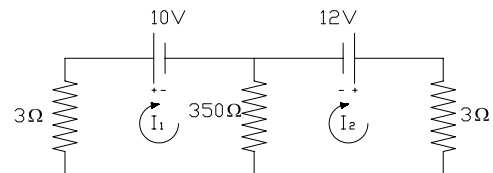
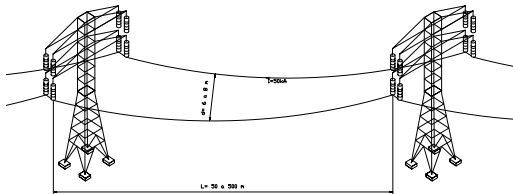




UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA
 DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA Y ESTADÍSTICA
 ESCUELA DE ARQUITECTURA E INGENIERÍA DE EDIFICACIÓN
 PROYECTO FIN DE GRADO.

Matemática Aplicada a Ciertos Problemas de la Edificación



AUTORA: MARÍA ROSA MENA REQUENA
 DIRECTOR: DR. D. JUAN LUIS GARCÍA GUIRAO
 CARTAGENA, 2014

Índice general

Introducción	1
1. Álgebra lineal	3
1.1. Sistemas lineales y álgebra matricial	3
Problema 1.1.1	4
Problema 1.1.2	9
Problema 1.1.3	11
Problema 1.1.4	18
Problema 1.1.5	23
Problema 1.1.6	28
Problema 1.1.7	31
Problema 1.1.8	36
Problema 1.1.9	40
1.2. Diagonalización de matrices	45
Problema 1.2.1	45
2. Programación lineal	49
2.0.1. Aplicación 1.	49
2.1. El problema del transporte.	53
2.1.1. Aplicación 2.	53
2.2. Programación lineal entera	58
2.2.1. Aplicación 3	58
3. No Linealidad 1	63
Problema 3.1.1	63
Problema 3.1.2	68
4. No Linealidad 2	71
Problema 4.1.1	71
Problema 4.1.2	74
Problema 4.1.3	77
Problema 4.1.4	79
Problema 4.1.5	82
Problema 4.1.6	86
Problema 4.1.7	89
Problema 4.1.8	92

Introducción

Los problemas de álgebra lineal como, por ejemplo, sistemas de ecuaciones lineales o problemas de mínimos cuadrados, aparecen en un amplio abanico de aplicaciones de casi todas las áreas científicas y tecnológicas. En particular, problemas de este tipo surgen en el análisis de la resistencia de estructuras de hormigón, cálculo de estructuras, la estimación de la órbita de los electrones, la evaluación del campo gravitatorio terrestre, la simulación de circuitos VLSI, el control automático, el diseño de circuitos integrados, la simulación de reacciones químicas, el estudio de las propiedades de nanocristales semiconductores, la detección de oclusiones en vasos sanguíneos mediante resonancia magnética, o la simulación del comportamiento de componentes estructurales de aviación. Esta relación no pretende ser más que una breve muestra de la variedad de aplicaciones en las que aparecen problemas de Álgebra Lineal.

Así mismo, durante la resolución de estos problemas, aparecen repetidamente un conjunto reducido de operaciones básicas como el cálculo del producto escalar de dos vectores, la resolución de un sistema triangular de ecuaciones lineales o el producto de dos matrices, sin embargo, para llegar a la solución final hay que realizar usualmente un proceso matemático muy laborioso, pero con la evolución de la informática y los ordenadores, este trabajo es mucho más sencillo.

Este trabajo que se desarrolla en cuatro capítulos: Álgebra Lineal, Programación Lineal, No Linealidad 1 y No Linealidad 2, en los que se van a evaluar principalmente tres aplicaciones distintas a la Edificación mediante la resolución de deformaciones, de averías eléctricas y de la solución más óptima a un problema con limitaciones mediante la presentación de diferentes problemas. Seguimos el texto recientemente publicado [Moreno et al. 2011].

El primer capítulo, Álgebra Lineal, se centra en el cálculo matricial para el cálculo de estructuras en edificación. Como primer objetivo, determinamos las fuerzas y deformaciones que se producen en las estructuras al aplicarles cargas. Para ello, realizamos una selección de varios ejercicios relativos al cálculo de estructuras mediante el método matricial.

El segundo capítulo, Programación Lineal o Método Simplex, se centra en la búsqueda de la mejor solución, es decir, partiendo de la función objetivo donde la solución óptima de un problema de Programación Lineal se encuentra en un vértice o frontera del dominio de puntos factibles (esto último en casos muy especiales), por lo cual, la búsqueda secuencial del algoritmo se basa en la evaluación progresiva de estos vértices hasta encontrar el óptimo.

El tercer capítulo, No Linealidad 1, se centra en la localización exacta de las averías con el fin de evitar un posible contacto directo de alguno de los operarios, así como para volver a

restituir el servicio de iluminación.

Y el último capítulo, No Linealidad 2, se centra en varios problemas de aplicación en obra como por ejemplo, una puesta a tierra de una nave, puesta en marcha de una grúa.

En conclusión, este trabajo recoge distintas aplicaciones de las matemáticas en general y del álgebra, lineal y no lineal en particular, a la Edificación mediante la presentación de ejemplos representativos siguiendo lo expuesto en [Moreno et al. 2011]. Creemos que la aportación presentada es interesante ya que para cualquier tipo de cálculo en un proyecto de edificación, como por ejemplo, calcular una simple viga, una avervía eléctrica, una solución óptima, un desplazamiento, un asentamiento, ... es importante tener un amplio conocimiento de los rudimentos y herramientas matemáticas que nos lo posibilitan.

Capítulo 1

Álgebra lineal

1.1. Sistemas lineales y álgebra matricial

El *análisis estructural* tiene como primer objetivo, determinar las fuerzas y deformaciones que se producen en las estructuras al aplicarles cargas. Presentamos en esta sección varios ejercicios relativos al cálculo de estructuras mediante el método matricial.

Los métodos matriciales en el análisis estructural se desarrollaron a finales del siglo XIX, conduciendo a cálculos muy laboriosos lo que resultaba un inconveniente en aquella época. Sin embargo, como cualquier método de cálculo está siempre vinculado al estado actual de la técnica, con la evolución de la informática y los ordenadores, dichos métodos han tenido un desarrollo espectacular en las últimas décadas. Hoy en día el *cálculo matricial* se ha convertido en una importante herramienta que viene utilizándose, cada vez con mayor intensidad, en el *cálculo de estructuras*.

El empleo de la notación matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras. Desde el punto de vista teórico, permite utilizar métodos de cálculo en forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general. Esto facilita el tratamiento de la teoría de estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales se vean oscurecidos por operaciones de cálculo, por un lado, o diferencias físicas entre estructuras, por otro. Desde el punto de vista práctico, proporciona un sistema apropiado de análisis de estructuras y determina una base muy conveniente para el desarrollo de programas de computación. Es importante puntualizar que, frente a estas ventajas, el cálculo matricial de estructuras requiere del tratamiento de una elevada cantidad de datos lo que hace necesario la utilización de programas informáticos de resolución.

Mediante el empleo del cálculo matricial podremos resolver aquellas estructuras cuya discretización se realice con elementos que llamamos barras. Se define como barra, aquel elemento estructural en el que las dimensiones de su sección transversal son pequeñas en relación con su dimensión longitudinal. Los tipos de estructuras que podemos resolver dependen del tipo de unión entre barras, nudos articulados o rígidos, y su distribución geométrica, plana o espacial. Generalmente, las estructuras articuladas están asociadas a la construcción metálica y las estructuras reticuladas a la construcción con hormigón armado. Por otro lado las cargas a las

que pueden estar sometidas una estructura pueden estar aplicadas sobre los nudos y/o sobre los elementos.

En la actualidad uno de los métodos más aplicados en el cálculo de estructuras es el llamado *Método de Rigidez o de los Desplazamientos*. Esto es debido a la facilidad para obtener la matriz de rigidez y su buena adaptación a la programación computacional. En este método las incógnitas son los movimientos en los nudos, y a partir de ellos se determinan los esfuerzos. La ecuación matricial es:

$$\{F\} = [K] \cdot \{D\} \quad (1.1)$$

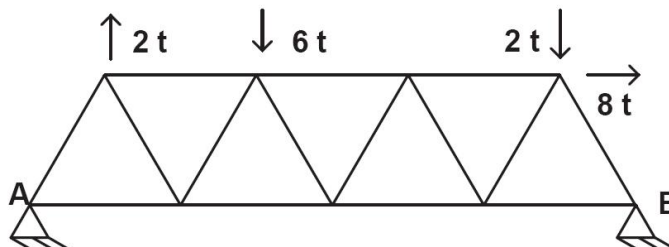
donde $[K]$ es la matriz de rigidez de la estructura y $\{F\}$ y $\{D\}$ los vectores de carga y desplazamiento en los nudos, respectivamente.

El orden del sistema de ecuaciones resultante es igual al número de nudos de la estructura por el número de posibilidades de movimiento por nudo y las incógnitas son los desplazamientos y giros de la estructura.

El conjunto de ejercicios presentados en esta sección se enmarcan bajo dos enfoques distinguidos. Por un parte, la eficiencia de los programas informáticos en el cálculo de la matriz de rigidez de la estructura, potencia el desconocimiento de los principios básicos del análisis estructural, por lo que se ha estimado conveniente desarrollar, a través del álgebra matricial, las matrices de rigidez de diversas estructuras. Por otra parte, se incluyen problemas en los que se aplican métodos, directos o iterados, para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales que surgen en el estudio de las estructuras consideradas.

Problema 1.1.1 Una estructura biarticulada plana apoyada en dos puntos A y B está sometida a las cargas verticales de $2t$, $6t$ y $2t$ y a una carga horizontal de $8t$ según muestra la Figura 1.1

Figura 1.1: Estructura biarticulada plana.



Determinar los desplazamientos de los nudos sabiendo que $EA=16000$ (módulo de elasti-

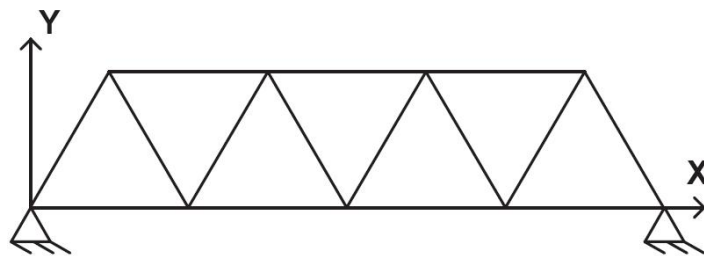
idad del material por área de sección transversal de la barra) y la longitud de las barras es $L=4m$.

Solución En la resolución del problema distinguiremos los siguientes pasos:

Paso 1. Elección del sistema de ejes globales para nuestra estructura.

Tomamos los ejes X e Y tal como indicamos en la Figura 1.2.

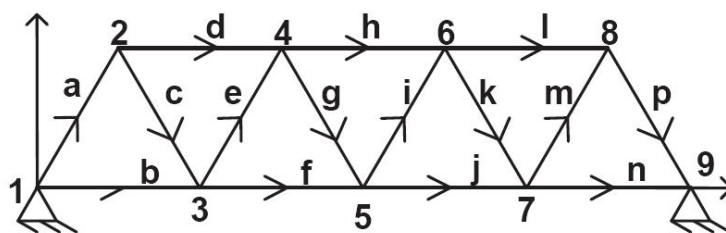
Figura 1.2: Elección de ejes globales.



Paso 2. Numeración de los nudos (números) y barras (letras minúsculas), elección de sentido de avance en estas últimas.

Los representamos en la Figura 1.3.

Figura 1.3: Numeración nudos y barras.



Paso 3. Planteamiento matricial de la estructura.

Vamos a plantear un sistema de ecuaciones en forma matricial cuya matriz de coeficientes será la matriz de rigidez de la estructura K , el vector de las incógnitas será el vector de los desplazamientos de los nudos D y el vector de términos independientes será el vector que represente las cargas a las que se encuentra sometida la estructura F .

$$F = K \cdot D \quad (1.2)$$

Los nudos libres en nuestra estructura son los nudos 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. En la matriz de rigidez distinguiremos 7 x 7 partes, siete filas y siete columnas. Para identificar cada una de las partes utilizaremos la notación K_{ij} para referirnos a la submatriz correspondiente al nudo i y al nudo j . Cada una de estas submatrices son de orden 2 x 2.

$$K = \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{pmatrix}$$

A continuación vamos a determinar la composición de cada una de las submatrices K_{ij} .

En primer lugar conocemos que la matriz de rigidez es una matriz simétrica luego $K_{ij} = K_{ji}$.

Si el nudo i no está unido con el nudo j con una barra la submatriz K_{ij} es la matriz nula de orden 2 x 2.

Consideremos ahora las submatrices que se encuentran en la diagonal K_{ii} . Por ejemplo, para determinar la submatriz K_{22} nos fijamos en las barras que concurren en dicho nudo (a, c y d). Como son tres barras la submatriz K_{22} será la suma de tres submatrices 2 x 2, una por cada barra. Si la barra lleva el sentido de avance cuando llega al nudo el subíndice de la submatriz correspondiente a dicha barra será 22, en caso contrario el subíndice será 11. De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned} K_{22} &= K_{22a} + K_{11c} + K_{11d} \\ K_{33} &= K_{22b} + K_{22c} + K_{11e} + K_{11f} \\ K_{44} &= K_{22d} + K_{22e} + K_{11g} + K_{11h} \\ K_{55} &= K_{22f} + K_{22g} + K_{11i} + K_{11j} \\ K_{66} &= K_{22h} + K_{22i} + K_{11k} + K_{11l} \\ K_{77} &= K_{22j} + K_{22k} + K_{11m} + K_{11n} \\ K_{88} &= K_{22l} + K_{22m} + K_{11p} \end{aligned}$$

Para las restantes submatrices K_{ij} observamos la barra que va del nudo i al nudo j . Si su sentido coincide con el que va del nudo i al nudo j ponemos el subíndice 12, en caso contrario el subíndice 21. Así tenemos que:

$$\begin{aligned}
K_{23} &= K_{12c} & K_{24} &= K_{12d} \\
K_{34} &= K_{12e} & K_{35} &= K_{12f} \\
K_{45} &= K_{12g} & K_{46} &= K_{12h} \\
K_{56} &= K_{12i} & K_{57} &= K_{12j} \\
K_{67} &= K_{12k} & K_{68} &= K_{12l} & K_{78} &= K_{12m}
\end{aligned}$$

Paso 4. *Calculamos las matrices de rigidez de las barras K_{ij} .*

Sabemos que:

$$K_{iia} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha & \operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix}$$

$$K_{ija} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha & -\operatorname{sen}^2\alpha \end{pmatrix}$$

donde α es el ángulo que forma la barra a con el eje X global de la estructura, E es el módulo de elasticidad del material, A es el área de la sección transversal de la barra y L la longitud de la barra. Así por ejemplo tenemos que:

$$\begin{aligned}
K_{23} = K_{12c} &= \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -\cos^2(-60) & -\operatorname{sen}(-60) \cos(-60) \\ -\operatorname{sen}(-60) \cos(-60) & -\operatorname{sen}^2(-60) \end{pmatrix} \\
&= \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -0,250 & 0,433 \\ 0,433 & -0,750 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{23} = K_{34} = K_{45} = K_{56} = K_{67} = K_{78} = \\
K_{32} = K_{43} = K_{54} = K_{65} = K_{76} = K_{87}
\end{aligned}$$

$$K_{24} = K_{12d} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -\cos^2 0 & -\operatorname{sen} 0 \cos 0 \\ -\operatorname{sen} 0 \cos 0 & -\operatorname{sen}^2 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K_{24} = K_{35} = K_{46} = K_{57} = K_{68} = \\
K_{42} = K_{53} = K_{64} = K_{75} = K_{86}
\end{aligned}$$

$$K_{22} = K_{22a} + K_{11c} + K_{11d} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 60 & \text{sen } 60 \cos 60 \\ \text{sen } 60 \cos 60 & \text{sen}^2 60 \end{pmatrix} + \\ & \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2(-60) & \text{sen}(-60) \cos(-60) \\ \text{sen}(-60) \cos(-60) & \text{sen}^2(-60) \end{pmatrix} + \\ & \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 0 & \text{sen } 0 \cos 0 \\ \text{sen } 0 \cos 0 & \text{sen}^2 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$K_{22} = K_{88}$$

$$K_{33} = K_{22b} + K_{22c} + K_{11e} + K_{11f} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 0 & \text{sen } 0 \cos 0 \\ \text{sen } 0 \cos 0 & \text{sen}^2 0 \end{pmatrix} + \\ & \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2(-60) & \text{sen}(-60) \cos(-60) \\ \text{sen}(-60) \cos(-60) & \text{sen}^2(-60) \end{pmatrix} + \\ & \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 60 & \text{sen } 60 \cos 60 \\ \text{sen } 60 \cos 60 & \text{sen}^2 60 \end{pmatrix} + \\ & \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 0 & \text{sen } 0 \cos 0 \\ \text{sen } 0 \cos 0 & \text{sen}^2 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 2,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$K_{33} = K_{44} = K_{55} = K_{66} = K_{77} =$$

como $\frac{EA}{L} = \frac{1600}{400} = 40$ t/cm, la matriz K de rigidez sería

$$\begin{pmatrix} 60 & 0 & -10 & 17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 17,32 & 100 & 0 & -10 & -17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17,32 & -30 & 0 & 60 & -17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & -10 & -17,32 & 100 & 0 & -10 & 17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17,32 & -30 & 0 & 60 & 17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 & -10 & 17,32 & 100 & 0 & -10 & -17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17,32 & -30 & 0 & 60 & -17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & 0 & -10 & -17,32 & 100 & 0 & -10 & 17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17,32 & -30 & 0 & 60 & 17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & 0 & -10 & 17,32 & 100 & 0 & -10 & -17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17,32 & -30 & 0 & 60 & -17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & 0 & -10 & -17,32 & 100 & 0 & -10 & 17,32 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17,32 & -30 & 0 & 60 & -17,32 & -30 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

y el sistema de ecuaciones quedaría:

$$\begin{aligned} & (0, 2 \mid 0, 0 \mid 0, -6 \mid 0, 0 \mid 0, 0 \mid 0, 0 \mid 8, -2)^T \\ & = K (\delta x^2, \delta y^2 \mid \delta x^3, \delta y^3 \mid \delta x^4, \delta y^4 \mid \delta x^5, \delta y^5 \mid \delta x^6, \delta y^6 \mid \delta x^7, \delta y^7 \mid \delta x^8, \delta y^8)^T \end{aligned}$$

donde δx^i representa el desplazamiento del nudo i en la dirección del eje global X de la estructura y δy^i representa el desplazamiento de dicho nudo en la dirección Y . En el vector de términos independientes hemos situado las cargas que existen sobre cada nudo según las direcciones X e Y .

Para la resolución de este sistema de ecuaciones podemos aplicar diferentes estrategias dentro de los métodos directos o iterados. En el problema 1.1.2 mostramos su resolución utilizando en esta ocasión el método de Cholesky. Adelantamos que la solución obtenida para nuestro problema es el vector desplazamiento D cuyas coordenadas son:

$$(0, 19, -0, 127, 0, 0208, -0, 3095, 0, 147, -0, 466, 0, 114, -0, 369, 0, 117, -0, 254, 0, 107, -0, 144, 0, 187, -0, 074)^T$$

Problema 1.1.2 Resolución del sistema de ecuaciones que se obtiene en el problema 1.1.1.

Solución En el problema 1.1.1 se plantea una estructura plana biarticulada sometida a ciertas cargas y se quieren calcular los desplazamientos de sus nudos. Para la resolución del problema se llega a un sistema de ecuaciones lineales donde la matriz de coeficientes es la llamada matriz de rigidez de la estructura K , el vector de las incógnitas es el vector de los desplazamientos de los nudos D y el vector de términos independientes es el vector que representa las cargas a las que se encuentra sometida la estructura F . En nuestro caso concreto la matriz de rigidez era:

$$\begin{pmatrix} 60 & 0 & -10 & 17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 17,32 & 100 & 0 & -10 & -17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17,32 & -30 & 0 & 60 & -17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & -10 & -17,32 & 100 & 0 & -10 & 17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -17,32 & -30 & 0 & 60 & 17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 & -10 & 17,32 & 100 & 0 & -10 & -17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17,32 & -30 & 0 & 60 & -17,32 & -30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & 0 & -10 & -17,32 & 100 & 0 & -10 & 17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17,32 & -30 & 0 & 60 & 17,32 & -30 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & 0 & -10 & 17,32 & 100 & 0 & -10 & -17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17,32 & -30 & 0 & 60 & -17,32 & -30 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -40 & 0 & -10 & -17,32 & 100 & 0 & -10 & -17,32 & -40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -17,32 & -30 & 0 & 60 & -17,32 & -30 & -40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema de ecuaciones quedaba:

$$\begin{aligned} & (0, 2 \mid 0, 0 \mid 0, -6 \mid 0, 0 \mid 0, 0 \mid 0, 0 \mid 8, -2)^T \\ & = K (\delta x^2, \delta y^2 \mid \delta x^3, \delta y^3 \mid \delta x^4, \delta y^4 \mid \delta x^5, \delta y^5 \mid \delta x^6, \delta y^6 \mid \delta x^7, \delta y^7 \mid \delta x^8, \delta y^8)^T \end{aligned}$$

donde δx^i representa el desplazamiento del nudo i en la dirección del eje global X de la estructura y δy^i representa el desplazamiento de dicho nudo en la dirección Y .

En esta ocasión vamos a utilizar un método directo para resolver el sistema de ecuaciones, concretamente el método de Cholesky. Como sabemos este método es una modificación del método de descomposición LU , que se usa cuando la matriz de coeficientes es simétrica definida positiva. André-Louis Cholesky demostró que toda matriz simétrica definida positiva puede factorizarse como producto de una matriz triangular inferior por la matriz traspuesta de esta última.

Las matrices de rigidez obtenidas por el método de rigidez o de los desplazamientos, que hemos aplicado en el problema 1.1.1, son simétricas y los elementos de las diagonales son distintos de cero. Podemos comprobar que nuestra matriz de rigidez K es definida positiva y por lo tanto podemos resolver el sistema de ecuaciones usando el método de Cholesky. Como hemos dicho, este método descompone la matriz de coeficientes, la matriz de rigidez, en el producto de dos matrices triangulares, una inferior y otra superior, con la particularidad de que una de ellas es la traspuesta de la otra, es decir,

$$K = L \cdot L^T$$

Tenemos que resolver el sistema,

$$L \cdot L^T \cdot D = F$$

para lo cual primero resolvemos el sistema escalonado,

$$L \cdot B = F$$

y luego otro sistema escalonado.

$$L^T \cdot D = B$$

En nuestro caso la matriz L es:

$$\begin{pmatrix} 7,745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7,745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,290 & 2,236 & 9,660 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,236 & -3,872 & 1,195 & 6,210 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5,163 & 0 & -1,725 & -0,597 & 8,366 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,792 & -4,485 & -0,690 & 6,015 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,140 & 0,796 & -1,992 & 2,010 & 8,614 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,070 & -4,749 & 1,587 & 5,535 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4,780 & -0,548 & -2,138 & -1,198 & 8,416 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,010 & -4,843 & -1,200 & 5,573 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,643 & 1,331 & -2,178 & 2,120 & 8,211 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,057 & -4,939 & 1,821 & 5,295 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4,752 & -1,023 & -2,214 & -1,616 & 5,370 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,109 & -4,939 & -2,356 & 5,059 \end{pmatrix}$$

el vector B es:

$$\left(0, 0, 2581, -0, 0597, 0, 1725, 0, -0, 8865, 0, 1622, -0, 8072, -0, 1314, -0, 6712, 0, 3611, -0, 6992, 1, 1835, -0, 3761 \right)^T$$

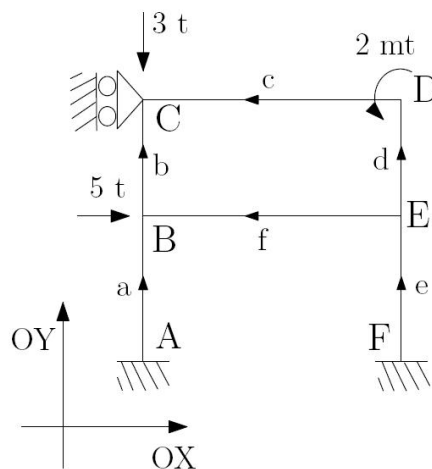
y la solución de nuestro problema es el vector desplazamiento D cuyas coordenadas son:

$$\left(0, 19, -0, 12, 0, 02, -0, 309, 0, 147, -0, 466, 0, 114, -0, 369, 0, 117, -0, 254, 0, 107, -0, 144, 0, 187, -0, 074 \right)^T$$

Problema 1.1.3 El pórtico doble que se muestra en la Figura 1.6 está formado por barras de acero cuyo módulo de elasticidad longitudinal viene dado por $E = 2 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$ y cuya sección transversal presenta un área $A = 0,01 \text{ m}^2$ y momento de inercia respecto de un eje paralelo al lado que da la anchura y que pasa por su centro de gravedad $I = 25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$. Dicha estructura está sometida a un momento flector de valor 2 metros por tonelada, a una carga horizontal de 5 toneladas y a una carga vertical de 3 toneladas, según se indica.

Plantear el sistema de ecuaciones lineales cuya solución determina los desplazamientos que se producirán en los nudos como efecto de dichas cargas.

Figura 1.4: Pórtico doble.



Solución El método de la rigidez o método de los desplazamientos, es el método más utilizado para el análisis de estructuras (para más información ver [1, 2]). Enmarcado en el cálculo matricial de estructuras, consiste en asignar a la estructura un objeto matemático, llamado matriz de rigidez, que relaciona los desplazamientos de los nodos de la estructura con las fuerzas exteriores que es necesario aplicar para lograr esos desplazamientos. Esta relación viene dada por el sistema lineal.

$$F = K \cdot D$$

donde F recoge las cargas en los nudos de la estructura (vector de términos independientes), K es la matriz de rigidez de la estructura (matriz de coeficientes) y D representa los desplazamientos en los nudos (vector de las incógnitas).

