

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**  
**Escuela de Arquitectura e Ingeniería de Edificación**



**PROYECTO FIN DE CARRERA**

---

Análisis de barra con un extremo empotrado

---



**Titulación:** Arquitectura Técnica

**Alumna:** Ana Cervantes Ayora

**Directores:** Carlos Angosto Hernández & Sonia Busquier Sáez

**Departamento:** Matemática Aplicada y Estadística



## AGRADECIMIENTOS.

Me gustaría dar las gracias a todos los que me han ayudado y han hecho posible este proyecto. A Sonia y Carlos, por hacerme creer en mi trabajo y por su entusiasmo en enseñarme. A Noa porque su fe en mí ha sido un pilar fundamental en mi desarrollo.

Y, por supuesto, a mi padre y mi madre ya que su apoyo incondicional ha hecho que todo esto sea posible.

Cartagena, Julio de 2013



## MOTIVACIÓN.

Este Proyecto Fin de Carrera está desarrollado para satisfacer el interés que suscita el análisis matemático para el desarrollo de estructuras, especialmente el de voladizos con funciones estructurales, para la ejecución de estructuras singulares, con materiales contemporáneos, de acuerdo con las normas establecidas en la actualidad.

La determinación de los objetivos del mismo ha sido desarrollada por el Departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la UPCT.

Dichos objetivos, son el análisis práctico y la exposición matemática de los métodos utilizados para el análisis de vigas en voladizo (o ménsulas) sometidas a flexión.

Todo ello, para una mejor comprensión del conocimiento que ha desarrollado la humanidad hasta el siglo XXI sobre la resistencia y deflexión de elementos estructurales en voladizo.

Para que todo ello permita obtener la topología y los materiales más adecuados para el desarrollo de dichos elementos.

Finalmente este proyecto, nace con vocación de complementar, ampliar y culminar los estudios realizados en la Universidad Politécnica de Cartagena (UPCT) para la obtención del título de Arquitectura Técnica.



# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>3</b>
<b>2. TEORÍA MATEMÁTICA.</b>	<b>21</b>
2.1. TEORÍA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI: integración conocidas las cargas actuantes. . . . .	21
2.2. FLEXIÓN Y PANDEO DE VIGAS. . . . .	22
2.2.1. OBJETIVO. . . . .	22
2.2.2. INTRODUCCIÓN MATEMÁTICA. . . . .	22
2.2.3. MOMENTOS FLECTORES. . . . .	25
<b>3. CASOS PRÁCTICOS.</b>	<b>35</b>
3.1. Viga de peso despreciable con extremo libre . . . . .	38
3.1.1. MISMA SECCIÓN-MATERIALES DIFERENTES. . .	39
3.1.2. MISMO MATERIAL-SECCIONES DIFERENTES. . .	44
3.2. Viga con carga uniforme con extremo libre . . . . .	53
3.2.1. MISMA SECCIÓN-MATERIALES DIFERENTES . .	54
3.2.2. MISMO MATERIAL-SECCIONES DIFERENTES. . .	59
3.3. Viga con carga variable con extremo libre . . . . .	67
3.3.1. MISMA SECCIÓN-MATERIALES DIFERENTES. . .	68
3.3.2. MISMO MATERIAL-SECCIONES DIFERENTES. . .	74
<b>4. VIBRACIONES TRANSVERSALES DE UNA VIGA.</b>	<b>83</b>
4.1. Vibraciones forzadas de una barra. . . . .	84
4.1.1. Barra empotrada con un extremo libre. . . . .	84
<b>5. CONCLUSIONES.</b>	<b>87</b>

<b>A. Datos MEFI.</b>	<b>89</b>
A.1. ESTADO PUNTUAL. . . . .	89
A.2. ESTADO UNIFORME. . . . .	94
A.3. ESTADO COMBINADO. . . . .	100



# Capítulo 1

## Introducción.

En la antigüedad los constructores aprendían a mejorar sus técnicas a través de reglas empíricas que se transmitían de generación en generación, sin dejar constancia por escrito. Las diferentes culturas y pueblos acumularon así conocimientos sobre mecánica.

El hecho de que la transmisión de conocimientos se realizase de manera práctica y a través del “boca a boca” hace más complejo el estudio de la evolución de las técnicas constructivas utilizadas, cuanto más nos alejamos en el tiempo. Bien porque las civilizaciones desaparecieron, o bien porque las técnicas cayeron en desuso, la evolución y el desarrollo de los métodos constructivos son difíciles de conocer en nuestro tiempo. Esto unido a las características perecederas de muchos de los materiales que, por proximidad o abundancia, han sido utilizados por las distintas civilizaciones, dificulta aún más el conocimiento de dichas técnicas en algunas civilizaciones.

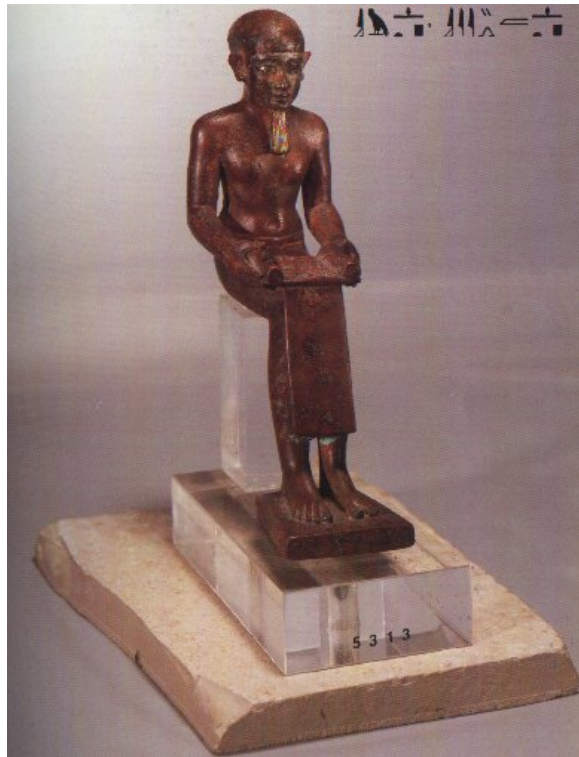
En muchos casos, es a través de lo que ha llegado a nuestros días y debido a la necesidad de conservación del patrimonio histórico y arquitectónico, por lo que ha sido posible desarrollar muchas de las teorías sobre las distintas técnicas que han sido usadas en el pasado.

Aunque los orígenes de otras ciencias, como las matemáticas o la astronomía, pueden remontarse hasta antiguas civilizaciones de Mesopotamia y Egipto con documentos escritos, como el papiro Rhind en el caso de las matemáticas (siglo *XVII* a.c.). No es así, en el caso de la mecánica. Y por tanto, tampoco lo es en el caso de la estática, rama de la mecánica clásica que estudia el equilibrio de fuerzas de los sistemas físicos en equilibrio estático; o de la dinámica, rama de la mecánica clásica cuyo objetivo es describir las alteraciones a las que está sometido un sistema físico, en relación con el tiempo

y las causas que provocan los cambios de estado físico y/o de movimiento.

En Mesopotamia, desde los sumerios hasta los persas (siglo *IV* a.c.), no se han encontrado documentos sobre las técnicas constructivas que utilizaban. En base a los restos arqueológicos encontrados, como por ejemplo, antiguos utensilios para la escritura y partes de placas arcillosas con inscripciones, la humanidad ha conocido algunas de las edificaciones realizadas por estas culturas, las más representativas, el templo y el zigurat. Se cree que dichas culturas ejercieron una gran influencia sobre la construcción egipcia [4].

El primer científico, arquitecto, médico y astrónomo, cuyo nombre ha llegado hasta nuestros días, fue el del egipcio Imhotep, en el siglo *XVII* a.c.



Imhotep.

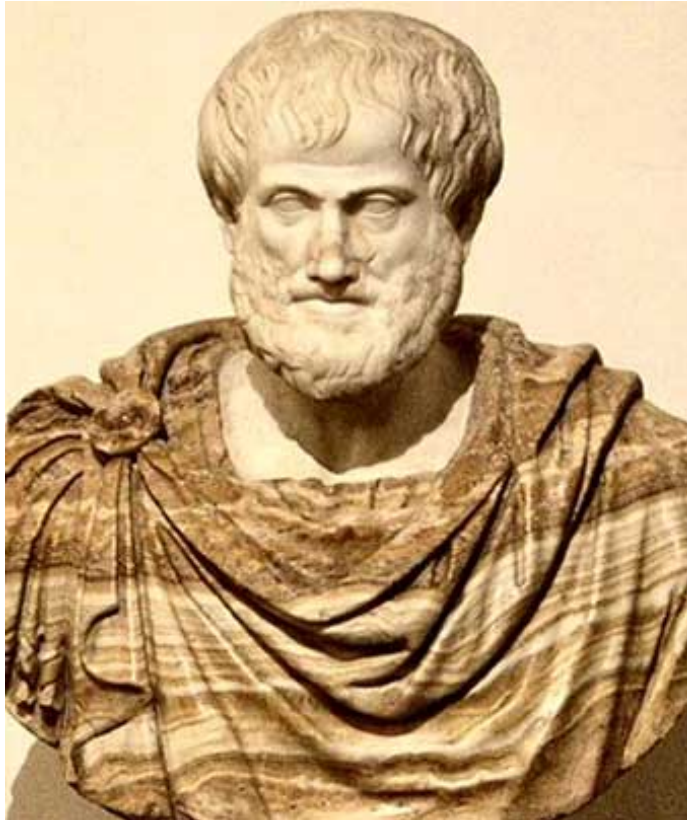
Los elementos estructurales que utilizaban en el antiguo Egipto eran, práctica y únicamente, la viga y la columna. Es aproximadamente en 1500 a.c. cuando aparece el arco como elemento estructural en Egipto, aunque nunca fue un recurso muy utilizado por esta civilización [3].

Fueron los asirios quienes utilizaron el arco como elemento estructural, además de la viga y la columna. Aunque debido a que sus construcciones

se realizaban con ladrillos de barro sin cocer, no han podido resistir el paso del tiempo. En lo referente al desarrollo mecánico que implicaban dichas construcciones sólo existen teorías [4].

El "origen de la mecánica" comienza, de manera general, con escritos y tratados de Aristóteles, Euclides, Arquímedes y Herón dedicados a la física y la mecánica. Y en particular, con el análisis y prueba de la Ley de la Palanca.

El primer tratado sobre mecánica es el llamado Problemas de Mecánica, tradicionalmente atribuido a Aristóteles (384 – 322 a.c.). Éste nació un siglo antes que Arquímedes (287 – 212 a.c.) quien hizo la primera demostración de la Ley de la Palanca.



Aristóteles.

El tratado "Problemas de Mecánica" constaba de 35 problemas de mecánica y la explicación de sus soluciones a través de pautas similares. Estos problemas servían, por ejemplo, para explicar cómo es posible que una fuerza pueda producir un efecto mayor que el natural, aplicando un artilugio mecáni-

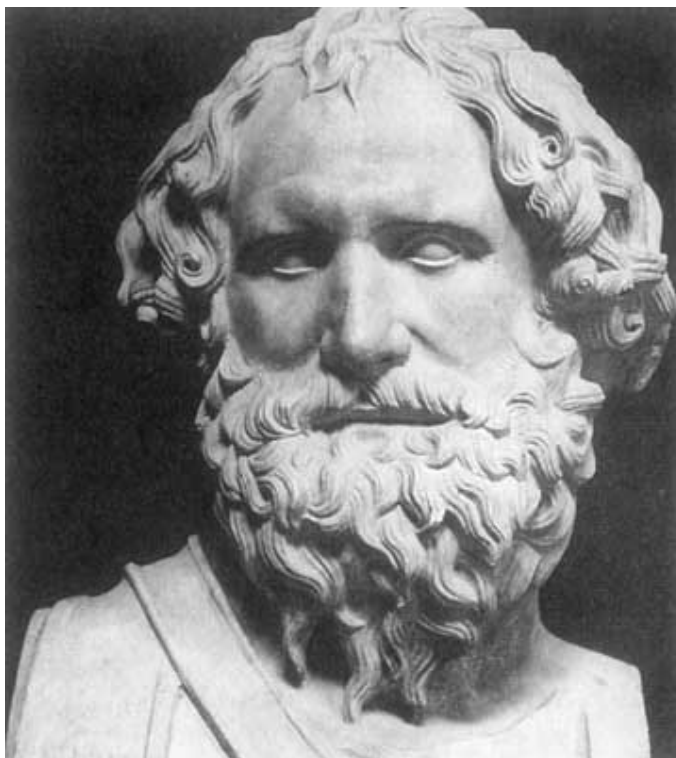
co, en contraste con la proporcionalidad entre “fuerza y efecto” sugerida por el modelo de la física aristotélica.

Algunos historiadores han investigado los conocimientos mecánicos de las antiguas culturas para dilucidar si la Ley de la Palanca era conocida por el autor de los Problemas de Mecánica, y si esta ley fue anterior o posterior al desarrollo de la balanza de brazos desiguales.

Los citados historiadores concluyeron por un lado, que la balanza de brazos desiguales precedió a los primeros textos mecánicos, lo cual se pone de manifiesto en el texto literario, la comedia Paz de Aristófanes, cien años antes de los Problemas de Mecánica. Y por otro lado, que las estructuras de conocimiento, documentadas en los Problemas de Mecánica, resultan de experiencias hechas posibles por la invención de la balanza de brazos desiguales.

Finalmente, es Arquímedes, en su tratado de equilibrio sobre dos planos, quien realiza la demostración de la Ley de la Palanca, haciendo uso de sofisticados argumentos matemáticos que incluyen, en particular, la distinción entre cantidades commensurables e incommensurables, es decir, cantidades cuya razón es un número racional o irracional, y en general, haciendo uso de métodos heurísticos con infinitesimales, los cuales, por primera vez en la historia, quedarían documentados.

Dicho cálculo infinitesimal es una parte muy importante de la matemática moderna, pues incluye el estudio de límites, derivadas, integrales y series infinitas. Arquímedes desarrolló también el tornillo que lleva su nombre y la polea compuesta, entre otros muchos inventos.



Arquímedes.

Durante la Edad Media árabe y latina, desde el siglo V d.C. hasta el Renacimiento (aproximadamente 10 siglos, aunque depende de la zona geográfica y de la desintegración del Imperio Romano), se tradujeron numerosos escritos de épocas anteriores sobre ciencias: matemáticas, mecánica o geometría, entre muchas otras disciplinas. Se tradujo sobretudo, del griego al árabe y del árabe al latín. Obras importantes de Aristóteles, Arquímedes o Euclides, entre otros muchos científicos, quienes habían dejado constancia de sus teorías y experimentos.

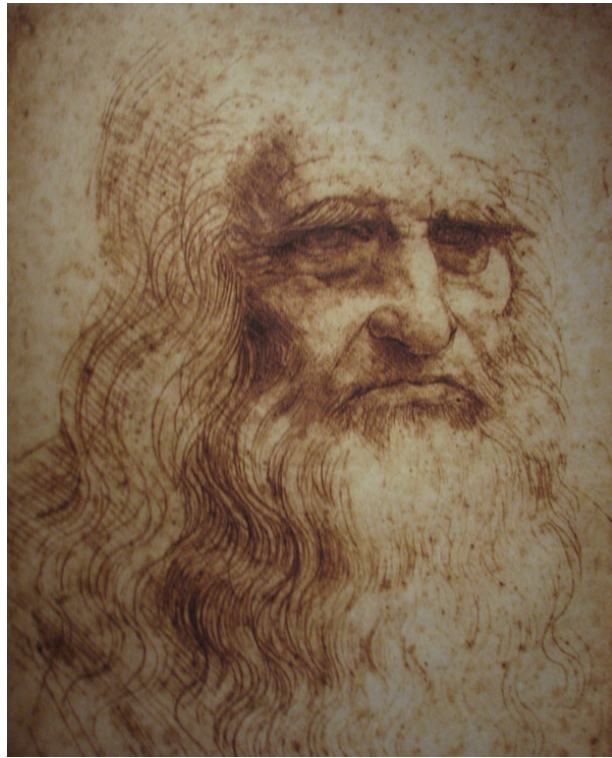
La expansión del conocimiento de esta etapa se caracterizó por la transformación de la mecánica en una “ciencia de balanzas y pesos”, en la que una vez más la Ley de la Palanca tuvo un papel importante. No existió ningún científico comparable a Arquímedes en esta época.

El desarrollo mecánico más importante de esta etapa fue el reloj mecánico utilizado en las catedrales medievales a finales de la Edad Media. Aunque no eran precisos y tuvieron que esperar varios siglos hasta que Galileo descubriera las leyes del péndulo, y Huygens las aplicara para regular la marcha correcta de dichos relojes [5].

Los acontecimientos más importantes, en cuanto a las contribuciones a la mecánica, han sido recogidos por William F. Riley y Leroy D. Sturges en Ingeniería Mecánica. Estática. En él realizan un estudio de las teorías que el Doctor Ernst Mach, de la Universidad de Viena, publica en el libro Historia de la mecánica de 1893.

Cabe destacar a Archytas de Tarento (aprox. 400 a.C.) quien fundó la teoría de las poleas y los escritos de Arquímedes que demuestran que él había comprendido las condiciones de equilibrio de la palanca y el principio de la flotación. No hace mención a otras teorías hasta Leonardo Da Vinci (1452 – 1519) [6].

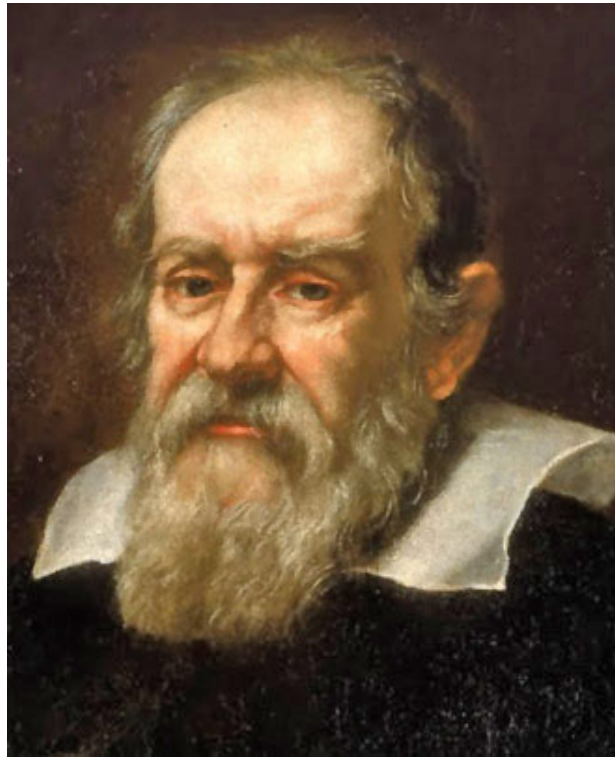
Es sabido que el destacado Leonardo Da Vinci, posiblemente el genio más versátil de la historia, estudió, entre otros muchos escritos, los de Arquímedes y, por supuesto, la Ley de la Palanca, introdujo el concepto “momento de una fuerza” y lo aplicó al equilibrio de los cuerpos rígidos. Prácticamente fijó el principio conocido como “Tercera Ley del Movimiento de Newton”. Cabe decir que la inquietud de este genio lo llevó a estudiar la flexión de las vigas apoyadas en sus extremos y la resistencia de vigas en voladizo; la resistencia de alambres de varias longitudes; y la resistencia de las columnas, estableciendo que ésta varía inversamente con la longitud y directamente con alguna relación de su sección transversal. También, desarrolló leyes, aún imperfectas, en relación por ejemplo, con la línea elástica en vigas con secciones diferentes para eliminar el modulo elástico y el momento de fuerza [3].



