

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Naval y Oceánica



PROYECTO FIN DE CARRERA

MODELIZACIÓN NAVAL MEDIANTE CAD, NURBS Y ELEMENTOS
FINITOS. APLICACIÓN MEDIANTE ANSYS



Titulación: Ingeniería Naval y Oceánica
Alumno: Marc Parada Ricart
Director: Sergio Amat Plata
Sonia Busquier Sáez

INDICE

0. Introducción	5
BLOQUE I: CAD, CAM, CAE	
I.1. Introducción	6
I.2. CAD/CAM/CAE en el diseño naval	9
BLOQUE II: ELEMENTOS FINITOS	
II.1. Introducción a FEM	11
II.2. Descripción del método. Aplicación del mismo	13
II.3. Elementos finitos en el análisis de estructuras navales. Presentación de ANSYS	14
BLOQUE III: ANÁLISIS ISOGEOMÉTRICO	
III.1. Introducción	17
III.2. B-splines y NURBS	21
III.2.1. Vectores de nudo	21
III.2.2. Funciones base	22
III.2.3. Curvas B-spline	24
III.2.4. Refinamiento-h: Inserción de nudo	25
III.2.5. Refinamiento-p: Elevación de orden	26
III.2.6. Refinamiento-k	28
III.2.7. Superficies B-spline	30
III.2.8. Sólidos B-spline	30
III.2.9. B-splineracionales	31
III.3. NURBS como base para el análisis	33
III.4. Análisis estructural isogeométrico	35
III.4.1. Placa infinita con agujero circular bajo tensión constante en el plano en la dirección x	36
III.4.2. Cilindro circular sólido sujeto a cargas de presión interna	41
III.4.3. Sólido "en forma de herradura" sujeto a desplazamientos del borde iguales y opuestos en el plano	43
III.4.4. Cáscara cilíndrica fina con extremos fijos sujetos a presión interior constante	45
III.4.5. "Pista de obstáculos"	48
III.4.5.1. Bóveda de "Scordelis-Lo"	49
III.4.5.2. "Hemisferio pellizcado"	51
III.4.5.3. "Cilindro pellizcado"	51
III.4.6. Cáscara hemisférica con un refuerzo	54
III.5. Análisis de fluidos isogeométricos	59

III.5.1. Advección oblicua a una malla con condiciones de contorno Dirichlet de salida	60
III.5.2. Advección del seno de un pico en un campo de flujo rotativo	69
III.6. Conclusiones	71
III. Apéndice A. Datos de control para objetos NURBS	74
III. Apéndice B. Selección de nodos durante el refinamiento-h	77

BLOQUE IV: Ejemplo de aplicación ANSYS

IV.1. Introducción	80
IV.2. Modelización	82
IV.3. Condiciones de contorno	93
IV.4. Aplicación de cargas	94
IV.5. Fuerzas cortantes verticales	105
IV.6. Fuerzas cortantes horizontales	106
IV.7. Momentos flectores verticales	107
IV.8. Momentos flectores horizontales	109
V. Conclusiones	111
VI. Bibliografía	112

0.- Introducción:

En los últimos tiempos todas las ramas de la ingeniería han evolucionado de a gran velocidad gracias a la entrada en funcionamiento de herramientas que permiten ahorrar tiempo en la solución de problemas en la ingeniería.

Este hecho no es una excepción en el campo de la ingeniería naval donde los cálculos que se realizan son de grandes magnitudes debido a la gran cantidad de variables que entran en juego. Es por ello que este proyecto pretende definir aquellos conceptos y técnicas que se utilizan en la actualidad en el mundo del cálculo de estructuras marinas. Además de la definición de los mismos, se pretende aportar ejemplos prácticos que ayudan a mostrar y ejemplificar lo que aportan las técnicas de resolución usadas.

A pesar de ello, el objetivo del mismo no solo es mostrar la realidad de la aplicación de ciertos tipos de herramientas utilizadas, sino que también es misión del mismo poder aportar nuevos conceptos en el análisis de estructuras marinas y en la modelización. El presente proyecto pretende presentar una visión teórico-práctica del campo de la ingeniería que se ocupa de la modelización y análisis de las estructuras navales.

Desde el punto de vista teórico se pretende presentar el concepto del análisis isogeométrico. Para ello se realizarán pequeñas introducciones al concepto del diseño asistido por ordenador, elementos finitos, NURBS, etc... para posteriormente adentrarse en el concepto introducido del análisis isogeométrico, en el cual funciones base generadas a partir de NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) se emplean para construir un modelo geométrico exacto. Para fines de análisis, la base es refinada y/o su orden elevado sin cambiar la geometría o su parametrización.

Además se pretende recordar los refinamientos $-h$ y $-p$ y presentar un nuevo, y más eficiente concepto de refinamiento, el refinamiento- k .

Para completar el punto de vista teórico se introducen ejemplos numéricos que presentan tasas óptimas de convergencia para problemas de elasticidad lineal y la convergencia de las soluciones de cáscaras finas elásticas. La estrategia de refinamiento- k demuestra que convergen hacia soluciones monótonas para los procesos de difusión-advención con fuertes capas internas y de frontera. Además, se argumenta que el análisis isogeométrico es una alternativa viable al análisis de elementos finitos y posee varias ventajas.

Para finalizar el estudio se muestra un ejemplo de la aplicación de un software concreto (ANSYS) en el que se pretende modelizar y analizar el comportamiento de un buque tipo dado para ver los resultados que el software muestra. Por encima de los resultados obtenidos, es interesante conocer el funcionamiento del software de estudio.

Tal y como se verá durante la presentación del ejemplo práctico, este tipo de software es de difícil manejo y requiere de unos conocimientos avanzados para poder definir mínimamente un modelo y poder analizar los resultados.

BLOQUE I: CAD, CAM, CAE.

1.1.- Introducción:

En el presente PFC se pretende introducir un método para el análisis de problemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales como, por ejemplo, sólidos, estructuras y fluidos. El método tiene muchos rasgos en común con el método de elementos finitos y algunos rasgos en común con "métodos meshless" (MM). Sin embargo, está más geoméricamente basado y toma la inspiración del diseño asistido por ordenador (CAD). Un objetivo primario es ser geoméricamente exacto, no importa cuán burda sea la discretización. Otro objetivo es simplificar el refinamiento de malla eliminando la necesidad de la comunicación con la geometría CAD una vez que la malla inicial es construida.

Incluso, otro objetivo sería entretejer más fuertemente el proceso de generación de malla dentro del CAD. Con este trabajo introducimos ideas en la búsqueda de estos objetivos.

Para todo ello y para poder introducirnos de lleno en el tema tratado se pretende realizar una pequeña introducción a cada uno de los temas que influirán en la puesta en común del presente proyecto.

Para empezar vamos a introducirnos en el mundo del diseño asistido por computador (CAD/CAM/CAE).

La potencia de las herramientas informáticas actuales hace que el proceso productivo en la industria actual deba ser sometido a un análisis específico. En dichos procesos se ha desarrollado lo que hoy en día se conoce como diseño asistido por ordenador (CAD – ComputerAidedDesign). Esta tecnología permite introducir el uso de ordenadores (y de su potencia) a la hora de crear, modificar, analizar y optimizar un proceso productivo.

Las herramientas de esta tecnología van desde la modelización geométrica hasta herramientas para el análisis y perfeccionamiento del producto obtenido. A pesar de ello, se debe hacer notar que el objetivo principal de este tipo de tecnología es la modelización, ya que el diseño es la actividad principal de cualquier ciclo productivo.

Por otro lado, la fabricación asistida por ordenador (CAM – ComputerAidedManufacturing) es aquella en la que se controla un sistema productivo. En líneas generales el sistema CAM pretende, mediante el uso de sistemas informáticos, planificar, gestionar y controlar las operaciones de una planta de fabricación.

En líneas generales el sistema CAM sigue los siguientes pasos:

- Primero se realiza el modelado del producto (este paso es donde se hace uso de la tecnología CAD).
- A partir del modelo generado se hace necesario repetir una serie de pasos para poder establecer una línea de producción. Es aquí donde se hace necesario recurrir a las máquinas de control numérico, donde se establecerá un código de programación para

determinar los movimientos de una máquina capaz de leer un código y aplicarlo al proceso productivo.

Las aplicaciones CAM se dividen en dos grandes grupos:

- Interfaz directa – Donde la computadora se conecta directamente con el proceso de producción. Dichas aplicaciones pueden ser de supervisión o de control.
- Interfaz indirecta – Donde la computadora se utiliza con el objetivo de ayudar a la producción pero no de forma directa como ocurre en la interfaz anterior.

Es en la planificación de procesos donde tanto CAD, como CAM se ven involucrados de forma directa (sirviendo de unión entre ambos). A continuación se enumeran unas cuantas aplicaciones prácticas en la industria actual:

- Diseño de circuitos integrados
- Diseño de circuitos electrónicos
- Industria Aeronáutica
- Industria Naval
- Industria del automóvil
- Industria pesada
- Diseño industrial
- Ingeniería Civil
- Diseño arquitectónico
- Industria Textil
- Aplicaciones en la industria de los plásticos
- Industria del calzado
- Análisis cinemático
- Sistemas de Información sobre imágenes (PIS)

Paralelamente a todo ello nos encontramos con la tecnología CAE (ComputerAidedEngineering). Dicha tecnología se destina al uso de sistemas informáticos para analizar la geometría generada por las aplicaciones CAD, permitiendo optimizar y mejorar dicho proceso.

Los sistemas CAE proporcionan numerosas ventajas:

- Facilidad, comodidad y mayor sencillez en la etapa de diseño.
- Rapidez, exactitud y uniformidad en la fabricación.
- Alto porcentaje de éxito.
- Eliminación de la necesidad de prototipos.
- Aumento de la productividad.
- Productos más competitivos.

- Fácil integración, sin problemas adicionales, en una cadena de fabricación.
- Obtención de un producto económico, de óptima calidad y en el menos tiempo posible.

El proceso de análisis por ordenador más usado es el método de elementos finitos (FEM – FiniteElementMethod). Este método se utiliza para obtener tensiones, deformaciones, flujos de fluidos y otros problemas de campos continuos.

En este método trata de descomponer de forma abstracta la geometría del diseño. En otras palabras, se eliminan los detalles innecesarios de dicha geometría.

Es por ello que se hace necesario generar dicho modelo abstracto de forma interactiva para poder aplicar el método de elementos finitos. Una vez creado el modelo, se genera la malla de elementos finitos para poder aplicar el método.

El esquema que sigue este método es el siguiente:

- Pre-proceso – Generación del modelo y de la malla de elementos finitos.
- Proceso – Análisis de cada elemento
- Post-proceso – Ensamblaje de los resultados y visualización de los mismos.

Más adelante se abordará de manera más extensa este método.

Componentes del CAD/CAM:

- Modelado geométrico – Estudio de métodos de representación de entidades geométricas. Existen tres tipos de modelos:
 - Alámbricos – Para modelar perfiles, trayectorias, etc... donde no se requiera de las propiedades físicas.
 - Superficies – Para modelar carrocerías, fuselajes, etc... donde la parte fundamental es el exterior del objeto que se modela.
 - Sólidos – Para modelar piezas mecánicas, envases, etc... donde se hace necesario disponer de las propiedades físicas.
- Técnicas de visualización – Se ocupan de generar imágenes del modelo.
- Técnicas de interacción gráfica – Dichas técnicas son el soporte de la entrada de información geométrica del sistema de diseño. Existen dos tipos de técnicas diferenciadas:
 - Posicionamiento – Introducción de coordenadas.
 - Selección – Identificación interactiva de un componente del modelo.
- Interfaz de usuario.
- Base de datos – Soporte para almacenar los datos del modelo.
- Métodos numéricos – Son la base para los métodos de cálculo empleados.
- Conceptos de fabricación – Programación de máquinas, herramientas, etc...
- Conceptos de comunicaciones – Interconexión de todos los sistemas CAD/CAM.

1.2.- CAD/CAM/CAE en el diseño naval:

Antes de adentrarnos en el conocimiento de las herramientas CAD/CAM/CAE en el mundo de la industria naval se debe recordar la complejidad del estudio del diseño naval ya que intervienen múltiples campos de la ciencia y de la ingeniería, como son:

- Teoría del Buque
- Dibujo Técnico y Naval
- Dinámica de Fluidos
- Resistencia de materiales
- Análisis de Estructuras
- Sistemas del Buque

Cabe destacar que en la definición de formas de un barco los resultados más aproximados se obtienen por medio de NURBS puesto que pueden modelar cualquier superficie naval. Para obtener un resultado eficiente y debido a la naturaleza de los modelos utilizados (NURBS) se han de tener en cuenta dos aspectos básicos del sistema:

- Representación y dibujado de las NURBS
- Gestión de la memoria.

A partir de la definición de una NURBS, se genera una malla de segmentos de líneas tridimensionales. La operación de generación de la malla es muy lenta, pues requiere muchos cálculos. Teniendo esto en cuenta, el sistema debe minimizar el número de dichas operaciones, a base de utilizar mucha más memoria de la mínimamente imprescindible. De esta forma se consigue un aumento en el rendimiento del sistema (con el valor añadido de que la memoria es más barata que un procesador más potente). Así, para cada NURBS del sistema, definimos una estructura conteniendo la descripción de la superficie (en términos de nudos U-V y puntos de control), la malla tridimensional, y una serie de propiedades del objeto. Este tipo de estructura es muy útil para el redibujado, pues sólo se necesita recalcular la superficie cuando cambia su forma (añadiendo, borrando o desplazando puntos de control). Todas las estructuras de los objetos se almacenan en una lista enlazada.

Para aplicar las transformaciones, y gracias a la propiedad de invariabilidad por transformación de las NURBS, podemos utilizar dos métodos: aplicar la matriz de transformación tanto a la malla como a la NURBS, o aplicar la matriz a la NURBS y después calcular la malla a partir de ésta. Se ha comprobado que el primer método es mucho más rápido, siendo éste el más usado. Además, gracias a la estabilidad numérica de las NURBS y a la precisión utilizada para realizar los cálculos, tras una serie de transformaciones los objetos no sufren deformaciones apreciables.

A continuación se nombran unas cuantas herramientas comúnmente usadas en la ingeniería naval para el modelado de estructuras marinas:

- Foran
- MaxSurf
- ProSurf
- Propines
- MultiSurf
- Hullform
- Defcar
- ...

Hasta este momento se han podido observar herramientas CAD/CAM que intervienen en la definición y diseño del buque, pero en el campo de la arquitectura naval no sólo contamos con herramientas para la definición de la forma del buque sino que existe otro tipo de software capaz de analizar muchos otros ámbitos dentro del proceso productivo del mismo. Entre ellos destaca ANSYS (basado en el análisis por elementos finitos). Más adelante se verá un ejemplo de la utilización práctica de este software.

BLOQUE II: ELEMENTOS FINITOS

II.1.- Introducción a FEM (Método de elementos finitos)

A continuación y como complemento a las tecnologías ya conocidas, se presenta el método de los elementos finitos. Hasta este momento hemos presentado las tecnologías CAD/CAM/CAE que permiten una planificación y control del diseño y fabricación eficiente en todo proceso productivo.

Pero en realidad, la tarea más importante a la hora de diseñar es aquella en la que se debe conocer el comportamiento de un sistema para optimizar su diseño. Para ello se debe configurar un modelo matemático capaz de simular el comportamiento del objeto bajo análisis. Esto se realiza a través de ecuaciones cuyas incógnitas representan magnitudes de interés para evaluar el comportamiento de dicho objeto.

Pero no solo se deben resolver las citadas ecuaciones sino que se debe interpretar técnicamente los resultados obtenidos.

Los modelos normalmente involucran problemas de contorno gobernados por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Pero, obtener soluciones a dichas ecuaciones no es tarea sencilla. Es por ello que aparecen métodos para tratar de resolver dichas ecuaciones. Uno de esos métodos es el método de elementos finitos.

El método de los elementos finitos (FEM) es un método general para la solución de problemas de contorno gobernados por ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. En otras palabras, se trata de resolver un problema diferencial sustituyéndolo por uno algebraico. Para conseguir tal fin se usan técnicas de discretización (subdivisión de una región sobre la cual están definidas las ecuaciones en formas geométricas simples denominadas elementos finitos). Las propiedades y relaciones dentro del sistema se expresan en las esquinas de los elementos llamados nodos.

El proceso de análisis mediante elementos finitos se describe de la siguiente manera:

- Se define la geometría a partir de algún programa CAD.
- Se define el problema matemático a resolver.
- Finalmente se resuelve el problema mediante la solución de las ecuaciones.

El método de los elementos finitos es una técnica numérica para solucionar problemas de mecánica de sólidos y de fluidos, transmisiones térmicas y vibraciones. La solución de cada uno de estos problemas reside en dividir el caso de estudio en un número finito de elementos. Estos elementos están conectados en unos puntos llamados nodos. En modelos de sólidos, las dislocaciones de cada elemento se relacionan con las dislocaciones nodales. Las dislocaciones nodales se relacionan con las tensiones y las tensiones en los elementos.

El citado método considera las dislocaciones nodales de forma que las tensiones están aproximadamente en equilibrio con las cargas aplicadas. El método convierte las ecuaciones de equilibrio en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales para las dislocaciones nodales. Al resolver las ecuaciones se obtienen tensiones y tensiones reales en todos los elementos. Se debe tener en cuenta que al expresar el problema en mayor número de elementos más pequeños, las tensiones se aproximan a alcanzar el equilibrio con las cargas aplicadas.

Se trata, a continuación, de definir de forma precisa todos los procedimientos para resolver un problema mediante el método de elementos finitos:

- Definición del problema geométrico.
- Especificación de las características del elemento de estudio (características físicas y materiales)
- Subdivisión del elemento de estudio (algunos programas que aplican este método puede realizar este proceso de forma automática – automeshing)
- Aplicación de las condiciones límite y de cargas externas.
- Generación de la solución.
- Post-proceso utilizando las condiciones iniciales y cargas aplicadas.
- Refinamiento del acoplamiento conociendo que el resultado obtenido depende del número de elementos usados en el problema. Así pues, para juzgar la exactitud del resultado es necesario aumentar el número de elementos en el objeto y analizar cómo los resultados varían.
- Interpretación de la solución.

De estos pasos definidos se debe analizar cuidadosamente el problema del refinamiento del acoplamiento. Uno de los principales problemas que posee este método es el hecho que la exactitud de la solución obtenida es función de la resolución del acoplamiento. Es de gran importancia tener en cuenta la resolución de los acoplamientos en zonas en las que exista una gran concentración de tensiones.

Con toda la información aportada hasta este momento se puede decir que el método de resolución de problemas continuos por elementos finitos se resumen en:

- El problema continuo se divide en un número finito de elementos, cuyo comportamiento se asocia a unos puntos característicos llamados "nodos". Estos nodos son puntos de unión entre los elementos adyacentes.
- La solución sigue las reglas de los problemas discretos (ensamblaje de los elementos).
- Las incógnitas del problema dejan de ser funciones matemáticas para pasar a ser el valor de estas funciones en los nodos.
- El comportamiento en el interior de cada elemento se define mediante el comportamiento de los nodos mediante las funciones de interpolación.

11.2.- Descripción del método. Aplicación del mismo.

Para conocer más profundamente el método se pretende aplicar una tensión plana a una placa.

Un elemento finito (e) viene definido por sus nodos (i,j,k) y por el contorno formado por las líneas que los unen. Los desplazamientos (u) de cualquier punto del elemento se aproximan por el siguiente vector:

$$u = \sum N_i a_i^e = [N_i N_j \dots][a_i] = N \cdot a^e$$

N son funciones de posición (funciones de forma) y a^e es un vector formado por los desplazamientos nodales de los elementos considerados. Para el caso de la tensión plana:

$$u = \{u(x, y)\}$$

$$v = \{v(x, y)\}$$

$$a_i = \{u_i, v_i\}$$

u: Es el movimiento horizontal y vertical en un punto cualquiera del elemento.

a_i : Es el desplazamiento del nodo i.

Las funciones N_i, N_j, N_k han de escogerse de tal manera que al sustituir en la ecuación del desplazamiento (u) las coordenadas nodales, se obtengan los desplazamientos nodales.

Una vez se conocen los desplazamientos de todos los puntos del elemento, se determinan las deformaciones (ϵ) en cualquier punto. Esta deformación viene definida por:

$$\epsilon = S \cdot u$$

S es un operador lineal. Sustituyendo la expresión del desplazamiento (u) en esta ecuación, se obtiene que:

$$\epsilon = S \cdot N \cdot a^e$$

Suponiendo que el cuerpo está sometido a una deformación inicial ϵ_0 y que tiene tensiones internas residuales σ_0 , la relación entre tensiones y deformaciones viene dada por:

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0) + \sigma_0$$

D es la matriz de elasticidad que contiene las propiedades del material. Sustituyendo la expresión de la deformación (ϵ) en esta última encontramos que:

$$\sigma = D \cdot S \cdot N \cdot \alpha_i \cdot \epsilon - D \cdot \epsilon_0 + \sigma_0$$

Conociendo los desplazamientos nodales se pueden obtener las tensiones en cualquier punto del elemento.

Como hemos descrito con anterioridad uno de los puntos clave en el análisis de elementos finitos es la interpolación. Dicha interpolación se realiza a través de las conocidas como funciones de forma. Las propiedades de las mismas son:

- Derivabilidad: Si el operador S es de orden m la función de forma de forma deberá soportar la m-ésima derivada.
- Integrabilidad: La función de forma debe ser integrable
- Semejanza con las leyes de distribución de corrimientos
- Condición de polinomio completo

Además de estas propiedades es necesario que las funciones de forma tengan la propiedad de valer la unidad en los nodos a los que están asociadas y que tengan valor nulo en el resto.

Existen dos familias de funciones de forma en función del tipo de nodos:

- Serendípicas: En las que solo existen nodos frontera.
- Lagrangianas: Incluyen nodos intermedios.

Se pueden enumerar 3 cometidos principales de las funciones de forma:

- Obtener resultados en cualquier punto del elemento por interpolación de los valores nodales.
- Permitir transformaciones geométricas que permiten adaptar el mallado a la forma del cuerpo analizado de una manera más exacta.
- Realizar la integración de las ecuaciones mediante la sustitución de las funciones elementales por polinomios de Legendre.

11.3.- Elementos Finitos en el análisis de estructuras navales. Presentación de ANSYS.

A continuación se pretende presentar el software ANSYS que se basa en el método de los elementos finitos para la resolución de problemas que puede presentar el campo de las

estructuras navales (análisis hidrostáticos, análisis de comportamientos de estructuras concretas en zonas sensibles de soportar altas concentraciones de tensiones, etc..).

El método de elementos finitos es un método numérico cuya aplicación sirve para calcular comportamientos de estructuras de ingeniería. Puede emplearse para obtener desviaciones, esfuerzos, vibraciones, comportamientos de flujo, entre otros fenómenos; en los cuales la geometría de la estructura o la complejidad de las cargas aplicadas, hacen imposible obtener una solución analítica del problema. En este método, una estructura compleja se divide en muchos y pequeños bloques simples, llamados elementos finitos, de los cuales puede describirse su conducta (de un elemento individual) con un set relativamente simple de ecuaciones, así como también un set de elementos puede unirse para construir una estructura compleja, de esta forma se describe la conducta de los elementos individuales en un set relativamente grande de ecuaciones, que representan la conducta de la estructura completa. He aquí en donde queda de manifiesto la importancia de los computadores, ya que éstos son capaces de resolver un número considerable de ecuaciones simultáneas y entregar una solución de los elementos por separado. De entre los software basados en este método, el software de estudio (en este PFC) será el programa ANSYS.

ANSYS está dividido en tres herramientas principales llamados módulos: pre-procesador (creación de geometría y mallado), procesador y post-procesador.

Tanto el pre-procesador como el post-procesador están provistos de una interfaz gráfica. Este procesador de elementos finitos para la solución de problemas mecánicos incluye: análisis de estructuras dinámicas y estáticas (ambas para problemas lineales y no-lineales), análisis de transferencia de calor y fluidodinámica, y también problemas de acústicas y de electromagnetismo. Usualmente el uso de estas herramientas se utiliza simultáneamente logrando mezclar problemas de estructuras junto a problemas de transferencia de calor como un todo. Este software es usado también en ingeniería civil y eléctrica, física y química.

Características básicas:

- Integrado - Permite la asociación de distintas tecnologías para el desarrollo de un producto sin abandonar una única plataforma. Además su integración permite la asociación con los software más avanzados de CAD. Por último, su sistema de integración permite incluirse sin dificultad en sistemas de documentación propios de cada empresa.
- Modular - ANSYS permite que los clientes instalen una única aplicación para la solución de un problema específico. A medida que el usuario avanza en la solución, este puede

necesitar análisis más complejos, hasta llegar al proceso de validación. Los distintos módulos de ANSYS permiten solucionar los problemas por partes.

- Extensible - ANSYS propone "aplicaciones verticales" o adaptaciones más específicas según las requiera el cliente. Estas adaptaciones pueden automatizar procesos que realiza normalmente un cliente hasta aplicaciones más complejas que se adaptan a determinados sectores industriales.

Proceso típico para la realización de un cálculo:

- Pre-proceso
 - Establecimiento del modelo. Se construye la geometría del problema, creando líneas, áreas o volúmenes. Sobre este modelo se establecerá la malla de elementos. Esta parte del pre-proceso es opcional, dado que la ubicación de los elementos de la malla puede provenir de otras aplicaciones del diseño.
 - Se definen los materiales a ser usados en base a sus constantes. Todo elemento debe tener asignado un material particular.
 - Generación de la malla, realizando una aproximación discreta del problema en base a puntos o nodos. Estos nodos se conectan para formar elementos finitos que juntos forman el volumen del material. La malla puede generarse a mano o usando las herramientas de generación automática o controlador de mallas.
- Proceso
 - Aplicación de cargas. Se aplican condiciones de borde en los nodos y elementos. Se pueden manejar valores de fuerza, tracción, desplazamiento, momento o rotación.
 - Obtención de la solución, que se obtiene una vez que todos los valores del problema son ya conocidos.
- Post-proceso
 - Visualización de resultados, por ejemplo, como dibujo de la geometría deformada del problema. Listado de resultados, igualmente como datos en una tabla.

Una vez presentado brevemente el software y ya en la parte final del presente PFC se puede encontrar la solución a un problema concreto de aplicación común en el diseño de un buque.

BLOQUE III: ANÁLISIS ISOGOMÉTRICO

III.1.- Introducción:

Es interesante notar que el análisis de elementos finitos en la ingeniería tiene sus orígenes en los años 1950 y 1960.

La ingeniería aeroespacial era el foco de actividad durante este tiempo. Antes de finales de los años 1960 los primeros programas comerciales (ASKA, NASTRAN, Stardyne, etc...) aparecieron. Posteriormente, el método de elementos finitos se extendió a otras ingenierías y disciplinas científicas, y ahora su empleo es extendido y varios programas comerciales están disponibles. A pesar de que la geometría es el sostén del análisis, CAD, tuvo sus orígenes más tarde, en los años 1970 y 1980. Esto quizás explica por qué las representaciones geométricas en el análisis de elemento finito y el CAD son tan diferentes.

La mayoría de programas de elementos finitos eran técnicamente maduros mucho antes de que el CAD moderno fuera adoptado extensamente. En este momento, el CAD es una industria mucho más grande que el análisis. El análisis es por lo general llamado "ComputerAidEngineering" (CAE) en estudios del mercado. Es difícil cuantificar con precisión el tamaño de las industrias de CAD y CAE pero estimaciones actuales dicen que CAE está en el rango de \$1-\$2 billones y el CAD está en el rango de \$5-\$10 billones.

La situación típica en la práctica de la ingeniería consiste en que los diseños son encapsulados en sistemas de CAD y las mallas son generadas a partir de datos CAD. Esto equivale a la adopción de una descripción geométrica totalmente diferente para el análisis, que es sólo aproximada. En algunos casos, la generación de malla puede ser hecha automáticamente pero en la mayor parte de circunstancias puede ser hecha, en el mejor de los casos, semiautomáticamente. Todavía hay situaciones en la mayoría de industrias en las cuales los dibujos son hechos con diseños de CAD y las mallas son construidas a partir de ellos. Se estima que aproximadamente el 80% del tiempo de análisis total es dedicado a la generación de la malla para las industrias automovilística, aeroespacial y naval. En la industria de la automoción, se tarda aproximadamente cuatro meses para crear una malla para un vehículo entero.