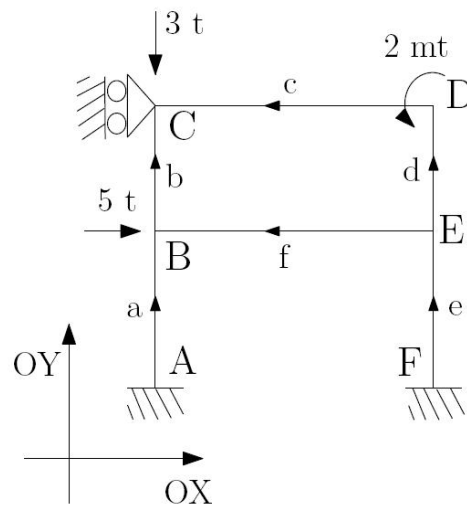
Así, la resolución de este ejercicio consiste en obtener la matriz de rigidez del pórtico dado, como matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones correspondiente.

En aras de la claridad, distinguimos varios pasos en la resolución del ejercicio.

Paso 1. *Ejes globales y numeración de los elementos de la estructura.*

Es necesario establecer un sistema de referencia global que permita la obtención de los desplazamientos nodales referenciados a dichos ejes. Por ser lo más práctico se considera un sistema ortogonal de manera que la estructura quede contenida en el primer cuadrante. En el etiquetado de los elementos de la estructura, utilizaremos letras mayúsculas para los nudos y letras minúsculas para las barras, asignándoles además a éstas un sentido de avance (el criterio de asignación determina la matriz de rigidez obtenida, pero es independiente de los desplazamientos nodales que se obtendrán). Este proceso se recoge en la Figura 1.5.

Figura 1.5: Ejes globales y numeración de los elementos del pórtico doble.



Paso 2. *Vector de cargas y vector de desplazamientos en los nudos.*

Puesto que un pórtico plano es una estructura reticulada plana, es decir, las directrices de las barras son coplanarias y las uniones en los nudos son rígidas, se tienen tres grados de libertad por nudo. Así, cada nudo aporta tres elementos al vector de desplazamientos: desplazamiento horizontal, vertical y giro. De la misma forma, el vector de cargas presenta tres elementos por nudo: carga horizontal, carga vertical y momento.

Puesto que 6 son los nudos que componen nuestra estructura, los vectores de cargas y desplazamientos contienen 18 elementos. Teniendo en cuenta que los nudos A y F son empotramientos del pórtico (desplazamiento horizontal, vertical y giro nulos), y que en el nudo C hay un apoyo simple (desplazamiento horizontal nulo), el vector de desplazamientos D del pórtico plano dado es el que se muestra a continuación. Por otro lado, según las cargas dadas en los nudos y fijando como positivo el sentido antihorario para el momento en el nudo D (este mismo criterio coincidirá con los giros obtenidos en cada nudo), el vector de cargas F es el siguiente.

$$D^T = [0 \ 0 \ 0 \mid Dx^B \ Dy^B \ \theta z^B \mid 0 \ Dy^C \ \theta z^C \mid Dx^D \ Dy^D \ \theta z^D \mid Dx^E \ Dy^E \ \theta z^E \mid 0 \ 0 \ 0]$$

$$F^T = [0 \ 0 \ 0 \mid 5 \ 0 \ 0 \mid 0 \ -3 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 2 \mid 0 \ 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 0]$$

Paso 3. *Planteamiento por bloques de la matriz de rigidez de la estructura.*

La matriz de rigidez relaciona matemáticamente las cargas (causa) y los desplazamientos (efecto) y su dimensión depende del tipo de estructura tratada.

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene a partir de las matrices de rigidez de las barras que la componen, procedimiento que se conoce como ensamblaje. Puesto que nuestra estructura contiene 6 nudos, cada uno de ellos con tres grados de libertad, la matriz de rigidez global K será cuadrada de dimensión 6, entendiendo sus elementos como bloques cuadrados de dimensión 3:

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Dichos bloques cuadrados de dimensión 3 están compuestos por submatrices o suma de submatrices correspondientes a las matrices de rigidez de las barras de la estructura. Esto es, teniendo en cuenta todas las barras de la estructura, ensamblamos sus matrices de rigidez para obtener la matriz de rigidez de la estructura completa.

Antes de proceder a exponer la construcción de K , y teniendo en cuenta que trabajamos con una estructura de nudos rígidos, indicar que la matriz de rigidez de la barra t dirigida de su extremo 1 al 2, es cuadrada de orden 6, distribuida en 4 submatrices cuadradas de orden 3, con la notación que fijamos a continuación (explicaremos este punto con más detalle en el próximo paso):

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{11t} & K_{12t} \\ \hline K_{21t} & K_{22t} \end{array} \right]$$

A modo de ejemplo, exponemos la aportación de las barras a y f a la matriz de rigidez global, razonando de manera análoga para las demás. Puesto que la barra a va dirigida del nudo A al B , la submatriz K_{11a} se sitúa en el bloque de K correspondiente a la fila y columna de A , mientras que K_{22a} se sitúa en el bloque de K correspondiente a la fila y columna de B . Las submatrices K_{12a} y K_{21a} constituirán los bloques de K situados en la fila A -columna B y fila B -columna A , respectivamente. Para la barra f , dirigida del nudo E al B , la submatriz K_{11f} se sitúa en el bloque de K correspondiente a la fila y columna de E , mientras que K_{22f} se sitúa en el bloque de K correspondiente a la fila y columna de B (que será el sumatorio de tantas submatrices K_{ii} como barras incidan en el nudo). Las submatrices K_{12f} y K_{21f} constituirán los bloques de K situados en la fila E -columna B y fila B -columna E , respectivamente (para más detalle ver [1, 2]). Así la matriz K del pórtico dado es la siguiente:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A & B & C & D & E & F \\ \hline K_{11a} & K_{12a} & \Theta & \Theta & \Theta & \Theta \\ \hline K_{21a} & K_{22a} + K_{11b} + K_{22f} & K_{12b} & \Theta & K_{21f} & \Theta \\ \hline \Theta & K_{21b} & K_{22b} + K_{22c} & K_{21c} & \Theta & \Theta \\ \hline \Theta & \Theta & K_{12c} & K_{11c} + K_{22d} & K_{21d} & \Theta \\ \hline \Theta & K_{12f} & \Theta & K_{12d} & K_{11d} + K_{22e} + K_{11f} & K_{21e} \\ \hline \Theta & \Theta & \Theta & \Theta & K_{12e} & K_{11e} \end{array} \right]$$

Paso 4. Cálculo de las matrices de rigidez de las barras.

Dada una barra dirigida de su extremo 1 al 2, sus ecuaciones de estado, referidas a ejes locales¹, son:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

donde d_i representa el desplazamiento del extremo i (vector de tres elementos por tratarse de una estructura de nudos rígidos, los cuales poseen tres grados de libertad) y p_i indica el vector de esfuerzos en el extremo i de la barra (también de orden tres), referidos a los ejes locales de la barra. Así, los elementos de la matriz de rigidez de una barra k_{ij} representan el esfuerzo que aparece en el extremo i originado por el desplazamiento unitario en el extremo j .

La matriz de rigidez de una barra será cuadrada y simétrica, lo que implica que las submatrices k_{11} y k_{22} sean cuadradas y simétricas y las submatrices k_{12} y k_{21} sean cuadradas, siendo una la traspuesta de la otra.

¹En los ejes locales de una barra, el eje OX coincide con la directriz de la barra y según el sentido de avance que tenga asignado. Los ejes OY y OZ estarán contenidos en la sección transversal de la barra.

Planteando el equilibrio estático de la barra en casos correspondientes a desplazamientos unitarios [1, 2], se obtiene:

$$\left[\begin{array}{c|c} k_{11} & k_{12} \\ \hline k_{21} & k_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array} \right]$$

donde EA , EI y L son la rigidez axil, la rigidez a flexión y la longitud de la barra, respectivamente.

Hacer hincapié en que lo expuesto hasta ahora sobre las matrices de rigidez de las barras, está expresado en coordenadas locales (notación k_{ij}), mientras que son coordenadas globales las que se utilizan en la matriz de rigidez global de la estructura (notación K_{ij}), por lo que hay que transformar unas en otras. Dicha transformación [1, 2] viene dada por $K_{ij} = T \cdot k_{ij} \cdot T^T$ donde:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo α el ángulo que forma el eje global de abscisas con el local de abscisas en sentido positivo o antihorario.

Según las características de la estructura, la rigidez axil de las barras viene dada por $EA = 2 \cdot 10^7 \cdot 0,01 = 200000 \text{ t}$ y su rigidez a flexión $EI = 2 \cdot 10^7 \cdot 25 \cdot 10^{-5} = 5000 \text{ t} \cdot \text{m}^2$. Recogemos en la siguiente tabla toda la información necesaria para obtener las matrices de rigidez de las barras:

	a	b	c	d	e	f
EA	200000	200000	200000	200000	200000	200000
EI	5000	5000	5000	5000	5000	5000
L	5	4	10	4	5	10
α	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Barra a

$$K_{11a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40000 & 0 & 0 \\ 0 & 480 & 1200 \\ 0 & 1200 & 4000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 & 0 & -1200 \\ 0 & 40000 & 0 \\ -1200 & 0 & 4000 \end{bmatrix}$$

$$K_{22a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40000 & 0 & 0 \\ 0 & 480 & -1200 \\ 0 & -1200 & 4000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 & 0 & 1200 \\ 0 & 40000 & 0 \\ 1200 & 0 & 4000 \end{bmatrix}$$

$$K_{22a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -40000 & 0 & 0 \\ 0 & -480 & 1200 \\ 0 & -1200 & 2000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -480 & 0 & -1200 \\ 0 & -40000 & 0 \\ 1200 & 0 & 4000 \end{bmatrix}$$

Barra b

$$K_{11b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1875}{2} & 1875 \\ 0 & 1875 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1875}{2} & 0 & -1875 \\ 0 & 50000 & 0 \\ -1875 & 0 & 5000 \end{bmatrix}$$

$$K_{22b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50000 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1875}{2} & -1875 \\ 0 & -1875 & 5000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1875}{2} & 0 & 1875 \\ 0 & 50000 & 0 \\ 1875 & 0 & 5000 \end{bmatrix}$$

$$K_{12b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -50000 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1875}{2} & 1875 \\ 0 & -1875 & 2500 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1875}{2} & 0 & -1875 \\ 0 & -50000 & 0 \\ 1875 & 0 & 2500 \end{bmatrix}$$

Barra c

$$K_{11c} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 300 \\ 0 & 300 & 2000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & -300 \\ 0 & -300 & 2000 \end{bmatrix}$$

$$K_{22c} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & -300 \\ 0 & -300 & 2000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20000 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 300 \\ 0 & 300 & 2000 \end{bmatrix}$$

$$K_{12c} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -20000 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 300 \\ 0 & -300 & 1000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20000 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & -300 \\ 0 & 300 & 1000 \end{bmatrix}$$

Puesto que los parámetros de las barras e , d y f son los mismos que los de a , b y c , respectivamente, las matrices de rigidez coinciden.

Paso 5. *Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.*

Pues ya conocemos la estructura de la matriz de rigidez global en función de las de las barras (Paso 3), así como las matrices de éstas (Paso 4); solamente nos queda realizar las correspondientes sumas de matrices y construir por bloques la matriz K , la cual será cuadrada de orden 18. Por cuestiones de presentación, expresamos la matriz la matriz de rigidez del pórtico en dos bloques $K = [K^1 \mid K^2]$ donde:

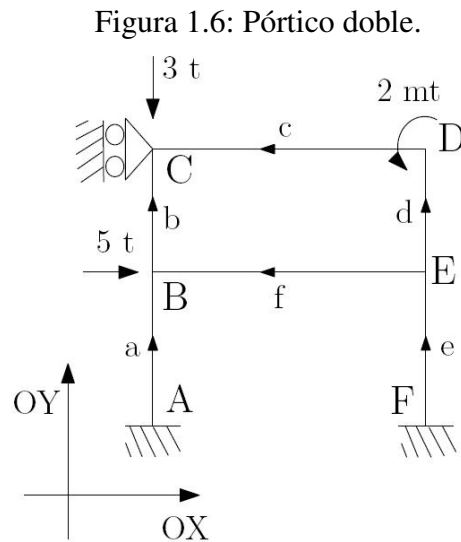
$$K^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 480 & 0 & -1200 & -480 & 0 & -1200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40000 & 0 & 0 & -40000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1200 & 0 & 4000 & 1200 & 0 & 2000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -480 & 0 & 1200 & \frac{42835}{2} & 0 & -675 & -\frac{1875}{2} & 0 & -1875 \\ 0 & -40000 & 0 & 0 & 90060 & 300 & 0 & -50000 & 0 \\ -1200 & 0 & 2000 & -675 & 300 & 11000 & 1875 & 0 & 2500 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{1875}{2} & 0 & 1875 & \frac{41875}{2} & 0 & 1875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -50000 & 0 & 0 & 50060 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & -1875 & 0 & 2500 & 1875 & 300 & 7000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 1000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & -300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$K^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -300 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -300 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{41875}{2} & 0 & 1875 & -\frac{1875}{2} & 0 & 1875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50060 & -300 & 0 & -50000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1875 & -300 & 7000 & -1875 & 0 & 2500 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1875}{2} & 0 & -1875 & \frac{42835}{2} & 0 & -675 & -480 & 0 & 1200 \\ 0 & 50000 & 0 & 0 & 90060 & -300 & 0 & -40000 & 0 \\ 1875 & 0 & 2500 & -675 & -300 & 11000 & -1200 & 0 & 2000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -480 & 0 & -1200 & 480 & 0 & -1200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40000 & 0 & 0 & 40000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1200 & 0 & 2000 & -1200 & 0 & 4000 \end{array} \right]$$

Haciendo balance de la aportación del Álgebra Lineal a la resolución del ejercicio, es evidente que el Álgebra Matricial es la base matemática del Cálculo Matricial de Estructuras (como su nombre nos indica), utilizando las matrices como elementos necesarios para organizar datos, y necesitando del álgebra de matrices para llegar a la matriz de rigidez global.

Así hemos obtenido el sistema de ecuaciones lineales $F = K \cdot D$ cuya solución determina los desplazamientos que se producirán en los nudos como efecto de las cargas aplicadas.

Problema 1.1.4 Dado el pórtico doble que se muestra en la Figura 1.6 (ver Problema 1.1.3, calcular los desplazamientos que se producirán en los nudos de la estructura como efecto de la aplicación de un momento flector de valor 2 metros por tonelada, una carga horizontal de 5 toneladas y una carga vertical de 3 toneladas, según se indica.



Solución En el análisis matricial de estructuras según el método de la rigidez, podemos diferenciar dos fases: obtención de la matriz de rigidez como matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones lineales a plantear y resolución de dicho sistema. Para el pórtico doble dado, la primera fase se ha desarrollado en el Problema 1.1.3; nos planteamos en este ejercicio resolver el sistema obtenido. Siendo F las cargas en los nudos de la estructura (vector de términos independientes), K la matriz de rigidez de la estructura (matriz de coeficientes) y D los desplazamientos en los nudos (vector de las incógnitas), dicho sistema viene dado por $F = K \cdot D$, donde:

$$D^T = [0 \ 0 \ 0 \mid Dx^B \quad Dy^B \quad \theta z^B \mid 0 \quad Dy^C \quad \theta z^C \mid Dx^D \quad Dy^D \quad \theta z^D \mid Dx^E \quad Dy^E \quad \theta z^E \mid 0 \ 0 \ 0]$$

$$F^T = [0 \ 0 \ 0 \mid 5 \ 0 \ 0 \mid 0 \ -3 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 2 \mid 0 \ 0 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 0]$$

$K = [K^1 \mid K^2]$ con

$$K^1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 480 & 0 & -1200 & -480 & 0 & -1200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40000 & 0 & 0 & -40000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1200 & 0 & 4000 & 1200 & 0 & 2000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -480 & 0 & 1200 & \frac{42835}{2} & 0 & -675 & -\frac{1875}{2} & 0 & -1875 \\ 0 & -40000 & 0 & 0 & 90060 & 300 & 0 & -50000 & 0 \\ -1200 & 0 & 2000 & -675 & 300 & 11000 & 1875 & 0 & 2500 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\frac{1875}{2} & 0 & 1875 & \frac{41875}{2} & 0 & 1875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -50000 & 0 & 0 & 50060 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & -1875 & 0 & 2500 & 1875 & 300 & 7000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 1000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & -300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$K^2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -300 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -300 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{41875}{2} & 0 & 1875 & -\frac{1875}{2} & 0 & 1875 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50060 & -300 & 0 & -50000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1875 & -300 & 7000 & -1875 & 0 & 2500 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1875}{2} & 0 & -1875 & \frac{42835}{2} & 0 & -675 & -480 & 0 & 1200 \\ 0 & 50000 & 0 & 0 & 90060 & -300 & 0 & -40000 & 0 \\ 1875 & 0 & 2500 & -675 & -300 & 11000 & -1200 & 0 & 2000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -480 & 0 & -1200 & 480 & 0 & -1200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -40000 & 0 & 0 & 40000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1200 & 0 & 2000 & -1200 & 0 & 4000 \end{array} \right]$$

Comprobamos que la matriz de coeficientes K es singular, lo que significa que la pieza puede sufrir un movimiento arbitrario de conjunto, sin afectar las fuerzas que actúan en sus nudos. Y es que, en la matriz de rigidez no queda reflejado que los nudos A y F son empotramientos de la estructura y que el nudo C es apoyo simple. Para ello, debemos eliminar las filas y columnas de K correspondientes a desplazamientos nulos, así como los correspondientes elementos en F y D , obteniendo un nuevo sistema de ecuaciones lineales a resolver, que denotamos $F' = K' \cdot D'$:

$$\bar{E} = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -675 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -50000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1875 & 0 & 2500 & 300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & -300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300 & 1000 & 1875 & -300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -20000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1875}{2} & 0 & -1875 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & -300 & 0 & 0 & 0 & -50000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 1000 & 0 & 0 & 1875 & 0 & 2500 & -675 & -300 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\bar{F} = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc|ccc} 0 & 0 & -675 & 0 & -1875 & 0 & 0 & 0 & -20000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 300 & -50000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2500 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300 & 1000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 0 & -60 & 300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1875 & -\frac{1875}{2} & 0 & 1875 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300 & 0 & -50000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1875 & 0 & 2500 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -675 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Así, la iteración $(k + 1)$ -ésima del método de Gauss-Seidel, expresada en forma matricial, viene dada por:

$$x^{k+1} = (\bar{D} - \bar{E})^{-1} \cdot \bar{F} \cdot x^k + (\bar{D} - \bar{E})^{-1} \cdot F'$$

Si denotamos por x_i^j a la coordenada i -ésima del vector obtenido en la iteración j -ésima del método, se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k)} &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_{n-1}^{(k)} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1,1}x_1^{(k)} - a_{n-1,2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n-1,n}x_n^{(k-1)}}{a_{n-1,n-1}} \\ x_n^{(k)} &= \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n,2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Particularizando para nuestro sistema de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{5+675x_3^{(k-1)}+1875x_5^{(k-1)}+20000x_9^{(k-1)}}{42835/2} \\
x_2^{(k)} &= \frac{-300x_3^{(k-1)}+50000x_4^{(k-1)}+60x_{10}^{(k-1)}-300x_{11}^{(k-1)}}{90060} \\
x_3^{(k)} &= \frac{675x_1^{(k)}-300x_2^{(k)}-2500x_5^{(k-1)}+300x_{10}^{(k-1)}-1000x_{11}^{(k-1)}}{11000} \\
x_4^{(k)} &= \frac{-3+50000x_2^{(k)}-300x_5^{(k-1)}+60x_7^{(k-1)}-300x_8^{(k-1)}}{50060} \\
x_5^{(k)} &= \frac{1875x_1^{(k)}-2500x_3^{(k)}-300x_4^{(k)}+300x_7^{(k-1)}-1000x_8^{(k-1)}}{7000} \\
x_6^{(k)} &= \frac{-1875x_8^{(k-1)}+\frac{1875}{2}x_9^{(k-1)}-1875x_{11}^{(k-1)}}{41875/2} \\
x_7^{(k)} &= \frac{60x_4^{(k)}+300x_5^{(k)}+300x_8^{(k-1)}+50000x_{10}^{(k-1)}}{50060} \\
x_8^{(k)} &= \frac{2-300x_4^{(k)}-1000x_5^{(k)}-1875x_6^{(k)}+300x_7^{(k)}+1875x_9^{(k-1)}-2500x_{11}^{(k-1)}}{7000} \\
x_9^{(k)} &= \frac{20000\{x_1^{(k)}+\frac{1875}{2}x_6^{(k)}+1875x_8^{(k)}+675x_{11}^{(k-1)}\}}{42835/2} \\
x_{10}^{(k)} &= \frac{60x_2^{(k)}+300x_3^{(k)}+50000x_7^{(k)}+300x_{11}^{(k-1)}}{90060} \\
x_{11}^{(k)} &= \frac{-300x_2^{(k)}-1000x_3^{(k)}-1875x_6^{(k)}-2500x_8^{(k)}+675x_9^{(k)}+300x_{10}^{(k-1)}}{11000}
\end{aligned}$$

Comenzando con el vector nulo como vector inicial, el número mínimo de iteraciones necesarias para alcanzar la cota de parada establecida es 12, de las cuales, expresadas con 10 cifras decimales exactas, mostramos las tres últimas, así como la norma de la diferencia de iteraciones consecutivas:

$x^{(0)}$	$x^{(10)}$	$x^{(11)}$	$x^{(12)}$	$\ x^{(11)} - x^{(10)}\ $	$\ x^{(12)} - x^{(11)}\ $
0	$0,17105774 \cdot 10^{-2}$	$0,18116845 \cdot 10^{-2}$	$0,19039915 \cdot 10^{-2}$	$0,1011071 \cdot 10^{-3}$	$0,923070 \cdot 10^{-4}$
0	$-0,803677 \cdot 10^{-4}$	$-0,810202 \cdot 10^{-4}$	$-0,815564 \cdot 10^{-4}$		
0	$0,362518 \cdot 10^{-4}$	$0,367273 \cdot 10^{-4}$	$0,371608 \cdot 10^{-4}$		
0	$-0,1460522 \cdot 10^{-3}$	$-0,1470160 \cdot 10^{-3}$	$-0,1478363 \cdot 10^{-3}$		
0	$0,3599362 \cdot 10^{-3}$	$0,3830886 \cdot 10^{-3}$	$0,4042239 \cdot 10^{-3}$		
0	$0,165690 \cdot 10^{-4}$	$0,189095 \cdot 10^{-4}$	$0,210467 \cdot 10^{-4}$		
0	$0,118164 \cdot 10^{-4}$	$0,125792 \cdot 10^{-4}$	$0,132757 \cdot 10^{-4}$		
0	$0,6711191 \cdot 10^{-3}$	$0,6956389 \cdot 10^{-3}$	$0,7180232 \cdot 10^{-3}$		
0	$0,16551201 \cdot 10^{-2}$	$0,17517828 \cdot 10^{-2}$	$0,18400320 \cdot 10^{-2}$		
0	$0,64454 \cdot 10^{-5}$	$0,68698 \cdot 10^{-5}$	$0,72575 \cdot 10^{-5}$		
0	$-0,547151 \cdot 10^{-4}$	$-0,547690 \cdot 10^{-4}$	$-0,548196 \cdot 10^{-4}$		

calcular los desplazamientos que se producirán en los nudos de la estructura como efecto de la aplicación de un momento flector de valor 2 metros por tonelada, una carga horizontal de 5 toneladas y una carga vertical de 3 toneladas, según se indica.

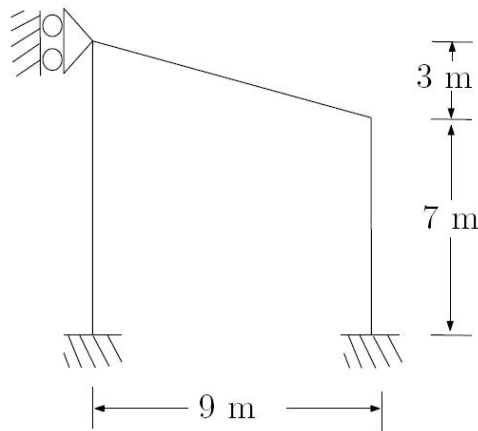
Por tanto, los desplazamientos que se producirán en los nudos de la estructura como efecto de las fuerzas indicadas, expresando en metros los desplazamientos lineales, en radianes los

giros, y con 10 cifras decimales exactas, son:

$$\begin{bmatrix} Dx^B \\ Dy^B \\ \theta z^B \\ \hline Dy^C \\ \theta z^C \\ \hline Dx^D \\ Dy^D \\ \theta z^D \\ \hline Dx^E \\ Dy^E \\ \theta z^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1903991510^{-2} \\ -0,81556410^{-4} \\ 0,37160810^{-4} \\ \hline -0,147836310^{-3} \\ 0,404223910^{-3} \\ \hline 0,21046710^{-4} \\ 0,13275710^{-4} \\ 0,718023210^{-3} \\ \hline 0,1840032010^{-2} \\ 0,7257510^{-5} \\ -0,54819610^{-4} \end{bmatrix}$$

Problema 1.1.5 Calcular la matriz de rigidez de la estructura mostrada en la Figura 1.9, sabiendo que la rigidez axial del material que forman sus barras es ea y la rigidez a flexión es ei .

Figura 1.7: Estructura plana de nudos rígidos.



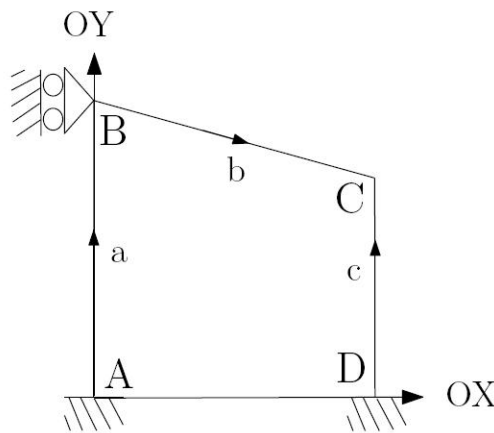
Solución La matriz de rigidez de una estructura relaciona matemáticamente las cargas (causa) y los desplazamientos (efecto), siendo cuadrada de dimensión dependiente de la estructura tratada. En el método de la rigidez para el análisis estructural será la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales en el que el vector de términos independientes recoge las cargas en los nudos de la estructura y las incógnitas son los desplazamientos en los nudos (para más información ver [1, 2]).

