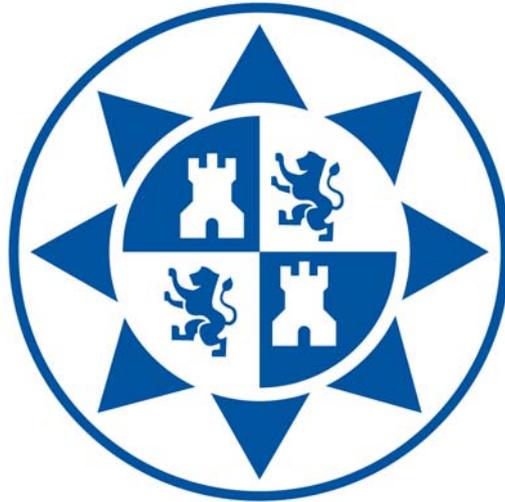


**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**  
**Escuela de Arquitectura e Ingeniería de Edificación**



**PROYECTO FIN DE CARRERA**

---

**Pandeo en estructuras verticales**

---



**Titulación:** Arquitectura Técnica

**Alumna:** Alejandro Morey Bausá

**Directores:** Carlos Angosto Hernández & Sonia Busquier Sáez

**Departamento:** Matemática Aplicada y Estadística



Dedicado:

A Leyre por la ayuda día a día, a Álvaro, Mónica, Pablo, Blanca y Yago, por el cariño del día a día. Por todos los tíos en Cartagena, que sin su ayuda y apoyo, no estaría aquí mismo. A mis profesores Carlos y Sonia, por tener que soportarme durante la realización del proyecto.

Y en especial a mi madre y a mi padre, por todo lo que me han dado en la vida.



# Índice general

<b>1. Motivaciones</b>	<b>3</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
2.1. Prehistoria . . . . .	5
2.2. Edad Antigua . . . . .	6
2.3. Antigüedad clásica . . . . .	7
2.4. Edad Media . . . . .	8
2.5. Edad Moderna . . . . .	9
2.6. Barroco . . . . .	9
2.7. Revolución Industrial . . . . .	10
2.7.1. El hierro . . . . .	11
2.7.2. El hormigón armado . . . . .	13
2.7.3. La utilización de los nuevos materiales . . . . .	15
2.8. Concepto de inestabilidad . . . . .	18
<b>3. Matemáticas</b>	<b>21</b>
3.1. Pandeo en el campo elástico . . . . .	21
3.2. Condiciones de apoyo de la barra. . . . .	28
3.2.1. Distintas formas de sustención . . . . .	28
3.3. Limitación de la Teoría de Euler. . . . .	30
3.4. Pandeo Real. . . . .	33
3.5. Comprobación a Pandeo . . . . .	35
<b>4. Implementación</b>	<b>43</b>
4.1. Procedimiento de comprobación . . . . .	43
<b>5. Experimentación</b>	<b>47</b>
5.1. Caso 1. Vivienda de 9 plantas y 2 sótanos . . . . .	47
5.2. VIVIENDA UNIF. DE 2 PLANTAS CON SOT. . . . .	56
<b>6. Conclusiones</b>	<b>73</b>

2

*ÍNDICE GENERAL*

7. Índice terminológico:

77

8. Bibliografía

79

# Capítulo 1

## Motivaciones

El pandeo es un fenómeno que se produce en el mundo de la arquitectura en elementos esbeltos, ya sean verticales u horizontales, que se encuentran sometidos a una carga por compresión en uno de sus extremos. Principalmente se produce en la parte de estructura en el mundo de la construcción, siendo pilares, vigas y jácenas los que mas pueden sufrir este efecto no deseado en una estructura. Las motivaciones que me han llevado a realizar este proyecto son las de realizar un profundo y detallado estudio sobre los efectos, las consecuencias que pueden surgir con la existencia del pandeo en la estructura en el mundo de la construcción y las posibles soluciones para evitar o hacer que no aparezca dicho efecto en nuestros edificios. Principalmente, el proyecto lo desarrollaremos sobre elementos verticales de la estructura en viviendas, ya que son los elementos del edificio con más posibilidades de peligro de que aparezca el pandeo en la vivienda, ya que las cargas que reciben los elementos verticales son muy altas, siendo así por recibir estos elementos, las cargas de peso de la vivienda (ya sea estructura, albañilería, instalaciones, acabados,...), las cargas de uso de dicha construcción, cargas en cubiertas por consecuencia de las inclemencias meteorológicas (agua de la lluvia acumulada, nieve, granizo,...) y muchas más cargas, las cuales hay que tener en cuenta y que al ser los elementos verticales (pilares) de una vivienda esbeltos, pueden no soportar dichas cargas que actúan como una fuerza a compresión en uno de sus extremos, pudiendo provocar el pandeo de la estructura.

A parte, una de las principales motivaciones de la realización del proyecto es debido a la escasa normativa y/o instrucciones que hacen referencia a este efecto, siendo un problema que aparece en la vida de una estructura desde su nacimiento hasta la demolición (o muerte) de ella. En este proyecto nos adentraremos mas en el mundo del pandeo ampliando la teoría y los conceptos dados durante los años de carrera en el mundo de la arquitectura técnica. El pandeo es una efecto que al no producirse mucho en el mundo de la construcción en estructuras de hormigón armado debido principalmente a las secciones de los pilares, haciendo que sean menos esbeltos que los de estructuras de acero, no se tiene en muy en cuenta su cálculo y sus consecuencias que podría tener en la estructura. La

EHE-08 apenas nombra el pandeo (ya que se basa en el concepto más bien de la inestabilidad) y concediendo la sección mínima de pilares (25x25 cm), hace que desaparezca la atención que hay que tener con el pandeo en las estructuras en las edificaciones.

Una vez relatado todos los conceptos y teorías sobre y para el pandeo, nos dispondremos a realizar cálculos a pandeo de dos tipo de viviendas totalmente diferentes para poder extraer diferentes puntos de vista y conclusiones sobre que puede producirse en cada caso y que tienen en similitud con el aspecto de la aparición del pandeo en sus estructuras.

# Capítulo 2

## Introducción

Para poder entrar de lleno en el concepto de pandeo en las estructuras verticales, primero se hará una breve explicación de la historia de la construcción desde los primeros tiempos de la humanidad, hasta la aparición y utilización del hormigón armado y del acero en las estructuras de los edificios, viviendas,...

Las primeras grandes construcciones se realizan a partir de la Edad Antigua, pero, donde aparecen las primeras construcciones con origen arquitectónico son en los periodos prehistóricos, cuando fueron erigidas las primeras construcciones realizadas por el ser humano.

### 2.1. Prehistoria

Durante esta época es donde surgen las primeras construcciones realizadas por el ser humano, ya que el hombre empieza a dominar la técnica de trabajar la piedra. Estas primeras construcciones surgen de la idea de “abrigo” por parte del ser humano, el cual proporciona a la sociedad de un cobijo donde resguardarse del frío, viento, lluvia,...

Principalmente, al inicio de la historia, estas edificaciones ya se encontraban en la naturaleza (cuevas, pozos,...), por lo tanto el hombre todavía no dominaba los posibles usos de las piedras y aprovechaban estas edificaciones naturales para utilizarlas como “abrigo”. Una vez dominada la piedra por el hombre, empiezan a surgir las primeras edificaciones con función de abrigo, y a la par, también empiezan a surgir un nuevo tipo de construcción, la construcción religiosa, la cual crean lugares de culto o de práctica de las religiones que van apareciendo durante los primeros pasos de la humanidad, como por ejemplo el monumento de “Stonehenge” en el Reino Unido, realizada en el megalítico a finales del Neolítico, siendo hoy en día el monumento prehistórico más conocido en nuestros días.



Monumento en Stonehenge (Reino Unido).

## 2.2. Edad Antigua

A medida que los humanos empezaban a relacionarse entre sí en comunidades humanas y empiezan a evolucionar y aumentar su población, presionadas por las amenazas bélicas constantes entre diferentes comunidades o grupos, las primeras edificaciones que empiezan a desarrollarse son principalmente la militar. En este periodo empiezan a surgir las primeras ciudades con configuraciones limitadas por la existencia de murallas, ofreciendo al habitante de las ciudades la protección ante amenazas exteriores de otros pueblos.

La arquitectura religiosa también comienza a desarrollarse dentro de las comunidades ya que en esos tiempos, la humanidad se confrontaba con un mundo poblado de dioses vivos, demonios... en un mundo que aún no conocía ninguna objetividad científica. El modo en que los individuos lidiaban con la transformación de su ambiente inmediato estaba por entonces muy influenciado por las creencias religiosas, siendo así que muchos aspectos de la vida cotidiana estaban basados en el respeto o en la adoración a lo divino y lo sobrenatural. El poder divino dominaba por entonces al resto de los individuos, haciendo que los principales edificios de las ciudades fueran palacios y templos donde poder realizar el culto a los numerosos dioses. Dichos edificios eran de tal importancia que la figura del arquitecto en la edad antigua estaba asociada a los sacerdotes de las diferentes religiones o a los propios gobernadores de los pueblos, ya que se los consideraban como un enlace entre el contacto del hombre con lo divino. Este tipo de obras y construcciones surgieron de los pueblos mesopotámicos,

egipcios, etruscos, egea, persas...

Las necesidades de infraestructuras de aquellas primeras ciudades, también hicieron necesario el progreso técnico de las obras de ingeniería, como las alcantarillas en Mesopotamia, creación de pozos....



Red de alcantarillado mesopotámico.

## 2.3. Antigüedad clásica

En esta época explicaremos dos de las culturas más importantes en la historia: la griega y la romana. La arquitectura y el urbanismo practicados por los griegos y romanos se distinguía claramente de la de los egipcios y babilonios en la medida en que la vida civil pasaba a tener más importancia. Las ciudades se convierten en el elemento principal de la vida política y social de estos dos pueblos: los griegos se desarrollaron a través de ciudades estados, mientras que el Imperio romano surgió de una única ciudad.

Durante los periodos y civilizaciones anteriores, los asuntos religiosos eran ellos mismos el motivo y el mantenimiento del orden establecido; en el periodo de los griegos y romanos, el misterio religioso traspasó los límites del templo-palacio y se hizo asunto de los ciudadanos.

Mientras los pueblos anteriores como los egipcios, persas... desarrollaron sólo las arquitecturas militar, religiosa y residencial, los griegos y romanos fueron mas allá y fueron los responsables del desarrollo de espacios propios a la manifestación ciudadana y de los quehaceres cotidianos, este era el llamado “ágora”, que se define como un gran espacio libre público destinado a la realización de asambleas, rodeado por templos, mercados y edificios públicos. El espacio del “ágora” se convirtió en un símbolo de la nueva visión del mundo, que incluía el respeto a los intereses comunes, e incentivador del debate entre ciudadanos, en lugar del antiguo orden despótico.

Aun así, los asuntos religiosos aún poseían un papel fundamental en la vida cotidiana, pero ahora fueron incorporados a los espacios públicos de las ciudades. Los rituales populares eran realizados en espacios construidos para tales fines, en especial la “Acrópolis”. Los templos pasaron a construirse en lo alto de las colinas para encontrarse más cerca de los cielos.



Acrópolis de Atenas.

En estas culturas empieza a aparecer la idea constructiva de los pilares, utilizados en templos y edificios públicos, siendo de gran sección y altura, y para evitar fallos en ellos, sus luces eran bastante pequeñas en comparación con su esbeltez.

## 2.4. Edad Media

En este periodo se enrarece la vida en las ciudades, pasándose a la ruralización y feudalización de Europa. La tecnología de la Edad Media se desarrolló principalmente en la construcción de las catedrales, estando el conocimiento arquitectónico bajo el control de los gremios.

Durante prácticamente toda la Edad Media, la figura del arquitecto no existe como tal. La construcción de las catedrales, es el principal esfuerzo constructivo de la época, siendo acompañado por toda la población y se inserta en la vida de la comunidad a su alrededor. El conocimiento constructivo es guardado por los gremios, que reunían decenas de maestros y obreros que conducían la ejecución de las obras, pero que también las elaboraban.

En el desarrollo de la Edad Media, la cristiandad definió una nueva visión del mundo, que no sólo sometía los deseos humanos a los designios divinos, sino que esperaba que el individuo buscara lo divino. En un primer momento y debido a las limitaciones técnicas, la concepción del espacio arquitectónico de los templos se vuelve hacia adentro, según un eje que incita el recogimiento. Más tarde, con el desarrollo de la arquitectura gótica se busca alcanzar los cielos a través de la inducción de la perspectiva hacia lo alto, haciendo todavía más importante el papel que juega los pilares en la obra de los nuevos templos, logrando una esbeltez muy alta con la utilización de piedra como material básico para la construcción de pilares.

## 2.5. Edad Moderna

Con el fin de la Edad Media, la estructura de poder europea empieza a cambiar y se modifica radicalmente. Empiezan a surgir los estados nación y, a pesar de la aún fuerte influencia de la Iglesia Católica, el poder secular vuelve al poder, especialmente con la crisis de la reforma protestante.

La Edad Moderna empezó a funcionar con el “Renacimiento”, rechazando la estética y cultura medieval y proponiendo una nueva posición del hombre ante el universo. Durante el Renacimiento se redescubren antiguos tratados arquitectónicos romanos, por lo que los nuevos arquitectos, acaban influenciados profundamente por conceptos antiguos aplicándolo en las nuevas obras realizadas. La relativa libertad de investigación científica que se obtuvo llevó al avance de las técnicas constructivas, permitiendo nuevas experiencias y la concepción de nuevos espacios.

La arquitectura renacentista se mostró clásica, pero sin llegar a constituir el Neoclásico. Con el redescubrimiento de los antiguos tratados de la antigua arquitectura, se dio margen a una nueva interpretación de aquella arquitectura y su aplicación a los nuevos tiempos. Por ejemplo, los conocimientos obtenidos en la edad media, fueron aplicados en el renacimiento de forma distinta y nueva, incorporando los elementos del lenguaje clásico.

También, en el Renacimiento se descubre a la perspectiva, siendo un aspecto importante para entender el periodo, siendo la principal perspectiva la “cónica”, ya que la idea de lo infinito se relacionaba con el concepto del punto de fuga en la perspectiva cónica. La perspectiva representó una nueva forma de entender el espacio como algo universal, comprensible y controlable mediante la razón. El dibujo fue el principal medio de diseño y así surge la idea del arquitecto singular, diferente de la Edad Media en la que todos los maestros eran los arquitectos de la obra. El poder representar fielmente la realidad mediante la perspectiva, no se limitó a sólo describir las experiencias conocidas, sino también a anticiparlas posibilitando proyectar imágenes de características realistas.

Durante la Edad Moderna, también surge el Manierismo, que es una evolución del Renacimiento hacia lo anticlásico, aunque sus obras continuaran siendo en esencia predominantemente clásicas. Así surge el movimiento del Manierismo.

Los arquitectos manieristas, aún apropiándose de las formas clásicas, comienzan a deconstruir sus ideales. Algunos elementos del manierismo son:

1. Constantes las referencias visuales en espacios internos a los elementos típicos de la composición de espacios externos.
2. El dominio de la perspectiva permite experimentos diversos que huyen al espacio perspectivo de los periodos anteriores

## 2.6. Barroco

El Barroco surge en el escenario artístico europeo en dos contextos muy claros durante el siglo XVII:

- Primero tenemos que en el Renacimiento, aunque había ayudado en el avance tecnológico de la época con el clasicismo, no estaba en condiciones de ofrecer todas las respuestas necesarias a las dudas del ser humano. El universo ya no es el mismo, el mundo se había expandido y el individuo en sí, quería experimentar un nuevo tipo de contacto con lo divino y lo metafísico. Las formas lujuriantes del Barroco y su espacio elíptico fueron una respuesta a estas necesidades creadas entonces.
- Como segundo punto tenemos a la Contrarreforma promovida por la Iglesia Católica. Con el avance del protestantismo, el antiguo orden cristiano romano estaba siendo suplantado por nuevas visiones del mundo y nuevas actitudes ante lo Sagrado. Con esto, la Iglesia tomó la decisión de renovarse y con la renovación arquitectónica que hasta entonces se hacía, utilizando una nueva estética y así teniendo la oportunidad de identificarse con este nuevo mundo.



Basílica de Ottobeuren.

Las formas del Barroco fueron promovidas por la institución por todo el mundo, haciéndolo casi un estilo propio, el estilo católico.

## 2.7. Revolución Industrial

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, Europa asiste a un gran avance tecnológico. Es durante esta época cuando empiezan a verse y a utilizarse los materiales que hoy en día conocemos y aplicamos en el mundo de la construcción.

Se habla en este periodo de la aparición de nuevos materiales en el mundo de la construcción, y no es que dichos materiales fuesen desconocidos por la humanidad hasta estas fechas, ya que por ejemplo la utilización del hierro en la arquitectura empieza a aplicarse en el renacimiento, o por otro lado el hormigón ya era conocido durante la época romana, siendo unos maestros en su uso.

Cuando en esta época se habla de la aparición de nuevos materiales, nos referimos en su modo de utilizarlos en la construcción, ya que aunque se tuviese conocimiento del empleo de dichos materiales en obras anteriores a la revolución industrial, poco se sabía de como emplearlo y en qué medidas y qué efectos sobre la obra producían.

### 2.7.1. El hierro

Una vez empieza la producción industrializada, el hierro adquiere una nueva importancia en el mundo de la construcción, siendo Gran Bretaña la primera nación en utilizar este tipo de material para la construcción. En 1775, el arquitecto Pritchard, con la colaboración de Reynolds, emprenden la realización de la primera gran estructura de hierro fundido, el puente de Coalbrookdale, de treinta metros de luz. Al ser la primera obra realizada con este “nuevo material”, hubo que recurrir a la imaginación para resolver los numerosos problemas que se plantearon. Las uniones fueron resueltas en la mayor parte de los casos con soluciones análogas a los ensamblajes de madera y para el diseño del armazón se inspiraron en los puentes realizados de fábrica. No hubo ningún tipo de cálculo de estructura.



Puente de Coalbrookdale (Gran Bretaña).

Sin embargo, a pesar de realizar este puente y otros análogos a este, el protagonismo en la utilización del hierro fundido en la construcción, será la columna de hierro fundido, que se convertirá en el primer material de construcción obtenido por métodos industriales. Al principio del año 1780, se empieza a utilizar el hierro fundido como pilares para reemplazar a los pilares de madera o ladrillo, siendo estos de gran sección, que servían de soporte a los techos de

las primeras hilaturas de algodón, convirtiéndose en las primeras “fábricas” de la Revolución Industrial en Inglaterra. Estas columnas o pilares se utilizan en combinación con la piedra, el ladrillo o la madera indistintamente y su uso se fue generalizando en gran número de proyectos arquitectónicos a lo largo del siglo XIX.

Entre otras causas, el pilar de hierro fundido tiene sus ventajas fundadas en una cierta resistencia al fuego, su bajo coste, su sencillez de fabricación, su capacidad de resistir pesadas cargas y su facilidad de recibir la forma deseada. El hierro fundido trabaja muy bien a compresión, ideal para que no se produzca el pandeo en estructuras, pero no funciona correctamente a tracción, lo cual hace que se limite mucho el uso de este material. El uso del hierro en la construcción fue debido al temor de incendios (ya que las estructuras de madera sufrían mucho con el fuego) y por la necesidad de luces mayores en las nuevas edificaciones.

El primer edificio de estructura totalmente metálica fue el de una fábrica de chocolates construida en 1871 por Julio Saulnier, cerca de París. La fábrica se apoya sobre cuatro pilares con sus cimientos hundido en el lecho del Marne, cuya corriente hace funcionar la maquinaria. Por primera vez se aplica en un edificio el principio de la construcción de que todo el peso del edificio sea sostenido por una estructura metálica.

Pero no todo fueron buenas noticias en la utilización del hierro fundido como elemento estructural, ya que hubo numerosos fallos en los puentes de Ohio (1786) y Firth of Tay en Escocia (1879), por lo que la vista de los constructores se volvió hacia el acero, material conocido desde 1828, pero que era únicamente utilizado para la fabricación de herramientas debido a su alto precio por entonces.



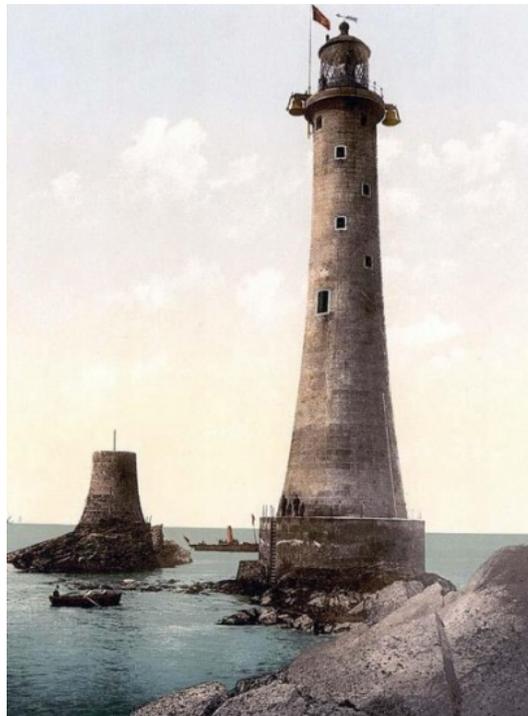
Puente Firth of Tay después del fallo estructural.

En 1855, Bessemer obtiene acero mediante el convertidor que lleva su nombre, fundando así su propia acería en Sheffield y con ello se generaliza el uso del material. Debido a los problemas de los acero Bessemer por el contenido de fósforo, hicieron que se creara una seria competencia a los métodos Bessemer (por ejemplo el Siemens-Martin).

Fue en Chicago donde se generalizó a partir de 1885 el uso de estructuras de acero.

### 2.7.2. El hormigón armado

El cemento como material estructural reaparece en la segunda mitad del siglo XVIII. En 1774, John Smeaton, recibe el encargo de construir el faro de Eddystone, en Inglaterra. Al estar en una zona batida constantemente por el mar, los intentos anteriores de construcción habían fracasado, al no encontrarse ningún material que fraguase en presencia de la humedad marina. Smeaton estaba experimentando desde 1760 en una cal viva mezclada con arcilla, que se endurecía en presencia del agua. Con los experimentos que realizó y los éxitos que obtuvo, propuso realizar el faro utilizando para los cimientos y para unir las piedras, una mezcla de cal viva, arcilla, arena y escoria de hierro en polvo, con lo que consiguió un conjunto de enorme resistencia y por primera vez desde la época de los romanos, volvería a utilizarse el hormigón natural en la construcción.



Faro de Eddystone.

En 1796, James Parker, inventó (y patentó) un proceso para fabricar cal hidráulica a partir de calizas procedentes de la isla de Sheppey, pero la producción venía limitada por la escasez de las calizas arcillosas utilizadas en el proceso.