Los cambios de diseño son hechos en una base diaria, limitando la utilidad del análisis en el diseño, si nuevas mallas no pueden ser generadas dentro de aquel plazo de tiempo. Una vez que una malla es construida, el refinamiento requiere la comunicación con el sistema CAD durante cada iteración de refinamiento. Este eslabón no está a menudo disponible, lo que quizás explica por qué el refinamiento adaptable es todavía principalmente un esfuerzo académico más bien que una tecnología industrial.

La aproximación geométrica inherente en la malla puede conducir a problemas de exactitud. Un ejemplo de esto está en el Análisis de cáscara delgada ("Thin Shell analysis"), que es notoriamente sensible a imperfecciones geométricas; ver Fig.1. La sensibilidad frente a imperfecciones es mostrada en la Fig.1b, en el cual la carga de pandeo de una celda cilíndrica geoméricamente perfecta es comparada con celdas en las cuales las imperfecciones geométricas son presentadas con las magnitudes del 1%, el 10% y el 50% de espesor. Como se puede ver, hay una reducción muy considerable de la carga de pandeo con un incremento de la imperfección.

La sensibilidad frente a la geometría también se ha notado en la mecánica de fluidos. Capas de entropía falsas sobre formas aerodinámicas eran las dificultades de las soluciones de Euler comprimibles en los años 1980 y 1990. El problema y su solución fueron identificados en la tesis de Barth. Las aproximaciones definidas por partes de la geometría eran la causa. La geometría infinitamente continua eliminó completamente las capas de entropía incluso cuando los campos de flujo fueron acercados por elementos lineales sobre la geometría curva; ver Fig.2. Este resultado explica por qué los métodos que emplean el trazado geométrico infinitamente continuo son ampliamente usados en el análisis de superficie sustentadora (airfoil).

Es también conocido en la dinámica de fluidos computacional que las mallas con buena calidad en las condiciones de contorno, mejoran considerablemente la exactitud de las cantidades calculadas, como la presión, el coeficiente de fricción, y el flujo de calor; ver la Fig.3.

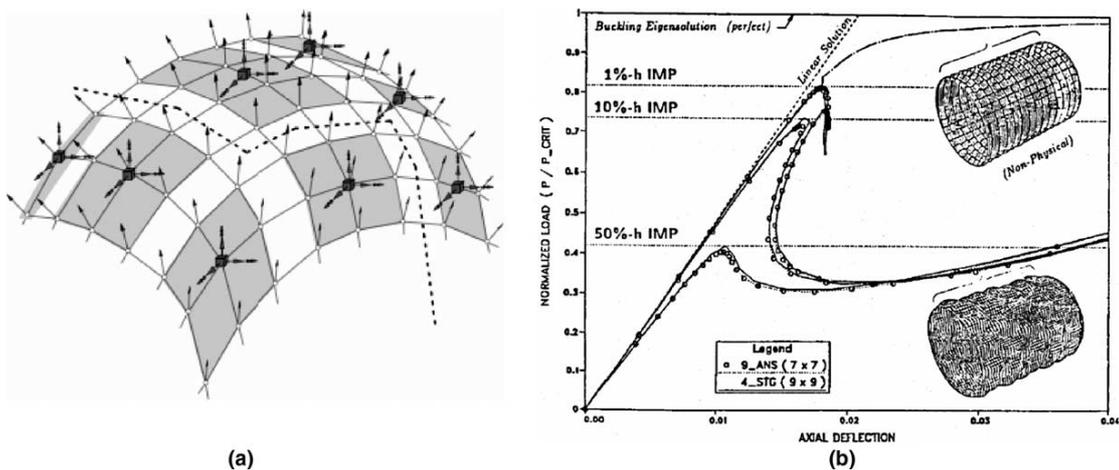


Fig.1 – Las estructuras de cáscara delgada exhiben una considerable sensibilidad a la imperfección: (a) geometría típica de las mallas de elementos finitos donde se introducen imperfecciones geométricas y (b) pandeo del armazón cilíndrico con algunas imperfecciones geométricas aleatorias.

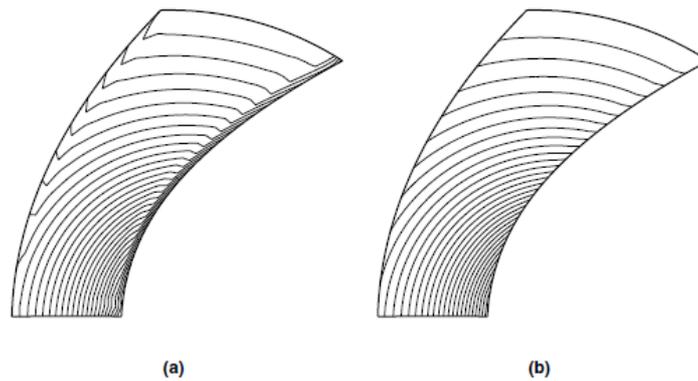


Fig.2 – Contornos de isodensidad de la discretización GLS del flujo de Ringleb. (a) Aproximación isoparamétrica (b) Aproximación super-isoparamétrica

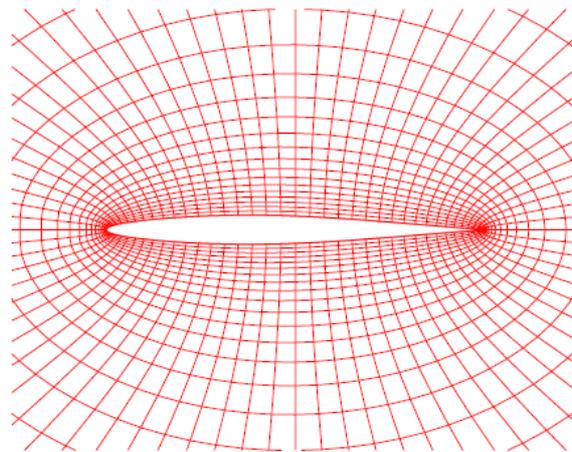


Fig.3 – La calidad de las mallas mejora considerablemente la exactitud

La construcción de la geometría de elementos finitos (por ejemplo, la malla) es costosa, consume mucho tiempo y crea inexactitudes. Desde el más pequeño tamaño de la industria CAE está claro que la dirección más fructífera debería ser el cambiar, o sustituir, el análisis de elementos finitos por algo más parecido al CAD. Esta dirección fue tomada en el desarrollo del programa "RASNA Mechanica", en el cual se utilizaba la geometría exacta en conjunción con un procedimiento de elementos finitos "p-adaptive". Sin embargo, la carencia de satisfacción del concepto isoparamétrico condujo a las preguntas teóricas que fueron resueltas en las versiones posteriores del código, abandonando la geometría exacta a favor de aproximaciones de polinomio de alto orden. El uso de una aproximación fija de polinomio a la geometría ha sido mostrada por Szabó. A medida que el orden de solución polinomial aumenta, el porcentaje de error, a un nivel determinado, no se pueden reducir (ver la Fig.4).

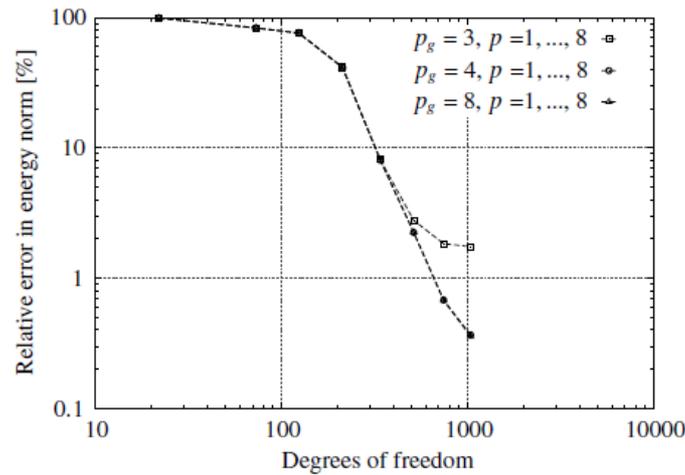


Fig.4 – Estudio de convergencia – p_g representa el orden polinomial de la representación geométrica, p corresponde con el orden polinomial del espacio de aproximación.

La seriedad de este resultado es compuesta por el hecho que las cantidades calculadas en las condiciones de contorno son, por lo general, las más importantes en las aplicaciones de la ingeniería, y aquí es donde los errores geométricos son más dañinos. Además, la mayoría de los análisis de elementos finitos aún son realizados con elementos de bajo orden para los cuales los errores geométricos son mayores. El éxito de RASNA, que más tarde fue adquirido por la Corporación de Tecnología Paramétrica (PTC), una empresa de CAD, era debido a su gran acoplamiento con la geometría CAD y, quizás más importante, su capacidad consiguiente de proporcionar un adaptado refinamiento-p y así, resultados más fiables. La metodología presente está inspirada de manera similar, pero intenta adherirse más fielmente a la geometría CAD y elimina la descripción de polinomio de elementos finitos completamente.

La aproximación que se ha desarrollado está basada en NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), una tecnología estándar empleada en los sistemas CAD. Se propone hacer coincidir exactamente la geometría CAD por superficies NURBS, luego construir una malla densa de elementos NURBS. Estos serían elementos sólidos en tres dimensiones lo que representa exactamente la geometría. Esto obviamente no es una tarea trivial y necesita mucho estudio, pero cuando puede ser logrado se abre una puerta para aplicaciones poderosas. El refinamiento posterior no requiere ninguna otra comunicación con el sistema CAD y es tan simple que puede facilitar la extensa adopción de esta tecnología en la industria. Hay estrategias análogas de refinamiento-h, refinamiento-p y refinamiento-hp, y surge una nueva metodología de alto orden, el refinamiento-k, que parece tener las ventajas de la eficacia y la robustez sobre el tradicional refinamiento-p. Todas las mallas posteriores conservan la geometría exacta. En todo el mundo, la filosofía isoparamétrica es invocada, es decir la solución espacial para las variables dependientes es representada en los mismos términos de función que los que representan la geometría. Por esta razón, hemos doblado la metodología del análisis isogeométrico.

NURBS no es un ingrediente esencial en el análisis isogeométrico. Podríamos prever el desarrollo de procedimientos isogeométricos basándonos en "A-patches" o "superficies de subdivisión". Sin embargo, NURBS parece ser la tecnología CAD desarrollada más a fondo y lamás extendida en su uso.

En este bloque del PFC se pretende comenzar con una pequeña explicación sobre B-splines (B-splines son los predecesores de NURBS), seguido de uno sobre NURBS. Después se describe un marco de análisis basado en NURBS. Esto es seguido de ejemplos de aplicaciones en la mecánica lineal sólida y estructural y algunos cálculos introductorios en fluidos, básicamente aquellos casos clásicos de pruebas para la ecuación de advección-difusión. Varias estrategias de refinamiento han sido estudiadas y, en los casos en los cuales las soluciones exactas de elasticidad están disponibles, se logran niveles óptimos de convergencia. Los problemas estructurales incluyen algunos usos de cáscaras delgadas (thinshells) modeladas como sólidos. La aproximación para manejar estas situaciones va notablemente bien. En los cálculos de fluidos, empleamos la formulación SUPG y consideramos test de casos difíciles que implican capas internas y condiciones de contorno. Observamos que, empleando estrategias de refinamiento-k, de alto orden, se obtienen convergencias hacia soluciones monótonas. Este resultado sorprendente parece contradecir las intuiciones del análisis numérico y sugiere la posibilidad de los métodos de diferencia lineal que son simultáneamente robustos y sumamente exactos.

III.2. B-splines y NURBS

III.2.1. Vectores de Nudo

Las NURBS están construidas a partir de B-splines. El espacio paramétrico de las B-splines está construido a "trozos" más que por elementos. Los trozos juegan el papel de subdominios dentro de los cuales los tipos de elementos y modelos materiales se asumen uniformes. Un vector de nudo en una dimensión es un juego de coordenadas en el espacio paramétrico, escrito como Ξ

$= \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, donde $\xi_i \in \mathbb{R}$ es el i -ésimo de cada nudo, y i el índice de nudo,

$i=1, 2, \dots, n+p+1$, p es el orden polinomial, y n es el número de las funciones base que comprenden la B-spline.

Observación. La convención que adoptaremos consiste en que el orden $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ es referido a una constante, lineal, cuadrática, cúbica, etc..., polinomios definidos por partes, respectivamente. Esto es la terminología habitual en la literatura de elementos finitos.

Lo que llamamos "el orden" es "el grado" por lo general llamado en la literatura de geometría computacional.

Si los nudos son equiespaciados en el espacio paramétrico, se les llama uniformes. Si no son equiespaciados, se les llama no uniformes. Más de un nudo puede ser localizado en las mismas coordenadas en el espacio paramétrico. Estos se mencionan como nudos repetidos. Se llama vector de nudo abierto si su primer y último nudo aparecen p+1 veces. Los vectores de nudo abiertos son estándar en la literatura CAD. En una dimensión, las funciones base formadas por vectores de nudo abiertos son interpoladas al final del intervalo paramétrico espacial, $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, y en las esquinas de los "trozos" en múltiples dimensiones, pero, en general, no son interpoladas en nudos interiores. Esto es un rasgo que se distingue entre nudos y "nodos" en el análisis de elementos finitos.

III.2.2. Funciones base

Las funciones base de las B-splines son definidas recurrentemente comenzando con constantes definidas por partes ($p = 0$)

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{en otros supuestos} \end{cases} \quad (1)$$

Para $p = 1, 2, 3, \dots$, están definidas por:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} \cdot N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \cdot N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

Un ejemplo inicial de los resultados de aplicación de (1) y (2) a un vector de nudo uniforme es presentado en la Fig. 5. Nótese que, para $p = 0$ y 1 , las funciones base son las mismas que para las constantes estándar definidas por partes y funciones de elementos finitos lineales, respectivamente. Sin embargo, para $p \geq 2$, son diferentes.

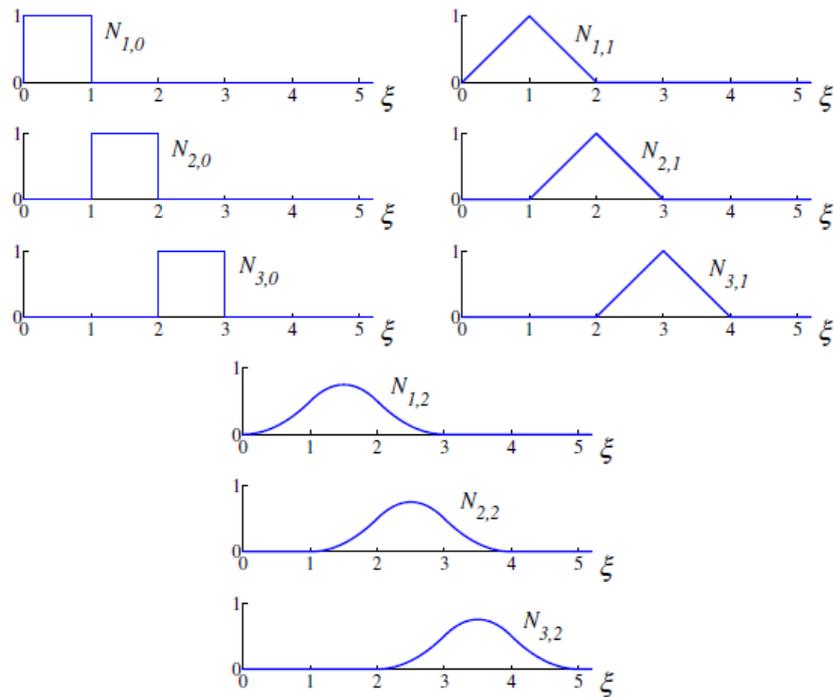


Fig.5 – Funciones base de orden 0, 1, 2 para un vector de nudo uniforme $\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Las funciones base de B-spline cuadráticas (y funciones base NURBS, como se mostrará a continuación) son idénticas, pero corridas. Esto contrasta con las funciones de elementos finitos cuadráticas, las cuales son diferentes para los nodos internos y los del final. Este modelo "homogéneo" sigue a medida que aumentamos el orden de las B-splines y puede causar ventajas significativas en la solución de ecuaciones sobre funciones de elementos finitos, que son bastante "heterogéneas".

Un ejemplo de funciones base cuadráticas para un vector de nudo abierto no uniforme está representado en la Fig.6.

Nótese que las funciones base son interpoladas a los finales del intervalo y también en la $\xi=4$, la ubicación de un nudo repetido, donde sólo la continuidad C^0 es lograda. En el resto, las funciones son C^1 -continuas. En general, las funciones base de orden p tienen $p-1$ derivadas continuas. Si un nudo está repetido k veces, entonces el número de derivadas continuas decrece por k . Cuando la multiplicidad de un nudo es exactamente p , la función base es interpolada.

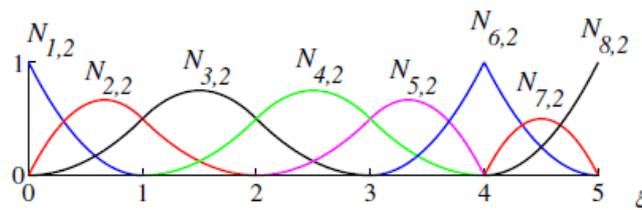


Fig.6 – Funciones base cuadráticas para vector de nudo abierto no uniforme $\Xi = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$

Las propiedades importantes de las funciones base de B-splines son:

(1) Constituyen una partición de la unidad, es decir $\forall \xi$:

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$$

(3)

(2) Cada $N_{i,p}$ es compacto y contenido en el intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$,

(3) Cada función base es no negativa, es decir $N_{i,p}(\xi) \geq 0, \forall \xi$. Por consiguiente, todos los

coeficientes de una matriz de masas calculada de una base de B-spline son mayores, o iguales, a cero.

III.2.3. Curvas B-spline

Las curvas B-spline en R^d son construidas tomando una combinación lineal de funciones base B-spline. Los coeficientes de las funciones base se mencionan como puntos de control. Estos son algo análogos a coordenadas nodales en el análisis de elementos finitos. La interpolación lineal por partes de los puntos de control da el llamado *polígono de control*. En general, los puntos de control no son interpolados por curvas B-spline. Dadas, n funciones base, $N_{i,p}, i = 1, 2, \dots, n$, y los correspondientes puntos de control $B_i \in R^d; i = 1; 2; \dots, n$, una curva B-spline polinomial definida por partes viene dada por:

(4)

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i$$

Un ejemplo de las funciones base cuadráticas consideradas antes es mostrado en la Fig.7. Nótese que la curva puede ser interpolada en el primer y último punto de control, debido al hecho que el vector de nudo es abierto, y también en el sexto punto de control, debido al hecho que la multiplicidad del nudo $\xi = 4$ es igual al orden polinomial. Nótese también que la curva es tangente al polígono de control en el primer, último, y sexto punto de control. La curva es $C^{p-1} = C^1$ -continua en todas partes excepto en la posición del nudo repetido, $\xi = 4$, donde esto es $C^{p-2} = C^0$ -continua.

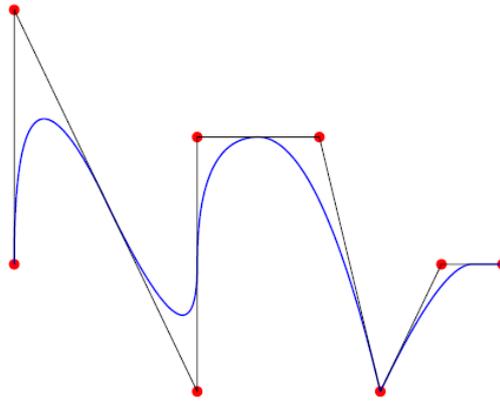


Fig.7 – B-spline, curva cuadrática definida a tozos en R^2 . Función base y vectores de nudo definidos como en Fig.6

Las propiedades importantes de las curvas B-splines son:

- (1) Tienen derivadas continuas de orden $p-1$ en ausencia de nudos repetidos o puntos de control.
- (2) El repetir un nudo o un punto de control k veces, disminuye k veces el número de derivadas continuas.
- (3) Una transformación afín de una curva B-spline es obtenida aplicando la transformación a los puntos de control. (Esto resulta ser la propiedad esencial para satisfacer el conocido "patchtests"). Nos referimos a esta propiedad como la *covarianza afín*.

III.2.4. Refinamiento-h: Inserción de nudo

El análogo al refinamiento-h es la *inserción de nudos*. Los nudos pueden ser insertados sin cambiar una curva geoméricamente o paraméricamente. Dado un vector de nudo, $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ siendo $\xi \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ un nuevo nudo deseado.

Las nuevas funciones base $n + 1$ están formadas recurrentemente, usando (1) y (2), con el nuevo vector de nudo, $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \xi, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$. Los nuevos puntos de control $n+1$, $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+1}\}$, están formados desde los puntos de control originales, $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, por:

$$\bar{B}_i = \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) B_{i-1} \tag{5}$$

Donde:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0, & k+1 \leq i \leq n+p+2 \end{cases} \tag{6}$$

Los valores de nudo ya presentes en el vector de nudo pueden ser repetidos como en el caso de arriba, pero tal y como se describieron en el capítulo anterior, la continuidad de la base se verá reducida. La continuidad de la curva se conserva escogiendo los puntos de control como en (5) y (6). Cada valor de nudo único interior puede aparecer no más de p veces o la curva se hace discontinua. Un ejemplo de inserción de nudo se presenta en la Fig.8. La curva original consiste en B-splines cuadráticas. El vector de nudo es: $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$. La curva se muestra a la izquierda con las funciones base debajo. Un nuevo nudo es insertado en $\bar{\xi} = 0,5$. La nueva curva, mostrada a la derecha, es geoméricamente y paraméricamente idéntica a la curva original, pero las funciones base, debajo de la curva y los puntos de control están cambiados. Hay uno más de cada. Este proceso puede ser repetido para enriquecer el espacio de solución añadiendo más funciones base del mismo orden dejando la curva inalterada. Esta estrategia de subdivisión parece ser análoga a la estrategia clásica de refinamiento-h en el análisis de elementos finitos.

Curva original con $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$

Curva refinada con $\Xi = \{0,0,0,0,5,1,1,1\}$

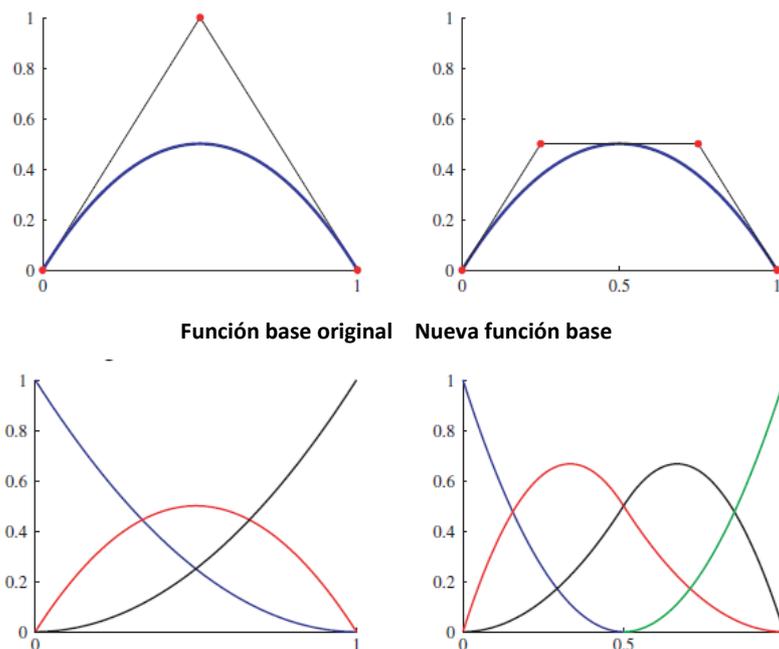


Fig.8 – Inserción de nudo

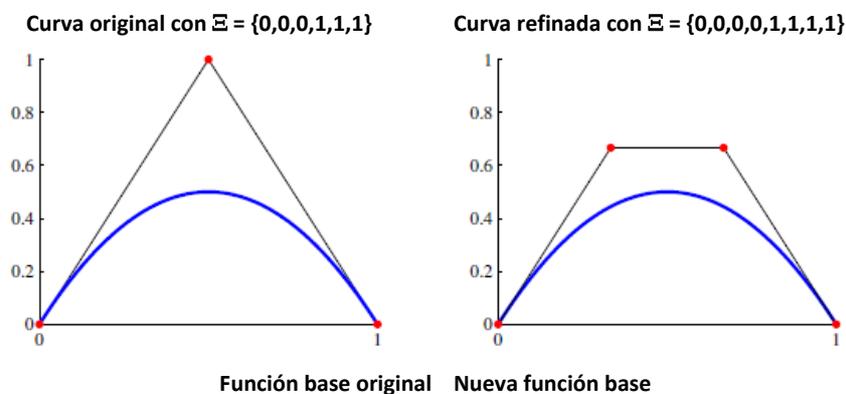
III.2.5. Refinamiento-p: Elevación del orden

El orden polinomial de las funciones base puede ser aumentado sin cambiar la geometría o la parametrización. Es importante notar que cada valor de nudo único en Ξ debe ser repetido para conservar discontinuidades en la p-ésima derivada de la curva que ha sido elevada. El número de nuevos puntos de control depende de la multiplicidad de los nudos existentes.

Esta estrategia de elevación de orden es una analogía del refinamiento-p en el análisis de elementos finitos.

Como en el caso del refinamiento-h por vía de la inserción de nudo, el espacio de solución abarcado por las funciones base de orden elevado contiene el espacio abarcado por las funciones originales. Así pues, es posible elevar el orden sin cambiar la geometría de la curva B-spline, menos obviamente, para dejar la parametrización de la curva intacta. El proceso para hacer esto implica la subdivisión de la curva en muchas curvas de Bézier por la inserción de nudo, elevando el orden de cada uno de estos segmentos individuales, y luego eliminando los nudos innecesarios para combinar los segmentos en unode una curva B-spline de orden elevado. Existen varios algoritmos eficientes que combinan los pasos para minimizar el coste computacional del proceso.

Un ejemplo de elevación de orden se representa en la Fig.9. La curva original y funciones base cuadráticas, mostradas a la izquierda, son las mismas que las consideradas en el ejemplo anterior. Esta vez la multiplicidad de los nudos es aumentada uno. Los números de los puntos de control y de las funciones baseson aumentadas en una unidad. Las posiciones de puntos de control han cambiado, pero la curva elevada es geoméricamente y paraméricamente idéntica a la curva original. Hay ahora cuatro funciones base cúbicas. Las posiciones de los puntos de control para esta curva elevada son diferentes que en el ejemplo anterior (Fig.8).