Calculamos la matriz de rigidez pedida, distinguiendo varios pasos en su construcción:

Paso 1. *Ejes globales y numeración de los elementos de la estructura.*

Es necesario establecer un sistema de referencia global que permita la definición geométrica de la estructura. Por ser lo más práctico se considera un sistema ortogonal de manera que la estructura quede contenida en el primer cuadrante. En el etiquetado de los elementos de la estructura, utilizaremos letras mayúsculas para los nudos y letras minúsculas para las barras, asignándoles además a éstas un sentido de avance (el criterio de asignación conduce a diferentes matrices, pero todas ellas determinan la misma resolución final de la estructura). Este proceso se recoge en la Figura 1.8.

Figura 1.8: Ejes globales y numeración de los elementos del pórtico inclinado.



Paso 2. *Planteamiento por bloques de la matriz de rigidez de la estructura:*

La matriz de rigidez global de la estructura, que denotaremos en lo que sigue K , se obtiene a partir de las matrices de rigidez de las barras que la componen, procedimiento que se conoce como ensamblaje. El cálculo de éstas se realizará en el siguiente paso del ejercicio, procediendo ahora a exponer la formación por bloques de K .

Por un lado hay que tener en cuenta que la estructura dada es reticulada plana, esto es, las directrices de las barras son coplanarias y las uniones en los nudos, al ser rígidas, dan lugar a 3 grados de libertad, los cuales corresponden al desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical y giro en cada nudo; por otro lado notar que son 4 los nudos que componen el pórtico. Así, K es una matriz cuadrada de dimensión 4 (número de nudos), entendiendo cada uno de sus elementos como bloques de dimensión 3 (grados de libertad en los nudos), de manera que cada una de sus filas y columnas está asociada a un nudo, como se muestra a continuación:

En cada uno de estos bloques existe una correspondencia entre su primera, segunda y tercera fila (análogamente columna) con los desplazamientos horizontales, verticales y giros, respectivamente.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>				
<i>B</i>				
<i>C</i>				
<i>D</i>				

Además, dichos bloques cuadrados de dimensión 3 están compuestos por submatrices o suma de submatrices correspondientes a las matrices de rigidez de las barras de la estructura. Esto es, teniendo en cuenta todas las barras de la estructura, ensamblamos sus matrices de rigidez para obtener la matriz de rigidez de la estructura completa.

Si consideramos la barra t dirigida de su extremo inicial (que denotaremos por 1) al final (que denotaremos por 2), la matriz de rigidez de t será cuadrada de orden 6 (2 nudos en la barra por 3 grados de libertad en cada uno de ellos) distribuida en 4 submatrices cuadradas de orden 3, con la siguiente notación (explicaremos este punto con más detalle en el próximo paso):

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{11t} & K_{12t} \\ \hline K_{21t} & K_{22t} \end{array} \right]$$

En este paso, nos resta conocer el criterio de localización de las submatrices K_{ijt} en los bloques de K , proceso que exponemos para las barras a y c , ya que la aportación de la barra b es similar al caso de la a . Puesto que la barra a va dirigida del nudo A (extremo inicial) al B (extremo final), la submatriz K_{11a} se sitúa en el bloque de K correspondiente a la fila y columna de A , mientras que K_{22a} se sitúa en el bloque de K correspondiente a la fila y columna de B . Las submatrices K_{12a} y K_{21a} constituirán los bloques de K situados en la fila A -columna B y fila B -columna A , respectivamente. Para la barra c , dirigida del nudo D al C , la submatriz K_{11c} se sitúa en el bloque de K correspondiente a la fila y columna de D , mientras que K_{22c} se sitúa en el bloque de K correspondiente a la fila y columna de C (que será el sumatorio de tantas submatrices K_{ii} como barras incidan en el nudo). Las submatrices K_{12c} y K_{21c} constituirán los bloques de K situados en la fila D -columna C y fila C -columna D , respectivamente (para más detalle ver [1, 2]). Así la matriz K del pórtico inclinado dado es la siguiente:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	K_{11a}	K_{12a}	Θ	Θ
<i>B</i>	K_{21a}	$K_{22a} + K_{11b}$	K_{12b}	Θ
<i>C</i>	Θ	K_{21b}	$K_{22b} + K_{22c}$	K_{21c}
<i>D</i>	Θ	Θ	K_{12c}	K_{11c}

Paso 3. Cálculo de las matrices de rigidez de las barras:

Como hemos comentado en el paso anterior, la matriz de rigidez de una barra dirigida de su extremo inicial ó 1 al final ó 2, en una estructura reticulada plana, es cuadrada de dimensión 6 y viene dada por la expresión:

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right]$$

Tales submatrices k_{ij} , referidas a ejes locales de la barra², son:

$$\left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{ea}{l} & 0 & 0 & -\frac{ea}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12ei}{l^3} & \frac{6ei}{l^2} & 0 & -\frac{12ei}{l^3} & \frac{6ei}{l^2} \\ 0 & \frac{6ei}{l^2} & \frac{4ei}{l} & 0 & -\frac{6ei}{l^2} & \frac{2ei}{l} \\ \hline -\frac{ea}{l} & 0 & 0 & \frac{ea}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12ei}{l^3} & -\frac{6ei}{l^2} & 0 & \frac{12ei}{l^3} & -\frac{6ei}{l^2} \\ 0 & \frac{6ei}{l^2} & \frac{2ei}{l} & 0 & -\frac{6ei}{l^2} & \frac{2ei}{l} \end{array} \right]$$

donde ea , ei y l son la rigidez axil, la rigidez a flexión y la longitud de la barra, respectivamente.

Hacer hincapié en que lo expuesto en este paso sobre las matrices de rigidez de las barras, está expresado en coordenadas locales (notación k_{ij}), mientras que son coordenadas globales las que se utilizan en la matriz de rigidez global de la estructura (notación K_{ij}), por lo que hay que transformar unas en otras. Dicha transformación [1, 2] viene dada por $K_{ij} = T \cdot k_{ij} \cdot T^T$ donde:

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo α el ángulo que forma el eje global de abscisas con el local de abscisas en sentido positivo o antihorario.

Para la estructura que nos ocupa, la siguiente tabla recoge la información trigonométrica necesaria para aplicar la transformación anterior.

²En los ejes locales de una barra, el eje OX coincide con la directriz de la barra y según el sentido de avance que tenga asignado. Los ejes OY y OZ estarán contenidos en la sección transversal de la barra.

	a	b	c
$\text{sen } \alpha$	1	$-\frac{2,5}{\sqrt{87,25}}$	1
$\text{cos } \alpha$	0	$\frac{9}{\sqrt{87,25}}$	0

Así, las matrices de rigidez de las barras, en coordenadas globales vienen dadas por:

Barra a

$$K_{11a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10}ea & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{250}ei & \frac{3}{50}ei \\ 0 & \frac{3}{50}ei & \frac{2}{5}ei \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{250}ei & 0 & \frac{-3}{50}ei \\ 0 & \frac{1}{10}ea & 0 \\ \frac{-3}{50}ei & 0 & \frac{2}{5}ei \end{bmatrix}$$

$$K_{22a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10}ea & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{250}ei & \frac{-3}{50}ei \\ 0 & \frac{-3}{50}ei & \frac{2}{5}ei \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{250}ei & 0 & \frac{3}{50}ei \\ 0 & \frac{1}{10}ea & 0 \\ \frac{3}{50}ei & 0 & \frac{2}{5}ei \end{bmatrix}$$

$$K_{12a} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{10}ea & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{250}ei & \frac{3}{50}ei \\ 0 & \frac{-3}{50}ei & \frac{1}{5}ei \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{250}ei & 0 & \frac{-3}{50}ei \\ 0 & \frac{-1}{10}ea & 0 \\ \frac{3}{50}ei & 0 & \frac{1}{5}ei \end{bmatrix}$$

Barra b

$$K_{11b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} & 0 \\ \frac{-1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{ea}{30}\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ei}{225}\sqrt{10} & \frac{ei}{15} \\ 0 & \frac{ei}{15} & \frac{ei}{15}\sqrt{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{-1}{10}\sqrt{10} & 0 \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{100}ea\sqrt{10} + \frac{1}{2250}ei\sqrt{10} & \frac{-1}{100}ea\sqrt{10} + \frac{1}{750}ei\sqrt{10} & \frac{1}{150}ei\sqrt{10} \\ \frac{-1}{100}ea\sqrt{10} + \frac{1}{750}ei\sqrt{10} & \frac{1}{300}ea\sqrt{10} + \frac{1}{250}ei\sqrt{10} & \frac{1}{50}ei\sqrt{10} \\ \frac{1}{150}ei\sqrt{10} & \frac{1}{50}ei\sqrt{10} & \frac{2}{15}ei\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$K_{22b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} & 0 \\ \frac{-1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{ea}{30}\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ei}{225}\sqrt{10} & \frac{-ei}{15} \\ 0 & \frac{-ei}{15} & \frac{2}{15}ei\sqrt{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{-1}{10}\sqrt{10} & 0 \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{100}ea\sqrt{10} + \frac{1}{2250}ei\sqrt{10} & \frac{-1}{100}ea\sqrt{10} + \frac{1}{750}ei\sqrt{10} & \frac{-1}{150}ei\sqrt{10} \\ \frac{-1}{100}ea\sqrt{10} + \frac{1}{750}ei\sqrt{10} & \frac{1}{300}ea\sqrt{10} + \frac{1}{250}ei\sqrt{10} & \frac{-1}{50}ei\sqrt{10} \\ \frac{-1}{150}ei\sqrt{10} & \frac{-1}{50}ei\sqrt{10} & \frac{2}{15}ei\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$K_{12b} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} & 0 \\ \frac{-1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-ea}{30}\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-ei}{225}\sqrt{10} & \frac{ei}{15} \\ 0 & \frac{-ei}{15} & \frac{1}{15}ei\sqrt{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{-1}{10}\sqrt{10} & 0 \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-3}{100}ea\sqrt{10} - \frac{1}{2250}ei\sqrt{10} & \frac{1}{100}ea\sqrt{10} - \frac{1}{750}ei\sqrt{10} & \frac{1}{150}ei\sqrt{10} \\ \frac{1}{100}ea\sqrt{10} - \frac{1}{750}ei\sqrt{10} & \frac{-1}{300}ea\sqrt{10} - \frac{1}{250}ei\sqrt{10} & \frac{1}{50}ei\sqrt{10} \\ \frac{-1}{150}ei\sqrt{10} & \frac{-1}{50}ei\sqrt{10} & \frac{1}{15}ei\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

Barra c

$$K_{11c} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{ea}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{343}ei & \frac{6}{49}ei \\ 0 & \frac{6}{49}ei & \frac{4}{7}ei \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{343}ei & 0 & \frac{-6}{49}ei \\ 0 & \frac{ea}{7} & 0 \\ \frac{-6}{49}ei & 0 & \frac{4}{7}ei \end{bmatrix}$$

$$K_{22c} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{ea}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{343}ei & \frac{-6}{49}ei \\ 0 & \frac{-6}{49}ei & \frac{4}{7}ei \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{343}ei & 0 & \frac{6}{49}ei \\ 0 & \frac{ea}{7} & 0 \\ \frac{6}{49}ei & 0 & \frac{4}{7}ei \end{bmatrix}$$

$$K_{12c} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-ea}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12}{343}ei & \frac{6}{49}ei \\ 0 & \frac{-6}{49}ei & \frac{2}{7}ei \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-12}{343}ei & 0 & \frac{-6}{49}ei \\ 0 & \frac{-ea}{7} & 0 \\ \frac{6}{49}ei & 0 & \frac{2}{7}ei \end{bmatrix}$$

Paso 4. *Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.*

En el Paso 2 hemos obtenido la estructura de la matriz de rigidez global expresada en función de las matrices de rigidez de las barras, las cuales han sido calculadas en el Paso 3. Se puede comprobar que la matriz resultante es singular, lo que significa que la pieza puede sufrir un movimiento arbitrario de conjunto, sin afectar las fuerzas que actúan en sus nudos. Ello es debido a que, aún no se ha reflejado que los nudos A y D son empotramientos de la estructura y que el nudo B es apoyo simple, por lo que debemos eliminar las filas y columnas de K correspondientes a desplazamientos y giros nulos. Para la estructura que nos ocupa se deben eliminar las tres filas y tres columnas asociadas al nudo A , igualmente para el nudo D y la primera fila y columna del apoyo simple B , que son las que corresponden con el desplazamiento horizontal.

Así, la matriz de rigidez de la estructura dada es regular de orden 5, que, expresada por bloques, por necesidades de formato, es la siguiente:

$$K = \left[\begin{array}{c|c} K^1 & K^2 \\ \hline K^3 & K^4 \end{array} \right]$$

donde

$$K^1 = \begin{bmatrix} \frac{ea}{10} + \frac{ea}{300}\sqrt{10} + \frac{ei}{250}\sqrt{10} & \frac{ei}{50}\sqrt{10} \\ \frac{ei}{50}\sqrt{10} & \frac{2}{5}ei + \frac{2}{15}ei\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

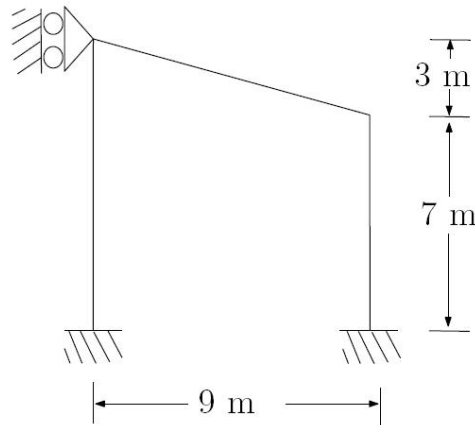
$$K^2 = \begin{bmatrix} \frac{ea}{100}\sqrt{10} - \frac{ei}{750}\sqrt{10} & \frac{-ea}{300}\sqrt{10} - \frac{ei}{250}\sqrt{10} & \frac{ei}{50}\sqrt{10} \\ \frac{-ei}{150}\sqrt{10} & \frac{-ei}{50}ei\sqrt{10} & \frac{ei}{15}\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$K^3 = \begin{bmatrix} \frac{ea}{100}\sqrt{10} - \frac{ei}{750}\sqrt{10} & \frac{-ei}{150}\sqrt{10} \\ \frac{-ea}{300}\sqrt{10} - \frac{ei}{250}\sqrt{10} & \frac{-ei}{50}ei\sqrt{10} \\ \frac{ei}{50}\sqrt{10} & \frac{ei}{15}\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$K^4 = \begin{bmatrix} \frac{3}{100}ea\sqrt{10} + \frac{ei}{2250}\sqrt{10} + \frac{12}{343}ei & \frac{-ea}{100}\sqrt{10} + \frac{ei}{750}\sqrt{10} & \frac{-ei}{150}\sqrt{10} + \frac{6}{49}ei \\ \frac{-ea}{100}\sqrt{10} + \frac{ei}{750}\sqrt{10} & \frac{ea}{300}\sqrt{10} + \frac{ei}{250}\sqrt{10} + \frac{ea}{7} & \frac{-ei}{50}\sqrt{10} \\ \frac{-ei}{150}\sqrt{10} + \frac{6}{49}ei & \frac{-ei}{50}\sqrt{10} & \frac{2}{15}ei\sqrt{10} + \frac{4}{7}ei \end{bmatrix}$$

Problema 1.1.6 Calcular la matriz de flexibilidad de la estructura reticulada plana mostrada en la Figura 1.9, de sección transversal $100\sqrt{10} \times 100 \text{ mm}^2$ y módulo de elasticidad longitudinal $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kg/mm}^2$.

Figura 1.9: Estructura plana de nudos rígido.



Solución En el cálculo matricial de estructuras, la flexibilidad es lo inverso a la rigidez. Si denotamos por p y d a los vectores que recogen las cargas y los desplazamientos en los nudos de la estructura, respectivamente, el método de la rigidez establece que:

$$p = K \cdot d$$

donde K es la matriz de rigidez. Por su parte, el método de la flexibilidad asegura que:

$$d = F \cdot p$$

donde F es la matriz de flexibilidad de la estructura. Aún siendo más utilizado el método de la rigidez en el análisis estructural, en casos particulares el método de la flexibilidad aporta buenos resultados. Desde un punto de vista matemático, las matrices de rigidez y flexibilidad son inversas una de la otra.

La resolución de este ejercicio va a consistir en el cálculo de la matriz de flexibilidad como la inversa de la matriz de rigidez utilizando el método de Gauss-Jordan. La estructura a considerar es la misma que la dada en el Problema 1.1.5, en el cual se halló su matriz de rigidez, en función de la rigidez axial (ea) y la rigidez a flexión (ei), obteniéndose:

$$K(ea, ei) = \left[\begin{array}{c|c} K^1 & K^2 \\ \hline K^3 & K^4 \end{array} \right]$$

donde:

$$K^1 = \left[\begin{array}{cc} \frac{ea}{10} + \frac{ea}{300}\sqrt{10} + \frac{ei}{250}\sqrt{10} & \frac{ei}{50}\sqrt{10} \\ \frac{ei}{50}\sqrt{10} & \frac{2}{5}ei + \frac{2}{15}ei\sqrt{10} \end{array} \right]$$

$$K^2 = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{ea}{100}\sqrt{10} - \frac{ei}{750}\sqrt{10} & \frac{-ea}{300}\sqrt{10} - \frac{ei}{250}\sqrt{10} & \frac{ei}{50}\sqrt{10} \\ \frac{-ei}{150}\sqrt{10} & \frac{-ei}{50}\sqrt{10} & \frac{ei}{15}\sqrt{10} \end{array} \right]$$

$$K^3 = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{ea}{100}\sqrt{10} - \frac{ei}{750}\sqrt{10} & \frac{-ei}{150}\sqrt{10} \\ \frac{-ea}{300}\sqrt{10} - \frac{ei}{250}\sqrt{10} & \frac{-ei}{50}\sqrt{10} \\ \frac{ei}{50}\sqrt{10} & \frac{ei}{15}\sqrt{10} \end{array} \right]$$

Como resultado, obtenemos la siguiente matriz F como matriz de flexibilidad de la estructura dada:

$$F = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & f_{1,5} \\ f_{1,2} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & f_{2,5} \\ f_{1,3} & f_{2,3} & f_{3,3} & f_{3,4} & f_{3,5} \\ f_{1,4} & f_{2,4} & f_{3,4} & f_{4,4} & f_{4,5} \\ f_{1,5} & f_{2,5} & f_{3,5} & f_{4,5} & f_{5,5} \end{bmatrix}$$

donde:

$$f_{1,1} = 5 \frac{3177065434\sqrt{10} + 11365566651}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{1,2} = -13500 \frac{1558113 + 258982\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{1,3} = -44100 \frac{427831 + 119346\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{1,4} = 35 \frac{1558113 + 258982\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{1,5} = 207900 \frac{-7285 + 298\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{2,2} = 300 \frac{1003920527\sqrt{10} + 2349057843}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{2,3} = 22050 \frac{95860\sqrt{10} + 202647}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{2,4} = 9450 \frac{500269 + 48110\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{2,5} = -2100 \frac{160390\sqrt{10} + 167100351}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{3,3} = 92610 \frac{685889 + 236504\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{3,4} = 30870 \frac{427831 + 119346\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{3,5} = -4410 \frac{1279965 + 461218\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

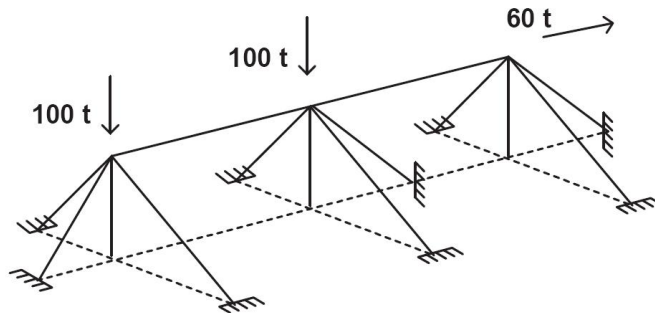
$$f_{4,4} = 35 \frac{1137024099 + 317784238\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{4,5} = -145530 \frac{-7285 + 298\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

$$f_{5,5} = 420 \frac{1676310345 + 502345444\sqrt{10}}{31796552540 + 11381147781\sqrt{10}}$$

Problema 1.1.7 Una estructura biarticulada espacial está apoyada y sometida a cargas tal y como indica la Figura 1.10.

Figura 1.10: Estructura biarticulada espacial.



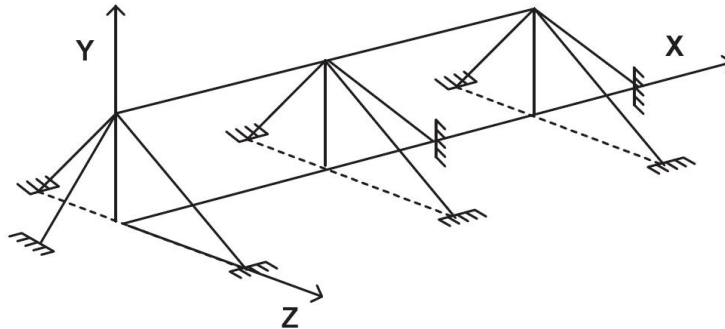
Determinar los desplazamientos de los nudos sabiendo que : $EA = 610^4$ (módulo de elasticidad del material por área de sección transversal de la barra) y la longitud de las barras es : $L = 4: m$.

Solución En la resolución del problema distinguiremos los siguientes pasos:

Paso 1. *Elección del sistema de ejes globales para nuestra estructura.*

Tomamos los ejes X e Y tal como indicamos en la Figura 1.11.

Figura 1.11: Elección de ejes globales.



Paso 2. *Numeración de los nudos (números) y barras (letras minúsculas), elección de sentido de avance en estas últimas.*

Los representamos en la Figura 1.12. El sentido de avance de las barras será del nudo menor al nudo mayor.

Paso 3. *Planteamiento matricial de la estructura.*

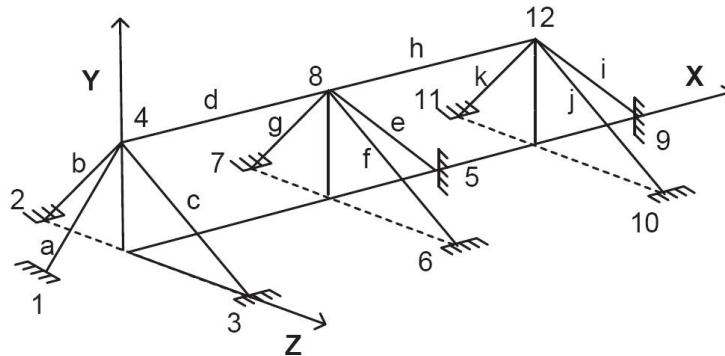
Vamos a plantear un sistema de ecuaciones en forma matricial cuya matriz de coeficientes será la matriz de rigidez de la estructura K , el vector de las incógnitas será el vector de los desplazamientos de los nudos D y el vector de términos independientes será el vector que represente las cargas a las que se encuentra sometida la estructura F .

$$F = K \cdot D$$

Los nudos libres en nuestra estructura son los nudos 4, 8 y 12. En la matriz de rigidez distinguiremos 3×3 partes, tres filas y tres columnas. Para identificar cada una de las partes utilizaremos la notación K_{ij} correspondiente al nudo i y al nudo j . Cada una de estas submatrices son de orden 3×3 .

$$K = \begin{pmatrix} K_{44} & K_{48} & K_{4\ 12} \\ K_{84} & K_{88} & K_{8\ 12} \\ K_{12\ 4} & K_{12\ 8} & K_{12\ 12} \end{pmatrix}$$

Figura 1.12: Numeración nudos y barra.



A continuación vamos a determinar la composición de cada una de las submatrices K_{ij} .

En primer lugar conocemos que la matriz de rigidez es una matriz simétrica luego $K_{ij} = K_{ji}$. Si el nudo i no está unido con el nudo j con una barra la submatriz K_{ij} es la matriz nula de orden 3×3 .

Consideremos ahora las submatrices que se encuentran en la diagonal K_{ii} . Por ejemplo, para determinar la submatriz K_{44} nos fijamos en las barras que concurren en dicho nudo (a , b , c y d). Como son cuatro barras la submatriz K_{44} será la suma de cuatro submatrices 3×3 , una por cada barra. Si la barra lleva el sentido de avance cuando llega al nudo el subíndice de la submatriz correspondiente a dicha barra será 22, en caso contrario el subíndice será 11. De esta forma tenemos:

$$K_{44} = K_{22a} + K_{22b} + K_{22c} + K_{11d}$$

$$K_{88} = K_{22d} + K_{22e} + K_{22f} + K_{22g} + K_{11h}$$

$$K_{12\ 12} = K_{22i} + K_{22j} + K_{22k} + K_{22h}$$

Para las restantes submatrices K_{ij} observamos la barra que va del nudo i al nudo j . Si su sentido coincide con el que va del nudo i al nudo j ponemos el subíndice 12, en caso contrario el subíndice 21. Así tenemos que:

$$K_{48} = K_{12d} \quad K_{812} = K_{12h}$$

Paso 4. Calculamos las matrices de rigidez de las barras K_{ij} .