Leonardo Da Vinci.

Este libro destaca a Stevin (1548–1620) ya que fue el primero en describir el comportamiento de un cuerpo en un plano inclinado liso y utilizó la ley del paralelogramo de adición de fuerzas. Del que hablaremos también, más adelante [6].

Aún en el siglo *XVI*, no existían registros sobre la resistencia de materiales o el comportamiento de los elementos estructurales constatados por escrito. Fue entonces cuando Galileo Galilei (1564–1642) estudió la resistencia de los sólidos a la rotura. En su libro *Diálogo sobre dos nuevas ciencias* intenta discutir el comportamiento de la viga en voladizo bajo su peso propio y una carga concentrada en el extremo. Inauguró la edad de la razón en el análisis estructural. Aunque sus resultados no fueron acertados, su trabajo llamó la atención sobre la existencia y la importancia de la mecánica de los materiales, creando así, la disciplina conocida como Mecánica de Materiales [3].



Galileo Galilei.

Al parecer, tanto Stevin como Galileo (1564-1642) entendieron el principio de los desplazamientos virtuales (trabajos virtuales).

En la primera mitad del siglo *XVII* René Descartes (1596 – 1650) ideó el sistema cartesiano de referencia, en el que la posición de un punto en el espacio queda definida por las distancias  $(x,y,z)$  del punto a tres planos mutuamente perpendiculares. Descartes encontró que a cada ecuación corresponde una curva en el papel y que a cada curva (círculo, parábola, elipse,...) corresponde una ecuación algebraica. Estas matemáticas se denominan geometría analítica y su uso fue fundamental años después en el desarrollo de la mecánica por Newton.

Como comentaba antes, Huygens (1629 – 1695) continuó los trabajos de Galileo con péndulos e inventó el reloj de péndulo; también estudió el movimiento del péndulo cónico y realizó una determinación precisa de la aceleración de la gravedad.

Coincidiendo en el tiempo con el científico inglés Robert Hooke (1635 – 1703) quién realizó importantes aportes. Formuló la Teoría de la Elasticidad, hoy conocida como Ley de Hooke, una de las más importantes leyes de la



Mecánica de los Materiales en el desarrollo de la ingeniería estructural. En ella plantea que el alargamiento unitario que sufre un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre él.

Casi paralelamente vivió Sir Isaac Newton (1642 – 1727) a quien se le atribuye el haber levantado los cimientos de la Mecánica descubriendo la Ley de la Gravitación Universal y el enunciado de las Leyes del Movimiento, así como, leyes sobre el cálculo infinitesimal.



Isaac Newton.

El trabajo que realizó Newton con el punto material basado en la Geometría fue ampliado por Euler (1707 – 1783) a los sistemas de cuerpos rígidos. Euler fue quien primero utilizó el término “momento de inercia” y quien desarrolló el Teorema de los ejes paralelos para los momentos de inercia, conocido por el nombre de Teorema de Steiner [6].

Según el libro *Análisis Clásico de Estructuras*, escrito por Oscar Jaramillo Jimenez, editado por la Universidad Nacional de Colombia, en 2004, Andrea Palladio (1508 – 1580) usó las primeras cerchas en la construcción de puentes y techos de edificaciones, aunque sus diseños no tenían como base un análisis

racional. Sin embargo, se necesitaron dos siglos más para que los constructores se dieran cuenta de la importancia de esta nueva forma estructural (las cerchas) y fuera usada masivamente. Anteriormente al descubrimiento y utilización de las cerchas, el uso de elementos resistentes en la construcción se limitaba a vigas, columnas, arcos y bóvedas.

Cabe destacar en el desarrollo de las cerchas al anteriormente mencionado Simon Stevin, ya que introdujo el principio del "triángulo de fuerzas" relativo a la resultante de las fuerzas y momentos de un cuerpo, debido a que realizó estudios sobre estática e hidrostática.

Los Bernoulli, entre la segunda mitad del siglo *XVII* y la primera del *XVIII* dejaron honda huella en la ciencia.

De Jakob Bernoulli (1654 – 1705) es sabido, que estudiando la forma de la curva de una barra elástica deflectada, dedujo la ecuación de la curva elástica, ampliamente utilizada en ingeniería, y se lo comunicó a Varignon (1654 – 1722) en una carta escrita en 1717. Jakob también, descubrió la fibra neutra, aunque por algún motivo no le dio importancia a su posición. Fue Mariotte (1620 – 1684) quien desarrolló el concepto de "eje neutro".

Varignon estableció la igualdad entre el momento de una fuerza y la suma de los momentos de sus componentes.

Más tarde, Johann Bernoulli (1667 – 1748), hermano de Jakob, percibió la aplicación a todos los casos de equilibrio de los desplazamientos virtuales (trabajos virtuales) y enunció el principio de las "velocidades virtuales", base de los métodos para determinar las deformaciones elásticas de las estructuras. Daniel, su hijo, se interesó por determinar la elástica de las barras dobladas, las vibraciones de las vigas y desarrolló la ecuación diferencial para la vibración de una barra



Jakob Bernoulli.



Johann Bernoulli.

Euler, amigo de Daniel Bernoulli (1700 – 1782), además de las contribuciones anteriormente citadas estudió los problemas de las curvas elásticas de vigas y columnas; empleó el método del Trabajo Mínimo y contribuyó con su famosa discusión sobre el pandeo de las columnas.



Leonhard Euler.



Daniel Bernoulli.

Ya en la segunda mitad del siglo XVIII, Charles August Coulomb (1736 – 1806) considerado, junto con Louis Marie Henri Navier (1785 – 1836) quien tiene el honor de haber desarrollado la primera teoría general de los sólidos elásticos y el primer tratamiento sistemático de la teoría de estructuras, uno de los creadores de la Resistencia de Materiales. Publicó, en 1776, el primer análisis correcto de los esfuerzos de una viga con sección rectangular. Aplicando la Ley de Hooke a las fibras, situando la superficie neutra en su posición correcta y desarrollando el equilibrio de las fuerzas en la sección con las fuerzas externas, evaluó correctamente los esfuerzos. También consideró la etapa plástica, e indicó que en la falla, bajo ciertas condiciones, la superficie neutra debería moverse a otra posición.

Habían pasado 135 años desde que Galileo intentase por primera vez solucionar el problema.

Coulomb publicó también su teoría sobre la presión de tierras sobre muros de contención y enunció su teoría de la torsión de ejes.

Thomas Young (1733 – 1829) introdujo por primera vez el concepto de Módulo de Elasticidad con una definición muy diferente a la que conocemos hoy en día. También trató problemas de torsión de ejes y flexión de vigas en voladizo y el problema de la tensión y compresión excéntrica de barras de sección rectangular.

Lamé (1795 – 1870) publicó el primer libro sobre elasticidad y, junto con Clapeyron (1799 – 1864), introdujo el concepto de igualdad del trabajo externo e interno en una estructura deformada. Clapeyron trabajó también en el equilibrio de sólidos homogéneos y cálculo de la estática de las vigas, obteniendo como resultado el conocido como Teorema de los Tres Momentos, muy útil en el cálculo de vigas continuas hiperestáticas. En 1855, dos años antes, Bertot la había publicado sin que se le diese crédito alguno. Se dice que a partir de este momento se inicia el desarrollo de una verdadera Teoría de las Estructuras.

Otro ingeniero francés que también aportó a la formulación de la Teoría de la Elasticidad fue Barré de Saint-Venant (1791 – 1886). Trabajó sobre la flexión de vigas curvas, las vibraciones y las deformaciones plásticas. En 1853, presentó su famosa Memoria sobre la Torsión que además contenía todo lo que en esa época se conocía sobre la Teoría de la Elasticidad.

Contemporáneo de Saint-Venant, Jean-Marie Duhamel (1797 – 1872) trabajó en la Teoría de la vibración de los cuerpos elásticos. Mostrando en su trabajo que los desplazamientos producidos por una fuerza variable pueden ser representados por una integral, subdividiendo los intervalos infinitesimales con el fin de obtener el movimiento forzado como la suma de los movimientos de los intervalos. Esta ecuación es conocida como la Integral de Duhamel y es usada hoy en día en la Dinámica de Estructuras para el caso sísmico.



Jean Marie Duhamel.

Con todos estos conocimientos podríamos decir que comienza el análisis estructural como una disciplina independiente. En 1854, Jacques Antoine Charles Bresse (1822 – 1883) publicó un libro sobre la flexión y la resistencia de piezas curvas en el que presentaba métodos prácticos para el análisis de vigas curvas y arcos.

La Línea de Influencia fue introducida por Emil Winkler (1835 – 1888) quien también hizo contribuciones importantes a la Resistencia de Materiales, especialmente en la teoría de flexión de vigas curvas y flexión de vigas apoyadas en medios elásticos.

James Clerk Maxwell (1830 – 1879) publicó el que ha sido llamado el primer método sistemático de análisis para estructuras estáticamente indeterminadas. Estaba basado en la igualdad que había establecido Clapeyron de la energía interna de deformación de una estructura cargada y el trabajo externo realizado por las cargas aplicadas. En su análisis, Maxwell presentó el Teorema de las Deformaciones Recíprocas, el cual no fue apreciado en su momento por su brevedad y falta de ilustración. Posteriormente, publicó el Diagrama de fuerzas internas para cerchas, combinando en una sola figura todos los polígonos de fuerzas. El diagrama se hizo popular por Cremona, por lo que se conoce con el nombre de Diagrama de Maxwell-Cremona.

En 1872, el italiano Enrico Betti (1823 – 1892), publicó una forma generalizada del Teorema de Maxwell conocido como Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti.



Luigi Cremona.



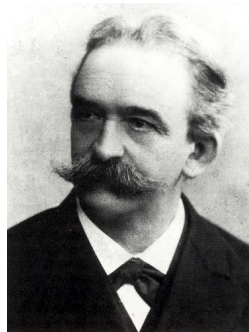
James Maxwell.



Enrico Betti.

Otro ingeniero del siglo XIX que hizo grandes aportes a la Teoría de Es-

estructuras fue Otto Mohr (1835 – 1918). Desarrolló el método para determinar las deflexiones en vigas, conocido como el Método de las cargas elásticas o la viga conjugada; así mismo, presentó una derivación más simple y más extensa del método general de Maxwell para el análisis de estructuras indeterminadas, usando los principios del trabajo virtual. Hizo aportes en el análisis gráfico de deflexiones de cerchas, con el complemento al diagrama de Williot, conocido como Diagrama de Mohr-Williot, de gran utilidad práctica. También obtuvo el famoso Círculo de Mohr, para la representación gráfica de los esfuerzos en un estado biaxial de esfuerzos.



Otto Mohr.

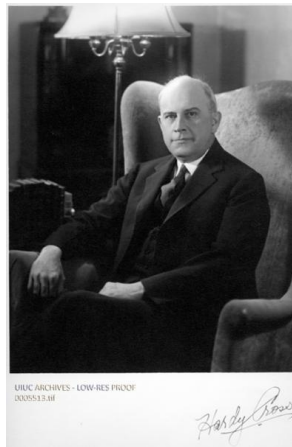
Un año después de la publicación de Betti, es decir en 1873, Alberto Castigliano (1847 – 1884) presentó el principio de trabajo mínimo sugerido por Menabrea y conocido como Primer Teorema de Castigliano. Después presentó el Segundo Teorema de Castigliano para encontrar deflexiones, deducido de lo demostrado en el primero. En 1879 publicó en francés su famoso libro Teorema del Equilibrio de Sistemas Elásticos y sus Aplicaciones. Éste destaca por su originalidad y es muy importante en el desarrollo del análisis hiperestático de estructuras.

Ya en 1886, Heinrich Müller-Breslau (1851 – 1925) publicó, lo que en esencia era una variación del método general de Maxwell para el análisis de estructuras indeterminadas, un método básico para dicho análisis. En la evaluación de los desplazamientos dio gran importancia al Teorema de Maxwell de las Deflexiones Recíprocas. El conocido como Teorema de Müller-Breslau, base para otros métodos indirectos de análisis de estructuras mediante modelos, nació del descubrimiento de que la Línea de Influencia para la reacción (o una fuerza interna de una estructura) era, en alguna escala, la elástica producida por una acción similar a esa reacción o fuerza interna.

En 1930, Hardy Cross (1885 – 1959) publicó su famoso método de Distribución de Momentos. Considerado uno de los mayores aportes al análisis de estructuras indeterminadas, y según los expertos, una revolución en el análisis de estructuras de pórticos continuos de hormigón armado. Es un método de aproximaciones sucesivas que evita la resolución de sistemas de ecuaciones como las presentadas en los métodos de Mohr y Maxwell. Éste método perdió popularidad con la aparición y disponibilidad de los



Heinrich Müller-Breslau.



Hardy Cross.

ordenadores.

En 1943, Richard Courant (1888 – 1972) comenzó, lo que se puede considerar como el inicio del desarrollo del Método de los Elementos Finitos, utilizando el Método Ritz de análisis numérico y minimización de las variables de cálculo, para obtener soluciones aproximadas a un sistema de vibración. Se podría decir que Courant le dio una base matemática firme.

En 1956 M. J. Turner, Ray W. Clough, H.C. Martin y L. J. Topp presentaron "Stiffness and deflection analysis of complex structures" estableciendo una definición más amplia del análisis numérico. Con la llegada de los primeros ordenadores comienza la aplicación de los métodos matriciales de la rigidez a las estructuras, muy populares en la actualidad.

El desarrollo del Método de los Elementos Finitos, en resumen, permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio, del que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en forma integral que caracterizan el comportamiento físico del problema, dividiéndolo en un número elevado de subdominios, no secantes entre sí, denominados *elementos finitos*. Entre sus impulsores se encuentran, además de Ray Clough,



E. L. Wilson, O.C. Zienkiewics y R. H. Gallagher.

Todo ello en la actualidad permite el análisis sistemático de gran número de estructuras, así como, la obtención de esfuerzos y deformaciones en sistemas complejos [3].

Gracias al avance de las nuevas tecnologías, y a que dichas tecnologías, se encuentran al alcance de cualquier profesional del sector hoy en día, el cálculo para el análisis de estructuras, se realiza mediante la programación informática de softwares específicos desarrollados para tal fin. Estos softwares combinan y aplican el conocimiento adquirido hasta ahora, con las normativas desarrolladas para garantizar una mayor seguridad de las construcciones.



## Capítulo 2

# TEORÍA MATEMÁTICA.

### 2.1. TEORÍA DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI: integración conocidas las cargas actuantes.

La teoría clásica de vigas (Teoría de Euler-Bernoulli), es una simplificación, usando la teoría lineal de la elasticidad, del estudio de la deflexión producidos por cargas y/o momentos actuando sobre vigas.

Esta teoría es muy aproximada para pequeñas deflexiones de la viga (desplazamientos de piezas flexadas) y cargas aplicadas en el mismo plano que contiene la viga. Es un caso especial de la mucho más elaborada Teoría de Vigas de Timoshenko. Fue enunciada en 1750 por Bernoulli y el mismo año fundamentada por Euler como una teoría matemática rigurosa. No fue aplicada a gran escala hasta el desarrollo de la Torre Eiffel al final del siglo XIX, se necesitaron unos primeros cálculos de estructuras muy elaborados en comparación con los utilizados generalmente en esa época.

A partir del éxito obtenido se desarrollaron grandes avances en la fundamentación matemática de la Teoría de la Elasticidad Mecánica de Estructuras y Medios Continuos.

A continuación se expone brevemente el desarrollo de la Teoría de Euler-Bernoulli sobre vigas [1].

## 2.2. FLEXIÓN Y PANDEO DE VIGAS.

### 2.2.1. OBJETIVO.

Los modelos convencionales para el análisis estructural de vigas requieren estudiar el material del que están hechas las vigas y su colocación para saber cuál será la flexión de la misma una vez colocada. Para estudiar matemáticamente la forma que adopta una barra en flexión, es necesario estudiar la *curva de la elástica* o *curva de flexión*. Esto es, tratar de obtener la curva descrita por la fibra que, antes de flexar la viga, ocupaba el eje horizontal de la misma, ecuación elástica de la viga. También se busca determinar el módulo de elasticidad del material. Para ello se considera que la viga está construida uniformemente y constituida por fibras longitudinalmente. En la figura 2.1 puede observarse el plano flexado que contiene la superficie de separación  $S(y)$ , siendo  $y$  la distancia de la curva de la fibra neutra a la curva elástica [1] y [2].

### 2.2.2. INTRODUCCIÓN MATEMÁTICA.

Consideremos un tramo infinitesimal de una barra sometida a flexión, como se ilustra esquemáticamente en la figura 2.1. Es claro que mientras la parte superior de la barra se encuentra solicitada a tensiones de tracción su parte inferior esta sometida a tensiones de compresión. Así mismo, habrá una superficie de la misma, cercana a su zona central, que no estará sometida ni a tracción ni compresión. Esta superficie se conoce como la fibra neutra, y en la figura 2.1 A) está representada por la línea de trazos. Si tomamos un elemento infinitesimal de la barra, paralela a la fibra neutra a una distancia  $y$  de la misma, este segmento corresponde a la región sombreada de la figura 2.1 A) y C). Supondremos que el área transversal de este elemento es  $dA$ . Con  $R_0$  designamos el radio de la curvatura de la zona neutra y llamamos  $S_0$  a la longitud del elemento de barra arco de la barra en consideración a lo largo de la zona neutra. La longitud del arco que está a una distancia  $y$  de la línea neutra lo designamos con  $S(y)$ . De la geometría del problema podemos escribir en primera aproximación:

$$\alpha = \frac{S(y)}{R_0 + y} = \frac{S_0}{R_0}, \quad (2.1)$$

por lo tanto

$$\Delta S(y) = S(y) - S_0 = \frac{S_0}{R_0} \cdot y. \quad (2.2)$$

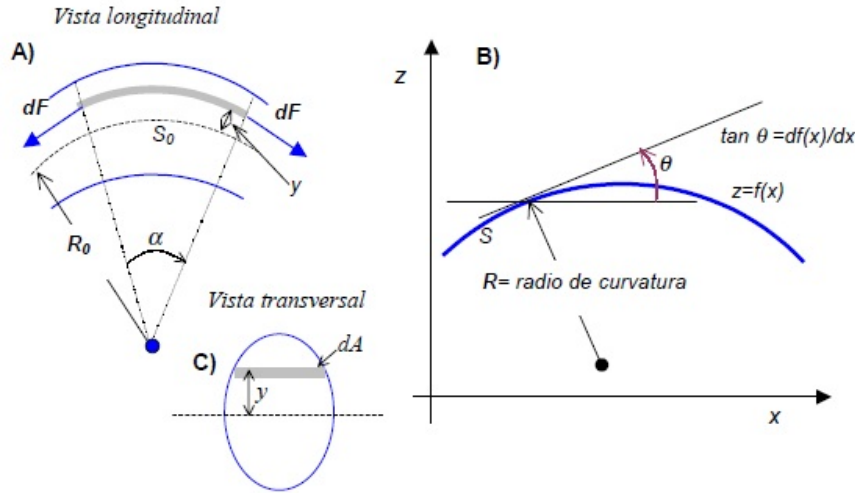


Figura 2.1: A) Barra sometida a flexión. A la izquierda se observa un tramo infinitesimal de la misma sometida a tracción por la parte superior y a compresión en su parte inferior. La línea de trazos indica la línea neutra, la cual no está sometida a tracción ni compresión. B) A la derecha observamos un tramo finito de la misma barra. C) En la zona central vemos una vista transversal de la barra.