En 1824, Joseph Aspdin, patentó el primer procedimiento industrial de obtención de lo que él llamó “cemento Portland”. El proceso se basaba en la incineración de caliza y arcilla a una temperatura muy alta, con lo que se daba origen a una escoria vidriosa, que una vez molida, daba origen al polvo de cemento.

En los primeros momentos del cemento Portland, el uso de este nuevo material, aunque generalizado, quedó limitado a paredes, revestimientos y pequeños elementos ornamentales, pues aunque trabajaba relativamente muy bien a compresión, no se le podía exigir muchos más esfuerzos que el de compresión. Pronto surgió la idea de reforzarlo de alguna manera y en 1854, el inglés Williams Wilkinson patentó un pavimento en losa, formado por cemento con paja y cenizas y con un emparrillado de alambre grueso. En 1867, un francés llamado Joseph Monier, patentó un procedimiento de refuerzo de tiestos de jardín y bañeras incrustando tela metálica en el mortero.

Ninguno de los dos inventores anteriores comprendió realmente el auténtico papel de la parte metálica y pensaban que su única función era mejorar la fuerza cohesiva del cemento y así facilitar su manejo.

El primero que se dio cuenta del verdadero carácter del hormigón armado fue François Hennebique, que tras doce años de investigaciones, solicitó su primera patente en 1892 y se construyó en una propagandista del nuevo material. Él es el primero en utilizar la viga en forma de “T” y a él se le debe el postulado fundamental del hormigón armado. “Los elementos asociados en la estructura tienden a ayudarse recíprocamente para aliviar sus respectivos esfuerzos”.

En Estados Unidos, la construcción en hormigón armado surgió por el impulso de Ernest Ransome, que lo utilizó como estructura resistente a los terremotos en California e hizo hincapié en su eficaz comportamiento ante los incendios.



François Hennebique.

### 2.7.3. La utilización de los nuevos materiales

En el panorama de la ciudad industrial surgen una serie de necesidades que no se habían dejado sentir en “la ciudad tradicional”. Como respuesta a estas necesidades, surgen unas tipologías en las que el hierro juega un papel dominante. Todas ellas tienen algo en común, y es que en general son concebidos como un modo de organizar la “distribución” de mercancías de distintos tipos o de servicios anteriormente impensables.

Esto hace que se creen los grandes mercados centrales, que fueron uno de los primeros problemas que aparecieron como nuevas tipologías de edificios. El notable aumento de la población que se produce en las ciudades industriales, exige una reposición diaria de alimentos para el consumo y un almacenamiento masivo de los mismos para atender a la demanda surgida en las ciudades. En realidad se trata de crear un espacio cubierto, pero abierto en sus laterales que faciliten estas necesidades. El primer edificio de éste tipo es el mercado de la Magdalena de París, construido en 1824 a base de columnas de hierro fundido, donde por primera vez se intenta combinar una economía de material con una cierta estética compositiva alejada del academicismo al uso. En 1853 se construye el mercado de pescado en Londres, con la utilización del hierro fundido, ya que

las autoridades sanitarias por entonces habían prohibido la utilización de la madera en esos lugares y también debido a la gran luz que se necesitaba entre los soportes.

Sin embargo, el mercado que estará destinado a tener más influencia por la utilización del hierro fundido será el Gran Mercado (Les halles) de París, comenzado en 1853 por orden expresa de Napoleón III y obra de Baltard. Aunque se discuta la originalidad del arquitecto, ya que se basó en las ideas de otro arquitecto especializado en el hierro llamado Horeau, la idea de cubierta tipo “paraguas” llamó la atención y en todo el resto de Europa pronto empezaron a surgir mercados a su imagen y semejanza; algunos de los cuales aún siguen en uso. Hoy en día por desgracia el mercado de Les Halles fue destruido para edificar en su lugar un centro comercial, y sólo quedan algunos elementos aislados que no dan la idea de lo que debió ser entonces en su época.



Mercado Les Halles, París.

Otra novedad la constituyen lo que se llamó “grandes almacenes”, consecuencia del aumento de la masa de producción y de la necesidad de fomentar el consumo entre la población, habida cuenta que la base de la sociedad industrial está en él.

Es casi seguro que los grandes almacenes empezaron en Europa y posiblemente también en París. Alrededor de 1860, eran sencillamente locales donde se almacenaban mercancías en cantidades muy grandes, con el fin de venderlas a bajo precio. En 1876 se construye el primer gran almacén de nueva planta, siendo realizado por Eiffel a la cual lo llamó “Au Bon Marché”. Presenta la originalidad de hacer desaparecer los muros macizos al exterior, y la superficie de la cubierta está distribuida alrededor de patios techados con grandes claraboyas, lo cual permite a la luz penetrar verticalmente e iluminar las zonas comerciales del gran almacén.

Esta tipología fue repetida hasta la saciedad a partir de que Eiffel realizase el “Au Bon Marché” y hasta los primeros años del siglo XX. En Valencia se conserva en buen estado los antiguos almacenes “La isla de Cuba”, y en peor estado se encuentra “El siglo”.

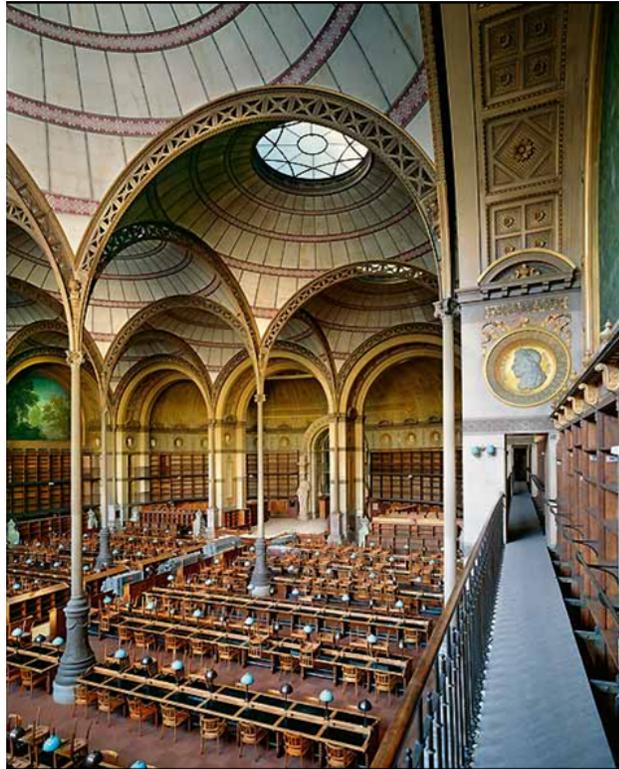
Los pasajes cubiertos recogen en parte las ideas de climatización parcial de la ciudad que ya hemos comentado en algunos teóricos del urbanismo. El primero se

construyó en París en los primeros años del siglo XIX, llegando a contabilizarse cerca de un centenar hacia 1840, pues se convirtieron en lugares de reunión social donde coincidían cafés, restaurantes, tiendas de modas, librerías,... teniendo la ventaja de que los peatones se encontraban separados de lo que empezaba a ser una circulación intensa.

En Milán, Londres, Bruselas, Barcelona, Madrid y en casi todas las grandes ciudades europeas hubo pasajes de ese tipo, que fueron dejando de construirse en las postrimerías del siglo XIX. En la actualidad gran parte de ellos han desaparecido.

Las estaciones de ferrocarriles, constituyen otra de las tipologías características del momento. A partir de 1830 es cuando empiezan sus actividades el ferrocarril entre Liverpool y Manchester, las líneas férreas se extienden rápidamente por todo el mundo. La estación se va a convertir en un elemento de prestigio de la ciudad y una referencia obligada en los nuevos trazados urbanos. La no existencia de precedentes hace que el diseño de la estación sea absolutamente nuevo, dando origen a grandes cubiertas de hierro y cristal, donde la búsqueda de mayores luces y de mayor seguridad en el cálculo de la estructura será constante.

Aunque ya había precedentes, es en esta época cuando las bibliotecas públicas cobran auge, y son escarapate de los nuevos formas de construir con los nuevos materiales, incorporando los avances de la técnica. El ejemplo más emblemático es la Biblioteca Nacional de París, obra de Labrouste en 1858. Utilizando el hierro, consigue resolver todos los problemas técnicos y de comunicaciones. La cubierta de la gran sala de lectura está sostenida por 16 columnas de hierro fundido extraordinariamente esbeltas que sostienen 9 bóvedas ligeras de estructura metálica y revestidas de yeso, cada una de las cuales presenta un óculo en su centro. La inclinación de los óculos varía para permitir que la iluminación de la sala sea uniforme.



Biblioteca Nacional de París.

Con todo, lo mejor del proyecto se encuentra en el depósito de libros, que al no ser de acceso público permitía una mayor libertad de acción al arquitecto. La organización es en cuatro pisos, con los suelos emparrillados de hierro que permiten hacer llegar hasta abajo la luz que penetra por una gran claraboya central.

Un procedimiento análogo se utilizó en la biblioteca del museo británico y en todas las grandes ciudades de Europa y América surgieron edificios inspirados en este proyecto.

## 2.8. Concepto de inestabilidad

Con toda esta evolución durante los siglos XVIII y XIX, y gracias a la revolución industrial, con la utilización de los “nuevos materiales” en la construcción empiezan a considerarse la necesidad de realizar procedimientos y cálculos que demostrasen la estabilidad y la duración de las nuevas construcciones durante estos siglos. Esto hizo que se empezase a tener en cuenta que la mera observación y conocimientos no eran suficientes para esta revolución arquitectónica. Uno de los elementos que más sufrió este cambio de materiales fueron los pilares, con los cuales empezaron a desarrollarse las primeras teorías de cálculos de estructuras,

siendo Leonhard Euler el pionero en la formulación de teorías sobre la estabilidad e inestabilidad estructural, con lo que surgió el nuevo concepto llamado Pandeo.

El pandeo es un fenómeno de inestabilidad elástica que puede darse en elementos esbeltos que se someten a esfuerzos de compresión en el sentido longitudinal de la pieza o estructura, con el resultado de provocar desplazamientos transversales, pudiendo producir inestabilidad en el edificio. ¿Y qué es la inestabilidad elástica? Para poder resolver esta pregunta primero definiremos el concepto de inestabilidad basándonos en el estudio del equilibrio que puede presentar un cuerpo sometido a una carga.

El concepto de equilibrio se define con el estudio de un cuerpo sometido a una fuerza sobre 3 superficies diferentes. El estudio se realiza con una esfera como cuerpo u objeto de estudio sobre 3 superficies diferentes siendo estas: Cóncava, Plana y Convexa.

### 1. Cóncava:

Sobre la superficie cóncava se apoya la esfera en estado de reposo en el punto de inflexión mínimo de la superficie. Procedemos a aplicar en la esfera una carga horizontal para hacer desplazar la esfera una distancia de magnitud ínfima con respecto su posición inicial de reposo. Una vez dejamos de aplicar la carga, la esfera retorna a su posición original en estado de reposo.



Superficie cóncava.

### 2. Plana:

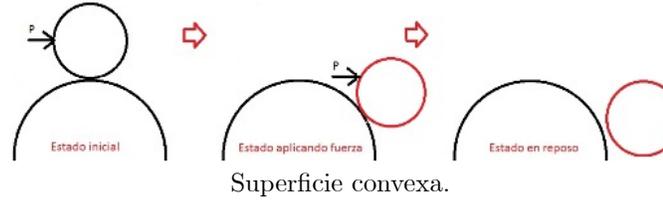
En este caso, procedemos a colocar la esfera sobre una superficie plana horizontal. Procedemos a aplicar en la esfera una fuerza horizontal para hacerla desplazar una distancia de magnitud ínfima con respecto su posición inicial de reposo. Una vez dejamos de aplicar dicha carga, la esfera se encontrará en una nueva posición con respecto a la inicial, pero no existirá ningún movimiento en ella, ya que se encontrará en un estado de reposo.



Superficie plana.

### 3. Convexa:

La esfera se apoyará en este caso en una superficie convexa en su punto de inflexión máximo de la superficie. Procedemos a aplicar una carga horizontal para desplazar la esfera una distancia de magnitud ínfima con respecto a su posición inicial. En dicha superficie, observamos que en el momento en el que dejamos de aplicar la fuerza horizontal, la esfera sigue produciendo movimiento y cada vez se aleja más de su posición inicial sin retorno a dicha posición.



La estabilidad se define como la propiedad de un sistema estructural de mantener su estado de equilibrio durante el periodo de actuación de las fuerzas exteriores.

Habiendo definido las consecuencias que se producen cuando aplicamos una carga a una esfera en 3 superficies diferentes y pudiendo obtener la definición de estabilidad, llegamos a la conclusión que los casos de superficie cóncava como superficie plana, el sistema es estable, mientras que el caso de superficie convexa, el sistema es inestable.

Una vez obtenido la definición de inestabilidad, procedemos a desarrollar lo que es la inestabilidad elástica, que es el conjunto de fenómenos de no linealidad geométrica que se manifiesta cuando los desplazamientos en un elemento estructural no son proporcionales a las fuerzas aplicadas, ya que como hemos nombrado anteriormente, en el caso de una superficie convexa, una vez dejamos de aplicar la fuerza, el elemento sigue desplazándose.

El análisis de la estabilidad de los sistemas elásticos nos permitirá establecer aquellos valores de las fuerzas exteriores para los que el equilibrio estable se convierte en inestable, recibiendo estas fuerzas el nombre de fuerzas críticas de pandeo. A partir de esas fuerzas críticas, si las sobrepasamos, podemos producir una situación de inestabilidad elástica, la cual la deformación de la estructura aumentará, produciendo tensiones adicionales que superarán la tensión de rotura del conjunto de estructura, provocando la ruina y rotura del elemento estructural.

El caso más simple de pérdida de estabilidad en cuerpos elásticos lo encontramos en el caso de una barra esbelta vertical comprimida axialmente, cuando la carga aplicada es lo suficientemente grande, la barra no puede mantener su forma recta y empieza a flexionarse, dando lugar a la pérdida de estabilidad en el cuerpo.

# Capítulo 3

## Matemáticas

### 3.1. Pandeo en el campo elástico

Como ya hemos indicado anteriormente, el caso más simple de pandeo en una estructura es la barra esbelta comprimida axialmente. Este tipo de problema fue planteado y resuelto por primera vez por L. Euler, dando a lugar el llamado “Problema de Euler” o “Estabilidad de la barra según Euler”.

Euler nos plantea una serie de condiciones que tienen que darse para la solución de su problema y son:

- La barra es de un material perfectamente homogéneo y elástico, siendo la barra esbelta y de sección constante. Esto hace que se verifica la Ley de Hooke y en el estado de tensiones alcanzado no supera la tensión de proporcionalidad.
- Los ejes  $y$  y  $z$ , son los principales de inercia, siendo también su eje idealmente recto.
- Las tensiones que se generan al comprimir la barra no superan en ningún caso el límite elástico del material. Se consideran pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos.
- El material está libre de tensiones residuales.
- Las cargas de compresión  $P$  aplicadas en las secciones extremas de la barra resultan de una distribución constante de tensiones normales sobre esas secciones. Esto implica que las cargas están aplicadas exactamente en el centro de gravedad y en la dirección de la directriz de la barra.

Se considera que la posición vertical de la barra es una configuración de equilibrio, de la cual deseamos saber si es estable el cuerpo o no (Figura 1).



Figura 1. Columna de Euler.

Para determinar esto comenzamos por hacer actuar una fuerza perturbadora horizontal infinitesimal y suponemos además que el equilibrio vertical es indiferente, de tal modo que la barra pasa a otra configuración de equilibrio curvada.

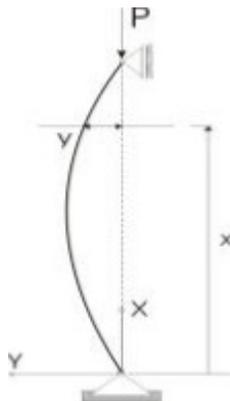


Figura 2. Pandeo en columna de Euler.

Las coordenadas de los puntos de la línea elástica de la barra se designan por los ejes  $x$  e  $y$ . Cuando se consideran pequeños desplazamientos, se verifica la ecuación:

$$EI_z y'' = M_z$$

Esta expresión viene dada a través de la “Ecuación general de la curva elástica” (Figura 3), la cual, considerando como eje  $x$  el coincidente con la directriz de la barra y con sentido positivo hacia la derecha, y el eje  $y$  se dispone con

sentido positivo hacia abajo, se denotará por  $v$  a la ecuación lineal elástica, que se verá en función de  $x$ .

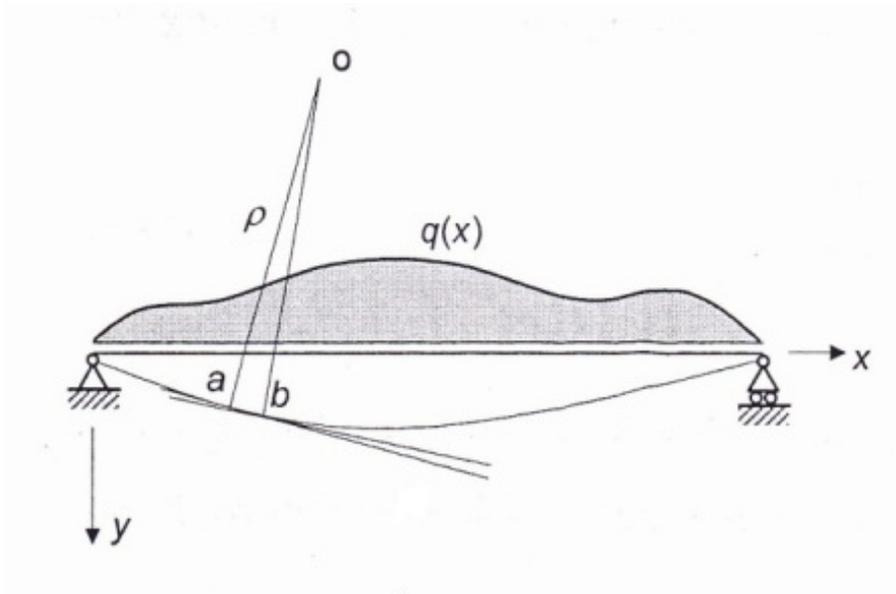


Figura 3. Barra prismática.

En la figura 3 se muestra una barra cargada. Sean dos secciones muy próximas  $a$  y  $b$ , separadas una distancia  $ds$  sobre la línea elástica (Figura 4). El ángulo que la tangente en  $a$  forma con el eje  $x$  se denotará con  $\theta$ . La tangente al punto  $b$ , forma un ángulo  $\theta + d\theta$  con el eje  $x$ . Por tanto ambas tangentes forman un ángulo  $d\theta$ .

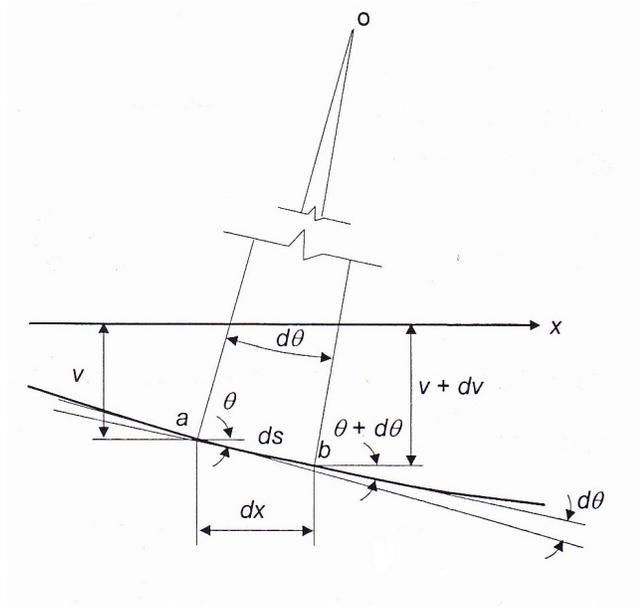


Figura 4. Curva elástica.

El radio de curvatura es  $\rho$ , por lo que el arco  $ds$ , puede expresarse en función del radio de curvatura y del ángulo entre las dos tangentes como:

$$ds = \rho d\theta$$

siendo la curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

Si se considera la hipótesis de pequeñas deformaciones, se puede admitir que:

$$ds = dx \quad \text{y} \quad \theta = \tan \theta = \frac{dv}{dx},$$

expresiones que sustituidas en  $(\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds})$  y determinando  $\frac{d\theta}{dx}$ , entonces:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Sabiendo que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z}$$

y sustituyendo esta ecuación con la anterior, deducimos entonces que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$$

y teniendo en cuenta con la columna de Euler que  $\frac{d^2 v}{dx^2} = y''$ , entonces:

$$y'' = \frac{M_z}{EI_z}.$$

Donde despejando nos sale

$$EI_z y'' = M_z.$$

La flexión de la barra ocurre en el plano  $XY$ , por lo tanto  $I_z$  es el momento de inercia de la sección respecto a un eje perpendicular a dicho plano.

El momento flector  $M$  es en valor absoluto, igual a " $Py$ ". Se considerará positivo el momento que aumenta la curvatura, luego analizando la línea elástica de la figura 2, se observa que la fuerza de compresión  $P$  disminuye, en el sentido algebraico de la palabra, la curvatura. En efecto, cuando  $y$  es positivo la convexidad de la línea elástica se orienta hacia arriba, es decir que la curvatura de la línea elástica es negativa. Con esto tenemos que el momento  $M$  es igual a  $-Py$ .

El momento de la fuerza " $P$ " se orienta de tal manera que, al curvar más la línea elástica, la curvatura se hace más negativa, es decir, disminuye, así que:

$$EI_z y'' = -Py.$$

Dicha fórmula la podemos expresar como una ecuación diferencial, cogiendo " $\frac{P}{EI_z}$ " y llamarlo como " $\alpha^2$ ", con lo que se obtiene:

$$y'' + \alpha^2 = 0.$$

Esa ecuación ya es una ecuación diferencial de segundo orden, de coeficientes constantes (se considera que la inercia es constante) y homogénea. Su ecuación característica es " $r^2 \pm \alpha^2 = 0$ ", cuyas raíces son " $r = \pm \alpha i$ ", siendo su solución general:

$$y = C_1 \text{sen}(\alpha x) + C_2 \cos(\alpha x).$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se calculan a partir de las condiciones de contorno:

1. Cuando  $x = 0$  e  $y = 0$ :

De esta primera condición, se deduce que  $C_2 = 0$ , ya que el cos de 0 es igual a 1, y  $C_1 \text{sen}(\alpha x) = 0$ .

2. Cuando  $x = L$  e  $y = 0$

De esta segunda conclusión obtenemos que  $C_2 \cos(\alpha x) = 0$ , y que la expresión se queda como:

$$C_1 \text{sen}(\alpha L) = 0.$$

Esta ecuación nueva tiene dos soluciones posibles:  $C_1 = 0$  o  $\text{sen}(\alpha L) = 0$ . En el primer caso, como  $C_1$  y  $C_2$  son igual a 0, los desplazamientos “ $y$ ” son nulos y la barra queda en la forma rectilínea.