Sabemos que:

$$K_{iia} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{pmatrix}$$

$$K_{ija} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & -\cos\beta\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & -\cos^2\gamma \end{pmatrix}$$

donde α , β y γ son los ángulos que forma la barra a con los ejes globales de la estructura, E es el módulo de elasticidad del material, A es el área de la sección transversal de la barra y L la longitud de la barra. Así por ejemplo tenemos que:

$$\begin{aligned} K_{48} = K_{12d} &= \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -\cos^2 0 & -\cos 0 \cos 90 & -\cos 0 \cos 90 \\ -\cos 0 \cos 90 & -\cos^2 90 & -\cos 90 \cos 90 \\ -\cos 0 \cos 90 & -\cos 90 \cos 90 & -\cos^2 90 \end{pmatrix} \\ &= \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{812} = K_{12h} &= \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -\cos^2 0 & -\cos 0 \cos 90 & -\cos 0 \cos 90 \\ -\cos 0 \cos 90 & -\cos^2 90 & -\cos 90 \cos 90 \\ -\cos 0 \cos 90 & -\cos 90 \cos 90 & -\cos^2 90 \end{pmatrix} \\ &= \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$K_{44} = K_{22a} + K_{22b} + K_{22c} + K_{11d} =$$

$$\begin{aligned} &\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 45 & \cos 45 \cos 45 & \cos 45 \cos 45 \\ \cos 45 \cos 45 & \cos^2 45 & \cos 45 \cos 90 \\ \cos 45 \cos 90 & \cos 45 \cos 90 & \cos^2 90 \end{pmatrix} + \\ &\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 90 & \cos 90 \cos 45 & \cos 90 \cos 45 \\ \cos 90 \cos 45 & \cos^2 45 & \cos 45 \cos 45 \\ \cos 90 \cos 45 & \cos 45 \cos 45 & \cos^2 45 \end{pmatrix} + \\ &\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 90 & \cos 90 \cos 45 & \cos 90 \cos 135 \\ \cos 90 \cos 45 & \cos^2 45 & \cos 45 \cos 135 \\ \cos 90 \cos 135 & \cos 45 \cos 135 & \cos^2 135 \end{pmatrix} + \\ &\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 0 & \cos 0 \cos 90 & \cos 0 \cos 90 \\ \cos 0 \cos 90 & \cos^2 90 & \cos 90 \cos 90 \\ \cos 0 \cos 90 & \cos 90 \cos 90 & \cos^2 90 \end{pmatrix} + \\ &\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{12\ 12} = K_{22i} + K_{22j} + K_{22k} + K_{11h} =$$

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{88} = K_{22d} + K_{22e} + K_{22f} + K_{22g} + K_{11h} =$$

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 2,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como $\frac{EA}{L} = \frac{60000}{400} = 150$ t/cm, la matriz K de rigidez sería:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 225 & 75 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 75 & 225 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -150 & 0 & 0 & 375 & -75 & 0 & -150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -75 & 225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 225 & -75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -75 & 225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \end{array} \right)$$

Y el sistema de ecuaciones quedaría:

$$(0, -100, 0 \mid 0, -100, 0 \mid 60, 0, 0)^T = K (\delta_X^4, \delta_Y^4, \delta_Z^4 \mid \delta_X^8, \delta_Y^8, \delta_Z^8 \mid \delta_X^{11}, \delta_Y^{11}, \delta_Z^{11})^T$$

donde δ_X^i representa el desplazamiento del nudo i en la dirección del eje global X de la estructura, δ_Y^i representa el desplazamiento de dicho nudo en la dirección Y y δ_Z^i en la dirección Z . En el vector de términos independientes hemos situado las cargas que existen sobre cada nudo según las direcciones X , Y y Z .

Las matrices de rigidez obtenidas para la resolución de este sistema de ecuaciones podemos aplicar diferentes estrategias dentro de los métodos directos o iterados. En el problema 1.1.8 lo resolvemos de dos formas diferentes, con el método directo de Cholesky y el método iterado de Gauss-Seidel. Adelantamos que la solución obtenida para este problema es el vector de desplazamiento D cuyas coordenadas son que nos proporciona los desplazamientos de los nudos en cm.

$$(0, 3866667, -0, 5753333, 0, 0, 2933333, -0, 3466667, 0, 0, 5200000, 0, 1733333, 0)^T$$

nos dan los desplazamientos de los nudos en cm.

Problema 1.1.8 Resolución del sistema de ecuaciones que se obtiene en el problema 1.1 mediante los métodos de Cholesky y Gauss-Seidel.

Solución En el problema 1.1 se plantea una estructura biarticulada espacial sometida a ciertas cargas y se quieren calcular los desplazamientos de sus nudos. En la resolución del problema se llega a un sistema de ecuaciones lineales donde la matriz de coeficientes es la llamada matriz de rigidez de la estructura K , el vector de las incógnitas es el vector de los desplazamientos de los nudos D y el vector de términos independientes es el vector que representa las cargas a las que se encuentra sometida la estructura F . En este caso concreto la matriz de rigidez era:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 225 & 75 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 75 & 225 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -150 & 0 & 0 & 375 & -75 & 0 & -150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -75 & 225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 225 & -75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -75 & 225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \end{array} \right)$$

el sistema de ecuaciones quedaba:

$$(0, -100, 0 \mid 0, -100, 0 \mid 60, 0, 0)^T = K (\delta_X^4, \delta_Y^4, \delta_Z^4 \mid \delta_X^8, \delta_Y^8, \delta_Z^8 \mid \delta_X^{11}, \delta_Y^{11}, \delta_Z^{11})^T$$

el vector B es

$$(0, -7,0710, 0, 1,5430, -6,5081, 0, 4,7958, 2,3372, 0)^T$$

y la solución de nuestro problema es el vector desplazamiento D cuyas coordenadas son:

$$(0,3866, -0,5753, 0,0,2933, -0,3466, 0,0,5200, 0,1733, 0)^T$$

que nos proporciona los desplazamientos de los nudos en cm.

A continuación vamos a resolver el mismo sistema utilizando un método iterado, concretamente el método de Gauss-Seidel.

Este método se basa en una descomposición de la matriz de coeficientes del sistema lineal, en nuestro caso de la matriz de rigidez K . La matriz K se descompone en la suma de su submatriz triangular estrictamente inferior $-\bar{E}$, su submatriz diagonal \bar{D} y su submatriz triangular estrictamente superior $-\bar{F}$, es decir,

$$K = \bar{D} - \bar{E} - \bar{F}$$

Tenemos que resolver el sistema:

$$K \cdot D = F$$

donde K es la matriz de rigidez de la estructura, D es el vector incógnita de los desplazamientos y F es el vector de las cargas a las que se encuentra sometida la estructura. Teniendo en cuenta la descomposición de la matriz K .

$$(\bar{D} - \bar{E} - \bar{F}) \cdot D = F$$

$$D = (\bar{D} - \bar{E})^{-1} \bar{F} \cdot D + (\bar{D} - \bar{E})^{-1} F$$

siempre que exista la inversa de la matriz $(\bar{D} - \bar{E})$.

Una vez fijado el vector inicial X_0 , el método iterativo se define entonces como:

$$X_{K+1} = (\bar{D} - \bar{E})^{-1} \bar{F} \cdot X_K + (\bar{D} - \bar{E})^{-1} F$$

La matriz $(\bar{D} - \bar{E})^{-1} \bar{F}$ se llama matriz de Gauss-Seidel y el método es convergente si y solo si su radio espectral es estrictamente menor que uno. Sin embargo conocemos que si la matriz del sistema de ecuaciones es simétrica definida positiva el método converge. En nuestro caso la matriz de coeficientes es la matriz de rigidez K que sabemos que es simétrica definida positiva luego podemos utilizar este método.

Para nuestra matriz K , la matriz \bar{D} es:

$$\begin{pmatrix} 225 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 225 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

la matriz \bar{E} es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz \bar{F} es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -75 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 0 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de Gauss-Seidel es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/30 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/9 & 0 & -2/9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/15 & 0 & 4/15 & 1/5 & 0 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & -2/45 & 0 & 4/45 & 1/15 & 0 & 2/15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4/45 & 0 & 8/45 & 2/15 & 0 & 4/15 & 1/3 & 0 \\ 0 & -4/135 & 0 & 8/135 & 2/45 & 0 & 4/45 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz $(\bar{D} - \bar{E})^{-1} F$ es:

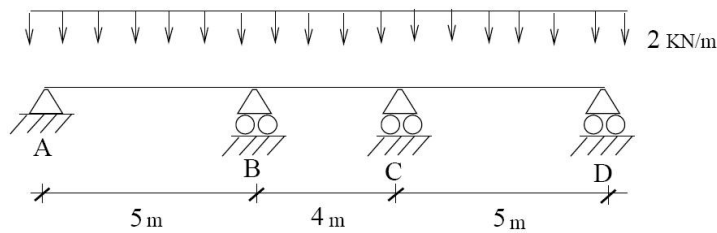
$$(0, -4/9, 0, 0, -4/9, 0, 4/15, 4/45, 0)^T$$

Efectuando quince iteraciones obtenemos que el vector desplazamiento D es:

$$(0, 3842, -0, 5725, 0, 0, 2912, -0, 3473, 0, 0, 5183, 0, 1727, 0)^T$$

Problema 1.1.9 En la cubierta de un edificio al Ingeniero de Edificación se le pide que compruebe el giro en cada apoyo de una correa de la estructura (ver figura 1.13), con la finalidad de estudiar los esfuerzos sobre las vigas principales de la misma, donde $EI = 10^{10} N$.

Figura 1.13: Esquema de la estructura.

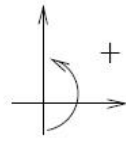


Solución Se supone que la longitud de la correa es indeformable y por tanto hay 4 incógnitas: δ_1 , δ_2 , δ_3 y δ_4 correspondientes a los giros en los apoyos A, B, C y D, respectivamente. El Ingeniero de Edificación tiene que encontrar la matriz de giros,

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)^T.$$

El convenio de signos que se considera para el problema se muestra en la figura 1.14.

Figura 1.14: Convenio de signos.



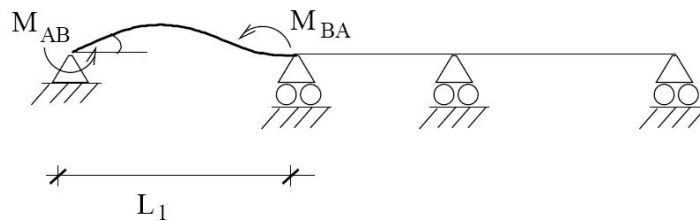
Paso 1. Cálculo de la matriz de rigidez, K , y la matriz de cargas, P .

La primera columna de la matriz K se corresponde con la rigidez que tienen los apoyos A , B , C y D cuando se realiza un giro $\delta_1 = 1$ sobre el apoyo A y se contrarresta con un momento M_{BA} sobre el apoyo B . (Ver figura 1.15).

Los coeficientes k_{31} y k_{41} son nulos pues no se ven afectados y k_{11} y k_{21} vienen dados por los momentos,

$$k_{11} = M_{AB} = \frac{4EI}{L_1} \text{ y } k_{21} = M_{BA} = \frac{2EI}{L_1}.$$

Figura 1.15: Giro en A.



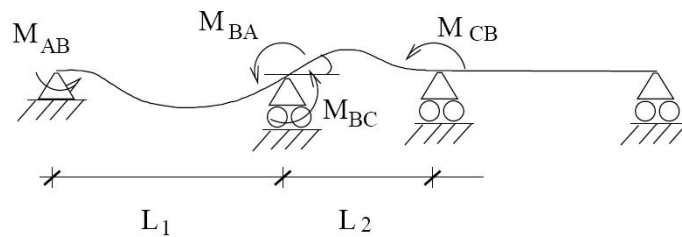
$$K = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L_1} & - & - & - \\ \frac{2EI}{L_1} & - & - & - \\ 0 & - & - & - \\ 0 & - & - & - \end{pmatrix}$$

Si el giro se realiza sobre el segundo apoyo (Figura 1.16), el coeficiente k_{24} es 0 pues se corresponde con un apoyo no contiguo. Siendo k_{12} , k_{22} y k_{32} ,

$$k_{12} = M_{AB} = \frac{3EI}{L_1}; k_{22} = M_{BA} + M_{BC} = \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2}; \text{ y } k_{32} = M_{CB} = \frac{2EI}{L_2}.$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L_1} & \frac{2EI}{L_1} & - & - \\ \frac{2EI}{L_1} & \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} & - & - \\ 0 & \frac{2EI}{L_2} & - & - \\ 0 & 0 & - & - \end{pmatrix}$$

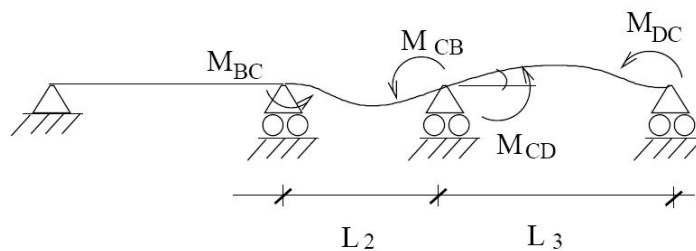
Figura 1.16: Giro en B.



El giro sobre C se refleja en la Figura 1.17. Con $k_{13} = 0$;

$$k_{23} = M_{BC} = \frac{2EI}{L_2}; k_{33} = M_{CB} + M_{CD} = \frac{4EI}{L_2} + \frac{4EI}{L_3}; \text{ y } k_{34} = M_{DC} = \frac{2EI}{L_3}.$$

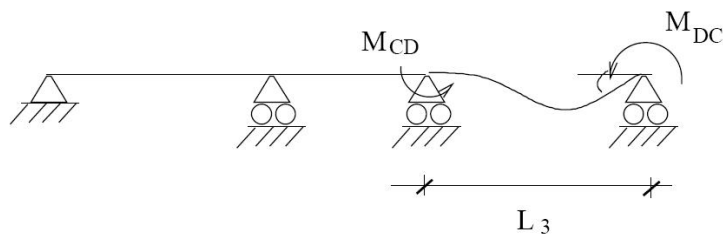
Figura 1.17: Giro en C.



$$K = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L_1} & \frac{2EI}{L_1} & 0 & - \\ \frac{2EI}{L_1} & \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} & \frac{2EI}{L_2} & - \\ 0 & \frac{2EI}{L_2} & \frac{4EI}{L_2} + \frac{4EI}{L_3} & - \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L_3} & - \end{pmatrix}$$

Finalmente sobre D, figura 1.18, con $k_{14} = k_{24} = 0$;

Figura 1.18: Giro en D.

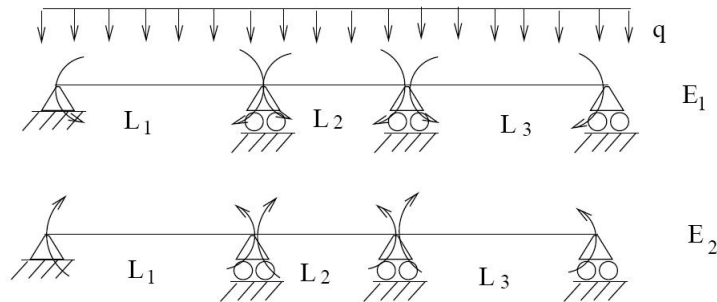


$$k_{34} = M_{CD} = \frac{2EI}{L_3} \text{ y } k_{44} = M_{DC} = \frac{4EI}{L_3}.$$

La matriz de rigidez es:

$$K = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L_1} & \frac{2EI}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L_1} & \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} & \frac{2EI}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{2EI}{L_2} & \frac{4EI}{L_2} + \frac{4EI}{L_3} & \frac{2EI}{L_3} \\ 0 & 0 & \frac{2EI}{L_3} & \frac{4EI}{L_3} \end{pmatrix} = 2EI \begin{pmatrix} \frac{2}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & (\frac{2}{L_1} + \frac{2}{L_2}) & \frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & (\frac{2}{L_2} + \frac{2}{L_3}) & \frac{1}{L_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_3} & \frac{2}{L_3} \end{pmatrix}$$

Figura 1.19: Estados de la carga.



Para la matriz de cargas se analizan los estados 1 y 2 de la carga. Ver figura 1.19. El momento de empotramiento de una viga biempotrada es:

$$M_e = q \frac{L^2}{12}.$$

Siguiendo el convenio de signos sobre E_2 se tiene que la matriz de cargas es:

$$P = \begin{pmatrix} -q \frac{L_1^2}{12} \\ q \frac{L_1^2}{12} - q \frac{L_2^2}{12} \\ q \frac{L_2^2}{12} - q \frac{L_3^2}{12} \\ q \frac{L_3^2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \frac{5^2}{12} \\ 2 \frac{5^2 - 4^2}{12} \\ 2 \frac{4^2 - 5^2}{12} \\ -2 \frac{5^2}{12} \end{pmatrix}$$

Paso 2. Resolución del sistema $K\delta = P$.

Como la matriz del sistema lineal posee varios ceros, se utilizará el método de Gauss sobre filas. Sustituyendo los datos del problema se obtiene que la matriz K es proporcional a:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & (\frac{2}{5} + \frac{2}{4}) & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & (\frac{2}{4} + \frac{2}{5}) & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

y se aplicará el método de Gauss, sobre la matriz:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{25}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{9}{10} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 = \frac{5}{2}f_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{125}{12} \\ \frac{1}{5} & \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 = f_2 - \frac{1}{5}f_1} \\
& \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{125}{12} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{41}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 = \frac{5}{4}f_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{125}{12} \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{205}{48} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 = f_3 - \frac{1}{4}f_2} \\
& \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{125}{12} \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{205}{48} \\ 0 & 0 & \frac{263}{320} & \frac{1}{5} & -\frac{461}{192} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 = \frac{320}{263}f_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{125}{12} \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{205}{48} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{64}{263} & -\frac{2305}{789} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{25}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4 = f_4 - \frac{1}{5}f_3} \\
& \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{125}{12} \\ 0 & 1 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{250}{48} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{64}{263} & -\frac{2305}{789} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{462}{1315} & \frac{2499}{526} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

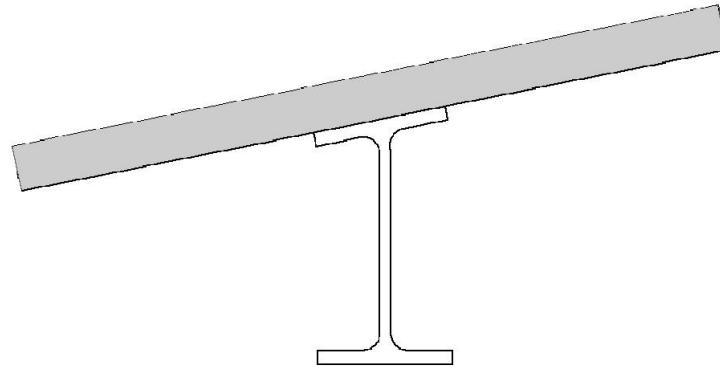
Se tiene el siguiente sistema semejante:

$$\begin{cases} \frac{462}{1315}x_4 = \frac{2499}{526} & \implies x_4 = \frac{2499}{526} \cdot \frac{1315}{462} = \frac{595}{44} \\ x_3 + \frac{64}{263}x_4 = -\frac{2305}{789} & \implies x_3 = -\frac{64}{263} \cdot \frac{595}{44} - \frac{2305}{789} = -\frac{205}{33} \\ x_2 + \frac{5}{16}x_3 = \frac{205}{48} & \implies x_2 = \frac{5}{16} \cdot \frac{205}{33} + \frac{205}{48} = \frac{205}{33} \\ x_1 + \frac{x_2}{2} = -\frac{125}{12} & \implies x_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{205}{33} - \frac{125}{12} = -\frac{595}{44} \end{cases}$$

Se ha resuelto el problema con respecto a una matriz proporcional a la matriz de rigidez por lo tanto $x_i = 2 \cdot 10^{10} \delta_i$. La solución es:

$$\delta = \begin{pmatrix} -\frac{595}{88} \cdot 10^{-10} \\ \frac{205}{66} \cdot 10^{-10} \\ -\frac{205}{66} \cdot 10^{-10} \\ \frac{595}{88} \cdot 10^{-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,76 \cdot 10^{-10} \\ 3,11 \cdot 10^{-10} \\ -3,11 \cdot 10^{-10} \\ 6,76 \cdot 10^{-10} \end{pmatrix}$$

Figura 1.20: Deformación de la viga para ángulos superiores.



El Ingeniero de Edificación al obtener este resultado se da cuenta que los ángulos de giro son pequeños y la viga principal que está relacionada con la correa no acumula muchas tensiones. En la figura 1.20 se ve la deformación de la viga para ángulos superiores.

Nota : También se puede resolver el sistema por el método de sustitución, empezando por la última ecuación hasta llegar a la primera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 = -\frac{25}{6} & \implies x_4 = \frac{595}{44} = 13,52 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{9}{10}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{4}{3} & \implies x_1 = \frac{8211}{24} - \frac{263}{10}x_4 \\ \frac{1}{4}x_2 + \frac{9}{10}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = -\frac{4}{3} & \implies x_2 = -\frac{241}{3} + \frac{32}{5}x_4 \\ \frac{1}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{25}{6} & \implies x_3 = \frac{125}{6} - 2x_4 \end{cases}$$

1.2. Diagonalización de matrices

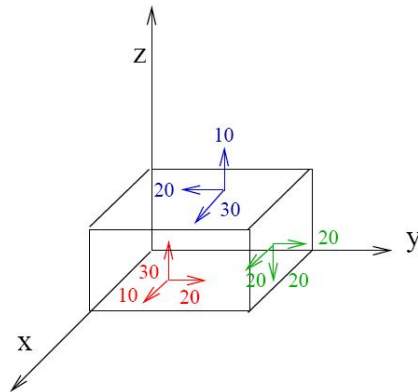
Problema 1.2.1 En una determinada sección de una viga de hormigón armado, cuyo estado tensional se representa en la figura 1.21 (expresado en MPa), el Ingeniero de Edificación quiere determinar, analíticamente, la componente normal y tangencial del plano que forma 60° con el eje x y 60° con el eje y .

Solución Para poder determinar las tensiones solicitadas, hayamos las tensiones y direcciones principales.

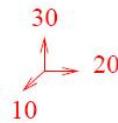
La matriz de tensiones, A , se construye a partir de las tensiones de la sección.

La primera columna se corresponde con:

Figura 1.21: Estado tensional.

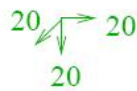


$$A = \begin{pmatrix} 10 & - & - \\ 20 & - & - \\ 30 & - & - \end{pmatrix}.$$



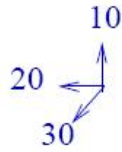
La segunda columna con:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & - \\ 20 & 20 & - \\ 30 & -20 & - \end{pmatrix}.$$



Y la tercera con:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 20 & -20 \\ 30 & -20 & 10 \end{pmatrix}.$$



Calcular las tensiones principales es calcular los autovalores de A . Es decir, las raíces del polinomio característico $|A - \lambda Id|$.

$$\begin{aligned} |A - \lambda Id| &= \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 20 & 30 \\ 20 & 20 - \lambda & -20 \\ 30 & -20 & 10 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 40\lambda^2 + 1200\lambda - 48000. \end{aligned}$$

Se observa que 40 es una raíz del polinomio y realizando la división por $\lambda - 40$ obtenemos,

$$\begin{aligned} -\lambda^3 + 40\lambda^2 + 1200\lambda - 48000 &= (\lambda - 40)(-\lambda^2 + 1200) \\ &= (\lambda - 40)(\sqrt{1200} - \lambda)(\sqrt{1200} + \lambda) \end{aligned}$$

Las tensiones principales son 40 y $\pm 20\sqrt{3}$.

Las direcciones principales se corresponden con los autovectores ortonormales.

Para cada autovalor se calcula un autovector y se normaliza, ya que hay tres autovalores distintos.

Para $\lambda = 40$, un autovalor es una solución no nula del sistema $(A - 40 Id)X = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -30 & 20 & 30 \\ 20 & -20 & -20 \\ 30 & -20 & -30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} -30x + 20y + 30z = 0 \\ 20x - 20y - 20z = 0 \\ 30x - 20y - 30z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Una solución no trivial es $(1, 0, 1)$, cuya norma es $\sqrt{2}$. Por lo tanto la dirección es $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Para $\lambda = \pm 20\sqrt{3}$, un autovalor es una solución no nula del sistema $(A \mp 20\sqrt{3} Id)X = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 10 \mp 20\sqrt{3} & 20 & 30 \\ 20 & 20 \mp 20\sqrt{3} & -20 \\ 30 & -20 & 10 \mp 20\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} (10 \mp 20\sqrt{3})x + 20y + 30z = 0 \\ 20x + (20 \mp 20\sqrt{3})y - 20z = 0 \\ 30x - 20y + (10 \mp 20\sqrt{3})z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (1 \mp 2\sqrt{3})x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + (1 \mp 2\sqrt{3})z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones se obtiene una solución no trivial $(1, 1 \pm \sqrt{3}, -1)$, cuya norma es $\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}$. Las correspondientes direcciones son $(\frac{1}{\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}}, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}}, -\frac{1}{\sqrt{6 \pm 2\sqrt{3}}})$.

Para calcular la componente normal, σ_n y tangencial, τ , del plano se necesita calcular un vector normal unitario del plano,

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = (\cos 60^\circ, \cos 60^\circ, \cos \gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cos \gamma\right)$$

Al ser unitario $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ y por lo tanto $\gamma = 60^\circ$.

El vector unitario del plano es $\bar{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y el vector tensión es $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 20 & -20 \\ 30 & -20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60}{\sqrt{3}} \\ \frac{20}{\sqrt{3}} \\ \frac{20}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Sus componentes intrínsecas son:

$$\sigma_n = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \left(\frac{60}{\sqrt{3}}, \frac{20}{\sqrt{3}}, \frac{20}{\sqrt{3}} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} MPa = \frac{100}{3} MPa$$

$$\tau = \sqrt{|\bar{\sigma}|^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{\frac{60^2 + 20^2 + 20^2}{3} - \frac{10000}{9}} MPa = \sqrt{\frac{3200}{9}} MPa = \frac{40}{3} \sqrt{2} MPa$$

Entonces, $\sigma = 33,3 MPa$ y $\tau = 18,8 MPa$.

Capítulo 2

El método de simplex.

2.0.1. Aplicación 1.

Una empresa dedicada a la fabricación de válvulas para grifería produce cuatro tipos de ellas, los cuales han de maquinarse, pulirse y ensamblarse.

La empresa dispone semanalmente de 380 horas para el maquinado, 260 para el pulido y 260 para el ensamblado. Las necesidades específicas de tiempo (en horas) para cada tipo de válvula vienen dadas en la siguiente tabla 1,

Tabla 1: Situación inicial.

	Maquinado	Pulido	Ensamblado
Tipo 1	3	1	2
Tipo 2	2	1	1
Tipo 3	2	2	2
Tipo 4	4	3	1

La empresa tiene suscrito un contrato con un distribuidor, por el cual se compromete a entregar semanalmente un mínimo de 50 válvulas del tipo 1, un máximo de 100 unidades del total de los tres primeros tipos de válvulas y un máximo de 25 válvulas del tipo 4. Si los beneficios por cada tipo de válvula entregada son de 6, 4, 6 y 8 unidades monetarias respectivamente, la empresa desea saber cuántas válvulas de cada tipo debe fabricar semanalmente para que el beneficio sea máximo.