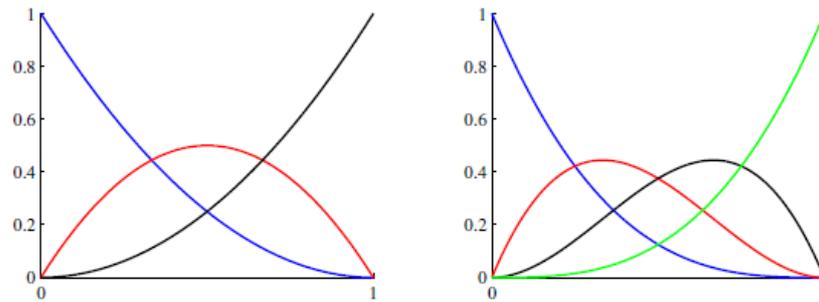


Fig.9 – Elevación de orden

III.2.6. Refinamiento-k:

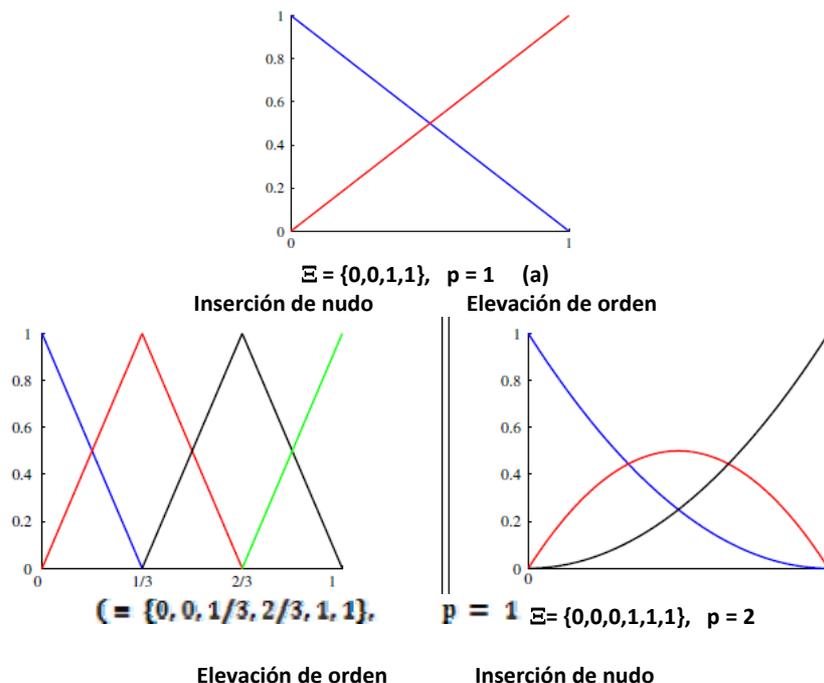
Una estrategia de elevación de orden alternativa aprovecha el hecho que los procesos de inserción de nudo y de elevación de orden no conmutan. Si un único valor de nudo, $\bar{\xi}$ es insertado entre dos nudos distintos en una curva de orden p , el número de las derivadas continuas de las funciones base en $\bar{\xi}$ es $p-1$. Como se ha descrito arriba, si posteriormente elevamos el orden a q , la multiplicidad de cada valor de nudo distinto (incluyendo el nudo justo insertado) aumenta de modo que las discontinuidades en la p -ésima derivada de la base se conservan. Es decir, la base todavía tiene $p-1$ derivadas continuas en $\bar{\xi}$. Si en cambio se elevara el orden de la curva original a q y sólo entonces se insertara un valor de nudo único, la base tendría $q-1$ derivadas continuas en $\bar{\xi}$. Nos referimos a este último procedimiento como refinamiento-k. Esto no tiene ningún análogo en el análisis de elementos finitos estándar.

El concepto de refinamiento-k es importante y potencialmente una aproximación superior al análisis de alta precisión que el refinamiento-p. En el refinamiento-p tradicional hay una estructura no muy homogénea a los vectores debido a las diferentes funciones base asociadas con la superficie, el borde, el vértice y los nodos interiores. Además, hay una proliferación en el número de nodos porque la C^0 -continuidad se mantiene en el proceso de refinamiento. En el refinamiento-k, hay una estructura homogénea donde los trozos y el aumento del número de variables de control, es limitado. Esto se aclarará con un ejemplo pero primero necesitamos una definición. Definamos "elemento" en una dimensión como el espacio entre dos valores de nudo distintos. El número de elementos en una curva será entonces el número de espacios de nudo no nulos en el vector de nudo (por ejemplo, el dominio asociado con el vector de nudo $\Xi = \{0,0,0,1,2,3,3,4,4,4\}$ consiste en cuatro elementos). Esta definición se anticipa a nuestra implementación de elementos finitos basada en NURBS que será descrita más adelante.

Con esta noción de un elemento, considérese los procesos de refinamiento representados en la Fig.10. Se asume que el dominio inicial consiste en un elemento y $p+1$ funciones base (asumiendo un vector de nudo abierto), que luego refinaremos con un proceso de refinamiento-h hasta que tengamos $(n - p)$ elementos y n funciones base. Entonces

realizamos la elevación de orden mediante un proceso de refinamiento-p, manteniendo la continuidad en el nivel (p-1). Esto requiere duplicar cada valor de nudo distinto, añadiendo una función base en cada elemento y por lo tanto, incrementando el número total de funciones base de (n - p) a (2n - p). Después de un total de r elevaciones de orden de este tipo, tenemos [(r+1)·n - r·p]funciones base, donde p es todavía el orden de nuestras funciones base originales. Esto parece ser un número demasiado elevado de funciones cuando uno considera que en la mayoría de los casos de interés práctico el número de elementos será un poco mayor que el orden de la base. Por comparación, se comienza con el mismo dominio de elemento y se continúa por el refinamiento-k.

Es decir, el orden se eleva r veces añadiendo sólo una función base en cada refinamiento, luego mediante un proceso de refinamiento-h hasta que se tenga(n - p) elementos como antes. El número final de funciones base es (n+r), cada uno teniendo continuidad (r+p - 1). Esto asciende a unos enormes ahorros, ya que (n+r) es considerablemente más pequeño que [(r+1)·n - r·p]. Se debe tener presente también que en dimensiones d, estos números son elevados a la potencia de d. También puede haber otras ventajas en las que derivadas continuamente diferenciables pueden conducir a cantidades físicas más exactas, como tensiones y presiones, y un incremento de la continuidad puede, sorprendentemente, conducir a la mejor captura de capas finas. Un ejemplo de este fenómeno es presentado más adelante. Desde luego, si la situación física dicta un cierto nivel más bajo de continuidad en un valor de nudo (por ejemplo, las esquinas en la geometría, propiedades discontinuas materiales, etc...) esto siempre puede ser incorporado en el proceso por la duplicación de nudo, entonces ninguna generalidad se pierde.



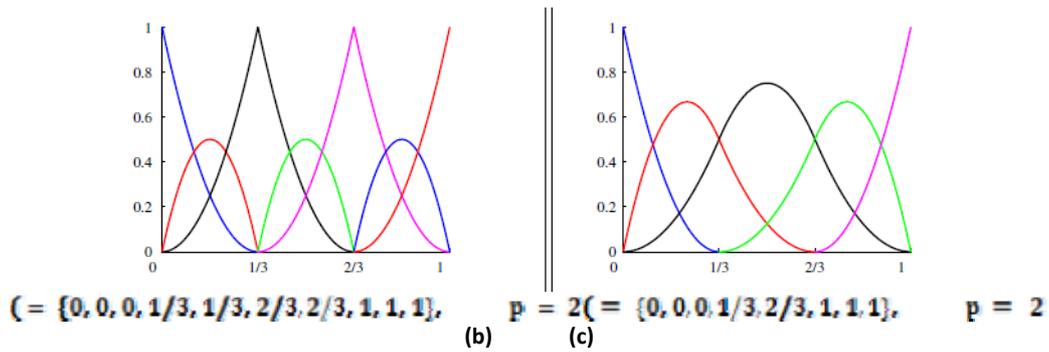


Fig.10 – El refinamiento-k toma ventaja por el hecho que la inserción de nudo y la elevación de orden no son conmutativas. (a) Elemento lineal. (b) Refinamiento-p clásico. Inserción de nudo seguido por elevación de orden dando como resultado siete funciones base cuadráticas definidas por partes que son C^0 en los nudos internos. (c) Refinamiento-k. Elevación de orden seguido de inserción de nudo dando como resultado cinco funciones base cuadráticas definidas por partes que son C^1 en los nudos internos.

III.2.7. Superficies B-spline

Dada una malla de control $\{B_{i,j}\}$, $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,m$ y unos vectores nudo $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ y $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$, una superficie B-spline viene definida por:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \tag{7}$$

Donde $N_{i,p}$ y $M_{j,q}$ son las funciones base de las curvas B-spline. Para los objetivos de integración numérica de vectores construidos a partir de B-Splines, los "elementos" son tomados como los espacios entre nudos, conocidos como, $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$. Ver la Fig.11 para una ilustración de un elemento raíz de bi-unidad estándar y su imagen en el espacio físico. Las integrales vuelven al elemento raíz mediante la fórmula clásica de cambio de variables y las reglas de cuadratura estándar Gaussianas empleadas.

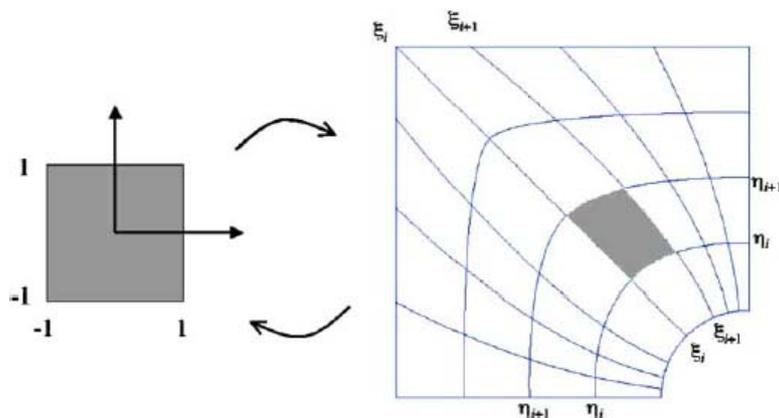


Fig.11 – Elementos reflejados como espacios entre nudos

III.2.8. Sólidos B-spline

Los sólidos B-spline vienen definidos de una manera análoga a las superficies B-spline. Dada una malla de control $\{B_{i,j}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, l$ y unos vectores de nudo $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ y $\mathcal{L} = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{l+r+1}\}$

Un sólido B-spline viene dado por:

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad (8)$$

III.2.9. B-splines racionales

Las entidades geométricas deseadas en R^d pueden ser obtenidas por las transformaciones proyectivas de entidades B-spline en R^{d+1} . En particular, secciones cónicas, como círculos y elipses, pueden ser exactamente construidas por las transformaciones proyectivas de curvas cuadráticas por partes. Esto se ilustra en la Fig.12 en la cual un círculo en R^2 es construido a partir de una curva B-spline cuadrática por partes en R^3 . La transformación proyectiva de una curva B-spline da un polinomio racional de la forma $C_R(\xi) = f(\xi)/g(\xi)$, donde f y g son funciones polinomiales definidas por partes. La construcción de una curva B-spline racional en R^d procede de la siguiente manera. Sea $\{B^w_i\}$ un grupo de puntos de control para una curva B-spline en R^{d+1} con el vector de nudo $\lambda \Xi$.

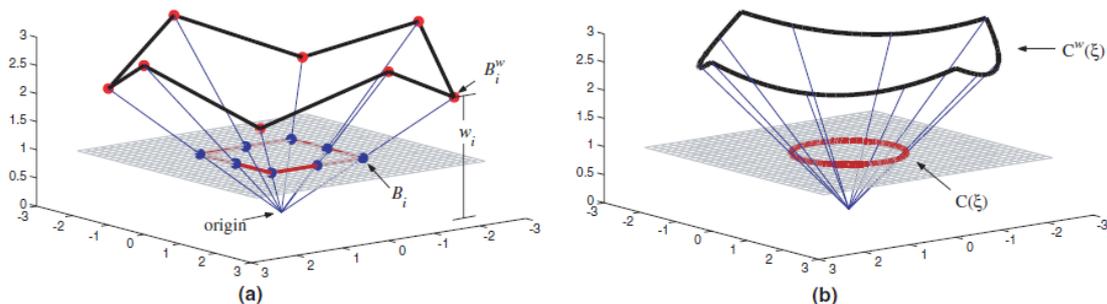


Fig.12 – Círculo en R^2 construido a partir de transformaciones proyectivas de B-splines cuadráticas por partes en R^3 . (a) Transformación proyectiva de “puntos de control proyectivos” que da como resultado puntos de control.

Los pesos w_i son la componente z de B^w_i . (b) Transformación proyectiva de una curva B-spline $C^w(\xi)$ que da una curva NURBS $C(\xi)$. Ver Apéndice A.1 para más detalles.

Los puntos de control son llamados puntos de control "proyectivos" para la curva NURBS deseada en R^d . Los puntos de control en R^d son derivados a partir de los puntos de control proyectivos a partir de las relaciones siguientes:

$$(B_i)_j = \frac{([B_i^w])_j}{w_i} \quad j = 1, \dots, d \quad (9)$$

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (10)$$

Donde $(B_i)_j$ es la componente j -ésima del vector B_i y w_i es referido como el peso i -ésimo. En la Fig.12a, los pesos w_i son las coordenadas verticales de los puntos de control que definen la curva B-spline cuadrática por partes en R^3 . Las funciones base racionales y la curva NURBS vienen dadas por:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)B_i} \quad (11)$$

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)B_i \quad (12)$$

Las superficies y sólidos racionales son definidos análogamente en términos de funciones base racionales:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}} \quad (13)$$

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}} \quad (14)$$

Como ejemplo, la Fig.13 muestra una malla de control y la correspondiente descripción de superficie NURBS de un toroide. Las descripciones de las construcciones en las Fig.12 y 13 están reflejadas en el Apéndice A.1 y A.2, respectivamente.

Las propiedades importantes de las NURBS son:

- (1) Las funciones base de las NURBS forman una partición de la unidad.
- (2) La continuidad y soporte de las funciones base de las NURBS son las mismas que para las B-splines.
- (3) Las transformaciones afines en el espacio físico son obtenidas aplicando la transformación a los puntos de control, es decir, NURBS posee la propiedad de covarianza afín.
- (4) Si los pesos(w) son iguales, las NURBS se convierten en B-splines(por ejemplo, polinomios definidos por partes).
- (5) Las superficies y sólidos NURBS son las transformaciones proyectivas del producto tensor de entidades polinómicas definidas por partes.

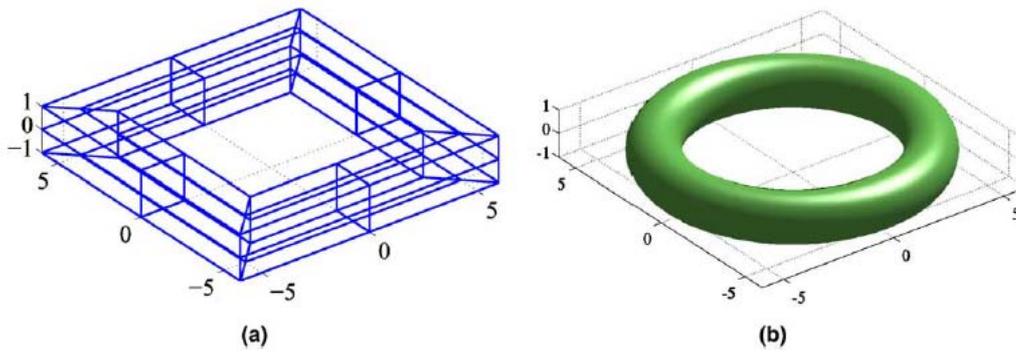


Fig.13 – (a) Malla de control para una superficie toroidal y (b) Superficie toroidal

III.3. NURBS como base para el análisis

Un marco de análisis basado en NURBS consiste en los aspectos y características siguientes:

- (1) Una malla para un trozo de NURBS viene definida por el producto de vectores de nudo. Por ejemplo, en tres dimensiones una malla viene dada por: $\Xi \times H \times \mathcal{L}$
- (2) Los espacios entre nudos subdividen el dominio en "elementos".
- (3) El soporte de cada función base consiste en un pequeño número "de elementos".
- (4) Los puntos de control asociados con las funciones base definen la geometría.
- (5) El concepto isoparamétrico es invocado, es decir los campos en cuestión (por ejemplo, el desplazamiento, la velocidad, la temperatura, etc...) son representados en términos de las mismas funciones base que la geometría. Los coeficientes de las funciones base son los grados de libertad, o variables de control.
- (6) Las estrategias de refinamiento de malla son desarrolladas a partir de una combinación de inserción de nudo y técnicas de elevación de orden. Esto permite métodos análogos de refinamiento-h y refinamiento-p, y la nueva posibilidad de refinamiento-k.
- (7) Los vectores construidos a partir de trozos de NURBS isoparamétricos pueden ser ensamblados dentro de vectores globales de la misma manera que los elementos finitos. La compatibilidad de los trozos de NURBS se logra empleando el mismo borde NURBS y representaciones superficiales a ambos lados de la interfaz del trozo; ver la Fig.14a. Esto da lugar a un método estándar continuo Galerkin. El refinamiento necesariamente se propaga de trozo a trozo. Hay dos alternativas correspondientes a la Fig.14b. Una es el método discontinuo Galerkin, que puede ser empleado a nivel de "trozos". La compatibilidad se cumple débilmente por la formulación variacional. La otra debe utilizar ecuaciones restrictivas para los puntos de control y variables de control para lograr la compatibilidad puntual en las interfaces de los trozos. El refinamiento local es un asunto de investigación importante y desafiante.

(8) El camino más fácil para establecer las condiciones de contorno Dirichlet es aplicárselas a las variables de control. En el caso de condiciones homogéneas Dirichlet, este resultado, en realidad, raya la satisfacción. En el caso de condiciones no homogéneas Dirichlet, los valores de contorno deben ser aproximados por funciones situadas dentro del espacio NURBS. Esto nos hace satisfacer las condiciones de contorno. Las ecuaciones restrictivas también pueden ser escritas para asegurar la satisfacción de "fuerte" exactitud, interpolada, o el cuadrado mejor definido, para las condiciones de contorno. Una formulación alternativa de las condiciones Dirichlet puede estar basada en la satisfacción "débil", un rasgo estándar del método discontinuo Galerkin. Dada la variedad de posibilidades, las condiciones de contorno Dirichlet tienen que ser investigadas más a fondo para determinar estrategias óptimas. Las condiciones de contorno de Neumann están satisfechas de manera natural, precisamente del mismo modo que en las formulaciones estándar de elementos finitos;

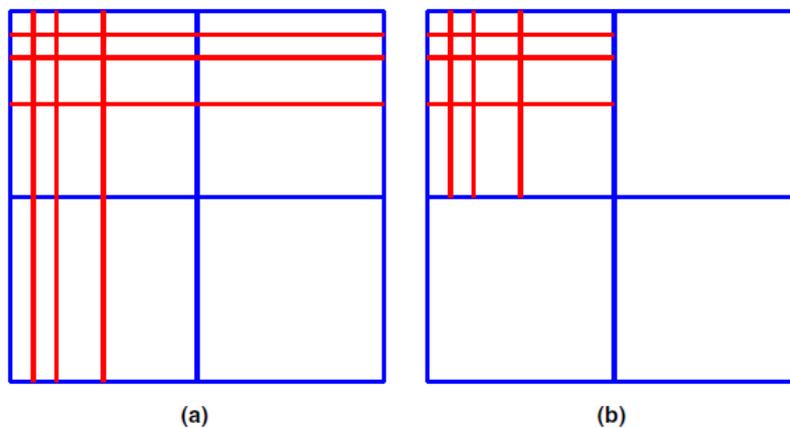


Fig.14 – (a) Refinamiento global usando el método continuo de Galerkin y (b) refinamiento local usando el método discontinuo de Galerkin o ecuaciones restrictivas por partes.

Observación. Es bien sabido, que las funciones de interpolación típicas de elementos finitos oscilan en el intento de encajar datos discontinuos. Un ejemplo es ilustrado en la Fig.15a donde los polinomios Lagrange de orden tres, cinco, y siete interpolan una discontinuidad representada por ocho puntos en R^2 . Nótese que a medida que el orden aumenta, la amplitud de las oscilaciones aumenta. Esto a veces es mencionado como el *fenómeno Gibbs*.

Las NURBS se comportan de manera muy diferente cuando los datos son vistos como puntos de control. En la Fig.15b las curvas NURBS son monótonas, ilustrando la propiedad de las NURBS de la *variación decreciente*. Esta propiedad tiene ventajas al representar capas cerradas. Un ejemplo que ilustra esto será presentado más tarde.

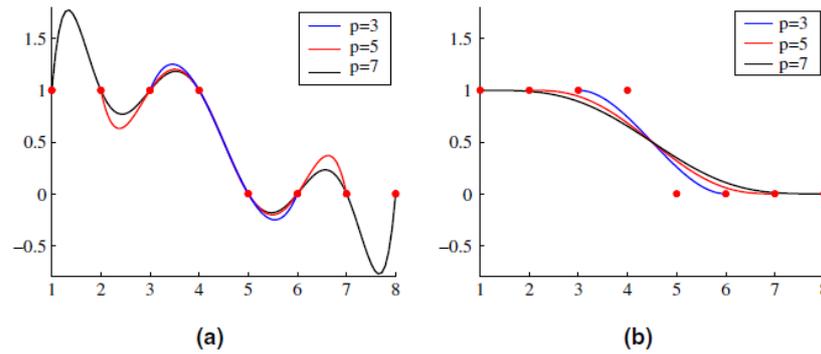


Fig.15 – (a) Interpolación Lagrange que oscila ante datos discontinuos y (b) NURBS presenta una disminución de la variación de los mismos datos

Comparación del análisis de elementos finitos y el análisis isogeométrico basado en NURBS

Analisis por elementos finitos	Análisis isogeométrico
Puntos nodales	Puntos de control
Variables nodales	Variables de control
Malla	Nudos
Naturaleza interpolataria de la base	Naturaleza no interpolatoria de la base
Geometría aproximada	Geometría exacta
Base polinomial	Base NURBS
Fenomeno Gibbs	Dismunución de la variación
Subdominios	Por partes ("a trozos")
	Soporte compacto
	Partición de la unidad
	Concepto isoparamétrico
	Covarianza afín
	Patch tests satisfactorios

Tabla 1

Un resumen de elementos finitos similares y distintos, y de conceptos de análisis isogeométrico viene presentado en la Tabla 1. Un rasgo pronunciado de análisis isogeométrico, compartido por los métodos "Meshless", es la naturaleza no-interpolatoria de la base. Otros rasgos compartidos son la partición de la unidad y soporte compacto.

III.4. Análisis Estructural Isogeométrico

Los trozos de NURBS isoparamétricos representan todos los movimientos de un cuerpo rígido y sus estados de tensión constantes exactamente. Esto viene de las propiedades de las NURBS en lo que concierne a transformaciones afines. Las estructuras ensambladas a partir de trozoscompatibles de NURBS pasan los "patchtests" estándar. (Los "patchtests" están considerados por los ingenieros como modos prácticos para evaluar si realmente los elementos finitos son convergentes o no, y si realmente han sido programados correctamente). A continuación, presentamos soluciones numéricas para sólidos lineales elásticos y estructuras. La

formulación Galerkin de la elasticidad lineal es la empleada. El primer ejemplo es bidimensional y el resto es tridimensional. Varios de los cálculos implican cáscaras delgadas (thinshell). Son modelados como sólidos NURBS y no se emplean suposiciones de celda. La cuadratura gaussiana es usada sobre estos elementos. La regla básica que se empleaba es usar la regla de orden más bajo que exactamente integraría el integrando asumiendo que las NURBS son B-splines del mismo orden polinomial y los determinantes Jacobianos son constantes. Esto representa una aproximación en el caso de las NURBS. Para evaluar su validez, se realizan pruebas en las cuales sistemáticamente se aumenta el número de puntos de cuadratura. Para mallas suficientemente finas no son perceptibles ningunas diferencias en el resultado. Sin embargo, mallas gruesas requieren más puntos de integración debido a variaciones grandes en el plano geométrico.

Se necesita realizar más investigación para determinar una estrategia sólida que cubra todas las situaciones.

Observación. Se emplean tanto "solvers" de ecuación directa como "solvers" de ecuación iterativa lineal algebraica. El "solver" directo tiene una arquitectura de perfil y era típicamente más eficiente para estructuras de cáscara que el iterativo, diagonalmente preconditionado, conjugando el "solver" de gradiente. Sin embargo, no es el caso para los sólidos NURBS. El código que se desarrolla es restringido a un procesador único y muchos de los casos de malla más fina no pueden ser solucionados con "solver" directo porque exceden la memoria disponible. Los ratios de aspecto de elementos en algunos casos son bastante grandes y el número de ecuaciones se aproxima a un cuarto de millón. Sin embargo, en todos los casos el procedimiento iterativo converge sin dificultad. No se ha probado los casos de elementos finitos correspondientes, pero nos sorprendería si la iteración se comportara con fiabilidad también en estos casos.

Por consiguiente, los casos NURBS pueden ser mejor condicionados que los casos de elementos finitos correspondientes. Las pruebas que tenemos para esto son bastante escasas pero pensamos que esto garantiza aún más investigación.

III.4.1. Placa infinita con agujero circular bajo tensión constante en el plano en la dirección x

En este ejemplo bidimensional, se presenta en detalle el análisis NURBS de un problema en la mecánica sólida que tiene una solución exacta. También sistemáticamente se explora el refinamiento-h y -k. La placa infinita es modelada por un cuarto de placa finita. La solución exacta evaluada en el contorno del cuarto de placa finita, es aplicada como las condiciones de contorno de Neumann y viene dada aquí para la referencia:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{T_x}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{T_x}{2} \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{T_x}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{T_x}{2} \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \quad (16)$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{T_x}{2} \left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \quad (17)$$

Donde T_x es la magnitud de la tensión aplicada para el caso de la placa infinita. El sistema es ilustrado en la Fig.16. R es el radio del agujero, L es la longitud del cuarto de la placa finita, E es el módulo de Young, ν es el ratio de Poisson. Una base racional cuadrática es el mínimo orden capaz de representar un agujero circular.

La malla más gruesa, $\Xi \times H$, es definida por los vectores de nudo:

$$\Xi = \{0,0,0,0,5,1,1,1\} \quad (18)$$

$$H = \{0,0,0,1,1,1\} \quad (19)$$

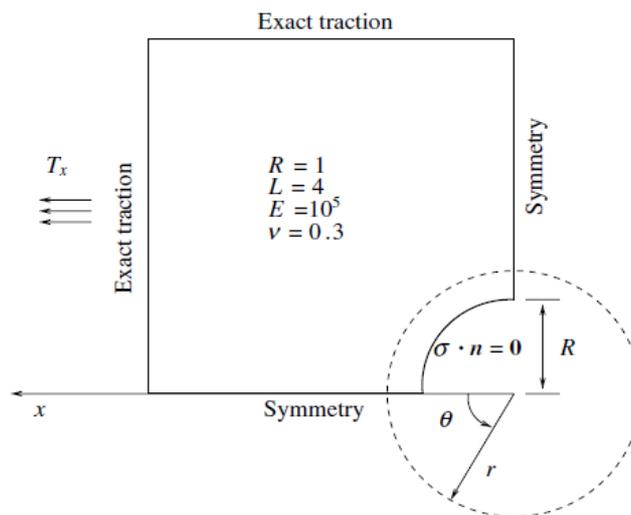


Fig.16 – Placa elástica con un agujero circular – definición del problema

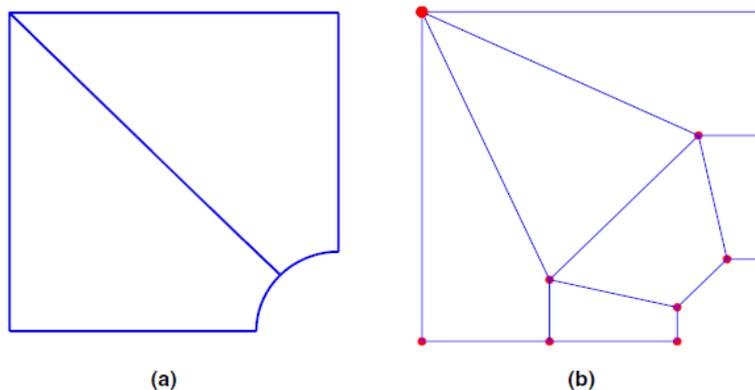


Fig.17 – Malla y Malla de control para la placa elástica con agujero circular. Dos puntos de control en la misma posición crean la esquina superior izquierda. Los valores de nudo definen los “elementos”, no la malla de control.

