

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



Esquemas de quinto orden Weighted Power- ENO para ecuaciones de Hamilton-Jacobi

PROYECTO FIN DE CARRERA

Septiembre 2013

Autor: Salvador Martínez Moreno

Directores: Dra. Sonia Busquier Sáez y Sergio Amat Plata

ÍNDICE

ÍNDICE	II
MOTIVACIÓN	3
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	4
CAPÍTULO 2. NUEVOS ESQUEMAS NUMÉRICOS	7
CAPÍTULO 3. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	16
CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES	34
CAPÍTULO 5. BIBLIOGRAFÍA	35

MOTIVACIÓN

En este trabajo se pretende diseñar una clase de esquemas Weighted Power-ENO (Esencialmente No Oscilatorios) con el objetivo de aproximar las soluciones de la viscosidad de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (HJ). La idea esencial de un esquema Power-ENO consiste en emplear una clase de limitadores extendidos para reemplazar los limitadores de tipo “*minmod*” en los clásicos esquemas ENO de tercer orden, para mejorar las resoluciones cercanas a las zonas en las que la solución presenta gradientes discontinuos. Por lo tanto, una estrategia de pesos basada en indicadores con la suavidad adecuada llevará al esquema a ser de quinto orden y a contar con la precisión requerida. En particular, ejemplos numéricos indican que el esquema *Weighted Power³ENO⁵* funciona para ecuaciones generales de Hamilton-Jacobi (HJ) mientras que el esquema *Weighted Power[∞]ENO⁵* funciona para ecuaciones HJ no lineales convexas.

Los experimentos numéricos también demuestran la precisión y la robustez de estos nuevos esquemas.

Este trabajo está basado en el artículo, *Power ENO Methods: a fifth-order accurate Weighted Power ENO method* de J. Comput Serna, S., and Marquina, A. (2004) [22]. Para más detalle, consultar la tesis defendida por Susana Serna Salichs, en la Universidad de Valencia en 2005.



CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Considerando el problema del valor inicial para la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\Phi_t + H(x, \Phi, \nabla_{\phi}) = 0, \quad \Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad x \in R_d, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

Donde H es una función no-decreciente de Φ .

Las ecuaciones de Hamilton- Jacobi (HJ) aparecen en numerosas aplicaciones, como por ejemplo, óptica geométrica, control óptimo, juegos diferenciales, ciencia de materiales y cálculo de variaciones. Por consiguiente, es esencial desarrollar eficientes y precisos métodos numéricos de quinto orden para resolver estas ecuaciones.

En teoría, la solución débil generalizada, también llamada solución viscosa, existe, es única y depende de los datos iniciales continuamente [8]. Computacionalmente, cada una de las soluciones viscosas puede ser aproximada por esquemas monótonos [5, 9, 24]. Desde que los esquemas monótonos son la mayoría de una precisión de quinto orden, gran cantidad de esfuerzos están dedicados a designar esquemas numéricos eficientes y altamente precisos para ecuaciones del tipo (ver [1-4, 6, 10, 14, 17, 19-21, 26] y las referencias de dichas ecuaciones). En este trabajo, diseñaremos una clase de nuevos esquemas para las ecuaciones HJ basadas en las reconstrucciones Weighted Power-ENO



(Esencialmente no oscilatorias), que formalmente presentan una precisión de quinto orden.

En general, los esquemas de quinto orden de las familias ENO para las ecuaciones HJ constan de tres componentes: un modelo numérico monótono Hamiltoniano, una reconstrucción de quinto orden tipo ENO y un procedimiento por pasos del tipo de quinto orden que preserva una fuerte estabilidad de Runge-Kutta (SSP-RK) [14,20]; estos también llamados esquemas ENO. Ya que los métodos numéricos Hamiltonianos monótonos [20] y los métodos de discretización de quinto-orden (SSP-RK) están bien desarrollados, la cuestión principal consiste en cómo generar reconstrucciones de tipo ENO de quinto orden. Los esquemas ENO fueron inicialmente diseñados para las leyes de conservación hiperbólicas por Harten *et al.* [13]. Más tarde los esquemas fueron adaptados para resolver las ecuaciones HJ de Osner y Sethian [19] y Osner y Shu [20].

Liu *et al.* [18] propusieron los esquemas ENO con peso para superar algunas deficiencias de los esquemas ENO, tales como una pobre paralelización. Posteriormente, Jiang y Shu [15] descubrieron que la estrategia de los pesos podía aumentar otras ventajas además de la paralelización, tales como un mayor orden de precisión y estabilidad.

Además, Jiang y Peng [14] establecieron una estrategia para el diseño de esquemas WENO para resolución de ecuaciones HJ. Desde entonces, cada estrategia de pesos ha resultado satisfactoria en el diseño de esquemas de quinto orden para ecuaciones HJ:

Esquemas ENO de peso central [3], esquemas WENO Hermite [21], esquemas de quinto orden WENO en mallas desestructuradas [26]. En este trabajo se propone otra clase de esquemas de peso para ecuaciones HJ, también llamados esquemas **Weighted Power ENO**.

Los esquemas *Weighted Power ENO* fueron inicialmente desarrollados por Serna y Marquina [22] para leyes de conservación hiperbólicas. La idea esencial de los métodos de reconstrucción Power-ENO es la aplicación de una clase de limitadores extendidos de segundo orden diferentes a los de los clásicos métodos de reconstrucción de tercer orden, de tal forma que la reconstrucción sea capaz de conservar mayor información de las escalas finas de la solución y mejorar la solución cerca de las discontinuidades. Una estrategia de pesos basada en indicadores de suavidad apropiados [15] puede ser igualmente empleada para mejorar la reconstrucción con el objeto de alcanzar una precisión similar a una de quinto orden; este método es el también conocido como reconstrucción *Weighted Power ENO*.

En este trabajo se realizará una adaptación de una reconstrucción *Weighted Power ENO* a las ecuaciones HJ; el esquema resultante es el también llamado esquema *Weighted Power₃ENO5* (*WPower₃ENO5* en lo siguiente).



Además, seremos capaces de diseñar una nueva reconstrucción específicamente para ecuaciones HJ con Hamiltonianas convexas, basándonos en el limitador tipo aritmético principal; el esquema resultante es llamado *Weighted Power-ENO5 Scheme* (*WPower-ENO5 en lo siguiente*). En comparación con el esquema WENO estándar de quinto orden, los esquemas resultantes presentan una capacidad mucho mayor de resolución de soluciones viscosas cercanas a los límites dónde la solución tenga gradientes discontinuos tal y como se ilustra en los ejemplos numéricos.

Este trabajo se organiza tal y como se expresa a continuación. En la Sección 2 se derivan las reconstrucciones *Weighted Power-ENO* y presentaremos algunas Hamiltonianas estándares monótonas numéricas; junto con un método de pasos temporal SSP-RK [11, 23, 25], estos dos componentes completan la construcción de nuevos esquemas *Weighted Power-ENO*. En la sección 3, presentaremos ejemplos numéricos encaminados a demostrar la precisión y el potencial de resolución de los nuevos esquemas. Las conclusiones obtenidas se presentan en la Sección 4.



CAPÍTULO 2. NUEVOS ESQUEMAS NUMÉRICOS

La clásica reconstrucción ENO de tercer orden en una malla uniforme emplea un procedimiento adaptativo para elegir una plantilla de tres puntos entre tres candidatos. Desde el momento en que cada plantilla de tres puntos determine una parábola, la estrategia ENO es esencial para usar únicamente una de entre esas tres parábolas disponibles.

El método Power-ENO está diseñado mediante la incorporación de una clase de nuevos limitadores en la clásica reconstrucción ENO de tercer orden. Específicamente, el limitador *minmodtype* en la reconstrucción ENO clásica es reemplazado por una serie de limitadores más leves, llamados limitadores *power_p*; por lo que los nuevos limitadores son aplicados a las diferencias cercanas de segundo orden y debido a esta circunstancia se conserva mayor cantidad de información de las escalas finas.

Como consecuencia, un diseño cuidadoso de una combinación convexa de tres parábolas candidatas mejora la reconstrucción Power-ENO; el esquema Power-ENO resultante era normalmente aplicado a las leyes de conservación hiperbólicas [22] y se demuestra su mejor capacidad para resolver las discontinuidades de las soluciones.

Animados por el éxito en leyes de conservación hiperbólicas, adaptaremos las reconstrucciones Power-ENO para afrontar la resolución de ecuaciones HJ, con el objetivo



de mejorar la resolución cerca de los límites en los que el gradiente de la solución sea discontinuo. Comenzaremos con los limitadores **power_p**.

Considerando $x>0$ e $y>0$ números positivos, tenemos que para un número natural p , la ecuación *power-p* significa $power_p(x,y)$, tal y como se definió en [22]:

$$power_p(x,y) = \frac{(x+y)}{2} \left(1 - \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^p \right) \quad (2.1)$$

Es sencillo verificar que las siguientes inecuaciones mantenidas para cada $x>0$ e $y>0$

$$\min(x,y) \leq power_p(x,y) \leq power_q(x,y) \leq \frac{x+y}{2}$$

Donde $0<p<q$, y además:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} power_p(x,y) = \frac{(x+y)}{2} = power_\infty(x,y) \quad (2.2)$$

Que tiene un significado aritmético.

Dados los valores puntuales $\phi(x_j)$, $j=0,1,2,\dots$, de una (posible suave) función en nodos equiespaciados x_j , donde $x_{j+1} = x_j + \Delta x$, construiremos aproximaciones de mayor orden que las de primer orden en diferencias divididas a ambas partes de un nodo genérico x_j , mediante el uso de limitadores **power_p**.

Para lograr esto, comenzaremos por calcular las diferencias divididas.

$$z_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta + \phi_j}{\Delta x} = \frac{\phi_{j+1} - \phi_j}{\Delta x} \quad (2.3)$$

Para valores discretos de puntos $\phi = \phi(x_j)$, localizados en los nodos x_j .