Solución Sea x_i , con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, la variable que denota el número de válvulas del tipo i , fabricadas semanalmente por la empresa. Este problema pide calcular los valores de x_i , tales que la función de cuatro variables, $6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$, alcance el máximo, siempre que los valores x_i cumplan las restricciones impuestas en el enunciado, que son:

1. De tiempo máximo de maquinado $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 380$
2. De tiempo máximo de pulido $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 260$
3. De tiempo máximo de ensamblado $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 260$

1. En la primera columna, aparecen las variables básicas.
2. En la última fila, los costes reducidos, cuyo vector viene dado por:

$$c^t - c_B^t B^{-1} A \quad (2.3)$$

Así, por ejemplo, el coste reducido de la variable x_2 es:

$$c_2^t - c_B^t B^{-1} A_2 = c_2 - c_B^t A_2 = -4 - (0, 0, 0, 0M, 0, 0) (2, 1, 1, 0, 1, 0)^t = -4 \quad (2.4)$$

donde A_2 es la columna 2 de la matriz A.

3. En la esquina correspondiente a la última fila y última columna figura el coste de la solución actual, cambiado de signo.

Tabla 2: Situación inicial.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	$B^{-1}b$
x_5	3	2	2	4	1	0	0	0	0	0	0	380
x_6	1	1	2	3	0	1	0	0	0	0	0	260
x_7	2	1	2	1	0	0	1	0	0	0	0	260
x_{11}	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	50
x_9	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	100
x_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	25
	-6-M	-4	-6	-8	0	0	0	M	0	0	0	$-50M$

El menor coste reducido es $-6 - M$, que es negativo, y por tanto, la variable no básica candidata a entrar en la base es x_1 . La variable que saldrá de la base es x_{11} (la artificial), ya que:

$$\min \{380/3, 260/1, 260/2, 50/1, 100/1\} = 50.$$

En los siguientes pasos comenzamos las iteraciones del simplex.

Paso 1 Primera iteración.

Desarrollando las operaciones de pivotación, las nuevas filas de la Tabla 3 son: $F'_1 = F_1 - 3F_4$; $F'_2 = F_2 - F_4$; $F'_3 = F_3 - 2F_4$; $F'_4 = F_4$; $F'_5 = F_5 - F_4$; $F'_6 = F_6$. La última fila también se puede calcular de esta manera, sumándole la cuarta fila multiplicada por $(6+M)$.

Tabla 3: Primera iteración.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	$B^{-1}b$
x_5	0	2	2	4	1	0	0	3	0	0	-3	230
x_6	0	1	2	3	0	1	0	1	0	0	-1	210
x_7	0	1	2	1	0	0	1	2	0	0	-2	160
x_{11}	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	50
x_9	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	-1	50
x_{10}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	25
	0	-4	-6	-8	0	0	0	-6	0	0	$-6-M$	300

El menor coste reducido es -8 y, por tanto, la variable no básica candidata a entrar en la base es x_4 . La variable que saldrá de su base será x_{10} , ya que:

$$\min \{230/4, 210/3, 160/1, 25/1 = 25\}$$

La solución actual es $x_5 = 230, x_6 = 210, x_7 = 160, x_1 = 50, x_9 = 50, x_{10} = 25$ y el resto de variables cero, con coste 300 (en el problema de maximizar).

Paso 2 Segunda iteración.

Realizando las correspondientes operaciones de pivotación, obtenemos la nueva Tabla 4,

Tabla 4: Segunda iteración.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	$B^{-1}b$
x_5	0	2	2	0	1	0	0	3	0	-4	-3	130
x_6	0	1	2	0	0	1	0	1	0	-3	-1	135
x_7	0	1	2	0	0	0	1	2	0	-1	-2	135
x_{11}	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	50
x_9	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	-1	50
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	25
	0	-4	-6	0	0	0	0	-6	0	8	$M+6$	500

El menor coste reducido es -6 y por tanto hay dos variables no básicas candidatas a entrar en la base x_3 y x_8 . Elegimos x_3 por ser variable original. La variable que saldrá de la base es x_9 , ya que:

$$\min\{130/2, 135/2, 135/2, 50/1\}=50$$

La solución actual es $x_5 = 130, x_6 = 135, x_7 = 135, x_{11} = 50, x_9 = 50, x_4 = 25$ y el resto de variables cero, con coste 500.

Paso 3. Tercera iteración.

Tabla 5: Tercera iteración.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	$B^{-1}b$
x_5	0	0	0	0	1	0	0	1	-2	-4	-1	30
x_6	0	-1	2	0	0	1	0	-1	-2	-3	1	35
x_7	0	-1	0	0	0	0	1	0	-2	-1	0	35
x_{11}	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	50
x_9	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	-1	50
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	25
	0	2	0	0	0	0	0	0	6	8	M	800

Ver Tabla 5. Todos los costes reducidos son no negativos y por tanto estamos ante la solución óptima del problema de programación lineal con integridad de variables relajada. Su solución, por lo que respecta a las variables originales es $x_1 = 50, x_2 = 0, x_3 = 50$ y $x_4 = 25$, con coste 800. Notar que la solución es entera y por tanto es la óptima a nuestro problema original, sin necesidad de aplicar la fase de ramificación y acotación. Comentar por último que el resultado es bastante esperado:

1. Las válvulas de tipo 4 son las más rentables y por tanto se fabrica el tope impuesto por el distribuidor.
2. En las que se gana menos son las de tipo 2 y como no tiene un mínimo establecido es más rentable no fabricarlas.
3. Por último se gana lo mismo en las de tipo 3 que en las de tipo 1, con lo que, satisfaciendo las restricciones, resulta la misma cantidad de cada uno de esos tipos.
4. El detalle del mismo coste junto con el hecho de que las restricciones de tiempo no se saturan con la solución óptima (sobran 30 horas de maquinado, 35 de pulido y 35 de ensamblado) hace pensar en la existencia de varias soluciones óptimas. Así, es fácil comprobar que (55,0,45,25) o (60,0,40,25) son soluciones con el mismo coste que la óptima y sin violar las restricciones, por lo que también son óptimas.

2.1. El problema del transporte.

2.1.1. Aplicación 2.

Una empresa dedicada al movimiento de tierras dispone de tres obras y cuatro vertederos como se indica en el Mapa A. Una vez considerados los correspondientes coeficientes de esponjamiento, se determina que la cantidad de metros cúbicos a vaciar de cada obra es la siguiente: $10000 m^3$ en Alicante, $30000 m^3$ en Valencia y $10000 m^3$ en Castellón. Por otra parte, la capacidad actual de cada vertedero es la siguiente: $5000 m^3$ en Morella, $10000 m^3$ en Utiel, $20000 m^3$ en Requena y $25000 m^3$ en Pedreguer. Teniendo en cuenta que los trayectos indicados en el mapa son los únicos posibles, se trata de obtener la cantidad de m^3 a transportar desde cada obra a cada vertedero de manera que el coste total del transporte sea mínimo, supuesto que el coste de transportar un metro cúbico de tierra es proporcional al número de km recorridos.

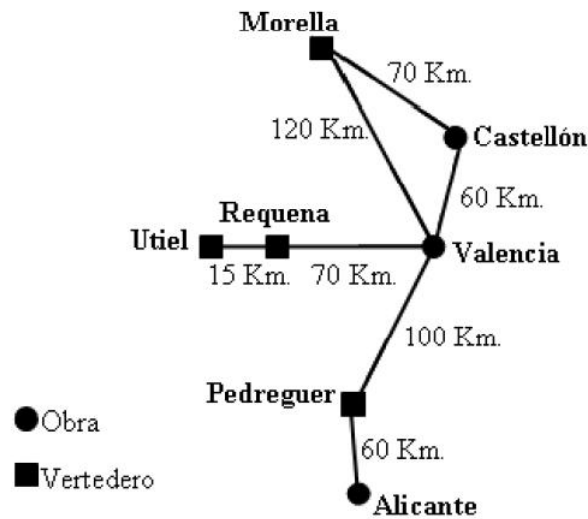
Solución Obtenemos en primer lugar la tabla de distancias en Km entre las obras y los vertederos, Tabla 6, las cuales utilizaremos como costes en nuestro problema del transporte. Para saber el coste real del problema bastaría multiplicar nuestro coste por el coste unitario (desconocido en el enunciado) de transportar un metro cúbico de tierra a lo largo de un Km. Para resolver el problema del:

Tabla 6: Tiempos en horas.

	Morella	Utiel	Requena	Pedreguer
Alicante	280	245	230	60
Valencia	120	85	70	100
Castell'on	70	145	130	160

transporte es necesario que coincida la suma de la oferta con la suma de la demanda. Como en este caso hay más demanda que oferta ya que la capacidad de los vertederos es $60000 m^3$ mientras que sólo vamos a vaciar $50000 m^3$, para buscar el equilibrio supondremos una obra ficticia con un volumen de $10000 m^3$ y con coste de transporte cero a todos los vertederos (lo

Figura 2.1: Mapa A.



transportado por esta obra supondría el volumen de cada vertedero que no se rellena). Si representamos por x_{ij} la cantidad de metros cúbicos que se transporta desde la obra $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ al vertedero $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, entonces el problema de programación lineal planteado es:

$$\begin{aligned}
 \min & 280x_{11} + 245x_{12} + 230x_{13} + 60x_{14} \\
 & +120x_{21} + 85x_{22} + 70x_{23} + 100x_{24} \\
 & +70x_{31} + 145x_{32} + 130x_{33} + 160x_{34}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{sa } & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 10000 \\
 & +x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30000 \\
 & +x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10000 \\
 & +x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 10000 \text{ (obra ficticia)} \\
 & +x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 5000 \\
 & +x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 10000 \\
 & +x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 20000 \\
 & +x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 25000
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$x_{ij} \geq 0; \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}; j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

En primer lugar se necesita la obtención de la solución posible básica inicial, la cual vamos a obtener por el método más sencillo existente, el de la esquina noroeste, que se ilustra en la Figura 3.2.

El transporte es un problema de programación lineal donde el algoritmo del simplex se aplica sobre un formato de tabla especial, véase Tabla 7, en la cual las filas se corresponden con las obras, las columnas con los vertederos, los elementos de la última columna son los m^3 a vaciar en cada obra, los de la última fila los m^3 que pueden asumir los vertederos, en cada celda (i, j) .

Figura 2.1:

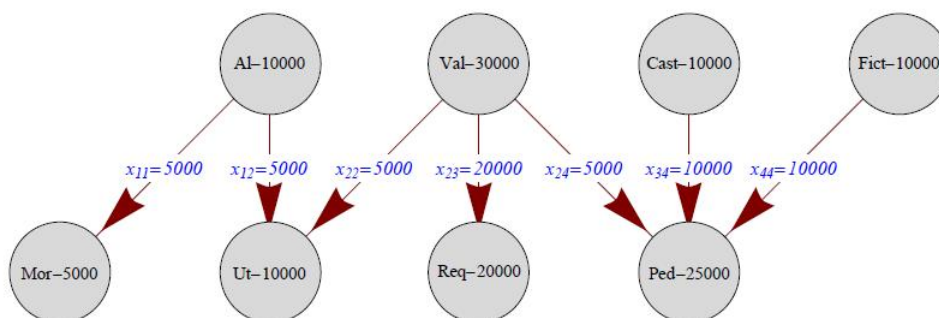


Tabla 7: Situación inicial.

280		245		230	0	60	-200	10000
5000		5000						
120	0	85		70		100		30000
		5000		20000		5000		
70	-110	145	0	130	0	160		10000
5000						10000		
0	-20	0	15	0	30	0		10000
						10000		
5000		10000		20000		25000		60000

El número de tamaño mayor es la cantidad x_{xj} transportada de la obra i al vertedero j (si la variable es básica), el número pequeño, en cursiva, es la distancia entre la obra i y el vertedero j , el número pequeño, en negrita, es el coste reducido de la variable (si es no básica). Nótese que para obtener la solución básica inicial, se han realizado las siguientes operaciones de pivotación de la matriz A, asociada al sistema 2.6.

$$F'_1 = F_1 - F_5; F'_2 = F_2 - (F_6 + F_7); F'_8 = F_8 - (F_2 + F_3 + F_4), \quad (2.7)$$

Dejando el resto de las filas invariantes, obteniéndose, teniendo en consideración sólo las variables básicas, la nueva matriz,

$$(2.8) \quad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{34} & x_{44} & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para conseguir que B , la matriz básica, sea la identidad, no tenemos más que reordenar las columnas de la manera siguiente: $x_{12}, x_{24}, x_{34}, x_{44}, x_{11}, x_{22}, x_{23}$, obteniéndose la nueva matriz $A'_j = (I_7 | N)$, donde I_7 es la matriz identidad de orden 7 y N es la matriz no básica. Entonces, los costes reducidos \bar{c}_{ij} , de las variables no básicas x_{ij} , serán,

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - c_B N'_p$$

donde N'_p es la columna de la matriz N' correspondiente a la variable no básica x_{ij} . Obsérvese que para calcular la correspondiente N'_p hay que realizar las correspondientes operaciones de pivotación (7). Así por ejemplo, los costos reducidos correspondientes a la primera fila de la Tabla 7, vienen dados por:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{13} &= 230 - (245, 100, 160, 0, 280, 85, 70)(1, 0, 0, 0, 0, , -1, 1)^t = 0 \\ \bar{c}_{14} &= 60 - (245, 100, 160, 0, 280, 85, 70)(1, 1, 0, 0, 0, , -1, 0)^t = -200\end{aligned}$$

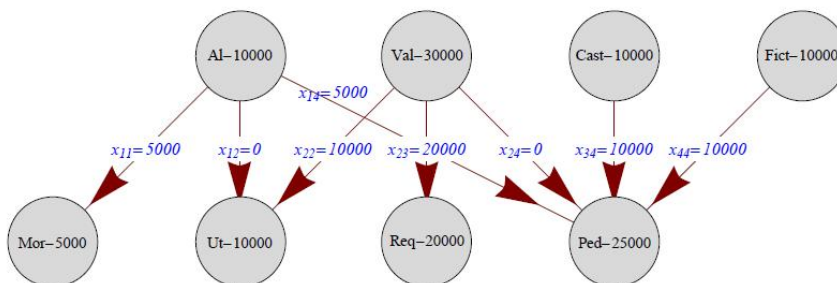
La Tabla 7 muestra, pues, la solución posible básica dada por el método de la esquina noroeste con los costes reducidos de las variables básicas ya calculados. El menor coste reducido vale -200 , luego entra en la variable x_{14} en la base,

(2.9)

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} x_{12} & x_{24} & x_{34} & x_{44} & x_{11} & x_{22} & x_{23} & x_{14} & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10000 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20000 \end{array} \right)$$

pasando a valer $\min\{x_{12}, x_{24}\} = 5000$, luego, redistribuyendo los flujos, sale de la base x_{12} . Ver figura 3.3.

Figura 2.2: Redistribución de los flujos



Nótese que x_{24} también pasa a valer cero, pero la dejamos como variable básica para, precisamente, mantener una base completa, ya que el número de elementos de la base es número

de obras más el número de vertederos menos uno. O sea, 7. El hecho de que una variable básica valga cero es muy peligroso en el algoritmo del simplex (solución degenerada), ya que podría dar lugar a un bucle sin fin, que afortunadamente no va a ser nuestro caso. La Tabla 8 muestra la solución actual. El menor coste reducido vale -310, luego entra la variable x_{31} en la base, pasando a valer $\min\{x_{11}, x_{34}\}=5000$, luego redistribuyendo los flujos, sale de la base x_{11} . La Tabla 9 muestra la solución actual. Puesto que todos los costes reducidos son no negativos, ya tenemos la solución óptima al problema del transporte: $10000 m^3$ de Alicante a Pedreguer,

Tabla 8: Primera iteración

280		245	200	230	200	60		10000
5000						5000		
120	-200	85		70		100		30000
		10000		20000				
70	-310	145	0	130	0	160		10000
5000						5000		
0	-220	0	15	0	30	0		10000
						10000		
5000		10000		20000		25000		60000

$10000 m^3$ de Valencia a Utiel, $20000 m^3$ de Valencia a Requena, $5000 m^3$, de Castellón a Morella y $5000 m^3$ de Castellón a Pedreguer, con coste total igual a 4000000 por el coste unitario (desconocido en el enunciado) de transportar un m^3 de tierra a lo largo de un Km.

Tabla 9: Segunda iteración

280		245	200	230	200	60		10000
						10000		
120	110	85		70		100		30000
		10000		20000				
70		145	0	130	0	160		10000
5000						5000		
0	90	0	15	0	30	0		10000
						10000		
5000		10000		20000		25000		60000

que existen muchas técnicas para obtener una solución posible básica inicial en el problema del transporte y que, una técnica más *avariciosa* que la esquina noroeste, daría un menor coste inicial y, previsiblemente menos iteraciones en el algoritmo del simplex. A título de curiosidad, si hubiéramos usado la técnica conocida como *del coste mínimo que queda* que, como su nombre indica, envía todo lo que puede buscando por orden el coste más en obra y sumidero, la solución inicial sería:

1. $x_{44}=10000$ a coste unitario 0 (en caso de empate se elige aquella opción por la que se puede enviar más y, en caso de nuevo empate, aquella en la que hay más oferta y más demanda). Se vacía la obra ficticia.
2. $x_{14}=10000$ a coste unitario 60. Se vacía la obra de Alicante.
3. $x_{22}=20000$ a coste unitario 70. Se llena el vertedero de Requena.

4. $x_{31}=5000$ a coste unitario 70. Se llena el vertedero de Morella
5. $x_{22}=10000$ a coste unitario 85. Se llena el vertedero de Utiel y se vacía la obra de Valencia.
6. $x_{34}=5000$ a coste unitario 160. Se vacía la obra de Castellón y se llena el vertedero de Pedreguer.

Como se puede comprobar, esta técnica nos ha dado la solución óptima directamente, pero ello no quiere decir que nos evitemos hacer alguna iteración del simplex, pues hay que añadir una variable con coste cero para formar la base (lo que implica una solución degenerada). Si elegimos x_{14} , por lo visto en la última tabla, al calcular los costes reducidos pararíamos, pero si elegimos otra variable como básica, es posible que no se detectara la optimalidad directamente.

2.2. Programación lineal entera

2.2.1. Aplicación 3

Una empresa promotora compró en su día un solar en las afueras de una gran ciudad, en el que puede construir $20000 m^2$ de techo edificable, deseando como estudio previo, conocer, a grosso modo, el máximo beneficio que podría obtener con esta promoción. Las condiciones con las que cuenta para este estudio son las siguientes:

1. La empresa está dispuesta a invertir un máximo de 29 millones de euros en la promoción.
2. Se construirán viviendas tipo de 1, 2 y 3 dormitorios, con una superficie de 55, 75 y $90 m^2$ respectivamente, con unos costes de construcción estimados de 80000, 110000 y 130000 euros respectivamente (costes proporcionados por la empresa constructora con la que trabaja habitualmente), y con unos beneficios netos tras su venta de 60000, 80000 y 100000 euros respectivamente, una vez estudiados los precios de mercado en esa zona.
3. Un estudio previo de la demanda en esa ciudad, arroja que un 37% de los potenciales compradores preferiría una vivienda con 3 dormitorios, un 48%, con dos dormitorios, y sólo un 15% preferiría una vivienda de un dormitorio. Con estos datos, y buscando optimizar el beneficio, supuesto que se venda toda la promoción, la empresa acepta una horquilla de construcción de $\pm 10\%$, respecto de los resultados de la encuesta para las viviendas de 3 y 2 dormitorios, y de un $\pm 5\%$ para las de un dormitorio.

Solución Sea x_i con $i \in \{1, 2, 3\}$ la variable que denota el número de viviendas de i dormitorios construidas. Este problema nos pide calcular los valores de x_i tales que la función de tres variables $60000x_1 + 80000x_2 + 100000x_3$ alcance el máximo, siempre que los valores x_i cumplan las restricciones impuestas en el enunciado del problema. Estas restricciones son:

1. De superficie máxima: $55x_1 + 75x_2 + 90x_3 \leq 20000$.
2. De coste total: $80000x_1 + 110000x_2 + 130000x_3 \leq 29000000$.
3. De porcentaje de viviendas de 1 dormitorio:
 $x_1 \geq 0,1(x_1 + x_2 + x_3)$ y $x_1 \leq 0,2(x_1 + x_2 + x_3)$.

4. De porcentaje de viviendas de 2 dormitorios:
 $x_2 \geq 0,38(x_1 + x_2 + x_3)$ y $x_2 \leq 0,58(x_1 + x_2 + x_3)$.
5. De porcentaje de viviendas de 3 dormitorios:
 $x_3 \geq 0,27(x_1 + x_2 + x_3)$ y $x_3 \leq 0,47(x_1 + x_2 + x_3)$.
6. Obviamente, las variables han de ser enteras y no negativas.

Tenemos un problema de programación lineal entera cuya formulación es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } 60000x_1 + 80000x_2 + 10000x_3 \\
 & \text{sa:} \\
 & 55x_1 + 75x_2 + 90x_3 \leq 20000 \\
 & 80000x_1 + 110000x_2 + 130000x_3 \leq 29000000 \\
 & 9x_1 - x_2 - x_3 \geq 0 \\
 & 8x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 0 \\
 & -38x_1 + 62x_2 - 38x_3 \geq 0 \\
 & -58x_1 + 42x_2 - 58x_3 \leq 0 \\
 & -27x_1 - 27x_2 - 73x_3 \geq 0 \\
 & -47x_1 - 47x_2 + 53x_3 \leq 0 \\
 & x_1, x_2, x_3 \text{ enteras.}
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Estamos ante el típico problema de programación lineal entera aparentemente sencillo (sólo tres variables) que no podríamos resolver sin ayuda de un programa informático, so pena de dedicar muchas horas a su resolución con un cálculo engorroso lleno de decimales, y por tanto con una probabilidad muy alta de errar en el resultado final. La causa es que al aplicar el algoritmo del simplex al problema consistente en relajar las condiciones de integridad de las variables, la solución óptima resultante no sale entera, y por tanto debemos acudir a un procedimiento de ramificación y acotación. Ver Figura 2.4. El algoritmo del simplex, tal y como se aplica en el problema 1, realiza 5 iteraciones para resolver el problema inicial (relajando las condiciones de integridad de las variables) y da como solución $x_1 = 37859$, $x_2 = 959095$, $x_3 = 1186249$. En el método de ramificación y acotación, según el orden elegido por nosotros se ha de aplicar 23 veces el algoritmo del simplex, siendo una solución entera óptima $x_1 = 36$; $x_2 = 98$; $x_3 = 118$ con un beneficio de 21800000 euros.

Nótese que en el proceso de ramificación y acotación aparece otra solución óptima al problema:

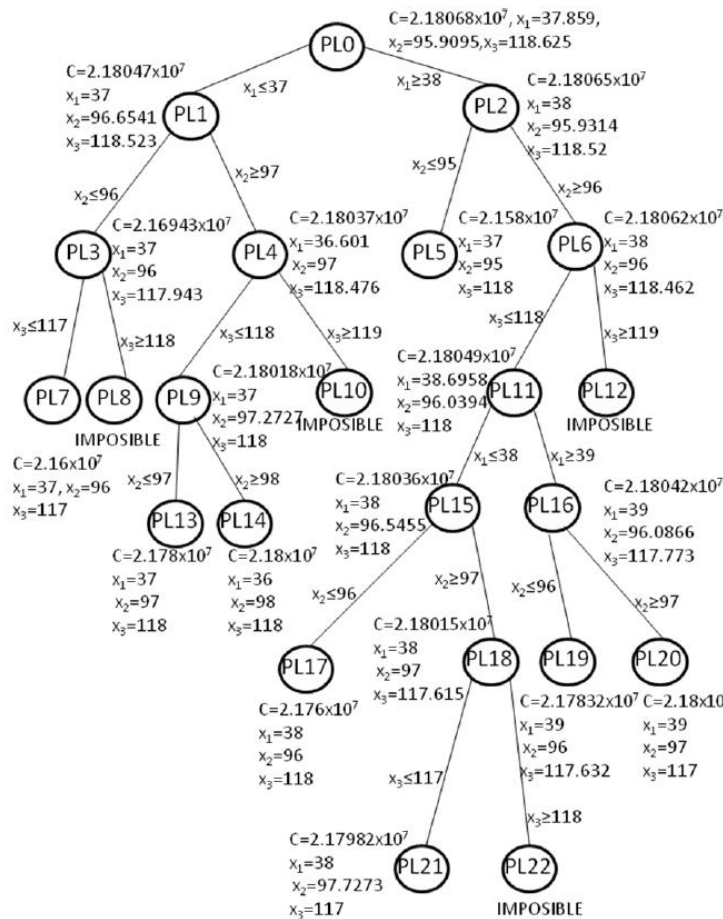
$$x_1 = 39; x_2 = 97; x_3 = 117$$

Una forma acertada de resolver el problema directamente es con la función Maximize del paquete de cálculo simbólico Mathematica (o con el paquete Solver de Excel, o con el paquete Linear and Integer Programming de WinQSB, etc...). Como comentario a la solución obtenida,

si sustituimos estos valores en el lado izquierdo de las dos primeras restricciones, comprobamos que se gastan exactamente los 29 millones de euros de máximo presupuesto de la empresa y sólo se dejan de edificar $50m^2$ de los 20000. Es decir, si se mantiene la solución, ya no se puede construir ninguna vivienda más de ningún tipo aunque se dispusiera de más dinero.

Por otro lado, el porcentaje de viviendas a construir de 1 dormitorio sería del 14,28 %, el de 2 dormitorios del 38,89 % y el de tres dormitorios del 46,83 %. Se construye prácticamente el mínimo porcentaje establecido para viviendas de dos dormitorios y el máximo establecido para viviendas de tres dormitorios. Esto es de esperar ya que el coste por m^2 de las viviendas de tres dormitorios es el más barato y al mismo tiempo el beneficio es mayor por m^2 , mientras que en las viviendas de dos dormitorios pasa todo lo contrario.

Figura 2.3: Proceso de ramificación acotación..