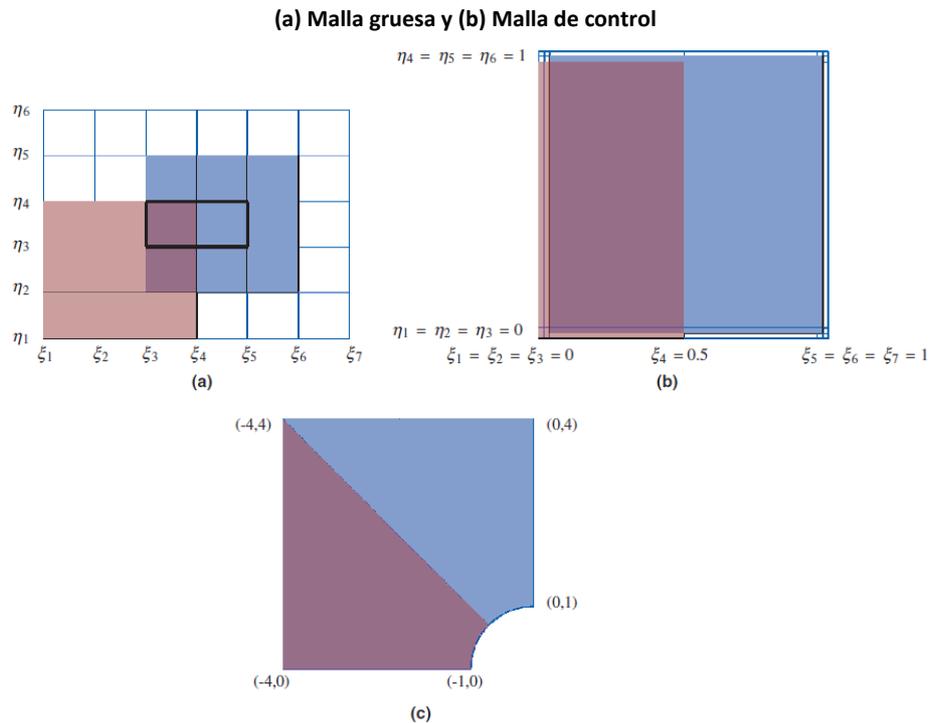


Fig.18 – Diferentes vistas de la malla de control. El soporte de las funciones base racionales cuadráticas consiste en 3x3 espacios entre nudos. Los vectores de nudo abierto requieren que los espacios entre nudos cerca de la frontera tengan valor 0. (a) Espacio mediante índices (b) Espacio paramétrico (c) Espacio físico

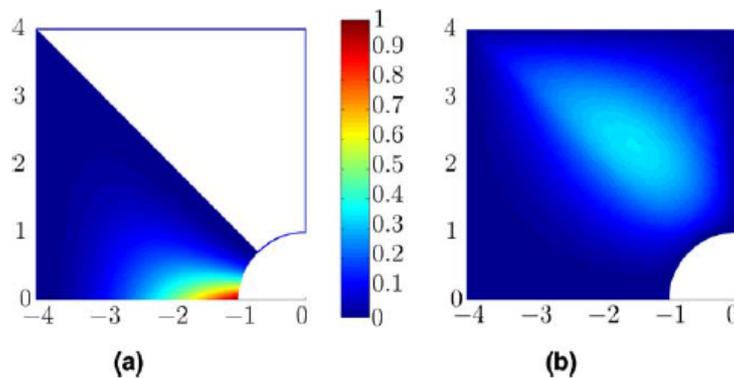


Fig.19 – Contornos de la función. (a) La primera tiene el soporte en un elemento y asume el valor 1 en $x=-1, y=0$
 (b) La segunda tiene el soporte en ambos elementos. La amplitud máxima de ésta es aproximadamente 0,4

La geometría exacta es representada con sólo dos elementos, como se puede ver en la Fig.17a. La malla de control correspondiente se muestra en la Fig.17b. Un resumen de los datos geométricos vienen dados en el Apéndice A3. Un punto de control repetido es responsable de la esquina izquierda superior. La Fig.18 representa tres vistas diferentes de la malla y el soporte de dos de las funciones base. Estas vistas son el espacio de índice, el espacio paramétrico y el espacio físico. El espacio de índice ilustra como sólo las partes de las funciones base son

soportadas por el espacio físico, identificadas por la línea del rectángulo oscuro (por ejemplo, $[\xi_3, \xi_5] \times [\eta_3, \eta_4]$) en la Fig. 18a. Esto es debido a los vectores de nudo abierto.

Por consiguiente, los espacios entre nudos cerca del contorno miden cero y deben ser ignorados en la fase de formación del elemento.

En la Fig.19 se muestran las representaciones de contorno de las mismas dos funciones. En la Fig.20 se muestran las seis primeras mallas usadas en el análisis. El esquema usado para seleccionar nudos para la inserción es descrito en el Apéndice B.

Las representaciones de contorno de los resultados obtenidos en las mallas 1, 4, y 7 están presentadas en la Fig.21. La tensión aplicada es $T_x = 10$ y los contornos muestran que la concentración de tensión de $\sigma_{xx} = 30$ en el borde del agujero (por ejemplo, en $r = R, \theta = 3/2\pi$) se obtiene a medida que la malla es refinada.

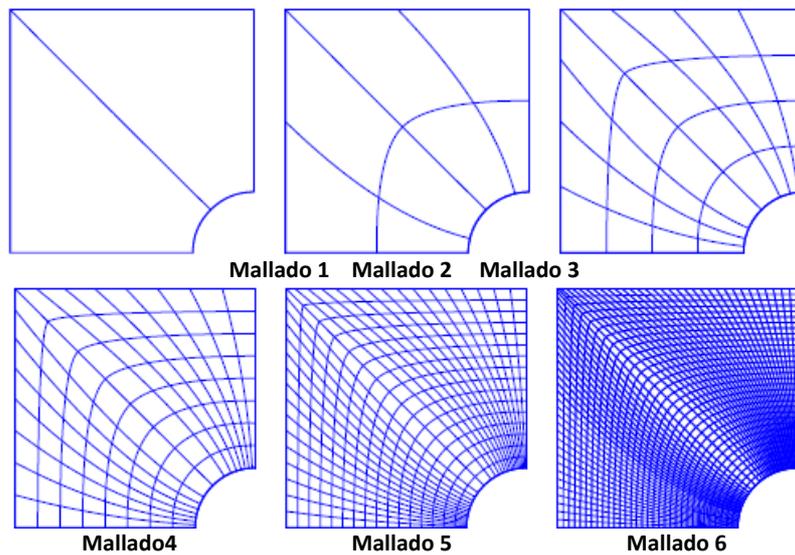
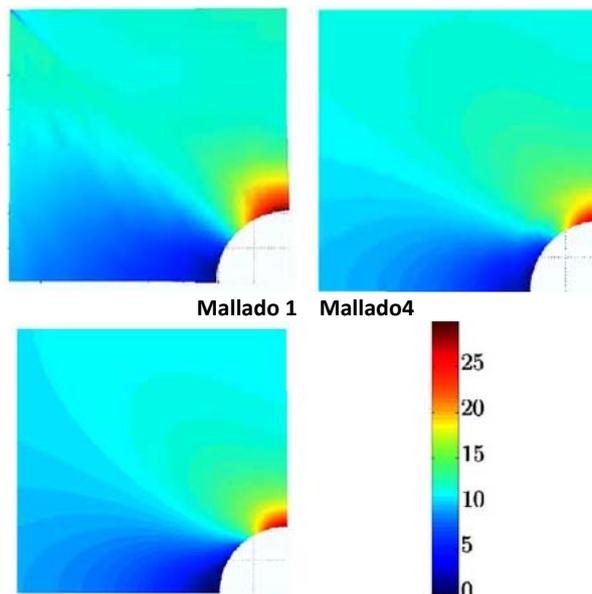


Fig.20 – Placa elástica con agujero circular. Mallado producido por refinamiento-h (inserción de nudos)



Mallado 7

Fig.21 – Representaciones de contorno de las σ_{xx} obtenidas con NURBS cuadráticas. La tensión aplicada es $T_x = 10$ y la concentración de tensiones es $\sigma_{xx} = 30$ en $r=R, \theta=3/2\pi$

Los resultados de la convergencia en la norma de tensión L^2 son mostrados en la Fig.22. Las NURBS cúbicas y cuárticas se obtienen mediante la elevación del orden de las NURBS cuadráticas sobre la malla más gruesa. Dado que la parametrización del trazado geométrico no cambia, el algoritmo de refinamiento-h genera mallas idénticas para todos los órdenes polinomiales. Por consiguiente, la continuidad de la base es C^{p-1} en todas partes, excepto a lo largo de la línea que une el centro del borde circular con la esquina superior izquierda del dominio (ver Fig.17a). Allí es C^1 tal y como viene dictado por la malla más gruesa que emplea la parametrización racional cuadrática. El parámetro de malla, h_{max} , es definido como la distancia máxima, en el espacio físico, entre posiciones de nudo diagonalmente opuestas. Como se puede ver, los ratios de convergencia L^2 de la tensión para NURBS cuadráticas, cúbicas, y cuárticas son aproximadamente 2, 3, y 4, respectivamente.

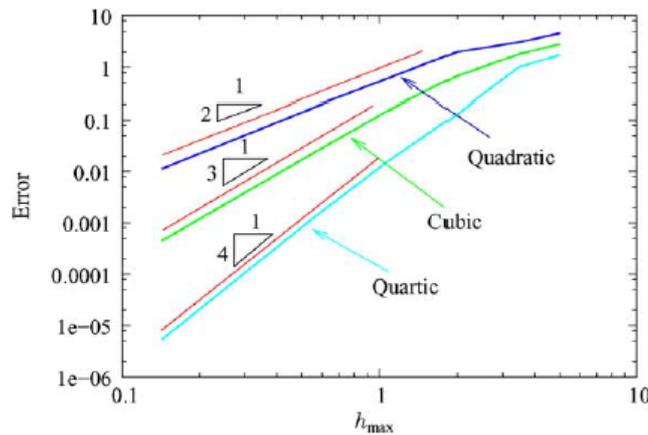


Fig.22 – Error medido en la norma de tensión L^2 vs parámetro de mallado

La convergencia de la desviación estándar de los pesos (w) para elementos racionales cuadráticos es representada en la Fig.23. Como se puede ver, la desviación estándar converge a cero, queriendo decir que los pesos convergen a una constante dentro de cada elemento y las NURBS se aproximan a las B-splines polinomiales. El modo geométrico de ver esto es notar que la malla en el espacio físico (por ejemplo, R^2) puede ser "levantada" al espacio proyectivo (por ejemplo, R^3). Como los elementos en el espacio proyectivo se reducen en tamaño, los puntos de control proyectivos están más juntos. Como los pesos son solamente la tercera componente de los puntos de control proyectivos, dentro de un elemento ellos necesariamente convergen a un valor constante. Este argumento geométrico sugiere que el ratio de convergencia debería ser 0 (h_{max}), como se observa en la Fig.23.

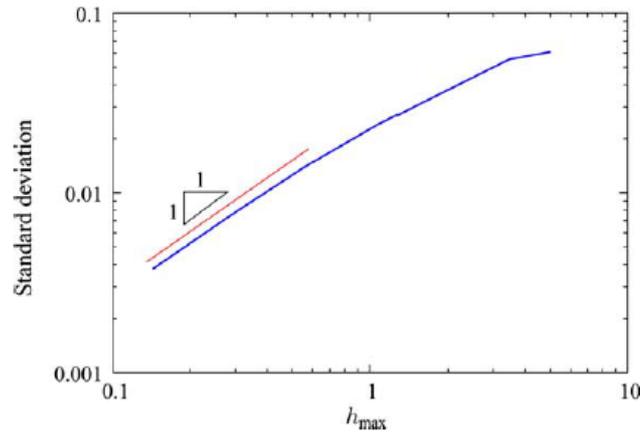


Fig.23 - Desviación estándar de pesos (w) para elementos racionales cuadráticos vs parámetros de mallado

III.4.2. Cilindro circular sólido sujeto a cargas de presión interna.

La especificación del problema se muestra en la Fig.24. Las condiciones de tensión plana son asumidas para sostenerse en la dirección axial. Esto es una manera simple de obtener una solución exacta a este problema, asumiendo que la presión varía en la mayor parte de manera circunferencial. Proporcionamos la solución exacta para el caso de la presión constante como una referencia:

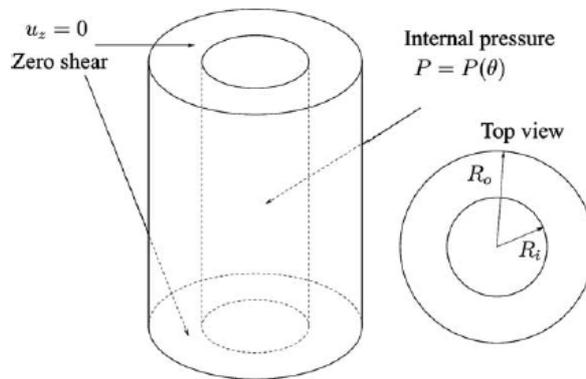
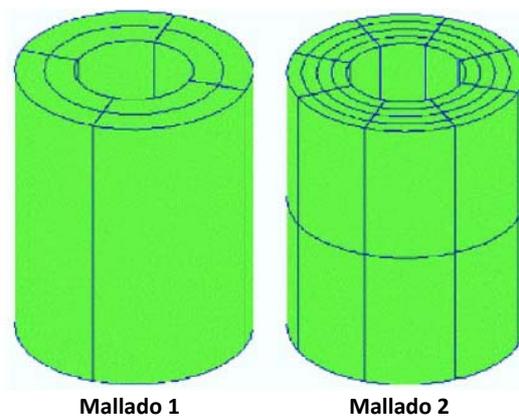


Fig.24 – Cilindro grueso presurizado internamente



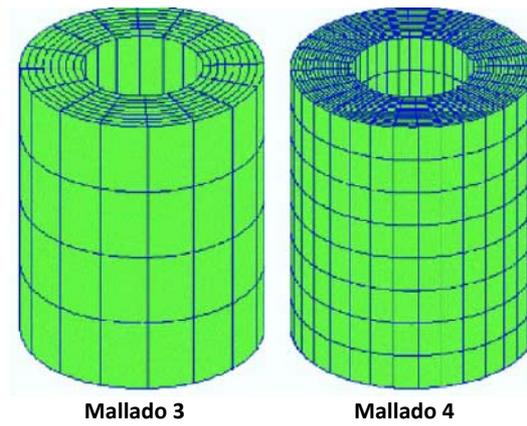


Fig.25 – Mallado del cilindro sólido circular producido mediante el método de refinamiento-h (inserción de nudo)

$$u_r(r) = \frac{1}{E} \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \left((1-\nu)r + \frac{R_o^2(1+\nu)}{r} \right) \quad (20)$$

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} - \frac{PR_i^2 R_o^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \quad (21)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{PR_i^2}{R_o^2 - R_i^2} + \frac{PR_i^2 R_o^2}{r^2(R_o^2 - R_i^2)} \quad (22)$$

Las mallas desarrolladas mediante refinamiento-h se muestran en la Fig.25. Los cálculos NURBS para la malla más gruesa vienen dados en el Apéndice 4.

Los resultados para el caso de presión constante, empleando NURBS cuadráticas, son presentados en la Fig.26. En la Fig.26a la deformación axisimétrica del cilindro es claramente evidente para la Malla 4. La respuesta axisimétrica es lograda para todas las mallas. Los errores en el desplazamiento radial son representados en la Fig.26b. Para la primera malla (más gruesa) el error máximo por el grosor de la pared es aproximadamente del 1%. Para la segunda malla esto es aproximadamente del 0,1% y para la tercera del 0,01%. Las soluciones de orden elevado empleando NURBS cúbicas y cuárticas son, para todos los objetivos prácticos, exactas en todas las mallas. De ahí, que los resultados para estos casos no sean presentados.

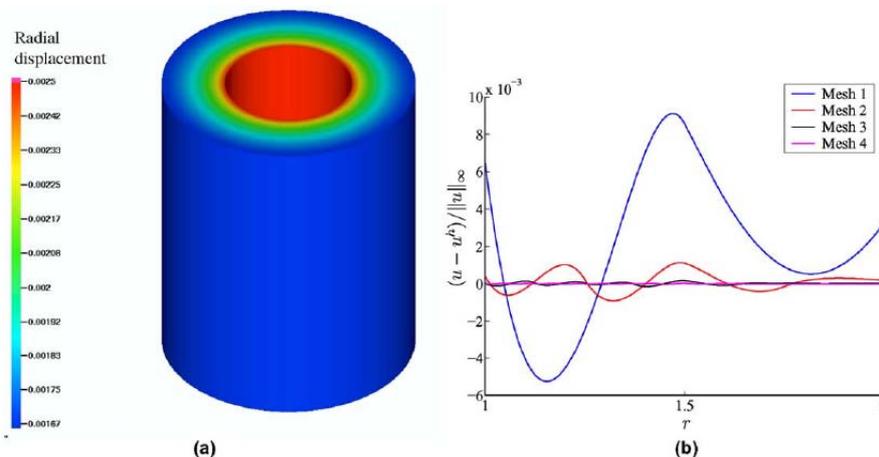


Fig.26 – Cilindro sólido circular sometido a presión interna constante. (a) Contornos del desplazamiento radial (b)

Convergencia del desplazamiento radial

Para determinar los ratios de convergencia, una carga algo más compleja ha sido considerada en la cual la presión interna es asumida para $\text{variar}(\cos(2\theta))$. NURBS cuadráticas, cúbicas, y cuárticas ha sido consideradas.

Los casos cúbicos y cuárticos han sido obtenidos del caso cuadrático por el refinamiento-k, en ese caso el grado de continuidad aumenta a C^2 y C^3 , respectivamente. Los ratios de convergencia del error medido según la norma de energía son presentados en la Fig.27. Como en el ejemplo de la placa con un agujero circular, los ratios de convergencia para elementos NURBS cuadráticos, cúbicos, y cuárticos son 2, 3, y 4, respectivamente.

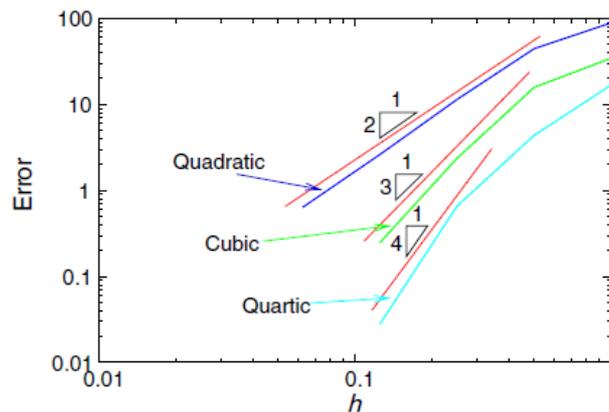


Fig.27 - Cilindro sólido circular sometido a variación de la presión interna. Convergencia del error medido para NURBS cuadráticas, cúbicas y cuárticas.

III.4.3. Sólido "en forma de herradura" sujeto a desplazamientos del bordeiguales y opuestos en el plano

La Fig.28a representa el sistema. Las superficies superiores están desplazadas en las direcciones mostradas. Esto introduce una asimetría en la carga que es visible en los contornos de tensión. Las mallas 1, 3, y 5 son representadas en las Fig.28b y 29. El procedimiento estándar de refinamiento-h, tal y como está descrito en el Apéndice B, es empleado para obtener mallas más finas. Está claro para este caso que pueden ser simplemente generadas mallas refinadas de buena calidad, una vez que una geometría exacta parametrizada es construida en la forma de la primera malla. La Fig.30 muestra las representaciones de la muestra de contornos de tensión para una solución cuadrática NURBS sobre la Malla 5. Nótese la suavidad de los contornos de tensión.

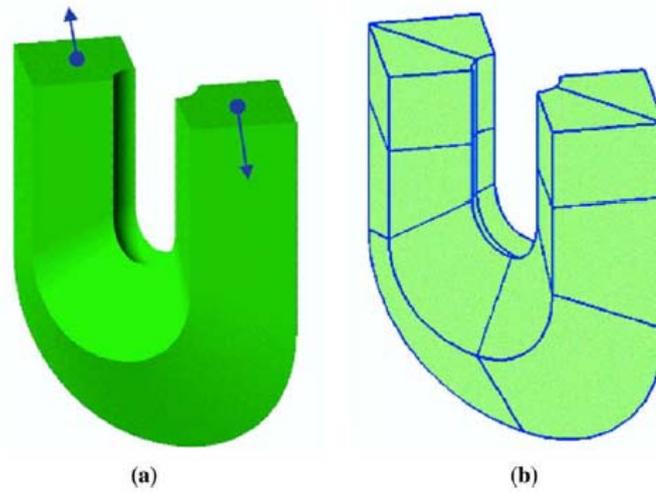


Fig.28 – Sólido “en forma de herradura” sujeto a desplazamientos del borde iguales y opuestos. (a) Presentación del problema. (b) Malla más gruesa

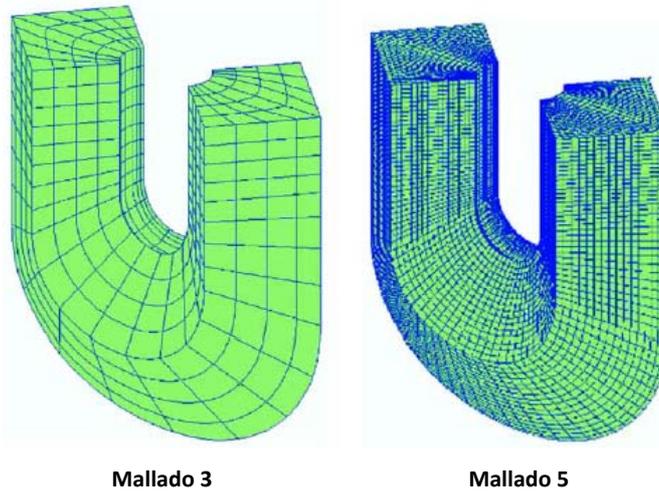


Fig.29 – Otros mallados para el sólido “en forma de herradura”

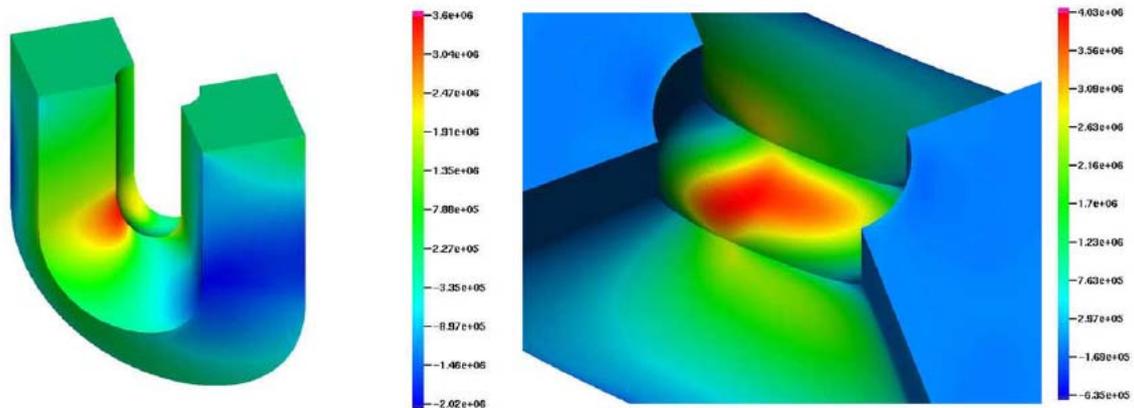


Fig.30 – Sólido “en forma de herradura”. Representación de contorno de los componentes de la tensión

III.4.4. Cáscara cilíndrica fina con extremos fijos sujetos a presión interior constante

El planteamiento del problema y el perfil de desplazamiento radial se muestran en la Fig.31. Nótese que los extremos fijos crean capas de contorno que son difíciles de capturar con exactitud con métodos de elementos finitos de bajo orden. La solución exacta a la teoría de celda viene dada en Timoshenko and Woinowsky-Krieger para la tensión plana y se proporciona como referencia en la bibliografía.

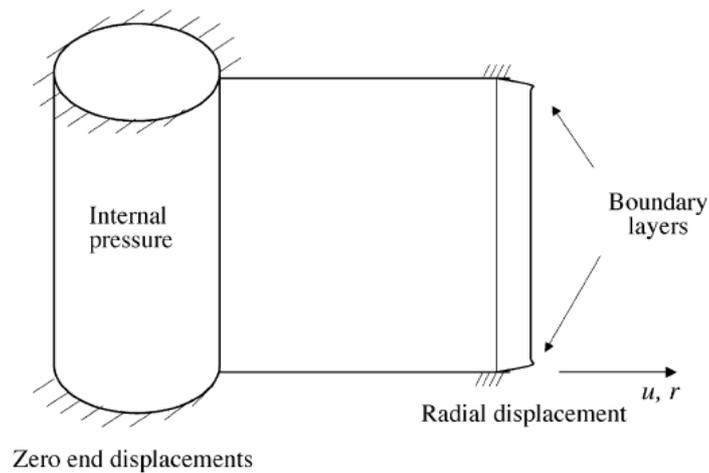


Fig.31 – Cáscara cilíndrica fina. Planteamiento del problema y perfil del desplazamiento.

$$u(x) = -\frac{PR^2}{Et} \left(1 - C_1 \sin \beta x \sinh \beta x - C_2 \cos \beta x \cosh \beta x \right) \quad x \in \left(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right) \quad (23)$$

$$C_1 = \frac{\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha}{\sinh \alpha \cosh \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (24)$$

$$C_2 = \frac{\cos \alpha \sinh \alpha + \sin \alpha \cosh \alpha}{\sinh \alpha \cosh \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} \quad (25)$$

$$\beta = \left(\frac{Et}{4R^2D} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \alpha = \frac{\beta L}{2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (26)$$

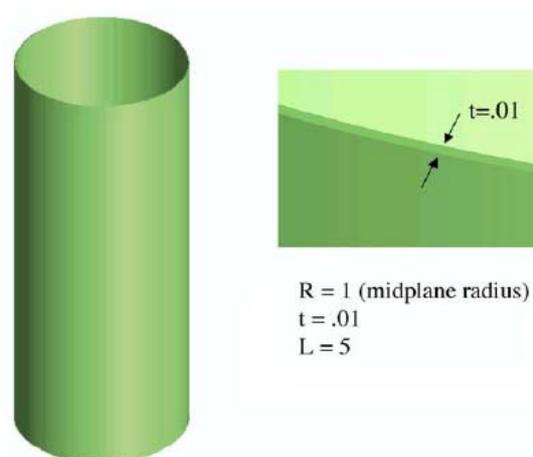


Fig.32 – Geometría de la cáscara cilíndrica fina

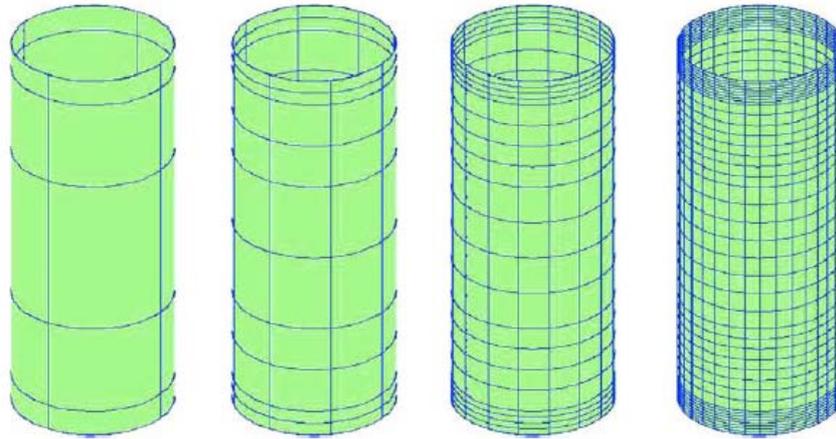


Fig.33 – Mallados de la cáscara cilíndrica fina. Mallados 1-4

El módulo de Young y el ratio de Poisson en esta solución tienen que ser sustituidos por $\frac{E}{1-\nu^2}$

y $\frac{\nu}{1-\nu^2}$ respectivamente, para representar las condiciones de extremos fijos asumidas aquí. Se

muestra la geometría de la celda en la Fig.32. Nótese que el radio de relación de grosor es 100. Las mallas están representadas en las Fig.33 y 34. Las cuatro primeras mallas están representadas en la Fig.33. Nótese el refinamiento añadido en la región de la capa de contorno. A pesar de que la celda es muy fina, se modela con elementos sólidos.

La resolución de malla por grosor para la Malla 1 se muestra en la Fig.34. Nótese que hay dos elementos en la dirección radial y cuatro en la dirección circunferencial. Como la malla superficial está refinada, el número de elementos en la dirección circunferencial aumenta en consecuencia. Sin embargo, el número de elementos en la dirección radial están fijados en dos en todas las partes del proceso de refinamiento. Las funciones empleadas para este problema son NURBS cuadráticas. Su aspecto en la dirección radial es presentado en la Fig.34a. En la Fig.35 están representados contornos de desplazamiento radiales para las mallas 2-5. Nótese que, para todas las mallas, una respuesta perfectamente axisimétrica es obtenida. Nótese también el aspecto de las capas de contorno. La Fig.36 muestra la convergencia del perfil de desplazamiento radial. La malla 1 es demasiado gruesa para representar tanto las capas de contorno como la meseta entre ellas. La malla 3 representa la meseta pero las capas de contorno no son capturadas con exactitud. La solución de la Malla 5 es indistinguible de la solución teórica de cáscara exacta. En el detalle a la derecha, la solución de cáscara exacta y la solución de la Malla 5 se ven superpuestas en la región de la capa de contorno.