En el segundo caso, obteniendo la ecuación  $\alpha L = n\pi$ , siendo  $n$  un número entero, arbitrario y mayor que 1, teniendo en cuenta la expresión de  $\alpha^2$ , se obtiene

$$\alpha = \frac{n\pi}{L}, \text{ entonces : } \alpha^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

y de la ecuación de  $\alpha^2$  despejamos la ecuación anterior y obtenemos que

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI_z}{L^2}.$$

Esto indica que para que la barra mantenga la forma curvilínea es necesario que la fuerza  $P$  tenga unos valores determinados. La fuerza mínima  $P$ , no igual a cero, se obtiene cuando  $n = 1$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}.$$

Esta fuerza se denomina primera carga crítica o fuerza de Euler.

De la ecuación  $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ , despejándola en la ecuación diferencial en su segundo caso, la ecuación de la línea elástica se transforma como:

$$y = C_1 \text{sen}\left(\frac{x\pi}{L}\right) \quad \text{cuando } n = 1.$$

La barra se flexiona según una semionda sinusoidal cuya amplitud máxima es  $C_1$ . Para cualquier otro valor entero de “ $n$ ”, la ecuación de la línea elástica es

$$y = C_1 \text{sen}\left(\frac{xn\pi}{L}\right),$$

es decir, que la línea elástica de la barra se representa por una curva compuesta por “ $n$ ” semiondas (Figura 5), que corresponden a las diferentes configuraciones del equilibrio de la misma:

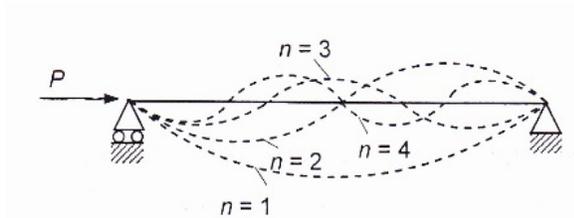


Figura 5. Posibles configuraciones de equilibrio de la barra de Euler.

La última ecuación depende del valor de la constante  $C_1$ , por lo que se podría pensar en un equilibrio indiferente, al ser posibles infinitas configuraciones de equilibrio correspondientes a los distintos valores de  $C_1$ . Sin embargo, hay que recordar que se ha admitido en el desarrollo realizado la hipótesis de pequeños desplazamientos, lo cual no es admisible cuando la carga es superior a  $P_{crit}$ , ya que las deformaciones aumentarían con gran rapidez (como se comprueba experimentalmente), por lo que no se puede prescindir del término  $y'^2$ . En dicho caso hay que utilizar la ecuación diferencial:

$$\frac{EI_z y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -Py$$

Obteniendo así la ecuación general de la curvatura de la barra. Integrando esta ecuación y sustituyendo  $x$  por  $\frac{L}{2}$ , se obtiene la flecha “ $\delta$ ” en el punto central:

$$\delta = y_{(x=\frac{L}{2})} = \frac{L\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{crit}} - 1} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{P}{P_{crit}} - 1 \right) \right],$$

observando esta expresión, podemos concluir:

- Si  $P$  es menor que  $P_{crit}$ ,  $\delta$  resulta imaginaria, lo cual no tiene sentido físico. La configuración recta es la única posible
- Si  $P = P_{crit}$ ,  $\delta = 0$ . La barra tiene una configuración recta.
- Si  $P$  es mayor que  $P_{crit}$ ,  $\delta$  es real. Es decir, la deformada está definida y el equilibrio solo es posible mediante las configuraciones curvas. Como para cada valor de  $P$  corresponde una deformada diferente, no hay posiciones de equilibrio indiferente. Si crece  $P$  por encima de  $P_{crit}$ , la flecha aumenta rápidamente.

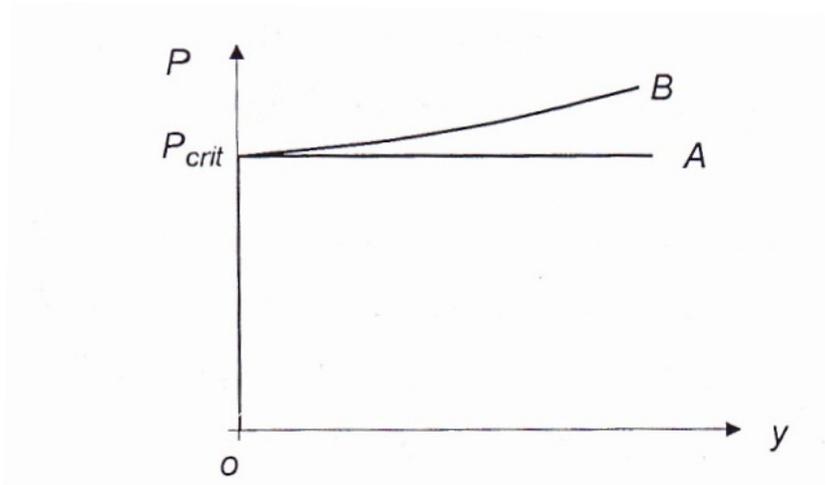


Figura 6. Curvas carga-desplazamiento. A: Pilar ideal elástico con pequeños desplazamientos. B: Pilar ideal elástico con grandes desplazamientos.

En la gráfica de la Figura 6, observamos en la gráfica *B*, como al alcanzar el pilar la carga crítica, se requiere una carga creciente para producir un aumento del desplazamiento. En la misma figura, se ha representado el desplazamiento considerando pequeños desplazamientos (gráfica *A*), donde se observa que el desplazamiento no está definido a partir de la carga crítica.

## 3.2. Condiciones de apoyo de la barra.

### 3.2.1. Distintas formas de sustentación

Generalmente los extremos de la barra se apoyan de alguna de las formas representadas en la Figura 7:

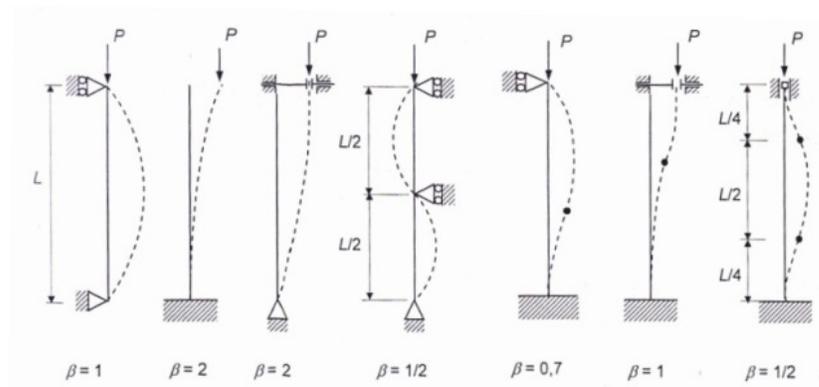


Figura 7. Dependencia entre la fuerza crítica y las condiciones de apoyo de las barras.

Estos tipos de apoyos, dependerá la forma de la curva elástica de pandeo en nuestras estructuras. Por ejemplo, en la barra biarticulada, analizada para la deducción de la fórmula de Euler, se ve que la flexión de esta durante el pandeo ocurre según una semionda de senoide, obteniéndose la expresión de la fuerza crítica indicada en la ecuación. En adelante se llamará a este problema caso fundamental.

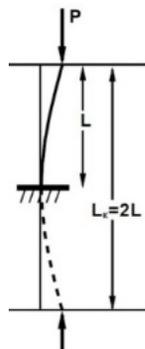


Figura 8. Barra Biarticulada.

Es posible utilizar la solución obtenida para el caso fundamental, para otras condiciones de apoyo de la barra. Así por ejemplo, si la barra se empotra en un extremo y se deja libre en el otro, Figura 7, la línea elástica de la barra podrá ser transformada en la línea elástica de una barra biarticulada, según se indica en la figura 8.

La carga crítica correspondiente a una barra de longitud “ $L$ ” empotrada en un extremo, será igual a la carga crítica correspondiente al caso fundamental para una barra de longitud “ $2L$ ”:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{(2L)^2}.$$

En el caso de una barra biarticulada con un apoyo en mitad de la misma (Figura 7, pilar 4°), al perder la estabilidad se flexiona según dos semiondas. Es decir, cada uno de sus vanos pierde la estabilidad de la misma forma que el caso fundamental para una barra de longitud “ $\frac{L}{2}$ ”. Por lo tanto, la carga crítica es:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

Generalizando las ecuaciones obtenidas, se puede determinar una expresión general de la fuerza crítica para una barra comprimida, y para cualquier tipo de apoyo, como:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\beta L)^2},$$

donde  $\beta$  es el coeficiente de esbeltez, el cual depende de las condiciones de apoyo de la barra. De acuerdo con lo anterior, se denomina longitud de pandeo  $L_k$  de una pieza sometida a un esfuerzo normal de compresión a la longitud que debería tener la pieza del caso fundamental, tal que tenga la misma carga crítica que la pieza real considerada. La longitud de pandeo viene dada por la expresión  $L_k = \beta L$ .

De la ecuación de la Fuerza Crítica con la longitud de pandeo, se puede concluir que, cuanto menor sea  $\beta$ , mayor será la carga crítica y, por lo tanto, la carga admisible sobre la barra.

Los valores de  $\beta$  y por consiguiente de  $L_k$  para cada uno de los siete tipos de apoyos vistos en la figura 7, se obtendrán comparando la fórmula general de la  $P_{crit}$ , con las obtenidas en cada uno de ellos. Los valores están indicados en las figuras correspondientes:

Longitud de pandeo de barras canónicas: $L_k$					
Condiciones de extremo	biarticulada	biempotrada	empotrada articulada	empotrada libre	biempotrada desplazable
$L_k$	1,0.L	0,5.L	0,7.L	2,0.L	1,0.L

Tabla 1. Longitud de Pandeo.

El concepto físico de la longitud de pandeo de una barra será pues: “la longitud que debería tener una barra articulada en ambos extremos, equivalente a la dada (mismo material y sección), para que tuviese la misma carga crítica  $P_{crit}$  que la barra dada.”

### 3.3. Limitación de la Teoría de Euler.

#### Dominio de aplicación de la fórmula de Euler.

No siempre podremos emplear la fórmula de Euler. Al deducirla, se empleó la ecuación diferencial de la línea elástica que se basa en la ley de Hooke, la cual es válida mientras no se sobrepase la tensión del límite de proporcionalidad del material ( $\sigma_p$ ) hasta un valor que se denominará tensión crítica  $\sigma_{crit}$ , es decir:

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} \leq \sigma_p.$$

Esta tensión crítica es igual a la tensión que se produce en cualquier sección transversal de la barra al actuar la carga crítica

$$\sigma_{crit} = \frac{P_{crit}}{A} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\beta L)^2 A},$$

siendo  $A$  el área de la sección transversal de la barra.

Se sabe que el radio de giro  $i_z$  de la sección transversal de una barra es  $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ . La ecuación anterior podemos escribirla en función del radio de giro como

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\beta L}{i_z}\right)^2}.$$

A la magnitud  $\frac{\beta L}{i_z}$ , que caracteriza la influencia de las dimensiones de la barra y las condiciones de apoyo de sus extremos, se la denomina esbeltez de la barra, siendo una cantidad adimensional, y se denota por la letra “ $\lambda$ ”. Se pueden describir la ecuación general de la carga crítica y de la tensión crítica en función de la esbeltez, dándonos las formulas:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2},$$

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Hasta ahora solo empleábamos el momento de inercia de la sección recta correspondiente al eje  $Z$ , al suponer sólo la posibilidad de pandeo en el plano  $XY$  (alrededor del eje  $Z$ ). Sin embargo, si no está impedido el movimiento, la barra puede pandear también en el plano  $YZ$  (alrededor del eje  $X$ ). De la ecuación general de la carga crítica deducimos que la barra pandeará en el plano de mayor esbeltez, que se denominará  $\lambda_{m\acute{a}x}$ . Si las condiciones de apoyo en ambos planos son iguales, el pandeo se producirá en el plano del eje de mayor inercia de la sección recta (alrededor del eje de menor inercia).

La validez de la fórmula de Euler planteada como que la tensión crítica es igual a la carga crítica entre el área de la sección, rescrita en función de la esbeltez máxima será:

$$\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{m\acute{a}x}^2} \leq \sigma_p.$$

Despejando la esbeltez de la ecuación anterior, obtendremos el valor mínimo que ha de tener la esbeltez para que se pueda aplicar la fórmula de Euler

$$\lambda_{m\acute{i}n} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}.$$

Adoptando como tensión límite de proporcionalidad el 80% de la tensión de fluencia ( $\sigma_f$ ), la ecuación anterior pasa a ser

$$\lambda_{m\acute{i}n} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{0,8\sigma_f}}.$$

Así, con todo esto, podemos crear una grafica con una curva ABC que representa la fórmula  $\sigma_{crit} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{m\acute{a}x}^2} \leq \sigma_p$ , denominada la hipérbola de Euler.

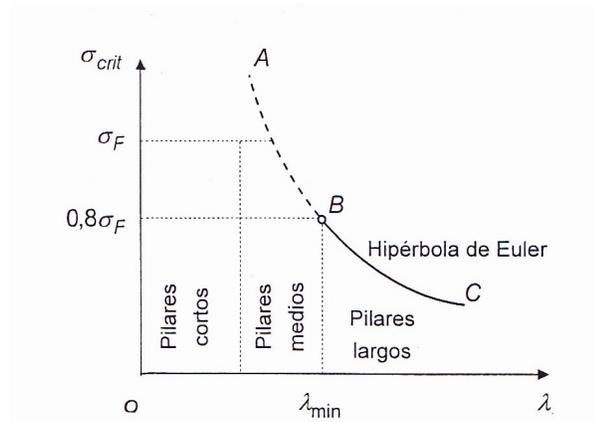


Figura 9. Hipérbola de Euler.

De la hipérbola se deduce que a medida que disminuimos la esbeltez  $\lambda$  de la columna ( $\lambda_2 < \lambda_1$ ), la tensión crítica  $\sigma_{crit}$  aumenta ( $\sigma_{crit1} > \sigma_{crit2}$ ), es decir, aumenta la capacidad de la columna para resistir mas cargas sin que se produzca el pandeo.

Esta parábola solo es válida hasta cierto punto  $P$ , que corresponde a una esbeltez  $\lambda_{min}$ , que es la esbeltez para la cual:  $\sigma_{crit} = f_y$  (tensión del límite elástico).

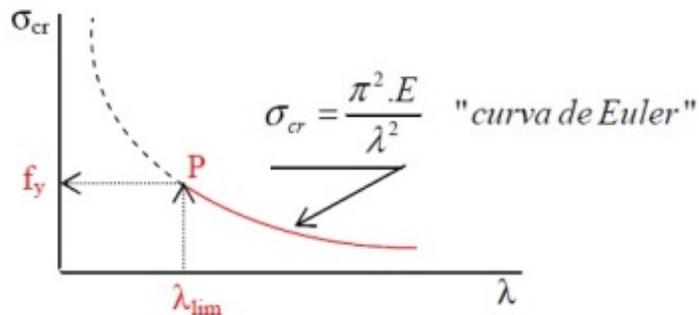


Figura 10. Curva de Euler. Valor Mínimo.

Ello es debido a que en la deducción de la fórmula para la obtención de la carga crítica  $P_{crit}$ , se utiliza la ecuación diferencial de la elástica y ésta solo es aplicable para los casos en que  $E = cte$  o lo que es lo mismo cuando  $\sigma < f_y$ . Además, al alcanzarse la tensión del límite elástico, el fallo se producirá por haberse alcanzado la resistencia a la compresión de la sección.

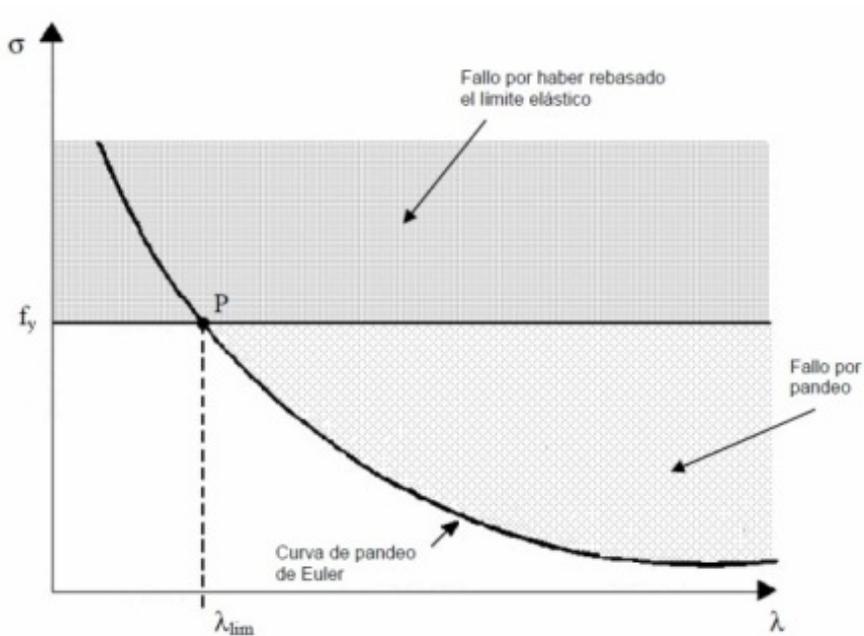


Figura 11. Modos de Fallo en la Curva de Euler

### 3.4. Pandeo Real.

Las teorías anteriores sobre el pandeo elástico e inelástico se basan en condiciones idealizadas. El comportamiento real de los pilares difiere del estudio teórico e ideal que acabamos de hacer. Ello es debido a las diversas imperfecciones del pandeo real que no se han tenido en cuenta en el estudio teórico, tales como:

- Comportamiento del Material: falta de homogeneidad o un diagrama  $\sigma - \varepsilon$  más complejo que los utilizados.
- Imperfecciones geométricas: las barras presentan curvaturas iniciales,...
- Cargas axiales no aplicadas exactamente en el centro de gravedad de la sección transversal del pilar.
- Tensiones residuales producidas en la fabricación del pilar, bien por el proceso de laminación o por las soldaduras...

Con toda esta serie de imperfecciones, podemos mostrar la diferencia entre la Curva de Pandeo Real y la Curva de Euler (Figura 12).

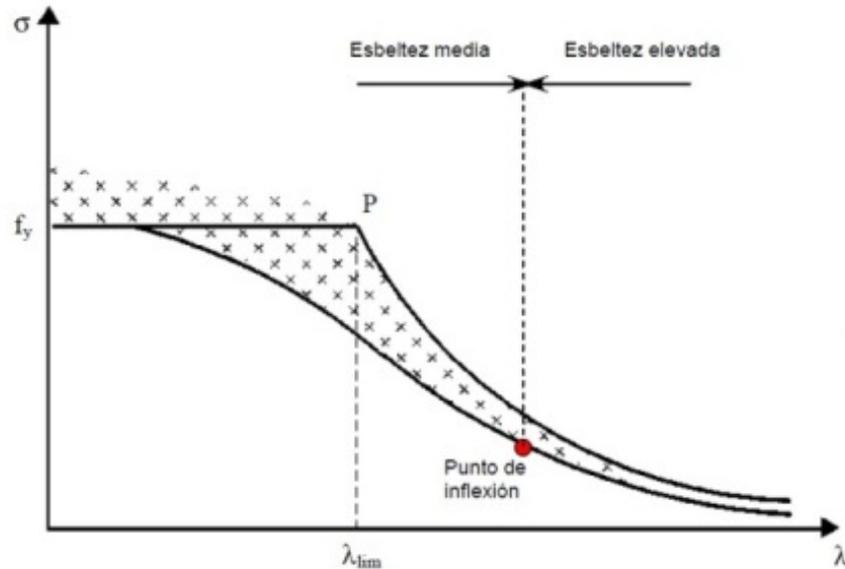


Figura 12. Área diferencia Curva de Euler y Curva de Pandeo

Comparado con las curvas teóricas, el comportamiento real muestra mayores dispersiones en el intervalo de esbelteces medias que en el intervalo de esbelteces elevadas. en la zona de esbelteces medias (que representa a la mayoría de los pilares), el efecto de las imperfecciones es significativo y debe de ser tenido en cuenta. La mayor reducción en el valor teórico se produce en la región de la esbeltez límite  $\lambda_{lim}$ .

La curva límite inferior se ha obtenido de un análisis estadístico de los resultados de los ensayos y representa el límite seguro para la carga.

Un pilar puede ser considerado de esbeltez elevada si el valor de la esbeltez es mayor a la correspondiente al punto de inflexión de la curva límite inferior, mostrada en la figura 12. Para la carga última en dichos pilares, de esbeltez elevada, se puede tomar la carga crítica de Euler:  $\sigma_{crit}$ .

Son los pilares de esbelteces medias aquellos cuyo comportamiento, tal y como se observa en la figura anterior, se desvía más de la teoría de Euler. Es pues en ellos donde se observa que más influye la presencia de imperfecciones, las cuales dan lugar a tensiones adicionales que se añadirán a las obtenidas en el comportamiento teórico, lo que explica que las cargas últimas que serán capaces de resistir los pilares en el pandeo real sean inferiores a las obtenidas en el pandeo teórico.

Son la falta de rectitud del eje del pilar y la presencia de tensiones residuales, las imperfecciones que presentan un efecto más significativo en el comportamiento de este tipo de pilares.

Así pues, en el pandeo real tendremos que, en general, a las tensiones producidas por la carga de compresión, les tendremos que sumar las debidas a las

tensiones residuales y las debidas a la flexión, dada la falta de rectitud del eje del pilar, con lo cual la tensión total final máxima será:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_z}{W_c} + \sigma_{\text{res}} = \frac{P}{A} + \frac{P * \delta}{W_c} + \sigma_{\text{res}} = \sigma + \frac{(\sigma A)\delta}{W_c} + \sigma_{\text{res}} = k_1 \sigma$$

donde la tensión máxima se dará en la sección  $x = \frac{L}{2}$ , siendo:

$W_c$  = Módulo resistente a compresión de la sección referido al plano de flexión,

$\delta$  = Flecha máxima,

$k_1$  = Coeficiente de amplificación de la tensión de compresión  $\sigma = \frac{N}{A}$ .

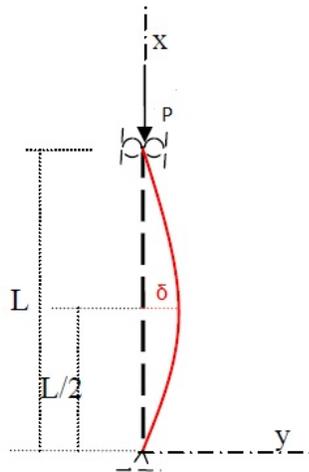


Figura 13. Tipo de Barra para cálculo de Pandeo Real

La conclusión que sacamos con esto es que en el Pandeo Teórico de Euler sólo tenemos en cuenta la Compresión, mientras que en el Pandeo Real se tienen en cuenta: La compresión + Flexión + Tensiones residuales.

