumenta el número de Schmidt  $Sc$ .

Finalmente el análisis realizado en esta sección concluye con el tiempo para alcanzar el estado estacionario de temperatura que disminuye con el aumento del parámetro de absorción de calor  $\phi$ . El estado estacionario de concentración requiere un tiempo para alcanzar el estado estacionario que disminuye con el aumento del parámetro de reacción química.

- El análisis del flujo de convección mixta en un canal vertical de placas paralelas ha sido realizado en la sección **5.1.3**. Se han considerado tres tipos de condiciones térmicas de contorno en las dos paredes del canal. Estas diferentes condiciones de contorno son: isotérmica, y flujo de calor simétrico o asimétrico en las paredes del canal vertical.

Para un flujo ascendente en paredes isotérmicas, incrementos en el valor del parámetro de convección mixta  $Gr/Re$  tienen la tendencia a aumentar el movimiento del fluido cerca de la pared caliente derecha causando que el perfil de velocidad sea asimétrico. Como se ha demostrado el análisis de esta sección, se espera que más allá de un valor crítico del parámetro de convección  $Gr/Re$ , la condición de inversión de flujo se produce cerca de la pared fría izquierda y este fenómeno aumenta aún más a medida que aumenta el parámetro de convección mixta. Del mismo modo, para un flujo descendente el flujo inducido se incrementa cerca de la pared fría y el fenómeno de inversión ocurre cerca de la pared caliente.

La velocidad del fluido también refleja la influencia del número de Hartmann  $M$ . Se observa una disminución de la velocidad del fluido en las paredes del canal a medida que aumenta el valor del número Hartmann  $M$ . Además, también se concluye que la aplicación de un campo magnético transversal sobre un fluido conductor de electricidad produce una fuerza magnética de Lorentz contraria al movimiento del fluido, provocando la inversión de éste. Estas conclusiones vinculadas con la influencia de los parámetros que afectan a la velocidad del fluido, se refieren al caso de paredes isotérmicas del canal ( $T_1 - T_2$ )

El estudio transitorio de velocidad realizado en el caso de paredes isotérmicas permite concluir que incrementos en el valor del parámetro de convección mixta  $Gr/Re$  causan un notable aumento en el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario. También se ha obtenido que incrementos en el número de Brinkmann  $Br$  causan un incremento en el tiempo. Por otro lado, el tiempo necesario en alcanzar el estado estacionario disminuye con el aumento del número de Hartmann  $M$ .

En el caso de paredes con flujo de calor constante en la pared derecha caliente ( $q_1 - T_2$ ) se ha observado una disminución en el tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario conforme decrece el parámetro de generación /absorción de calor.

El estudio transitorio sobre temperatura realizado en el caso de paredes con flujo de calor constante en la pared izquierda ( $T_1 - q_2$ ) permite deducir que disminuyendo el valor del número de Brinkmann  $Br$  aumenta el valor del tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario. Se observa el aumento en los perfiles de temperatura conforme disminuye el número de Brinkmann  $Br$ .

- El movimiento de los flujos unidireccionales no estacionarios de un fluido de segundo grado es resuelto en la sección 5.1.4. Una vez efectuado el análisis de los dos casos presentados en el capítulo señalado, se ha representado la influencia de ciertos parámetros, sobre la velocidad del fluido dependiente del tiempo y de la coordenada espacial. La validación de las soluciones numérica proporcionada por el método presentado en esta memoria y la solución analítica proporcionada por [Hayat y col. 2000] ha sido excelente en todos los casos estudiados.

El primer estudio explicado en la sección 5.1.4.1, se basa en el movimiento del fluido ocasionado por el desplazamiento hacia una velocidad estacionaria de las fronteras que rodean al fluido. Este caso, aumenta la velocidad del fluido conforme aumenta el parámetro de viscosidad dinámica  $\mu$  y disminuye la densidad  $\rho$ .

Los resultados de velocidad en función del tiempo, evidencian un decrecimiento en los valores de  $\tau$  cuando se incrementa el parámetro de viscosidad dinámica. Cuando aumenta el valor de la densidad del fluido, también se incrementa el tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario.

En el segundo estudio realizado en la sección 5.1.4.2, se aborda el estudio del flujo debido al repentino movimiento de uno de sus límites. En este caso se ha obtenido el crecimiento de velocidad del fluido cuando aumenta la viscosidad dinámica y disminuye con el aumento de la densidad.

El estudio transitorio realizado permite concluir que el tiempo empleado en alcanzar el estado estacionario aumenta conforme aumenta la densidad y disminuye cuando aumenta la viscosidad dinámica.

- La consideración de los efectos de absorción de radiación y reacción química sobre convección libre magnetohidrodinámica inestable a través de un medio poroso mediante una superficie permeable semi-infinita, ha sido el principal objetivo de la sección 5.1.5. El estudio realizado ha permitido concluir que la velocidad del fluido aumenta debido al incremento del parámetro de reacción química  $K$  y parámetro de radiación  $R$ , mientras que decrece debido al decrecimiento del parámetro de generación de calor  $\phi$ , número de Schmidt  $Sc$ , número de Prandtl  $Pr$ , parámetro magnético  $M$  y parámetro de permeabilidad  $K'$ . Además un incremento en los valores de temperatura del fluido es causado por un incremento de los valores de radiación. Un incremento en los valores del parámetro de generación de calor  $\phi$  y del número de Prandtl  $Pr$  ocasiona un decrecimiento de los valores de temperatura. Finalmente, incrementos en el parámetro de reacción química  $K$  y número de Schmidt  $Sc$  producen un decrecimiento en los valores de concentración.