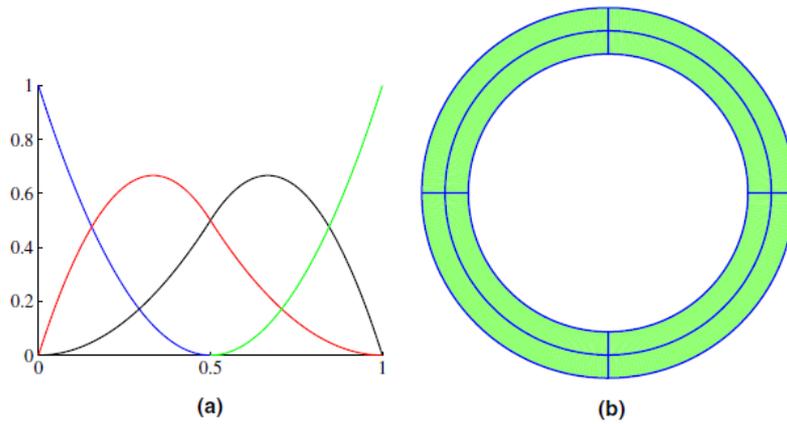


Fig.34 – Cáscara cilíndrica fina: (a) Funciones base cuadráticas definidas mediante el espesor y (b) Vista final de la malla gruesa



Fig.35 – Cáscara cilíndrica fina. Mallados 2-5. Representación del contorno del desplazamiento radial

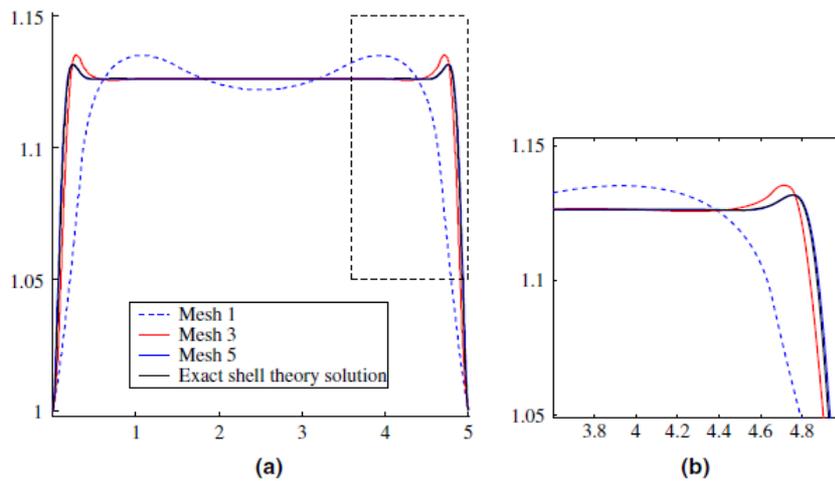


Fig.36 – Cáscara cilíndrica fina. Convergencia del desplazamiento radial hacia la solución teórica. La Malla 5 es indistinguible de la solución teórica de cáscara exacta. Las NURBS son capaces de resolver con alta precisión las capas de contorno de la cáscara. (a) Desplazamiento radial global y (b) detalle de la capa de contorno

III.4.5. "Pista de Obstáculos"

Llamadapista de obstáculos consiste en tres problemas, el "bóveda de Scordelis-Lo", el "hemisferio pellizado", y el "cilindro pellizado". Estos problemas, y su importancia para la evaluación de los procedimientos de análisis de cáscaras han sido extensivamente discutidos. Las descripciones del problema presentadas en las Fig.37-39, están adaptadas de las publicaciones de Felippa y Belytschkorelatadas en la bibliografía. Como en el ejemplo anterior, se emplean dos elementos cuadráticos NURBS en la dirección del grosor (ver Fig.34), mientras que el refinamiento-h y el refinamiento-k son utilizados para el mallado de la superficie. Para el análisis de convergencia de todos los casos se emplean superficies NURBS de cuadráticas a quinticas. En un caso, el "hemisferio pellizado", una solución de superficie de un elemento, que comienza con cuadráticas racionales, el orden más bajo NURBS capaz de representar exactamente la geometría esférica, y culmina con el 10º orden NURBS, se usa para evaluar la convergencia. Este análisis tiene el cariz de lo generalmente mencionado "métodos espectrales", que son procedimientos exactos y eficientes, típicamente utilizados para realizar los estudios detallados de fenómenos geoméricamente simples pero físicamente complejos, como la turbulencia. La convergencia es evaluada comparando el desplazamiento de ciertos puntos en la celda con soluciones de referencia presentadas en Belytschk. Las representaciones de contorno de las soluciones para elementos cuadráticos y para las mallas más finas estudiadas son presentadas en las Fig.40-42. Nótese que en cada caso los contornos son muy lisos.

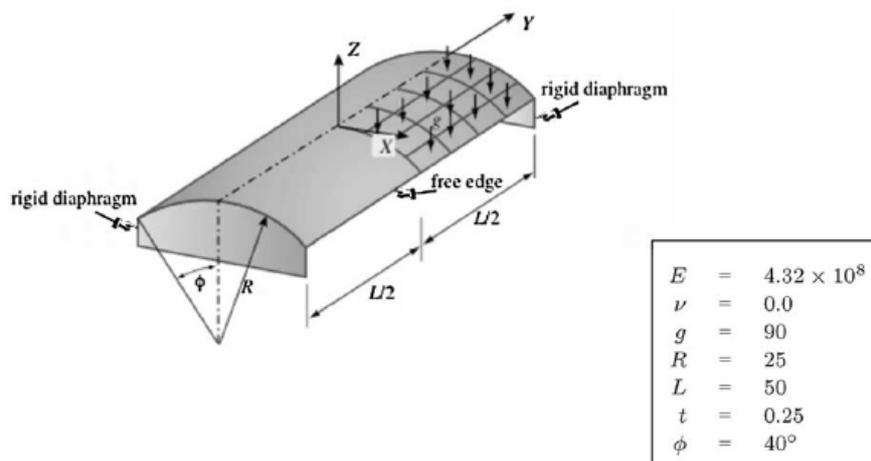


Fig.37 – "Pista de obstáculos". Planteamiento del problema de la "bóveda de Scordelis-Lo"

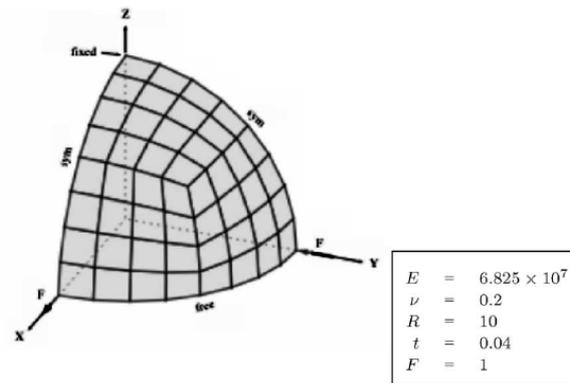


Fig.38 – “Pista de obstáculos”. Planteamiento del problema del “hemisferio pellizado”

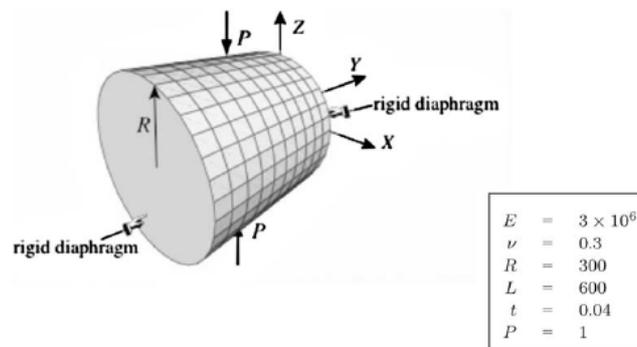


Fig.39 – “Pista de obstáculos”. Planteamiento del problema del “cilindro pellizado”

III.4.5.1. “Bóveda de Scordelis–Lo”

La “bóveda de Scordelis–Lo” está sujeta a la carga de la gravedad. Los extremos son soportados por diafragmas fijos y los bordes del lado son libres (ver la Fig.37). El desplazamiento vertical del punto medio del borde del lado es la cantidad usada para evaluar la convergencia. La segunda, cuarta, y sexta malla usadas en el estudio se muestran en la Fig.43. Estas mallas tienen 2, 8, y 32 elementos de superficie por lado, respectivamente. Debido a la simetría, se malla sólo un cuadrante. La Fig.44 muestra la convergencia del desplazamiento respecto al valor de referencia. En todos los casos, la convergencia es bastante rápida. Para los casos de mayor orden, incluso un elemento proporciona una solución muy exacta.

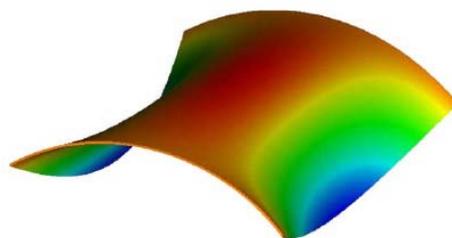


Fig.40 – “Pista de obstáculos”. “Bóveda de Scordelis–Lo” en su posición deformada (usando un factor de escala de 200). Contornos del desplazamiento en la dirección de la carga de la gravedad.

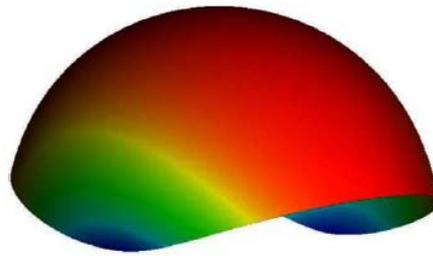


Fig.41 – “Pista de obstáculos”. “Hemisferio pellizado” en su posición deformada (usando un factor de escala de 33,3). Contornos del desplazamiento en la dirección interior del punto de carga.

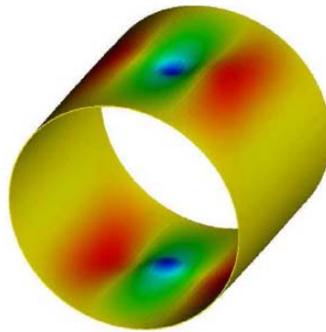


Fig.42 – “Pista de obstáculos”. “Cilindro pellizado” en su posición deformada (usando un factor de escala de 3×10^6). Contornos del desplazamiento en la dirección del punto de carga. Nótese el alto desplazamiento localizado en la zona contigua a la aplicación de la carga.

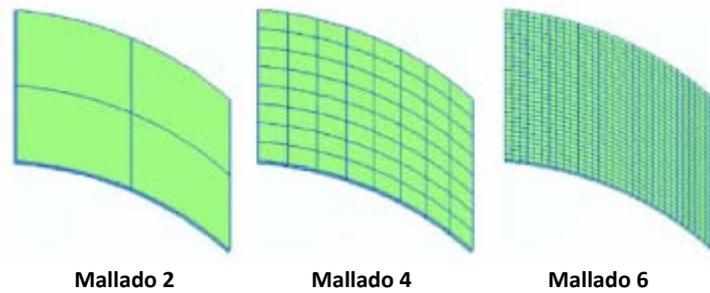


Fig.43 - “Pista de obstáculos”. Mallados de la “Bóveda de Scordelis-Lo”

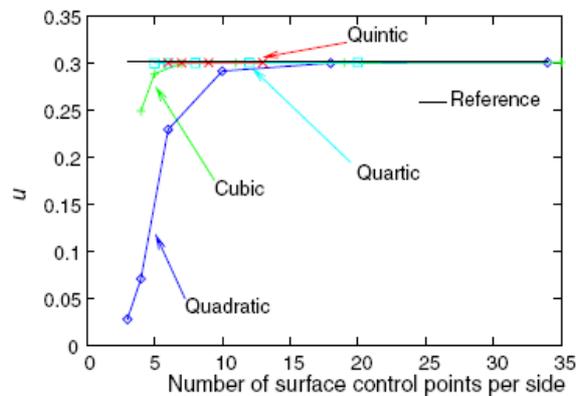


Fig.44 - “Pista de obstáculos”. Convergencia del desplazamiento de la “Bóveda de Scordelis-Lo”

III.4.5.2. "Hemisferio pellizado"

En el "*hemisferio pellizado*", fuerzas igual y opuestamente concentradas son aplicadas en los puntos antipodales del ecuador. El ecuador de otra manera, se considera libre (ver la Fig.38). La Fig.45, muestra las segundas, cuartas, y sextas mallas. Debido a la simetría, sólo se malla un cuadrante. La convergencia del desplazamiento bajo la carga dirigida hacia adentro, es presentada en la Fig.46. El caso cuadrático converge muy despacio, lo cual no es sorprendente ya que los sólidos cuadráticos, totalmente integrados, de elementos finitos "se cierran" en el análisis de cáscara.

Los sólidos cúbicos de elementos finitos también se exponen al "cierre" en circunstancias similares pero en este caso, las NURBS cúbicas se comporta razonablemente bien. La Fig.47 presenta la convergencia del desplazamiento para las mallas de un elemento de superficie. Nótese que las mallas de orden más bajo se "cierran", pero tarde o temprano se obtienen resultados exactos. Un elemento de superficie NURBS de décimo orden parece proporcionar un resultado esencialmente exacto. Para evaluar si hay cualquier tendencia a oscilar, el desplazamiento en la dirección de la carga puntual dirigida hacia adentro es representado para el único caso del elemento de superficie NURBS de décimo orden en la Fig.48. Como es evidente, los desplazamientos son muy lisos y monótonos.

III.4.5.3. "Cilindro pellizado"

El "*cilindro pellizado*" es sometido a fuerzas igual y opuestamente concentradas en la mitad de su espacio (ver la Fig.39).

Los extremos son soportados por diafragmas rígidos. Esta restricción causa la deformación sumamente localizada bajo las cargas (ver la Fig.42). Sólo un octante del cilindro es usado en el cálculo, debido a la simetría. La Fig.49 muestra las segundas, cuartas y sextas mallas. La convergencia del desplazamiento bajo la carga es representada en la Fig.50. Los elementos NURBS convergen a una solución ligeramente más suave que la solución de referencia. Esto puede ser debido a los efectos del corte transversal. Es conocido que, mientras la dimensión característica del elemento de superficie sea grande comparada con el grosor, las formulaciones que permiten las deformaciones de corte transversal, típica y estrechamente se aproximarán a las formulaciones que satisfacen la restricción de Kirchhoff (por ejemplo, corte transversal cero). Cuando esta tendencia se revierte, es decir, cuando la dimensión del elemento de superficie se aproxima a cero, manteniendo el grosor constante, el desplazamiento bajo una carga concentrada crece, y converge a infinito.

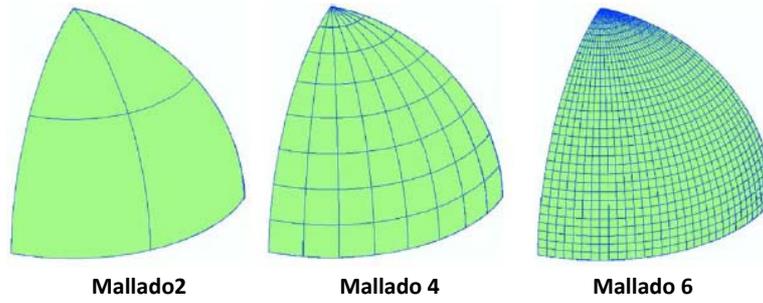


Fig. 45 – “Pista de obstáculos”. Mallados para el problema del “Hemisferio pellizado”

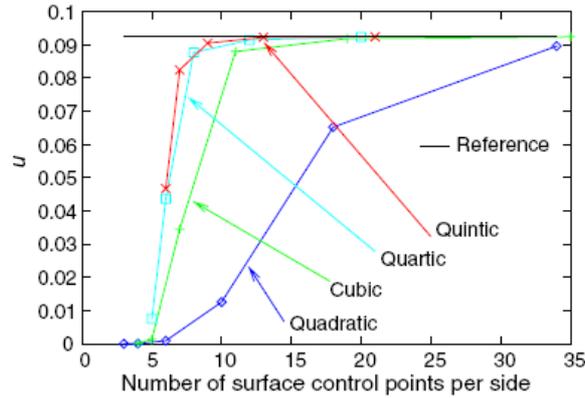


Fig.46 - “Pista de obstáculos”. Convergencia del desplazamiento del “Hemisferio pellizado”

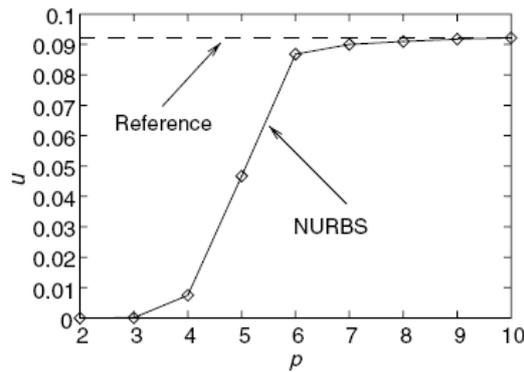


Fig.47 - “Pista de obstáculos”. Convergencia del desplazamiento del “Hemisferio pellizado” para un elemento de superficie NURBS.

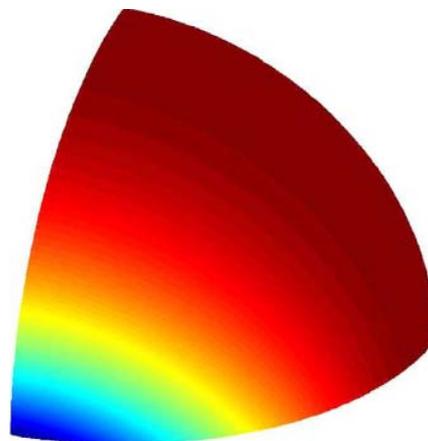


Fig.48 - “Pista de obstáculos”. Desplazamiento del “Hemisferio pellizado” en la dirección de la carga puntual dirigida hacia adentro para un elemento de superficie con $p=10$.

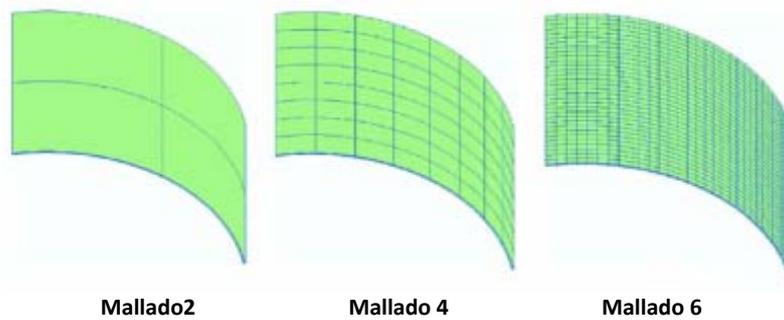


Fig. 49 – “Pista de obstáculos”. Mallados del “Cilindro pellizado”

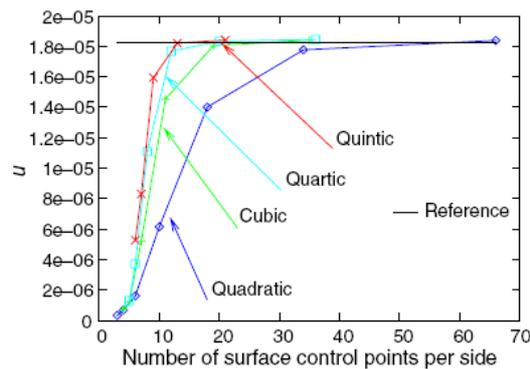


Fig.50 - “Pista de obstáculos”. Convergencia del desplazamiento del “Cilindro pellizado”

Observación. Se entiende que dos NURBS cuadráticas construidas a través del grosor son innecesarias para el análisis de cáscara fina típico. Se realizan algunas pruebas con una NURBS cuadrática por el grosor y los resultados son indistinguibles si se comparan con un caso de NURBS bi-cuadrática. Sin embargo, cuando se reduce a variación lineal a través del grosor, no se obtiene convergencia para corregir las soluciones. La hipótesis de la teoría de cáscara clásica, como la invocación de la condición de tensión plana en la dirección del grosor, pueden ser suficientes para corregir la deficiencia de la variación del desplazamiento lineal. Tal formulación seguramente sería competitiva con las formulaciones de elemento de cáscara tradicionales que emplean los grados de libertad del desplazamiento y de la rotación en una superficie de referencia. Usando sólo los grados de libertad del desplazamiento (por ejemplo, variables de control) en el caso de las NURBS, se simplifica considerablemente el análisis de cáscara, sobre todo en el análisis no lineal en el que las rotaciones ya no son vectoriales y aditivas, pero requieren una estructura de grupo multiplicativa. Se podría hacer una simplificación aún mayor, solamente para usar una superficie NURBS y emplear formulaciones "sin rotación".

Elementos de cáscara "sin rotación" han ganado recientemente popularidad en la mecánica computacional. La formulación de Engel también ha sido propuesta como una base apropiada para las llamadas "teorías de gradiente de tensión". Estas teorías también requieren la continuidad C^1 , y NURBS encajaría de manera muy natural en ellas.

III.4.6. Cáscara hemisférica con un refuerzo.

Se considera la cáscara hemisférica con refuerzo, presentada en Rank, quien solucionó el problema usando el método de elementos finitos y la estrategia de refinamiento-p. La geometría y los datos están representados en la Fig.51. La estructura está sujeta a la carga de gravedad y a la presión externa, y los desplazamientos verticales están puestos a cero sobre la superficie inferior del refuerzo. Debido a la simetría, sólo se modela un cuarto del dominio. La malla inicial ha sido construida usando NURBS racionales cuadráticas y se muestra en la Fig.52. Se realiza refinamiento-p isotrópico para evaluar la convergencia. Se utilizan polinomios de orden 2-6. Las Fig.53 y 54 muestran el desplazamiento vertical y la tensión von Mises sobre la configuración deforme.

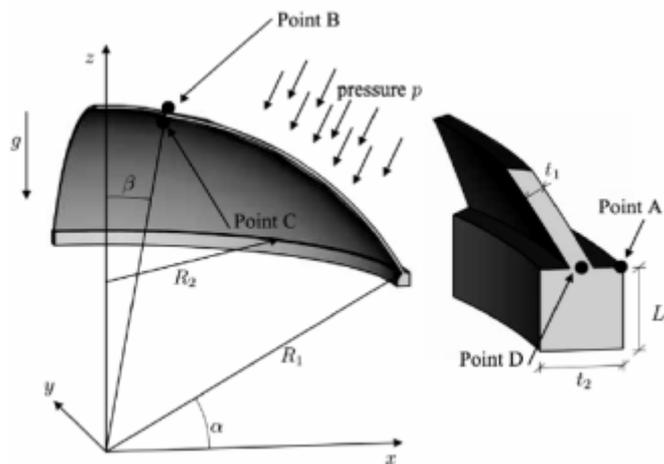


Fig.51 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Descripción del problema.

$\alpha = 30^\circ$	$L_2 = 0,4 \text{ m}$
$\beta = 10^\circ$	$E = 6,825 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$
$R_1 = 10 \text{ m}$	$\nu = 0,3$
$R_2 = 5\sqrt{3} \text{ m}$	$\rho = 500 \text{ kg/m}^3$
$t_1 = 0,1 \text{ m}$	$g = 10 \text{ m/s}^2$
$t_2 = 0,4 \text{ m}$	$p = 100 \text{ kN/m}^2$

Condiciones de contorno:

En la parte baja del refuerzo:

$$u_z = 0$$

Simetría en el plano x-z:

$$u_y = 0$$

Simetría en el plano y-z:

$$u_x = 0$$

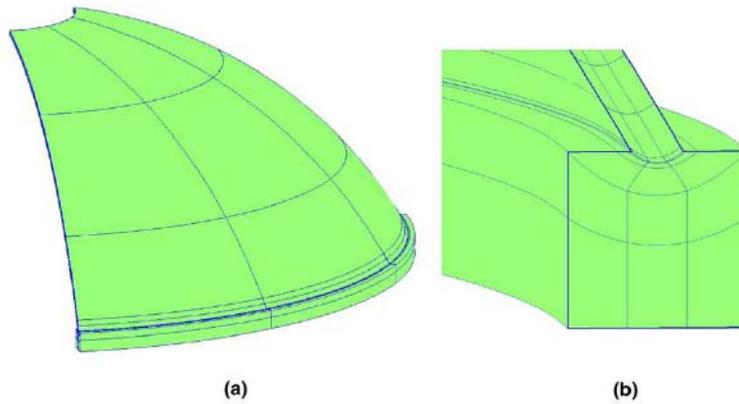


Fig.52 – Cáscara hemisférica con refuerzo: (a) malla (b) detalle del refuerzo

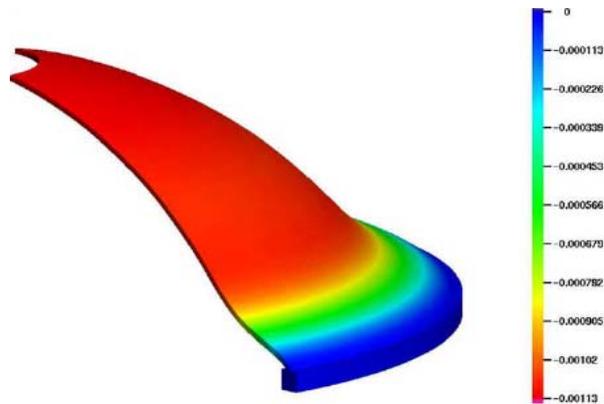


Fig.53 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Contorno del desplazamiento vertical en la configuración deformada para una solución con refinamiento $p=2$ (usando factor de escala 500)

La tensión de Von Mises viene dada por:

$$\sigma_{vm} = \left(\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (27)$$

Donde σ_{vm} es la tensión de von Mises, σ_{ij} es el tensor de tensiones y σ'_{ij} es la tensor desviador de tensiones. Los resultados en las Fig.53 y 54 provienen de una simulación cuadrática NURBS. Hay acuerdo cualitativo con los resultados dados en Rank. La norma Euclídea del desplazamiento y de la tensión von Mises es calculada en los puntos A-D, identificados en la Fig.51. Dado que los puntos A y Destán localizados en el contorno del dominio computacional, los valores de σ_{ij} impuestos por las condiciones de contornoson usados en (27), donde es aplicable, a diferencia de las cantidades calculadas. Los resultados de $p=2$ a $p=6$ están representados en las Fig.55-62 con resultados de Rank para su simulación más fina, es decir, $p=8$, que tomamos como una referencia. Se observa un buen acuerdo en los desplazamientos convergidos. Las Fig.56 y 57 indican que en los puntos B y C, los desplazamientos para la discretización de las NURBS convergen del lado "reforzado"(compatible con los resultados de la

sección anterior). También es evidente el acuerdo en los valores convergidos de la tensión de von Mises.