Si  $df$  designa la fuerza infinitesimal, responsable de la tracción (o compresión) de este elemento infinitesimal de la barra, por la ley de Hooke tenemos:

$$df = \left( E \cdot \frac{dS}{S_0} \right) \cdot dA = E \cdot \frac{y}{R_0} \cdot dA. \quad (2.3)$$

El momento de esta fuerza infinitesimal, relativa a la línea neutra será

$$dM = y \cdot df,$$

por lo tanto el momento flector de la barra será:

$$M = \int y \cdot df = \int \left( E \cdot \frac{dS}{S_0} \right) \cdot dA = \frac{E}{R_0} \int_{Area} y^2 \cdot dA, \quad (2.4)$$

o bien:

$$M = \frac{E \cdot I}{R_0}, \quad (2.5)$$

donde hemos definido el momento real o *momento de inercia de la sección transversal* de la barra como:

$$I = \int_{Area} y^2 \cdot dA. \quad (2.6)$$

Aquí  $E$  representa el módulo de rigidez o módulo de Young del material. El producto  $E \cdot I$  se conoce como el *coeficiente de rigidez* ("flexural rigidity" o "Stiffness") a la flexión de la barra. Por su parte el radio de curvatura puede escribirse de la forma:

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dx^2}} = \frac{[f'^2(\phi) + g'^2(\phi)]^{\frac{3}{2}}}{(f'(\phi) \times g''(\phi) - f''(\phi) \times g'(\phi))} = \frac{dS}{d\theta}. \quad (2.7)$$

La primera forma de expresar el radio de curvatura corresponde al caso en que se dispone de la expresión de la curva de la forma  $z = z(x)$  y la segunda cuando la forma de la curva se expresa en forma paramétrica ( $x = f(\phi)$ ,  $z = g(\phi)$ ). La tercera forma, expresa el radio de la curvatura en términos de la longitud de arco  $S$  y el ángulo  $\theta$ , que la tangente a la curva forma con el eje  $x$ , como se ilustra en la figura 2.1. Si la curvatura de la viga es pequeña, o equivalente, si el radio de curvatura  $R$  es mucho mayor que el tamaño de la viga, o sea si  $R > L$ , tenemos que:

$$R \approx \frac{1}{\frac{d^2z}{dx^2}} = \frac{(f'(\phi))^3}{(f'(\phi) \times g''(\phi) - f''(\phi) \times g'(\phi))} [1]. \quad (2.8)$$

En este caso la relación (2.3) se escribe como:

$$-E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx M(x). \quad (2.9)$$

Esta relación (2.8) se obtiene de la ecuación diferencial de cuarto orden que describe la deflexión  $z$ , obtenida de la teoría de Euler-Bernoulli, que como decíamos, es un caso especial de la Teoría de Timoshenko, que describe la ecuación diferencial de la estática de una viga dentro de las limitaciones antes mencionadas [2].

Siendo  $q$  una función general que configura la carga solicitante:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = q(x). \quad (2.10)$$

Observandose que si  $E \cdot I$  es constante entonces:

$$E \cdot I \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = q(x). \quad (2.11)$$

Y por tanto las derivadas sucesivas de la función  $z$  proporcionan las magnitudes físico-matemáticas de principal importancia en aplicaciones de ingeniería:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \theta(x), \quad (2.12)$$

proporciona el ángulo de giro en cada sección de la viga.

$$-E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = M(x), \quad (2.13)$$

proporciona el momento flector en cada sección de la viga.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( E \cdot I \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = F_{ruptura}(x), \quad (2.14)$$

proporciona la fuerza de ruptura de la viga [1].

### 2.2.3. MOMENTOS FLECTORES.

Un problema común en diversos problemas que involucran vigas, es determinar el valor del momento flector  $M(x)$  o momento resistente en un punto de coordenada  $x$ . Para ello imaginemos que la barra se corta en el punto de coordenadas  $x$  (línea  $mn$ ). Para mantener en equilibrio la sección que está a la derecha de la línea  $mn$  será necesario una fuerza cortante  $V(x)$  (cortante resistente) y un momento flector  $M(x)$ , que en realidad realiza la sección de la viga a la izquierda de la línea  $mn$ . De las condiciones de equilibrio ( $\sum F_i = 0$  y  $\sum M_i = 0$ ) podemos obtener los valores de  $M(x)$  y  $V(x)$ .

El objetivo en general es determinar el valor del momento flector  $M(x)$  o momento resistente en un punto de coordenada  $x$ . De las condiciones de equilibrio ( $\sum F_i = 0$  y  $\sum M_i = 0$ ) obtenemos los valores de  $M(x)$  y  $V(x)$ .

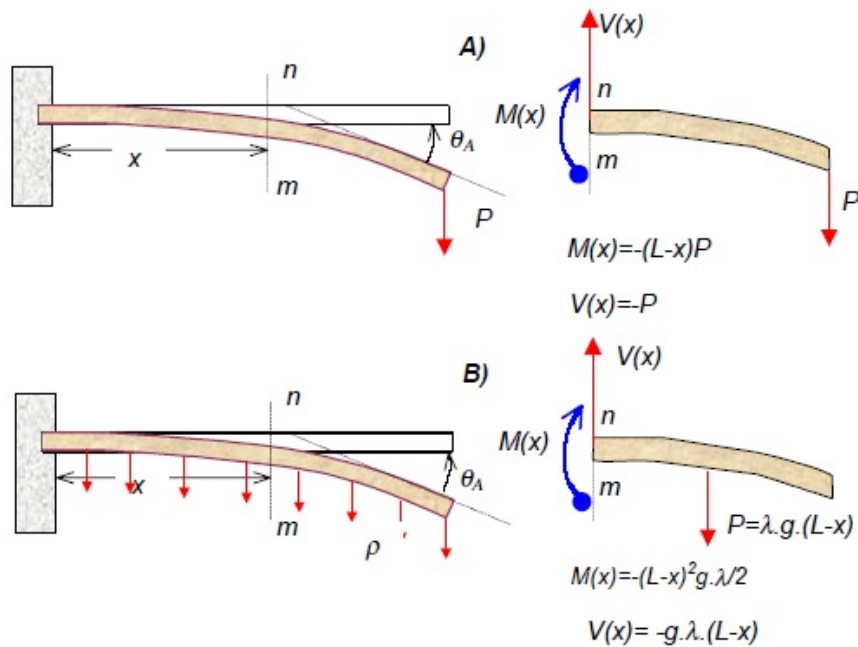


Figura 2.2: A) Barra empotrada de longitud  $L$ , sometida a flexión por una fuerza  $P$  aplicada en su extremo libre. B) Barra empotrada de longitud  $L$ , sometida a flexión por una fuerza uniforme  $g \cdot \lambda$  distribuida a lo largo de toda la barra.

El ángulo que forman las tangentes a la barra en sus dos extremos,  $\theta_A$ , se conoce con el nombre de ángulo de giro [2].

### TEOREMAS DEL ÁREA DE MOMENTOS.

Finalmente, es útil tener en cuenta dos teoremas de las áreas de los momentos, que pueden demostrarse a partir de la expresión (2.5), para pequeñas deformaciones de una barra.

**Primer teorema del área de momentos:** Referida a la figura 2.3, si  $\theta_A$ , representa el ángulo entre las tangentes a la barra en sus dos extremos, conocido con el nombre de ángulo de giro, se cumple la siguiente relación.



$$\theta_A = \int_x^L \frac{M(x) \cdot dx}{E \cdot I}. \quad (2.15)$$

La distancia  $\Delta_A$  se mide a lo largo de una línea perpendicular a la barra.

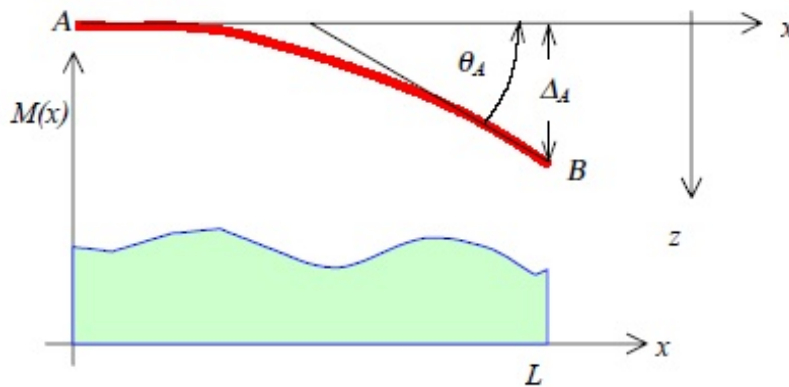


Figura 2.3: Barra de longitud  $L$ , sometida a flexión por un momento flector aplicado de forma general,  $M(x)$ , a lo largo de la misma.  $\theta_A$ , se conoce con el nombre de ángulo de giro.

**Segundo teorema del área de momentos:** Si  $\Delta_A$  es la distancia entre la tangente, en uno de los extremos de la barra, al otro extremo de la misma, a lo largo de una dirección perpendicular a la barra (en su posición original sin deformación) se cumple que:

$$\Delta_A = \int_0^L \frac{M(x) \cdot x \cdot dx}{E \cdot I}. \quad (2.16)$$

Es importante señalar que estos teoremas son válidos tanto para toda la barra como para una porción de la misma.

**Problema de Euler: pandeo de una viga.** El problema de Euler consiste en encontrar la forma de una viga sometida a pandeo. La curva que describe dicha forma se conoce con el nombre de la "elástica" de la misma. En primer

término analizaremos caso de pequeñas flexiones y seguidamente el caso de flexiones arbitrariamente grandes [2].

**Pequeñas deflexiones o desplazamientos.** En este caso supondremos que tenemos una barra de sección uniforme vertical, empotrada en su parte inferior como se ilustra en la figura 2.4, sometida a una fuerza o carga  $F$  a lo largo de la misma. Nótese la diferencia con el caso analizado en la figura 2.2, donde la fuerza se aplicaba perpendicular a la viga. El momento  $M(x)$  que la fuerza  $F$  ejerce sobre un punto de la barra de coordenada  $x$ , como vimos anteriormente (2.10), puede expresarse como:

$$M(x) = -F \cdot (u_0 - z(x)). \quad (2.17)$$

Igualando esta expresión con (2.3) y (2.7) tenemos:

$$E \cdot I \cdot \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] = -F \cdot (u_0 - z(x)). \quad (2.18)$$

En esta expresión, suponemos que el radio de curvatura es grande en comparación del largo  $L$  de la barra. La ecuación (2.15) también puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \lambda^2 \cdot z(x) = -\lambda^2 \cdot u_0, \quad (2.19)$$

con

$$\lambda^2 = \frac{F}{E \cdot I}. \quad (2.20)$$

La ecuación diferencial (2.16) es del mismo tipo que la que se encuentra al resolver el problema del oscilador armónico. Su solución es de la forma:

$$z = A \cdot \sin(\lambda \cdot x) + B \cdot \cos(\lambda \cdot x) + u_0. \quad (2.21)$$

Las condiciones de borde:  $z(0) = 0$ ,  $\frac{dz(0)}{dx} = 0$  y  $z(L) = u_0$  conducen a:  $B = -u_0$  y  $A = 0$ .

Por lo tanto:

$$z = u_0 (1 - \cos(\lambda \cdot x)). \quad (2.22)$$

Para que  $z(L) = u_0$ , tenemos que:

$$\lambda \cdot L = n \frac{\pi}{2}, \quad \text{con } n = 1, 3, 5, \dots, \quad (2.23)$$

por lo tanto:

$$F_{crit} = n^2 \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}, \quad \text{con } n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.24)$$

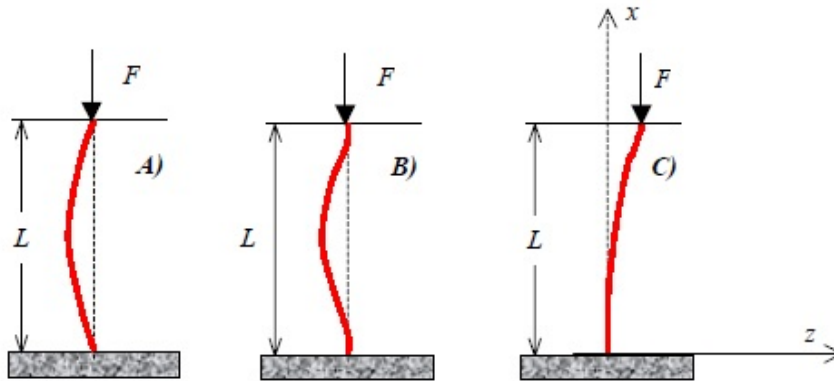


Figura 2.4: Pandeo de una viga con distintas condiciones de borde. A) ambos extremos libres, B) ambos extremos empotrados y C) extremo inferior empotrado y superior libre y móvil.

$$\boxed{F_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}} \quad \boxed{F_{crit} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}} \quad \boxed{F_{crit} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2}} \quad (2.25)$$

El menor valor de  $\lambda$  corresponde a  $n = 1$ . Esta condición establece el menor valor de la carga necesaria para que la barra pandee. Para lograr deflexiones de orden superior,  $n = 3, 5$ , etc, se requieren fuerzas mayores. La forma de la flexión para  $n = 1$  y  $3$  se indican esquemáticamente en los diagramas de la derecha de la figura 2.3.

Si la viga no está empotrada en su base, es fácil probar, siguiendo el procedimiento usado anteriormente que el valor de la fuerza crítica es:

$$F_{crit} = n^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

**Deflexiones mayores - Elástica.** Para deflexiones mayores es necesario usar la expresión exacta para el radio de curvatura, la ecuación diferencial de la elástica se puede encontrar de la ecuación básica que establece la proporcionalidad entre la curvatura en cada punto de la barra y el momento flector en ese punto de la barra. El momento de las fuerzas externas sobre la barra, en un punto de coordenada  $z$  será  $F \cdot (u_0 - z)$ , por lo tanto:

$$E \cdot I \cdot \frac{d\theta}{dS} = F \cdot u_0 - F \cdot z(x) = F \cdot u \quad \text{con } z(x) = u_0 - u(x). \quad (2.27)$$

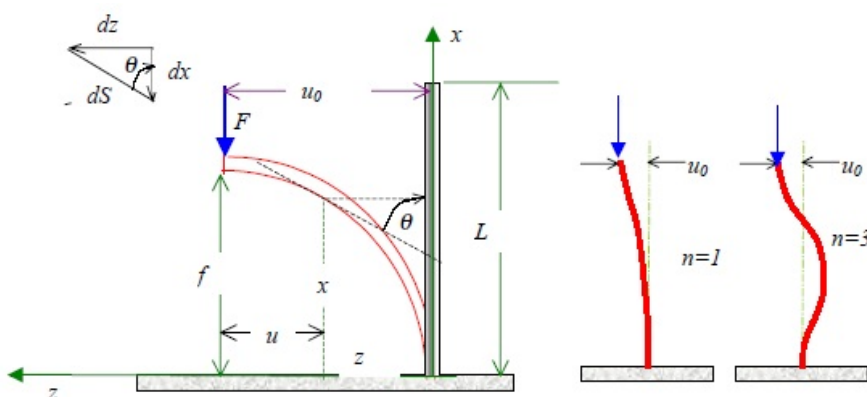


Figura 2.5: Pandeo de una viga.  $L$  representa su longitud,  $F$  es la carga vertical aplicada a la misma, cuya dirección coincide con la orientación original de barra sin carga. El parámetro  $f$  se denomina la flecha. La forma de la barra, llamada la "elástica" viene descrita por la función  $z(x)$ .

De la figura tenemos que  $\frac{dx}{dz} = \tan \theta$ . Las condiciones de contorno son: para  $x = 0$ ,  $z = 0$  y  $\frac{dx}{dz} = 0$ ; para  $z = u_0$ , tenemos  $\theta = \theta_0$  y  $\frac{dS}{d\theta} = 0$ .

Derivando esta expresión respecto de  $S$  y recordando que:

$$\frac{dz}{dS} = -\frac{du}{dS} = \sin \theta \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dS} = \cos \theta, \quad (2.28)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la tangente a la curva y el eje  $x$ , tenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot \sin \theta. \quad (2.29)$$

Tenemos, como antes decíamos, que

$$\lambda^2 \equiv \frac{1}{A_0^2} = \frac{F}{E \cdot I}. \quad (2.30)$$

La ecuación diferencial de la elástica se convierte en:

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} + \lambda^2 \cdot \sin \theta = 0. \quad (2.31)$$

Vemos que esta ecuación diferencial es idéntica a la ecuación diferencial del péndulo simple. Multiplicando esta última ecuación por  $\frac{d\theta}{dS}$  e integrando respecto de  $S$  obtenemos:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dS} \right)^2 - \lambda^2 \cdot \cos \theta = -\lambda^2 \cdot \cos \theta_0. \quad (2.32)$$

La constante del segundo miembro de (2.32) surge de hacer cumplir las condiciones de bordes de la barra. En el extremo libre de la misma, el momento o torque en este punto es nulo, por lo tanto su curvatura de la misma  $\left(\frac{d\theta}{dS}\right)$  también lo es. Por lo tanto para  $\theta = \theta_0$ ,  $\frac{d\theta}{dS} = 0$ , donde  $\theta_0$  es el ángulo que forma la tangente a la barra en el extremo libre del eje  $x$ . De este modo podemos escribir (2.32) como:

$$dS = -\frac{d\theta}{\sqrt{2} \cdot \lambda \cdot \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \frac{d\theta}{2\lambda \cdot \sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}. \quad (2.33)$$

Como suponemos que la longitud de la barra  $L$  no se modifica al flexionarse, tenemos:

$$L = \frac{1}{2 \cdot \lambda} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{\lambda} K\left(k, \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) representa una barra libre sometida a flexión. La misma se puede suponer como la superposición de dos barras empotradas. De este modo, la barra de longitud  $2L$  y flecha  $2f$  se puede tratar con las mismas ecuaciones que la barra empotrada de longitud  $L$  y flecha  $f$ , donde introdujimos la variable  $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ . Aquí  $K(k, \alpha)$  es la integral elíptica

incompleta de primera especie<sup>1</sup>. Esta relación es útil ya que establece una relación implícita de  $\theta_0$  como función de  $L, \lambda$  y  $F$ . Combinando la expresión (2.27) con la relación  $\frac{dz}{dS} = \cos \theta$  tenemos:

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{d\theta}{dz} \cdot \frac{dz}{dS} = \lambda^2 \cdot u_0 - \lambda^2 \cdot z(x), \quad (2.35)$$

por lo tanto:

$$u(\theta) = u_0 - z(\theta) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}. \quad (2.36)$$

Es interesante notar que esta ecuación satisface las condiciones de borde: para  $z = 0, \theta = 0$  y para  $z = u_0, \theta = \theta_0$ . También tenemos la relación:  $u_0^2 \cdot \lambda^2 = \sin \theta_0$ . La otra ecuación paramétrica de  $x = x(\theta)$  se puede obtener de las relaciones  $\frac{dx}{dz} = \tan \theta$  y derivada de (2.36) respecto de  $\theta$ .