Conviene recordar que las aproximaciones de primer orden de las diferencias divididas son:

$$u_j^+ = u^+(x_j) = z_{j+\frac{1}{2}} \quad y \quad u_j^- = u^-(x_j) = z_{j-\frac{1}{2}}$$

Respectivamente.



El siguiente paso es introducir las notaciones para las diferencias:

$$d_j = z_{j+\frac{1}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

$$d_{j+\frac{1}{2}} = \frac{d_j + d_{j+1}}{2} \quad (2.5)$$

$$D_{j+\frac{1}{2}} = d_{j+1} - d_j \quad (2.6)$$

La reconstrucción Power-ENO con peso está basada en una combinación convexa de las siguientes tres parábolas candidatas asociadas a cada intervalo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$:

$$p_j^P(x) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{P_j}{24} + \frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left[d_j + \frac{P_j}{2} + \frac{P_j}{2} \left(\frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$p_{j+\frac{1}{2}}^P(x) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{D_{j+\frac{1}{2}}}{24} + \frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left[d_{j+\frac{1}{2}} + \frac{D_{j+\frac{1}{2}}}{2} \left(\frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \right] \quad (2.8)$$

$$p_{j+1}^P(x) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{P_{j+1}}{24} + \frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \left[d_{j+1} + \frac{P_{j+1}}{2} + \frac{P_{j+1}}{2} \left(\frac{x-x_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right) \right] \quad (2.9)$$

Dónde:

$$P_j := \text{powermod}_p \left(D_{j-\frac{1}{2}}, D_{j+\frac{1}{2}} \right)$$

Y

$$\text{powermod}_p(x, y) = \frac{(\text{sign}(x) + \text{sign}(y))}{2} \text{power}_p(|x|, |y|)$$

En particular, para $x = x_j$, tenemos que:

$$p_j^P(x_j) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}d_j - \frac{1}{6}P_j \quad (2.10)$$

$$p_{j+\frac{1}{2}}^P(x_j) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}d_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}D_{j+\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

$$p_{j+1}^P(x_j) = z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}d_{j+1} - \frac{1}{3}P_{j+1} \quad (2.12)$$



Para obtener una aproximación precisa para $u^+(x_j)$ y el intervalo a la izquierda de I_j , emplearemos la combinación convexa:

$$u^+(x_j) = w_0 \cdot p_j^P(x_j) + w_1 \cdot p_{j+\frac{1}{2}}(x_j) + w_2 \cdot p_{j+1}^P(x_j) \quad (2.13)$$

Dónde:

$$w_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2} \quad (2.14)$$

Y:

$$\alpha_k = \frac{c_k}{(\epsilon + IS_k)^2} \quad (2.15)$$

para $k = 0,1,2$. Aquí, $c_0 = 0,6$, $c_1 = 0,2$ y $c_2 = 0,2$ son los pesos óptimos, y los indicadores de suavidad son:

$$IS_0 = \frac{13}{12} (P_j)^2 + \frac{1}{4} \left(2z_{j+\frac{1}{2}} - 2z_{j-\frac{1}{2}} + P_j \right)^2 \quad (2.16)$$

$$IS_1 = \frac{13}{12} \left(z_{j-\frac{1}{2}} - 2z_{j+\frac{1}{2}} + z_{j+\frac{3}{2}} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(z_{j-\frac{1}{2}} - z_{j+\frac{3}{2}} \right)^2 \quad (2.17)$$

$$IS_2 = \frac{13}{12} (P_{j+1})^2 + \frac{1}{4} \left(2z_{j+\frac{3}{2}} - 2z_{j+\frac{1}{2}} - P_{j+1} \right)^2 \quad (2.18)$$

Donde hemos usado la L_2 -norm de las derivadas de las correspondientes funciones polinomiales para describir la suavidad por lo que el orden óptimo de precisión puede ser conseguido [15].

Una expresión similar para $u^-(x_j)$ es obtenida para las polinomiales asociadas con I_{j-1} .

$$u^-(x_j) = w_0 \cdot p_{j-1}^P(x_j) + w_1 \cdot p_{j-\frac{1}{2}}(x_j) + w_2 \cdot p_j^P(x_j) \quad (2.19)$$



Con $c_0 = 0,6$; $c_1 = 0,2$ y $c_2 = 0,2$ tomados como los pesos óptimos de las expresiones (2.14) y (2.15). Tenemos que las tres parábolas evaluadas en el intervalo de la derecha de I_{j-1} son,

$$p_{j-1}^P(x_j) = z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}d_{j-1} + \frac{1}{3}P_{j-1} \quad (2.20)$$

$$p_{j-\frac{1}{2}}^P(x_j) = z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}d_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}D_{j-\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

$$p_j^P(x_j) = z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}d_j - \frac{1}{6}P_j \quad (2.22)$$

La reconstrucción resultante es una reconstrucción weighted power ENO de quinto orden para $p \geq 3$ tal y como se muestra en la expresión [22]. El valor óptimo de p para obtener una precisión de quinto orden de la aproximación de las leyes de conservación hiperbólicas es $p=3$, tal y como se expresa en [22]. En lo siguiente, cuando hablemos del esquema Power₃ENO5, implicará que $p = 3$.

Además, seremos capaces de diseñar un nuevo esquema específico para las ecuaciones HJ con Hamiltonianas convexas. Para finalizar, emplearemos el limitador más débil posible dentro de la clase de los limitadores **power_p**, que se trata del Power_∞, que define la reconstrucción Power_∞ENO5. En este caso, expresiones simples de las tres parábolas en términos de z_j 's, son obtenidas del intervalo derecho de I_{j-1} .

$$p_{j-1}^P(x_j) = \frac{1}{6}z_{j-\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}z_{j-\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}z_{j-\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}z_{j+\frac{1}{2}}$$

$$p_{j-\frac{1}{2}}^P(x_j) = \frac{1}{6}z_{j-\frac{3}{2}} - \frac{5}{6}z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}z_{j+\frac{1}{2}}$$

$$p_j^P(x_j) = -\frac{1}{12}z_{j-\frac{3}{2}} + \frac{7}{12}z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{7}{12}z_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}z_{j+\frac{3}{2}}$$

Los indicadores de suavidad correspondientes son:



$$IS_0 = \frac{13}{48} \left(z_{j-\frac{5}{2}} - z_{j-\frac{3}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}} + z_{j+\frac{1}{2}} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} z_{j-\frac{5}{2}} - \frac{5}{2} z_{j-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z_{j+\frac{3}{2}} \right)^2$$

$$IS_1 = \frac{13}{12} \left(z_{j-\frac{1}{2}} - 2z_{j+\frac{1}{2}} + z_{j+\frac{3}{2}} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(z_{j-\frac{1}{2}} - z_{j+\frac{3}{2}} \right)^2$$

$$IS_2 = \frac{13}{48} \left(z_{j-\frac{3}{2}} - z_{j-\frac{1}{2}} - z_{j+\frac{1}{2}} + z_{j+\frac{3}{2}} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} z_{j-\frac{3}{2}} - \frac{5}{2} z_{j-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} z_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} z_{j+\frac{3}{2}} \right)^2$$

De acuerdo a estas expresiones, podremos computar $u^-(x_j)$. Igualmente, podremos derivar la fórmula para computar $u^+(x_j)$.

Nota 1. Las reconstrucción Power₃ENO5 propuesta en [22] es de quinto orden de precisión para la aproximación de leyes de conservación hiperbólicas, desde el momento en que satisface la propiedad de “variación total local acotada (LTVB)”. Esta propiedad es importante para un procedimiento de reconstrucción para aproximar las funciones suaves con discontinuidades de salto.

Nota 2. Un limitador está diseñado para obviar la información de no-suavidad de las soluciones de forma que la variación total de las discontinuidades sea disminuida. Sin embargo, cuando la solución es suave en alguna región, el limitador también ignora la información de la suavidad en las células adyacentes debido a que se produce pérdida de precisión en estas regiones suaves. Como desventaja, tenemos que es compartido por ambas reconstrucciones WENO5 y el WPower₃ENO5 desde los coeficientes de la combinación convexa para cada una de las tres parábolas y puede cambiar abruptamente, y el resultado de la reconstrucción degenera a una precisión de tercer orden.

Nota 3. A partir de una Ecuación HJ de una dimensión

$$\phi_t + H(\phi_x) = 0 \quad (2.23)$$

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad (2.24)$$

Donde H es convexa, podemos derivar la correspondiente ley de conservación hiperbólica derivando una vez la ecuación respecto a la variable espacial x ,

$$u_t + H_x(u) = 0 \quad (2.25)$$



$$u(x, 0) = \phi'_0(x) \quad (2.26)$$

Donde $u = [\partial/\partial_x]\phi$. Corrias et al. [7] y Jin y Xin [16] ϕ afirman que la solución viscosa de la solución de la ecuación convexa HJ (2.23), (2.24) y únicamente si $u = [\partial/\partial_x]\phi$ fuese la solución entrópica de la ley de conservación hiperbólica convexa (2.25), (2.26).

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \phi$$

De acuerdo con nuestra experiencia computacional, la reconstrucción **weighted Power-ENO5** funciona para las leyes de conservación escalares convexas no lineales, pero presenta fallos de precisión por defecto y por exceso desde que se pierde la propiedad LTVB [22] y es sobrecompresiva.

Sin embargo, para las ecuaciones HJ convexas, hemos encontrado que la reconstrucción **Power-ENO5** funciona muy bien en la práctica tal y como se muestra en los ejemplos. Aunque una rigurosa justificación para esta circunstancia no haya sido aún encontrada, una posible explicación es que los fallos de precisión por exceso y por defecto ocurren en la solución entrópica para una ley hiperbólica de conservación será promediada una vez integrada, y como cada paso de integración cede exactamente a solución viscosa para la correspondiente ecuación convexa HJ (ver ejemplo 1 en Sección 3). Por otra parte, cuando la ecuación Hamiltoniana es no convexa, la reconstrucción **weighted Power-ENO5** podría dar salida a las aproximaciones numéricas que convergencia otras soluciones generalizadas antes que la solución viscosa.