### 3.5. Comprobación a Pandeo

**De piezas sometidas a compresión centrada por el método de la nueva Normativa Española: DB-SE-A: Caso de barra rectas de sección constante y axil constante. Para Estructuras Metálicas.**

Para el cálculo de la comprobación a pandeo de las estructuras verticales metálicas, nos basaremos en el criterio expuesto en el DB-SE-A del CTE, para

ello necesitaremos las fórmulas de Pandeo Real y las gráficas de Curvas Europeas de Pandeo.

La ecuación de la tensión máxima en el Pandeo Real, se tiene en cuenta, tal y como indicamos anteriormente, de las tensiones debidas a la compresión junto con las tensiones que producen las imperfecciones del pilar (falta de rectitud y las tensiones residuales).

La fórmula propuesta por la Normativa para la comprobación a pandeo es:

$$\sigma_{\text{máx}} = k_1 \sigma^* = k_1 \frac{P^*}{A} \leq f_{yd} \rightarrow P^* \leq \frac{1}{k_1} A f_{yd} \rightarrow P^* \leq \chi A f_{yd}.$$

Denominando  $P_{b,Rd}$  = Resistencia última de la barra a pandeo =  $\chi A f_{yd}$ ; y a  $\chi = \frac{1}{k_1}$  = Coeficiente de reducción por pandeo.

Así pues, la fórmula final para la comprobación a pandeo de una barra de sección constante sometida a una compresión centrada constante será:

$$P^* \leq P_{b,Rd} = \chi A f_{yd}.$$

Los valores del coeficiente de reducción por pandeo  $\chi$ , que como se ve, es el inverso del coeficiente de amplificación de tensiones  $k_1$ , se pueden obtener a partir de las curvas de pandeo Europeas".

Se puede sacar como conclusión:

1. Al coeficiente  $\chi \leq 1$ , se le denomina "coeficiente de reducción de pandeo" por lo siguiente:
2. La resistencia última plástica, de una sección a compresión es:  $P_{pl,d} = A f_{yd}$ , ya que  $\chi = 1$  y la comprobación a resistencia de una sección trabajando a compresión se aplicaba la fórmula:  $P^* \leq P_{pl,d} = A f_{yd}$ .

Como en el caso del pandeo y tal como hemos visto, además de las tensiones debidas a compresión, habría que añadir las debidas a flexión y las tensiones residuales, la resistencia última de la sección, será inferior a la de solamente debida a la compresión.

Una vez desarrollada las fórmulas de Pandeo Real, necesitaremos las "gráficas de curvas europeas de pandeo".

Las curvas de pandeo ECCS están basadas en los resultados de más de 1000 ensayos sobre varios tipos de piezas: I, H, T, [ ^, [ ], O, con diferentes valores de esbeltez (entre 55 y 160). Se han tenido en cuenta una imperfección geométrica de falta de rectitud del eje del pilar, tomando un eje semisinusoidal de magnitud  $f = \frac{L}{1000}$ , así como los efectos de tensiones residuales relativas a cada tipo de sección transversal.

Las curvas de pandeo ECCS: a0, a, b, c y d, se muestran en la siguiente figura 14 y el utilizar unas u otras va a depender de la forma de la sección transversal del pilar considerado, de la dirección en la que pueda ocurrir el pandeo (eje  $y$  o eje  $z$ ) y del proceso de fabricación utilizado en el pilar (laminación en caliente, soldado o conformado en frío). Ver figura 15:

$\chi$  se obtiene de la esbeltez  $\bar{\lambda}$  para la curva de pandeo adecuada.

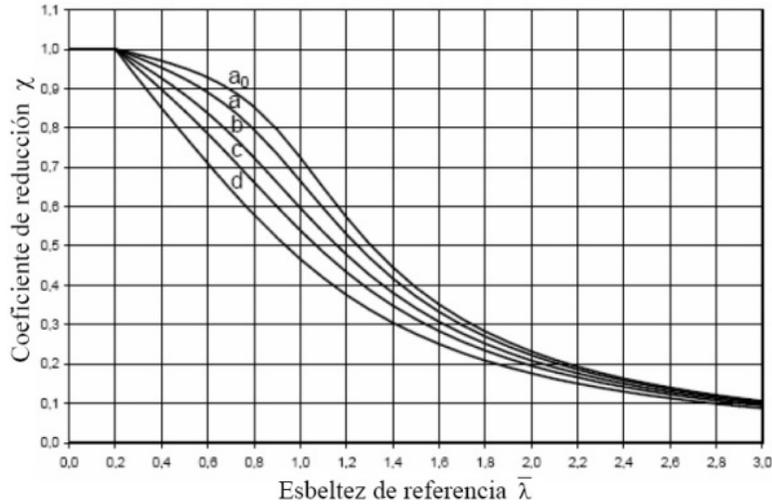


Figura 14. Curvas Europeas de Pandeo.

Éstas curvas nos proporcionan el valor para el coeficiente de reducción por pandeo  $\chi$ , en función de la curva de pandeo apropiada al caso y de la esbeltez reducida  $\lambda_{red}$ :

$$\lambda_{red} = \sqrt{\frac{Af_y}{P_{crit}}} \text{ "esbeltez reducida", siendo } P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{L_k^2} \text{ (carga crítica de Euler).}$$

Tipo de sección	Tipo de acero		S235 e S155		S450	
	Clase de pandeo $\alpha$		Y	Z	Y	Z
Perfiles laminados en frío		h ≤ 120 mm	a	b	a	b
		40 mm ≤ h ≤ 120 mm	b	c	b	c
		h ≤ 120 mm	b	c	a	a
		h > 120 mm	d	d	c	c
Perfiles laminados en caliente		h ≤ 120 mm	b	c	b	c
		h > 120 mm	c	d	c	d
Agrupación de perfiles con aceros soldados						
Tubos de chapa o placa o agujerados		acero laminado en caliente	a	b	a	b
		acero laminado en frío	b	c	b	c
Perfiles soldados en caliente		acero laminado en caliente	a	b	a	b
		acero laminado en frío	b	c	b	c
8º caso						

Figura 15. Tabla Curva de Pandeo en función de la sección transversal del acero.

Los datos de la Figura 16 que se indica a continuación, que dan también los valores del coeficiente  $\chi$  de reducción del pandeo, se obtienen de la Figura 14 (curvas de pandeo), pero son más operativas a la hora de tomar datos de las mismas.

$\bar{\lambda}$	Factor de reducción $\gamma$				
	Curva a <sub>0</sub>	Curva a	Curva b	Curva c	Curva d
0.2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0.3	0,9859	0,9775	0,9641	0,9497	0,9255
0.4	0,9701	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0.5	0,9513	0,9243	0,8847	0,8430	0,7793
0.6	0,9276	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0.7	0,8961	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0.8	0,8584	0,7957	0,7245	0,6671	0,5797
0.9	0,7961	0,7329	0,6612	0,5998	0,5208
1.0	0,7253	0,6656	0,5970	0,5399	0,4671
1.1	0,6483	0,5960	0,5357	0,4847	0,4189
1.2	0,5732	0,5300	0,4781	0,4338	0,3752
1.3	0,4994	0,4703	0,4369	0,4088	0,3685
1.4	0,4461	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1.5	0,3953	0,3754	0,3425	0,3145	0,2766
1.6	0,3520	0,3327	0,3079	0,2842	0,2512
1.7	0,3150	0,2964	0,2781	0,2577	0,2289
1.8	0,2833	0,2702	0,2531	0,2345	0,2093
1.9	0,2550	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2.0	0,2323	0,2229	0,2093	0,1962	0,1766
2.1	0,2117	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2.2	0,1937	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2.3	0,1779	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2.4	0,1640	0,1585	0,1506	0,1425	0,1300
2.5	0,1515	0,1467	0,1397	0,1325	0,1211
2.6	0,1404	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2.7	0,1305	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2.8	0,1216	0,1182	0,1132	0,1079	0,9997
2.9	0,1136	0,1105	0,1060	0,1017	0,9457
3.0	0,1063	0,1036	0,9994	0,9951	0,9382

Figura 16. Tabla Valores del coeficiente de pandeo  $\chi$ .

**De piezas sometidas a compresión centrada por el método de la nueva Normativa Española: DB-SE-A: Caso de barra rectas de sección constante y axil constante. Para Estructuras verticales de Hormigón Armado.**

Para el cálculo de la comprobación a pandeo de las estructuras verticales de hormigón armado, nos basaremos en el criterio expuesto en el DB-SE-A del CTE. Para ello deberemos calcular la longitud de pandeo para pilares de hormigón armado según el CTE.

Primero de todo, tendremos que identificar qué tipo de estructura es: Traslacional e Intraslacional:

La EHE-08, en el Art. 43.1, define las estructuras que pueden sufrir inestabilidad en dos tipos de estructuras: Traslacional e Intraslacional. Y las define de la siguiente manera:

- Estructura Intraslacional: Son aquellas cuyos nudos, bajo sollicitaciones de cálculo, presentan desplazamientos transversales cuyos efectos pueden ser despreciados desde el punto de vista de la estabilidad del conjunto.
- Estructura Traslacional: Aquellas cuyos nudos, bajo sollicitaciones de cálculo, presentan desplazamientos transversales cuyos efectos no pueden ser despreciados desde el punto de vista de la estabilidad del conjunto.

Para determinar las longitudes de pandeo según el CTE, es preciso conocer previamente los denominados coeficientes de distribución  $\eta_1$  y  $\eta_2$  que se obtienen a partir de:

$$\eta_1 = \frac{K_c + K_1}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}}; \quad \eta_2 = \frac{K_c + K_2}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}},$$

siendo

$K_c$  coeficiente de rigidez  $\frac{EI_z}{L}$  del tramo de pilar analizado.

$K_i$  coeficiente de rigidez  $\frac{EI_z}{L}$  del siguiente tramo de pilar en el nudo  $i$ , nulo si no existe.

$K_{ij}$  coeficiente de rigidez eficaz de la viga en el nudo  $i$ , y posición  $j = \frac{EI_z}{L} \gamma_{ij}$ , dónde:

$\gamma_{ij} = 1,0$ , si la viga está empotrada en el otro extremo.

$\gamma_{ij} = 0,75$ , si la viga está articulada en el otro extremo.

$\gamma_{ij} = 1,50$ , si el giro es igual al del extremo opuesto.

$I_z = \frac{bh^3}{12}$  si es un pilar rectangular.

$I_z = \frac{\pi r^4}{4}$  si es un pilar circular.

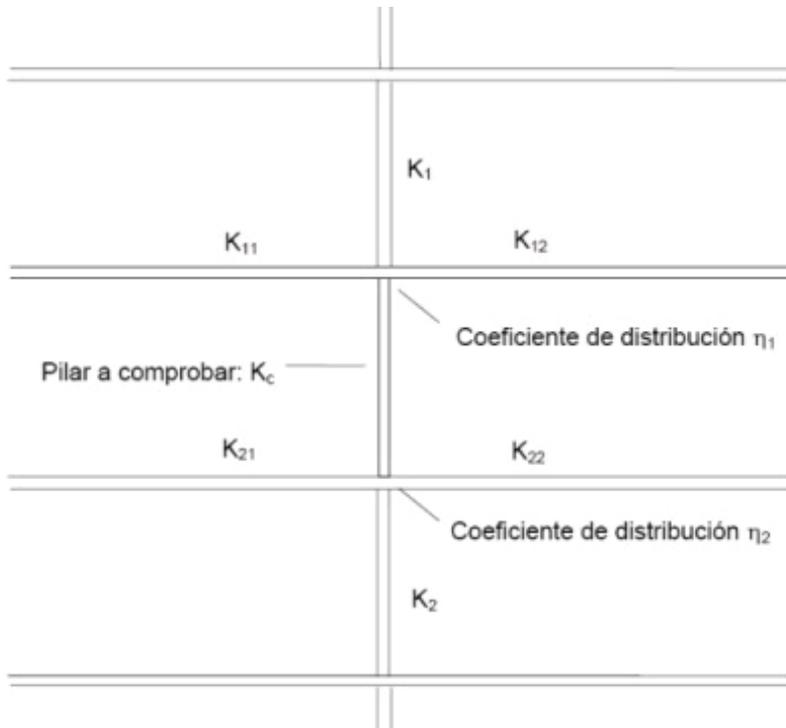


Figura 17. Entramado pilares y vigas para cálculo de longitud de Pandeo.

Los coeficientes de rigidez eficaz de las vigas pueden determinarse de acuerdo con la tabla 6.5 del CTE siempre que permanezcan elásticas bajo los momentos de cálculo.

Condiciones de coacción al giro en la viga en el extremo contrario al considerado.	Coeficiente de rigidez eficaz K de la viga	
	sin compresión relevante	con compresión <sup>(1)</sup>
empotrado	1,0 EI/L	1,0 EI/L (1-0,4 N/N <sub>crit</sub> )
articulado	0,75 EI/L	0,75 EI/L (1 - 1,0 N/N <sub>crit</sub> )
giro igual y de igual signo	1,5 EI/L	1,5 EI/L (1-0,2 N/N <sub>crit</sub> )
giro igual y y de signo opuesto	0,5 EI/L	0,5 EI/L (1-1,0 N/N <sub>crit</sub> )
giro $\theta_a$ en el nudo considerado y giro $\theta_b$ en el otro	$(1 + 0,5 \theta_b / \theta_a)$ EI/L	-

<sup>(1)</sup> N<sub>crit</sub> se refiere al valor crítico a compresión de la viga considerada. El caso general (-) no está contemplado

Tabla 2. Coeficiente de rigidez eficaz para una viga en comportamiento elástico.

Cuando el momento de cálculo en cualquiera de las vigas supere  $W_{el} f_{yd}$  debe suponerse que la viga está articulada en el punto o puntos correspondientes.

La longitud de pandeo  $L_k$  de un tramo de pilar de longitud L unido rígidamente a las demás piezas de un pórtico intraslacional puede obtenerse del cociente:

$$\beta = \frac{L_k}{L} = \frac{1 + 0,145(\eta_1 + \eta_2) - 0,265\eta_1\eta_2}{2 - 0,364(\eta_1 + \eta_2) - 0,247\eta_1\eta_2} \leq 1.$$

La longitud de pandeo  $L_k$  de un tramo de pilar unido rígidamente a las demás piezas de un pórtico traslacional en cuyo análisis no se hayan contemplado los efectos de segundo orden puede obtenerse del cociente:

$$\beta = \frac{L_k}{L} = \sqrt{\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\eta_1\eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\eta_1\eta_2}} \geq 1.$$

Los valores del coeficiente  $\beta$  puede obtenerse en ambos casos de las figuras siguientes:

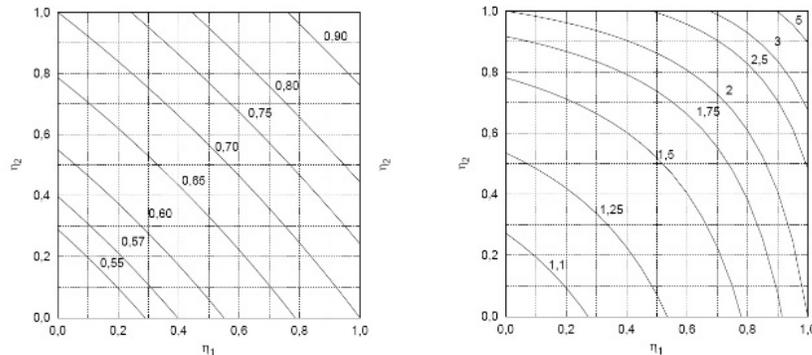


Figura 18. Coeficiente  $\beta$  para pórtico Intraslacional (izquierda) y Traslacional (derecha).

Si los tramos sucesivos tienen diferente relación  $\frac{P}{P_{crit}}$ , la aproximación de  $\beta$  obtenida, y por tanto la de la misma  $P_{crit}$ , están del lado de la seguridad.

Este planteamiento del CTE es similar al anterior propuesto por la EA-95 aunque cambian los valores de los coeficientes y es preciso estimar la rigidez de las vigas en los nudos para determinar los coeficientes de distribución y las longitudes de pandeo.



# Capítulo 4

## Implementación

### 4.1. Procedimiento de comprobación

#### A pandeo de estructuras verticales de acero y de hormigón armado.

El procedimiento para la comprobación a pandeo de estructuras metálicas, ya sean de acero o de hormigón armado, consistirá en:

1. *Obtener los Datos necesarios:*

- Clase de acero (límite elástico  $f_{yd}$ ).
- Sección transversal de la pieza (clasificación de secciones, radios de giro,...).
- Tipo de vinculación de la pieza en sus extremos (coeficiente de pandeo).
- Tipo de pieza y plano de pandeo (curva de pandeo).
- Longitud de la pieza.
- Esfuerzo axial de cálculo.

2. *Obtención de la esbeltez de referencia  $\lambda_{\text{mín}}$ :*

Las características geométricas de la forma y su límite elástico proporcionan la esbeltez de referencia

$$\lambda_{\text{mín}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)[\beta_a]^{0,5},$$

siendo

$\lambda = \frac{L_{crit}}{i}$ ;  $L_{crit}$ : longitud de pandeo y  $i$  = radio de giro, siendo el Radio de giro:  $i = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

Para estructuras de acero se utilizará:

$$\lambda_1 = \pi \left[ \frac{E}{f_{yd}} \right]^{0,5} = 93,9\varepsilon \quad \text{con} \quad \varepsilon = \left[ \frac{235}{f_{yd}} \right]^{0,5}$$

$$\beta_a = 1 \quad \text{Secciones clases 1,2 y 3}; \quad \beta_a = \frac{A_{eff}}{A} \quad \text{Secciones clases 4}$$

Para estructuras de hormigón armado se comprobará de la siguiente manera:

- Si  $\lambda < 35$  Pueden despreciarse los efectos de segundo orden y no efectuar comprobación a pandeo.
- Si  $35 \leq \lambda \leq 100$  puede aplicarse el método simplificado para soportes aislados.
- Si  $100 > \lambda \leq 200$  se debe aplicar el método general de la EHE-08 Art. 43.4.
- Si  $\lambda > 200$  No queda contemplado por la EHE-08.

En los casos en que  $35 \leq \lambda \leq 100$ , se aplica el método simplificado para soportes aislados, para ello se basará todo el proceso en el método aproximado de flexión compuesta recta.

Para soportes de sección y armadura constante deberá dimensionarse la sección para una excentricidad total igual a la que se indica:

$$e_{tot} = e_e + e_a \geq e_2,$$

$$e_a = (1 + 0,12\beta)(\varepsilon_y + 0,0035) \frac{h + 20e_e}{h + 10e_e} \frac{L_k^2}{50i},$$

donde:

$e_a$  Excentricidad ficticia utilizada para representar los efectos de segundo orden.

$e_e$  Excentricidad de cálculo de primer orden equivalente a:

- $e_e = 0,6e_2 + 0,4e_1 \geq 0,4e_2$  para soportes intraslacionales
- $e_e = e_2$  para soportes traslacionales

$e_1, e_2$  excentricidades del axil en los extremos de la pieza, siendo  $e_1 = M_{Sup,p}/N_x$  y  $e_2 = M_{Inf,p}/N_x$ . No se tomará  $e_1$  ni  $e_2$  menores a la excentricidad accidental mínima, cuyo valor es  $\frac{Canto}{20}$  o 2 cm.

$L_k$  longitud de Pandeo.

$i$  radio de giro de la sección de hormigón en la dirección considerada.

$h$  canto total de la sección de hormigón.

$\varepsilon_y$  deformación del acero para la tensión de cálculo  $f_{yd}$ , es decir:  $\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}$ .

$\beta$  factor de armado en las que:

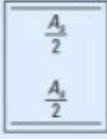
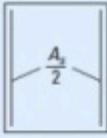
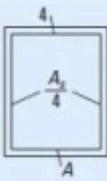
Disposición de armadura	$i_c^2$	$\beta$
	$\frac{1}{4}(d-d')^2$	1,0
	$\frac{1}{12}(d-d')^2$	3,0
	$\frac{1}{6}(d-d')^2$	1,5
	$\frac{1}{8}(d-d')^2$	2,0

Figura 19. Factor de Armado  $\beta$ 

Si  $100 < \lambda \leq 200$ , entonces deberemos comprobar el factor de longitud de pandeo de la estructura, siendo este igual a:

$$\alpha = \sqrt{\frac{7,5 + 4(\psi_A + \psi_V) + 1,6\psi_A\psi_B}{7,5 + (\psi_A + \psi_B)}}$$

donde:

$\Psi$  representa la relación de rigideces  $\sum \frac{EI}{L}$  de los soportes a  $\sum \frac{EI}{L}$  de las vigas, en cada extremo A y B del soporte considerado. Como valor de I se tomará la inercia bruta de la sección  $y$ .

$\alpha$  es el factor de longitud de pandeo, que adopta, según los casos, los siguientes valores:

Soporte biempotrado  $\alpha = 0,5L$ .

Soporte biarticulado  $\alpha = L$ .

Soporte articulado-empotrado  $\alpha = 0,7L$ .

Soporte en ménsula  $\alpha = 2L$ .

Soporte biempotrado con extremos desplazables  $\alpha = L$ .

3. *Obtención del coeficiente de reducción para el pandeo  $\chi$ :*

Se calcula mediante las curvas europeas de pandeo y la esbeltez  $\lambda_{\min}$  (Figura 16).

4. *Comparación de la carga axil de cálculo con la carga crítica de Euler:*

Se procede a calcular la carga crítica de Euler y una vez obtenida se comprueba que la carga axil de cálculo es inferior a la carga crítica de Euler ( $P^* < P_{crit}$ ), si es así la pieza resulta aceptable y continuamos realizando la comparación de la carga axil de cálculo con la del esfuerzo axil de agotamiento por pandeo.

5. *Obtención y comprobación del esfuerzo axil de agotamiento por pandeo con respecto la carga axil de cálculo:*

La resistencia a pandeo de una pieza a compresión se realiza mediante la expresión:

$$P_{b.rd} = \chi \beta_a \frac{A f_{yd}}{\gamma_{m1}}.$$

Si el axil de agotamiento  $P_{b.rd}$  es mayor que la carga axil de cálculo la pieza resulta aceptable; si no es así, deberemos probar con otra sección mayor de otro tipo.

## Capítulo 5

# Experimentación

Una vez se ha explicado los pasos de cómo se comprueba, y una vez logrado obtener el procedimiento de resolución de los diferentes casos y proceder a comprobarlos para poder certificar si los elementos verticales, ya sean de acero o de hormigón, cumplen con las exigencias de la Norma CTE y de la EHE-08 y así, que dichas estructuras verticales no sufran el pandeo, se procede a resolver 2 casos puntuales (Vivienda de 9 Plantas y 2 sótanos, y una vivienda unifamiliar) en los cuales se realizará los cálculos necesarios para ver que cumplen con dichas normativas y a la vez, se realizará una comparación entre ellas y el porqué de las medidas de pilares en cada caso.