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{-\cos \theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}}. \quad (2.37)$$

Integrando esta ecuación obtenemos:

$$x(\theta) = -\frac{1}{2\lambda} \cdot \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \phi \cdot dt}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin t}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \{2E(k, \phi) - K(k, \phi)\}, \quad (2.38)$$

donde introdujimos la variable  $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$  y  $\sin \phi = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}$ . Las funciones  $K(k, \phi)$  y  $E(k, \phi)$  son las integrales elípticas incompletas de primera y segunda especie respectivamente.

Las expresiones (2.36) y (2.38) son las ecuaciones paramétricas de la elástica. La ecuación (2.34) nos permite encontrar el ángulo  $\theta_0$  en función de  $L$ .

<sup>1</sup>Las integrales elípticas incompletas de primera especie se definen como:

$K(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$  y las integrales elípticas incompletas de segunda especie se

definen como:  $E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} \cdot dt$ . Las correspondientes integrales elípticas completas se obtienen para el caso particular en que  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Estas funciones no puede expresarse en términos de funciones elementales. Para su cálculo es necesario realizar la integración numéricamente. Ver apéndice A.

Finalmente la flecha  $f$  se puede encontrar a partir de la expresión (2.38), haciendo  $x(\theta_0)$ , osea:

$$f = x(\theta_0) = \frac{1}{2\lambda} \cdot \int_{\theta_0}^{\frac{-\pi}{2}} \frac{\sin t \cdot dt}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin t}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ 2 \cdot E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - c \right\}, \quad (2.39)$$

donde  $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$  y  $K\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$  son las integrales elípticas completas de segunda y primera especie respectivamente y el parámetro  $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$ . En términos de estas funciones podemos escribir (2.34) como:

$$L = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{\lambda} K\left(k, \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.40)$$

Finalmente, si tenemos una barra con dos extremos libre, la misma se puede suponer como la superposición de dos barras empotradas una invertida respecto de la otra. De este modo, las ecuaciones desarrolladas hasta aquí, para una barra empotrada de longitud  $L$  y flecha  $f$ , se pueden usar para describir una barra libre de longitud total  $2L$  y flecha  $2f$ , que por lo general son las magnitudes que fácilmente se pueden controlar y sirven de vínculos físicos del problema, se puede proceder de la siguiente manera:

1. Usamos las ecuaciones (2.39) y (2.40) para encontrar una relación matemática entre las variables  $\frac{f}{L}$  como función de  $\theta_0$ . Puede resultar útil generar un gráfico de  $\frac{f}{L}$  como función de  $\theta_0$ .

$$\frac{f}{L} = \left[ 2 \cdot \frac{E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)}{K\left(k, \frac{\pi}{2}\right)} - 1 \right] \text{ con } k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right). \quad (2.41)$$

2. A partir de la figura 2.6 o la relación matemática (2.41), obtenemos el valor de  $\theta_0$  como función de los valores observados de  $\frac{f}{L}$ .
3. Con el valor encontrado de  $\theta_0$ , utilizando las expresiones (2.36) y (2.38) podemos obtener la ecuación paramétrica de la forma de la elástica. Además podemos utilizar la expresión (2.39) para expresar  $\lambda = K\left(\frac{k, \frac{\pi}{2}}{L}\right)$ . De este modo obtenemos:

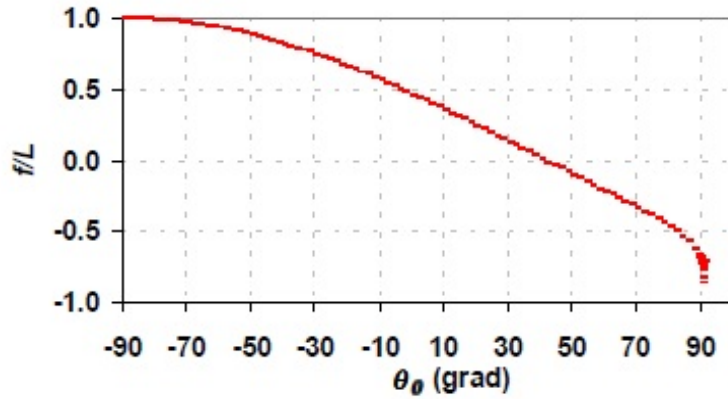


Figura 2.6: Gráfico de  $\frac{f}{L}$  como función de un ángulo  $\theta_0$  según la relación universal (2.41).

$$x(\theta) = \frac{L}{K(k, \frac{\pi}{2})} \cdot \{2E(k, \phi) - K(k, \phi)\} \quad (2.42)$$

y

$$u(\theta) = u_0 - z(\theta) = \frac{L}{K(k, \frac{\pi}{2})} \sqrt{2} \cdot \left[ \sqrt{\sin \theta_0} - \sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta} \right], \quad (2.43)$$

que puede compararse con los valores medidos de  $x(z)$  para la elástica de una barra de longitud  $2L$  y flecha  $2f$ .

Es interesante notar que la relación  $\frac{f}{L}$  y la forma de una barra de una dada longitud  $L$  y un dado valor de  $f$  es universal, igual para todas las barras. Además hay un factor de escala universal, que relaciona la fuerza  $F$  con la rigidez de la barra dada por  $E \cdot I$ , que se combinan para producir un valor dado de  $\lambda$ , según la expresión (2.30) [2].



## Capítulo 3

# CASOS PRÁCTICOS.

A continuación, se analiza la variación de rigidez o stiffness” que como se menciona antes consiste en el producto  $E \cdot I$ .

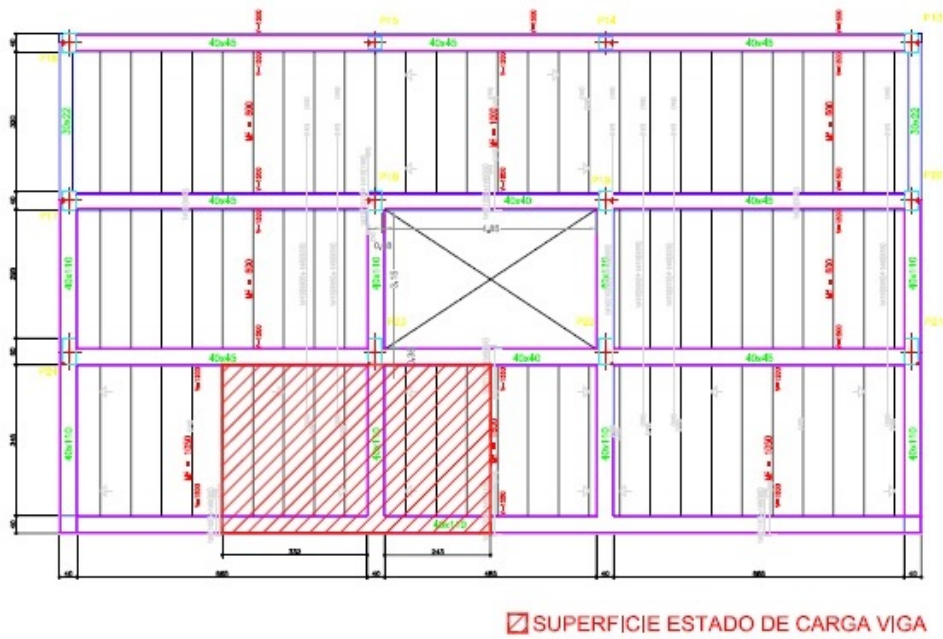
Para ello, se varía en primer lugar los materiales de cada caso, y así, observaremos qué ocurre al variar el módulo de elasticidad o módulo de Young  $E$  correspondiente a cada tipo de material. Y en segundo lugar, al variar la sección manteniendo el mismo material, ya que la inercia bruta  $I$  depende directamente de la sección de la viga o barra como indica la expresión  $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$  que la define.

De este modo, se observa el comportamiento, es decir, las reacciones, desplazamientos, giros, esfuerzos, e incluso se pueden visualizar los resultados de la ecuación de la elástica  $z(x)$ , más conocidos como deformada de la estructura. Esta es una ecuación, como se ha definido anteriormente, sirve para definir el campo de desplazamientos que sufre el eje de la viga desde su forma recta original a la forma curvada o flectada final.

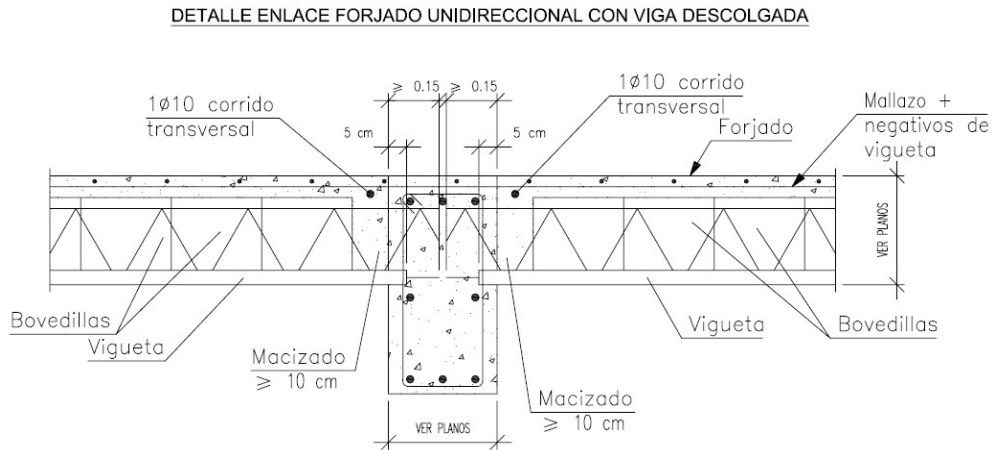
Para el estudio hemos elegido la siguiente edificación, y mostramos también diferentes planos para mostrar el tipo de viga elegido. Para facilitar el estudio, la viga se ha idealizado para representar una estructura plana de una barra empotrada en un extremo.



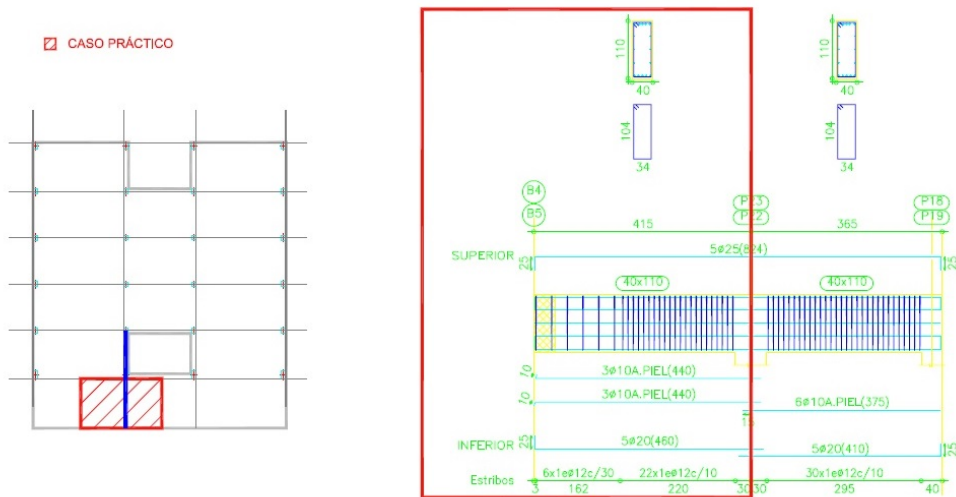
El plano en planta sería



detalle del forjado



y detalle del armado de la viga



DATOS DEL FORJADO	
Cargas (uso general)	Sección tipo del forjado
Piso propio	280 kg/m <sup>2</sup>
Zona aligerada:	
Reducción de uso:	120 kg/m <sup>2</sup>
Cargas muertas:	280 kg/m <sup>2</sup>
Carga total	680 kg/m <sup>2</sup>
Zona aligerada:	

CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES EMPLEADOS									
Material	Hormigón					Acero			
	Clase	Resistencia característica	Resistencia de cálculo	Clase	Resistencia característica	Resistencia de cálculo	Clase	Resistencia característica	Resistencia de cálculo
Hormigón	C30/37	30	37	A-1	B500S	500	500	B500S	500
Acero de refuerzo	B500S	500	500	A-1	B500S	500	500	B500S	500
Acero de alambres	B500S	500	500	A-1	B500S	500	500	B500S	500
Acero de alambres	B500S	500	500	A-1	B500S	500	500	B500S	500

Estudio de algunos casos interesantes:

### 3.1. Viga de peso despreciable empotrada con un extremo libre que sostiene un peso $P$ .

Esta situación se ilustra en la figura 2.2 A). Si concediéramos la sección de la viga a la derecha de  $mn$ , de las condiciones de equilibrio es fácil obtener:

$$V(x) = -P \quad (3.1)$$

y

$$M(x) = -P \cdot (L - x). \quad (3.2)$$

De la expresión (2.5) u (2.8), para pequeñas deformaciones de la barra  $\left(\frac{1}{R} \approx \frac{d^2z}{dx^2}\right)$  tenemos que, desde el extremo libre que sostiene el peso, es decir, desde la sección de la viga a la derecha de  $mn$ :

$$z(x) \approx -\frac{1}{6} \cdot \frac{P \cdot L}{E \cdot I} \cdot x^2 \cdot \left(3 - \frac{x}{L}\right); \quad \theta_A = \frac{3 \cdot f}{2 \cdot L}; \quad f \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I}.$$

En estas últimas ecuaciones hemos tenido en cuenta las condiciones de borde del problema, más específicamente hemos impuesto las condiciones:

$$z(0) = \frac{\partial z(0)}{\partial x} = 0.$$

Si hubiésemos tomado la sección de la viga a la izquierda de  $mn$ , es decir, desde el extremo empotrado tendríamos que estas ecuaciones tomarían la forma:

$$z(x) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{P}{E \cdot I} \cdot (L - x)^2 \cdot (2 + x); \quad \theta_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot L^2}{E \cdot I}; \quad f = \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot I}. \quad (3.3)$$

Para la obtención de las ecuaciones, así como, para la resolución de problemas de esta índole, en general, podremos tomar la sección que más convenga a nuestro criterio, sin menoscabo de los resultados. Siempre y cuando el criterio sea tomado al inicio de la resolución del problema, y una vez adoptado no sea variado [2].

EJEMPLO NUMÉRICO:

### 3.1.1. MISMA SECCIÓN-MATERIALES DIFERENTES.

**Carga puntual**

$$P_1 = 33,21 \text{ kN}.$$

**Módulo elástico de los materiales:**

$$\begin{aligned} E_{HA-35} &= 2,978 \cdot 10^{10} \text{ kN/m}^2, \\ E_{C-40} &= 1,400 \cdot 10^{10} \text{ kN/m}^2, \\ E_{C-14} &= 7,000 \cdot 10^9 \text{ kN/m}^2. \end{aligned}$$

**Relación de los módulos elásticos:**

$$\begin{aligned} E_{HA-35} &\simeq 2,12 \cdot E_{C-40}, \\ E_{HA-35} &\simeq 4,25 \cdot E_{C-14}, \\ E_{C-40} &= 2 \cdot E_{C-14}. \end{aligned}$$

Cabe mencionar que cuanto mayor es el módulo de elasticidad o módulo elástico  $E$  mayor es la rigidez del material. Por el contrario, cuanto menor sea el un módulo elástico más flexible será el material.

## SECCIÓN Y TENSIONES en la sección más solicitada.

### HA-35, MADERA C-40 Y MADERA C-14:

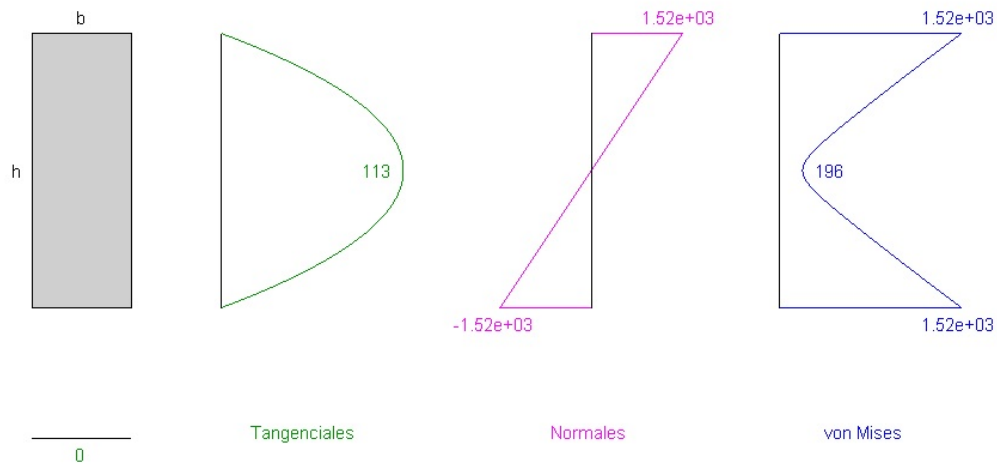
Sección común de HA\_REAL, MADERA C-40 y MADERA C-14. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 33.21 y flector = -122.88 (línea = 1, x = 0)

h = 1.09992 y b = 0.40003

MEFI



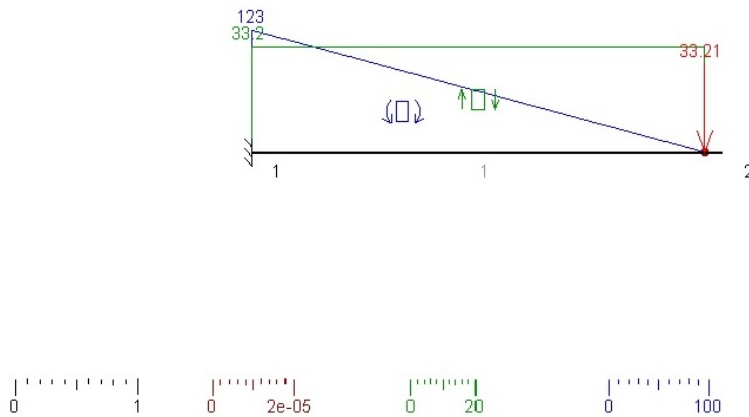
Cabe destacar que la tensión se define como  $\sigma = \frac{M}{S}$ , y no varía en ninguno de los 3 casos. Esto se debe a que: en primer lugar,  $M = cte$ , debido a que en cada ejemplo numérico el estado de cargas permanece constante; y en segundo lugar, a que en este caso particular,  $S = cte$ . para comprobar la influencia de la rigidez en función, únicamente, de la variación de  $E$ , ya que si  $S = cte$  la inercia  $I$  también lo es, y por tanto, la rigidez solo dependería del módulo elástico, que no produce variación en las tensiones internas en los distintos materiales.