Nota 4. Debido a que el procedimiento de reconstrucción para ecuaciones HJ multi-dimensionales se realiza dimensión a dimensión, podemos aplicar el procedimiento expresado arriba en cada dirección para obtener aproximaciones de quinto orden a derivadas espaciales para ser empleadas en Hamiltonianas numéricas.

2.2. Hamiltonianas Numéricas Monótonas

Desde que la mayoría de los ejemplos numéricos son en dos dimensiones, en esta sección, restringimos nuestra discusión del caso no dimensional de la ecuación (1.1):

$$\phi_t + H(\phi_x, \phi_y) = 0, \quad \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y), \quad t > 0 \quad (2.27)$$

El caso más general puede ser tratado de la misma forma.



Dejemos que $\{(x_j, y_k, t_n)\}$ sea una discretización uniforme de $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ con tamaño de malla de Δx y Δy y Δt .

$\Phi_{j,k}^n$ denota una aproximación numérica a la solución viscosa de la ecuación (2.27) en el punto genérico $\{(x_j, y_k, t_n)\}$,

$$\Phi(x_j, y_k, t^n) = \Phi(j\Delta x, k\Delta y, n\Delta t) \quad (2.28)$$

Consideraremos un esquema de quinto orden Euler.

$$\Phi_{j,k}^{n+1} = \Phi_{j,k}^n - \Delta t g \left(\frac{\Delta x - \Phi_{j,k}^n}{\Delta x}, \frac{\Delta x + \Phi_{j,k}^n}{\Delta x}, \frac{\Delta y - \Phi_{j,k}^n}{\Delta y}, \frac{\Delta y + \Phi_{j,k}^n}{\Delta y} \right) \quad (2.29)$$

donde “ g ” es una Hamiltoniana numérica monótona y continua Lipschitz. En este caso la consistencia de “ g ” significa que $g(u, u, v, v) = H(u, v)$, y la monotonía significa que “ g ” es no creciente en sus segundos y cuartos argumentos y no decreciente en los otros dos argumentos. Emplearemos notación estándar para denotar las diferencias a ambos lados del intervalo.

$$\Delta_-^x \Phi_{j,k}^n = \Phi_{j,k}^n - \Phi_{j-1,k}^n, \quad \Delta_+^x \Phi_{j,k}^n = \Phi_{j+1,k}^n - \Phi_{j,k}^n \quad (2.30)$$

$$\Delta_-^y \Phi_{j,k}^n = \Phi_{j,k}^n - \Phi_{j,k-1}^n, \quad \Delta_+^y \Phi_{j,k}^n = \Phi_{j,k+1}^n - \Phi_{j,k}^n \quad (2.31)$$

Podemos elegir diferentes Hamiltonianas numéricas monótonas de base para los esquemas de quinto orden [19,20]. Las siguientes Hamiltonianas monótonas numéricas son empleadas en los ejemplos numéricos expresados a continuación.

La Hamiltoniana numérica de Lax-Friedrichs es [20]:

$$g^{LF}(u^-, u^+, v^-, v^+) = H \left(\frac{u^- + u^+}{2}, \frac{v^- + v^+}{2} \right) - \frac{1}{2} \alpha_1 (u^+ - u^-) - \frac{1}{2} \alpha_2 (v^+ - v^-)$$

Donde para $a \leq u \leq b$ y $c \leq v \leq d$, $\alpha_1 = \max [H_1(u, v)]$ y $\alpha_2 = \max [H_2(u, v)]$, siendo $H_j(u, v)$ la derivada parcial de H respecto de su argumento u^+ y v^+ siendo las diferencias divididas de primer orden lateral, de ϕ en las direcciones x e y respectivamente.



La Hamiltoniana numérica Godunov es [20]:

$$g^{G_1}(u^-, u^-, u^-, u^-) = \text{ext}_{v \in I(v^-, v^+)} \text{ext}_{u \in I(u^-, u^+)} H(u, v)$$

Donde $I(a,b) = [\min(a,b), \max(a,b)]$, y:

$$\text{ext}_{u \in I(a,b)} = \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} & a \leq b \\ \min_{b \leq u \leq a} & a > b \end{cases}$$

Cuando $H(u,v) = h(u_1, v_1)$, y se cumple que $h_1, h_2 > 0$, donde h_j es la derivada parcial de h con respecto a su j -ésimo argumento. Emplearemos la Hamiltoniana Osher-Sethian [19]:

$$g^{G_2}(u^-, u^-, u^-, u^-) = \begin{cases} h([\max((u^-)^+, (u^+)^-)]^2, [\max((v^-)^+, (v^+)^-)]^2) & h_1 \geq 0 \\ h([\max((u^-)^-, (u^+)^+)]^2, [\max((v^-)^-, (v^+)^+)]^2) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dónde $(a)^+ = \max(a, 0)$ y $(a)^- = -\min(a, 0)$.

Como resumen, para obtener esquemas de diferencias finitas de mayor orden para ecuaciones HJ, la estrategia es en primer lugar aproximar derivadas espaciales u^+ y v^+ con mayor orden que las diferencias finitas, como las reconstrucciones WENO5, Weighted Power3ENO5 or Weighted Power ∞ ENO5, después, insertarlas en las Hamiltonianas monótonas y finalmente emplear métodos de paso a paso SSP-RK de mayor orden para marcarlas en el tiempo [23,25]. Esto completa nuestra construcción de esquemas Weighted Power-ENO.



CAPÍTULO 3. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

3.1. Ejemplo 1

Dada la ley hiperbólica de conservación (CL),

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

Con los datos iniciales:

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & 0 \leq x \leq 4; \\ -1, & x > 4, \end{cases}$$

Podemos obtener una ecuación HJ:

$$\phi_t + \frac{\phi_x^2}{2} = 0$$



Con los siguientes datos iniciales:

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} -x - 5, & x < 0 \\ x - 5 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x + 3, & x > 4 \end{cases}$$

Introduciendo la expresión:

$$\phi(x, t) = \int_{-5}^x u(s, t) ds$$

Calcularemos las soluciones aproximadas en el tiempo $t=4$ para la ecuación HJ empleando dos procedimientos:

- (1) Integrando la ecuación HJ directamente mediante el esquema Weighted Power $_{\infty}$ ENO5;
- (2) Calculando la primitiva de la solución numérica de la LC con la constante de integración $\phi(-5, 4)=-2$, donde la solución numérica es calculada mediante el esquema Weighted Power $_{\infty}$ ENO5: si u_j^n es:

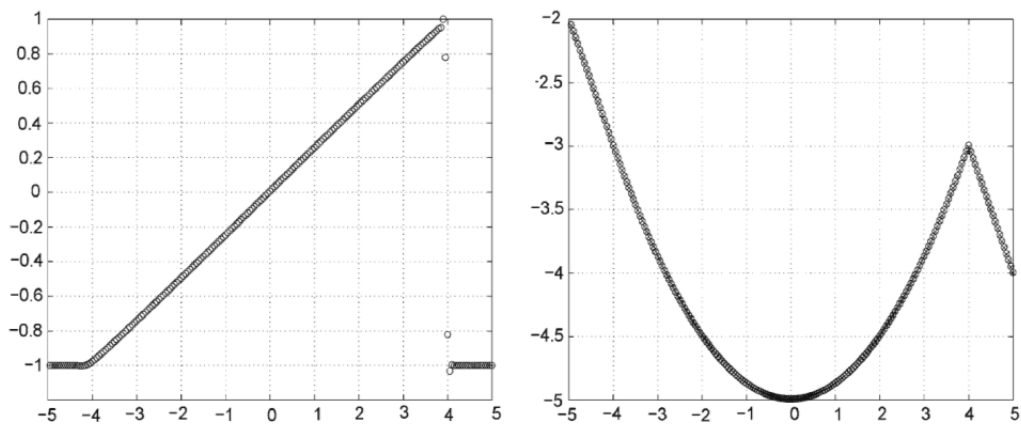


Fig. 1. Izquierda: solución numérica mediante el esquema Weighted Power $_{\infty}$ ENO5 para la ley de conservación.

Derecha: solución numérica mediante el esquema Weighted Power $_{\infty}$ ENO5 para la ecuación (“+”) frente a la integración de la solución numérica de la Weighted Power $_{\infty}$ ENO5 para la ecuación de la LC (“o”).

$$\phi_j^n = -2 + \frac{h}{2} u_1 + \sum_{i=2}^{j-1} \Delta x \cdot u_i + \frac{h}{2} u_j \quad (3.3)$$



La Figura 1 ilustra los resultados. La sub-figura de la izquierda muestra la aproximación a la Ley de Conservación mediante la Weighted Power ∞ ENO5, en la que se observa los errores por exceso y por defecto debido a la propiedad de sobre compresión de la reconstrucción Weighted Power ∞ ENO5 alrededor de las discontinuidades. La sub-figura de la derecha muestra las soluciones obtenidas mediante los dos procedimientos expresados, y ambos se ajustan muy apropiadamente. En particular, se debe expresar que los procedimientos de integración numérica anulan el efecto de la sobre compresión en las discontinuidades.

A continuación, aplicaremos los esquemas Weighted Power $_3$ ENO5 y Weighted Power ∞ ENO5 a un conjunto de problemas modelo. Posteriormente compararemos nuestros esquemas con los el esquema estándar WENO5 para justificar los resultados numéricos obtenidos.