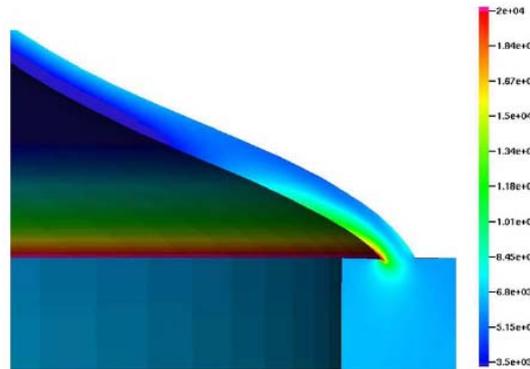


Fig.54 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Contorno de la tensión de von Mises en la configuración deformada para la solución con refinamiento, $p=2$ (usando factor de escala 500)

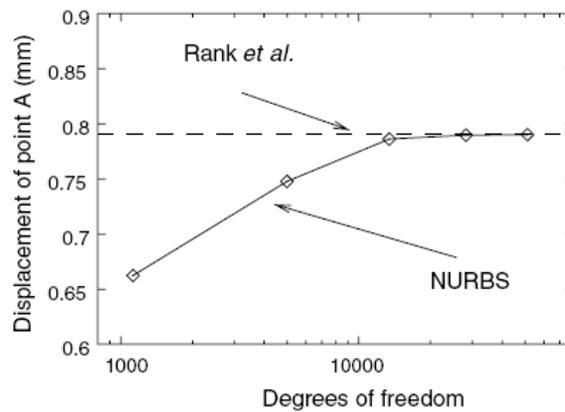


Fig.55 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Convergencia de la norma Euclídea del desplazamiento en el punto A

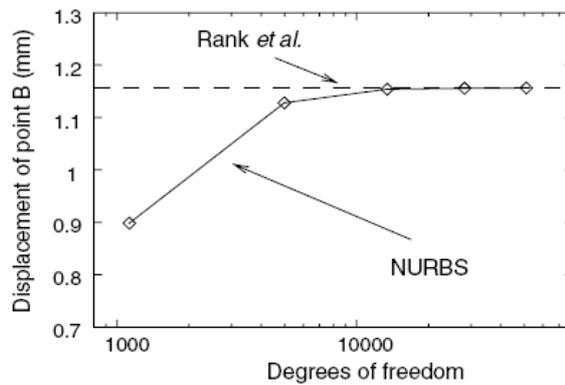


Fig.56 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Convergencia de la norma Euclídea del desplazamiento en el punto B

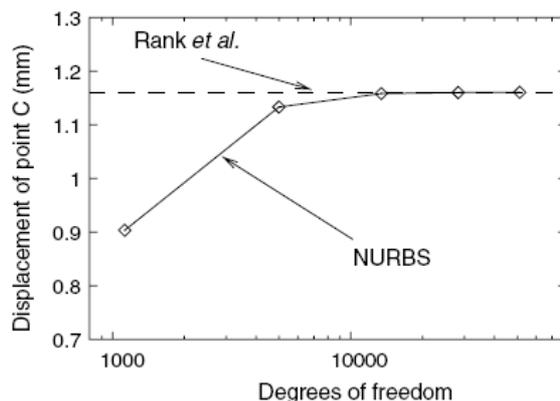


Fig.57 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Convergencia de la norma Euclidea del desplazamiento en el punto C

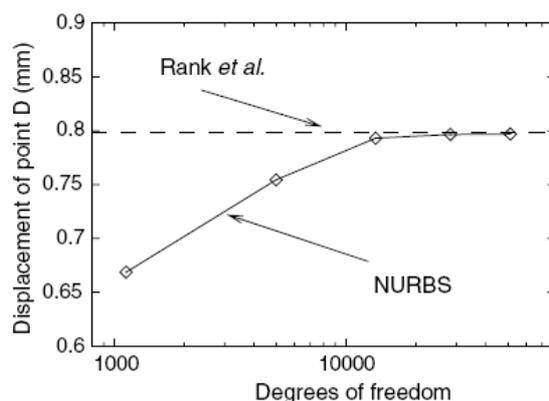


Fig.58 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Convergencia de la norma Euclidea del desplazamiento en el punto D

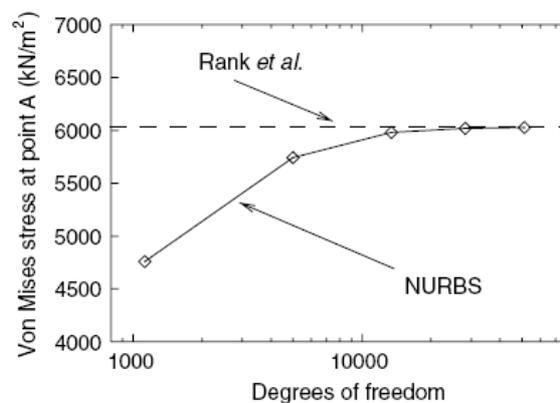


Fig.59 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Convergencia de la tensión de von Mises en el punto A

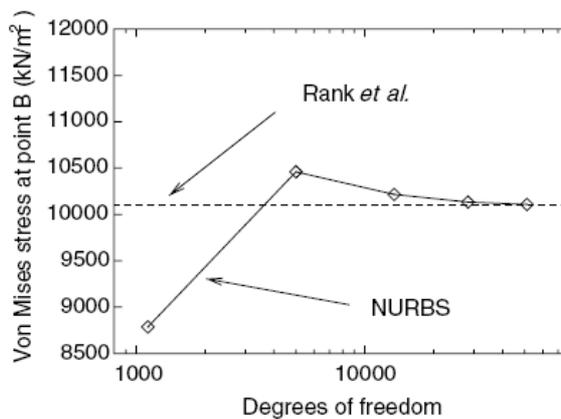


Fig.60 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Convergencia de la tensión de von Mises en el punto B

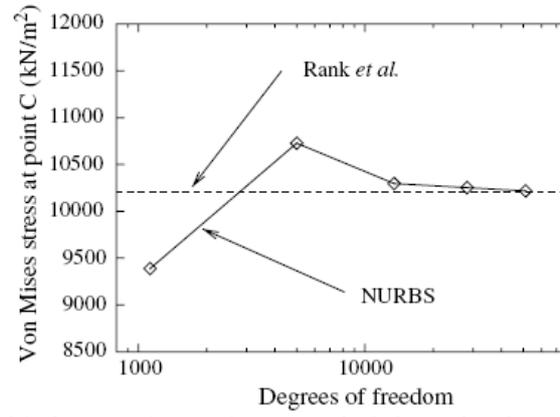


Fig.61 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Convergencia de la tensión de von Mises en el punto C

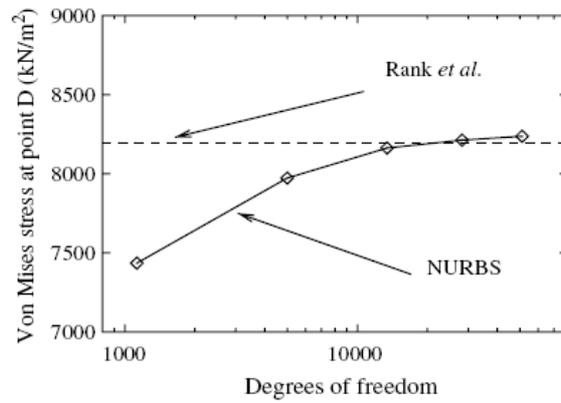


Fig.62 – Cáscara hemisférica con refuerzo. Convergencia de la tensión de von Mises en el punto D

III.5. Análisis de fluidos isogeométricos

Se desean realizar evaluaciones preliminares de análisis isogeométrico en fluidos. Las ecuaciones de fluidos son fundamentalmente diferentes a las ecuaciones estructurales, en el fenómeno de flujo dominado por advección son caracterizadas por operadores diferenciales esencialmente antisimétricos, la antítesis de los operadores simétricos definidos que caracterizan modelos de análisis típicos estructurales. Otro rasgo de flujo complicado son las capas afiladas que envuelven gradientes muy fuertes. Dentro de estas capas, el comportamiento difusivo y la transición de ecuaciones a ser predominantemente simétricas definidas prevalece. Por consiguiente, formulaciones exitosas de análisis de fluidos automáticamente tienen que contar para la competición local entre efectos de advección y difusivos, y ajustar la discretización en consecuencia. La formulación estándar de Galerkin óptimamente trata a operadores simétricos definidos, pero produce discretizaciones inestables de operadores antisimétricos. Esto es bien conocido en el análisis de los elementos finitos y, lamentablemente, lleva a la aproximación basada en las NURBS. La primera metodología de elementos finitos que expone la estabilidad uniforme y el comportamiento de convergencia a través de la gama completa de fenómenos de advección y difusivos fue SUPG, "un método estabilizado" que tenía sus orígenes a finales de los años 1970 y a principios de los años 1980. SUPG es una modificación residual del método Galerkin que aumenta la estabilidad sin degradar la exactitud. Es suficiente para la mayor parte de fenómenos de flujo pero esto no es una tecnología monótona porque su exactitud en órdenes superiores normalmente excluye el comportamiento monótono excepto en casos suficientemente resueltos. Existe el llamado "teorema de barrera" que afirma que la clase de los métodos diferenciales lineales, de exactitud en órdenes superiores no pueden ser monótonos, y SUPG cae en esa clase. Por consiguiente, SUPG por sí misma no es una tecnología suficientemente robusta para *fenómenos de onda de choque* en fluidos pero en combinación con los operadores llamados "*de captura de discontinuidades*" ha demostrado ser una tecnología de fuerza industrial para usos con choques.

En este estudio se investiga la capacidad de la aproximación isogeométrica, en la conjunción con SUPG, para solucionar casos de prueba desafiantes para la ecuación de advección-difusión. El análisis isogeométrico es fundamentalmente una aproximación de orden superior y no se espera buena conducta en situaciones con el interior y capas de contorno no resueltos. De hecho, los fenómenos Gibbs para métodos de elementos finitos con base polinomial tienden a hacerse más pronunciados a medida que aumenta el orden polinomial. Por esto la mayoría de las formulaciones prácticas de fluidos emplean una interpolación de orden inferior, típicamente constante y lineal, de variables de flujo. Sin embargo, la propiedad de especificación de las condiciones de contorno de Dirichlet de variación decreciente, más la noción de refinamiento-k,

conduce a algunos resultados notables en el caso de las NURBS. Esto es ilustrado por el primer ejemplo.

III.5.1. Advección oblicua a una malla con condiciones de contorno Dirichlet desalida

El sistema está descrito en la Fig.63. Aquí, a es la magnitud de la velocidad de advección, κ es la difusividad, y L es la longitud del lado del dominio. El número de Peclet, $Pe = a \cdot L / \kappa = 10^6$. Cuando este número es mayor que uno, la advección domina y la difusión es sólo importante en capas muy pequeñas. En este caso, la difusión es importante en una región de grosor $O(Pe^{-1} \cdot \ln Pe)$ en la salida de las capas de contorno y $O(Pe^{-1/2} \cdot \ln Pe)$ en las capa internas. En todos los cálculos la malla es uniforme, consistiendo en una rejilla de 20×20 elementos cuadrados, con la longitud de lado de elemento $h = 1/20 = 0,05$. El refinamiento se realiza por el método-k, y se calculan soluciones de $p=1$ a $p=12$. En todos los casos, la formulación SUPG estándar se usa con $\tau = h_a / 2a$, donde h_a es la longitud del elemento en la dirección de la velocidad de flujo que, en este caso, es simplemente, $h_a = h / \max\{\cos\theta, \sin\theta\}$.

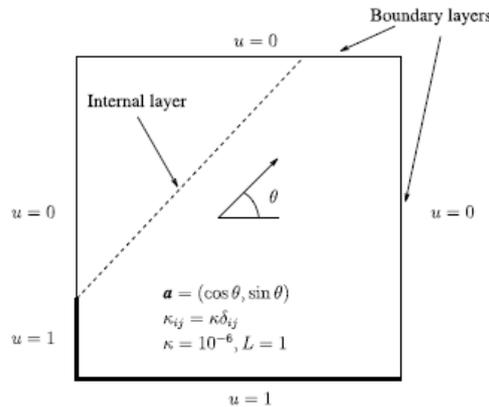


Fig.63 – Advección oblicua a la malla. Descripción del problema

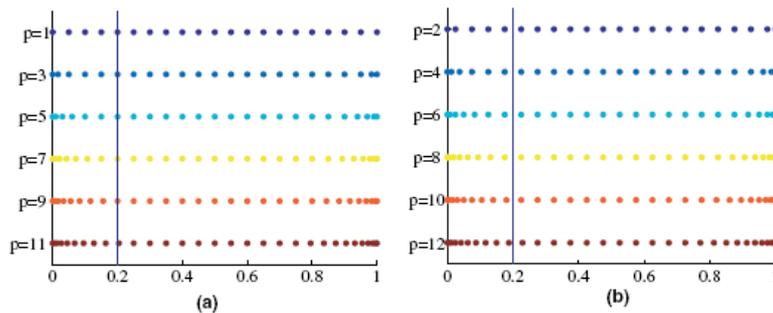


Fig.64 – Coordenadas y de los puntos de control a lo largo del borde izquierdo del dominio. (a) órdenes polinimiales impares. (b) órdenes polinimiales pares

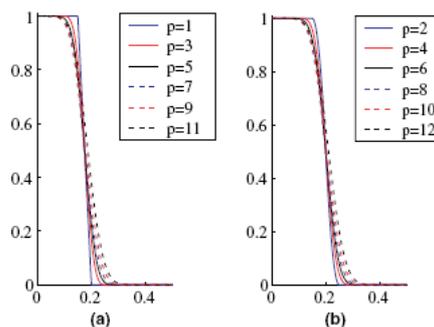


Fig.65 – Condiciones de contorno Dirichlet a lo largo del borde izquierdo del dominio. (a) órdenes polinomiales impares. (b) órdenes polinomiales pares

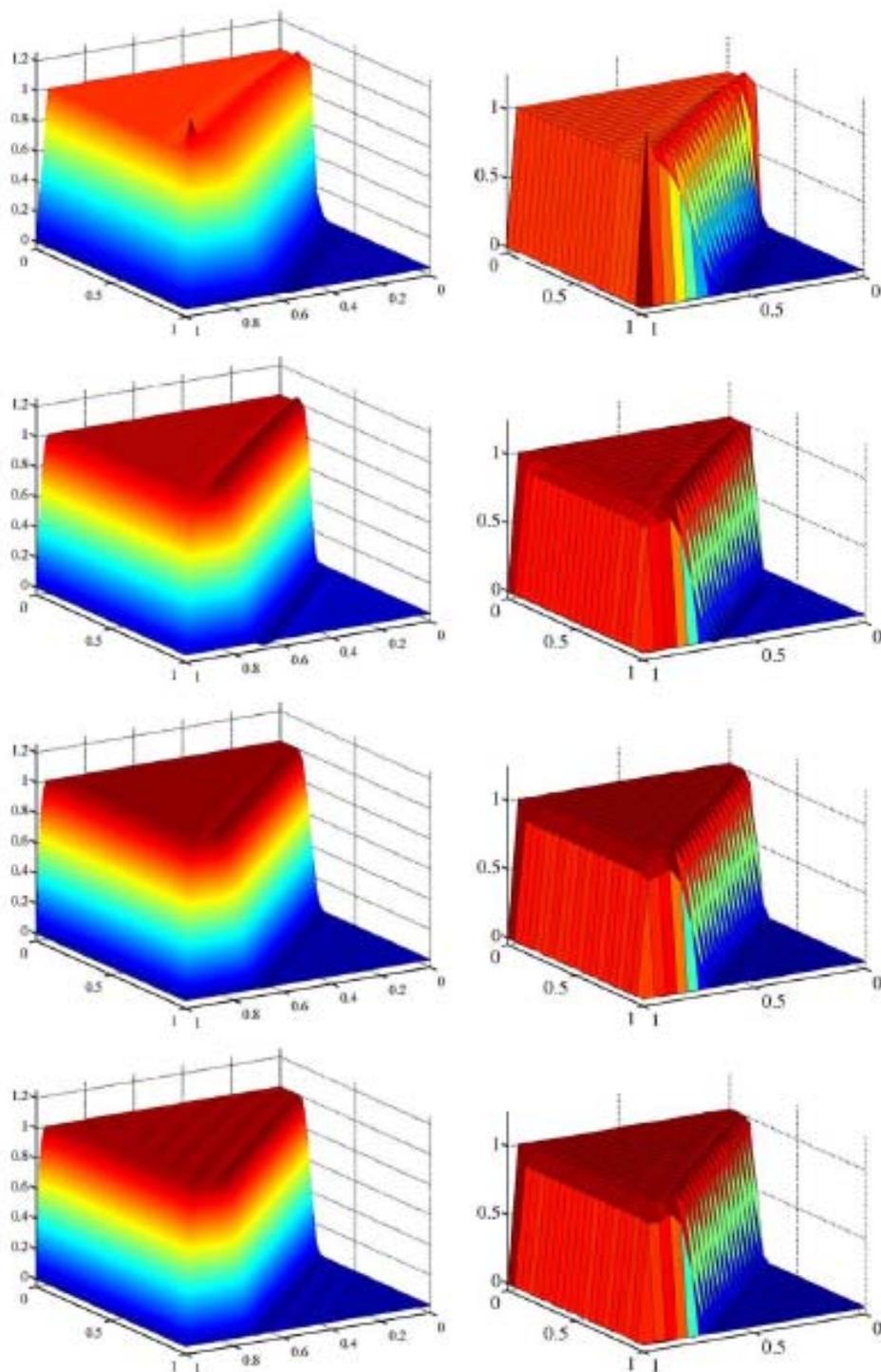


Fig.66 – Advección oblicua a la malla. $\theta = 45^\circ$. Resultados de $p=1$ a $p=4$ (de arriba a abajo). En la parte izquierda se representan los resultados con 100×100 puntos. En la parte derecha se representan con 21×21 puntos.

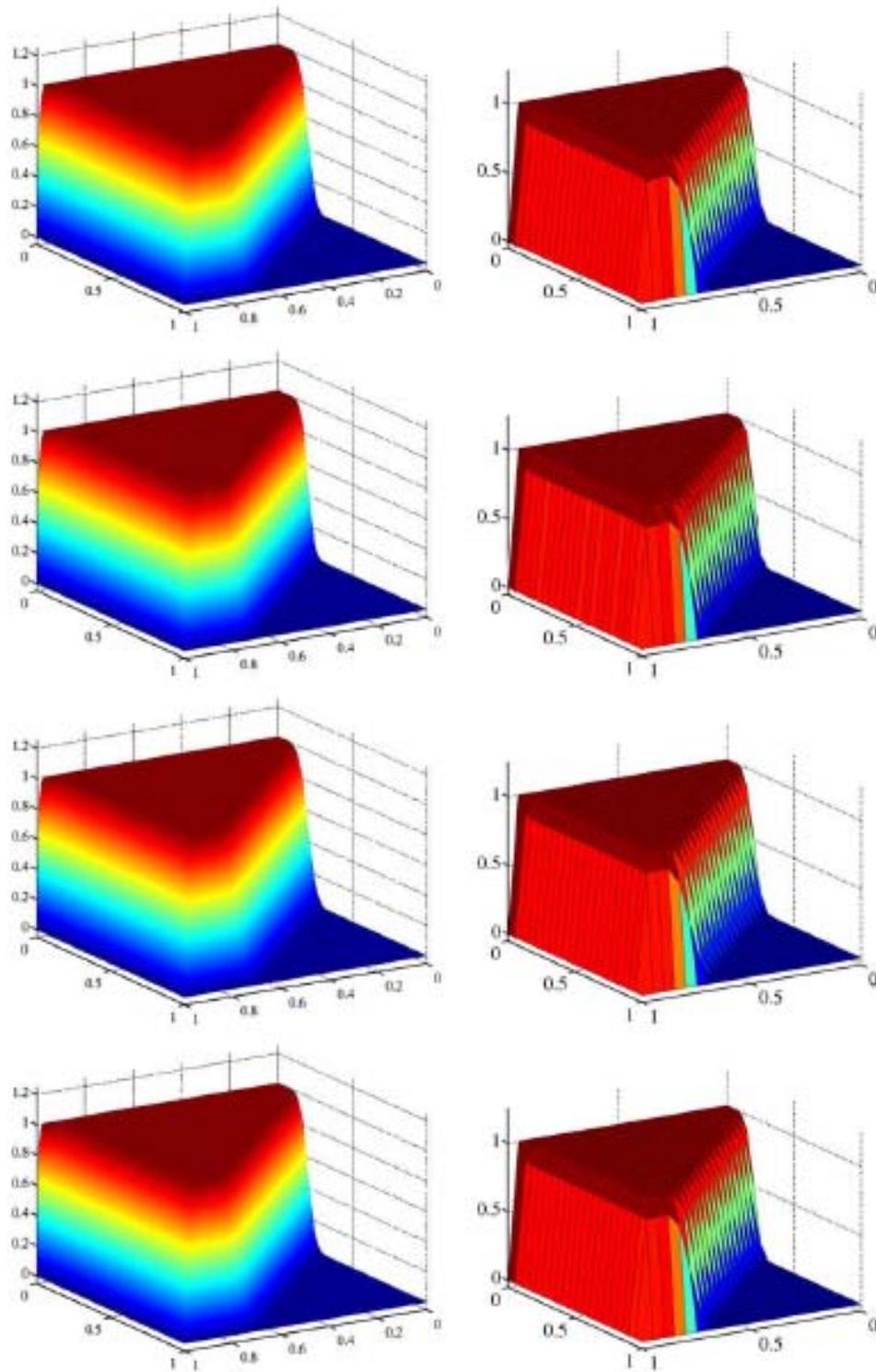


Fig.67 – Advección oblicua a la malla. $\theta = 45^\circ$. Resultados de $p=5$ a $p=8$ (de arriba a abajo). En la parte izquierda se representan los resultados con 100×100 puntos. En la parte derecha se representan con 21×21 puntos.

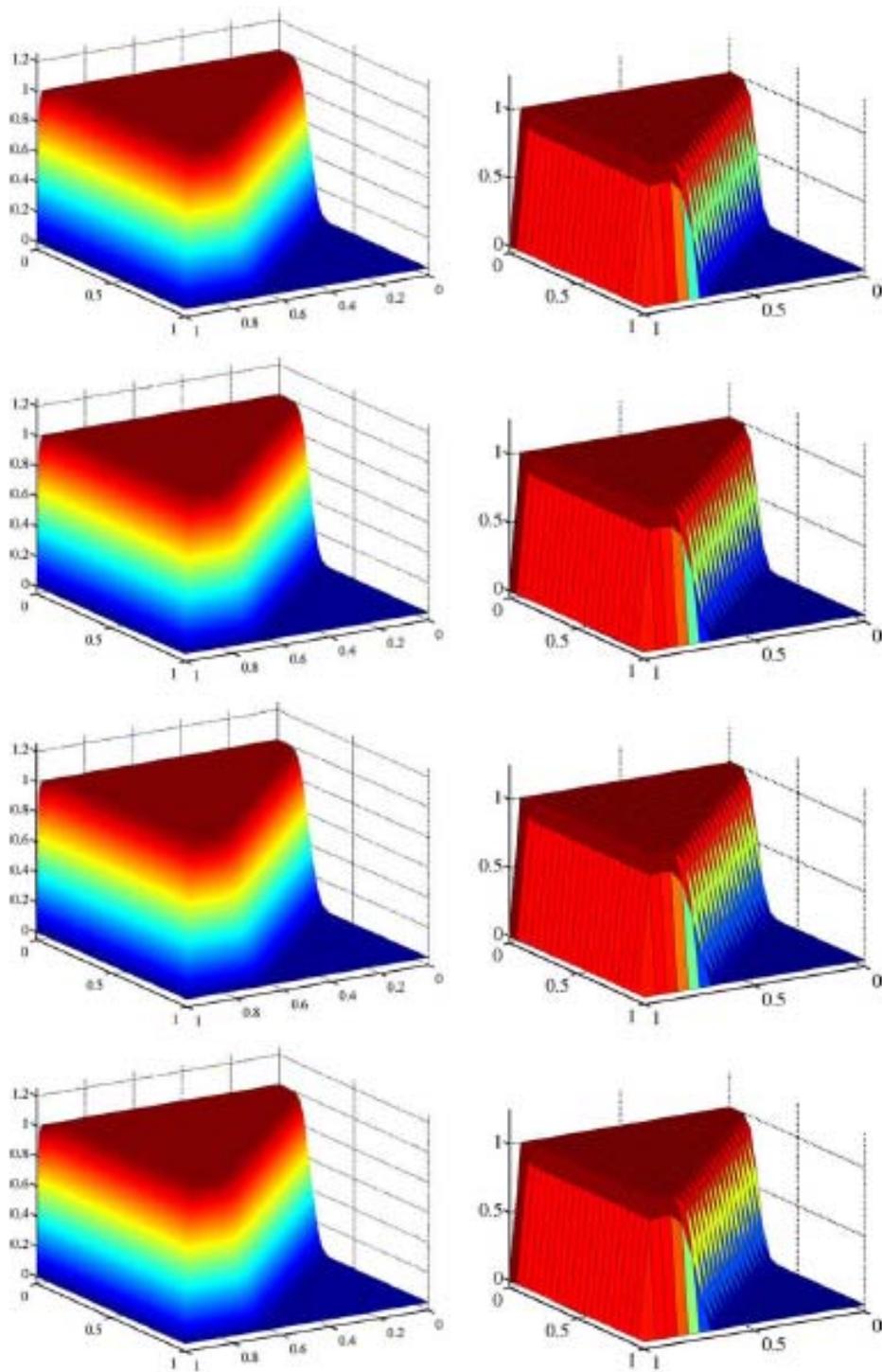


Fig.68 – Advección oblicua a la malla. $\theta = 45^\circ$. Resultados de $p=9$ a $p=12$ (de arriba a abajo). En la parte izquierda se representan los resultados con 100×100 puntos. En la parte derecha se representan con 21×21 puntos.

La condición de contorno se fija especificando las variables de control. Sobre los bordes superiores y derecho del dominio, todas las variables de control son puestas a 0 y la condición de contorno está completamente satisfecha a lo largo de estos bordes. En la parte inferior, la variable de control correspondiente a la esquina inferior derecha se pone a 0 y el resto se ponen a 1. El resultado es que el valor de contorno es idénticamente 1 hasta el último elemento en el cual esto suavemente se disminuye a 0 en la esquina. El contorno del lado izquierdo es más interesante. Si pensamos en las variables de control como puntos de control en R^3 que definen la superficie representada de la solución, donde las coordenadas x e y han sido fijadas por el trazado geométrico bidimensional y ya no van a poder ser escogidas por el usuario, entonces lo que hemos hecho a lo largo del lado izquierdo de nuestro dominio es poner la componente z (nuestra variable de control real) igual a 1 para cada punto de control que cae en el intervalo $[0, 0'2]$, e igual a 0 si cae en $[0'2, 1]$. Las posiciones de los puntos de control se muestran en la Fig.64. Nótese el grupo de puntos cerca de los nudos abiertos. Las condiciones de contorno resultantes se muestran en la Fig.65. Para $p=1$, la condición de contorno se interpola, mientras que para $p>1$ se establecen las variables de control de manera monótona dado que la propiedad de B-splines de variación decreciente previene a la curva de no dispararse hacia arriba o hacia abajo. Se desea resaltar que el refinamiento- k produce espacios de solución no anidados, que nos impiden tener exactamente la misma condición de contorno en cada etapa del proceso de refinamiento. Como consecuencia de esta técnica, la discontinuidad "se desplaza" sobre la posición $0'2$. Para órdenes polinomiales impares con $p \leq 9$, el punto de control, cae directamente sobre $0'2$, mientras que para órdenes polinomiales pares no lo hace (ver la Fig.64). Por esta razón hemos representado los casos pares e impares separadamente. Cuando p es mayor que 9, el "margen" debido a los vectores de nudo abierto interrumpe este modelo. Claramente, se requiere un mejor esquema para poner las variables de control de contorno. Una posibilidad es obtener la deseada condición de contorno estableciendo un problema de proyección sobre el contorno, para el cual una norma conveniente tiene que ser escogida.

El siguiente ejemplo computacional demostrará esa técnica. Sin embargo, el punto principal del estudio presente es evaluar la capacidad de las NURBS (en este caso, B-splines debido a la simplicidad del dominio) para tratar con capas de contorno e interiores no resueltas. Primero consideramos el caso en cual $\theta=45^\circ$. Los resultados de $p=1$ a $p=12$ son representados en las Fig.66-68. Se presentan dos vistas para cada p , una en la que la representación de la rutina muestra la solución con una rejilla de 100×100 puntos uniformemente distribuidos y otra en la que se muestra con una rejilla uniforme de 21×21 puntos. En el caso anterior, la representación se presenta en forma de "sombreado de Phong" y en esta última, se representa por la interpolación bilineal sobre cada elemento y los bordes de elemento dibujados.

La filosofía detrás de las vistas duales es que las representaciones de rejilla 100x100 son una interpretación más fiel de los casos de orden superior, mientras que la representación 21x21 puntos es el tipo de representaciones que han aparecido en numerosos artículos de investigación durante los años y pueden ser visualmente más fácilmente comparados con otros resultados.