### 5.1. Caso 1. Vivienda de 9 plantas y 2 sótanos

Primero de todo, se empieza a realizar los cálculos necesarios en la vivienda de 9 plantas y 2 sótanos, para comprobar si esta vivienda cumple las exigencias de la leyes y no sufre el efecto de pandeo.

Dicha vivienda se encuentra en la ciudad de Villajoyosa, en la provincia de Alicante, la cual en nuestro caso, seleccionamos el conjunto de viviendas que se encuentra definido como “Bloque 2” y en la subparte de Escalera nº 8. Como ya se ha dicho anteriormente, es un edificio que se compone de 9 plantas con planta baja para entrada al edificio y creación de locales comerciales y 2 sótanos, los cuales dichos sótanos sirven como aparcamientos.

Para el cálculo a pandeo del edificio, primero se escogerá a los pilares que se encuentran dentro de las viviendas, es decir, desde el forjado nº 3 hasta el forjado nº 12, entre los cuales se encuentran las 9 plantas de viviendas de los edificios. Dichas viviendas, tienen la misma disposición de pilares en todo el entramado de estructura vertical, aunque mientras se va elevando la estructura, al tener que soportar menos carga, los pilares van disminuyendo en su sección. Por ello, ya que todos los pilares entre forjados son muy parecidos y se encuentran en la misma posición, solo realizaremos el cálculo de pilares de una planta.

Como la más desfavorable y la que más cargas va a soportar será la de la planta primera, seleccionaremos los pilares de la planta primera como ejemplo de cálculo a pandeo de los pilares.

Esta planta está compuesta de hasta 8 pilares de diferente sección, de un total de 16 pilares que se compone la estructura vertical de la vivienda. La disposición de los 16 pilares los encontramos en el plano adjunto de estructura de forjado 3-4-5.

Los pilares que se seleccionan tienen una altura libre de 2,70 m y su sección horizontal de:

1. Pilar 1 - 2 =  $70 \times 30$  cm, compuesto por 10 barras del 16 mm.
2. Pilar 3 - 6 =  $150 \times 30$  cm, compuesto por 4 barras del 16 mm y 10 barras del 12 mm.
3. Pilar 4 - 5 =  $85 \times 30$  cm, compuesto por 6 barras del 20 mm y 6 barras del 16 mm.
4. Pilar 7 - 10 =  $30 \times 75$  cm, compuesto por 6 barras del 16 mm y 4 barras del 12 mm.
5. Pilar 8 - 9 =  $90 \times 35$  cm, compuesto por 4 barras del 25 mm y 8 barras del 20 mm.
6. Pilar 11 - 12 =  $75 \times 30$  cm, compuesto por 4 barras del 16 mm y 4 barras del 12 mm.
7. Pilar 13 - 16 =  $90 \times 30$  cm, compuesto por 10 barras del 12 mm.
8. Pilar 14 - 15 =  $150 \times 30$  cm, compuesto por 16 barras del 12 mm.

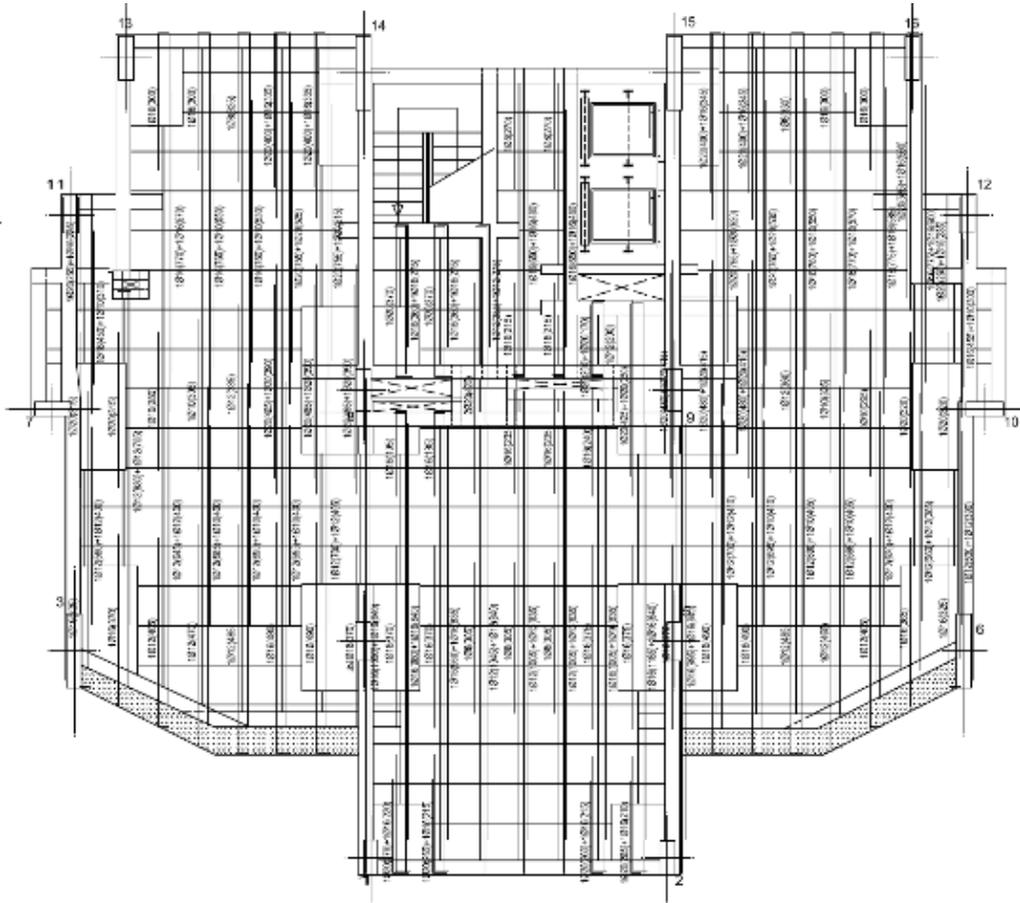


Figura 20. Forjado nº 4 con ubicación de pilares de la planta baja.

Como podemos observar, hay 8 pilares de diferentes secciones y con diferente número de barras y diferente medidas de barras.

Los pilares están realizados de hormigón armado, compuesto por hormigón HA-25 de la clase de exposición I y de consistencia blanda, y también de barras corrugadas de acero del tipo B-400 SD.

Los forjados se realizan como forjados reticulares bidireccionales, por lo tanto, no se encuentran vigas en el enlace de pilares, sino zunchos de borde.

Una vez definido la estructura, procedemos a realizar los cálculos a pandeo de la estructura, teniendo como datos del problema:

*Datos:*

$$f_{yd} = 400 \frac{N}{mm^2}; \gamma_c = 1,5; \gamma_s = 1,15; E = 2,10 * 10^5 \frac{N}{mm^2}; L = 2,70 m.$$

a) *Longitud de Pandeo:*

Primero, se debe calcular cual es la longitud nueva (Longitud de Pandeo) que alcanzan los pilares de la estructura una vez se pandean. Al ser un forjado

reticular, no se encuentran vigas, por lo tanto, en el cálculo de  $\eta_1$  y  $\eta_2$  solo realizaremos con los coeficientes de rigidez de rigidez del tramo del pilar analizado ( $K_c$ ), como del coeficiente de rigidez del siguiente tramo del pilar en el nudo  $i$  ( $K_i$ ):

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} \quad y \quad \eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}}.$$

Como  $K_{11} = K_{12} = K_{21} = K_{22} = 0$ , ya que no hay vigas, entonces:

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1} \quad y \quad \eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2}, \quad \text{por lo tanto } \rightarrow \eta_1 = 1 \quad y \quad \eta_2 = 1.$$

Una vez obtenidos los coeficientes  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , procedemos a calcular  $\beta$  para poder calcular la longitud de pandeo  $L_k = \beta L$ . Al ser una estructura de forjados reticulares, se considerará la estructura como rígida y la cual la podremos definir como una estructura Intraslacional, y por eso seleccionaremos la fórmula de  $\beta$  para estructuras intraslacionales:

$$\beta = \frac{1 + 0,145(\eta_1 + \eta_2) - 0,265\eta_1\eta_2}{2 - 0,364(\eta_1 + \eta_2) - 0,247\eta_1\eta_2} \leq 1,$$

entonces:

$$\beta = \frac{1+0,145(1+1)-0,265*1*1}{2-0,364(1+1)-0,247*1*1} = \frac{1+0,29-0,265}{2-0,728-0,247} = \frac{1,025}{1,025} = 1 \rightarrow L_k = \beta L = 1 * 2,70 = 2,70 \text{ m}.$$

Se observa que al calcular el coeficiente  $\beta$ , da de valor el mayor valor que puede alcanzar  $\beta$  como estructura intraslacional, esto significa que el pilar al sufrir el efecto de pandeo mantiene su longitud intacta, ya que cualquier estructura intraslacional solo puede, o acortarse o quedarse con la misma longitud inicial antes de aplicar cualquier carga a compresión.

#### b) *Esbeltez Mecánica:*

Como primer paso, se procede a comprobar la esbeltez mecánica de los pilares para comprobar si se tiene que realizar la comprobación o no a pandeo de la estructura. No se tendrá que realizar la comprobación si la esbeltez mecánica  $\lambda$ , es inferior a 35,

$$\lambda = \frac{L_k}{i}, \quad \text{donde es el radio de giro } i = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

##### ■ Pilares 1-2

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 70^3}{12} = \frac{10290000}{12} = 857500 \text{ cm}^4 = 857500 * 10^4 \text{ mm}^4.$$

$$A = b * h = 70 * 30 = 2100 \text{ cm}^2 = 2100 * 10^2 \text{ mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{857500}{2100}} = 20,21 \text{ cm}^2.$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{270}{20,21} = 13,36 \rightarrow \text{No requiere de comprobación ya que } 13,36 < 35.$$

##### ■ Pilares 3-6

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 150^3}{12} = \frac{101250000}{12} = 8437500 \text{ cm}^4 = 8437500 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

$$A = b \cdot h = 150 \cdot 30 = 4500 \text{ cm}^2 = 4500 \cdot 10^2 \text{ mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{8437500}{4500}} = 43,30 \text{ cm}^2.$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{270}{43,30} = 6,23 \rightarrow \text{No requiere de comprobación ya que } 6,23 <$$

35.

## ■ Pilares 4-5

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 85^3}{12} = \frac{18423750}{12} = 1535312,5 \text{ cm}^4 = 1535312,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

$$A = b \cdot h = 85 \cdot 30 = 2550 \text{ cm}^2 = 2550 \cdot 10^2 \text{ mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1535312,5}{2550}} = 24,53 \text{ cm}^2.$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{270}{24,53} = 11,00 \rightarrow \text{No requiere de comprobación ya que } 11,00$$

&lt; 35.

## ■ Pilares 7-10

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 75^3}{12} = \frac{12656250}{12} = 1054687,5 \text{ cm}^4 = 1054687,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

$$A = b \cdot h = 75 \cdot 30 = 2250 \text{ cm}^2 = 2250 \cdot 10^2 \text{ mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1054687,5}{2250}} = 21,65 \text{ cm}^2.$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{270}{21,65} = 12,47 \rightarrow \text{No requiere de comprobación ya que } 12,47$$

&lt; 35.

## ■ Pilares 8-9

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{35 \cdot 90^3}{12} = \frac{25515000}{12} = 2126250 \text{ cm}^4 = 2126250 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

$$A = b \cdot h = 90 \cdot 35 = 3150 \text{ cm}^2 = 3150 \cdot 10^2 \text{ mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{2126250}{3150}} = 25,98 \text{ cm}^2.$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{270}{25,98} = 10,39 \rightarrow \text{No requiere de comprobación ya que } 10,39$$

&lt; 35.

## ■ Pilares 11-12

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 75^3}{12} = \frac{12656250}{12} = 1054687,5 \text{ cm}^4 = 1054687,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

$$A = b \cdot h = 150 \cdot 30 = 2250 \text{ cm}^2 = 2250 \cdot 10^2 \text{ mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1054687,5}{2250}} = 21,65 \text{ cm}^2.$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{270}{21,65} = 12,47 \rightarrow \text{No requiere de comprobación ya que } 12,47$$

&lt; 35.

## ■ Pilares 13-16

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 90^3}{12} = \frac{21870000}{12} = 1822500 \text{ cm}^4 = 1822500 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

$$A = b \cdot h = 90 \cdot 30 = 2700 \text{ cm}^2 = 2700 \cdot 10^2 \text{ mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{1822500}{2700}} = 25,98 \text{ cm}^2.$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{270}{25,98} = 10,39 \rightarrow \text{No requiere de comprobación ya que } 10,39$$

&lt; 35.

- Pilares 14-15

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{30 \cdot 150^3}{12} = \frac{101250000}{12} = 8437500 \text{ cm}^4 = 8437500 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

$$A = b \cdot h = 150 \cdot 30 = 4500 \text{ cm}^2 = 4500 \cdot 10^2 \text{ mm}^2.$$

$$i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{8437500}{4500}} = 43,30 \text{ cm}.$$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{270}{43,30} = 6,23 \rightarrow \text{No requiere de comprobación ya que } 6,23 <$$

35.

Según la EHE-08 y el CTE, solo se debe considerar la comprobación a pandeo de la estructura si la esbeltez mecánica mínima alcanza el valor de 35 o mayor. Como se puede observar, ninguno de los pilares llega a la esbeltez mínima mecánica para proceder la comprobación por pandeo. Esto es debido a que las secciones de los pilares de la vivienda son muy grandes con respecto a la altura libre de pilares entre plantas, es decir, cuanto más esbelto sea una figura, más fácil es conseguir que aparezca el efecto de pandeo, y a la viceversa, cuanto menos esbelta es un pilar, tendrá menos posibilidades de que se produzcan efectos de pandeo en los pilares.

Aunque no se llegue al mínimo de la esbeltez mecánica, se procede a continuar con la comprobación a pandeo de la estructura para conseguir demostrar que la estructura cumple con las normativas y no se produce el efecto de pandeo en la estructura.

c) *Coefficiente de reducción para pandeo*  $\chi$ :

Para poder encontrar el valor del coeficiente de reducción para el pandeo ( $\chi$ ), se realiza sacando dicho valor de las “Curvas de Pandeo” que establece el Eurocódigo EC3. La gráfica donde se encuentra las curvas de pandeo, es una gráfica en la que con el valor de la esbeltez reducida ( $\lambda_{red}$ ) y la curva de pandeo, se puede obtener con la intersección de estos valores, el valor del coeficiente de reducción para pandeo.

Según el Eurocódigo EC3, la  $\lambda_{red}$  es igual a:

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5}.$$

Con los datos de la Carga crítica de Euler obtenidos en el siguiente apartado, observamos que el valor de coeficiente de reducción para pandeo es ( $\beta_a = 1$ ):

- Pilares 1-2

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 \cdot \frac{30 \cdot 70 \cdot 100 \cdot 400 / 1,15}{2437954750} \right]^{0,5} = 0,17.$$

- Pilares 3-6

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 \cdot \frac{30 \cdot 150 \cdot 100 \cdot 400 / 1,15}{23988621810} \right]^{0,5} = 0,08.$$

- Pilares 4-5

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 85 \cdot 100 \cdot 400 / 1,15}{4365040702} \right]^{0,5} = 0,14.$$

■ Pilares 7-10

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 400 / 1,15}{2998577726} \right]^{0,5} = 0,16.$$

■ Pilares 8-9

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{35 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 400 / 1,15}{6045132696} \right]^{0,5} = 0,13.$$

■ Pilares 11-12

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 75 \cdot 100 \cdot 400 / 1,15}{2998577726} \right]^{0,5} = 0,16.$$

■ Pilares 13-16

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 90 \cdot 100 \cdot 400 / 1,15}{5181542311} \right]^{0,5} = 0,13.$$

■ Pilares 14-15

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 150 \cdot 100 \cdot 400 / 1,15}{23988621810} \right]^{0,5} = 0,08.$$

Una vez se obtiene la esbeltez reducida en cada pilar, se procede a obtener a través de la gráfica de “Curvas de Pandeo”, el coeficiente de reducción de pandeo. Se observa que todos los resultados se encuentran entre el valor 0 y 0,20. Si observamos la figura 20, dando como resultado estos valores de esbeltez reducida, todos coinciden con la curva de pandeo en el lugar en que el coeficiente de reducción de pandeo es  $\chi = 1$ . (Figura 21)

$\chi$  se obtiene de la esbeltez  $\bar{\lambda}$  para la curva de pandeo adecuada.

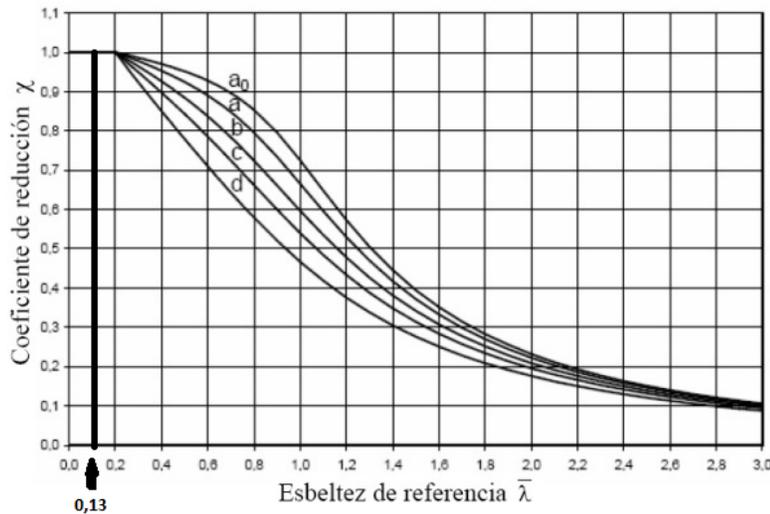


Figura 21. Ejemplo de cálculo de coeficiente de reducción de pandeo en los pilares 8-9.

d) *Comprobación de la carga axil de cálculo con la carga crítica de Euler:*

En el 4º paso, se procede a comparar la carga axil de cálculo con la carga crítica de Euler, la cual, para poder aceptar la estructura como estable, sin que se produzca el efecto de pandeo, la carga axil de cálculo tiene que ser menor a la carga crítica de Euler ( $P^* < P_{crit}$ ). Dicha comprobación la deberemos de realizarla en cada pilar de la estructura. La carga soportada por la estructura, al utilizar los pilares de la primera planta, consideraremos que la carga se encuentra en la cubierta de la primera planta, es decir, en el forjado nº 4. Por encima de ella se encuentran 9 forjados + Formación de cubierta + Formación de torreón. También se considera las cargas por uso de viviendas, por cubierta y por torreón. La carga total en el edificio se recoge en la memoria de ejecución de la vivienda, adjuntada en el proyecto. Dichas cargas són:

Carga total =  $9*470+8*100+8*100+1*250+1*250+8*200+1*150+1*100 = 8180 \text{ Kg/m}^2 = 80,164 \text{ KN/m}^2$ , siendo la superficie construida de planta =  $234.14 \text{ m}^2$ .

Esto nos da que en el forjado nº4, debe soportar una carga total de:  $18769,59 \text{ KN}$ .

Se supone que la carga se distribuye entre los 16 pilares por igual, tenemos que cada pilar soporta una carga de:  $1173,10 \text{ KN} = 1173100 \text{ N}$ , siendo:

$$P^* = P * \gamma_c$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2}$$

## ■ Pilares 1-2

$$I_z = 857500 * 10^4 \text{ mm}^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 857500 * 10^4}{2700^2} = 2437954750 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 \text{ N} < P_{crit} = 2437954750 \rightarrow \text{Cumple.}$$

## ■ Pilares 3-6

$$I_z = 8437500 * 10^4 \text{ mm}^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 8437500 * 10^4}{2700^2} = 23988621810 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 \text{ N} < P_{crit} = 23988621810 \rightarrow \text{Cumple.}$$

## ■ Pilares 4-5

$$I_z = 1535312,5 * 10^4 \text{ mm}^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 1535312,5 * 10^4}{2700^2} = 4365040702 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 \text{ N} < P_{crit} = 4365040702 \rightarrow \text{Cumple.}$$

## ■ Pilares 7-10

$$I_z = 1054687,5 * 10^4 mm^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 1054687,5 * 10^4}{2700^2} = 2998577726 N.$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 N < P_{crit} = 2998577726 \rightarrow Cumple.$$

- Pilares 8-9

$$I_z = 2126250 * 10^4 mm^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 2126250 * 10^4}{2700^2} = 6045132696 N.$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 N < P_{crit} = 6045132696 \rightarrow Cumple.$$

- Pilares 11-12

$$I_z = 1054687,5 * 10^4 mm^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 1054687,5 * 10^4}{2700^2} = 2998577726 N.$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 N < P_{crit} = 2998577726 \rightarrow Cumple.$$

- Pilares 13-16

$$I_z = 1822500 * 10^4 mm^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 1822500 * 10^4}{2700^2} = 5181542311 N.$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 N < P_{crit} = 5181542311 \rightarrow Cumple.$$

- Pilares 14-15

$$I_z = 8437500 * 10^4 mm^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 8437500 * 10^4}{2700^2} = 23988621810 N.$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 N < P_{crit} = 23988621810 \rightarrow Cumple.$$

e) Comprobación de la carga axil de cálculo con el esfuerzo axil de agotamiento según la CTE DBE-SE-A:

Una vez realizada la comprobación por la carga crítica de Euler, el último paso a realizar es la comprobación de la carga axil de cálculo con el esfuerzo axil de agotamiento, o pandeo real. En este caso, la carga axil de cálculo ( $P^*$ ) tiene que ser inferior a la carga axil de agotamiento, que el CTE define como  $P_{b,Rd} = \chi \beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}}$ .