3.2. Ejemplo 2

Unidimensional, consideramos:

$$\phi_t + H(\phi_x) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \quad (3.4)$$

$$\phi(x, 0) = -\cos(\pi x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.5)$$

Siendo una Hamiltoniana convexa, $H(u) = (u+1)^2/2$, y una Hamiltoniana no convexa, $H(u) = -\cos(u+1)$.

$$H(u) = \frac{(u + 1)^2}{2}$$

Resolveremos los problemas con ambos valores iniciales hasta dos tiempos diferentes, $t = t_1 = 0,05$ y $t = t_2 = 0,16$. La solución será suave hasta $t = t_1$, y su derivada es discontinua en $t = t_2$ en ambos casos. Para el caso convexo, emplearemos los esquemas WENO5, Weighted Power $_3$ ENO5 y Weighted Power ∞ ENO5; para el caso no-convexo, emplearemos WENO 5 y Weighted Power $_3$ ENO5 únicamente. La Hamiltoniana numérica es elegida para que sea g^{G1} .

En las tablas I a V, se exponen los errores L_1 y L_∞ en casos diferentes. Para el tiempo $t = t_2$, los errores son calculados a una distancia de 0,1 de las discontinuidades en la derivada de la solución. Para los pasos temporales en los tres esquemas, se ha empleado un esquema de tercer orden SSP-RK [20], tomando $\Delta t \approx \Delta x_{5/3}$ para realizar el quinto orden a tiempo.



Para el caso convexo, en el tiempo t_1 , el error más pequeño L_∞ es alcanzado con el esquema Weighted Power $_\infty$ ENO5 desde el truncamiento del error local en su reconstrucción, que es el más pequeño de todas las reconstrucciones Weighted Power ENO [22]; en el tiempo t_2 este esquema presenta los mayores errores L_∞ (debido a la presencia de discontinuidades) de los tres tipos de esquema. La precisión de quinto orden en regiones suaves es lograda en todos los casos.

3.3. Ejemplo 3

(Dos dimensiones), resolvemos:

$$\phi_t + H(\phi_x, \phi_y) = 0, \quad -2 \leq x, \quad y \leq 2, \quad t > 0 \quad (3.6)$$

$$\phi(x, 0) = -\cos \pi \left(\frac{x+y}{2} \right), \quad -2 \leq x, \quad y \leq 2 \quad (3.7)$$

Con una Hamiltoniana convexa, $H(u) = (u+v+1)^2/2$. Calcularemos la solución hasta $t = 0,05$ mediante los tres esquemas con la Hamiltoniana numérica siendo g^{G1} .

Tabla I. $H(u) = (u+1)^2/2$ para $t = 0,05$

Scheme	N	L_∞ error	L_∞ order	L_1 error	L_1 order
WENO5-GODUNOV	40	0.16E-04	-	0.50E-04	-
	80	0.76E-06	4.45	0.21E-05	4.59
	160	0.30E-07	4.66	0.88E-07	4.55
WPower ₃ ENO5-GODUNOV	40	0.56E-04	-	0.76E-04	-
	80	0.20E-05	4.81	0.29E-05	4.70
	160	0.73E-07	4.77	0.11E-06	4.75
WPower $_\infty$ ENO5-GODUNOV	40	0.53E-05	-	0.15E-04	-
	80	0.20E-06	4.71	0.60E-06	4.61
	160	0.96E-08	4.39	0.25E-07	4.63



Tabla II. $H(u) = (u+1)^2/2$ para $t = 0,16$

Scheme	N	L_∞ error	L_∞ order	L_1 error	L_1 order
WENO5-GODUNOV	40	0.31E-03	–	0.38E-03	–
	80	0.86E-05	5.17	0.13E-04	4.87
	160	0.14E-06	5.87	0.26E-06	5.60
	320	0.47E-08	4.96	0.69E-08	5.28
WPower ₃ ENO5-GODUNOV	40	0.17E-03	–	0.37E-03	–
	80	0.13E-04	3.68	0.25E-04	3.88
	160	0.21E-06	6.04	0.46E-06	5.76
	320	0.22E-08	6.55	0.61E-08	6.24
WPower _∞ ENO5-GODUNOV	40	0.25E-02	–	0.50E-02	–
	80	0.44E-03	2.52	0.52E-03	3.26
	160	0.24E-04	4.20	0.24E-04	4.41
	320	0.42E-06	5.86	0.43E-06	5.84

Tabla III. $H(u) = -\cos(u+1)$ para $t = 0,05$

Scheme	N	L_∞ error	L_∞ order	L_1 error	L_1 order
WENO5-GODUNOV	40	0.47E-04	–	0.13E-03	–
	80	0.31E-05	3.89	0.65E-05	4.28
	160	0.14E-06	4.52	0.27E-06	4.60
WPower ₃ ENO5-GODUNOV	40	0.67E-04	–	0.15E-03	–
	80	0.84E-05	3.05	0.13E-04	3.48
	160	0.73E-06	3.53	0.10E-05	3.73

Tabla IV. $H(u) = -\cos(u+1)$ para $t = 0,16$

Scheme	N	L_∞ error	L_∞ order	L_1 error	L_1 order
WENO5-GODUNOV	40	0.16E-03	–	0.31E-03	–
	80	0.15E-04	3.41	0.31E-04	3.29
	160	0.71E-06	4.43	0.12E-05	4.76
	320	0.21E-07	5.07	0.35E-07	5.04
WPower ₃ ENO5-GODUNOV	40	0.12E-03	–	0.28E-03	–
	80	0.11E-04	3.43	0.19E-04	3.88
	160	0.12E-05	3.13	0.13E-05	3.89
	320	0.22E-07	5.78	0.32E-07	5.33



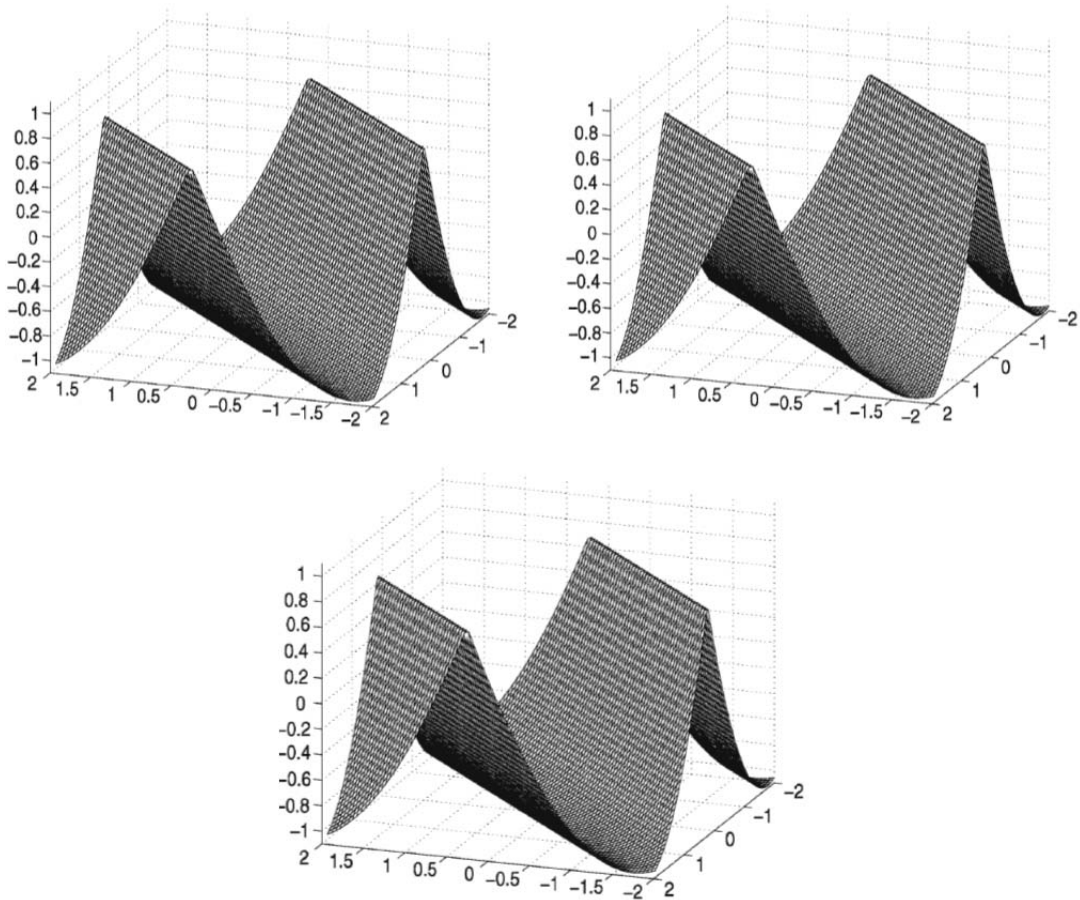


Fig. 2. Arriba a la izquierda, WENO5. Arriba a la derecha, WPowerENO5. Fondo, WPower ∞ ENO5. Malla de 80x80.

La **Figura 2** muestra que las soluciones calculadas mediante los tres esquemas sobre rejillas de 80x80 convergen hacia una solución de tipo viscoso.

La **Figura 3** presenta los resultados de calibración para algunas rebanadas elegidas de las soluciones bidimensionales en diferentes mallas; en particular, se ha de reseñar que el esquema WeightedPower₃ENO5 presenta resoluciones más precisas cerca de zonas con extremos que el esquema clásico WENO5, por el contrario, el esquema WPower ∞ ENO5 presenta resoluciones más precisas cerca de zonas con extremos que el esquema WPower₃ENO5.