**GRÁFICO DE ESFUERZOS Y DEFORMADA:**

**HA-35:**

Barra HA\_REAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

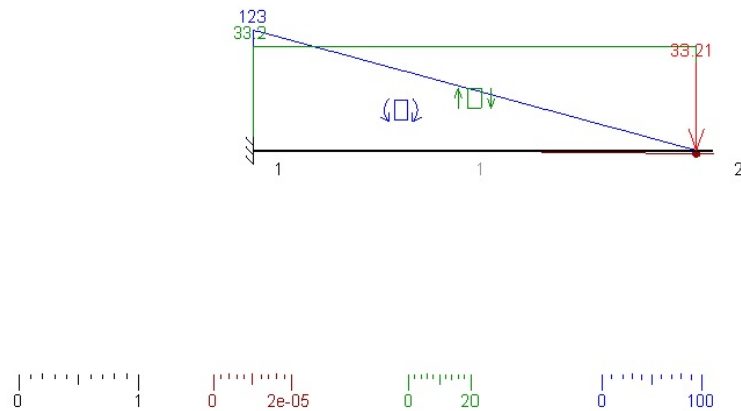
**MEFI**



**MADERA C-40:**

Barra MADERA\_C40 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

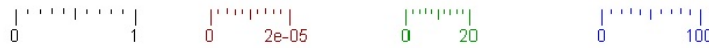
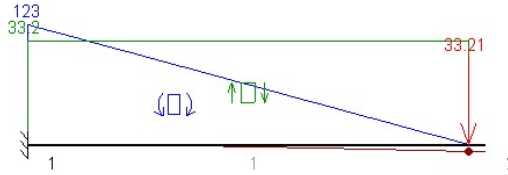
**MEFI**



## MADERA C-14:

Barra MADERA\_C14 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada  $\times 32767$ )

MEFI



Esto quiere decir que, cuando  $I = cte.$ , debido a que  $E_{HA-35} > E_{C-40} > E_{C-14}$  entonces  $f_{C-14} > f_{C-40} > f_{HA-35}$  o lo que es lo mismo,  $f$  es indirectamente proporcional a  $E$ . También se observa que los esfuerzos, cuando  $L = cte.$ , tanto el provocado por cortante  $V$  como el provocado por el momento flector  $M$ , dependen únicamente del estado de carga aplicado y no guardan relación con el coeficiente de rigidez  $E \cdot I$ . Finalmente, de la deformada se deduce que cuanto mayor es el valor de  $x$  en la ecuación de la elástica  $z(x)$  mayores son las deformaciones que provoca la carga sobre la barra. La deflexión de la barra se produce a partir de unos determinados valores de  $x$ . En el intervalo  $0 \leq x \leq L$  cuando los valores de  $x$  tienden a 0 la rigidez aumenta, y por tanto, cuando el valor de  $x$  tiende a  $L$  la rigidez disminuye, es decir,  $x$  y la rigidez  $E \cdot I$  tienen una relación inversamente proporcional.



**RESULTADOS:****HA35:**

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  3.3210e+01  1.2288e+02
2  0.0000e+00 -6.3853e-08 -2.4402e-08
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin      xAxiNul
      corIni      corFin      xCorNul
      fleIni      fleFin      xFleNul
      desIni      desFin
-----
1    1    2  0.0000e+00  0.0000e+00
      3.3210e+01  0.0000e+00  3.7000e+00
      -1.2288e+02  0.0000e+00  3.7000e+00
      0.0000e+00 -6.3853e-08
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5234e+03

```

**MADERA C-40:**

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  3.3210e+01  1.2288e+02
2  0.0000e+00 -9.5779e-07 -3.6604e-07
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin      xAxiNul
      corIni      corFin      xCorNul
      fleIni      fleFin      xFleNul
      desIni      desFin
-----
1    1    2  0.0000e+00  0.0000e+00
      3.3210e+01  0.0000e+00  3.7000e+00
      -1.2288e+02  0.0000e+00  3.7000e+00
      0.0000e+00 -9.5779e-07
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5234e+03

```

## MADERA C-14:

```

-----
estado 1
-----
-----
pun      desX      desY      girZ      reax      reay      momZ
-----
1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  3.3210e+01  1.2288e+02
2  0.0000e+00  -1.9156e-06  -7.3207e-07  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin      xAxINu1
corIni      corFin      xCorNu1
fleIni      fleFin      xFleNu1
desIni      desFin
-----
1      1      2      0.0000e+00  0.0000e+00
3.3210e+01  0.0000e+00  3.7000e+00
-1.2288e+02  0.0000e+00  3.7000e+00
0.0000e+00  -1.9156e-06
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5234e+03
-----

```

Todo lo anteriormente expuesto queda reflejado en los datos. Además, con  $E \neq cte$  e  $I = cte$  se puede observar que el giro  $\theta$  tiene una relación inversamente proporcional con la rigidez  $E \cdot I$  y directamente proporcional con el momento flector, el cual se produce en el mismo eje Z.

### 3.1.2. MISMO MATERIAL-SECCIONES DIFERENTES.

Módulo de Young de los materiales:

$$E_{HA-35} = 2,978 \cdot 10^{10} kN/m^2,$$

$$E_{IPE600} = 2,100 \cdot 10^8 kN/m^2,$$

$$E_{IPE300} = 2,100 \cdot 10^8 kN/m^2.$$

Relación de los módulos elásticos:

$$E_{HA-35} \simeq 142 \cdot E_{IPE600/IPE300}.$$

**SECCION Y TENSIONES en la sección más solicitada:**

**HA35:**

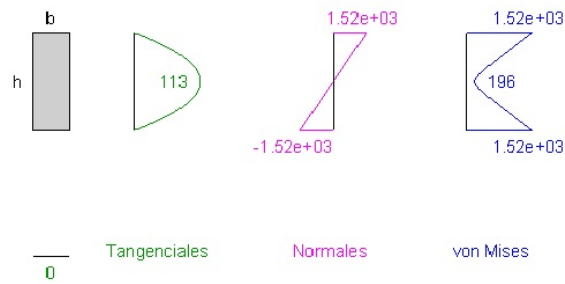
Barra HA\_REAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 33.21 y flector = -122.88 (línea = 1, x = 0)

h = 1.09992 y b = 0.40003

**MEFI**



**HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):**

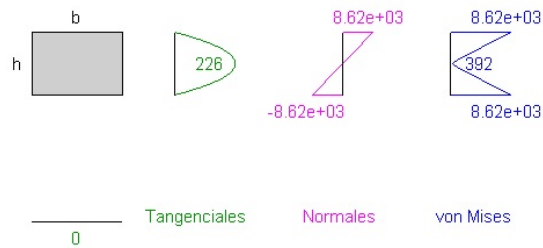
Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 33.21 y flector = -122.88 (línea = 1, x = 0)

h = 0.388908 y b = 0.565687

**MEFI**



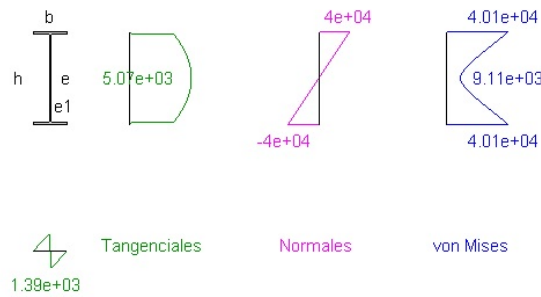
**IPE600:**

Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 33.21 y flector = -122.88 (línea = 1, x = 0)

IPE600 : h = 600 mm, b = 220 mm, e = 12 mm y e1 = 19 mm

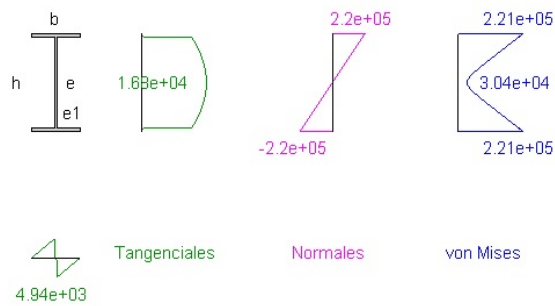
**MEFI****IPE300:**

Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 33.21 y flector = -122.88 (línea = 1, x = 0)

IPE300 : h = 300 mm, b = 150 mm, e = 7.1 mm y e1 = 10.7 mm

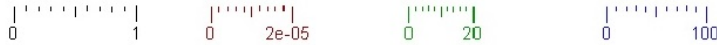
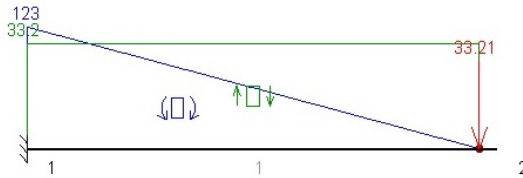
**MEFI**

En este supuesto la tensión varía para cada caso, tanto la normal como la tangencial, o la de Von Mises, esto es debido a que  $S \neq cte.$  y que  $\sigma = \frac{M}{S}$ .

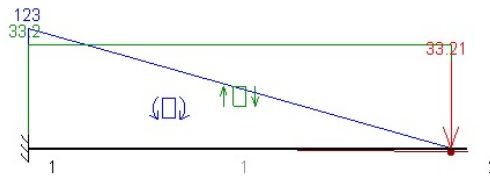
Como  $M = cte.$  , ya que en cada ejemplo numérico el estado de cargas permanece constante, para comprobar la influencia de la rigidez en función, únicamente, de la variación de la inercia  $I$ ,  $E = cte.$ , por lo que la rigidez depende exclusivamente de la inercia.

**GRÁFICO DE ESFUERZOS Y DEFORMADA:****HA35:**

Barra HA\_REAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

**MEFI****HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):**

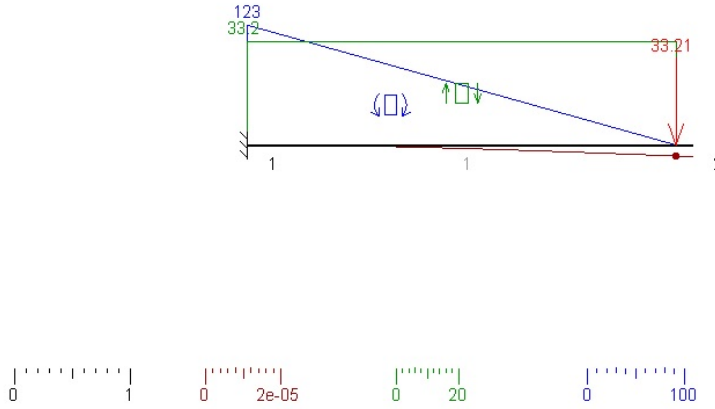
Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

**MEFI**

**IPE600:**

Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)  
 Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada  $\times 32767$ )

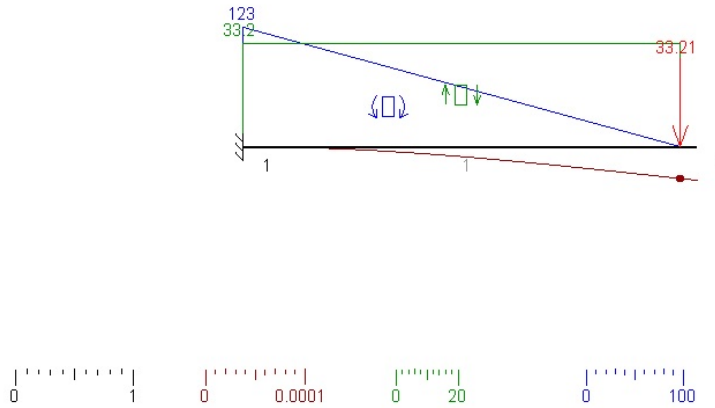
MEFI



**IPE300:**

Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL. (estado 1)  
 Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada  $\times 8402$ )

MEFI



Debido a que  $E = cte.$  para los casos expuestos de hormigón y constante en los casos de acero, y dado que  $L = cte.$  y  $P_1 = cte.$  la variación en  $f$

depende exclusivamente de la variación en  $I$  y tienen una relación inversamente proporcional. Por tanto,  $f$  también es indirectamente proporcional a la rigidez  $E \cdot I$ . También se observa que los esfuerzos, cuando  $L = cte.$ , tanto el provocado por cortante  $V$  como el provocado por el momento flector  $M$ , dependen únicamente del estado de carga aplicado y no guardan relación con el coeficiente de rigidez  $E \cdot I$ . Finalmente, de la deformada se deduce que cuanto mayor es el valor de  $x$  en la ecuación de la elástica  $z(x)$  mayores son las deformaciones que provoca la carga sobre la barra. La deflexión de la barra se produce a partir de unos determinados valores de  $x$ . En el intervalo  $0 \leq x \leq L$  cuando los valores de  $x$  tienden a 0 la rigidez aumenta, y por tanto, cuando el valor de  $x$  tiende a  $L$  la rigidez disminuye, es decir,  $x$  y la rigidez  $E \cdot I$  tienen una relación inversamente proporcional.



**RESULTADOS:****HA35:**

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  3.3210e+01  1.2288e+02
  2  0.0000e+00 -6.3853e-08 -2.4402e-08
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin      xAxiNul
corIni      corFin      xCorNul
fleIni      fleFin      xFleNul
desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
      3.3210e+01  0.0000e+00  3.7000e+00
      -1.2288e+02  0.0000e+00  3.7000e+00
      0.0000e+00 -6.3853e-08
-----
tensión equivalente von Mises máxima
1.5234e+03

```

**HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):**

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  3.3210e+01  1.2288e+02
  2  0.0000e+00 -1.0215e-06 -3.9038e-07
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin      xAxiNul
corIni      corFin      xCorNul
fleIni      fleFin      xFleNul
desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
      3.3210e+01  0.0000e+00  3.7000e+00
      -1.2288e+02  0.0000e+00  3.7000e+00
      0.0000e+00 -1.0215e-06
-----
tensión equivalente von Mises máxima
8.6169e+03

```

## IPE600:

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
 1 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 3.3210e+01 1.2288e+02
 2 0.0000e+00 -3.0761e-06 -1.1756e-06 0.0000e+00 3.3210e+01 1.2288e+02
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin      xAxiNu1
      corIni      corFin      xCorNu1
      fleIni      fleFin      xFleNu1
      desIni      desFin
-----
 1 1 2 0.0000e+00 0.0000e+00 3.7000e+00
      3.3210e+01 0.0000e+00 3.7000e+00
      -1.2288e+02 0.0000e+00 3.7000e+00
      0.0000e+00 -3.0761e-06
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
4.0106e+04

```

## IPE300:

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
 1 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 3.3210e+01 1.2288e+02
 2 0.0000e+00 -3.3882e-05 -1.2948e-05 0.0000e+00 3.3210e+01 1.2288e+02
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin      xAxiNu1
      corIni      corFin      xCorNu1
      fleIni      fleFin      xFleNu1
      desIni      desFin
-----
 1 1 2 0.0000e+00 0.0000e+00 3.7000e+00
      3.3210e+01 0.0000e+00 3.7000e+00
      -1.2288e+02 0.0000e+00 3.7000e+00
      0.0000e+00 -3.3882e-05
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
2.2064e+05

```

Como en el caso anterior, todo lo expuesto queda reflejado en los datos. Además, con  $E = cte.$  e  $I \neq cte.$  se confirma, al igual que en el caso inverso, que el giro  $\theta$  tiene una relación inversamente proporcional con la rigidez  $E \cdot I$  y directamente proporcional con el momento flector, el cual se produce en el mismo eje Z.

### 3.2. Viga con carga distribuída uniformemente, empotrada y con el otro extremo libre.

Esta situación se ilustra en la figura 2.2 B). Si concediéramos la sección de la viga a la derecha de  $mn$ , de las condiciones de equilibrio es fácil obtener:

$$V(x) = -g \cdot \lambda \cdot (L - x). \quad (3.4)$$

Aquí,  $g \cdot \lambda$  es la carga por unidad de longitud,  $\lambda = \rho \cdot A$  la densidad lineal de masa,  $\rho$  la densidad (masa por unidad de volumen),  $A$  el área transversal de la barra y  $g$  la aceleración de la gravedad. También tenemos:

$$M(x) = -\frac{g \cdot \rho \cdot A}{2} \cdot (L - x)^2. \quad (3.5)$$

De la expresión (2.8), para pequeñas deformaciones de la barra tenemos que:

$$z(x) \approx -\frac{1}{24} \cdot \frac{g \cdot m \cdot L}{E \cdot I} \cdot x^2 \cdot \left(6L - 4x + \frac{x^2}{L}\right); \theta_A = \frac{4 \cdot f}{3 \cdot L}; f \approx \frac{1}{8} \cdot \frac{g \cdot m \cdot L^3}{E \cdot I}. \quad (3.6)$$

Todo ello desde el extremo opuesto sería:

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{24} \cdot \frac{g \cdot m}{E \cdot I} \cdot (L - x)^2 \cdot (3L^2 + 2Lx + x^3); \\ \theta_A &= \frac{1}{6} \cdot \frac{g \cdot m \cdot L^3}{E \cdot I}; f = \frac{1}{8} \cdot \frac{g \cdot m \cdot L^4}{E \cdot I} [2]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

#### EJEMPLO NUMÉRICO:

A continuación, se analiza la rigidez o stiffness", como se ha hecho con el estado de carga puntual.

#### Carga puntual:

$$P_2 = 166,149kN/m.$$

### 3.2.1. MISMA SECCIÓN-MATERIALES DIFERENTES

SECCION Y TENSIONES en la sección más solicitada.

HA-35, MADERA C-40 Y MADERA C-14:

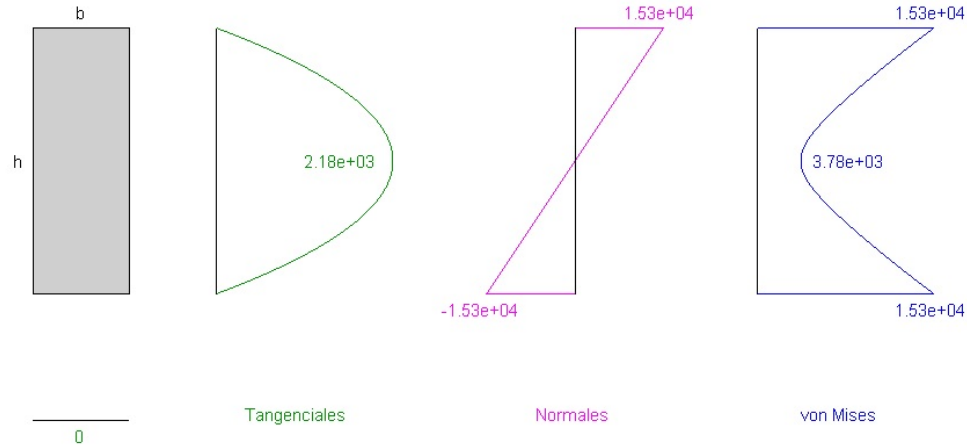
Sección común de HA\_REAL, MADERA C-40 y MADERA C-14. ESTADO UNIFORME. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 639.67 y flector = -1231.4 (línea = 1, x = 0)

h = 1.09992 y b = 0.40003

MEFI



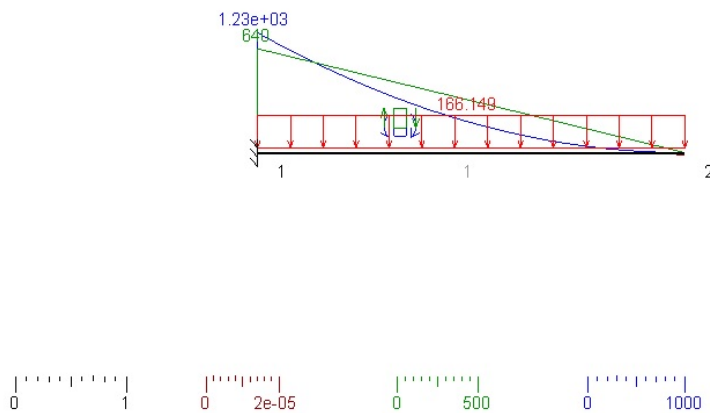
Al igual que con el estado de carga puntual, en este caso,  $S = cte.$  para comprobar la influencia de la rigidez en función, únicamente, de la variación de  $E$ , ya que si  $S = cte.$  la inercia  $I$  también lo es, y por tanto, la rigidez solo dependería del módulo elástico, que no produce variación en las tensiones internas en los distintos materiales.