Una vez obtenido el coeficiente de reducción para pandeo, podemos proceder a realizar la comprobación:

- Pilares 1-2

$$P_{b,Rd} = \chi \beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 1 * 1 * \frac{30 * 70 * 100 * 400 / 1,15}{1,50} = 48695652,17 N.$$

$$P^* = 1173000 * 1,50 = 1759649,90 N < P_{b,Rd} = 48695652,17 \rightarrow Cumple.$$

- Pilares 3-6

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 1 * 1 * \frac{30*150*100*400/1,15}{1,50} = 104347826, 10 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1, 50 = 1759649, 90 \text{ N} < P_{b,Rd} = 104347826, 10 \rightarrow \text{Cumple.}$$

■ Pilares 4-5

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 1 * 1 * \frac{30*85*100*400/1,15}{1,50} = 59130434, 78 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1, 50 = 1759649, 90 \text{ N} < P_{b,Rd} = 59130434, 78 \rightarrow \text{Cumple.}$$

■ Pilares 7-10

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 1 * 1 * \frac{30*75*100*400/1,15}{1,50} = 52173913, 04 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1, 50 = 1759649, 90 \text{ N} < P_{b,Rd} = 52173913, 04 \rightarrow \text{Cumple.}$$

■ Pilares 8-9

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 1 * 1 * \frac{35*90*100*400/1,15}{1,50} = 73043478, 26 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1, 50 = 1759649, 90 \text{ N} < P_{b,Rd} = 73043478, 26 \rightarrow \text{Cumple.}$$

■ Pilares 11-12

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 1 * 1 * \frac{30*75*100*400/1,15}{1,50} = 52173913, 04 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1, 50 = 1759649, 90 \text{ N} < P_{b,Rd} = 52173913, 04 \rightarrow \text{Cumple.}$$

■ Pilares 13-16

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 1 * 1 * \frac{30*90*100*400/1,15}{1,50} = 62608695, 65 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1, 50 = 1759649, 90 \text{ N} < P_{b,Rd} = 62608695, 65 \rightarrow \text{Cumple.}$$

■ Pilares 14-15

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 1 * 1 * \frac{30*150*100*400/1,15}{1,50} = 104347826, 10 \text{ N.}$$

$$P^* = 1173000 * 1, 50 = 1759649, 90 \text{ N} < P_{b,Rd} = 104347826, 10 \rightarrow \text{Cumple.}$$

## 5.2. Caso 2. Vivienda Unifamiliar de 2 plantas y sótano

Una vez se ha realizado los cálculos a pandeo de la vivienda de 9 plantas y comprobar que cumple con suficiente holgura la normativa CTE y la instrucción EHE-08, sin que se produzca pandeo y siendo una estructura totalmente estable, se procede a seguir con el cálculo de una segunda vivienda para poder sacar conclusiones de todos los aspectos que conciernen a la teoría sobre el pandeo y la estabilidad de las estructuras verticales.

Esta segunda vivienda es un proyecto realizado en la asignatura de Oficina Técnica de la carrera de Arquitectura Técnica, realizada durante el curso 2010/2011. Se encuentra en el término de Canteras en la ciudad de Cartagena, más concretamente en la Calle Loma del Oso. Se establece en la parcela una

vivienda unifamiliar compuesta por de planta baja y planta primera, en la que también incluye un sótano realizado con muros de contención sobre una losa de hormigón armado. El resto de la vivienda se encuentra sobre una cimentación formada por zapatas aisladas y zapatas corridas, donde apoyarán los muretes del forjado sanitario de la planta baja. El forjado sanitario está realizado en dos partes: una como forjado unidireccional de viguetas no autoportante, mientras que el resto del forjado sanitario está compuesto por un forjado bidireccional de casetones perdidos. El forjado de la primera planta y de la cubierta de la cocina y rellano, esta realizado por un forjado unidireccional de viguetas semirresistentes.

En el cálculo de la estructura vertical de la vivienda, se realizará el cálculo de los 34 pilares que se encuentran en la planta baja y los 8 pilares que hay en la planta primera, incluidos los dos que no se encuentran en la planta baja. El cálculo de los pilares de la planta baja habrá que tener en cuenta que en la parte inferior de algunos pilares se encuentran en la parte donde el forjado es unidireccional (es decir, se emplean jácenas), mientras que otros pilares, su parte baja esta unida a la parte en la que el forjado sanitario está realizado por un forjado bidireccional, con lo que no existen el empleo de jácenas. También, 4 pilares de la planta baja arrancan desde la losa de hormigón armado que hay en el sótano de la vivienda.

Otro aspecto a tener en cuenta en el cálculo de los pilares de la primera planta, es la que se encuentran dos pilares (P35 y P36) los cuales no se encuentran apoyados por un pilar inferiormente, sino que arrancan directamente del forjado unidireccional de la primera planta.

Todos los pilares de la estructura vertical son de sección cuadrada con medidas 30 x 30 cm, excepto el pilar 36 de la planta primera que su sección es circular y su diámetro es de 30 cm.

La estructura horizontal de la vivienda está compuesta por 4 forjados distintos: Forjado sanitario; Forjado primera planta; Forjado cubierta cocina y Forjado cubierta rellano. Y están compuestos por:

- **Forjado Sanitario:** como hemos nombrado anteriormente, el forjado sanitario esta compuesto por:
  1. *Forjado unidireccional:* compuesto por jácenas de sección 30 x 30 cm y vigas de atado de 30 x 30 cm también.
  2. *Forjado bidireccional:* realizada con zunchos de borde de 30 x 30 cm.
  3. *Losa de hormigón armado:* de 30 cm de espesor.
  
- **Forjado Primera Planta:**
  1. *Forjado Unidireccional:* formado por vigas de atado, zunchos de borde y jácenas de diferentes tamaños de sección, los cuales iremos desgranando a la hora de proceder a realizar los cálculos.
  
- **Forjado Cubierta Cocina:**

1. *Forjado Unidireccional*: formado por dos jácenas de sección 70 x 30 y 2 zunchos de borde de sección 35 x 30 cm.

■ **Forjado Cubierta Rellano:**

1. *Forjado unidireccional*: formado por 2 jácenas de sección de 75 x 30 y otra jácena de 50 x 30, 1 viga de atado de 70 x 30 y 4 zunchos de borde: 2 de sección 35 x 30, 1 de sección 50 x 30, y por último 1 de sección 40 x 30 cm.

Los pilares de sección cuadrada están compuestos por 4 barras del 20, mientras que el pilar de sección circular (P36) está compuesto por 6 barras del 16. Están realizados de hormigón armado, compuesto por Hormigón HA-25 de la clase de exposición II<sub>a</sub> y de consistencia blanda y por barras corrugadas de acero del tipo B-500 SD.

Una vez definido la estructura, procedemos a realizar los cálculos a pandeo de la estructura, teniendo como datos del problema:

*Datos:*

$$f_{yd} = 500 \frac{N}{mm^2}; \gamma_c = 1,5; \gamma_s = 1,15; E = 2,10 * 10^5 \frac{N}{mm^2}; L_{P.baja} = 2,80 m, L_{Cocina} = 1,10 m, L_{rellano} = 2,80 m, L_{11rellano} = 1,40 m.$$

a) *Longitud de Pandeo*

Primero, deberemos observar cual es la longitud nueva que alcanzan los pilares de la estructura una vez se pandeen. La estructura se considerará como una estructura traslacional, ya que las uniones entre pilares y forjado pueden presentar desplazamientos que no se deben de obviar a la hora de realizar el cálculo a pandeo de la estructura. Primero de todo deberemos de calcular los valores  $\eta_1$  y  $\eta_2$  para poder calcular el valor de  $\beta$  y así poder calcular la Longitud de Pandeo. Las fórmulas de  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son las mismas expresadas en el caso 1

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} \text{ y } \eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}}.$$

Ahora procederemos a calcular los valores de cada pilar por forjados:

1. Forjado Sanitario:

- *Pilares Forjado Unidireccional:*

$P_5$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500 + 857500} = 0,07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0,66.$$

$P_6$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0,036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500 + 67500} = 0,5.$$

$P_7$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500} = 0, 14.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500 + 67500} = 0, 5.$$

$P_8$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500} = 0, 14.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0, 66.$$

$P_9$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500 + 857500} = 0, 07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0, 66.$$

$P_{10}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0, 036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500 + 67500} = 0, 5.$$

$P_{11}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500 + 857500} = 0, 07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500 + 67500} = 0, 5.$$

$P_{12}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500 + 107187,5} = 0, 12.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0, 66.$$

$P_{13}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500} = 0, 14.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0, 66.$$

$P_{14}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500} = 0, 07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500 + 67500} = 0, 5.$$

$P_{15}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500} = 0, 14.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0, 66.$$

$P_{20}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 540000} = 0, 20.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0, 66.$$

$P_{21}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 540000} = 0, 20.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0, 66.$$

$P_{25}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0, 036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500 + 67500} = 0, 5.$$

$P_{26}$

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0, 036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500 + 67500} = 0, 5.$$

$P_{27}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500} = 0,07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0,66.$$

 $P_{29}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0,036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0,66.$$

 $P_{30}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0,036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500 + 67500} = 0,5.$$

 $P_{31}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500} = 0,07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0,66.$$

 $P_{32}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0,036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0,66.$$

 $P_{33}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0,036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0,66.$$

 $P_{34}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500} = 0,07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 67500} = 0,66.$$

- Pilares Forjado Bidireccional:

 $P_{17}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500} = 0,14.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500} = 1.$$

 $P_{18}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500 + 857500} = 0,07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500} = 1.$$

 $P_{19}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 857500} = 0,14.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500} = 1.$$

 $P_{22}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500} = 0,07.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500} = 1.$$

 $P_{23}$ 

$$\eta_1 = \frac{K_1 + K_c}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500 + 1822500 + 1822500} = 0,036.$$

$$\eta_2 = \frac{K_2 + K_c}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}} = \frac{67500 + 67500}{67500 + 67500} = 1.$$

$$\begin{aligned}
P_{24} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+1822500+1822500} = 0,036. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500} = 1. \\
P_{16} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+1822500+1822500} = 0,036. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500} = 1. \\
P_{28} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+1822500+1822500} = 0,036. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500} = 1.
\end{aligned}$$

- Losa de Hormigón armado:

$$\begin{aligned}
P_1 \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500} = 0,14. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500} = 1. \\
P_2 \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+1822500} = 0,07. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500} = 1. \\
P_3 \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500} = 0,14. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500} = 1. \\
P_4 \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500+857500} = 0,07. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500} = 1.
\end{aligned}$$

## 2. Forjado Primera Planta

- Hasta la cubierta cocina:

$$\begin{aligned}
P_6 \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500} = 0,14. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+1822500+1822500} = 0,036. \\
P_7 \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500} = 0,14. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500} = 0,14. \\
P_{10} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500} = 0,14. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+1822500+1822500} = 0,036. \\
P_{11} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500} = 0,14. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500+857500} = 0,07.
\end{aligned}$$

- Hasta la cubiertarellano:

$$\begin{aligned}
P_{11} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500}{67500+857500+857500} = 0,04. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500+857500} = 0,07. \\
P_{12} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500}{67500+1054687,5+1054687,5} = 0,03. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+857500+107187,5} = 0,12. \\
P_{22} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500}{67500} = 1. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500+67500}{67500+67500+1822500} = 0,07. \\
P_{35} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{67500}{67500+1054687,5+1054687,5} = 0,03. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{67500}{67500+312500} = 0,18. \\
P_{36} \\
\eta_1 &= \frac{K_1+K_c}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}} = \frac{39760,8}{39760,8+312500} = 0,11. \\
\eta_2 &= \frac{K_2+K_c}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}} = \frac{39760,8}{39760,8+312500} = 0,11.
\end{aligned}$$

una vez obtenidos los coeficientes  $\eta_1$  y  $\eta_2$  de todos los pilares, procedemos a calcular  $\beta$  para poder calcular la longitud de pandeo  $L_k = \beta L$ . La estructura, como dijimos anteriormente, la consideraremos una estructura Traslacional, siendo

$$\beta = \frac{L_k}{L} = \sqrt{\frac{1 - 0,2(\eta_1 + \eta_2) - 0,12\eta_1\eta_2}{1 - 0,8(\eta_1 + \eta_2) + 0,6\eta_1\eta_2}} \geq 1,$$

entonces, agrupamos los pilares con igual  $\eta_1$  y  $\eta_2$  y se procede a calcular  $\beta$  :

1. Forjado Sanitario a Forjado Primera Planta:

$$P_1 = P_3 = P_{17} = P_{19} \quad (\eta_1 = 0,14 \text{ y } \eta_2 = 1)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,14+1)-0,12*0,14*1}{1-0,8(0,14+1)+0,6*0,14*1}} = 2,10 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 2,10 = 5,88 \text{ m.}$$

$$P_2 = P_4 = P_{18} = P_{22} \quad (\eta_1 = 0,07 \text{ y } \eta_2 = 1)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,07+1)-0,12*0,07*1}{1-0,8(0,07+1)+0,6*0,07*1}} = 2,04 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 2,04 = 5,72 \text{ m.}$$

$$P_5 = P_9 = P_{27} = P_{31} = P_{34} \quad (\eta_1 = 0,07 \text{ y } \eta_2 = 0,66)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,07+0,66)-0,12*0,07*0,66}{1-0,8(0,07+0,66)+0,6*0,07*0,66}} = 1,38 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,38 = 3,87 \text{ m.}$$

$$P_6 = P_{10} = P_{25} = P_{26} = P_{30} \quad (\eta_1 = 0,036 \text{ y } \eta_2 = 0,50)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,036+0,50)-0,12*0,036*0,50}{1-0,8(0,036+0,50)+0,6*0,036*0,50}} =$$

$$1,23 \rightarrow L_k = L\beta = 2,80 * 1,23 = 3,46 \text{ m.}$$

$$P_7 \quad (\eta_1 = 0,14 \text{ y } \eta_2 = 0,50)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,14+0,50)-0,12*0,14*0,50}{1-0,8(0,14+0,50)+0,6*0,14*0,50}} = 1,27 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,27 = 3,56 \text{ m.}$$

$$P_8 = P_{13} = P_{15} (\eta_1 = 0,14 \text{ y } \eta_2 = 0,66)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,14+0,66)-0,12*0,14*0,66}{1-0,8(0,14+0,66)+0,6*0,14*0,66}} = 1,41 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,41 = 3,96 \text{ m.}$$

$$P_{11} = P_{14} (\eta_1 = 0,07 \text{ y } \eta_2 = 0,50)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,07+0,50)-0,12*0,07*0,50}{1-0,8(0,07+0,50)+0,6*0,07*0,50}} = 1,24 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,24 = 3,50 \text{ m.}$$

$$P_{12} (\eta_1 = 0,12 \text{ y } \eta_2 = 0,66)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,12+0,66)-0,12*0,12*0,66}{1-0,8(0,12+0,66)+0,6*0,12*0,66}} = 1,40 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,40 = 3,92 \text{ m.}$$

$$P_{16} = P_{23} = P_{24} = P_{28} (\eta_1 = 0,036 \text{ y } \eta_2 = 1)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,036+1)-0,12*0,036*1}{1-0,8(0,036+1)+0,6*0,036*1}} = 2,02 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 2,02 = 5,66 \text{ m.}$$

$$P_{20} = P_{21} (\eta_1 = 0,20 \text{ y } \eta_2 = 0,66)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,20+0,66)-0,12*0,20*0,66}{1-0,8(0,20+0,66)+0,6*0,20*0,66}} = 1,44 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,44 = 4,03 \text{ m.}$$

$$P_{29} = P_{32} = P_{33} (\eta_1 = 0,036 \text{ y } \eta_2 = 0,66)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,036+0,66)-0,12*0,036*0,66}{1-0,8(0,036+0,66)+0,6*0,036*0,66}} =$$

$$1,37 \rightarrow L_k = L\beta = 2,80 * 1,37 = 3,84 \text{ m.}$$

2. Forjado Primera planta hasta cubierta cocina:

$$P_6 = P_{10} (\eta_1 = 0,14 \text{ y } \eta_2 = 0,036)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,14+0,036)-0,12*0,14*0,036}{1-0,8(0,14+0,036)+0,6*0,14*0,036}} =$$

$$1,06 \rightarrow L_k = L\beta = 1,10 * 1,06 = 1,17 \text{ m.}$$

$$P_7 (\eta_1 = 0,14 \text{ y } \eta_2 = 0,14)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,14+0,14)-0,12*0,14*0,14}{1-0,8(0,14+0,14)+0,6*0,14*0,14}} = 1,09 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 1,10 * 1,09 = 1,20 \text{ m.}$$

$$P_{11} (\eta_1 = 0,14 \text{ y } \eta_2 = 0,07)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,14+0,07)-0,12*0,14*0,07}{1-0,8(0,14+0,07)+0,6*0,14*0,07}} = 1,07 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 1,10 * 1,07 = 1,18 \text{ m.}$$

3. Forjado Primera planta hasta cubierta rellano:

$$P_{11} (\eta_1 = 0,04 \text{ y } \eta_2 = 0,07)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,04+0,07)-0,12*0,04*0,07}{1-0,8(0,04+0,07)+0,6*0,04*0,07}} = 1,03 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 1,40 * 1,03 = 1,44 \text{ m.}$$

$$P_{12} (\eta_1 = 0,03 \text{ y } \eta_2 = 0,12)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,03+0,12)-0,12*0,03*0,12}{1-0,8(0,03+0,12)+0,6*0,03*0,12}} = 1,04 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,04 = 2,91 \text{ m.}$$

$P_{22}$  ( $\eta_1 = 1$  y  $\eta_2 = 0,07$ )

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(1+0,07)-0,12*1*0,07}{1-0,8(1+0,07)+0,6*1*0,07}} = 2,04 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 2,04 = 5,71 \text{ m.}$$

$P_{35}$  ( $\eta_1 = 0,03$  y  $\eta_2 = 0,18$ )

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,03+0,18)-0,12*0,03*0,18}{1-0,8(0,03+0,18)+0,6*0,03*0,18}} = 1,07 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,07 = 3,00 \text{ m.}$$

$P_{36}$  ( $\eta_1 = 0,11$  y  $\eta_2 = 0,11$ )

$$\beta = \sqrt{\frac{1-0,2(\eta_1+\eta_2)-0,12\eta_1\eta_2}{1-0,8(\eta_1+\eta_2)+0,6\eta_1\eta_2}} = \sqrt{\frac{1-0,2(0,11+0,11)-0,12*0,11*0,11}{1-0,8(0,11+0,11)+0,6*0,11*0,11}} = 1,07 \rightarrow$$

$$L_k = L\beta = 2,80 * 1,07 = 3,00 \text{ m.}$$

b) *Esbeltez Mecánica*

Como primer paso, procedemos a comprobar la esbeltez mecánica de los pilares para comprobar si tenemos que realizar la comprobación o no a pandeo de la estructura. No tendremos que realizar la comprobación si la esbeltez mecánica  $\lambda$ , es inferior a 35. Todos los pilares, menos el Pilar 36, tendrán la misma inercia, la misma sección y el mismo radio de giro,

$$\lambda = \frac{L_k}{i}, \text{ donde } i \text{ es el radio de giro } i = \sqrt{\frac{I_z}{A}}.$$

1. Forjado Sanitario a Forjado Primera Planta:

- $P_1 = P_3 = P_{17} = P_{19}$   
 $I_z = \frac{b*h^3}{12} = \frac{30*30^3}{12} = \frac{810000}{12} = 67500 \text{ cm}^4 = 67500 * 10^4 \text{ mm}^4$ .  
 $A = b * h = 30 * 30 = 900 \text{ cm}^2 = 900 * 10^2 \text{ mm}^2$ .  
 $i = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{67500}{900}} = 8,66 \text{ cm}^2$ .  
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{588}{8,66} = 67,90 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $67,90 > 35$ .
- $P_2 = P_4 = P_{18} = P_{22}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{572}{8,66} = 66,05 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $65,05 > 35$ .
- $P_5 = P_9 = P_{27} = P_{31} = P_{34}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{387}{8,66} = 44,68 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $44,68 > 35$ .
- $P_6 = P_{10} = P_{25} = P_{26} = P_{30}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{346}{8,66} = 39,95 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $39,95 > 35$ .
- $P_7$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{356}{8,66} = 41,11 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $41,11 > 35$ .
- $P_8 = P_{13} = P_{15}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{396}{8,66} = 45,72 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $45,72 > 35$ .

- $P_{11} = P_{14}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{350}{8,66} = 40,42 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $40,42 > 35$ .
- $P_{12}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{392}{8,66} = 45,27 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $45,27 > 35$ .
- $P_{16} = P_{23} = P_{24} = P_{28}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{566}{8,66} = 65,36 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $65,36 > 35$ .
- $P_{20} = P_{21}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{403}{8,66} = 46,54 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $46,54 > 35$ .
- $P_{29} = P_{32} = P_{33}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{384}{8,66} = 44,34 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $44,34 > 35$ .

**2.** Forjado Primera planta hasta cubierta cocina:

1.
  - $P_6 = P_{10}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{117}{8,66} = 13,51 \rightarrow$  No requiere de comprobación ya que  $13,51 < 35$ .
  - $P_7$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{120}{8,66} = 13,86 \rightarrow$  No requiere de comprobación ya que  $13,86 < 35$ .
  - $P_{11}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{118}{8,66} = 13,62 \rightarrow$  No requiere de comprobación ya que  $13,62 < 35$ .

**3.** Forjado Primera planta hasta cubierta rellano:

- $P_{11}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{144}{8,66} = 16,63 \rightarrow$  No requiere de comprobación ya que  $16,63 < 35$ .
- $P_{12}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{291}{8,66} = 33,60 \rightarrow$  No requiere de comprobación ya que  $33,60 < 35$ .
- $P_{22}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{571}{8,66} = 65,93 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $65,93 > 35$ .
- $P_{35}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{300}{8,66} = 34,64 \rightarrow$  No requiere de comprobación ya que  $34,64 < 35$ .
- $P_{36}$   
 $\lambda = \frac{L_k}{i} = \frac{300}{7,5} = 40 \rightarrow$  Si requiere de comprobación ya que  $40 > 35$ .

Según la EHE-08 y el CTE, solo se debe considerar la comprobación a pandeo de la estructura si la esbeltez mecánica mínima alcanza el valor de 35 o mayor. Se observa que todos los pilares de la planta baja y el Pilar 22 de la planta primera si debe realizarse la comprobación a pandeo ya que supera la esbeltez mínima mecánica exigida en la EHE-08 de valor mayor a 35. Esto es debido a que las secciones de los pilares de la vivienda son de proporciones pequeñas con respecto a la altura libre de pilares entre plantas, consiguiendo una mayor esbeltez de los pilares con respecto a los del “Caso 1”.

Como la instrucción exige, solo procederemos a calcular la comprobación de los pilares que de esbeltez mínima mecánica hayan superado el mínimo de 35.

*c) Coeficiente de reducción para pandeo  $\chi$*

Para poder encontrar el valor del coeficiente de reducción para el pandeo ( $\chi$ ), se realiza sacando dicho valor de las “Curvas de Pandeo” que establece el Eurocódigo EC3. La gráfica donde se encuentra las curvas de pandeo, es una grafica en la que con el valor de la esbeltez reducida ( $\lambda_{red}$ ) y la curva de pandeo, se puede obtener por la intersección de estos valores, el valor del coeficiente de reducción para pandeo.