3.4. Ejemplo 4

Resolvemos la ecuación lineal

Con condiciones límite periódicas.

$$\phi_t + \phi_x = 0, \quad (3.8)$$

$$\phi(x, 0) = f(x - 0.5), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (3.9)$$

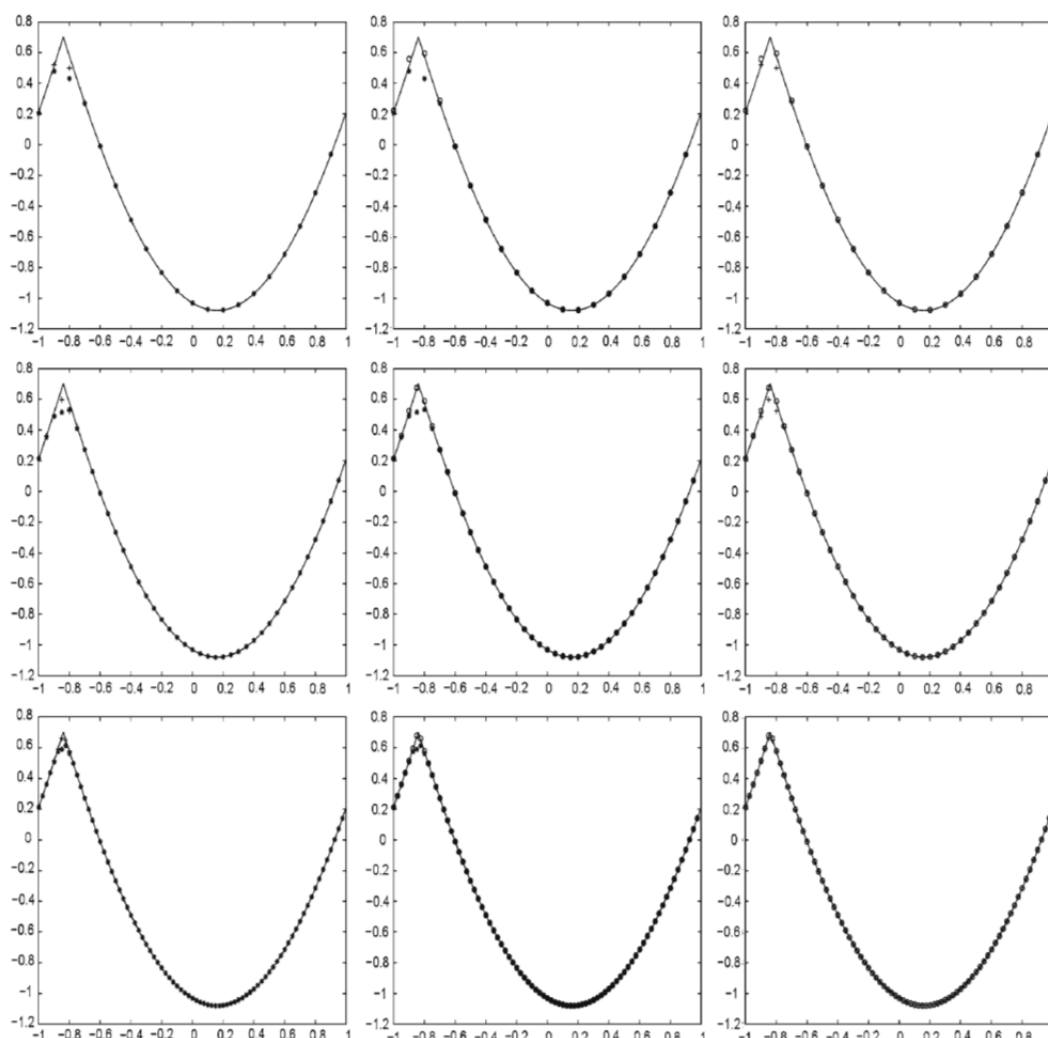


Fig. 3. Comparaciones.

Columna izquierda: WENO5 ('*') y WPowerENO5 ('+').

Columna central: WENO5 ('*') y WPowerENO5 ('o').

Columna derecha: Power₃WENO5 ('+') y WPower_∞ENO5 ('o') con 20, 40 y 80 puntos.



Elegimos $f(x)$ para ser una primitiva de la función Harten, que es discontinua [12]

$$f(x) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)(x+1) + \begin{cases} 2\cos\left(\frac{3\pi x^2}{2}\right) - \sqrt{3} & -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} + 3\cos(2\pi x) & -\frac{1}{3} \leq x \leq 0 \\ \frac{15}{2} - 3\cos(2\pi x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{(28 + 4\pi + \cos(3\pi x))}{3} + 6\pi(x^2 - x) & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Los resultados calculados con 100 puntos de malla y CFL = 0 en los tiempos $t=2, 8, 16, 32$ son mostrados en la **Figura 4**. Es posible observar que si el tiempo se incrementa, todos los esquemas se suavizan fuera de los extremos. Sin embargo, los esquemas $\text{WeightedPower}_3\text{ENO5}$ y $\text{WeightedPower}_\infty\text{ENO5}$ se comportan mejor que el clásico esquema en los extremos en términos de transiciones pronunciadas.

Además, los gráficos indican que el esquema $\text{Weighted Power}_\infty\text{ENO5}$ supera a los otros dos en dichas zonas con extremos.

3.5. Ejemplo 5

Planteamos un problema de Riemann no convexo en dos dimensiones:

$$\phi_t + \text{sen}(\phi_x + \phi_y) = 0, \quad \phi(x, y, 0) = \pi(|y| - |x|) \quad (3.10)$$

Se evolucionará hasta el tiempo $t = 1$ con una malla de 40×40 puntos empleando los esquemas WENO y $\text{WeightedPower}_3\text{ENO5}$ basados en la Hamiltoniana numérica g^{G1} .

Las soluciones de los dos esquemas convergen hacia la solución viscosa tal y como se muestra en la **Figura 5**.

3.6. Ejemplo 6

Considerando un problema relacionado con control óptimo [20]:

$$\phi_t - \text{sen}(y)\phi_x + \left(\text{sen}x + \text{sign}(\phi_y)\right)\phi_y - \frac{1}{2}\text{sen}^2y - (1 - \text{cos}x) = 0 \quad (3.11)$$

Con los datos iniciales $\phi(x, y, 0)=0$, en el intervalo $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Emplearemos una malla de 40×40 con condiciones de límite periódicas. Calcularemos la solución hasta el tiempo $t=1$ mediante el uso de esquemas WENO, $\text{WeightedPower}_3\text{ENO5}$



y $\text{WeightedPower}_{\infty}\text{ENO5}$ basados en la Hamiltoniana numérica de Lax-Fiedrichs y en el esquema de tercer orden SSP-RK. Presentaremos los resultados para el tiempo $t=1$ en la **Figura 6**.

3.7. Ejemplo 7

Considerando la ecuación de reinicialización de nivel del sistema:

$$\phi_t - \text{sen}(\phi_0) [\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} - 1] = 0, \quad \phi(x, y, 0) = \phi_0(x, y) \quad (3.12)$$

Resolveremos la mencionada ecuación mediante el uso de esquemas WENO, $\text{WeightedPower}_3\text{ENO5}$ y $\text{WeightedPower}_{\infty}\text{ENO5}$. Seleccionamos ϕ_0 de modo que signifique la función de distancia hasta el círculo centrado en el origen con radio de 0,5, además, se añade alguna perturbación a la función de distancia indicada en direcciones radiales y angulares cerca del círculo. En particular, emplearemos dos diferentes condiciones iniciales con diferentes condiciones de perturbación para significar la robustez de la solución.



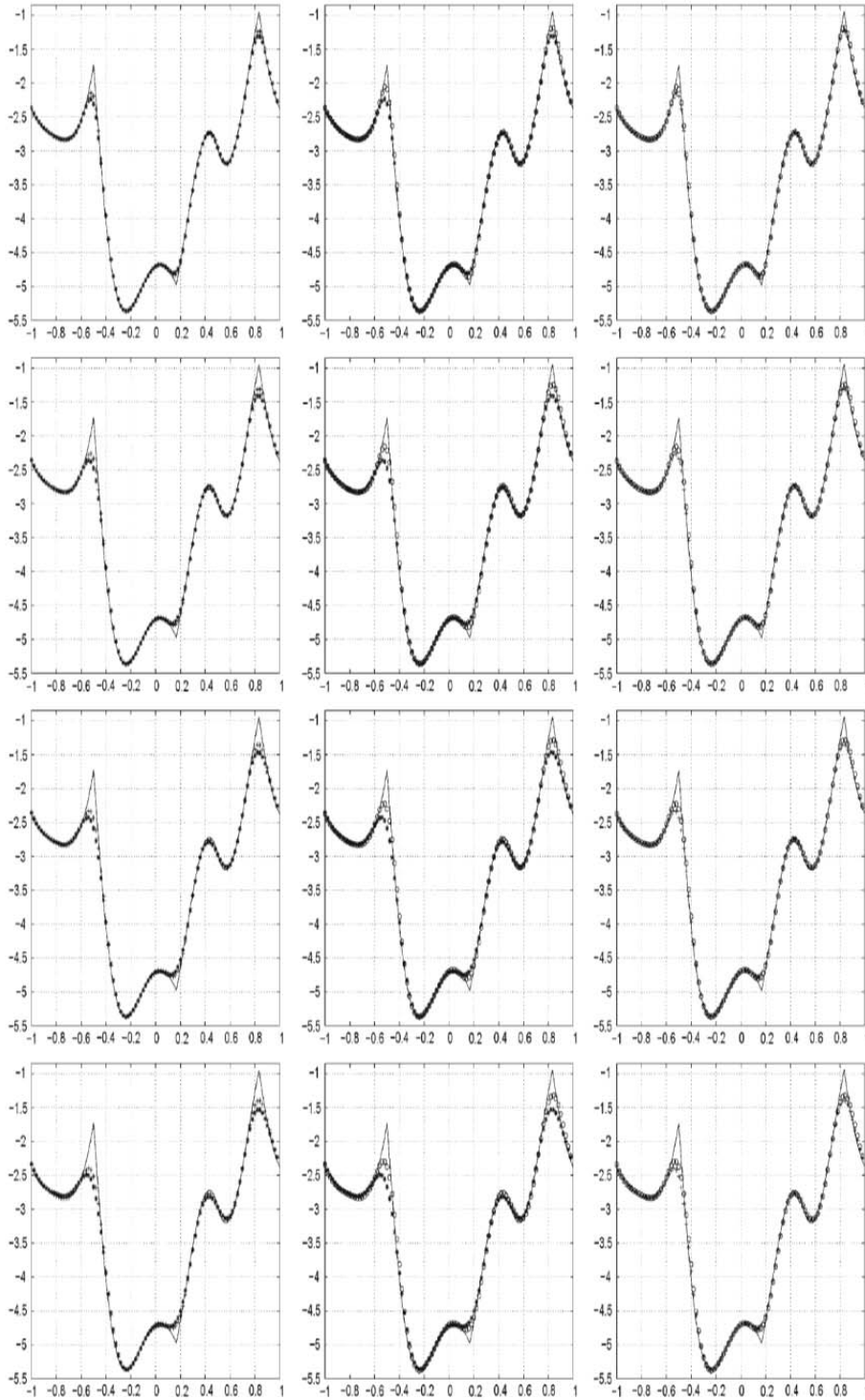


Fig. 4. Comparaciones.