Como anexo presentamos la gráfica del proceso de ramificación y acotación, (ver Figura 3.4), donde PLO es el problema inicial relajando la condición de integridad de las variables el orden de resolución de los sucesivos problemas viene dado por el índice i de PL_i , en cada rama ponemos la desigualdad que se añade al problema anterior, y al lado de cada nodo representando un problema, ponemos la solución al problema con su coste C.

Recordemos que si un problema tiene solución no entera, da lugar a dos nuevos problemas eligiendo una variable no entera de la solución y metiendo como nueva restricción, en un problema que esa variable es menor o igual que la parte entera por defecto de su valor en la solución, y en el otro problema que esa variable es mayor o igual que la parte entera por exceso de su valor en la solución. Además, como estamos maximizando, un problema PL_i no daría lugar a dos nuevos problemas en los tres casos siguientes:

1. La solución de PL_i es entera ($PL5, PL7, PL13, PL14, PL17$ y $PL20$).
2. PL_i no tiene solución ($PL8, PL10, PL12$ y $PL22$).
3. La solución de PL_i no es entera pero su coste es peor (menor en este caso) que el de la mejor solución entera encontrada hasta el momento ($PL19$ y $PL21$).

Tras detectar que el problema $PL22$ no tiene solución, no queda ningún problema por resolver y por tanto la solución óptima es la solución entera con mayor coste encontrada. En este caso, hemos encontrado dos soluciones óptimas; la de $PL14$ que es la que proporciona Mathematica con la función Maximize, y la de $PL20$.

Capítulo 3

No Linealidad 1

Resolución de ecuaciones y sistemas no lineales.

Problema 3.1.1 Una instalación eléctrica de iluminación de emergencia en una nave industrial en construcción une dos puntos A y B separados por una longitud de 1500 metros. En un momento dado se detecta una avería en un punto intermedio de la instalación atribuyéndose la misma a una puesta a tierra accidental. Es decir, en un punto desconocido de la instalación, C , el conductor ha sufrido una avería apareciendo entre dicho punto y tierra una resistencia desconocida.

El Ingeniero de Edificación necesita determinar la situación exacta de la avería con el fin de evitar un posible contacto directo de alguno de los operarios, así como para volver a restituir el servicio de iluminación. También pretende saber el riesgo eléctrico potencial para el operario de la zona sabiendo que los potenciales de A y B cuando hay avería son de 100 y 25 voltios, respectivamente.

Para ello decide operar del siguiente modo: pone B a tierra y mide la resistencia entre A y tierra obteniéndose $R_A = 6 \Omega$. A continuación, se pone A a tierra, y se obtiene otro valor de resistencia $R_B = 8 \Omega$. Además sabe que el conductor es de cobre, cuya resistividad es $0,0171 \text{ Ohm} \cdot \text{mm}^2 / \text{m}$ y de sección 3 mm^2 .

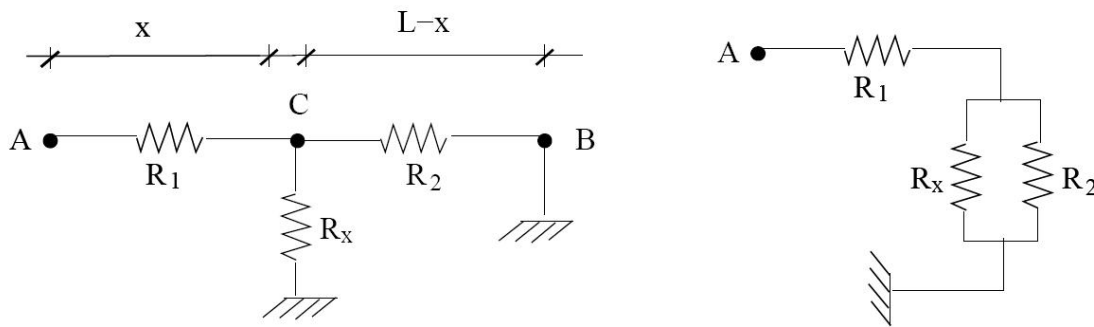
Solución

Paso 1. Localización de la avería.

En primer lugar se debe calcular la situación de la avería. Sea x la distancia existente entre el punto A y el punto desconocido de la avería C .

Cuando se pone el punto B a tierra se obtiene el circuito eléctrico simplificado, mostrado en la figura 3.1.

Figura 3.1: Circuito con el punto B a tierra.



donde R_1 y R_2 se obtienen a partir de la expresión de resistencia eléctrica de un conductor, que depende de la resistividad, longitud y sección del mismo:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

La resistencia vista desde A es $R_A = 6 \Omega$ y se obtiene asociando R_x y R_2 en paralelo y posteriormente en serie con R_1 :

Si R_{eq} es el resultado de operar el paralelo de R_2 y R_x , se tiene:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_x} = \frac{R_x + R_2}{R_2 \cdot R_x}$$

Aplicando la expresión comentada anteriormente $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$ se tiene:

$$R_{eq} = \frac{R_2 \cdot R_x}{R_2 + R_x} = \frac{\rho \cdot \frac{L-x}{S} \cdot R_x}{\rho \cdot \frac{L-x}{S} + R_x}$$

Al asociarlo en serie con R_1 , la resistencia total es de 6Ω :

$$R_1 + R_{eq} = R_A = 6 \Omega$$

Así,

$$\rho \cdot \frac{x}{S} + \frac{\rho \cdot \frac{L-x}{S} \cdot R_x}{\rho \cdot \frac{L-x}{S} + R_x} = 6 \Omega$$

La siguiente acción del Ingeniero de Edificación es repetir cálculos poniendo A a tierra. Ver figura 3.2.

Ahora estarán en paralelo R_1 y R_x y el equivalente de estas dos estará en serie con R_2 . Ver figura 3.3.

Figura 3.2: Circuito con el punto A a tierra.

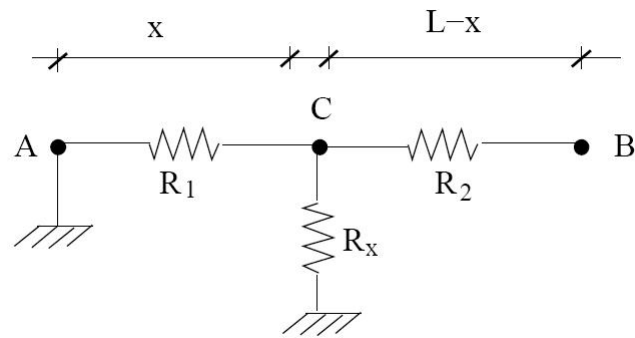
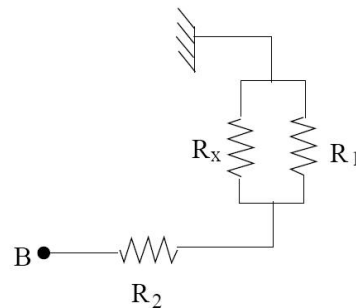


Figura 3.3: Circuito con el punto A a tierra simplificado.



Entonces,

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_x}{R_1 + R_x} = \frac{\rho \cdot \frac{x}{S} \cdot R_x}{\rho \cdot \frac{x}{S} + R_x}$$

y $R_2 + R_{eq} = R_B = 8\Omega$ construyen la segunda ecuación, con la que se podrá resolver el sistema.

$$\rho \cdot \frac{L-x}{S} + \frac{\rho \cdot \frac{x}{S} \cdot R_x}{\rho \cdot \frac{x}{S} + R_x} = 8\Omega$$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{x}{S} + \frac{\rho \cdot \frac{L-x}{S} \cdot R_x}{\rho \cdot \frac{L-x}{S} + R_x} = 6\Omega \\ \rho \cdot \frac{L-x}{S} + \frac{\rho \cdot \frac{x}{S} \cdot R_x}{\rho \cdot \frac{x}{S} + R_x} = 8\Omega \end{cases} = \begin{cases} \rho^2 \frac{Lx}{S^2} - \rho^2 \frac{x^2}{S^2} + R_x \rho \frac{x}{S} + \frac{\rho L}{S} - R_x \rho \frac{x}{S} = 6(\rho \cdot \frac{L-x}{S} + R_x) \\ \rho^2 \frac{Lx}{S^2} - \rho^2 \frac{x^2}{S^2} + \frac{\rho L}{S} R_x - R_x \rho \frac{x}{S} + R_x \rho \frac{x}{S} = 8(\rho \frac{x}{S} + R_x) \end{cases}$$

Es equivalente a:

$$= \begin{cases} \rho^2 \frac{Lx}{S^2} - \rho^2 \frac{x^2}{S^2} + \frac{\rho L}{S} & = 8(\rho \frac{x}{S} + R_x) \\ 6(\rho \frac{L-x}{S} + R_x) & = 8(\rho \frac{x}{S} + R_x) \end{cases}$$

De la segunda ecuación se despeja R_x obteniéndose:

$$\begin{aligned}
 R_x &= \frac{1}{2} \left(6 \frac{\rho L}{S} - 14 \frac{\rho x}{S} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(6 \frac{0,0171 \cdot 1500}{3} - 14 \frac{0,0171 x}{3} \right) \\
 &= 25,65 - 0,0399x
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera ecuación se tiene:

$$\rho^2 \frac{Lx}{S^2} - \rho^2 \frac{x^2}{S^2} + \frac{\rho L}{S} = 8 \left(\rho \frac{x}{S} + R_x \right)$$

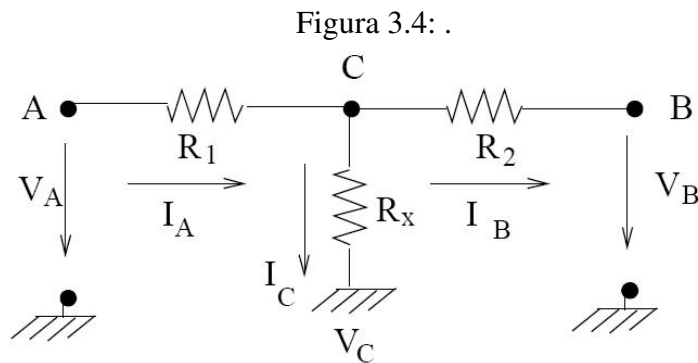
$$0,0171^2 \frac{1500x}{3^2} - 0,0171^2 \frac{x^2}{3^2} + \frac{0,0171 \cdot 1500}{3} (25,65 - 0,0399x) = 8 \left(0,0171 \frac{x}{3} + 25,65 - 0,0399x \right)$$

$$0,0000324 x^2 + 0,01881x - 14,1075 = 0$$

La ecuación de segundo grado tiene dos soluciones reales, una positiva y otra negativa. Como x mide una longitud, el problema solamente tiene una solución válida, $x = 430,609$, la positiva. El Ingeniero de Edificación deduce que la avería está aproximadamente a 431 metros del punto A.

Paso 2. *Evaluación del riesgo.*

Además el Ingeniero de Edificación tiene que saber el riesgo eléctrico potencial, conociendo las tensiones en los puntos A y B. Ver figuras 3.4 y 3.5.



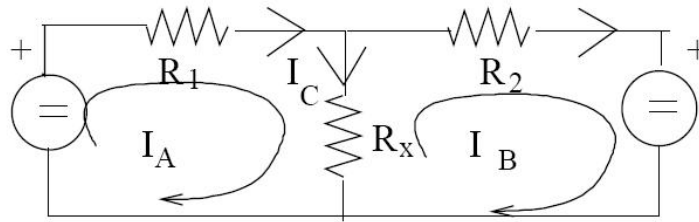
El circuito equivalente es,

Se necesitan los valores de las resistencias:

$$R_1 = \rho \frac{x}{S} = 0,0171 \frac{430,609}{3} \Omega = 2,454 \Omega$$

$$R_2 = \rho \frac{L-x}{S} = 0,0171 \frac{1500-430,609}{3} \Omega = 6,095 \Omega$$

Figura 3.5: .



$$R_x = \quad = 25,65 - 0,0399x \quad = 8,469 \Omega$$

Hay que determinar la tensión en el punto C mediante la ley de Ohm.

$$V_C = R_x \cdot I_C = R_x (I_A - I_B)$$

Las intensidades se obtienen resolviendo el circuito.

Para encontrar las ecuaciones del sistema se utiliza el método de las mallas. El circuito está compuesto por dos mallas, cada malla tiene una corriente de malla propia que es la incógnita I_j y a su vez genera una ecuación lineal.

En un circuito sencillo como el presente el método de cálculo de mallas se simplifica de la siguiente forma: en cada malla se multiplica la intensidad de malla por todos los elementos pasivos que constituyen dicha malla y se restan los elementos compartidos con otras mallas por la intensidad de la malla correspondiente. Si el sentido de la fuente de tensión coincide con el de la intensidad de la malla, la expresión se iguala al voltaje. En caso contrario, se iguala al opuesto del voltaje.

Se obtienen las ecuaciones de malla siguientes:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_x) I_A - (R_x) I_B &= 100 \\ -(R_x) I_A + (R_x + R_2) I_B &= -25 \end{aligned}$$

Se resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} 10,923 \cdot I_A - 8,469 \cdot I_B &= 100 \\ -8,469 \cdot I_A + 14,564 \cdot I_B &= -25 \end{aligned}$$

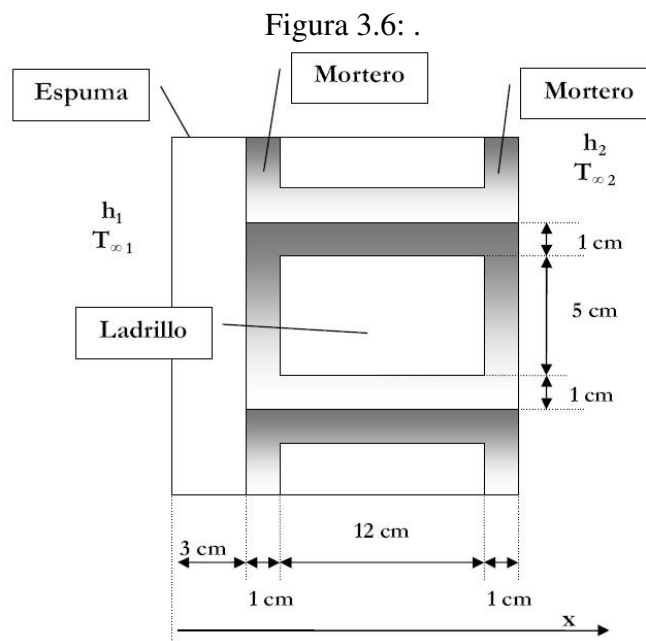
$$I_A = 14,248 \text{ A}; I_B = 6,569 \text{ A.}$$

Entonces,

$$V_C = R_x (I_A - I_B) = 8,469 (14,248 - 6,569) \text{ V} = 65,033 \text{ V.}$$

Se trata de una tensión potencialmente peligrosa en caso de contacto directo, dado que supera la tensión de seguridad de 24 voltios. Con lo cual la recomendación es señalar la zona y establecer las medidas de protección oportunas hasta que se subsane el peligro potencial de contacto directo.

Problema 3.1.2 Un muro medianero de 3 m de alto y 5 m de ancho consta de ladrillos de 5×12 cm de sección transversal horizontal ($k = 0,72^\circ$, $W/m \cdot ^\circ C$) separados por capas de mortero ($k = 0,22W/m \cdot ^\circ C$) de 2 cm de espesor. También se tienen capas de mortero de 2 cm de espesor sobre cada lado del ladrillo y una espuma rígida ($k = 0,026W/m \cdot ^\circ C$) de 3 cm de espesor sobre el lado interior de la pared, como se muestra en la figura 3.6. Las temperaturas dentro y fuera son de $20^\circ C$ y $-10^\circ C$, respectivamente, y los coeficientes de transferencia de calor por convección sobre los lados interior y exterior son $h_1 = 10W/m^2 \cdot ^\circ C$ y $h_2 = 25W/m^2 \cdot ^\circ C$, respectivamente. Si se supone transferencia de calor unidimensional y se descarta la radiación, determine la velocidad de transferencia de calor a través de la pared. ¿Existe alguna identidad matemática que le pueda ayudar en el cálculo de las temperaturas en los planos verticales de separación de los distintos materiales del muro?.



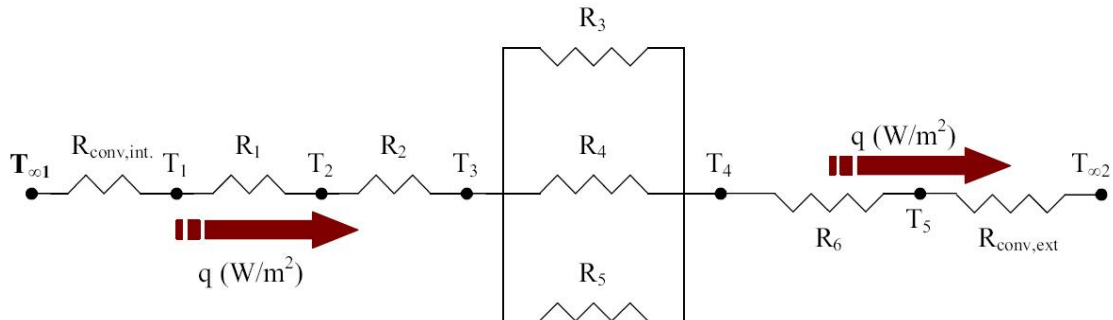
Solución

Paso 1. Se supone

- 1 Régimen estacionario: Las propiedades no cambian con el tiempo.
- 2 Transferencia unidimensional de calor en la dirección x .
- 3 Conductividades térmicas constantes.
- 4 Transferencia de calor por radiación despreciable.

Existe un patrón en la construcción de esta pared que se repite cada 7 cm de distancia en la dirección vertical. No hay variación en la dirección horizontal. Por lo tanto, se considera una porción de 1 metro de profundidad y 0,07 metros de alto de la pared, ya que es representativa de toda ella.

El circuito de resistencias térmicas se forma desde la temperatura ambiental interior del muro (conocida) hasta la temperatura ambiental exterior (también conocida). Se observa cómo todas las resistencias térmicas, excepto el ladrillo y las dos capas de mortero que tiene encima y debajo, se encuentran en serie. La red de resistencias térmicas se representa a continuación.



Cada una de estas resistencias térmicas se evalúa como sigue,

$$R_{conv,int.} = \frac{1}{Ah_{int}} = \frac{1}{10W/(m^2 \cdot ^\circ C) \cdot 0,07 \cdot 1m^2} = 1,43 \text{ } ^\circ C/W$$

$$R_1 = \frac{\Delta x_1}{k_1 A} = \frac{0,03m}{0,026W/(m \cdot ^\circ C) \cdot 0,07 \cdot 1m^2} = 16,48 \text{ } ^\circ C/W$$

$$R_2 = R_6 = \frac{\Delta x_2}{k_2 A} = \frac{0,01m}{0,22W/(m \cdot ^\circ C) \cdot 0,07 \cdot 1m^2} = 0,65 \text{ } ^\circ C/W$$

$$R_3 = R_5 = \frac{\Delta x_3}{k_3 A_3} = \frac{0,12m}{0,22W/(m \cdot ^\circ C) \cdot 0,01 \cdot 1m^2} = 54,54 \text{ } ^\circ C/W$$

$$R_4 = \frac{\Delta x_4}{k_4 A_4} = \frac{0,12m}{0,72W/(m \cdot ^\circ C) \cdot 0,05 \cdot 1m^2} = 3,33 \text{ } ^\circ C/W$$

$$R_{conv,ext.} = \frac{1}{Ah_{ext}} = \frac{1}{25W/(m^2 \cdot ^\circ C) \cdot 0,07 \cdot 1m^2} = 0,57 \text{ } ^\circ C/W$$

Las tres resistencias R_3 , R_4 y R_5 se encuentran en paralelo, y su resistencia equivalente se determina a partir de:

$$\frac{1}{R_{equivalente}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = 0,34 \text{ W}/^\circ C \implies R_{equivalente} = 2,94 \text{ } ^\circ C/W$$

Paso 2. Una vez hallada la resistencia equivalente se halla la total del circuito por simple suma de todas (ya es un circuito en serie):

$$R_{TOTAL} = \sum_i R_i = 22,72 \text{ } ^\circ C/W$$

Entonces la velocidad de transferencia de calor estacionaria a través de la pared queda:

$$q = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{TOTAL}} = \frac{(20 - (-10))^\circ C}{22,72^\circ C/W} = 1,32 \text{ W}$$

para un área superficial de $0,07m^2$. Es decir, que en $1m^2$ de superficie se transmitirán 18,86 W. A través de la pared completa se transmitirán.

$$q_{TOTAL} = 18,86 \frac{W}{m^2} 15m^2 = 282,86 W$$

Una vez hallado el calor, para calcular las temperaturas en cualquier plano de separación de distintos materiales de la pared se puede aplicar la siguiente identidad matemática:

<p>Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = c$ entonces $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n} = c$</p> <p>Por ejemplo,</p> <p>Si $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{5}{20} = 0,25$ entonces $\frac{1+2+5}{4+8+20} = 0,25$</p>

Así pues, si aplicamos esta identidad al cálculo de las temperaturas mediante la expresión del flujo calorífico total, se tiene:

$$q = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{conv,int}} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_3 - T_4}{R_{equivalente}} = \frac{T_4 - T_5}{R_6} = \frac{T_5 - T_{\infty 2}}{R_{conv,ext.}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{TOTAL}}$$

Donde podemos hallar la temperatura en cualquier plano que separe dos medios distintos con las correlaciones anteriores.

Capítulo 4

No Linealidad 2

Resolución de ecuaciones y sistemas no lineales.

Problema 4.1.1 En una obra el coordinador de seguridad ha detectado un fallo en el sistema de puesta en marcha de la grúa en la obra. Dicho sistema es accionado por un pulsador sin dejar al operario controlar la grúa. Se ha propuesto una solución, la cual se basa en insertar un circuito RC que actúe a modo de temporizador, y que durante unos 20 segundos active la sirena de encendido de la maquinaria. Para ello se utiliza un condensador de $15 \mu\text{F}$. Se pretende calcular cuál ha de ser la resistencia necesaria para lograr el retardo requerido.

Solución Para la resolución del problema han de plantearse las ecuaciones que controlan el proceso de carga de un condensador.

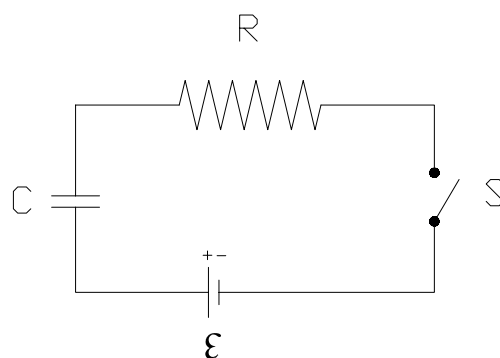


Figura 4.1: Circuito RC serie. Se cierra el interruptor en $t = 0$ para cargar el condensador.

Paso 1. Descripción general de un circuito RC en serie.

Un circuito serie RC, constituido por un condensador, una resistencia dispuestos en serie y una batería. Cuando cerramos el interruptor S (t_0), el condensador comienza a cargarse, aumentando su tensión exponencialmente hasta alcanzar su valor máximo ε_0 (de t_0 a t_1), que coincide con el valor de la f.e.m. ε de la fuente. Si a continuación, en el mismo instante de abrir S (t_2) se hará corto circuito en la red RC, el valor de ε_0 no desaparecería instantáneamente, sino que iría disminuyendo de forma exponencial hasta hacerse cero (de t_2 a t_3). (véase Figura 4.1)

El tiempo efectivo de carga del condensador dependerá de los valores de la resistencia y el condensador. Esta propiedad puede aprovecharse para fabricar un temporizador sencillo, ya que nuestro circuito puede conectarse por ejemplo a un relé que conecte la maquinaria a partir de cierta carga del condensador, como es el objetivo de este problema.

Paso 2. *Planteamiento de las ecuaciones diferenciales implicadas.*

En el circuito de la Figura 4,1, la suma de las diferencias de potencial en el condensador y la resistencia es igual a la fuerza electromotriz del generador:

$$\varepsilon = V_C + V_R, \quad (4.1)$$

por lo que recordando la definición de capacidad

$$C = \frac{q}{V} \quad (4.2)$$

y la ley de Ohm aplicable a la resistencia

$$V = iR. \quad (4.3)$$

obtenemos:

$$\varepsilon = \frac{q}{C} + iR. \quad (4.4)$$

Teniendo en cuenta que la intensidad se define a través de la expresión

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (4.5)$$

la ecuación 2.4 se puede escribir:

$$\varepsilon = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}, \quad (4.6)$$

que se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea. Para resolverla se hace una separación de variables en la forma que se indica a continuación:

$$\varepsilon C - q = RC \frac{dq}{dt}, \quad (4.7)$$

y reorganizando términos:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dq}{\varepsilon C - q}. \quad (4.8)$$

A continuación se integran ambos miembros de la ecuación entre el instante inicial $t = 0$ (para el cual $q(0) = 0$) y un tiempo cualquiera t ($q(t) = Q$):

$$\int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_0^Q \frac{dq}{\varepsilon C - q}, \quad (4.9)$$

y se resuelve la integral:

$$\left[\frac{t}{RC} \right]_0^t = [-\ln(\varepsilon C - q)]_0^Q. \quad (4.10)$$

A continuación se sustituyen los valores y se opera:

$$\frac{t}{RC} - 0 = -\ln(\varepsilon C - Q) + \ln(\varepsilon C) \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{\varepsilon C - Q}{\varepsilon C}\right) \quad (4.11)$$

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon C - Q}{\varepsilon C}, \quad (4.12)$$

y finalmente reorganizando términos se obtiene el valor de la carga en función del tiempo:

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-t/RC}). \quad (4.13)$$

Paso 3. Interpretación de los resultados.