**GRÁFICO DE ESFUERZOS Y DEFORMADA:**

**HA-35:**

Barra HA empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)  
 Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

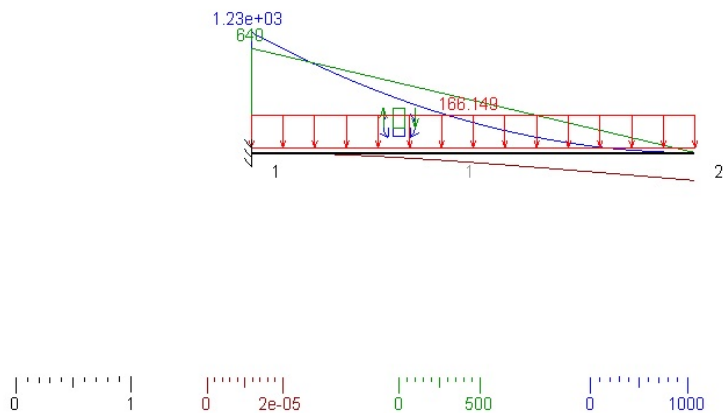
**MEFI**



**MADERA C-40:**

Barra MADERA\_C40 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)  
 Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

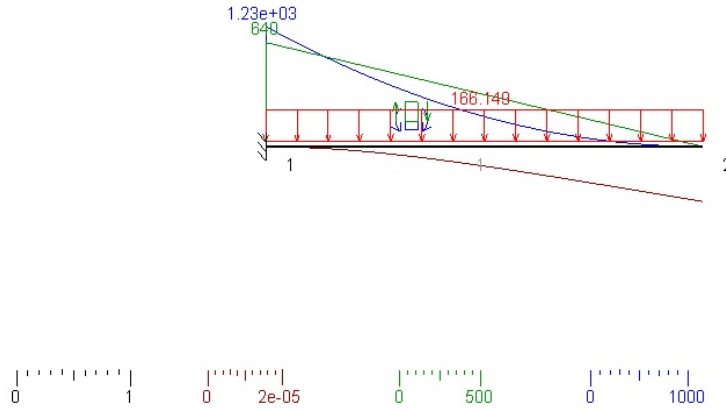
**MEFI**



## MADERA C-14:

Barra MADERA\_C14 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada  $\times 32767$ )

MEFI



Al igual que en el caso puntual, cuando  $I = cte.$ , debido a que  $E_{HA-35} > E_{C-40} > E_{C-14}$  entonces  $f_{C-14} > f_{C-40} > f_{HA-35}$  o lo que es lo mismo,  $f$  es indirectamente proporcional a  $E$ . También se observa que los esfuerzos, cuando  $L = cte.$ , tanto el provocado por cortante  $V$  como el provocado por el momento flector  $M$ , dependen del estado de carga aplicado y la distancia a la que se encuentra del extremo empotrado, pero dichos esfuerzos no guardan relación con el coeficiente de rigidez  $E \cdot I$ . Finalmente, de la deformada se deduce que cuanto mayor es el valor de  $x$  en la ecuación de la elástica  $z(x)$  mayores son las deformaciones que provoca la carga sobre la barra. La deflexión de la barra se produce a partir de unos determinados valores de  $x$ . En el intervalo  $0 \leq x \leq L$  cuando los valores de  $x$  tienden a 0 la rigidez aumenta, y por tanto, cuando el valor de  $x$  tiende a  $L$  la rigidez disminuye, es decir,  $x$  y la rigidez  $E \cdot I$  tienen una relación inversamente proporcional.

**RESULTADOS:****HA35:**

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
  2  0.0000e+00 -4.8982e-07 -1.6964e-07
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.3967e+02  0.0000e+00
                        -1.2314e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -4.8982e-07
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5266e+04

```

**MADERA C-40:**

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
  2  0.0000e+00 -7.3474e-06 -2.5445e-06
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.3967e+02  0.0000e+00
                        -1.2314e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -7.3474e-06
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5266e+04

```

## MADERA C-14:

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
  2  0.0000e+00 -1.4695e-05 -5.0891e-06  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.3967e+02  0.0000e+00
                        -1.2314e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -1.4695e-05
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5266e+04

```

Al igual que en el anterior caso, todo ello queda reflejado en los datos. Además, con  $E \neq cte$  e  $I = cte$  se puede observar que el giro  $\theta$  tiene una relación inversamente proporcional con la rigidez  $E \cdot I$  y directamente proporcional con el momento flector, el cual se produce en el mismo eje Z, tal y como ocurre en el caso puntual.



### 3.2.2. MISMO MATERIAL-SECCIONES DIFERENTES.

SECCION Y TENSIONES en la sección más solicitada:

#### HA35:

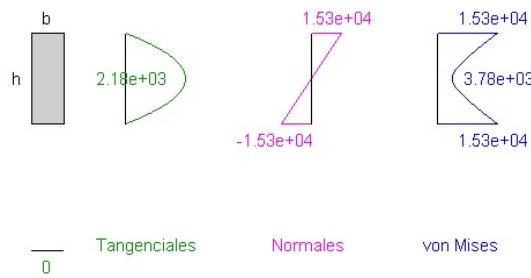
Barra HA empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 639.67 y flector = -1231.4 (línea = 1, x = 0)

h = 1.09992 y b = 0.40003

MEFI



#### HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):

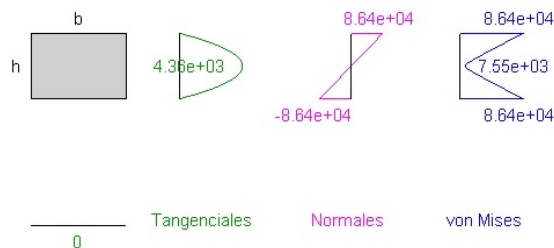
Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 639.67 y flector = -1231.4 (línea = 1, x = 0)

h = 0.388908 y b = 0.565687

MEFI



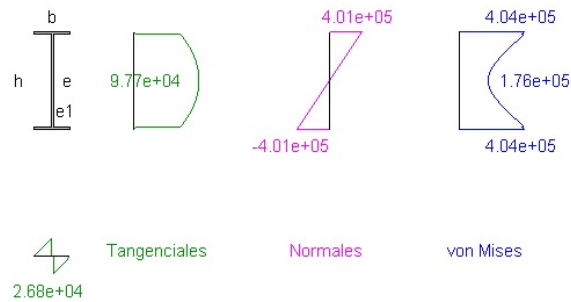
**IPE600:**

Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 639.67 y flector = -1231.4 (línea = 1, x = 0)

IPE600 : h = 600 mm, b = 220 mm, e = 12 mm y e1 = 19 mm

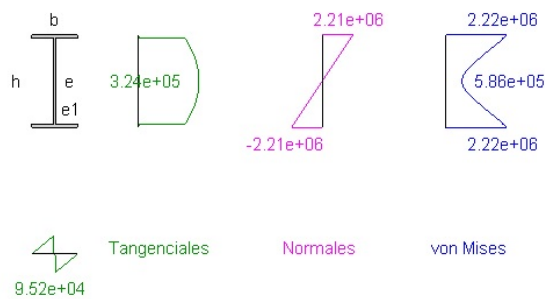
**MEFI****IPE300:**

Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 639.67 y flector = -1231.4 (línea = 1, x = 0)

IPE300 : h = 300 mm, b = 150 mm, e = 7.1 mm y e1 = 10.7 mm

**MEFI**

En este supuesto la tensión varía para cada caso, tanto la normal como la tangencial, o la de Von Mises, esto es debido a que  $S \neq cte.$  y que  $\sigma = \frac{M}{S}$ .

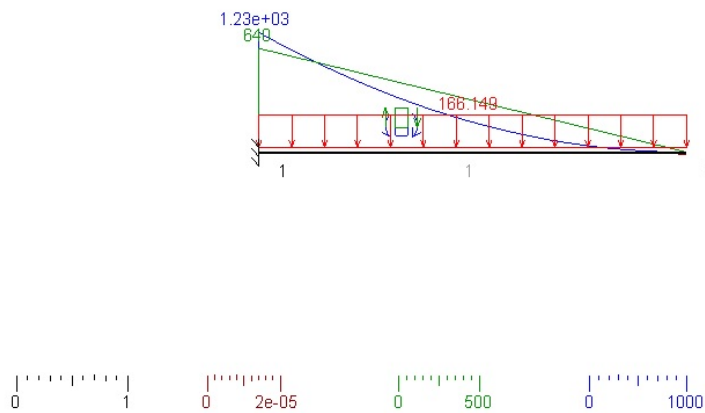
Como  $M = cte.$  , ya que en cada ejemplo numérico el estado de cargas permanece constante, para comprobar la influencia de la rigidez en función, únicamente, de la variación de la inercia  $I$ ,  $E = cte.$ , por lo que la rigidez depende exclusivamente de la inercia.

## GRÁFICO DE ESFUERZOS Y DEFORMADA:

## HA35:

Barra HA empotrada en un extremo y libre en el otro ESTADO UNIFORME. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

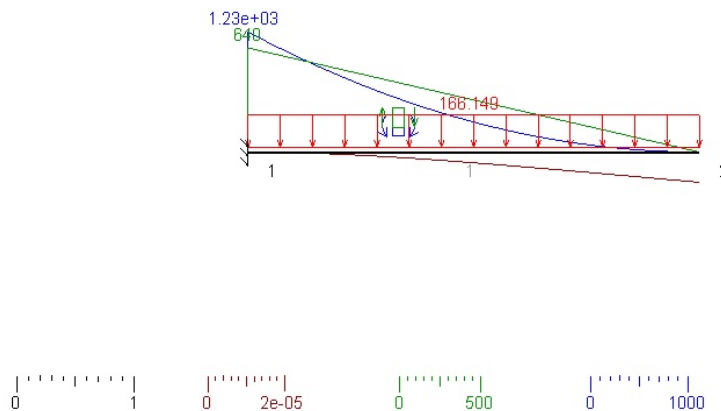
MEFI



## HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):

Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro ESTADO UNIFORME. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

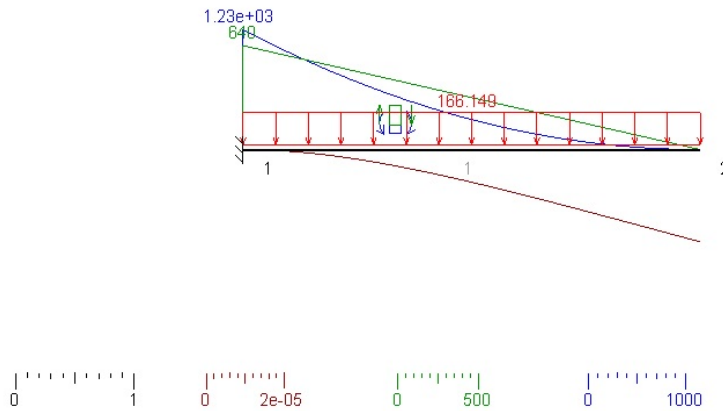
MEFI



**IPE600:**

Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

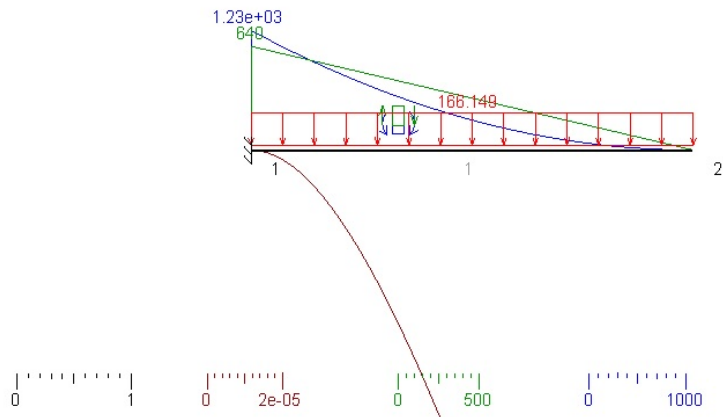
MEFI



**IPE300:**

Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME. (estado 1)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

MEFI



Debido a que  $E = cte.$  para los casos expuestos de hormigón y constante en los casos de acero, y dado que  $L = cte.$  y  $P_1 = cte.$  la variación en  $f$

depende exclusivamente de la variación en  $I$  y tienen una relación inversamente proporcional. Por tanto,  $f$  también es indirectamente proporcional a la rigidez  $E \cdot I$ . También se observa que los esfuerzos, cuando  $L = cte.$ , tanto el provocado por cortante  $V$  como el provocado por el momento flector  $M$ , dependen únicamente del estado de carga aplicado y no guardan relación con el coeficiente de rigidez  $E \cdot I$ . Finalmente, de la deformada se deduce que cuanto mayor es el valor de  $x$  en la ecuación de la elástica  $z(x)$  mayores son las deformaciones que provoca la carga sobre la barra. La deflexión de la barra se produce a partir de unos determinados valores de  $x$ . En el intervalo  $0 \leq x \leq L$  cuando los valores de  $x$  tienden a 0 la rigidez aumenta, y por tanto, cuando el valor de  $x$  tiende a  $L$  la rigidez disminuye, es decir,  $x$  y la rigidez  $E \cdot I$  tienen una relación inversamente proporcional.

**RESULTADOS:****HA35:**

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
  2  0.0000e+00 -4.8982e-07 -1.6964e-07
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.3967e+02  0.0000e+00
                        -1.2314e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -4.8982e-07
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5266e+04

```

**HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):**

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
  2  0.0000e+00 -7.8360e-06 -2.7138e-06
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.3967e+02  0.0000e+00
                        -1.2314e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -7.8360e-06
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
8.6352e+04

```

## IPE600:

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
2  0.0000e+00  -2.3598e-05  -8.1723e-06  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
1    1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.3967e+02  0.0000e+00
                        -1.2314e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00  -2.3598e-05
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
4.0387e+05

```

## IPE300:

```

-----
estado 1
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
2  0.0000e+00  -2.5991e-04  -9.0013e-05  0.0000e+00  6.3967e+02  1.2314e+03
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
1    1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.3967e+02  0.0000e+00
                        -1.2314e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00  -2.5991e-04
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
2.2155e+06

```

Como decía antes, todo lo expuesto queda reflejado en los datos. Además, con  $E = cte.$  e  $I \neq cte.$  se confirma, al igual que en el caso inverso, que el giro  $\theta$  tiene una relación inversamente proporcional con la rigidez  $E \cdot I$  y directamente proporcional con el momento flector, el cual se produce en el mismo eje Z.



### 3.3. Viga con carga distribuida variable $g \cdot \lambda(x)$ , empotrada en un extremo y con el otro extremo libre

Esta situación es una generalización de la ilustrada en la figura 2.2 B). Si concediéramos la sección de la viga a la derecha de  $mn$ , de las condiciones de equilibrio obtendremos:

$$V(x) = - \int_x^L g \cdot \lambda(x') \cdot dx', \quad (3.8)$$

también tenemos:

$$M(x) = -g \int_x^L \lambda(x') \cdot (x - x') \cdot dx', \quad (3.9)$$

si derivamos esta última expresión respecto de  $x$  obtenemos:

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} = - \int_x^L g \cdot \lambda(x') \cdot dx = V(x), \quad (3.10)$$

derivando nuevamente obtenemos:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = -g \cdot \lambda(x) = -g \cdot A(x) \cdot \rho(x), \quad (3.11)$$

combinando esta última expresión con (2.7) para pequeñas deformaciones obtenemos la importante relación de Euler-Bernoulli:

$$\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} \approx E \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( I \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) = \lambda(x). \quad (3.12)$$

Si la sección de viga es uniforme, esta última expresión se reduce a:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = g \cdot \lambda(x). \quad (3.13)$$

Usando el principio de D'alembert, esta última expresión nos permite escribir la ecuación diferencial del movimiento de la barra:

$$EI \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \approx -\lambda(x) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} [2]. \quad (3.14)$$

EJEMPLO NUMÉRICO (estado de carga combinado):

A continuación, se analiza la variación de rigidez o stiffness”, como se ha hecho con los estados de cargas anteriores.

**Carga puntual:**

$$P_1 = 156,92kN/m,$$

$$P_2 = 91,33kN/m,$$

$$P_3 = 33,21kN,$$

$$P_4 = 11,53kN/m.$$

### 3.3.1. MISMA SECCIÓN-MATERIALES DIFERENTES.

SECCION Y TENSIONES en la sección más solicitada.

HA-35, MADERA C-40 Y MADERA C-14:

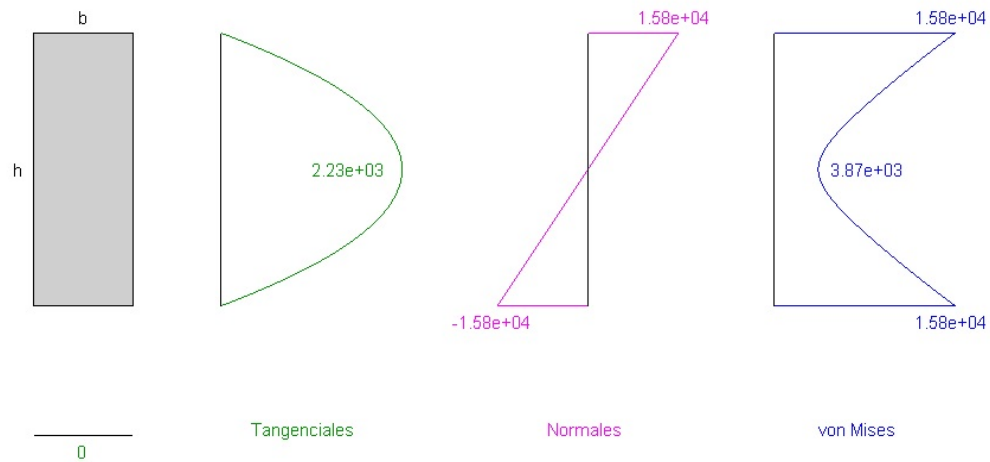
Sección común de HA\_REAL, MADERA C-40 y MADERA C-14. ESTADO COMBINADO. (estado 5)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 655.54 y flector = -1275.6 (línea = 1, x = 0)

h = 1.09992 y b = 0.40003

MEFI



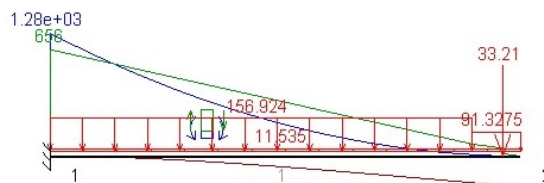
Al igual que con el estado de carga puntual, en este caso,  $S = cte.$  para comprobar la influencia de la rigidez en función, únicamente, de la variación de  $E$ , ya que si  $S = cte.$  la inercia  $I$  también lo es, y por tanto, la rigidez solo dependería del módulo elástico, la cual no produce variación en las tensiones internas en los distintos materiales.