Columna de la izquierda: WENO5 ('*') y WPower3ENO5 ('+').

Columna central: WENO5 ('*') y WPower ∞ ENO5 ('o').

Columna de la derecha: WPower3ENO5 ('+') y WPower ∞ ENO5 ('o') en los tiempos 2, 8, 16, y 32 desde arriba hasta abajo.



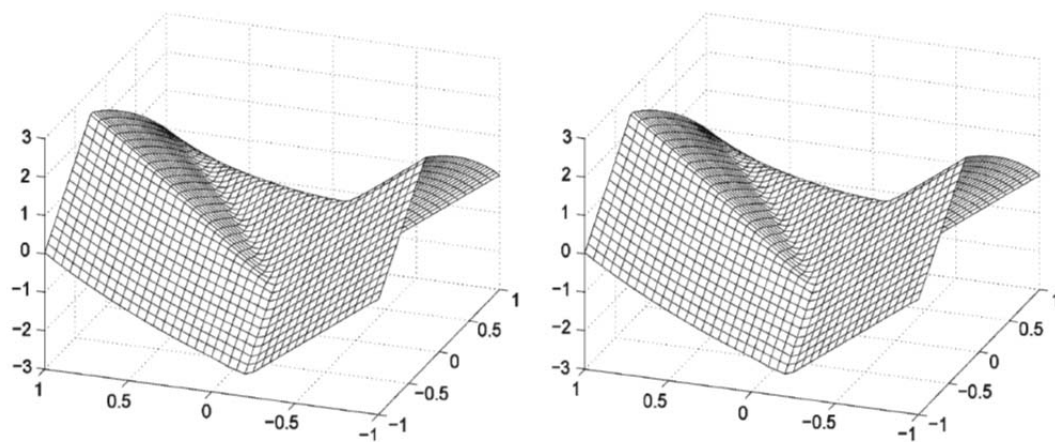


Fig. 5. Izquierda: WENO5. Derecha: WPower₃ENO5.

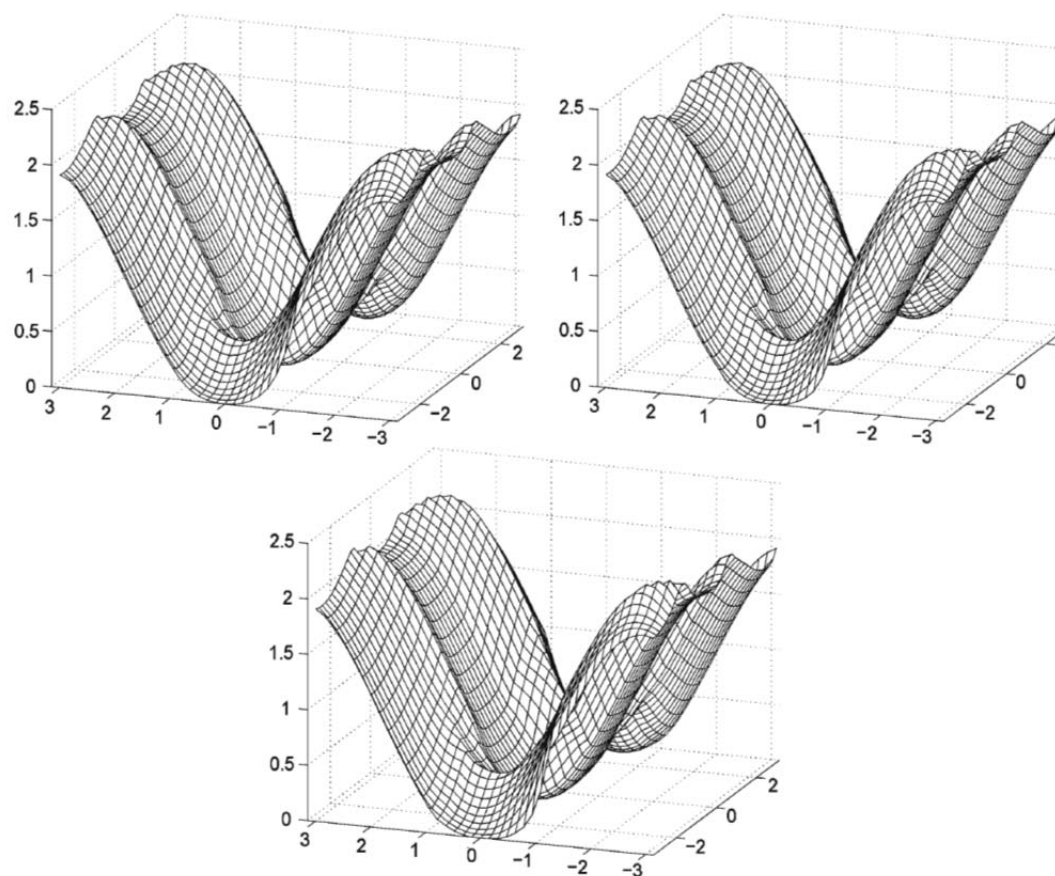


Fig. 6. Arriba a la izquierda: WENO5.
Arriba a la derecha: WPower₃ENO5.
Abajo: WPower_∞ENO5.



WeightedPower_∞ENO5, en este caso:

$$\phi_0^1(x, y) = \begin{cases} d + \delta, & |d| \leq \epsilon \\ d, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\phi_0^2(x, y) = \begin{cases} d + 2\delta, & |d| \leq \epsilon \\ d, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.14)$$

Donde:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} - 0,5, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{|x|}\right), \epsilon = 0,2 \quad y \quad \delta = \frac{\epsilon}{16\pi} \sin\left(\frac{4\pi d \sin 5\theta}{\epsilon}\right)$$

Emplearemos $\frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0 + (\Delta x)^2}}$ para aproximar el signo de (ϕ_0) .

Se llevará a cabo el cálculo empleando el flujo de Osher-Sethian g^{G2} , que es más simple que el caso general, g^{G1} , junto con el método pro pasos de tercer orden SSPRK para estos tres esquemas. Se evolucionará en tiempo empleando una rejilla de 100x100 puntos y un número CFL de 0,6.

Calcularemos la curvatura principal en diferentes tiempos de los contornos de nivel usando diferencias centrales.

$$K \equiv \nabla \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Para evitar un posible denominador nulo, sustituiremos $\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ por:

$$\frac{\nabla \phi}{\sqrt{|\nabla \phi| + \Delta x^2}}$$

Para el primer caso, correspondiente a ϕ_0^1 , el máximo de los datos iniciales de curvatura es 43,545925 y el mínimo es -33,465937; para el segundo caso, correspondiente a ϕ_0^2 , el máximo es 88,5558 y el mínimo -66,4770.

La **Figura 7** muestra los resultados para el primer caso. De la parte superior a la inferior se presentan los datos iniciales y los resultados para los pasos 16, 64 y 256.

La **Figura 8** muestra los resultados para el segundo caso. De la parte superior a la inferior se presentan los datos iniciales y los resultados para los pasos 128, 512 y 1024.



En ambos casos hay diferencias significativas en la curvatura antes y después de la reinicialización. La curvatura calculada a partir de la solución mediante el esquema $\text{WeightedPower}_{\infty}\text{ENO5}$ presenta menor cantidad de ruido en ambos casos que los esquemas WENO5 y $\text{WeightedPower}_3\text{ENO5}$; el ruido persiste en algunas regiones en los casos de cálculo con estos dos últimos esquemas. Aunque el comportamiento de los esquemas WENO5 y $\text{WeightedPower}_3\text{ENO5}$ es similar, el ruido se disipa con el esquema $\text{WeightedPower}_{\infty}\text{ENO5}$; se considera que los limitadores no-suaves en los esquemas WENO5 y $\text{WeightedPower}_3\text{ENO5}$ pueden causar la persistencia de alguna clase de ruido en la curvatura, y el limitador principal aritmético en el esquema $\text{WeightedPower}_{\infty}\text{ENO5}$ podría ser el causante del mejor comportamiento de este esquema.