Segun el Eurocódigo EC3, la  $\lambda_{red}$  es igual

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5}.$$

Con los datos de la Carga crítica de Euler obtenidos en el siguiente apartado, observamos que el valor de coeficiente de reducción para pandeo es ( $\beta_a = 1$ )

1. Forjado Sanitario a Forjado Primera Planta:

$$P_1 = P_3 = P_{17} = P_{19}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 * 30 * 100 * 500 / 1,15}{40463939,33} \right]^{0,5} = 0,98 \rightarrow \chi = 0,73.$$

$$P_2 = P_4 = P_{18} = P_{22}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 * 30 * 100 * 500 / 1,15}{42759316,59} \right]^{0,5} = 0,95 \rightarrow \chi = 0,75.$$

$$P_5 = P_9 = P_{27} = P_{31} = P_{34}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 * 30 * 100 * 500 / 1,15}{93411615,48} \right]^{0,5} = 0,64 \rightarrow \chi = 0,91.$$

$$P_6 = P_{10} = P_{25} = P_{26} = P_{30}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 * 30 * 100 * 500 / 1,15}{116861273,7} \right]^{0,5} = 0,58 \rightarrow \chi = 0,93.$$

$$P_7$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 * 30 * 100 * 500 / 1,15}{110388242} \right]^{0,5} = 0,59 \rightarrow \chi = 0,93.$$

$$P_8 = P_{13} = P_{15}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 * 30 * 100 * 500 / 1,15}{89213882,76} \right]^{0,5} = 0,66 \rightarrow \chi = 0,91.$$

$$P_{11} = P_{14}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 * 30 * 100 * 500 / 1,15}{114205422,4} \right]^{0,5} = 0,58 \rightarrow \chi = 0,93.$$

$$P_{12}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A * f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 * 30 * 100 * 500 / 1,15}{91043863,49} \right]^{0,5} = 0,65 \rightarrow \chi = 0,91.$$

$$P_{16} = P_{23} = P_{24} = P_{28}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 30 \cdot 100 \cdot 500 / 1,15}{43670679,61} \right]^{0,5} = 0,94 \rightarrow \chi = 0,76.$$

$$P_{20} = P_{21}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 30 \cdot 100 \cdot 500 / 1,15}{86141557,66} \right]^{0,5} = 0,67 \rightarrow \chi = 0,90.$$

$$P_{29} = P_{32} = P_{33}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 30 \cdot 100 \cdot 500 / 1,15}{94876873,36} \right]^{0,5} = 0,64 \rightarrow \chi = 0,91.$$

2. Forjado Primera planta hasta cubierta rellano:

$$P_{22}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{30 \cdot 30 \cdot 100 \cdot 500 / 1,15}{42909217,67} \right]^{0,5} = 0,95 \rightarrow \chi = 0,75.$$

$$P_{36}$$

$$\lambda_{red} = \left[ \beta_a \frac{A \cdot f_{yd}}{P_{crit}} \right]^{0,5} = \left[ 1 * \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 100 \cdot 500 / 1,15}{91565406,17} \right]^{0,5} = 0,57 \rightarrow \chi = 0,94.$$

Una vez obtenida la esbeltez reducida en cada pilar, procedemos a obtener a través de la gráfica de “Curvas de Pandeo”, el coeficiente de reducción de pandeo. Todos los valores de  $\chi$  se obtienen con la intersección de la esbeltez reducida y la curva  $a_0$  establecida en el Eurocódigo EC3.

$\chi$  se obtiene de la esbeltez  $\bar{\lambda}$  para la curva de pandeo adecuada.

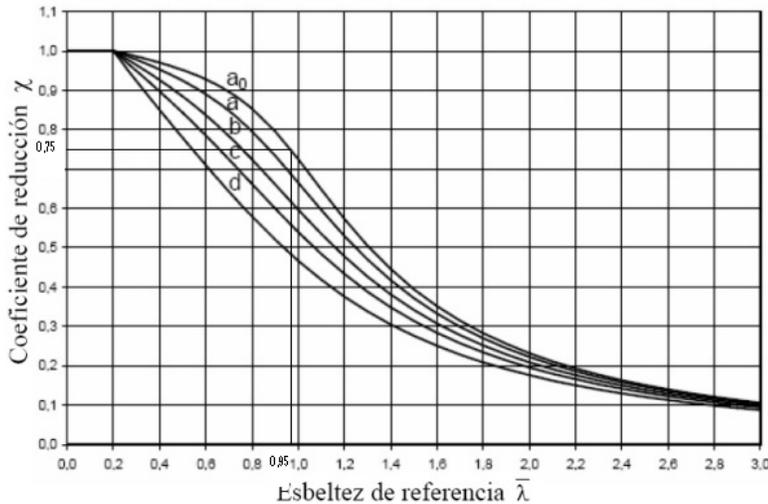


Figura 22. Ejemplo de cálculo de coeficiente de reducción de pandeo en los pilares 8-9.

*d) Comprobación de la carga axil de cálculo con la carga crítica de Euler*

En el 4º paso, procedemos a comparar la carga axil de cálculo con la carga crítica de Euler, la cual, para poder aceptar la estructura como estable, sin que se produzca el efecto de pandeo, la carga axil de cálculo tiene que ser menor a la carga crítica de Euler ( $P^* < P_{crit}$ ). Dicha comprobación la deberemos de realizarla en cada pilar de la estructura. La carga soportada por la estructura será la del forjado de la primera planta (quitando el hueco de la escalera) y los

forjados de cubierta tanto de la cocina como del rellano en la primera planta. También consideramos las cargas por uso de viviendas, por cubierta. La carga total en el edificio se recoge de la memoria de ejecución de la vivienda, adjuntada en el proyecto. Dichas cargas són:

Carga total =  $1*470*457, 11 + 1*470*38, 31 + 1*470*34, 90 + 1*100*38, 31 + 1*100*34, 90 + 1*100*19, 28 + 1*250*384,98 + 1*250*38, 31 + 1*250*34, 90 + 1*150*384, 98 + 1*100*38, 31 + 1*100*34, 90 = 438114, 9 \text{ Kp} = 4293, 52 \text{ KN}$ .

Esto nos da que los pilares de la planta baja deben soportar una carga total de:  $4293,52 \text{ KN}$ .

Se hace la suposición que la carga se distribuye entre los 34 pilares por igual de la planta baja, teniendo que cada pilar soporta una carga de:  $126,28 \text{ KN} = 126280 \text{ N}$ .

Los pilares de la cubierta del rellano deberán soportar una carga de:

Carga Cubierta Rellano =  $1*34, 90*470 + 1*250*34, 90 + 1*100*34, 90 = 28618 \text{ Kp} = 280, 46 \text{ KN}$ .

Distribuyéndose la carga por igual en los 5 pilares, cada pilar soportará una carga de =  $56,09 \text{ KN} = 56090 \text{ N}$ , siendo:

$$P^* = P * \gamma_c,$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2}.$$

1. Forjado Sanitario a Forjado Primera Planta:

$$P_1 = P_3 = P_{17} = P_{19}$$

$$I_z = 67500 \text{ cm}^4 = 67500 * 10^4 \text{ mm}^4 \rightarrow P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2} =$$

$$\frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{5880^2} = 40463939, 33 \text{ N}.$$

$$P^* = 126280 * 1, 50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 40463939, 33 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_2 = P_4 = P_{18} = P_{22}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{5720^2} = 42759316, 59 \text{ N}.$$

$$P^* = 126280 * 1, 50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 42759316, 59 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_5 = P_9 = P_{27} = P_{31} = P_{34}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{3870^2} = 93411615, 48 \text{ N}.$$

$$P^* = 126280 * 1, 50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 93411615, 48 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_6 = P_{10} = P_{25} = P_{26} = P_{30}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E * I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{3460^2} = 116861273, 7 \text{ N}.$$

$$P^* = 126280 * 1, 50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 116861273, 7 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_7$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{3560^2} = 110388242 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 110388242 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_8 = P_{13} = P_{15}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{3960^2} = 89213882,76 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 89213882,76 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_{11} = P_{14}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{3500^2} = 114205422,4 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 114205422,4 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_{12}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{3920^2} = 91043863,49 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 91043863,49 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_{16} = P_{23} = P_{24} = P_{28}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{5660^2} = 43670679,61 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 43670679,61 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_{20} = P_{21}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{4030^2} = 86141557,66 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 86141557,66 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_{29} = P_{32} = P_{33}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{3840^2} = 94876873,36 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 94876873,36 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

2. Forjado Primera planta hasta cubierta rellano:

$$P_{22}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 67500 * 10^4}{5710^2} = 42909217,67 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 42909217,67 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

$$P_{36}$$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 E I_z}{L_k^2} = \frac{\pi^2 * 2,10 * 10^5 * 39760,78 * 10^4}{3000^2} = 91565406,17 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 91565406,17 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple.}$$

e) Comprobación de la carga axil de cálculo con el esfuerzo axil de agotamiento según la CTE DBE-SE-A.

Una vez realizada la comprobación por la carga crítica de Euler, el último paso a realizar es la comprobación de la carga axil de cálculo con el esfuerzo

axil de agotamiento, o pandeo real. En este caso, la carga axil de cálculo ( $P^*$ ) tiene que ser inferior a la carga axil de agotamiento, que el CTE define como  $P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}}$ .

Una vez obtenido el coeficiente de reducción para pandeo, podemos proceder a realizar la comprobación:

1. Forjado Sanitario a Forjado Primera Planta:

$$P_1 = P_3 = P_{17} = P_{19}$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,73 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 19043478,26 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 19043478,26 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_2 = P_4 = P_{18} = P_{22}$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,75 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 19565217,39 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 19565217,39 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_5 = P_9 = P_{27} = P_{31} = P_{34}$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,91 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 23739130,43 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 23739130,43 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_6 = P_{10} = P_{25} = P_{26} = P_{30}$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,93 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 24260869,57 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 24260869,57 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_7$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,93 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 24260869,57 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 24260869,57 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_8 = P_{13} = P_{15}$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,91 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 23739130,43 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 23739130,43 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_{11} = P_{14}$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,93 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 24260869,57 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 24260869,57 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_{12}$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,91 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 23739130,43 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 23739130,43 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_{16} = P_{23} = P_{24} = P_{28}$$

$$P_{b,Rd} = \chi\beta_a \frac{Af_{yd}}{\gamma_{m1}} = 0,76 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 19826086,96 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 19826086,96 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_{20} = P_{21}$$

$$P_{b,Rd} = \chi \beta_a \frac{A_{fyd}}{\gamma_{m1}} = 0,90 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 23478260,87 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 23478260,87 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_{29} = P_{32} = P_{33}$$

$$P_{b,Rd} = \chi \beta_a \frac{A_{fyd}}{\gamma_{m1}} = 0,91 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 23739130,43 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 23739130,43 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

2. Forjado Primera planta hasta cubiertarellano:

$$P_{22}$$

$$P_{b,Rd} = \chi \beta_a \frac{A_{fyd}}{\gamma_{m1}} = 0,75 * 1 * \frac{30*30*100*500/1,15}{1,50} = 19565217,39 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 19565217,39 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*

$$P_{36}$$

$$P_{b,Rd} = \chi \beta_a \frac{A_{fyd}}{\gamma_{m1}} = 0,94 * 1 * \frac{\pi*15^2*100*500/1,15}{1,50} = 19259328,88 \text{ N.}$$

$$P^* = 126280 * 1,50 = 189420 \text{ N} < P_{crit} = 19259328,88 \text{ N} \rightarrow$$

*Cumple.*



## Capítulo 6

# Conclusiones

Una vez realizado el estudio y los cálculos pertinentes en los dos casos de vivienda a estudio en este proyecto, se procede a sacar conclusiones gracias a los datos obtenidos en ellos. Son varias las conclusiones que se obtienen con la comparación de los dos casos y son:

1. La diferenciación de las estructuras en traslacionales y intraslacionales:

Como se ve en los cálculos anteriores, se observa que es muy importante saber identificar si la estructura a cálculo a pandeo es traslacional y/o intraslacional, ya que dependiendo de que tipo de estructura tenemos, se sabrá si la longitud de los elementos verticales después de la aplicación de la fuerza a compresión y aparición de pandeo disminuye o se queda igual la longitud de pandeo con respecto su longitud inicial (como es el caso en las estructuras intraslacionales), y en el caso de las traslacionales, aumenta o se queda igual la longitud de pandeo con respecto a la longitud inicial de los pilares.

Se observa que en el primer caso, al ser una vivienda de gran superficie y altura se realiza con forjados bidireccionales, consiguiendo que la unión de los nudos entre pilares y forjados sean muy rígidos, con la consecuencia que los desplazamientos transversales en dichas uniones pueden ser despreciados a la hora de realizar el cálculo de la estabilidad, ya que son mínimos, esto hace que consideremos la estructura del primer caso como intraslacional. Mientras que en el segundo caso, se utiliza una solución en el forjado sanitario de tres forjados diferentes en él mismo, siendo por una parte una losa de hormigón armado, un forjado unidireccional y un forjado bidireccional, teniendo en cuenta que el edificio es de una planta y con varios tipos de forjado en uno haciendo que los desplazamientos transversales sean mayores a los del primer caso, con lo que se deberán tener en cuenta a la hora del cálculo a pandeo de la estructura. Por estos motivos, la vivienda del segundo caso la consideraremos una estructura traslacional.

## 2. Coeficiente de esbeltez:

Dado que el tipo de estructura considerado en ambos casos es diferente, se observa que su coeficiente de esbeltez también es diferente, ya que las estructuras intraslacionales pueden dar como solución a  $\beta$  como resultado máximo a 1, mientras que el valor de  $\beta$  en las estructuras traslacionales, como mínimo su valor es 1.

Con los resultados obtenidos, se observa en el primer caso que el valor de  $\beta$  en todos los pilares es igual a 1, ya que la estructura al no contener vigas, los valores  $n_1$  y  $n_2$  son iguales a 1, y sustituyéndolos en la fórmula de  $\beta$  en estructuras intraslacionales, el valor es igual a 1, esto quiere decir que el pilar no varía su longitud si se produjese pandeo en la estructura.

En el segundo caso, se puede ver que, aunque los pilares de la estructura son de igual sección, al ir unidos a diferentes soluciones constructivas (ya sea por el empleo de una viga, de dos vigas, de forjado bidireccional,...), consigue que los valores del coeficiente de esbeltez sean muy diferentes entre ellos, aunque también se ve que aun teniendo diferentes soluciones, todos los pilares sufren un alargamiento con respecto su dimensión inicial, ya que los valores diferentes de  $\beta$  son mayores a 1.

Con estos datos obtenidos del coeficiente de esbeltez, se puede decir que mientras la estructura intraslacional no sufre efecto de variación de longitud de sus pilares, en la estructura traslacional si sufriría efectos visibles de alargamiento al sufrir pandeo.

## 3. Comprobación a pandeo gracias a la esbeltez mecánica:

Según la EHE-08, la esbeltez mecánica se define como la relación entre la longitud de pandeo de los pilares y el radio de giro de la sección del pilar. Teniendo presente que el radio depende de su inercia y el área de la sección de cada pilar, podemos observar, que en el primer caso de vivienda calculada, al ser los pilares de sección muy grande comparados con el mínimo que exige la EHE-08 (25 x 25 cm) y la longitud de pandeo de los pilares es igual a la inicial, se confirma que no es necesaria la comprobación a pandeo de dichos pilares ya que, como se ha dicho anteriormente, al ser de sección muy grande y la altura de ellos no varía, tenemos con eso pilares muy poco esbeltos, con lo que no sufren de pandeo, ya que el pandeo solo aparece en elementos esbeltos o muy esbeltos.

En el segundo caso, al ser la sección de los pilares mucho más pequeña que en el caso anterior, y viendo que tienen más o menos la misma altura, y también su longitud de pandeo es mayor que la inicial, se observa que dichos pilares son más esbeltos que los del caso 1 y con los cálculos realizados, se demuestra que si es necesaria la comprobación a pandeo, en todos los pilares de la planta baja y dos de la planta superior. El resto de pilares, al ser poco esbeltos (los pilares entre el forjado de la primera planta y el forjado de cubierta de la cocina) o por no ser lo suficientemente esbeltos por sus secciones y recibir poca carga, no es necesaria su comprobación ya que no llegan al mínimo exigido en la EHE-08 de  $\lambda_{mec} > 35$ .

4. Diferencias en la comprobación de la carga axil con respecto la carga crítica de Euler:

Si se miran los resultados en ambos casos de las cargas críticas de Euler calculadas, se puede observar, que en el primer caso, estas cargas son valores altísimos, mientras que en el segundo caso, aunque cumplen la normativa de cálculo a pandeo y no sufren dicho efecto, se ve que es mas justa la comparación de las cargas críticas de Euler con respecto a la carga axil. Esto es debido a como antes se ha mencionado, las secciones de los pilares del primer caso son de sección muy grandes y las del segundo caso, son menores sus secciones, y al tener más o menos la misma longitud en ambas estructuras, esto hace que los pilares del primer caso a estudio sean poco esbeltos, mientras que los pilares del segundo caso estudiado, su esbeltez sea mucho mayor, ya que la esbeltez es la relación entre la longitud de los pilares y el radio de giro de estos (que se basa en su sección), cuanto mayor sección, mayor será su radio de giro y por lo tanto, menos esbelta la figura.

5. Diferencias en la comprobación de la carga axil respecto a la carga axil de agotamiento.

En este caso sufre el mismo efecto que en el punto anterior, ya que también el cálculo de la carga axil de agotamiento comentada en el CTE, se relaciona con la sección de los pilares, haciendo que cuanto mas grande sea su sección, mas carga por compresión podrá recibir sin que se agote y produzca la aparición del efecto de pandeo en la estructura.

6. Sección mínima de la EHE-08:

La EHE-08, como se expuso anteriormente, exige que las secciones mínimas de los pilares sean de 25 x 25 cm. En ambos casos lo cumplimos, pero también observamos, que cuanto más nos acerquemos a ese valor mínimo de sección de pilares que da la EHE, mayor será su esbeltez y mayor probabilidad de sufrir el efecto de pandeo en las estructuras, y tendremos que pues hacer los cálculos y comprobaciones necesarias para poder saber si las estructuras. Es por eso que en el primer caso, al ser los pilares poco esbeltos, no es necesaria la comprobación a pandeo de la estructura, ya que se considera que a esos niveles tan bajos de esbeltez, la estructura no sufre pandeo en ningún momento.

Mientras que en el segundo caso, al ser los pilares mas esbeltos, si nos es necesario hacer los cálculos y comprobaciones a pandeo de los pilares esbeltos para lograr que aunque sean esbeltos dichos pilares, no sufran el efecto a pandeo en estos elementos constructivos, ya que la aparición del pandeo provocaría daños en la estructura.



## Capítulo 7

# Índice terminológico:

- $A$  = Área de la sección del pilar.
- $\alpha$  = Factor de longitud de pandeo.
- $b$  = Base total de la sección del pilar.
- $\beta$  = Coeficiente de esbeltez.
- $\delta$  = Flecha máxima.
- $E = 2,10 * 10^5 N/mm^2$  = Módulo de Young del acero.
- $e_a$  = Excentricidad ficticia utilizada para representar los efectos de segundo orden.
- $e_e$  = Excentricidad de cálculo de primer orden.
- $e_{tot}$  = Excentricidad total.
- $\varepsilon_y$  = Deformación del acero.
- $f_{yd}$  = Tensión del límite elástico del acero.
- $h$  = Canto total de la sección del pilar.
- $I_z$  = Inercia del pilar en el sentido “z” de la pieza.
- $i_z$  = Radio de giro de la sección del pilar.
- $K_c$  = Coeficiente de rigidez del tramo de pilar analizado.
- $K_i$  = Coeficiente de rigidez del siguiente tramo de pilar en el nudo  $i$ .
- $K_{ij}$  = Coeficiente de rigidez eficaz de la viga en el nudo  $i$ , y posición  $j$ .
- $k_1$  = Coeficiente de amplificación de la tensión de compresión  $\sigma = \frac{N}{A}$ .

- $L$  = Longitud del Pilar.
- $L_K$  = Longitud de pandeo del pilar.
- $\lambda$  = Esbeltez del pilar.
- $\lambda_{red}$  = Esbeltez reducida.
- $M_z$  = Momento en el sentido “z”.
- $N_x$  = Momento Axil.
- $n_1$  = Coeficientes de distribución superior del pilar.
- $n_2$  = Coeficientes de distribución inferior del pilar.
- $P_{crit}$  = Carga crítica de Euler.
- $P$  = Carga a compresión.
- $P^*$  = Carga axil de cálculo.
- $P_{b,Rd}$  = Resistencia última de la barra a pandeo.
- $\rho$  = Radio de curvatura.
- $\sigma_{crit}$  = Tensión crítica.
- $\sigma_f$  = Tensión de fluencia.
- $\sigma_p$  = Tensión del límite de proporcionalidad del material.
- $W_c$  = Módulo resistente a compresión de la sección referido al plano de flexión.
- $\chi$  = Coeficiente de reducción por pandeo.
- $\Psi$  = Relación de rigideces de los soportes a los de las vigas, en cada extremo A y B del soporte considerado.