**GRÁFICO DE ESFUERZOS Y DEFORMADA:****HA-35:**

Barra HA empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

**MEFI****MADERA C-40:**

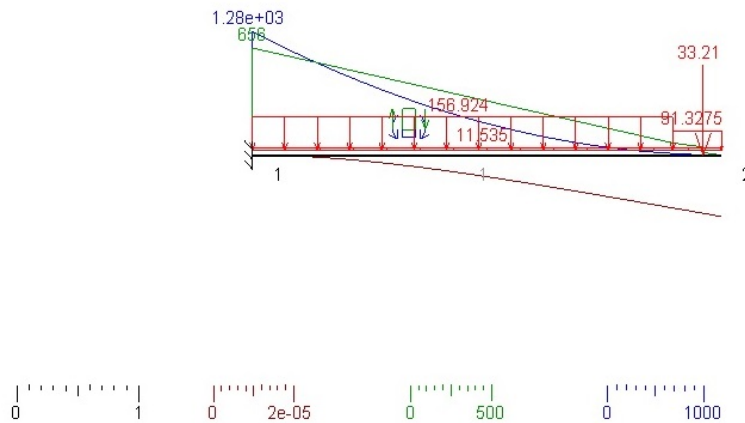
Barra MADERA\_C40 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

**MEFI**

## MADERA C-14:

Barra MADERA\_C14 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada  $\times 32767$ )

MEFI



Como en los casos puntual y uniforme, cuando  $I = cte.$ ,  $f$  es indirectamente proporcional a  $E$  y por lo tanto también lo es a la rigidez. También se observa que los esfuerzos, cuando  $L = cte.$ , tanto el provocado por cortante  $V$  como el provocado por el momento flector  $M$ , dependen del estado de carga aplicado y la distancia a la que se encuentra del extremo empotrado, pero dichos esfuerzos no guardan relación con el coeficiente de rigidez  $E \cdot I$ . Finalmente, de la deformada se deduce que cuanto mayor es el valor de  $x$  en la ecuación de la elástica  $z(x)$  mayores son las deformaciones que provoca la carga sobre la barra. La deflexión de la barra se produce a partir de unos determinados valores de  $x$ . En el intervalo  $0 \leq x \leq L$  cuando los valores de  $x$  tienden a 0 la rigidez aumenta, y por tanto, cuando el valor de  $x$  tiende a  $L$  la rigidez disminuye, es decir,  $x$  y la rigidez  $E \cdot I$  tienen una relación inversamente proporcional.

## RESULTADOS:

## HA35:

```

-----
estado 5
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.5554e+02  1.2756e+03
  2  0.0000e+00 -5.1108e-07 -1.7762e-07
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.5554e+02 -1.7429e-09
                        -1.2756e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -5.1108e-07
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5814e+04

```

## MADERA C-40:

```

-----
estado 5
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.5554e+02  1.2756e+03
  2  0.0000e+00 -7.6661e-06 -2.6642e-06
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.5554e+02 -5.8419e-09
                        -1.2756e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -7.6661e-06
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5814e+04

```

## MADERA C-14:

```

-----
estado 5
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.5554e+02  1.2756e+03
2  0.0000e+00  -1.5332e-05  -5.3285e-06  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.5554e+02  -2.1695e-09
                        -1.2756e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00  -1.5332e-05
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5814e+04
-----

```

En el caso uniforme podemos comprobar de nuevo que con  $E \neq cte.$  e  $I = cte.$  se puede observar que el giro  $\theta$  tiene una relación inversamente proporcional con la rigidez  $E \cdot I$  y directamente proporcional con el momento flector, el cual se produce en el mismo eje Z, tal y como ocurre en el caso puntual.

### 3.3.2. MISMO MATERIAL-SECCIONES DIFERENTES.

SECCION Y TENSIONES en la sección más solicitada:

#### HA35:

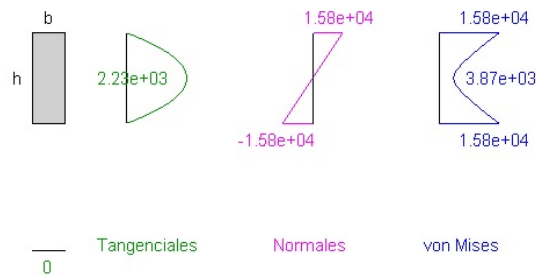
Barra HA empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 655.54 y flector = -1275.6 (línea = 1,  $x = 0$ )

$h = 1.09992$  y  $b = 0.40003$

MEFI



#### HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):

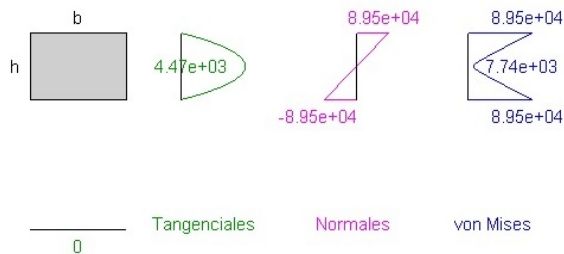
Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)

Tensiones tangenciales, normales y de von Mises

Axil = 0, cortante = 655.54 y flector = -1275.6 (línea = 1,  $x = 0$ )

$h = 0.388908$  y  $b = 0.565687$

MEFI

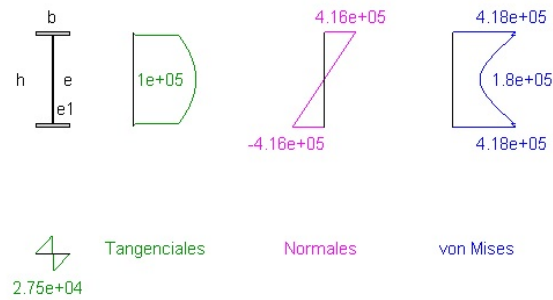




**IPE600:**

Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
 Tensiones tangenciales, normales y de von Mises  
 Axil = 0, cortante = 655.54 y flector = -1275.6 (linea = 1, x = 0)  
 IPE600 : h = 600 mm, b = 220 mm, e = 12 mm y e1 = 19 mm

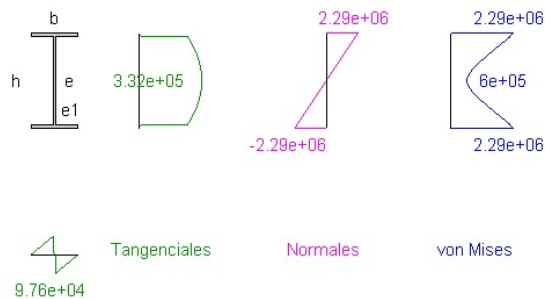
MEFI



**IPE300:**

Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
 Tensiones tangenciales, normales y de von Mises  
 Axil = 0, cortante = 655.54 y flector = -1275.6 (linea = 1, x = 0)  
 IPE300 : h = 300 mm, b = 150 mm, e = 7.1 mm y e1 = 10.7 mm

MEFI



La tensión varía para cada caso, tanto la normal como la tangencial, o la de Von Mises, esto es debido a que  $S \neq cte.$  y que  $\sigma = \frac{M}{S}$ . Como  $M = cte.$ , ya

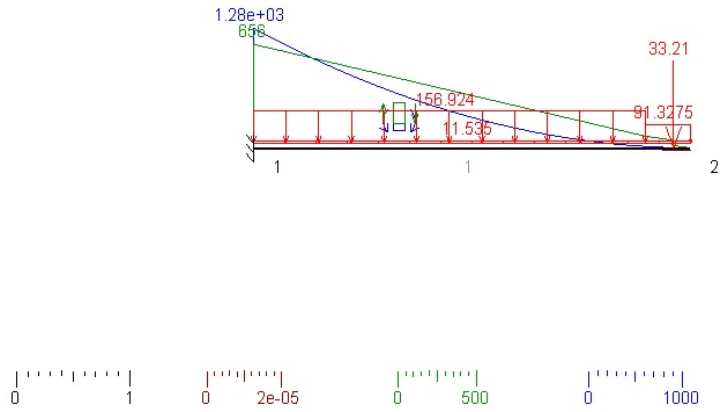
que en cada ejemplo numérico, el estado de cargas permanece constante, para comprobar la influencia de la rigidez en función, únicamente, de la variación de la inercia  $I$ ,  $E = cte.$ , por lo que la rigidez depende exclusivamente de la inercia.

**GRÁFICO DE ESFUERZOS Y DEFORMADA:**

**HA35:**

Barra HA empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
 Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

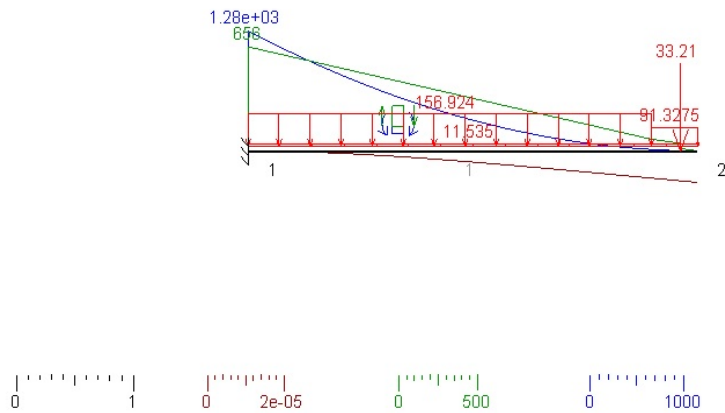
**MEFI**



**HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):**

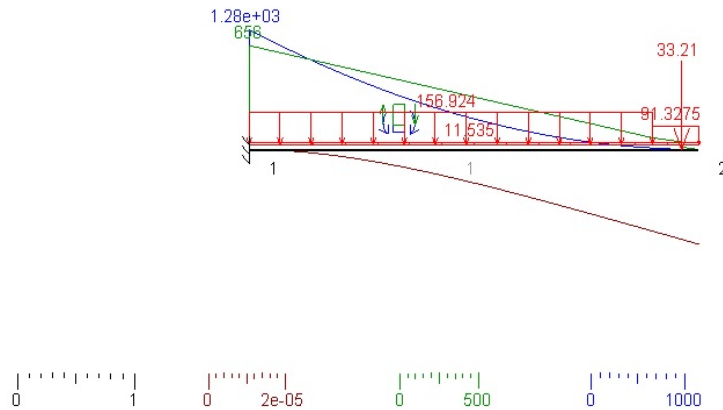
Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
 Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada x 32767)

**MEFI**

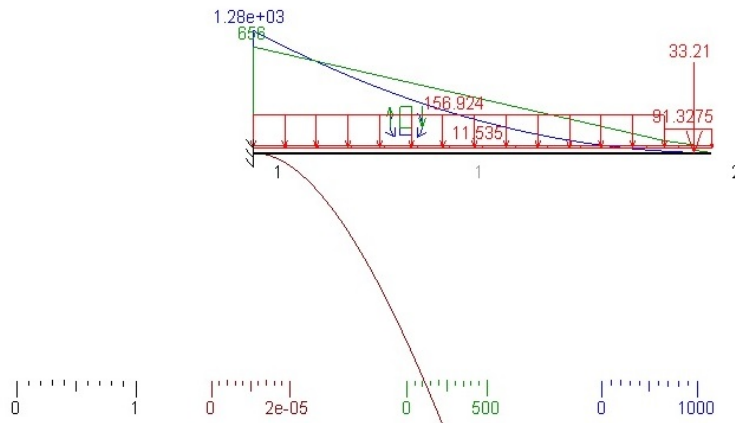


**IPE600:**

Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada  $\times 32767$ )

**MEFI****IPE300:**

Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO. (estado 5)  
Esfuerzos cortantes y momentos flectores (deformada  $\times 32767$ )

**MEFI**

Por último, en el estado de cargas combinado volvemos a observar que debido a que  $E = cte.$  para los casos expuestos de hormigón y constante

en los casos de acero, y dado que  $L = cte.$  y  $P_3 = cte.$  la variación en  $f$  depende exclusivamente de la variación en  $I$  y tienen una relación inversamente proporcional. Por tanto,  $f$  también es indirectamente proporcional a la rigidez  $E \cdot I$ . También se observa que los esfuerzos, cuando  $L = cte.$ , tanto el provocado por cortante  $V$  como el provocado por el momento flector  $M$ , dependen únicamente del estado de carga aplicado y no guardan relación con el coeficiente de rigidez  $E \cdot I$ . Finalmente, de la deformada se deduce que cuanto mayor es el valor de  $x$  en la ecuación de la elástica  $z(x)$  mayores son las deformaciones que provoca la carga sobre la barra. La deflexión de la barra se produce a partir de unos determinados valores de  $x$ . En el intervalo  $0 \leq x \leq L$  cuando los valores de  $x$  tienden a 0 la rigidez aumenta, y por tanto, cuando el valor de  $x$  tiende a  $L$  la rigidez disminuye, es decir,  $x$  y la rigidez  $E \cdot I$  tienen una relación inversamente proporcional.

## RESULTADOS:

## HA35:

```

-----
estado 5
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.5554e+02  1.2756e+03
  2  0.0000e+00 -5.1108e-07 -1.7762e-07
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.5554e+02 -1.7429e-09
                        -1.2756e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -5.1108e-07
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
1.5814e+04

```

## HA35 (1/2 DE LA SECCIÓN):

```

-----
estado 5
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
  1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.5554e+02  1.2756e+03
  2  0.0000e+00 -8.1760e-06 -2.8414e-06
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
                        corIni      corFin
                        fleIni      fleFin
                        desIni      desFin
-----
  1      1      2  0.0000e+00  0.0000e+00
                        6.5554e+02 -2.0621e-09
                        -1.2756e+03  0.0000e+00
                        0.0000e+00 -8.1760e-06
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
8.9453e+04

```

## IPE600:

```

-----
estado 5
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.5554e+02  1.2756e+03
2  0.0000e+00 -2.4621e-05 -8.5567e-06
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
      corIni      corFin
      fleIni      fleFin
      desIni      desFin
-----
1  1  2  0.0000e+00  0.0000e+00
      6.5554e+02  0.0000e+00
      -1.2756e+03  0.0000e+00
      0.0000e+00 -2.4621e-05
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
4.1831e+05

```

## IPE300:

```

-----
estado 5
-----
pun      desX      desY      girZ      reaX      reaY      momZ
-----
1  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  6.5554e+02  1.2756e+03
2  0.0000e+00 -2.7119e-04 -9.4247e-05
-----
lín punIni punFin      axiIni      axiFin
      corIni      corFin
      fleIni      fleFin
      desIni      desFin
-----
1  1  2  0.0000e+00  0.0000e+00
      6.5554e+02  0.0000e+00
      -1.2756e+03  0.0000e+00
      0.0000e+00 -2.7119e-04
-----
tensión equivalente von Mises máxima
-----
2.2950e+06

```

Con  $E = cte.$  e  $I \neq cte.$  se confirma, al igual que en el caso inverso y todos los casos similares anteriormente expuestos, que el giro  $\theta$  tiene una relación inversamente proporcional con la rigidez  $E \cdot I$  y directamente proporcional con el momento flector, el cual se produce en el mismo eje Z.





## Capítulo 4

# VIBRACIONES TRANSVERSALES DE UNA VIGA.

Como vimos anteriormente, la ecuación de movimiento de una barra, para pequeñas amplitudes, viene dada por la ecuación (3.14). Más específicamente, si la barra vibra en ausencia de roce o fricción, sin una fuerza impulsora, el movimiento de vibración libre viene dado por la ecuación (3.14), con las condiciones de borde adecuadas para cada caso especial. Si la barra vibra, como es usual en un medio viscoso, aire, agua, etc, o debido a fuerzas de fricción internas del material, la ecuación de movimiento será:

$$-E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - b \frac{\partial y}{\partial t} \quad (4.1)$$

y definiendo

$$c_0^2 = \frac{E \cdot I_x}{\rho \cdot A} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{b}{E \cdot I_x}, \quad (4.2)$$

la ecuación (4.1) se transforma en:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \quad (4.3)$$

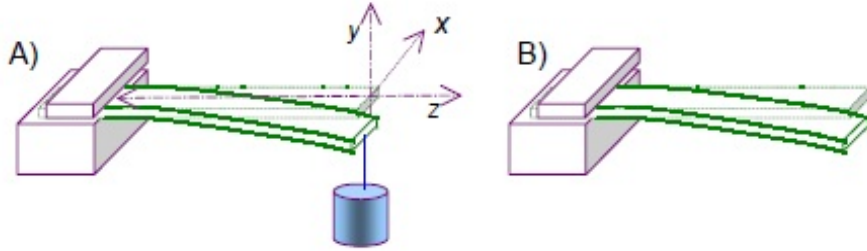


Figura 4.1: Barra de longitud  $L$ , soportada por una morsa y con el otro extremo libre. A la izquierda con una sobrecarga en su extremo y a la derecha sin sobrecarga y vibrando.

## 4.1. Vibraciones forzadas de una barra.

La ecuación del movimiento 2.40 o 4.1 de una barra con vibración tranversal, cuando existen fuerzas de fricción (internas del material o externas, por ejemplo, medio viscoso), caracterizada por un coeficiente de fricción  $b$  (por unidad de longitud) y una fuerza impulsora  $F(z, t)$  por unidad de longitud (dirección  $z$ ), se transforman en:

$$F(z, t) = -E \cdot I_x \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (4.4)$$

### 4.1.1. Barra empotrada con un extremo libre.

Un caso de interés práctico es la forma que toma una barra de longitud  $L$  soportada por una morsa y de la que pende una sobrecarga  $m$  de su extremo como se ilustra en la figura 4.1. La función que describe la fuerza por unidad de longitud se puede escribir, usando la notación  $\delta(x)$  para describir la función delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

como:

$$F(z) = m \cdot g \cdot \delta(x - L). \quad (4.6)$$

Integrando la ecuación (4.4) obtenemos la forma de la curva que forma la barra viene dada por la ecuación:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{m \cdot g}{E \cdot I_x} \cdot (L - z), \quad (4.7)$$

cuya solución es:

$$y(z) = -\left(\frac{m \cdot g}{E \cdot I_x}\right) \cdot z^2 \left(L - \frac{z}{3}\right). \quad (4.8)$$

Si la barra vibra sin sobrecarga (es decir con su extremo libre) la frecuencia de vibración se obtiene a partir de (3.6) con las condiciones de borde:  $y(z=0) = 0$ ,  $\frac{\partial y}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=L} = 0$  y  $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \Big|_{z=L} = 0$ , si existiese una fuerza adicional  $mg$  donde  $m$  es la masa de la viga aplicada en un extremo de la misma hay que considerar como cuarta condición de contorno  $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \Big|_{z=L} = -mg$ , la frecuencia fundamental viene dada por la expresión siguiente:

$$f_1 = \frac{0,28}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_x}{\rho \cdot A}} = \frac{0,28}{L^2} \cdot c_0[1] \text{ y } [2]. \quad (4.9)$$



# Capítulo 5

## CONCLUSIONES.

Se han realizado varios estudios considerando la barra empotrada en un extremo modificándola según la sección y el material.

Se han considerado los casos de misma sección-materiales diferentes y mismo material-secciones diferentes.

A la hora de elegir el material se ha tenido en cuenta las distintas distribuciones de carga, el valor del estado de cargas ha sido calculado según establece la norma para hormigón armado.

Los estudios realizados han sido para carga puntual, carga uniforme y cargas combinadas.

El más parecido a una situación real sería el estado de cargas combinadas. No obstante, no se han tenido en cuenta las cargas horizontales.

Se ha estudiado la rigidez, el producto del módulo elástico  $E$  por la inercia  $I$ .