Lo siguiente es considerar la recuperación de una función de distancia “no-suave”. Para este propósito, elegiremos ϕ_0 para ser la función de distancia señalada, $d_l(x, y)$.

$$a^4 = [(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2] \quad (3.15)$$

Siendo $a = 0,5$ con alguna perturbación en direcciones radiales y angulares cercanas a la curva:

$$\phi_0^3(x, y) = \begin{cases} d_l + 3\delta & |d_l| \leq \epsilon \\ d_l & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.16)$$



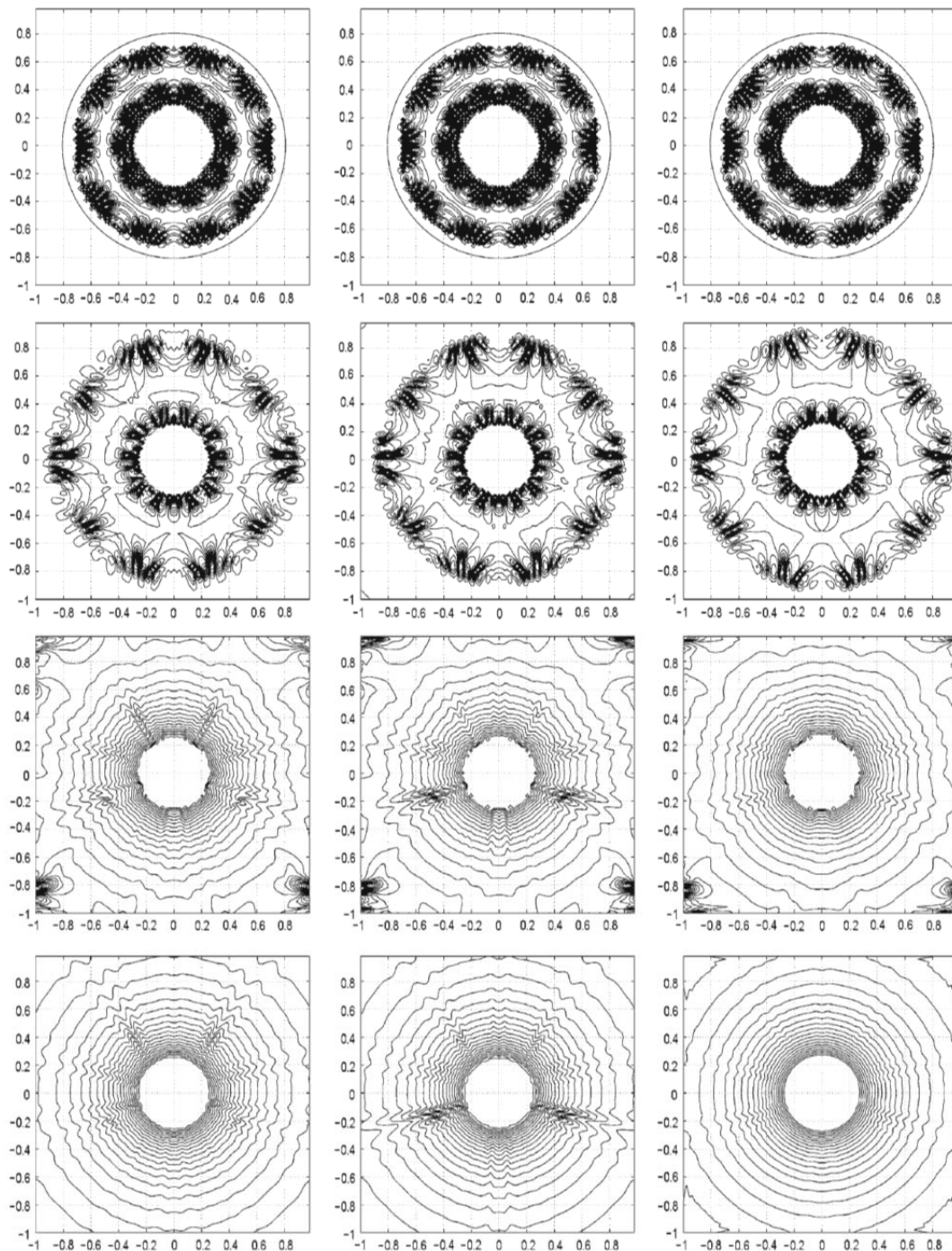


Fig. 7. Φ_0^1 en la condición inicial. Curvaturas en los pasos 0, 16, 64, and 256.

Columna izquierda: WENO5.
Columna central: WPower₃ENO5.
Columna derecha: WPower_∞ENO5.



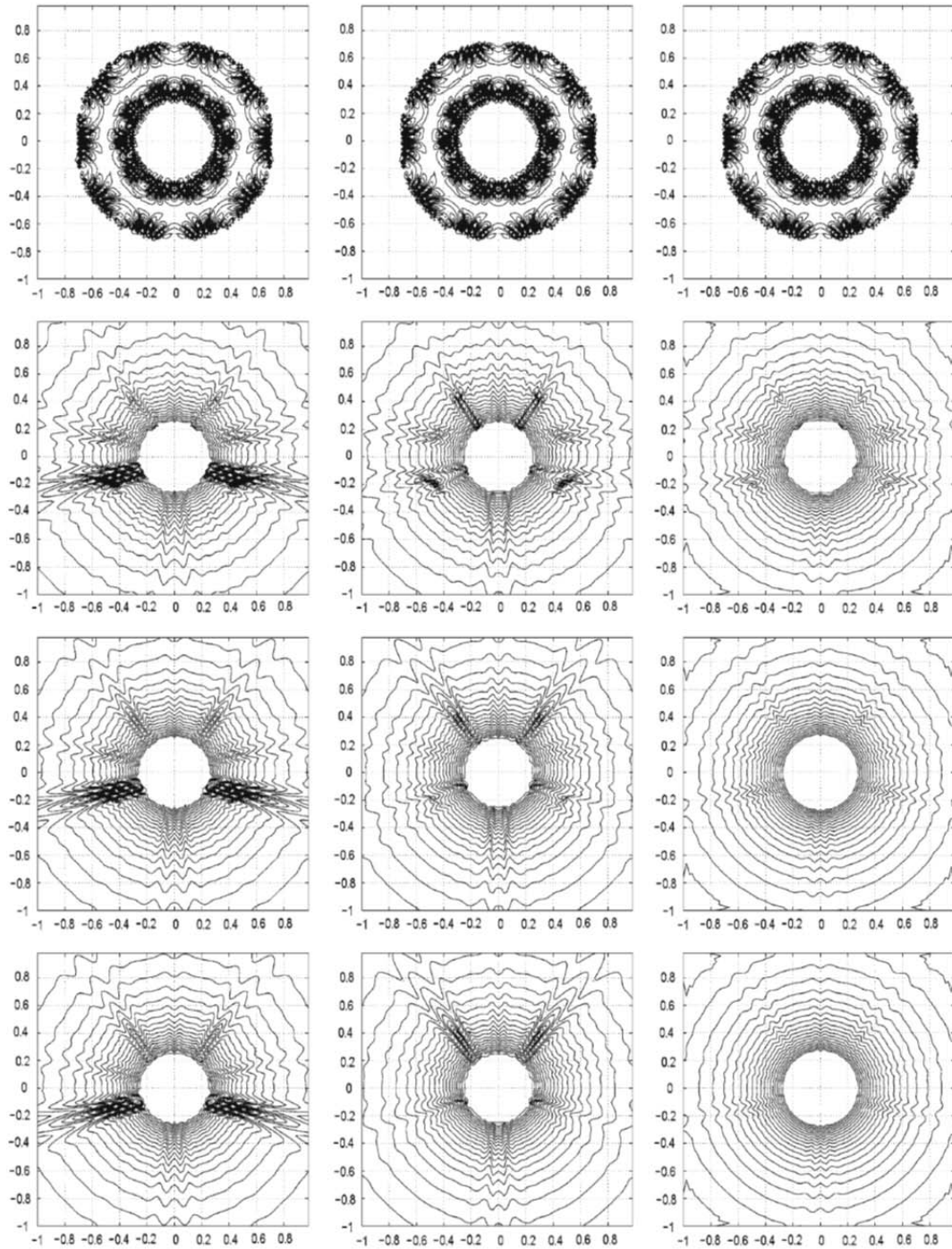


Fig. 8. Φ_0^2 en la condición inicial. Curvaturas en los pasos 0, 16, 64, and 256.

Columna izquierda: WENO5.
Columna central: WPower₃ENO5.
Columna derecha: WPower_∞ENO5



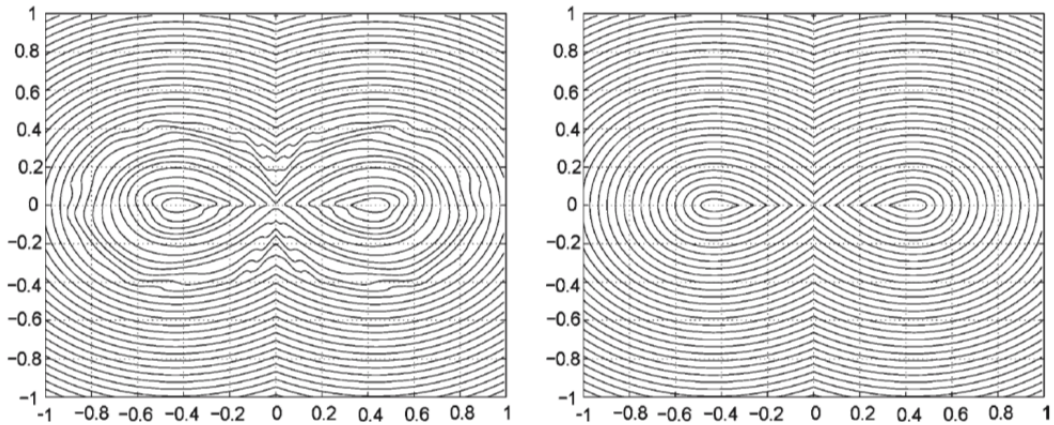


Fig. 9. Izquierda: Datos iniciales perturbados. **Derecha:** Solución convergente calculada mediante el esquema Weighted Power_∞ENO5.

Que es definida en $[-1,1] \times [-1,1]$ siendo:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{16 \pi} \sin\left(\frac{2\pi d \sin 5\theta}{\varepsilon}\right), \varepsilon = 0,2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{|x|}\right)$$

Calcularemos la función de distancia señalada mediante la expresión (3.12).

$$D(x, y) = \sqrt{[(x - a)^2 + y^2][(x + a)^2 + y^2]} - a^2 \quad (3.17)$$

Remarquemos que $d_i(x, y)$ tiene una discontinuidad de salto de primer orden parcial si se deriva a lo largo del eje y .