El caso de $p=1$ y $\theta=45^\circ$, es insólito en esta selección de τ , el parámetro SUPG, es el valor ajustado que captura la capa de contorno muy bien. En general, la capa de contorno se captura pobremente con $p=1$ a no ser que τ tome un valor específico. Cuando se examinan los resultados, está claro que mejoran a medida que p aumenta y convergen hacia resultados monótonos con capas bastante afiladas. Quizás se esperaría que las oscilaciones aumentaran con el aumento de p , pero no es el caso. Esto seguramente es debido en parte al desplazamiento de la condición de contorno, pero se sospecha que la alta continuidad de la base obtenida por el refinamiento-k también juega una parte importante en esto.

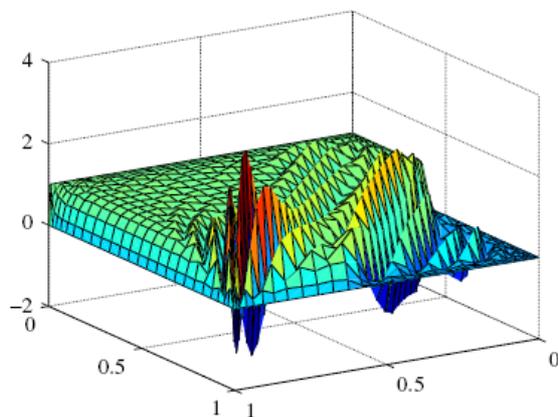


Fig.69 – Advección oblicua a la malla. $\theta = 45^\circ$. Variables de control para $p=8$.

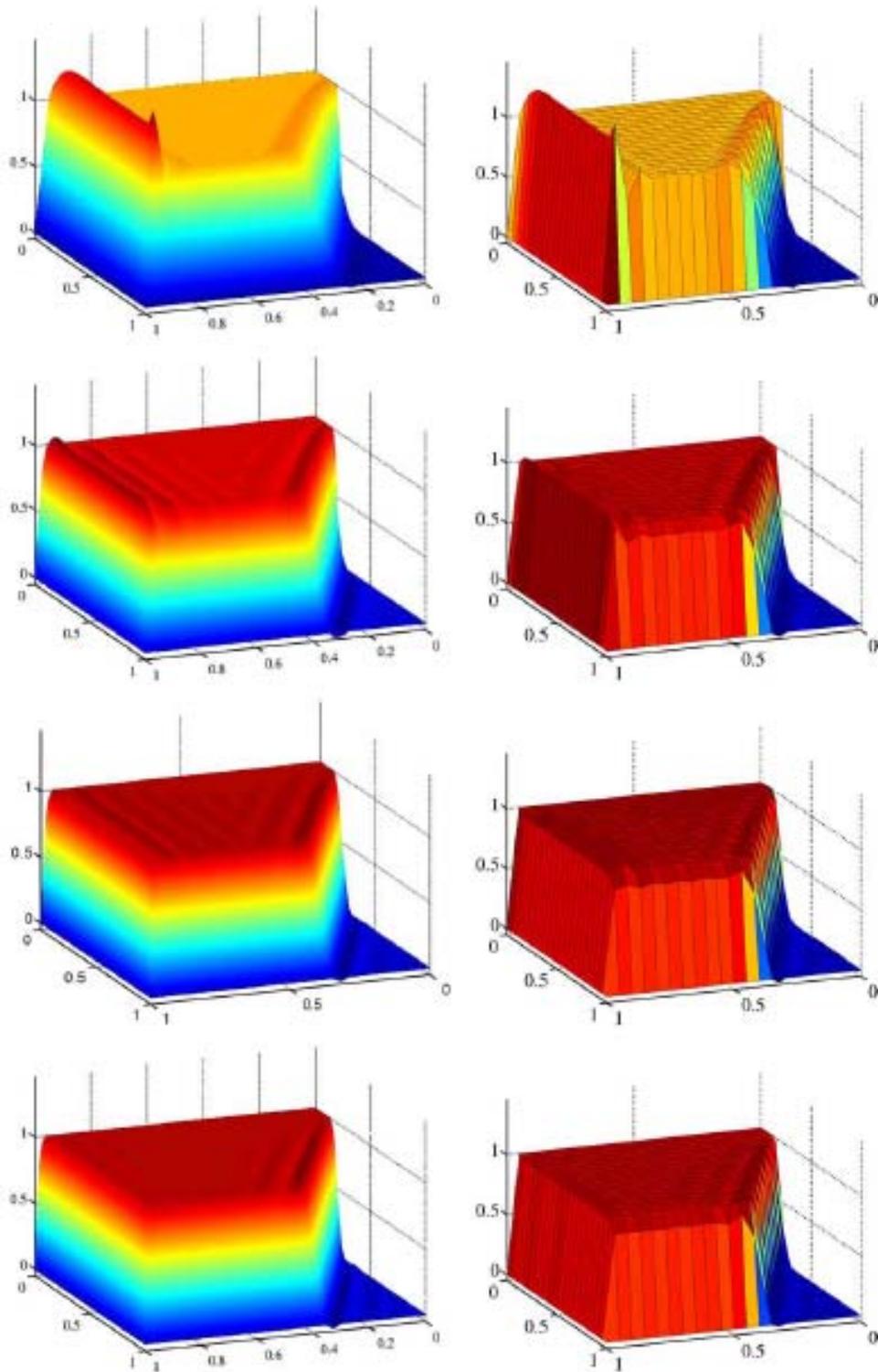


Fig.70 – Advección oblicua a la malla. $\theta \approx 63,4^\circ$. Resultados de $p=1$ a $p=4$ (de arriba a abajo). En la parte izquierda se representan los resultados con 100×100 puntos. En la parte derecha se representan con 21×21 puntos.

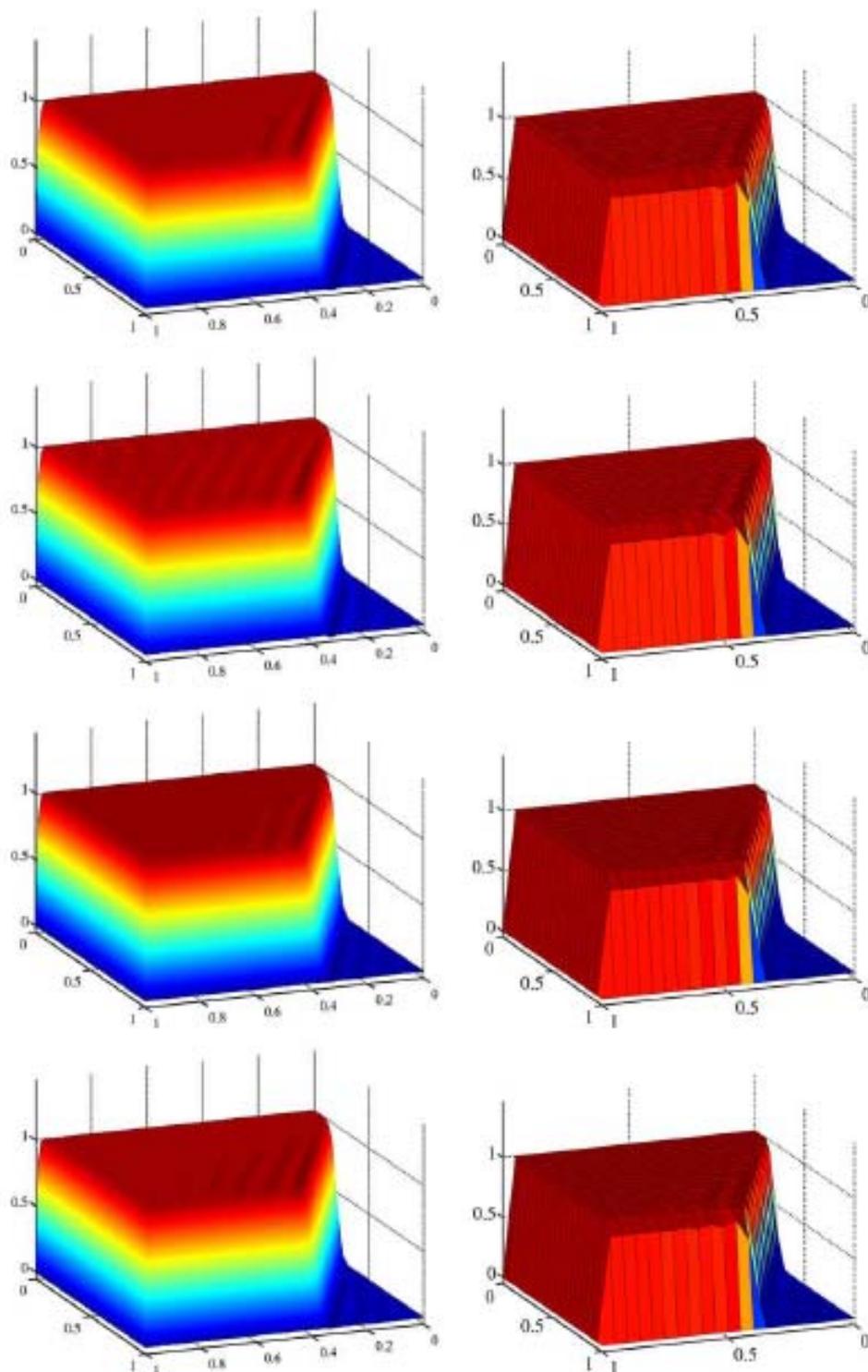


Fig.71 – Advección oblicua a la malla. $\theta \approx 63,4^\circ$. Resultados de $p=5$ a $p=8$ (de arriba a abajo). En la parte izquierda se representan los resultados con 100×100 puntos. En la parte derecha se representan con 21×21 puntos.

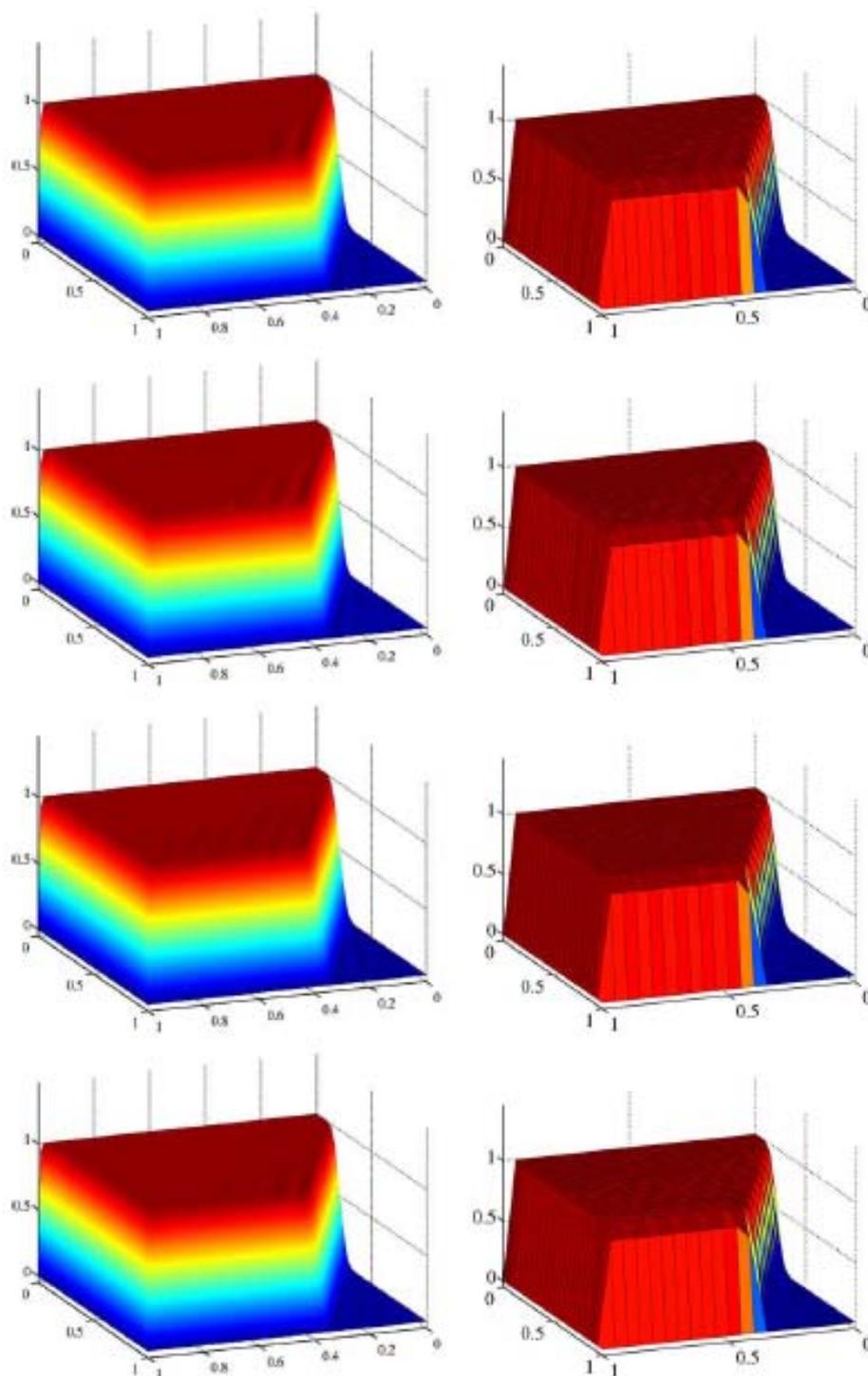


Fig.72 – Advección oblicua a la malla. $\theta \approx 63,4^\circ$. Resultados de $p=9$ a $p=12$ (de arriba a abajo). En la parte izquierda se representan los resultados con 100×100 puntos. En la parte derecha se representa con 21×21 puntos.

Es interesante ver las variables de control (ver la Fig.69). La solución para $p=8$ es casi monótona, mientras que las correspondientes variables de control son bastante oscilatorias. No está claro qué información física es proporcionada por las variables de control. Sin embargo, como la malla está refinada mediante el método-h, la malla de control aproximará la solución de superficie, es decir, la base se hace interpolatoria en el límite cuando la $h \rightarrow 0$. La malla 20×20 está obviamente lejos de este límite.

El caso $\theta = \tan^{-1}(2)$ ($\theta = 63.4^\circ$) se presenta en las Fis.70-72. Este problema representa posiblemente la prueba estándar más severa para la ecuación de advección-difusión. El refinamiento es realizado por el método-k, y se calculan las soluciones de $p=1$ a $p=12$. Estavez, para $p=1$, el exceso en la salida de la capa de contorno es aproximadamente el 45%, pero, como el orden es elevado por el refinamiento-k, la convergencia hacia resultados monótonos ocurre. Este ángulo de flujo parece ser algo más difícil que en el caso de $\theta = 45^\circ$. Sin embargo, la misma conclusión puede ser dibujada: Refinamiento-k con orden suficientemente elevado, produce resultados extraordinarios en relación con capas afiladas internas y de contorno. El porcentaje máximo se excede versus el orden polinomial en ambos casos y está representado en la Fig.73. La convergencia hacia soluciones monótonas es evidente en ambos casos.

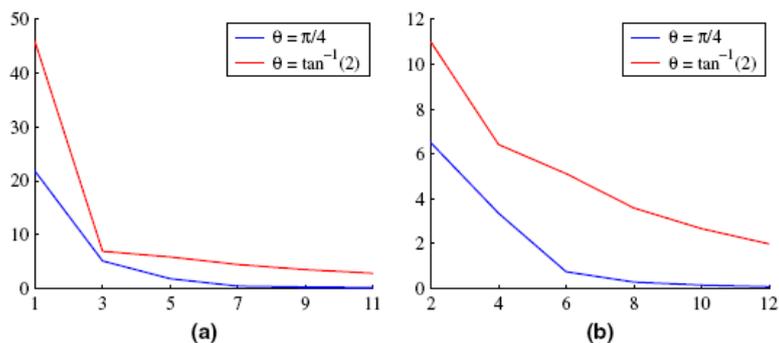


Fig.73 – Máxima solución (%) vs orden polinomial. (a) Ordenes polinomiales impares (b) Órdenes polinomiales pares

III.5.2. Advección del seno de un pico en un campo de flujo rotativo.

La presentación del problema se muestra en la Fig.74. El flujo es circular sobre el centro de un dominio cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ con componentes de la velocidad dadas por $a_1 = -x_2$ y $a_2 = x_1$. La difusividad se toma como 10^{-6} , lo que hace el problema de advección dominante. Condiciones de contorno homogéneas esenciales se imponen alrededor del perímetro del dominio, mientras la condición de $u = -\sin(2\pi x)$ es impuesta en el "corte", tal y como se muestra en la Fig.74. Ya que el espacio B-spline no contiene funciones trigonométricas, minimizaciones H_0^1 se usan para poner los valores del punto de control sobre el "corte".

Se hacen computaciones sobre una malla uniforme 30x30 con $p=2$ y $p=6$. La continuidad se mantiene en los niveles C^1 y C^5 , respectivamente, en todas partes del dominio excepto a lo largo de las líneas $x=0$ y $y=0$ donde la continuidad C^0 se mantiene. Esta opción es hecha para facilitar la imposición de condiciones de contorno. Los resultados están presentados en la Fig.75. La solución exacta es esencialmente una pura advección de la condición de contorno a lo largo de las líneas de corriente circulares. Tanto $p=2$ como $p=6$ produce resultados excelentes.

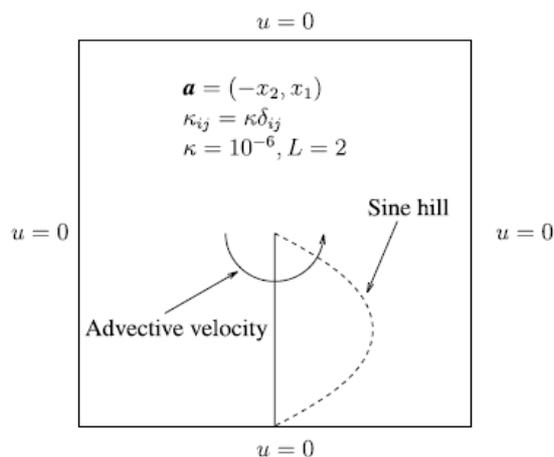


Fig.74 – Advección del seno de un pico. Descripción del problema.

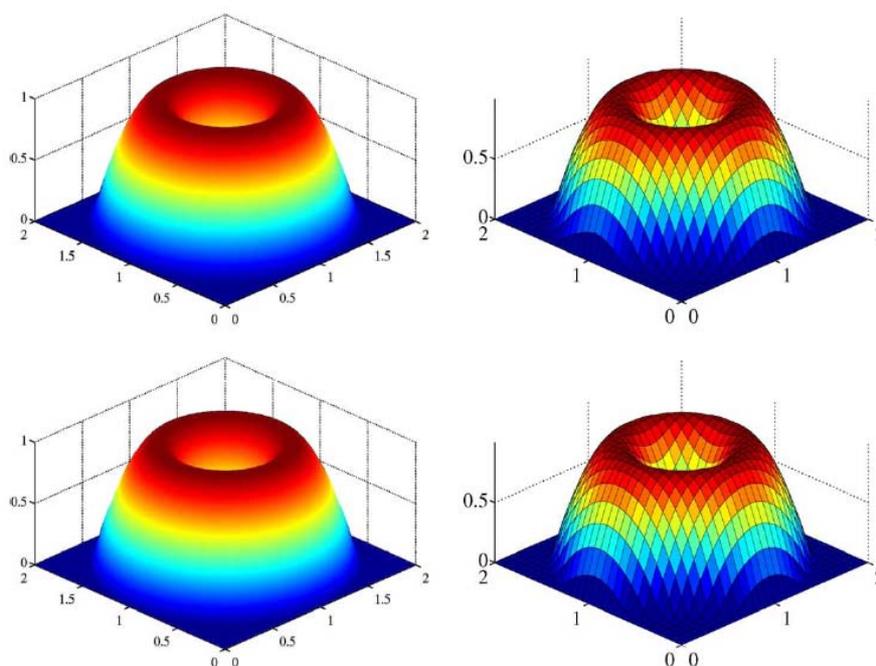


Fig.75 – Advección del seno de un pico. Resultados de $p=2$ a $p=6$ (de arriba a abajo). En la parte izquierda se representan los resultados con 100x100 puntos. En la parte derecha se representan con 31x31 puntos.

III.6. Conclusiones

Se ha introducido un nuevo marco de análisis, llamado análisis isogeométrico, que está basado en las NURBS.

Tiene muchas semejanzas con el análisis de los elementos finitos, pero también diferencias importantes. Una característica importante es representar la geometría exactamente por elementos NURBS y luego invocar el concepto isoparamétrico para definir las variables de campo, como el desplazamiento, la temperatura, etc... La malla gruesa encapsula la geometría exacta. Esto quiere decir que el refinamiento de malla simplemente se logra dando índices nuevos al espacio paramétrico. El proceso de refinamiento puede continuar sin interacción con el sistema CAD, una ventaja clara sobre procedimientos de elementos finitos. El hecho que las estrategias de refinamiento de malla de los elementos finitos requieran la interacción con el sistema CAD en cada etapa, puede ser la razón por la que el refinamiento de malla adaptable, a pesar de sus ventajas, es todavía principalmente una actividad académica y una que considerablemente no ha penetrado en el sector industrial. Hay análogos NURBS de refinamiento-h y refinamiento-p de elementos finitos, y hay también una variante del refinamiento-p, que llamamos refinamiento-k, en donde la continuidad de funciones es sistemáticamente aumentada. Esto parece no tener análogo en el análisis tradicional de elementos finitos pero es un rasgo compartido por algunos "Meshless methods". La aproximación es fundamentalmente de órdenes elevados. Por ejemplo, para representar círculos, cilindros y esferas, son necesarios polinomios racionales de al menos orden cuadrático. La generación de bases NURBS refinadas de todos los órdenes es facilitada por simples relaciones de recurrencia. La versatilidad y poder de las representaciones de bases NURBS recurrentes son realmente notables. Los sistemas de ecuación generados por NURBS tienden a ser más homogéneos que aquellos generados por elementos finitos del más alto orden y esto puede tener alguna ventaja en las estrategias de resolución de ecuación. Las NURBS satisfacen la propiedad de "variación decreciente". Por ejemplo, dan monotonía adecuada a los datos de control discontinuos y se hacen más lisos a medida que el orden aumenta, a diferencia de los polinomios interpolatorios de Lagrange que oscilan más violentamente a medida que el orden aumenta. Las NURBS de todos los órdenes son no negativas por partes. Esto quiere decir que cada entrada de la matriz de masa NURBS es no negativa. Estas propiedades no se logran en el análisis de elementos finitos. Por otra parte, las NURBS no son interpolatorias. Éstas son aptas para redes de puntos de control y de variables de control. Este aspecto es menos transparente para tratar con los conceptos correspondientes de elementos finitos de puntos nodales interpolados y variables nodales pero de alguna manera, similar a la situación para los "Meshless methods". Se realizan cálculos iniciales con procedimientos de análisis isogeométrico sobre unos problemas lineales estructurales y problemas de fluidos. Se analizan las estrategias de refinamiento-h, -p, y -k. En los usos estructurales, la convergencia a soluciones exactas ocurría en ratios óptimos para sólidos bi- y tri-dimensionales.

Se realiza el análisis de cáscara con elementos sólidos NURBS tridimensionales. En todos los casos hay convergencia a soluciones de cáscara fina y a resultados de referencia. La capacidad de resolver con exactitud las capas de contorno de la cáscara resulta ser particularmente significativa.

Aplicamos una formulación SUPG estabilizada de análisis isogeométrico a casos estándar de prueba que incluyan la ecuación de advección-difusión para evaluar su potencial para la dinámica de los fluidos. Un caso riguroso de prueba bidimensional, advección oblicua a una malla con condiciones de contorno Dirichlet de salida, es estudiado en una malla fija usando refinamiento-k. A medida que el orden aumenta, las soluciones mejoran y convergen hacia resultados monótonos con capas afiladas. Este resultado sorprendente parece contradecir preconcepciones de análisis numéricos sobre la exactitud de los métodos de orden elevado.

Parecen haber numerosas oportunidades para la investigación en el análisis isogeométrico. Algunas áreas de particular interés son:

- (1) Integración de análisis isogeométrico con sistemas de CAD;
- (2) Desarrollo de generadores de malla isogeométrica basado en tecnologías recientes como el CUBIT;
- (3) Desarrollo de elementos isogeométrico triangulares y tetraédricos y las técnicas de mallado desestructurado asociadas;
- (4) Desarrollo de procedimientos que explican la descripción de superficie recortada (esto es un desafío significativo, la aproximación de Höllig puede ser útil, ver la Fig.76);
- (5) Desarrollo de elementos de superficie isogeométricos para el análisis de malla tradicional y sin rotación y formulaciones integrales de contorno, y combinación de descripciones de superficie isogeométricas con "Meshless methods" (descripciones de superficie exactas parecen ser particularmente fáciles de generar desde descripciones de CAD);
- (6) Aplicación de tecnología isogeométrica a placas finas y teorías de cáscara, teorías de gradiente de tensión, y otras teorías de orden elevado;
- (7) Desarrollo de bases isogeométricas jerárquicas para análisis multiescalar;
- (8) Aplicación de análisis isogeométrico a la mecánica de fluidos y, en particular, la turbulencia de la capa de contorno;
- (9) Aplicación de elementos isogeométricos a los problemas de interés de la ingeniería;
- (10) Desarrollo de una teoría matemática de convergencia y análisis de error;
- (11) Aplicación del análisis isogeométrico para problemas de contacto y, en particular, contacto friccional y el deslizamiento (ver el Fig.77);
- (12) Desarrollo de análisis dinámico isogeométrico, incluyendo el armónico de tiempo y explícito, implícito, y aproximaciones de espacio-tiempo espacio-paso a paso (ver el Fig.78);
- (13) Aplicación del análisis isogeométrico para la optimización de formas (ver el Fig.79);

- (14) Generalizaciones a otras áreas importantes de aplicación, como, por ejemplo, acústica y electromagnética;
- (15) Varios usos no lineales, etc...

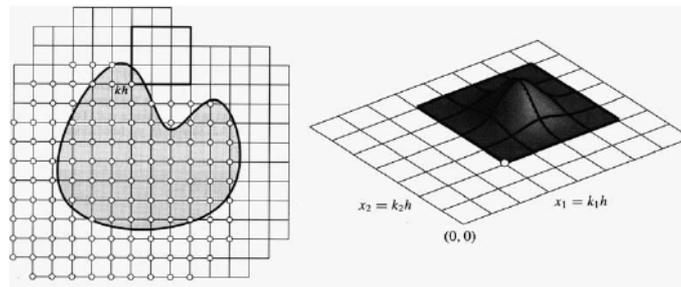


Fig.76 – Höllig ha desarrollado métodos de elementos finitos incorporando una base B-spline en una red rectangular. La geometría del objeto se introduce a través de las llamadas funciones de ponderación. Esta idea puede ser útil para tratar directamente con superficies recortadas.

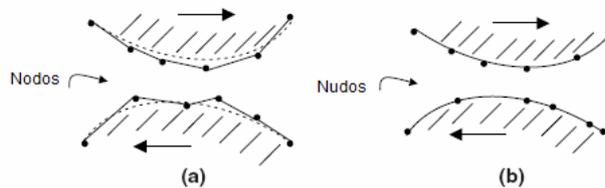


Fig.77 – (a) Polinomios de elementos finitos enfrentados presentan problemas en contacto deslizante. (b) Geometrías NURBS pueden alcanzar suavidad en cuerpos reales

En conclusión, se cree que la aproximación isogeométrica tiene un potencial considerable en solucionar problemas prácticos y es una alternativa prometedora a los procedimientos de análisis corrientes.

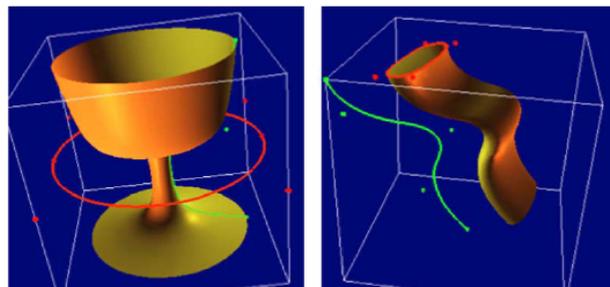


Fig.78 – D-NURBS (NURBS dinámicas) han sido propuestas para animar objetos definidos por superficies NURBS

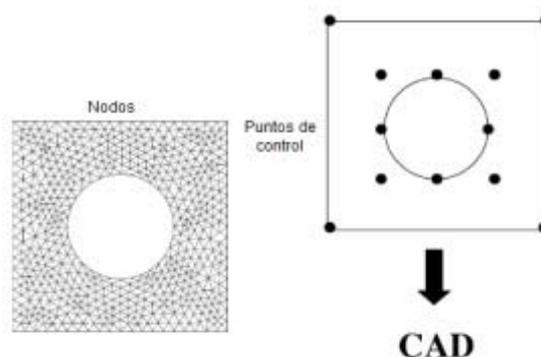


Fig.79 – Optimización isoparamétrica. Izquierda: La geometría descrita mediante elementos finitos es un inconveniente para la optimización de la forma. Derecha: NURBS una parametrización mas concisa de las variables de diseño. NURBS optimizadas pueden llevarse al análisis CAD.