**Caso A:** Misma sección-materiales diferentes

Los materiales elegidos han sido HA-35, madera C-40 y madera C-14.

- Caso puntual: Se ha comprobado que el que sufre una deflexión más pequeña es el HA35 y la mayor deflexión la soporta la madera C-14, que es del orden de  $10^{-6}$ . El valor del momento en cada sección depende del valor de  $x$ , (distancia al extremo empotrado de la barra) mientras que el cortante es igual en toda la longitud de la barra.
- Caso uniforme: En este caso la barra está influenciada por el valor de  $x$  (distancia al extremo empotrado de la barra) tanto para el valor en cada sección del momento como del cortante. Los datos guardan

relación similar al caso puntual, pero obteniendo ahora en la madera C-14,  $10^{-5}$ .

- Caso combinado: En este caso la barra está influenciada por el valor de  $x$  (distancia al extremo empotrado de la barra) tanto para el valor en cada sección del momento como del cortante.

Los resultados son del mismo tipo que en caso uniforme.

#### **Caso B:** Mismo material-secciones diferentes

Se han comparado el HA35 con HA35 media sección e IPE600 con IPE300.

- Caso puntual: El que presenta mayor desplazamiento es el IPE300 del orden de  $10^{-5}$ . Si comparamos HA35 media sección e IPE600 ambas son del orden de  $10^{-6}$  pero la cte. para HA35 es menor. El valor del momento en cada sección depende del valor de  $x$ , (distancia al extremo empotrado de la barra) mientras que el cortante es igual en toda la longitud de la barra.
- Caso uniforme: En este caso la barra está influenciada por el valor de  $x$  (distancia al extremo empotrado de la barra) tanto para el valor en cada sección del momento como del cortante. El que presenta mayor desplazamiento es el IPE300 del orden de  $10^{-4}$ . Si comparamos HA35 media sección e IPE600 en este caso el primero es del orden de  $10^{-6}$  y el segundo de  $10^{-5}$ .
- Caso combinado: En este caso la barra está influenciada por el valor de  $x$  (distancia al extremo empotrado de la barra) tanto para el valor en cada sección del momento como del cortante. Resultados parecidos al caso uniforme.

Mediante el cálculo directo se han obtenido los mismos resultados que con la utilización del programa MEFI.

# Apéndice A

## Datos MEFI.

A continuación se exponen los datos introducidos en MEFI para la obtención de los casos numéricos.

### A.1. ESTADO PUNTUAL.

#### SECCIONES IGUALES:

**HA-35:** TITULO Barra HA-REAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL.

PARAMETROS

\$ par val

V 3.45 \$ m

W 0.4 \$ m

L 3.85 \$ m

H 1.1 \$ m

A1 0.44 \$ m<sup>2</sup>

I1 0.04436 \$ m<sup>4</sup>

q3 24.60 \$ kN

PUNTOS

\$ pun X Y

1 0.0 0.0

2 L 0.0

LINEAS

\$ lin tipo pun

```

1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG HOR35 1
1 RIG ACE 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI
1 1 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70

```

**MAD C40:** TITULO Barra MADERA\_C40 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL.

```

PARAMETROS
$ par val
V 3.45 $ m
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
A1 0.44 $ m2
I1 0.04436 $ m4
q3 24.60 $ kN
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1

```



```
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG MAD_C40 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI
1 1 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
```

**MAD C14:** TITULO Barra MADERA\_C14 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL.

```
PARAMETROS
$ par val
V 3.45 $ m
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
A1 0.44 $ m2
I1 0.04436 $ m4
q3 24.60 $ kN
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG MAD_C14 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
```

```

1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI
1 1 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70

```

### SECCIONES DIFERENTES:

**HA-35 S/2:** TITULO Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL.

```

PARAMETROS
$ par val
V 3.45 $ m
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
A1 0.44/2 $ m2
I1 0.0027729 $ m4
q3 24.60 $ kN
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG HOR35 1
1 RIG ACE 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB

```

CARGAS\_GLOBALES\_LINEAS

\$ lin est tipo FX FY MZ dI

1 1 PUN 0.0 -1.35\*q3 0 3.70

**IPE600:** TITULO Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL.

PARAMETROS

\$ par val

W 0.4 \$ m

L 3.85 \$ m

H 1.1 \$ m

q3 24.60 \$ kN

PUNTOS

\$ pun X Y

1 0.0 0.0

2 L 0.0

LINEAS

\$ lin tipo pun

1 POL 1 2

ELEMENTOS\_LINEAS

\$ lin tipo mat pro

1 RIG ACE IPE600

DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS

\$ pun est DX DY GZ

1 1 0.0 0.0 0.0

2 1 LIB LIB LIB

CARGAS\_GLOBALES\_LINEAS

\$ lin est tipo FX FY MZ dI

1 1 PUN 0.0 -1.35\*q3 0 3.70

**IPE300:** TITULO Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO PUNTUAL.

PARAMETROS

\$ par val

W 0.4 \$ m

L 3.85 \$ m

H 1.1 \$ m

```

q3 24.60 $ kN
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
ELEMENTOS_LÍNEAS
$ lín tipo mat pro
1 RÍG ACE IPE300
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI
1 1 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70

```

## A.2. ESTADO UNIFORME.

### SECCIONES IGUALES:

**HA-35:** TITULO Barra HA empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME.

```

PARAMETROS
$ par val
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
A1 0.44 $ m2
I1 0.04436 $ m4
q1 116.24 $ kN
q4 6.15 $ kN*m
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0

```

```

2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG HOR35 1
1 RIG ACE 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -1.35*q1 0 0
1 1 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0

```

**MAD C40:** TITULO Barra MADERA\_C40 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME.

```

PARAMETROS
$ par val
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
A1 0.44 $ m2
I1 0.04436 $ m4
q1 116.24 $ kN
q4 6.15 $ kN*m
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun

```

```

1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG MAD_C40 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -1.35*q1 0 0
1 1 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0

```

**MAD C14:** TITULO Barra MADERA\_C14 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME.

```

PARAMETROS
$ par val
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
A1 0.44 $ m2
I1 0.04436 $ m4
q1 116.24 $ kN
q4 6.15 $ kN*m
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1

```

```

ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG MAD_C14 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -1.35*q1 0 0
1 1 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0

```

**SECCIONES DIFERENTES:**

**HA-35 S/2:** TITULO Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME.

```

PARAMETROS
$ par val
V 3.45 $ m
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
A1 0.44/2 $ m2
I1 0.0027729 $ m4
q1 116.24 $ kN
q4 6.15 $ kN*m
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1
ELEMENTOS_LINEAS

```

```

$ lin tipo mat pro
1 RIG HOR35 1
1 RIG ACE 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -1.35*q1 0 0
1 1 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0

```

**IPE600:** TITULO Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME.

```

PARAMETROS
$ par val
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
q1 116.24 $ kN
q4 6.15 $ kN
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG ACE IPE600
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF

```



1 1 UNI 0.0 -1.35\*q1 0 0  
1 1 UNI 0.0 -1.5\*q4 0 0

**IPE300:** TITULO Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO UNIFORME.

PARAMETROS

\$ par val

W 0.4 \$ m

L 3.85 \$ m

H 1.1 \$ m

q1 116.24 \$ kN

q4 6.15 \$ kN

PUNTOS

\$ pun X Y

1 0.0 0.0

2 L 0.0

LINEAS

\$ lin tipo pun

1 POL 1 2

ELEMENTOS\_LINEAS

\$ lin tipo mat pro

1 RIG ACE IPE300

DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS

\$ pun est DX DY GZ

1 1 0.0 0.0 0.0

2 1 LIB LIB LIB

CARGAS\_GLOBALES\_LINEAS

\$ lin est tipo pX pY dI dF

1 1 UNI 0.0 -1.35\*q1 0 0

1 1 UNI 0.0 -1.5\*q4 0 0

### A.3. ESTADO COMBINADO.

#### SECCIONES IGUALES:

**HA-35:** TITULO Barra HA empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO.

#### PARAMETROS

\$ par val

V 3.45 \$ m

W 0.4 \$ m

L 3.85 \$ m

H 1.1 \$ m

A1 0.44 \$ m<sup>2</sup>

I1 0.04436 \$ m<sup>4</sup>

q1 116.24 \$ kN

q2 67.65 \$ kN\*m

q3 24.60 \$ kN

q4 6.15 \$ kN\*m

q5 3.08 \$ kN\*m

#### PUNTOS

\$ pun X Y

1 0.0 0.0

2 L 0.0

#### LINEAS

\$ lin tipo pun

1 POL 1 2

#### PROPIEDADES

\$ pro are iner

1 A1 I1

#### ELEMENTOS\_LINEAS

\$ lin tipo mat pro

1 RIG HOR35 1

1 RIG ACE 1

#### DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS

\$ pun est DX DY GZ

1 1 0.0 0.0 0.0

2 1 LIB LIB LIB

1 2 0.0 0.0 0.0

```

2 2 LIB LIB LIB
1 3 0.0 0.0 0.0
2 3 LIB LIB LIB
1 4 0.0 0.0 0.0
2 4 LIB LIB LIB
1 5 0.0 0.0 0.0
2 5 LIB LIB LIB
1 6 0.0 0.0 0.0
2 6 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -q1 0 W
1 1 UNI 0.0 -q2 V 0
1 2 UNI 0.0 -q4 0 0
1 3 UNI 0.0 -q5 0 0
1 4 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 4 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 4 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 5 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*0.5*q5 0 0
1 6 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 6 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 6 UNI 0.0 -1.5*q5 0 0
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI
1 1 PUN 0.0 -q3 0 3.70
1 4 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
1 5 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
1 6 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70

```

**MAD C40:** TITULO Barra MADERA\_C40 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO.

PARAMETROS

\$ par val

V 3.45 \$ m

W 0.4 \$ m  
L 3.85 \$ m  
H 1.1 \$ m  
A1 0.44 \$ m<sup>2</sup>  
I1 0.04436 \$ m<sup>4</sup>  
q1 116.24 \$ kN  
q2 67.65 \$ kN\*m  
q3 24.60 \$ kN  
q4 6.15 \$ kN\*m  
q5 3.08 \$ kN\*m  
PUNTOS  
\$ pun X Y  
1 0.0 0.0  
2 L 0.0  
LINEAS  
\$ lin tipo pun  
1 POL 1 2  
PROPIEDADES  
\$ pro val1  
1 A1 I1  
ELEMENTOS\_LINEAS  
\$ lin tipo mat pro  
1 RIG MAD\_C40 1  
DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS  
\$ pun est DX DY GZ  
1 1 0.0 0.0 0.0  
2 1 LIB LIB LIB  
1 2 0.0 0.0 0.0  
2 2 LIB LIB LIB  
1 3 0.0 0.0 0.0  
2 3 LIB LIB LIB  
1 4 0.0 0.0 0.0  
2 4 LIB LIB LIB  
1 5 0.0 0.0 0.0  
2 5 LIB LIB LIB  
1 6 0.0 0.0 0.0  
2 6 LIB LIB LIB  
CARGAS\_GLOBALES\_LINEAS

```

$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -q1 0 W
1 1 UNI 0.0 -q2 V 0
1 2 UNI 0.0 -q4 0 0
1 3 UNI 0.0 -q5 0 0
1 4 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 4 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 4 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 5 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*0.5*q5 0 0
1 6 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 6 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 6 UNI 0.0 -1.5*q5 0 0
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI
1 1 PUN 0.0 -q3 0 3.70
1 4 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
1 5 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
1 6 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70

```

**MAD C14:** TITULO Barra MADERA\_C14 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO.

## PARAMETROS

```

$ par val
V 3.45 $ m
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
A1 0.44 $ m2
I1 0.04436 $ m4
q1 116.24 $ kN
q2 67.65 $ kN*m
q3 24.60 $ kN
q4 6.15 $ kN*m
q5 3.08 $ kN*m

```

```
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
PROPIEDADES
$ pro val1
1 A1 I1
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG MAD_C14 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
1 2 0.0 0.0 0.0
2 2 LIB LIB LIB
1 3 0.0 0.0 0.0
2 3 LIB LIB LIB
1 4 0.0 0.0 0.0
2 4 LIB LIB LIB
1 5 0.0 0.0 0.0
2 5 LIB LIB LIB
1 6 0.0 0.0 0.0
2 6 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -q1 0 W
1 1 UNI 0.0 -q2 V 0
1 2 UNI 0.0 -q4 0 0
1 3 UNI 0.0 -q5 0 0
1 4 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 4 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 4 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 5 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
```

1 5 UNI 0.0 -1.5\*q4 0 0  
 1 5 UNI 0.0 -1.5\*0.5\*q5 0 0  
 1 6 UNI 0.0 -1.35\*q1 0 W  
 1 6 UNI 0.0 -1.35\*q2 V 0  
 1 6 UNI 0.0 -1.5\*q5 0 0  
 CARGAS\_GLOBALES\_LINEAS  
 \$ lin est tipo FX FY MZ dI  
 1 1 PUN 0.0 -q3 0 3.70  
 1 4 PUN 0.0 -1.35\*q3 0 3.70  
 1 5 PUN 0.0 -1.35\*q3 0 3.70  
 1 6 PUN 0.0 -1.35\*q3 0 3.70

**SECCIONES DIFERENTES:**

**HA-35 S/2:** TITULO Barra HA\_IDEAL empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO.

## PARAMETROS

\$ par val

V 3.45 \$ m

W 0.4 \$ m

L 3.85 \$ m

H 1.1 \$ m

A1 0.44/2 \$ m<sup>2</sup>

I1 0.0027729 \$ m<sup>4</sup>

q1 116.24 \$ kN

q2 67.65 \$ kN\*m

q3 24.60 \$ kN

q4 6.15 \$ kN\*m

q5 3.08 \$ kN\*m

## PUNTOS

\$ pun X Y

1 0.0 0.0

2 L 0.0

## LINEAS

\$ lin tipo pun

1 POL 1 2

## PROPIEDADES

```

$ pro val1
1 A1 I1
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG HOR35 1
1 RIG ACE 1
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
1 2 0.0 0.0 0.0
2 2 LIB LIB LIB
1 3 0.0 0.0 0.0
2 3 LIB LIB LIB
1 4 0.0 0.0 0.0
2 4 LIB LIB LIB
1 5 0.0 0.0 0.0
2 5 LIB LIB LIB
1 6 0.0 0.0 0.0
2 6 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -q1 0 W
1 1 UNI 0.0 -q2 V 0
1 2 UNI 0.0 -q4 0 0
1 3 UNI 0.0 -q5 0 0
1 4 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 4 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 4 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 5 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*0.5*q5 0 0
1 6 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 6 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 6 UNI 0.0 -1.5*q5 0 0
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI

```



1 1 PUN 0.0 -q3 0 3.70  
 1 4 PUN 0.0 -1.35\*q3 0 3.70  
 1 5 PUN 0.0 -1.35\*q3 0 3.70  
 1 6 PUN 0.0 -1.35\*q3 0 3.70

**IPE600:** TITULO Barra IPE600 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO.

PARAMETROS

\$ par val

V 3.45 \$ m

W 0.4 \$ m

L 3.85 \$ m

H 1.1 \$ m

q1 116.24 \$ kN

q2 67.65 \$ kN

q3 24.60 \$ kN

q4 6.15 \$ kN

q5 3.08 \$ kN

PUNTOS

\$ pun X Y

1 0.0 0.0

2 L 0.0

LINEAS

\$ lin tipo pun

1 POL 1 2

ELEMENTOS\_LINEAS

\$ lin tipo mat pro

1 RIG ACE IPE600

DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS

\$ pun est DX DY GZ

1 1 0.0 0.0 0.0

2 1 LIB LIB LIB

1 2 0.0 0.0 0.0

2 2 LIB LIB LIB

1 3 0.0 0.0 0.0

2 3 LIB LIB LIB

1 4 0.0 0.0 0.0

```

2 4 LIB LIB LIB
1 5 0.0 0.0 0.0
2 5 LIB LIB LIB
1 6 0.0 0.0 0.0
2 6 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -q1 0 W
1 1 UNI 0.0 -q2 V 0
1 2 UNI 0.0 -q4 0 0
1 3 UNI 0.0 -q5 0 0
1 4 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 4 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 4 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 5 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*0.5*q5 0 0
1 6 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 6 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 6 UNI 0.0 -1.5*q5 0 0
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI
1 1 PUN 0.0 -q3 0 3.70
1 4 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
1 5 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
1 6 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70

```

**IPE300:** TITULO Barra IPE300 empotrada en un extremo y libre en el otro. ESTADO COMBINADO.

```

PARAMETROS
$ par val
V 3.45 $ m
W 0.4 $ m
L 3.85 $ m
H 1.1 $ m
q1 116.24 $ kN

```

```

q2 67.65 $ kN
q3 24.60 $ kN
q4 6.15 $ kN
q5 3.08 $ kN
PUNTOS
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L 0.0
LINEAS
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
ELEMENTOS_LINEAS
$ lin tipo mat pro
1 RIG ACE IPE300
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
2 1 LIB LIB LIB
1 2 0.0 0.0 0.0
2 2 LIB LIB LIB
1 3 0.0 0.0 0.0
2 3 LIB LIB LIB
1 4 0.0 0.0 0.0
2 4 LIB LIB LIB
1 5 0.0 0.0 0.0
2 5 LIB LIB LIB
1 6 0.0 0.0 0.0
2 6 LIB LIB LIB
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo pX pY dI dF
1 1 UNI 0.0 -q1 0 W
1 1 UNI 0.0 -q2 V 0
1 2 UNI 0.0 -q4 0 0
1 3 UNI 0.0 -q5 0 0
1 4 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 4 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 4 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W

```

```
1 5 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*q4 0 0
1 5 UNI 0.0 -1.5*0.5*q5 0 0
1 6 UNI 0.0 -1.35*q1 0 W
1 6 UNI 0.0 -1.35*q2 V 0
1 6 UNI 0.0 -1.5*q5 0 0
CARGAS_GLOBALES_LINEAS
$ lin est tipo FX FY MZ dI
1 1 PUN 0.0 -q3 0 3.70
1 4 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
1 5 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
1 6 PUN 0.0 -1.35*q3 0 3.70
```

# Bibliografía

- [1] Flexión y pandeo de vigas. LABORATORIO 5. UBA. Dto. de Física. Universidad de Buenos Aires. 2005.
- [2] Dinámica y análisis de vigas: aplicaciones del método de la transformada de Laplace. Proyecto Final de Carrera. Paco Gabarrón, Ramón. Supervisores García Guirao, Juan Luis y Vera López, Juan Antonio. Dto. de Matemática Aplicada y Estadística. Escuela de Arquitectura e Ingeniería de Edificación. Universidad Politécnica de Cartagena. 2012.
- [3] Análisis clásico de estructuras. Jaramillo Jimenez, José Oscar. 2004. Editorial Unibiblios.
- [4] Web Dpto. de construcción arquitectónica. Escuela de Arquitectura (ULPGC). Andrade. Francisco Ortega. 2008. <http://editorial.dca.ulpgc.es>.
- [5] Aristóteles, Arquímedes y los orígenes de la Mecánica: perspectiva desde la epistemología histórica. Renn, Jürgen; Damerow, Peter; McLaughlin, Peter. 2010. Artículo.
- [6] Ingeniería Mecánica. Estática. William F. Riley y Leroy D. Sturges. Editorial Reverte S. A., 2006.