La ecuación (4.13) esta representada por la carga acumulada en el condensador en cada instante de tiempo. Cuando el condensador acumule la carga máxima posible en función de su capacidad, la corriente dejará de circular y no habrá a partir de ese momento caída de potencial en la resistencia. Por lo tanto, la diferencia de potencial en el condensador se iguala con la fuerza electromotriz $\varepsilon = V_R = Q_{\max}/C$, y la carga máxima en el condensador es:

$$Q_{\max} = \varepsilon C. \quad (4.14)$$

La ecuación (4.13) se puede ahora reescribir como:

$$Q(t) = Q_{\max}(1 - e^{-t/RC}). \quad (4.15)$$

La representación gráfica de la función (4.15) tiene la forma siguiente:

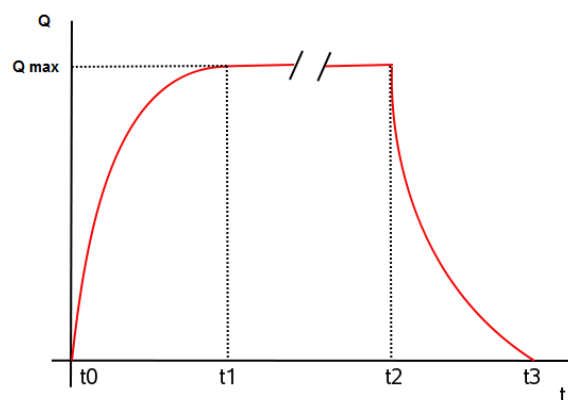


Figura 4.2: Carga del condensador en función del tiempo en un circuito RC serie.

Como puede verse en la Figura 4.2, la carga máxima se adquiere para $t \rightarrow \infty$. El parámetro que controla la rapidez de carga de un condensador es el exponente del número e , que depende del factor RC . Este factor se suele definir como *constante de tiempo* del circuito τ . Transcurrido un tiempo $t = \tau = RC$, la carga del circuito es del 63 %, como se comprueba:

$$Q(\tau) = Q_{\max}(1 - e^{-\tau/RC}) = Q_{\max}(1 - e^{-1}) = 0,63Q_{\max}. \quad (4.16)$$

En la práctica, se considera el tiempo τ como un tiempo orientativo de la carga del condensador, ya que el condensador está prácticamente cargado al máximo mucho antes que para $t \rightarrow \infty$ debido al comportamiento asintótico de la función (véase Figura 4.2).

Paso 4. Cálculo final.

Como ya se ha comentado anteriormente, el valor $t = \tau$ es un dato orientativo del tiempo de carga de un condensador en un circuito RC. Si se necesita un retardo de unos 20 segundos para conectar la maquinaria y se utiliza un condensador de $15 \mu\text{F}$, el valor de la resistencia que hay que conectar en serie es:

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{20}{15 \cdot 10^{-6}} = 1,33 \text{ M}\Omega \quad (4.17)$$

OBSERVACIONES:

- Una ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea se puede resolver integrando tras separar variables.
- En un circuito RC, el factor de tiempo $\tau = RC$ nos orienta acerca del tiempo de carga del condensador.

Problema 4.1.2 Se ha parado la cimentación de una obra porque se han encontrado indicios de restos arqueológicos. Para determinar la antigüedad de los restos se utiliza un espectrógrafo de masas para medir la concentración de carbono-14 de las mismas. El modelo usado es el Dempster que suministra una diferencia de potencial de 1000 V y un campo magnético de 0,2 T. Las muestras registradas por la placa fotográfica muestra diversos picos entre ellos los siguientes: en primer lugar, con un porcentaje del 2,13 % del total de carbono, se registra con un radio igual a 9,11 cm. El segundo, con porcentaje igual a 96,89 % con radio de 6,44 cm. Y el tercer pico, con $5 \cdot 10^{-11}$ % a $R = 8,21$ cm.

Solución El espectrómetro o espectrógrafo de masas es un artefacto que permite analizar con gran precisión la composición de diferentes elementos químicos e isótopos atómicos, separando los núcleos atómicos en función de su relación carga-masa (z/m). Puede utilizarse para identificar los diferentes elementos químicos que forman un compuesto, o para determinar el contenido isotópico de diferentes elementos en un mismo compuesto. En el tipo Dempster los cationes del átomo que se quiere estudiar se aceleran entre las láminas L1 y L2, entre las que existe una diferencia de potencial. Después los átomos pasa a través de un selector de velocidades

compuesto por un campo eléctrico y otro magnético perpendiculares, por lo que sólo pasan los iones que se mueven a una determinada velocidad. Luego los iones se encuentran con un campo magnético B perpendicular al plano de la figura y describen una trayectoria circular. Como la razón v/qB es la misma para todos los iones, los radios son directamente proporcionales a las masas de los iones. Los iones más pesados describen circunferencias de mayor radio. Como los iones de masas diferentes describen trayectorias distintas, inciden sobre la placa fotográfica o sobre otro detector, en posiciones distintas. La masa del ión se puede calcular a partir de su velocidad y del radio de la semicircunferencia descrita.

Paso 1. *Cálculos en el espectrógrafo.*

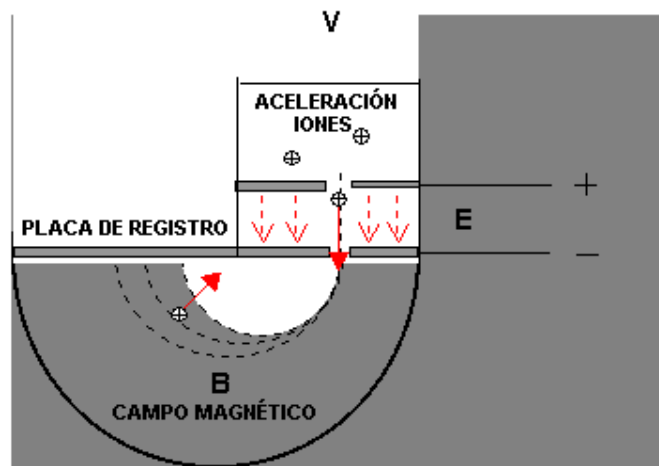


Figura 4.3: Representación esquemática de un espectrógrafo de masas.

Los iones se aceleran mediante una diferencia de potencial V en el selector de velocidades de la Figura 4.3. De este modo adquieren una energía cinética a partir de la cual se puede calcular la velocidad con la que llegan a la región con campo magnético:

$$qV = \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}, \quad (4.18)$$

En el espectrógrafo se forman todos los iones con una carga positiva, por lo que la diferencia de velocidad se debe únicamente a la distinta masa de los iones.

En la región del campo magnético de la Figura 4.3 es perpendicular al vector $q\vec{v}$ produce sobre los iones una fuerza centrípeta que les hace adquirir un movimiento circular uniforme. El radio se puede calcular mediante:

$$|\vec{F}| = |q\vec{v} \times \vec{B}| = |q\vec{v}||\vec{B}| \sin 90^\circ = m\frac{v^2}{R} \implies R = \frac{mv}{qB}. \quad (4.19)$$

Si se sustituye la ecuación (4.18) en la ecuación (4.19) se obtiene una expresión del radio que depende de la masa de los iones:

$$R = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV}{q}} \quad (4.20)$$

La masa de los iones en el Sistema Internacional se relaciona con la masa en unidades de masa atómica a través del número de avogadro N_A :

$$m(\text{kg}) = \frac{A \cdot 10^{-3}}{N_A}, \quad (4.21)$$

donde A es el número másico del ión. Conocido el radio se puede obtener el número másico del ión correspondiente. Para ello se obtiene la masa de la ecuación (4.20) y se iguala con la expresión (4.21):

$$\frac{R^2 B^2 q}{2V} = \frac{A \cdot 10^{-3}}{N_A} \implies A = \frac{q B^2 R^2 N_A}{2 \cdot 10^{-3} V}. \quad (4.22)$$

Paso 2. *Aplicación de la ley de desintegración radiactiva.*

La ley de desintegración radiactiva dice que el ritmo de desintegraciones es proporcional al número de núcleos radiactivos que quedan en la muestra (N). La constante de proporcionalidad λ recibe el nombre de constante de desintegración radiactiva, que tiene un valor de $\lambda = 12,1 \cdot 10^{-5} \text{ años}^{-1}$ para el carbono-14. Conocido λ , esta ley de desintegración radiactiva se escribe:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \quad (4.23)$$

De la expresión anterior podemos resolverla por separación de variables:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \implies \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt. \quad (4.24)$$

Integrando obtenemos:

$$\log \frac{N}{N_0} = -\lambda t \implies N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (4.25)$$

El intercambio producido por los seres vivos del carbono-14 con la atmósfera de CO_2 es constante durante su vida, siendo el mismo que el de la atmósfera. Una vez el organismo muere el intercambio no se produce con lo que el porcentaje de carbono 14 va disminuyendo. Se puede determinar el tiempo transcurrido gracias a la ley de desintegración radiactiva dada por la ecuación (4.25). Un ejemplo, la concentración de núcleos radiactivos se ha reducido en un factor n respecto a la concentración inicial, el tiempo transcurrido será:

$$N = \frac{N_0}{n} = N_0 e^{-\lambda t} \implies e^{\lambda t} = n \implies t = \frac{\ln n}{\lambda}. \quad (4.26)$$

Paso 3. Resultado.

Según el enunciado los picos se registran a $R_1=9,11$ cm, $R_2=6,44$ cm y $R_3=8,21$ cm. Utilizando la ecuación (4.22) se puede saber cuál de ellos se corresponde con el carbono-14:

$$A(R_1) = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2^2 \cdot 0,0911^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} \simeq 16 \text{ u},$$

$$A = \frac{qB^2R^2N_A}{2 \cdot 10^{-3}V} \Rightarrow A(R_2) = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2^2 \cdot 0,0644^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} \simeq 8 \text{ u}, \quad (4.27)$$

$$A(R_3) = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2^2 \cdot 0,0821^2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} \simeq 13 \text{ u}.$$

Las masas atómicas coinciden por tanto con los isótopos del carbono, coincidiendo además los porcentajes esperados para el carbono-12 y el carbono-13, que son conocidos e iguales al 96,89 % y 2,13 %, respectivamente. El porcentaje conocido para el carbono-14 en un ser vivo es aproximadamente igual al $1,2 \cdot 10^{-10}$ %. Puesto que la cantidad medida en el espectrógrafo es justo la mitad, se aplica la ecuación (4.26) con $n = 2$ y se obtiene:

$$t = \frac{\ln n}{\lambda} \frac{\ln 2}{12,1 \cdot 10^{-5}} = 5728,5 \text{ años}, \quad (4.28)$$

que es el resultado buscado: la edad de la muestra arqueológica.

OBSERVACIONES

- En el proceso de desintegración, el carbono-14 se desintegra en nitrógeno-14. Antes de analizar la muestra hay que separar el nitrógeno, porque si lo hubiera se confundiría con el pico del carbono-14 recogido en la placa fotográfica.
- El espectrógrafo de masas es un aparato que permite separar los átomos que contiene una muestra a partir de la aplicación de un campo eléctrico y un campo magnético.
- La ley de desintegración radiactiva se obtiene a partir de una ecuación diferencial de primer grado homogénea.

Problema 4.1.3 En una obra de varias viviendas disponen de una batería para emergencias de 10 V y 3Ω de resistencia interna para conectar el sistema de alumbrado, el cual, esta compuesto por lámparas LED en serie con resistencias para disminuir la intensidad en el circuito. El efecto neto es como si dicha batería estuviera conectada a una carga de 350Ω . Durante una inspección diaria del equipo se detecta una bajada de tensión a 10 V, dicha incidencia es comunicada al ingeniero eléctrico que dirige dicho equipo. Se pretende calcular como se debe hacer la recarga de la vieja batería sin que el sistema de iluminación sufra daño.

Solución Una solución para la carga de una batería en corriente continua puede conectarse a ésta otra batería, que debe tener mayor fuerza electromotriz que la batería descargada. El ingeniero puede tomar una batería nueva, que tendrá la misma resistencia interna pero podrá proporcionar una tensión estimada de 12 V.

Paso 1. *Diseño del circuito eléctrico.*

Para que una batería se pueda cargar es necesario conectar ambos terminales positivos de las baterías entre sí. El esquema eléctrico sería el que se muestra en la Figura 4.4.

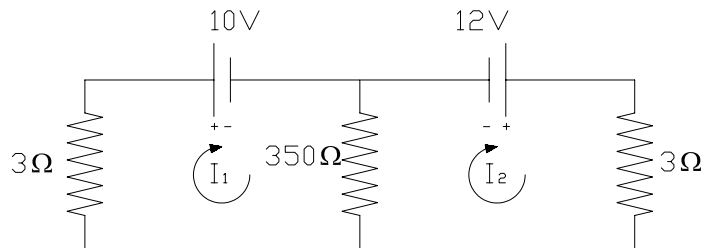


Figura 4.4: Circuito de carga de la batería de 10 V mediante conexión con otra de 12 V.

Para resolver el circuito vamos a aplicar las leyes de Kirchhoff mediante el análisis de las dos intensidades de malla I_1 e I_2 mediante el método matricial.

Paso 2. *Estudio del circuito.*

La matriz de resistencias en este circuito es la siguiente:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 353 & -350 \\ -350 & 353 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

y las ecuaciones correspondientes se obtienen a partir de:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 353 & -350 \\ -350 & 353 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Paso 3. *Resolución de los datos.*

La ecuación dada por (4.31) puede resolverse utilizando la Regla de Cramer. Así, se tiene para la intensidad en la malla 1:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -350 \\ 12 & 353 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 353 & -350 \\ -350 & 353 \end{vmatrix}} = \frac{670}{2109} = 0,318 \text{ A}, \quad (4.32)$$

y para la malla 2:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 353 & -10 \\ -350 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 353 & -350 \\ -350 & 353 \end{vmatrix}} = \frac{736}{2109} = 0,349 \text{ A}. \quad (4.33)$$

Para averiguar la corriente por la rama central se ha de tener en cuenta que por la misma pasan las dos corrientes de malla según los sentidos indicados en la Figura 4.4 ambos positivos. Con lo que la corriente en la resistencia de 350Ω , que representa el sistema de alumbrado de emergencia constituido por lámparas LED, tiene el valor:

$$I = I_2 - I_1 = 0,349 - 0,318 = 0,031 \text{ A} = 31 \text{ mA}, \quad (4.34)$$

siendo su sentido hacia la derecha según la Figura 4.4.

Paso 4. *Interpretación de los resultados.*

Aunque en el análisis de este circuito se han tomado las fuerzas electromotrices constantes, habría una pequeña variación al irse cargando la batería desgastada. Sin embargo, esta variación no afectaría mucho al cálculo, ya que se trataba de averiguar si sería factible este procedimiento de recarga, y si el sistema de iluminación sufriría algún daño. Como se ha puesto de manifiesto en la resolución del problema, es totalmente factible la recarga de la batería, ya que con la batería nueva se fuerza a la corriente a pasar por la batería desgastada en el sentido de carga de la misma (es decir, del borne positivo al negativo por el interior de la misma). Además, una intensidad de $\simeq 0,3 \text{ A}$ es suficiente para recargarla en un tiempo no demasiado largo. En cuanto a las lámparas LED, se trata de dispositivos por los que no puede pasar una intensidad elevada. El sistema estaría pues a salvo, ya que por la rama central la intensidad se reduce hasta los 31 mA, intensidad que podrá ser soportada sin dañar los elementos de que consta este sistema.

OBSERVACIONES

- Para recargar una batería puede ponerse otra en paralelo de mayor fuerza electromotriz conectando los bornes de la misma polaridad entre sí.
- Las leyes de Kirchhoff permiten calcular las magnitudes eléctricas en circuitos con más de una malla.

Problema 4.1.4 En una nave industrial se va realiza la puesta a tierra de la instalación eléctrica. Para ello es necesario saber la resistividad eléctrica del terreno ya que de ella depende del carácter geológico del terreno. Para dicho trabajo se utiliza el método sencillo de Frank Wenner el cual se van a utilizar únicamente dos electrodos semiesféricos de 4 cm de radio enterrados y

conectados a una diferencia de potencia de 24 V, midiendo la corriente generada mediante un amperímetro, que da un valor de 40mA a partir de estos datos.

Solución El método de Frank Wenner consiste en tiene como objeto medir la resistividad del suelo, para ello insertamos los 4 electrodos en el suelo. Los cuatro electrodos se colocan en línea recta, a una misma profundidad de penetración y a igual separación entre ellos, las mediciones de resistividad dependerán de la distancia entre electrodos y de la resistividad del terreno. El principio básico de este método es la inyección de una corriente directa o de baja frecuencia a través de la tierra entre dos electrodos internos mientras que el potencial que aparece se mide entre dos electrodos exteriores. La razón entre potencial y la intensidad es conocida como la resistencia aparente. A partir de este procedimiento vamos a poder realizar un procedimiento similar utilizando sólo con dos electrodos.

Paso 1. *Planteamiento inicial.*

Si se sitúan dos electrodos en la tierra bastante alejados para poder considerarlos que en las proximidades de ambos la distribución de la corriente es como si estuvieran aislados, y que en cada punto la densidad de corriente es la suma de las densidades debidas a los dos electrodos por separado (véase Figura 4.5). Mediante esta aproximación se puede encontrar una relación entre la intensidad medida y la diferencia de potencial establecida a través de la resistividad. Se hace también la aproximación de que la resistividad del cable y los electrodos es despreciable.

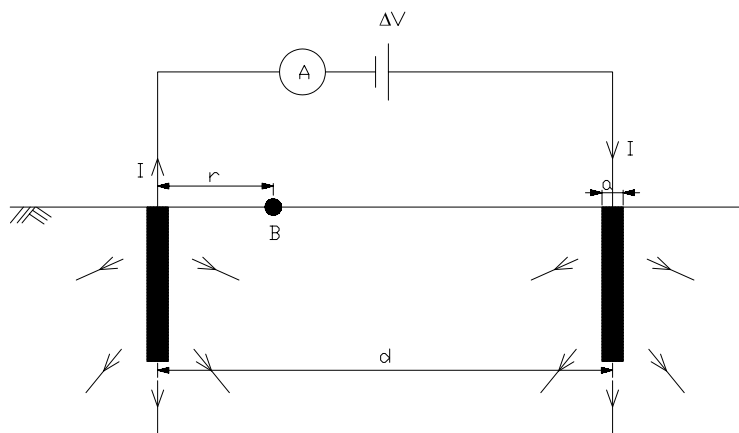


Figura 4.5: Sistema de electrodos para medir la resistividad del terreno.

Paso 2. *Cálculo de la relación entre la diferencia de potencial y la intensidad.*

Para encontrar la relación entre la diferencia de potencial y la intensidad en el caso propuesto, se puede empezar por calcular la densidad de corriente en un punto tal como el punto B

de la Figura 4.5. En dicho punto la densidad de corriente que llega es debida a la corriente que atraviesa los dos electrodos. Además, la dirección y sentido de las dos densidades de corriente en dicho punto coinciden, por lo que se pueden sumar sus módulos. Teniendo en cuenta que la corriente se propaga a través de superficies semiesféricas los valores de dichas densidades son:

$$J_1 = \frac{I}{2\pi c^2} \quad \text{y} \quad J_2 = \frac{I}{2\pi (d-c)^2}. \quad (4.35)$$

La diferencia de potencial entre los electrodos se relaciona con el campo eléctrico mediante la expresión:

$$\Delta V = \int_a^{d-a} \vec{E} d\vec{l}. \quad (4.36)$$

Teniendo en cuenta la relación entre el campo eléctrico y la conductividad $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ y la relación entre resistividad y conductividad $\sigma = 1/\rho$, se puede reescribir la ecuación (4.36) como:

$$\Delta V = \int_a^{d-a} \rho \vec{J} d\vec{l}. \quad (4.37)$$

Puesto que el vector $d\vec{l}$ a lo largo de la superficie del terreno es paralelo a \vec{J} y sigue la dirección dada por r , se puede escribir la expresión anterior como:

$$\Delta V = \int_a^{d-a} \rho J dc = \int_a^{d-a} \rho (J_1 + J_2) dc. \quad (4.38)$$

Se sustituyen ahora los valores dados por las expresiones (4.35):

$$\Delta V = \frac{\rho I}{2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{(d-c)^2} \right) dc. \quad (4.39)$$

Se integra la expresión anterior y se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{-1}{c} + \frac{1}{d-c} \right]_a^{d-a} \\ &= \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{-1}{d-a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \right) = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{d-a} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Se puede simplificar la ecuación (4.40) considerando que los electrodos están muy separados entre sí ($d \gg a$), y en este caso $1/(d-a) \ll 1/a$. Es decir, $\frac{1}{a} - \frac{1}{d-a} \simeq \frac{1}{a}$. Se tiene finalmente que:

$$\Delta V = \frac{\rho I}{\pi a} \quad (4.41)$$

Paso 3. Resultado final.

Se despeja la resistividad en la ecuación (4.41) y se obtiene el siguiente valor final aproximado:

$$\rho = \frac{\pi a \Delta V}{I} = \frac{4 \cdot 10^{-2} \pi 24}{40 \cdot 10^{-3}} = 75,4 \Omega \text{m} \quad (4.42)$$

OBSERVACIONES

- La relación entre la diferencia de potencial y la intensidad de la corriente eléctrica es proporcional a la resistividad.
- El método de Frank Wenner permite calcular la resistividad del terreno, a tener en cuenta al realizar la toma de tierra de una instalación eléctrica.

Problema 4.1.5 En la realización de una decoración se necesita colocar un juego de espejos esféricos para hacer un juego de luces en un museo. Para ello primero se necesita saber el centro de masas de los espejos para posteriormente poderlos acoplar. Para el calculo se decide por uno teorico. A continuación se va a exponer el procedimiento para calcularlo.

Solución Para realizar el juego de espejos primero tenemos que conocer la geometría de uno de ellos. Muchos telescopios de aficionados a la astronomía utilizan como espejo primario (el que recoge la luz) un espejo esférico cuya misión es focalizar la luz en el foco del ocular. El esquema de uno de estos espejos sería el siguiente:

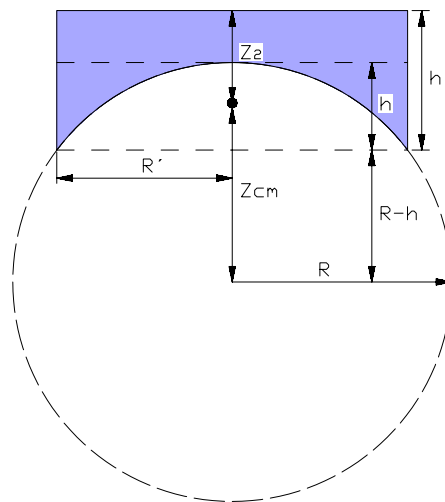


Figura 4.6: Corte transversal de un espejo esférico, con indicación de la notación utilizada en el texto.

Paso 1. *Planteamiento inicial.*

En la figura esquematizada del espejo primario se puede ver en la Figura 4.6. Se trata de un cilindro macizo de altura h' y radio R' , con un hueco con forma esférica de radio R' y altura h (que procede de una esfera de radio R). Para calcular el centro de masas del conjunto se ha de empezar por averiguar la altura del centro de masas del hueco de la esfera (z_{cm}). Una vez que se tiene dicho centro de masas, puede hacerse la composición total como si de un sistema de dos partículas se tratara.

Paso 2. *Centro de masas de la diferencia de la esfera.*

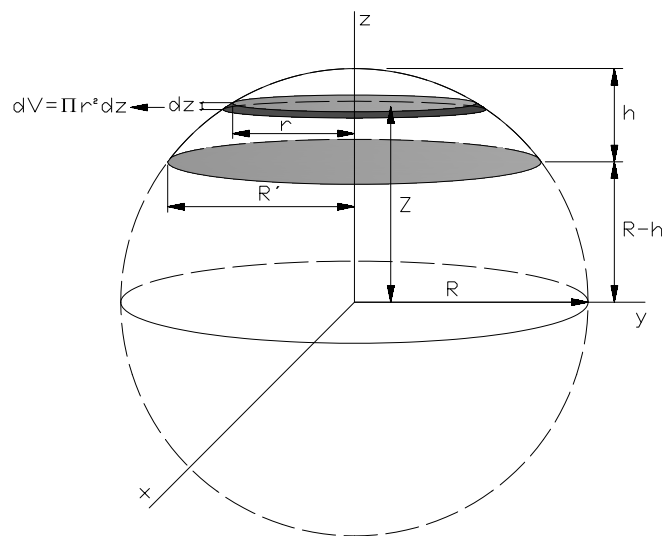


Figura 4.7: Representación de una esfera y nuestro hueco a calcular.

Para realizar el cálculo se va a situar el origen del sistema de referencia en el centro de la esfera a la que pertenece el hueco esférico (véase Figura 4.7). Se puede tomar dV como un disco radio variable r y de altura infinitesimal dz (entre $R - h$ y R), con lo que en la expresión del centro de masas $z_{cm} = \frac{\iiint z dV}{\iiint dV}$ el numerador se calcula como:

$$\begin{aligned}
\iiint z dV &= \int_{R-h}^R z \pi r^2 dz = \int_{R-h}^R z \pi (R^2 - z^2) dz \\
&= \pi R^2 \left[\frac{z^2}{2} \right]_{R-h}^R - \pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_{R-h}^R \\
&= \frac{\pi R^2}{2} [R^2 - (R-h)^2] - \frac{\pi}{4} [R^4 - (R-h)^4] \\
&= \frac{\pi}{4} 2R^2 [R^2 - (R-h)^2] - \frac{\pi}{4} [R^2 + (R-h)^2] [R^2 - (R-h)^2] \\
&= \frac{\pi}{4} [2R^2 - (R^2 + (R-h)^2)] [R^2 - (R-h)^2] \\
&= \frac{\pi}{4} [R^2 - (R-h)^2]^2 = \frac{\pi}{4} [(R+R-h)(R-R-h)]^2 \\
&= \frac{\pi}{4} [-h(2R-h)]^2 = \frac{\pi}{4} h^2 (2R-h)^2,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

y para el denominador, expresión del volumen del hueco:

$$\begin{aligned}
\iiint dV &= \int_{R-h}^R \pi r^2 dz = \int_{R-h}^R \pi (R^2 - z^2) dz = \\
&= \pi R^2 [z]_{R-h}^R - \pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{R-h}^R = \\
&= \pi R^2 [R - (R-h)] - \frac{\pi}{3} [R^3 - (R-h)^3] = \\
&= \pi R^2 h - \frac{\pi}{3} (R^3 - R^3 + 3R^2 h - 3Rh^2 + h^3) = \\
&= \frac{\pi}{3} (3Rh^2 - h^3) = \frac{\pi}{3} h^2 (3R-h).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Sustituyendo en la definición de centro de masas:

$$z_{\text{cm}} = \frac{\frac{\pi}{4} h^2 (2R-h)^2}{\frac{\pi}{3} h^2 (3R-h)} = \frac{3}{4} \frac{(2R-h)^2}{3R-h}. \tag{4.45}$$

Paso 3. Composición del sistema de 2 partículas.