Se evolucionará en el tiempo empleando una malla de 200×200 y un número CFL de 0,6 para los tres esquemas. A tiempos diferentes calcularemos la correspondiente curvatura principal de ϕ en el dominio excluyendo pequeñas zonas aledañas de los ejes x e y para mejorar la visualización de las líneas de contorno.

En la **Figura 9** se mostrará el dato perturbado inicial ϕ^3_0 y únicamente la solución convergente (hacia el estado estable) mediante el esquema WeightedPower_∞ENO desde el momento en que no hay diferencias distinguibles en las soluciones del estado estable por los tres esquemas.

La **Figura 10** muestra los trazos del contorno de la curvatura. Desde la parte superior a la parte inferior presentaremos los datos iniciales y los resultados para los pasos 16, 64 y 256.



Es necesario denotar que, las soluciones obtenidas mediante los tres esquemas convergen hacia un estado estable muy rápidamente y significan que se obtiene una reducción del ruido en las curvaturas calculadas en todos los casos.

Finalmente, remarcaremos que hemos tenido que el procedimiento de pasos temporales de cuarto orden SSP-RK diseñado por Spiteri and Ruuth [25] en el cálculo; la principal ventaja de un método de cuarto orden SSP-RK es que podemos elevar la velocidad del cálculo en un 50% doblando el número CFL y logrando la misma precisión.



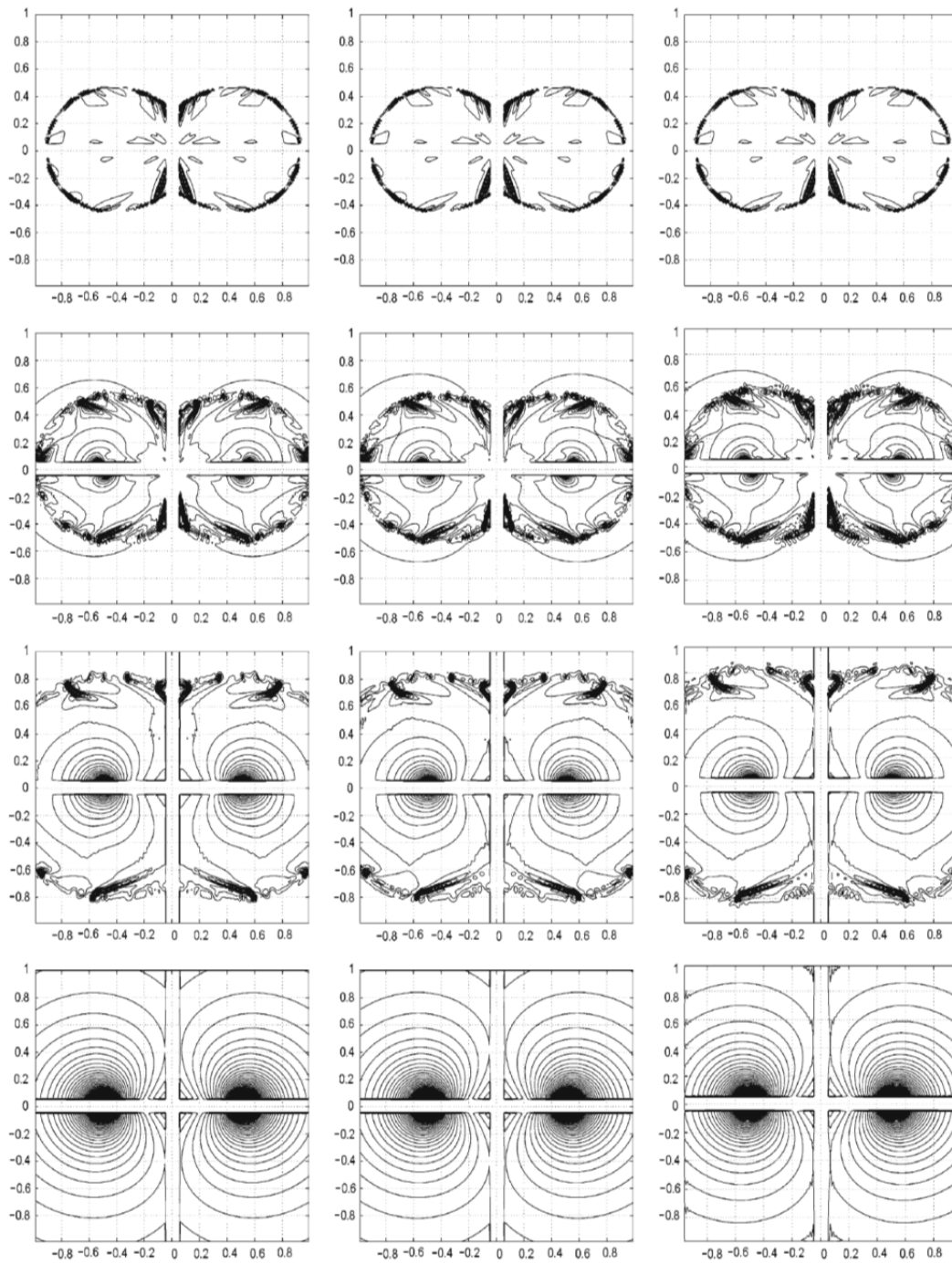


Fig. 10. Curvaturas en los pasos 0, 16, 64, and 256.

Columna izquierda: WENO5.

Columna central: WPower₃ENO5.

Columna derecha: WPower_∞ENO5



CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

En este trabajo han sido diseñados una clase de esquemas Weighted Power-ENO empleados para aproximar la solución viscosa de las ecuaciones HJ. La idea esencial de este tipo de reconstrucción Power-ENO es la aplicación a una clase de limitadores extendidos a diferencias de segundo orden en las reconstrucciones ENO clásicas de tercer orden, con el objetivo de mejorar las soluciones cerca de las discontinuidades. La estrategia de pesado basada en apropiados indicadores de suavidad lleva los esquemas a una precisión de quinto orden. Los experimentos numéricos realizados corroboran la precisión y la solidez de estos nuevos esquemas.



CAPÍTULO 5. BIBLIOGRAFÍA

1. Abgrall, R. (1996). Numerical discretization of the first-order Hamilton-Jacobi equations on triangular meshes. *Comm. Pure Appl. Math.* 49, 1339–1377.
2. Albert, S., Cockburn, B., French, D., and Peterson, T. (2002). A posteriori error estimates for general numerical methods for Hamilton-Jacobi equations. Part I: the steady state case. *Math. Comp.* 71, 49–76.
3. Bryson, S., and Levy, D. (2003). High-order central WENO schemes for multi-dimensional Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Num. Anal.* 41, 1339–1369.
4. Cecil, T., Qian, J., and Osher, S. J. (2004). Numerical methods for high dimensional Hamilton-Jacobi equations using radial basis functions. *J. Comp. Phys.* 196, 327–347.
5. Cockburn, B., and Qian, J. (2002). Continuous dependence results for Hamilton-Jacobi equations. In Estep D. and Tavener S. *Collected Lectures on the Preservation of Stability Under Discretization*. SIAM, Philadelphia, PA, pp. 67–90.
6. Cockburn, B., and Yenikaya, B. (2005). An adaptive method with rigorous error control for the Hamilton-Jacobi equations. Part I: the one dimensional steady state case. *Appl. Numer. Math.* 52, (2–3): 175–195.
7. Corrias, L., Falcone, M., and Natalini, R. (1995). Numerical schemes for conservation laws via Hamilton-Jacobi equations. *Math. Comp.* 64, 555–580.
8. Crandall, M., and Lions, P. (1983). Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Am. Math. Soc.* 277, 1–42.



9. Crandall, M., and Lions, P. (1984). Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Math. Comput.* 43, 1–19.
10. Falcone, M., and Ferretti, R. (1994). Discrete time high order schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Numer. Math.* 67, 315–344.
11. Gottlieb, S., Shu, C.W., and Tadmor, E. (2001). Strong stability preserving high-order time discretization methods. *SIAM Rev.* 43, 89–112.
12. Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* 49, 357–393.
13. Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S. (1987). Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes III. *J. Comput. Phys.* 71, 231–303.
14. Jiang, G.S., and Peng, D. (2000). Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 21, 2126–2143.
15. Jiang, G.S., and Shu, C.W. (1996). Efficient Implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.* 126, 202–228.
16. Jin, S., and Xin, ZP. (1998). Numerical passage from systems of conservation laws to Hamilton-Jacobi Equations and relaxation schemes. *SIAM J. Numer. Anal.* 35, 2385–2404.
17. Lin, C. T., and Tadmor, E. (2000). High-resolution non-oscillatory central schemes for Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM J. Sci. Comput.* 21, 2163–2186.
18. Liu, X-D., Osher, S.J., and Chan, T. (1994). Weighted essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.* 115, 200–212.
19. Osher, S.J., and Sethian, J. (1988). Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *J. Comput. Phys.* 79, 12–49.
20. Osher, S.J., and Shu, C.W. (1991). High-order essentially non-oscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 28, 907–922.
21. Qiu, J., and Shu, C. W. (2005). Hermite WENO schemes for Hamilton-Jacobi equations. *J. Comput. Phys.* 204, 82–99.
22. Serna, S., and Marquina, A. (2004). Power ENO Methods: a fifth-order accurate Weighted Power ENO method. *J. Comput. Phys.* 194, 632–658.



23. Shu, C. W., and Osher, S. J. (1989). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II. *J. Comput. Phys.* 83, 32–78.
24. Souganidis, P. E. (1985). Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *J. Diff. Eqn.* 59, 1–43.
25. Spiteri, R. J., and Ruuth, S. J. (2002). A new class of optimal high order strong stability preserving time discretization methods. *SIAM J. Num. Anal.* 40, 469–491.
26. Zhang, Y.T., and Shu, C.W. (2003). High-order WENO schemes for Hamilton-Jacobi equations on triangular meshes. *SIAM J. Sci. Comput.* 24, 1005–1030.
27. S. Serna Salichs, Tesis Doctoral, U. Valencia, 200.