## Capítulo 8

# Bibliografía

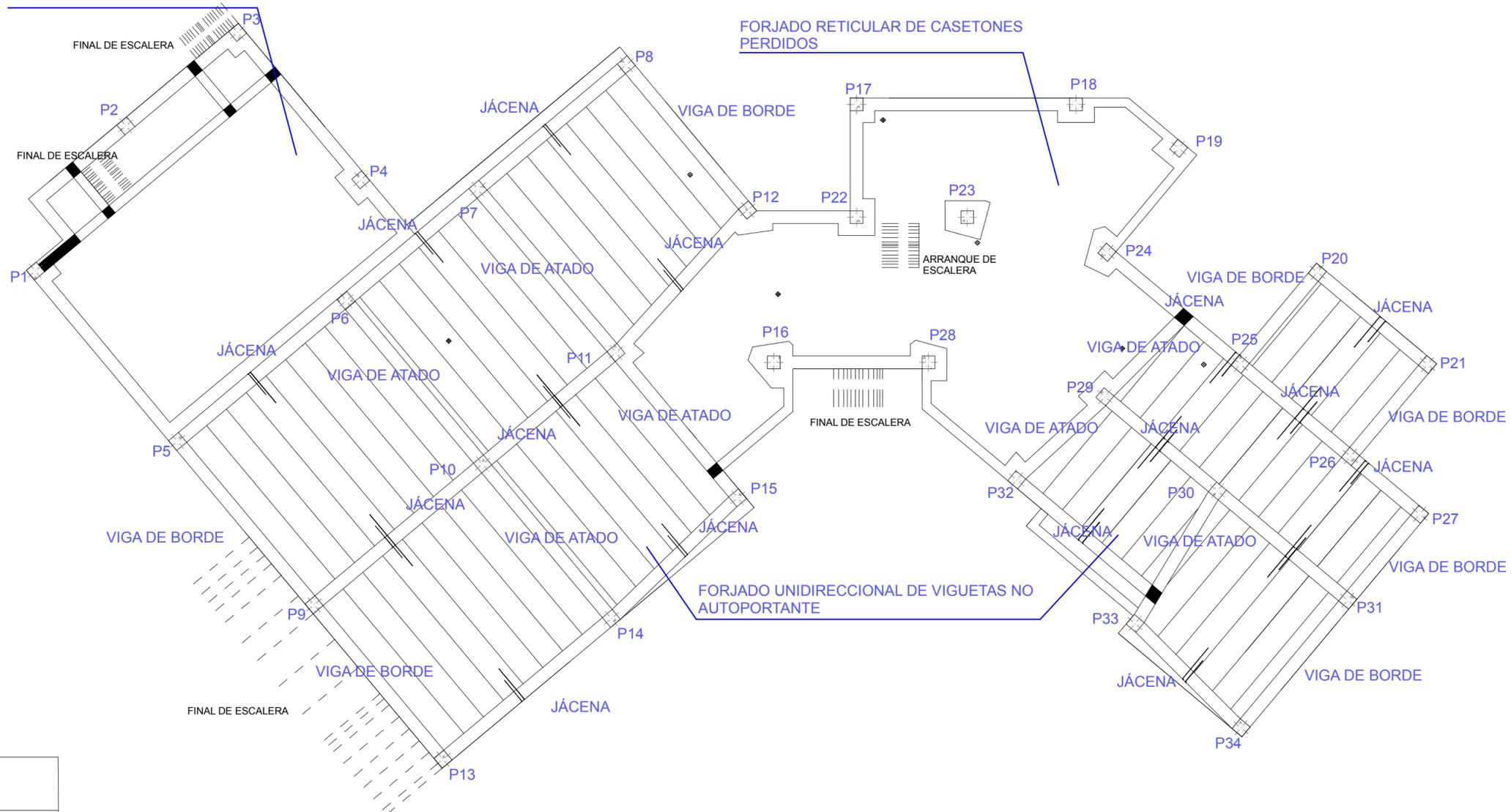
1. Apuntes de la asignatura Construcción I de Arquitectura Técnica en la UPCT.
2. Apuntes de la asignatura Estructuras I de Arquitectura Técnica en la UPCT.
3. Apuntes Tema 6 y 17 de la asignatura Estructuras II de Arquitectura Técnica en la UPCT.
4. Artículo 43 de [www.arqui.com](http://www.arqui.com)
5. Cálculo de piezas a compresión. Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real.
6. Caso práctico de la asignatura Oficina Técnica del año 2010/11 de Arquitectura Técnica en la UPCT.
7. Elasticidad. Autor: Juan Carlos del Caño Sánchez. Profesor de Ingeniería Industrial de Valladolid.
8. Inestabilidad en estructuras de hormigón armado. Cálculo de estructuras en la Universidad Politécnica de Madrid.
9. Instrucción EHE-08.
10. Normativa CTE DB-SE-A.
11. Pandeo de columnas. [http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/mec1\\_ic/cap9.pdf](http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/mec1_ic/cap9.pdf)
12. Pandeo en hormigón armado. [ocw.uniovi.es/mod/resource/view.php?id=4297](http://ocw.uniovi.es/mod/resource/view.php?id=4297)

13. Proyecto de modificación de básico y ejecución de 219 viviendas, locales y dos sótanos-aparcamientos en Villajoyosa (Alicante). Arquitecto: Fernando Bausá Valdés y Gabriel Sanchís Lambies.(planos y memoria de ejecución).
14. Resistencias de materiales en ingeniería en obras públicas. Autor: Jaime Santo Domingo Santillana.
15. [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)





LOSA DE HORMIGÓN ARMADO SOBRE MUROS DE CONTENCIÓN DEL SÓTANO



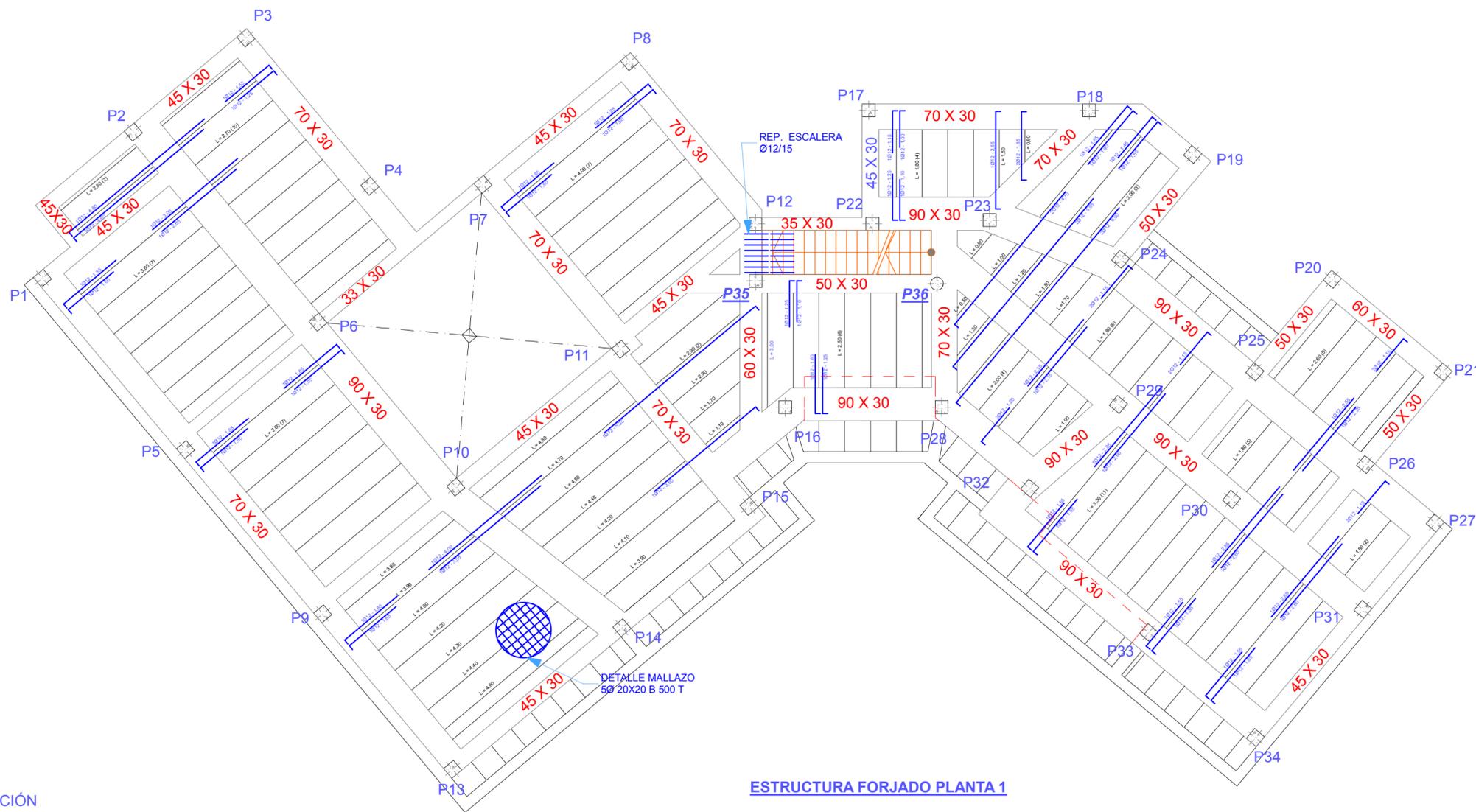
DESCRIPCIÓN

-  NUDOS EN LA ESTRUCTURA
-  ARMADURA DE NERVIOS DE VIGUETAS= 3 REDONDOS DE 12MM
-  ARMADURA DE NEGATIVO EN FORJADO UNIDIRECCIONAL= 2 REDONDOS DE 16MM
-  HUECO DE BAJANTE

CUADRO DE CARACTERÍSTICAS SEGÚN EHE:

HORMIGÓN:							
ESTRUCTURA	TIPO HORMIGÓN	CONTROL	$\gamma_c$	REL. MÁX. AGUA/CEM	CONT. MIN. CEM.	REC. MINIMOS	TIPO CEM.
CIMENTACIÓN	HA-35/B/30/IIa	ESTADISTICO	1,50	0,50	350 KG	35 mm.	CEM III/A-D 32,5
FORJADO	HA-25/B/20/IIa	ESTADISTICO	1,50	0,50	300 KG	35 mm.	CEM III/A-D 32,5
ACERO:							
ESTRUCTURA	TIPO DE ACERO	NIVEL DE CONTROL	$\gamma_s$				
CIMENTACIÓN	B-500 SD	NORMAL	1,15				
FORJADO	B-500 SD	NORMAL	1,15				

PROYECTO:	VIVIENDA UNIFAMILIAR 2 PLANTAS	Nº EXPEDIENTE:	356021X0703590 001/L
PROMOTOR:	UPCT	FECHA:	22/11/2010
SITUACIÓN:	C/LOMA DEL OSO-CANTERAS 150	ESCALA:	1:100
PLANO:	ESTRUCTURA I	Nº PLANO:	3
ARQUITECTO:	GRUPO 4A		

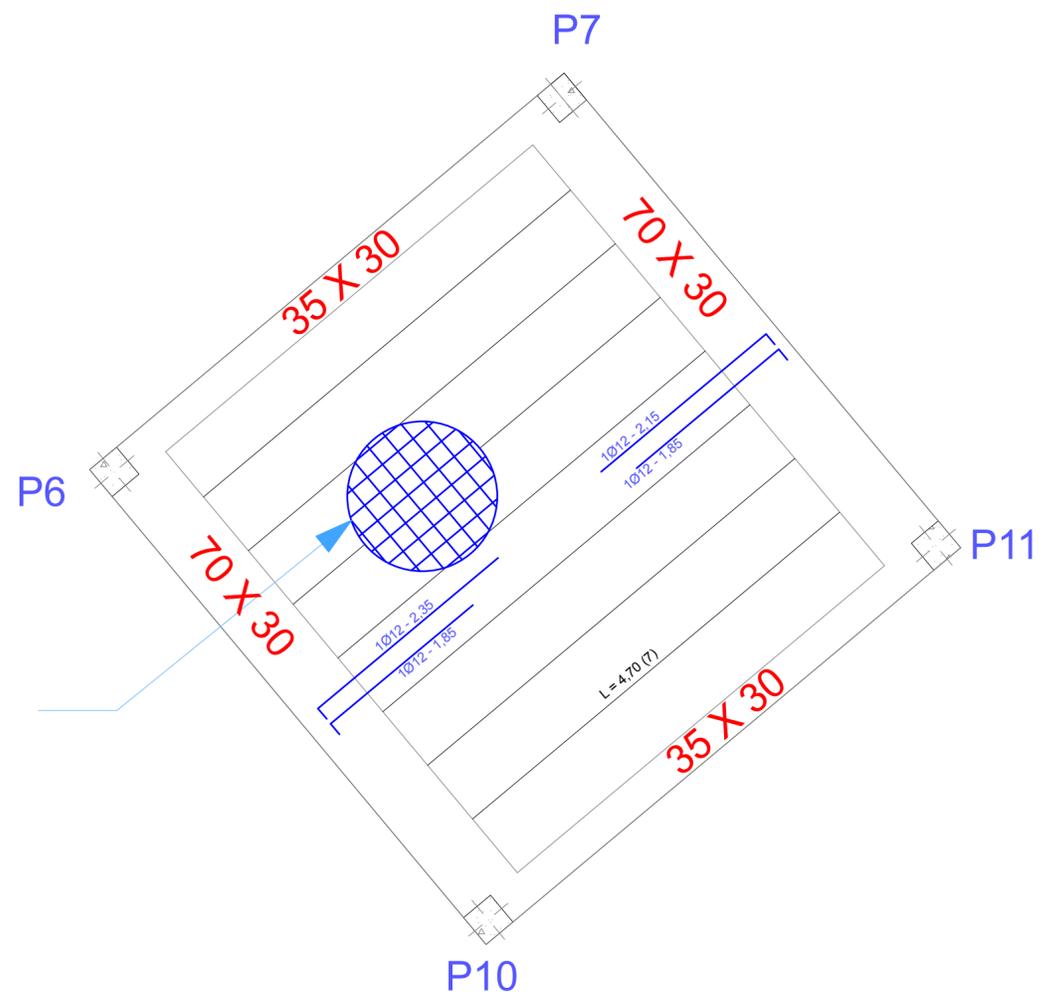


PROCESO DE EJECUCIÓN

- 1.- Colocación del encofrado del forjado del encofrado
- 2.- Replanteo de viguetas del forjado
- 3.- Colocación de las armaduras inferiores de nervios en viguetas (uso de distanciadores con respecto al encofrado) y armaduras de jácenas, vigas y zunchos perimetrales.
- 4.- Colcación de bovedillas
- 5.- Colocación de las armaduras superiores de vercios en viguetas (uso de distanciadores con respecto a los bovedillas).
- 6.- Colocación de la armadura de negativo sobre ejes de viguetas. (uso e distanciadores con respecto de las bovedillas en su cara superior).
- 7.- Colocación del mallazo e reparto sobre bovedillas, empleando distanciadores)
- 8.- Hormigonado de jácenas, vigas y zunchos.
- 9.- Hormigonado del forjado, desde viguetas hasta capa capa de compresión. Estructura monolítica y resistente una vez fragua.

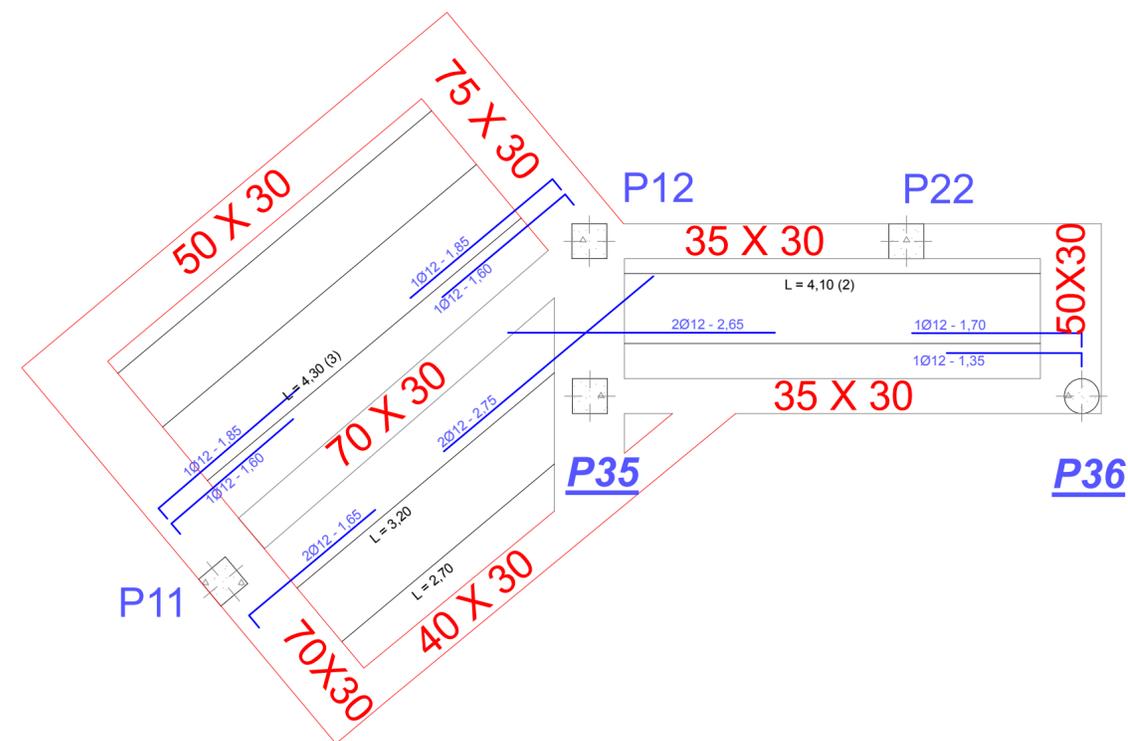
ESTRUCTURA FORJADO PLANTA 1

CUADRO DE CARACTERISTICAS SEGÚN EHE:								PROYECTO:	
<b>HORMIGÓN:</b>								VIVIENDA UNIFAMILIAR 2 PLANTAS	
ESTRUCTURA	TIPO HORMIGÓN	CONTROL	$\gamma_c$	REL. MÁX. AGUA/CEM	CONT. MIN. CEM.	REC. MINIMOS	TIPO CEM.	PROMOTOR:	Nº EXPEDIENTE:
CIMENTACIÓN	HA-35/B/30/IIa	ESTADISTICO	1,50	0,50	350 KG	35 mm.	CEM III/A-D 32,5	UPCT	350221X0703500 087LJ
FORJADO	HA-25/B/20/IIa	ESTADISTICO	1,50	0,50	300 KG	35 mm.	CEM III/A-D 32,5	FECHA:	29/11/2010
<b>ACERO:</b>								SITUACIÓN:	
<b>EJECUCIÓN:</b>								C/LOMA DEL OSO-CANTERAS 150	
ESTRUCTURA	TIPO DE ACERO	NIVEL DE CONTROL	$\gamma_s$	TIPO DE ACCIÓN	NIVEL CONTROL	COEF. PARCIALES DE SEGURIDAD		PLANO:	
CIMENTACIÓN	B-500 SD	NORMAL	1,15	PERMANENTE	NORMAL	FAVORABLE	DESFAVORABLE	ESQUEMA ESTRUCTURA FORJADOS I Y II	
						$\gamma_G = 1,00$	$\gamma_G = 1,50$	ARQUITECTO:	
						PERMANENTE NO CONSTANTE	NORMAL	$\gamma_G = 1,00$	$\gamma_G = 1,60$
FORJADO	B-500 SD	NORMAL	1,15	VARIABLE	NORMAL	$\gamma_Q = 0,00$	$\gamma_Q = 1,60$	Nº PLANO:	1



DETALLE MALLAZO  
5Ø 20X20 B 500 T

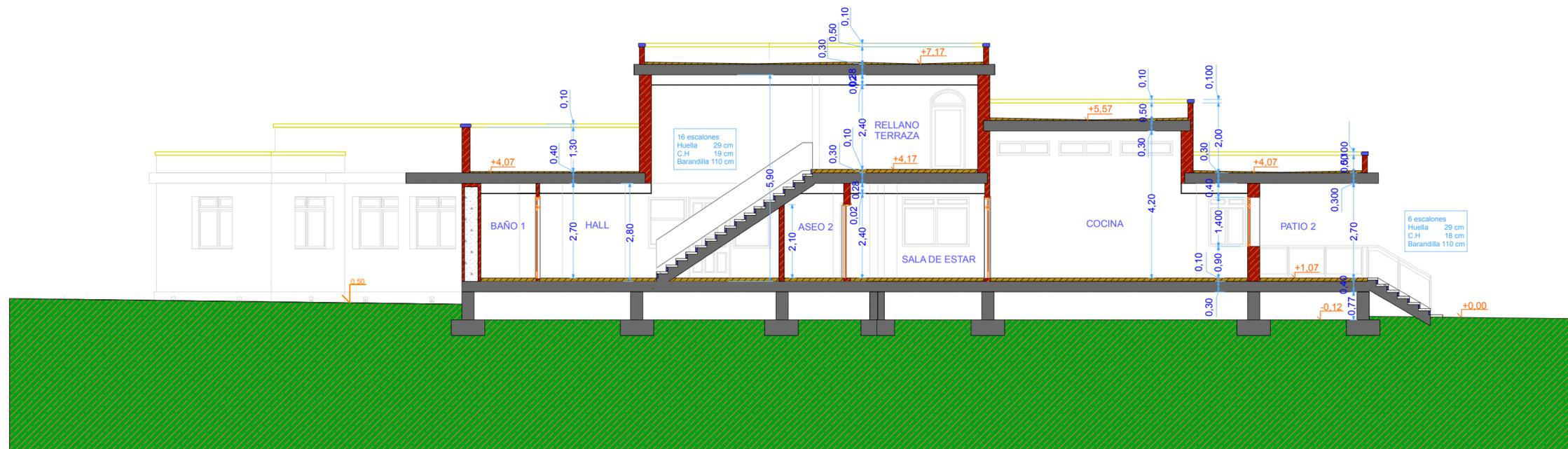
**FORJADO CUBIERTA COCINA**



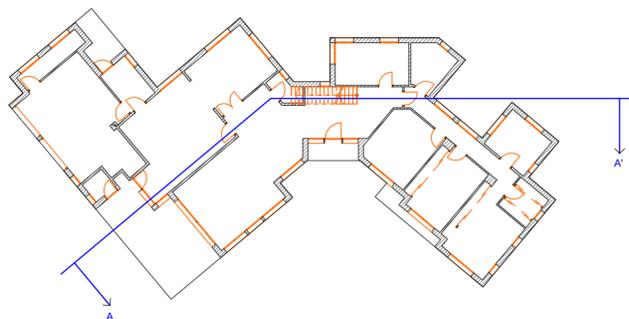
**FORJADO CUBIERTA RELLANO**

CUADRO DE CARACTERÍSTICAS SEGÚN EHE:							
<b>HORMIGÓN:</b>							
ESTRUCTURA	TIPO HORMIGÓN	CONTROL	$\gamma_c$	REL. MÁX. AGUA/CEM	CONT. MIN. CEM.	REC. MINIMOS	TIPO CEM.
CIMENTACIÓN	HA-35/B/30/IIa	ESTADISTICO	1,50	0,50	350 KG	35 mm.	CEM III/A-D 32,5
FORJADO	HA-25/B/20/IIa	ESTADISTICO	1,50	0,50	300 KG	35 mm.	CEM III/A-D 32,5
<b>ACERO:</b>				<b>EJECUCIÓN:</b>			
ESTRUCTURA	TIPO DE ACERO	NIVEL DE CONTROL	$\gamma_s$	TIPO DE ACCIÓN	NIVEL CONTROL	COEF. PARCIALES DE SEGURIDAD	
CIMENTACIÓN	B-500 SD	NORMAL	1,15	PERMANENTE	NORMAL	FAVORABLE	DESFAVORABLE
						$\gamma_G = 1,00$	$\gamma_G = 1,50$
FORJADO	B-500 SD	NORMAL	1,15	PERMANENTE NO CONSTANTE	NORMAL	$\gamma_G = 1,00$	$\gamma_G = 1,60$
						VARIABLE	NORMAL

PROYECTO:	VIVIENDA UNIFAMILIAR 2 PLANTAS	Nº EXPEDIENTE:	350021X0703500 007LJ
PROMOTOR:	UPCT	FECHA:	29/11/2010
SITUACIÓN:	C/LOMA DEL OSO-CANTERAS 150	ESCALA:	1:50
PLANO:	ESQUEMA ESTRUCTURA FORJADOS I Y II		
ARQUITECTO:	GRUPO 4A	Nº PLANO:	2



SECCIÓN A - A'



PROYECTO:	VIVIENDA UNIFAMILIAR 2 PLANTAS	Nº EXPEDIENTE:	3550221X0763550 087LJ
PROMOTOR:	UPCT	FECHA:	15/11/2010
SITUACION:	C/LOMA DEL OSO-CANTERAS 150	ESCALA:	1:100
PLANO:	SECCIONES		
ARQUITECTO:	GRUPO 4A	Nº PLANO:	1