Para un sistema de partículas el cálculo del centro de masas se realiza a través de un sumatorio en lugar de una integral. En el caso propuesto en este problema se puede reemplazar el espejo por un sistema de dos partículas. Una partícula situada en el centro de un cilindro de altura h' y radio R' con la masa equivalente de todo el cilindro, y otra partícula situada en la posición dada por la expresión (4.45), y con la masa que tendría el correspondiente hueco esférico, pero que se considera negativa ya que se trata de un hueco. Se han de expresar las posiciones de ambas 'partículas' en el mismo SR, por lo que habrá que tener cuidado con el hueco esférico, ya que se dedujo su centro de masas para un sistema de referencia en el centro de la esfera a la que pertenece. Para el centro de masas final se puede elegir un sistema de referencia en el centro de la base del espejo (cruz en la Figura 4.6)

- CILINDRO: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = h'/2$, densidad ρ

- CASQUETE: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, densidad ρ . Para calcular la expresión de z_2 se parte de la ecuación (4.45) y se cambia su sistema de referencia al de la base del espejo mediante la expresión (véase Figura 4.6): $z_2 = R - h + h' - z_{\text{cm}}$. Se tiene así que:

$$\begin{aligned} z_2 &= R - h + h' - \frac{3(4R^2 + h^2 - 4Rh)}{12R - 4h} = \\ &= \frac{h^2 - 4Rh + 12Rh' - 4hh'}{12R - 4h}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Paso 4. Resolución final.

Se trata ya únicamente de aplicar la expresión siguiente, para el centro de masas de un sistema de partículas:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (4.47)$$

Si se resuelve la expresión anterior por componentes se obtiene:

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i x_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{x_1 m_1 - x_2 m_2}{m_1 - m_2} = 0, \quad (4.48)$$

ya que $x_1 = x_2 = 0$.

$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i y_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{y_1 m_1 - y_2 m_2}{m_1 - m_2} = 0 \quad (4.49)$$

ya que $y_1 = y_2 = 0$.

$$z_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i z_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{z_1 m_1 - z_2 m_2}{m_1 - m_2}. \quad (4.50)$$

Se ha de calcular previamente m_1 y m_2 en función de la densidad. Para m_2 se tiene en cuenta que el volumen viene dado por la expresión (4.44):

$$m_1 = \rho V_1 = \rho \pi R'^2 h', \quad (4.51)$$

y

$$m_2 = \rho V_2 = \rho \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h). \quad (4.52)$$

En las fórmulas anteriores se han escrito unas ecuaciones con R (radio de la esfera a la que pertenece el hueco) y otras con R' (radio de la base del hueco). Si se tiene en cuenta la relación entre ambos radios, se puede reescribir todo en función de sólo uno de estos parámetros. Esta relación se puede obtener por ejemplo del hecho de que R' es la media proporcional entre los dos segmentos en que se divide al diámetro de la esfera (h y $R - h$). Esta relación es: $R'^2 = (2R - h)h$. Se puede ahora reescribir m_1 como:

$$m_1 = \rho \pi (2R - h) h h'. \quad (4.53)$$

A continuación se calculan los sumandos de la ecuación (4.50):

$$m_1 z_1 = \rho\pi(2R - h)hh' \frac{h'}{2} = \rho\pi h(Rh'^2 - \frac{hh'^2}{2}) \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} m_2 z_2 &= \rho \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) \frac{1}{4} \frac{h^2 - 4Rh + 12Rh' - 4hh'}{3R - h} \\ &= \rho\pi h \frac{h^3 - 4Rh^2 + 12Rhh' - 4h^2h'}{12} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$m_1 - m_2 = \rho\pi(2R - h)hh' - \rho \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) = \rho\pi h [2Rh' - hh' - hR + h^2/3] \quad (4.56)$$

La fórmula final que se obtiene, que servirá para cualquier espejo esférico es la siguiente:

$$\begin{aligned} z_{\text{cm}}(\text{espejo}) &= \frac{Rh'^2 - \frac{hh'^2}{2} - \frac{h^3 - 4Rh^2 + 12Rhh' - 4h^2h'}{12}}{2Rh' - hh' - hR + \frac{4h^2}{12}} = \\ &= \frac{12Rh'^2 - 6hh'^2 + 4Rh^2 - h^3 - 12Rhh' + 4h^2h'}{24Rh' - 12hh' - 12hR + 4h^2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

OBSERVACIONES

- Cuando un cuerpo no tiene un centro geométrico claro es necesario recurrir al cálculo integral para encontrar su centro de masas.
- Si se tiene un sistema de partículas, el centro de masas del mismo se obtiene mediante un sumatorio.
- Para calcular el centro de masas de un sólido con un hueco, se considera negativa la densidad de dicho hueco.

Problema 4.1.6 Se necesita saber el centro de gravedad de un telescopio newtoniano de 20 cm para colocarlo en una decoración de un centro de entretenimiento colgado de un sólo punto. Para ello, se puede realizar de forma aproximada pero para este proyecto se necesitan realizar los cálculos para que haya el menor error posible, conocemos que el telescopio está compuesto por: (veáse Figura 4.8):

- *Espejo primario (pieza 1)*: vidrio de espesor $h'=1,7$ cm al que le falta un hueco esférico de altura en su centro $h=0,8$ cm. Este espejo tiene una distancia focal $f =146$ cm, por lo que su radio de curvatura es, según las leyes de la óptica: $R = 2f =292$ cm. Densidad $\rho_2 =2,2$ g/cm³.
- *Espejo secundario con soporte (pieza 2)*: cilindro de radio $R_3 = 4$ cm y altura $L_3 = 1,6$ cm, situado a una distancia $d_3 =16$ cm de la boca del telescopio. Densidad $\rho =2,2$ g/cm³.
- *Tubo del telescopio (pieza 3)*: tubo hueco de PVC de longitud $L_1=150$ cm, radio exterior $R_1 = 20$ cm y espesor $e_1 = 0,5$ cm. Densidad $\rho_1 =1,2$ g/cm³.

- *Buscador (pieza 4)*: cilindro de radio $R_5 = 3,5$ cm y altura $L_5 = 24$ cm, situado su centro a una distancia $d_5 = 22$ cm de la boca del telescopio. Densidad media $\rho = 0,9$ g/cm³.
- *Ocular con soporte (pieza 5)*: cilindro de radio $R_4 = 4$ cm y altura $L_4 = 15$ cm, situado su centro a una distancia $d_4 = 16$ cm de la boca del telescopio. Densidad media $\rho = 0,9$ g/cm³.

Vamos a determinar la altura sobre el tubo a la que debe situarse el eje del soporte del telescopio

Solución Un telescopio newtoniano usa un espejo primario cóncavo y un espejo secundario de plano diagonal. El espejo primario recoge la luz y la envía al espejo plano secundario, cuya misión es desviar el haz de luz para que pueda ser observado en un lateral del telescopio, donde se sitúa el ocular del mismo (Véase Figura 4.8). Además constan de un buscador que facilita las labores de búsqueda de objetos (parte inferior de la figura):

Paso 1. *Planteamiento inicial.*

El cálculo teórico del centro de masas a lo largo del eje del telescopio (eje y según la Figura 4.8) se hará como el de un sistema de 5 partículas con las masas de los espejos primario y secundario, del tubo, buscador y ocular .

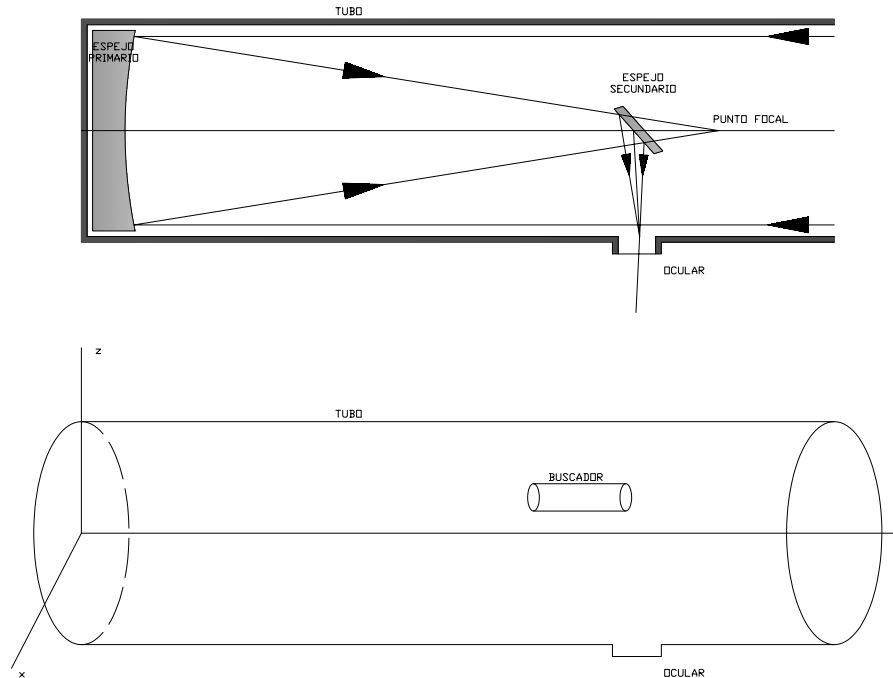


Figura 4.8: Figura esquemática de un telescopio newtoniano.

Los centros de masas de los espejos primario y secundario, del tubo, buscador y ocular se encuentran en el centro geométrico de los cuerpos correspondientes, ya que se puede consid-

erar que todos tienen simetría cilíndrica. Sólo es necesario calcular previamente el del espejo primario (véase problema 4) para poder reemplazar el sistema completo por uno de cinco partículas equivalentes a los cinco componentes básicos del telescopio. Una vez que se tenga la posición de los cinco centros de masas se aplica la expresión correspondiente para un sistema de partículas:

$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i y_i}{\sum_{i=1}^5 m_i}. \quad (4.58)$$

Sólo es necesario calcular la coordenada y del centro de masas para saber la altura a la que situar el eje del soporte del tubo. Para ello no influyen las coordenadas x y z .

Paso 2. *Posición de los centros de masas y volumen de los componentes.*

El sistema de referencia que se va a utilizar aquí tiene origen en el centro geométrico de la base del telescopio. En este sistema de referencia los centros de masas de cada una de las figuras que lo componen estarían en las posiciones indicadas a continuación:

- *Espejo primario:* se aplican las expresiones obtenidas en el Problema 4 (4.57 y 4.56, respectivamente):

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{12Rh'^2 - 6hh'^2 + 4h^2R - h^3 - 12Rhh' + 4h^2h'}{24Rh' - 12hh' - 12hR + 4h^2} = \\ &= \frac{6098,61}{9102,40} = 0,67 \text{ cm}^3, \end{aligned} \quad (4.59)$$

y para el volumen:

$$V_2 = \pi h [2Rh' - hh' - hR + h^2/3] = 1905,20 \text{ cm}^3. \quad (4.60)$$

- *espejo secundario:* $y_3 = L_1 - d_3 = 150 - 16 = 134$ cm. Volumen:

$$V_3 = \pi L_3 R_3^2 = 80,42 \text{ cm}^3. \quad (4.61)$$

- *Tubo del telescopio:* $y_1 = L_1/2 = 150/2 = 75$ cm. Volumen:

$$V_1 = \pi L_1 (R_1^2 - (R_1 - e)^2) = \pi L_1 (2R_1 e - e^2) = 9306,97 \text{ cm}^3. \quad (4.62)$$

- *Buscador:* $y_5 = L_1 - d_5 = 150 - 22 = 128$ cm. Volumen:

$$V_5 = \pi L_5 R_5^2 = 923,63 \text{ cm}^3. \quad (4.63)$$

- *Ocular con soporte:* $y_4 = L_1 - d_4 = 150 - 16 = 134$ cm. Volumen:

$$V_4 = \pi L_4 R_4^2 = 753,98 \text{ cm}^3. \quad (4.64)$$

Cuadro 4.1: Medidas de los componentes del telescopio.

PIEZA	ρ_i (g/cm ³)	V_i (cm ³)	y_i (cm)	$\rho_i V_i$ (g)	$\rho_i V_i y_i$ (g·cm)
Espejo 1°	2,2	1905,20	0,67	4191,44	2808,26
Espejo 2°	2,2	80,42	134	176,92	23707,82
Tubo	1,2	9306,97	75	11168,36	837627,30
Buscador	0,9	923,63	128	831,27	106402,18
Ocular	0,9	753,98	134	678,58	90929,99
				$\sum \rho_i V_i =$ 17046,58 g	$\sum \rho_i V_i y_i =$ 1061475,54 g·cm

Paso 3. *Cálculo como sistema de partículas.*

Toda la información anterior se puede recoger en una tabla (véase cuadro 4), lo cual facilita el cálculo.

El centro de masas se obtiene a partir de la expresión 4.58:

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i y_i}{\sum_{i=1}^5 m_i} = \frac{\sum_{i=1}^5 \rho_i V_i y_i}{\sum_{i=1}^5 \rho_i V_i}. \quad (4.65)$$

Esta expresión equivale a dividir el sumatorio de la última columna de la tabla por el de la penúltima columna:

$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^5 \rho_i V_i y_i}{\sum_{i=1}^5 \rho_i V_i} = \frac{1061475,54}{17046,58} = 62,27 \text{ cm} \quad (4.66)$$

Por lo tanto, el eje del soporte del telescopio estará a 62,27 cm de la base del mismo.

OBSERVACIONES

- El centro de masas de una figura con simetría y densidad constante coincide con su centro geométrico.
- Una figura compuesta se puede resolver por composición de los centros de masas de cada una de sus partes, como un sistema de partículas.

Problema 4.1.7 Para la realización de un diseño del soporte de una línea de alta tensión se solicita a un ingeniero que realice un estudio sobre la interacción entre los cables portadores de corriente, entre ellos, cuando se produce un cortocircuito surgen grandes intensidades de corriente generando la aparición de campos electromagnéticos grandes que pueden provocar el movimiento de los cables a gran velocidad lo que puede provocar la rotura de los soportes. Para el cálculo de los soportes primero se debe calcular la magnitud de la fuerza electromagnética para poderlos diseñar adecuadamente. Una vez diseñados se realiza un estudio más detallado. Vamos a determinar la fuerza con el cálculo más sencillo.

Solución En las líneas de alta tensión la longitud de un vano típico (distancia entre dos soportes) varía entre los 50 y 500 m. Los cables se fijan a los soportes mediante cadenas de suspensión en apoyos de acero u hormigón, adoptando la forma de una catenaria, y estando separadas las fases entre sí una distancia que oscila entre 6-8 m (véase Figura 4.9). Si la línea sufre un cortocircuito, la corriente puede alcanzar los 50 kA y producir el llamado 'efecto latigazo'.

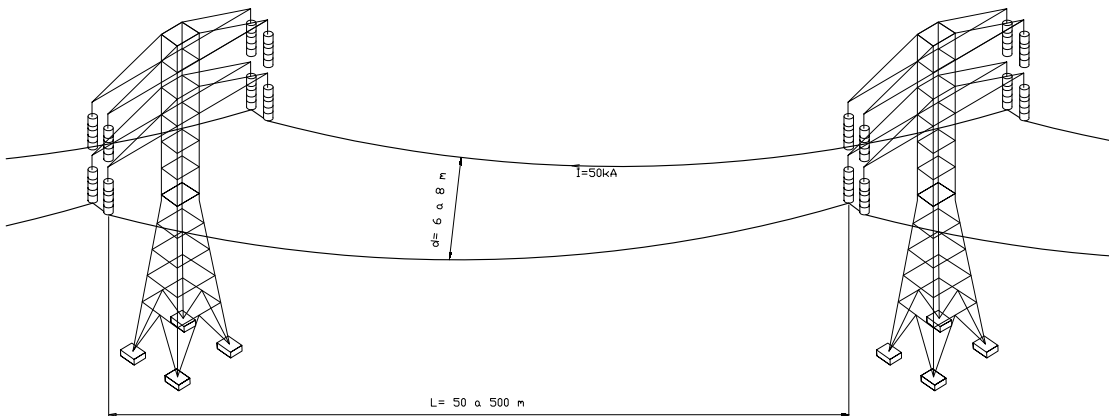


Figura 4.9: Representación del vano de una línea de alta tensión.

Paso 1. *Planteamiento general del problema.*

Se debe calcular el campo magnético generado por uno de los hilos de corriente, y a continuación la fuerza magnética que sufre el otro cable debido al campo magnético generado por el primero. Para simplificar el problema, se han de aproximar las curvas de los cables por corrientes rectilíneas. Este sencillo cálculo dará idea de los órdenes de magnitud de la fuerza magnética.

Paso 2. *Campo magnético generado por una corriente rectilínea.*

Según la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I. \quad (4.67)$$

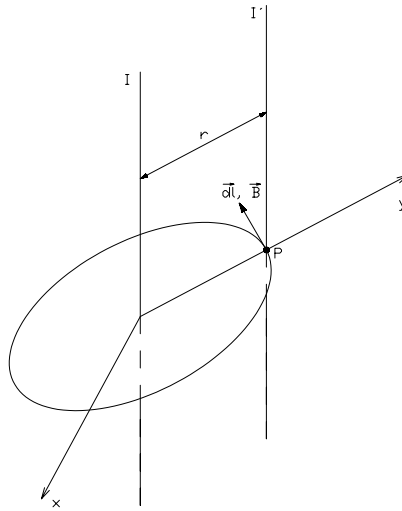


Figura 4.10: Representación del campo magnético en el punto 'P' debido a la presencia de la corriente I . También se representa el sentido de $I' d\vec{l}'$.

Para una corriente rectilínea se puede hacer la integral de línea en una circunferencia de radio d con origen en la propia corriente. A lo largo de esta línea \vec{B} y $d\vec{l}$ son paralelos y además por simetría B es constante (véase Figura 4.10). De manera que se puede escribir:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi r, \quad (4.68)$$

por lo tanto,

$$B 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (4.69)$$

Paso 3. Fuerza entre corrientes.

La fuerza magnética sobre una corriente I debida a un campo magnético \vec{B} viene dada por $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$. Si se aplica esta expresión para calcular la fuerza sobre I' debida al campo B creado por I se obtiene (véase Figura 4.10):

$$dF = I' dz B \sin 90^\circ, \quad (4.70)$$

donde se ha tenido en cuenta que $I' dz$ es perpendicular a \vec{B} . Si se incorpora a esta última expresión la ecuación dada por (4.69):

$$dF = I' dz \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad F = \int \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r} dz. \quad (4.71)$$

La integral anterior se calcula para una longitud L de corriente y, teniendo en cuenta que $I = I'$:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi r} \quad (4.72)$$

Paso 4. *Resultado final.*

Si se tiene en cuenta que la corriente de cortocircuito puede alcanzar unos 50 kA, y se sustituye el valor de $\mu_{\text{aire}} \simeq \mu_0$ ($\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$) T m /A:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi} \frac{1}{r} = 500 \frac{L}{r} \quad (4.73)$$

El máximo valor de la fuerza se obtendrá cuando la longitud del vano sea lo mayor posible y la separación entre fases lo menor posible. En este caso se obtiene el resultado máximo para $L=500$ m y $r=6$ m:

$$F = 500 \frac{500}{6} = 41,7 \text{ kN}. \quad (4.74)$$

Por tanto los proyectos que se pueden descartar directamente son aquellos que ofrecen una resistencia en los soportes inferior a 50 kN. El resto habría que estudiarlos más detalladamente.

OBSERVACIONES

- Las corrientes de cortocircuito pueden provocar daños mecánicos en las redes eléctricas, además de incendios.
- Los ingenieros de proyecto deben asegurarse de que los diseños cumplen los requerimientos externos asociados a las corrientes.

Problema 4.1.8 En la construcción de una presa se ha decidido realizar un estudio sobre las bobinas que se están diseñando para su posterior utilización. Para ello se quiere calcular la corriente que pasaría por el dispositivo de las bobinas helmholtz para que el campo magnético sea anule. Se disponen de 160 espiras de 25cm de radio.

Solución Las bobinas de Helmholtz tienen la peculiaridad de conseguir un campo magnético bastante uniforme en la parte interior de la misma. Básicamente consisten en una serie de N espiras de radio R situadas a una distancia R de otra serie de N espiras con el mismo eje que las primeras. Se puede ver una representación con 1 única espira en cada serie en la Figura 4.11.

Paso 1. *Planteamiento general del problema.*

Para resolver este problema hay que calcular primero el campo magnético generado por el sistema de espiras en función de la corriente. Conocido el campo magnético de la Tierra en el punto de estudio, se puede ajustar la corriente en las bobinas para igualar su valor pero con sentido opuesto.

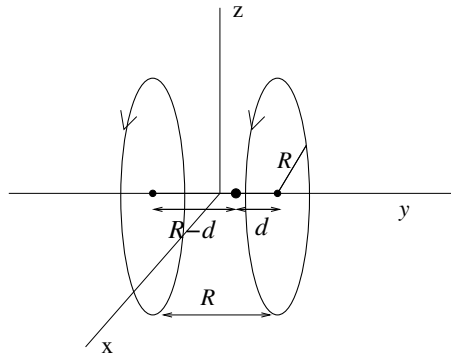


Figura 4.11: Bobina de Helmholtz con una única espira a cada lado.

Paso 2. *Cálculo del campo magnético generado por una espira circular en su eje.*

El campo magnético generado por una corriente I viene dado por la expresión:

$$d\vec{B} = k_m \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}, \quad (4.75)$$

donde $k_m = \mu_0/4\pi = 10^{-7}$ T m/A, y \hat{r} es el unitario en el sentido que va desde el elemento de corriente hasta el punto donde se calcula el campo magnético (ver figura 4.12).

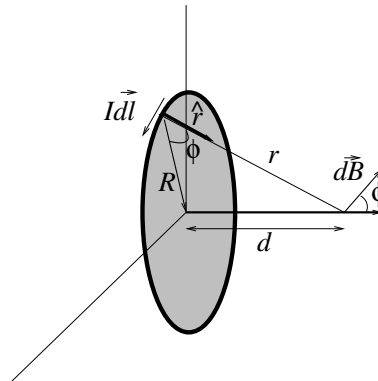


Figura 4.12: Representación gráfica del campo diferencial creado por un elemento diferencial de corriente circular en su eje.

Por la geometría del problema (véase Figura 4.12) sólo es necesario calcular la componente y del campo, pues las proyecciones sobre el plano xz se anulan entre sí. La componente y se calcula entonces como:

$$dB_y = k_m \frac{Idl}{r^2} \cos \phi. \quad (4.76)$$

Se integra la expresión anterior:

$$B_z = k_m \int \frac{Idl}{r^2} \cos \phi = \frac{\mu_0 I \cos \phi}{4\pi r^2} \int dl. \quad (4.77)$$

Si se tiene en cuenta que $r \cos \phi = R$:

$$B_z = \frac{\mu_0 I R}{4\pi r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3}. \quad (4.78)$$

Finalmente, como $r^2 = R^2 + d^2$:

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (4.79)$$

Paso 3. *Cálculo del campo magnético generado por el sistema de bobinas de Helmholtz.*

Dado un sistema de dos bobinas separadas entre sí una distancia R , se puede calcular el campo magnético creado por las mismas en la parte del eje entre ambas espiras. Si en vez de 1 espira cada lado tiene N espiras, sólo habrá que multiplicar el resultado por N .

El campo magnético generado por las dos espiras en su eje común tiene la misma dirección (perpendicular al plano de las espiras) y sentido cuando en las dos espiras el sentido de circulación de la corriente es el mismo. Dicho sentido viene dado por la regla de la mano derecha. En la Figura 4.11 es el sentido positivo del eje y . Se calcula el módulo del campo generado por cada espira y se suma. En un punto cualquiera del eje a distancia d de la espira derecha (que genera B_2) y distancia $R - d$ de la espira izquierda (que genera el campo B_1) se tiene:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (R - d)^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + d^2)^{3/2}}, \quad (4.80)$$

con lo que el campo magnético total tiene el valor:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left(\frac{1}{(R^2 + (R - d)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + d^2)^{3/2}} \right). \quad (4.81)$$

Si se evalúa esta expresión para los dos puntos extremos de la parte del eje entre ambas espiras: $d = 0$ (plano de una bobina) y $d = R/2$ (centro del eje) se obtienen los valores:

$$B(d = 0) = 0,6768 \frac{\mu_0 I}{R} \quad \text{y} \quad B(d = R/2) = 0,7155 \frac{\mu_0 I}{R}. \quad (4.82)$$

Según el resultado anterior, el campo magnético es bastante uniforme entre las dos espiras, y en adelante se puede utilizar, para un sistema de N espiras a cada lado, la siguiente expresión:

$$B = 0,7 \frac{\mu_0 N I}{R} \quad (4.83)$$

Paso 4. *Resolución final.*

Para simular un campo magnético cercano a cero (anulando así la componente terrestre), se orienta el eje del sistema de bobinas de Helmholtz en la dirección norte-sur y se sitúa una brújula en el centro de dicho eje. Se aplica entonces una corriente a la bobina que generará un campo magnético opuesto a la componente horizontal del campo terrestre, en cuyo caso la brújula no tendrá ninguna dirección privilegiada, sino que quedará en equilibrio en cualquier dirección. El valor del campo magnético sufre ciertas fluctuaciones que se ajustarán experimentalmente del

modo descrito, pero se puede considerar un valor en torno a 0,2 Gauss ($1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$), por lo que la intensidad de corriente necesaria será aproximadamente:

$$0,25 \cdot 10^{-4} = 0,7 \frac{4\pi 10^{-7} 160I}{0,25} \Rightarrow I \simeq 45 \text{ mA} \quad (4.84)$$

OBSERVACIONES

- El sistema de bobinas de Helmholtz permite tener campos magnéticos prácticamente uniformes en su eje.
- Este sistema tiene múltiples aplicaciones, entre ellas 'cancelar' el campo magnético terrestre.

Bibliografía

[Nieto 98] E. Nieto García, Estructuras Arquitectónicas e Industriales: su Cálculo, Tebar Flores, (1998).

[Moreno et al. 2011] J. Moreno et al., Problemas resueltos de matemáticas para la edificación y otras ingenierías, Paraninfo, (2011).