III. Apéndice A. Datos de Control para objetos NURBS

A.1. Curva circular

Una curva circular puede ser descrita de muchas maneras diferentes usando NURBS. La aproximación mostrada en la Fig.12, utilizando cuatro segmentos racionales cuadráticos, es una de las más simples. Dado el nudo vector, $\Xi = \{0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,4\}$ usamos las ecuaciones (1) y (2) para generar las funciones de base de B-spline (con $p=2$) mostradas en la Tabla A.1. La curva entonces es generada usando (11) y (12) junto con los puntos de control y los pesos (w) dados en la Tabla A.2. Nótese que escalar todos los valores por un factor constante no cambia la curva final. En la Fig.12a, los w_i (y, en proporción, los puntos de control proyectivos) han sido escalados todos por 3 para mayor claridad visual.

Funciones base unidimensionales cuadráticas para crear NURBS circulares

Function	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,4]
$N_{1,2}(\xi)$	$(1 - \xi)^2$	0	0	0
$N_{2,2}(\xi)$	$2\xi(1 - \xi)$	0	0	0
$N_{3,2}(\xi)$	ξ^2	$(2 - \xi)^2$	0	0
$N_{4,2}(\xi)$	0	$2(\xi - 1)(2 - \xi)$	0	0
$N_{5,2}(\xi)$	0	$(\xi - 1)^2$	$(3 - \xi)^2$	0
$N_{6,2}(\xi)$	0	0	$2(\xi - 2)(3 - \xi)$	0
$N_{7,2}(\xi)$	0	0	$(\xi - 2)^2$	$(4 - \xi)^2$
$N_{8,2}(\xi)$	0	0	0	$2(\xi - 3)(4 - \xi)$
$N_{9,2}(\xi)$	0	0	0	$(\xi - 3)^2$

Tabla A.1

Puntos de control y valores (w_i) para un círculo de radio 1

i	B_i	w_i
1	(1, 0)	1
2	(1, 1)	$1/\sqrt{2}$
3	(0, 1)	1
4	(-1, 1)	$1/\sqrt{2}$
5	(-1, 0)	1
6	(-1, -1)	$1/\sqrt{2}$
7	(0, -1)	1
8	(1, -1)	$1/\sqrt{2}$
9	(1, 0)	1

Tabla A.2

A.2. Superficie Toroidal

La superficie toroidal mostrada en la Fig.13b es creada ampliando una curva circular NURBS de radio 1, como está definida en la sección anterior, alrededor de una trayectoria circular de radio 5, también definida por una curva NURBS. En esto caso, la coordenada η describe nuestra curva inicial circular y la coordenada ξ atraviesa a lo largo de la trayectoria que hemos ampliado. La base es racional cuadrática en cada una de las dos direcciones, con vectores de nudo dados por $\Xi = \{0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,4\}$ y $H = \{0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,4\}$.

Como Ξ es lo mismo que en nuestro ejemplo anterior, el juego de funciones, $\{N_{i,2}(\xi)\}$, son las mismas que en la Tabla A.1. Como $\Xi = H$, el juego $\{M_{j,2}(\eta)\}$ tiene la misma forma, pero con la variable independiente η en vez de ξ .

La red de control para el toroide puede ser considerada como la resultante de "ampliar" el polígono de control para un círculo de radio 1 sobre el polígono de control para un círculo de radio 5. Ver la Fig.13a. El juego resultante de los puntos de control viene dado en la Tabla A.3, con pesos (w_i) en la Tabla A.4. Las funciones base de superficies racionales son formadas a partir del uso de funciones base unidimensional y de las variables pesos (w_i) mediante la ecuación (13).

Puntos de control para la superficie toroidal

i	$B_{i,1}$	$B_{i,2}$	$B_{i,3}$	$B_{i,4}$	$B_{i,5}$	$B_{i,6}$	$B_{i,7}$	$B_{i,8}$	$B_{i,9}$
1	(5, 0, -1)	(6, 0, -1)	(6, 0, 0)	(6, 0, 1)	(5, 0, 1)	(4, 0, 1)	(4, 0, 0)	(4, 0, -1)	(5, 0, -1)
2	(5, 5, -1)	(6, 6, -1)	(6, 6, 0)	(6, 6, 1)	(5, 5, 1)	(4, 4, 1)	(4, 4, 0)	(4, 4, -1)	(5, 5, -1)
3	(0, 5, -1)	(0, 6, -1)	(0, 6, 0)	(0, 6, 1)	(0, 5, 1)	(0, 4, 1)	(0, 4, 0)	(0, 4, -1)	(0, 5, -1)
4	(-5, 5, -1)	(-6, 6, -1)	(-6, 6, 0)	(-6, 6, 1)	(-5, 5, 1)	(-4, 4, 1)	(-4, 4, 0)	(-4, 4, -1)	(-5, 5, -1)
5	(-5, 0, -1)	(-6, 0, -1)	(-6, 0, 0)	(-6, 0, 1)	(-5, 0, 1)	(-4, 0, 1)	(-4, 0, 0)	(-4, 0, -1)	(-5, 0, -1)
6	(-5, -5, -1)	(-6, -6, -1)	(-6, -6, 0)	(-6, -6, 1)	(-5, -5, 1)	(-4, -4, 1)	(-4, -4, 0)	(-4, -4, -1)	(-5, -5, -1)
7	(0, -5, -1)	(0, -6, -1)	(0, -6, 0)	(0, -6, 1)	(0, -5, 1)	(0, -4, 1)	(0, -4, 0)	(0, -4, -1)	(0, -5, -1)
8	(5, -5, -1)	(6, -6, -1)	(6, -6, 0)	(6, -6, 1)	(5, -5, 1)	(4, -4, 1)	(4, -4, 0)	(4, -4, -1)	(5, -5, -1)
9	(5, 0, -1)	(6, 0, -1)	(6, 0, 0)	(6, 0, 1)	(5, 0, 1)	(4, 0, 1)	(4, 0, 0)	(4, 0, -1)	(5, 0, -1)

Tabla A.3

Valores (w_i) para la superficie toroidal

i	$w_{i,1}$	$w_{i,2}$	$w_{i,3}$	$w_{i,4}$	$w_{i,5}$	$w_{i,6}$	$w_{i,7}$	$w_{i,8}$	$w_{i,9}$
1	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1
2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$
3	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1
4	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$
5	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1
6	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$
7	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1
8	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	$1/\sqrt{2}$
9	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1	$1/\sqrt{2}$	1

Tabla A.4

A.3. Placa con agujero circular

La malla gruesa de dos elementos mostrada en la Fig.17a y definida por la red de control en la Fig.17b tiene un rasgo interesante. El círculo requiere la utilización de una base racional cuadrática, pero esto a su vez hace necesario la introducción de una discontinuidad en la primera derivada para crear la esquina contraria. Esto podría ser hecho ya sea repitiendo nudos y creando una base que es sólo C^0 a lo largo de la línea entre los dos elementos iniciales, o colocando dos puntos de control en la misma posición en el espacio físico. Se escoge la última opción para asegurar que nuestra base tiene la continuidad C^1 en todas partes del interior del dominio. El único lugar donde la base no es C^1 es sobre su mismo contorno, en la posición de los puntos de control repetidos. Esta malla usa vectores de nudo, tal y como se había afirmado antes.

$$\Xi = \{0,0,0,0,5,1,1,1\} \text{ y } H = \{0,0,0,1,1,1\}$$

Las funciones base unidimensionales correspondientes vienen dadas en las Tablas A.5 y A.6. La red de control y los pesos (w_i) vienen dados en las Tablas A.7 y A.8 respectivamente.

Funciones base cuadráticas en la dirección- ξ para un cuarto de la placa con agujero circular

Function	[0, 0.5]	[0.5, 1]
$N_{1,2}(\xi)$	$(2\xi - 1)^2$	0
$N_{2,2}(\xi)$	$2\xi(2-3\xi)$	$2(\xi - 1)^2$
$N_{3,2}(\xi)$	$2\xi^2$	$2(3\xi - 1)(1 - \xi)$
$N_{4,2}(\xi)$	0	$(2\xi - 1)^2$

Tabla A.5

Funciones base cuadráticas en la dirección- η para un cuarto de la placa con agujero circular

Function	[0, 1]
$M_{1,2}(\eta)$	$(1 - \eta)^2$
$M_{2,2}(\eta)$	$2\eta(1 - \eta)$
$M_{3,2}(\eta)$	η^2

Tabla A.6

Malla de control para la placa con agujero circular

i	$B_{i,1}$	$B_{i,2}$	$B_{i,3}$
1	$(-1, 0)$	$(-2.5, 0)$	$(-4, 0)$
2	$(-1, \sqrt{2} - 1)$	$(-2.5, 0.75)$	$(-4, 4)$
3	$(1 - \sqrt{2}, 1)$	$(-0.75, 2.5)$	$(-4, 4)$
4	$(0, 1)$	$(0, 2.5)$	$(0, 4)$

Tabla A.7

Valores (w_i) para la placa con agujero circular

i	$w_{i,1}$	$w_{i,2}$	$w_{i,3}$
1	1	1	1
2	$(1 + 1/\sqrt{2})/2$	1	1
3	$(1 + 1/\sqrt{2})/2$	1	1
4	1	1	1

Tabla A.8

A.4. Sólido cilíndrico

El cilindro mostrado en la Fig.25 tiene un radio interior de $r_{in}=1$, y un radio externo de $r_{out}=2$. La longitud del cilindro es $L=5$. La malla gruesa usa funciones base cuadráticas en las tres direcciones paramétricas. La coordenada ξ atraviesa la dirección circunferencial, la coordenada η atraviesa el grosor, y la coordenada ζ atraviesa la longitud.

Los vectores de nudo son:

$$\Xi = \{0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,4\}, H = \{0,0,0,0'5,1,1,1\}, \mathcal{L} = \{0,0,0,1,1,1\}$$

Como cada uno de estos vectores de nudo ha aparecido en un ejemplo anterior, las expresiones analíticas para las correspondientes funciones base unidimensionales pueden ser encontradas en las tablas anteriores. La red de control y los valores (w_i) vienen dados en la Tabla A.9. Funciones base racionales de sólidos son definidas combinando los pesos (w_i) y las funciones base unidimensionales usando la ecuación (14).

Un sólido cilíndrico hueco puede ser desarrollado con un pedazo de NURBS trazando caras opuestas del dominio paramétrico a la misma localización física de modo obvio. Para vectores de nudo abierto, los puntos de control que describen las dos caras son coincidentes. Esto conduce a una solución continua C^0 a través de la interfaz.

Puntos de control y valores (w_i) para el sólido cilíndrico

i	j	$B_{i,j,1}$	$B_{i,j,2}$	$B_{i,j,3}$	$w_{i,j,1}$	$w_{i,j,2}$	$w_{i,j,3}$
1	1	(1, 0, 0)	(1, 0, 2.5)	(1, 0, 5)	1	1	1
1	2	(4/3, 0, 0)	(4/3, 0, 2.5)	(4/3, 0, 5)	1	1	1
1	3	(5/3, 0, 0)	(5/3, 0, 2.5)	(5/3, 0, 5)	1	1	1
1	4	(2, 0, 0)	(2, 0, 2.5)	(2, 0, 5)	1	1	1
2	1	(1, 1, 0)	(1, 1, 2.5)	(1, 1, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
2	2	(4/3, 4/3, 0)	(4/3, 4/3, 2.5)	(4/3, 4/3, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
2	3	(5/3, 5/3, 0)	(5/3, 5/3, 2.5)	(5/3, 5/3, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
2	4	(2, 2, 0)	(2, 2, 2.5)	(2, 2, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
3	1	(0, 1, 0)	(0, 1, 2.5)	(0, 1, 5)	1	1	1
3	2	(0, 4/3, 0)	(0, 4/3, 2.5)	(0, 4/3, 5)	1	1	1
3	3	(0, 5/3, 0)	(0, 5/3, 2.5)	(0, 5/3, 5)	1	1	1
3	4	(0, 2, 0)	(0, 2, 2.5)	(0, 2, 5)	1	1	1
4	1	(-1, 1, 0)	(-1, 1, 2.5)	(-1, 1, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
4	2	(-4/3, 4/3, 0)	(-4/3, 4/3, 2.5)	(-4/3, 4/3, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
4	3	(-5/3, 5/3, 0)	(-5/3, 5/3, 2.5)	(-5/3, 5/3, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
4	4	(-2, 2, 0)	(-2, 2, 2.5)	(-2, 2, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
5	1	(-1, 0, 0)	(-1, 0, 2.5)	(-1, 0, 5)	1	1	1
5	2	(-4/3, 0, 0)	(-4/3, 0, 2.5)	(-4/3, 0, 5)	1	1	1
5	3	(-5/3, 0, 0)	(-5/3, 0, 2.5)	(-5/3, 0, 5)	1	1	1
5	4	(-2, 0, 0)	(-2, 0, 2.5)	(-2, 0, 5)	1	1	1
6	1	(-1, -1, 0)	(-1, -1, 2.5)	(-1, -1, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
6	2	(-4/3, -4/3, 0)	(-4/3, -4/3, 2.5)	(-4/3, -4/3, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
6	3	(-5/3, -5/3, 0)	(-5/3, -5/3, 2.5)	(-5/3, -5/3, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
6	4	(-2, -2, 0)	(-2, -2, 2.5)	(-2, -2, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
7	1	(0, -1, 0)	(0, -1, 2.5)	(0, -1, 5)	1	1	1
7	2	(0, -4/3, 0)	(0, -4/3, 2.5)	(0, -4/3, 5)	1	1	1
7	3	(0, -5/3, 0)	(0, -5/3, 2.5)	(0, -5/3, 5)	1	1	1
7	4	(0, -2, 0)	(0, -2, 2.5)	(0, -2, 5)	1	1	1
8	1	(1, -1, 0)	(1, -1, 2.5)	(1, -1, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
8	2	(4/3, -4/3, 0)	(4/3, -4/3, 2.5)	(4/3, -4/3, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
8	3	(5/3, -5/3, 0)	(5/3, -5/3, 2.5)	(5/3, -5/3, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
8	4	(2, -2, 0)	(2, -2, 2.5)	(2, -2, 5)	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
9	1	(1, 0, 0)	(1, 0, 2.5)	(1, 0, 5)	1	1	1
9	2	(4/3, 0, 0)	(4/3, 0, 2.5)	(4/3, 0, 5)	1	1	1
9	3	(5/3, 0, 0)	(5/3, 0, 2.5)	(5/3, 0, 5)	1	1	1
9	4	(2, 0, 0)	(2, 0, 2.5)	(2, 0, 5)	1	1	1

Tabla A.9

Apéndice B. Selección de nudos durante el refinamiento-h

La dificultad encontrada en el refinamiento-h es cómo determinar donde insertar los nudos. Las posiciones de los nudos pueden ser escogidas siempre por el usuario para aumentar la resolución de rasgos específicos en los alrededores, pero se desea una estrategia de refinamiento global automatizada. La parametrización de un trozo de NURBS en el espacio físico es dependiente no sólo de las posiciones de los puntos de control y el orden polinomial de las funciones base, sino también de los pesos.

En la práctica, colocar un nuevo nudo en medio de un espacio de nudo existente, dividiendo el elemento en dos partes iguales en el dominio paramétrico, a menudo no se acerca a la división del elemento por la mitad en el espacio físico. Complica las cosas aún más el hecho que la inserción de nudo es intrínsecamente un proceso global. Por ejemplo, considere una malla en R^2 definida por $\Xi \times H$

Insertar un nudo $\bar{\xi} \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ en Ξ puede dividir la imagen del borde del elemento $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times \eta_1$ en el espacio físico por la mitad, pero fallar al dividir la imagen de $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times \eta_{m+q+1}$ por la mitad, provocará que ningún valor de nudo único partirá exactamente por la mitad cada elemento en la fila. De todos modos en las mallas descritas por un trozo, el refinamiento requiere seleccionar un valor. La aproximación que se ha desarrollado, ha trabajado bien en los ejemplos que se han considerado, y está descrito debajo para el caso bidimensional.

Cuando se inserta un nudo en $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, se realizan los pasos siguientes:

- (1) Se encuentra las coordenadas físicas correspondiente a (ξ_i, η_1) y (ξ_{i+1}, η_1) , y se calcula el punto medio de la cuerda que los une; llámese a este punto P_1 . De la misma manera, se encuentra P_2 , el punto medio de la cuerda de (ξ_i, η_{m+q+1}) y $(\xi_{i+1}, \eta_{m+q+1})$. Ver la Fig.B.1.

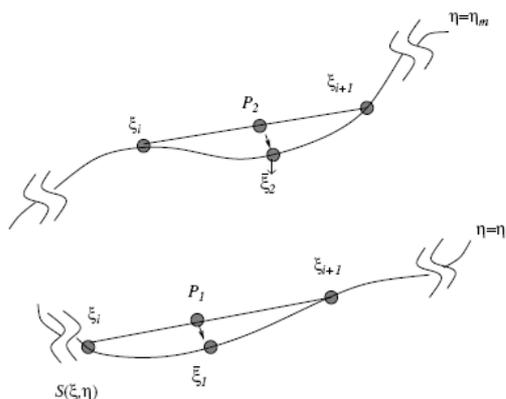


Fig.B.1 – Selección de nudo durante el proceso de refinamiento-h. Aproximación al punto medio P_1 , punto medio de la cuerda conectando con las esquinas del elemento. Inversión del punto para encontrar $\bar{\xi}_1$, parámetro del punto de la curva más cercano a P_1 en la norma Euclídea. Se repite el proceso en el lado contrario del dominio para encontrar $\bar{\xi}_2$. El nudo a insertar es una media ponderada de $\bar{\xi}_1$ y $\bar{\xi}_2$.

- (2) Se realiza la inversión del punto para encontrar $\bar{\xi}_1$ y $\bar{\xi}_2$, las coordenadas ξ reducen al mínimo la distancia entre P_1 y P_2 y los puntos de las imágenes de $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times \eta_1$ y $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times \eta_{m+q+1}$, respectivamente. Ver la Fig.B.1. Esto es hecho utilizando una iteración de Newton.

(3) Se tomamedia ponderada de $\bar{\xi}_1$ y $\bar{\xi}_2$, para conseguir $\bar{\xi}$. Ponderación por la magnitud de la derivada paramétrica $\left\| \frac{dx}{d\xi} \right\|$, donde x es la posición en el espacio físico y $\|\cdot\|$ denota la norma Euclídea. Es decir, el nuevo nudo viene dado por:

$$\bar{\xi} = \frac{\left\| \frac{dx}{d\xi} \right\|_{(\bar{\xi}_1, \eta_1)} \bar{\xi}_1 + \left\| \frac{dx}{d\xi} \right\|_{(\bar{\xi}_2, \eta_{m+q+1})} \bar{\xi}_2}{\left\| \frac{dx}{d\xi} \right\|_{(\bar{\xi}_1, \eta_1)} + \left\| \frac{dx}{d\xi} \right\|_{(\bar{\xi}_2, \eta_{m+q+1})}} \quad (B1)$$

Estamedia ponderada produce una mejor división de un borde donde la posición física cambia rápidamente con variación en el parámetro. Más notablemente, esto cede una mejor división de bordes más largos. Independiente de las longitudes de borde diferentes, si $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2$, entonces $\bar{\xi}$ será puesta también a ese valor. De este modo la exactitud no se pierde en los casos "fáciles".

La Fig.B.2 compara esta aproximación a la selección de nudo con la división uniforme del elemento en el dominio paramétrico. Ambos métodos son aplicados a la malla original de dos elementos mostrada en la Fig.17a. Nóteseque la división uniforme en el espacio paramétrico se traduce en la división uniforme del borde corto (por ejemplo, el círculo) pero en una división bastante no uniforme de los bordes más largos opuestos a él. El esquema abogado se comporta de manera opuesta. La aproximación anterior produce una malla mejor cerca del agujero circular mientras que la última aproximación produce una mallade alguna manera más equilibrada en general. Ambas aproximaciones deberían ser útiles. La cantidad de tiempo utilizada para el proceso de refinamiento es insignificante en comparación con el análisis.

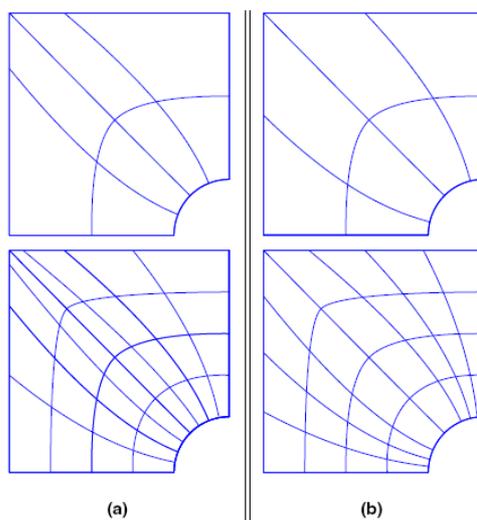


Fig.B.2 – Dos refinamientos-h de mallas de dos elementos - Fig.17a. (a) Elementos divididos uniformemente en el espacio paramétrico (b) Elementos divididos usando el esquema arriba descrito.

BLOQUE IV. Ejemplo de aplicación ANSYS

IV.1.- Introducción:

A continuación se presenta un ejemplo práctico de la aplicación del software ANSYS en un caso propio del diseño y la arquitectura naval.

Se trata de modelar la sección media de un buque definido, para posteriormente aplicar unas condiciones de carga y de contorno que simularán los efectos sufridos en la realidad de la navegación.

El buque de estudio se trata de un petrolero con las siguientes características:

Dimensiones principales	
Esloa total	$L_T = 215,6902 \text{ m}$
Esloa entre perpendiculares	$L = 203,5000 \text{ m}$
Manga	$B = 37,4000 \text{ m}$
Calado	$T = 13,3000 \text{ m}$
Puntal	$D = 18,6000 \text{ m}$

Tripulación	$n = 18$	px
Duración de los trayector	$A = 20$	días
Velocidad de crucero	$V_s = 17$	kn
Densidad del agua dulce	$\rho = 1,025$	t/m^3
Densidad de la carga	$\rho_{\text{cargo}} = 0,8$	t/m^3
Densidad de l combustible	$\rho_{\text{fuel}} = 0,95$	t/m^3

Distancia entre secciones	$\Delta L = 10,175 \text{ m}$
----------------------------------	-------------------------------------------------

Cabe destacar que partimos del buque escantillonado (con la sección media ya definida). A continuación se presenta un boceto de la estructura. Los espesores de las planchas, el material empleado en las diferentes chapas y las diferentes propiedades importantes para este estudio se presentarán más adelante.

Junto con este boceto se presenta el archivo AutoCAD generado para poder dar soporte a la modelización de la sección media del buque y definición de todos y cada uno de los nodos (key-points) que nos servirán de referencia para analizar la sección del buque. Además del archivo AutoCAD nos debemos apoyar sobre una hoja de cálculo para poder realizar los cálculos previos que nos servirán de INPUT para nuestro estudio.

Se debe hacer notar que la condición de estudio parte del buque cargado.

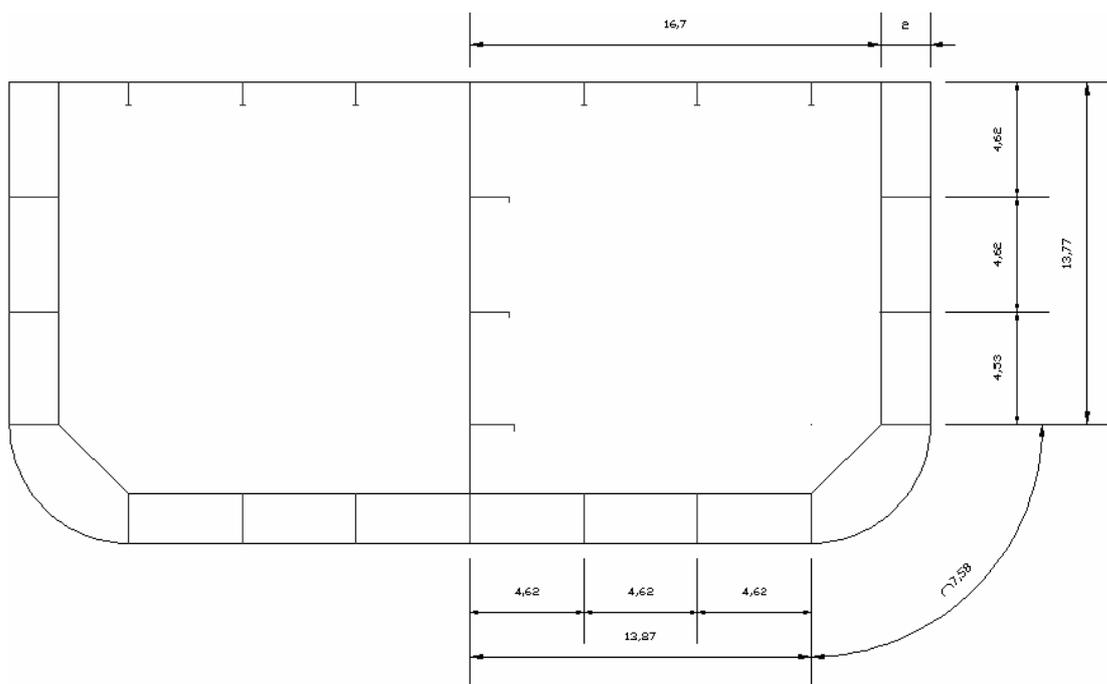


Fig.1 –Boceto del detalle de la sección media del buque a estudiar

El objeto de esta modelización y análisis pretende obtener una distribución de tensiones debidos a fuerzas cortantes y momentos flectores, a lo largo de la estructura estudiada.

Antes de adentrarnos en el caso de estudio se debe recordar que:

El método de los elementos finitos (FEM) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales.

El método se basa en dividir el cuerpo de estudio sobre el que están definidas ciertas ecuaciones integrales que caracterizan el comportamiento físico del problema en una serie de subdominios no intersectantes entre sí denominados "elementos finitos". El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados nodos. Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama malla.

Los cálculos se realizan sobre la malla creada a partir del dominio con programas especiales llamados generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales. La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

Generalmente este método se programa computacionalmente para calcular el campo de desplazamientos y, posteriormente, a través de relaciones cinemáticas y constitutivas las deformaciones y tensiones respectivamente, cuando se trata de un problema de mecánica de sólidos deformables, como es nuestro caso.

Una importante propiedad del método es la convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

IV.2.- Modelización:

Para poder empezar la modelación de la estructura, tal y como se ha explicado anteriormente, se deben crear los key-points que nos definirán nuestra futura estructura. Pero antes, se deben definir las direcciones de los ejes de coordenadas, para que no quede nada expuesto a la duda. Así pues:

- Eje X: En la dirección de la eslora del buque.
- Eje Y: En la dirección de la manga del buque.
- Eje Z: En la dirección del puntal del buque.

Para la definición de los key-points nos apoyaremos en el fichero AutoCAD que nos permite obtener las coordenadas de cada inicio y fin de chapa, que es por lo que vendrán definidos los key-points.



Fig.2–Detalle de la sección media del buque con la definición de las chapas (plates)

Plates			Key Point	X	Y	Z
				[m]	[m]	[m]
Keel	Centre girder		1	0,000	0,000	0,000
Keel	Bottom		2	0,000	1,000	0,000
Bottom			3	0,000	3,200	0,000
Side girder			4	0,000	4,620	0,000
Bottom			5	0,000	5,800	0,000
Bottom			6	0,000	8,800	0,000
Side girder			7	0,000	9,250	0,000
Bottom			8	0,000	11,200	0,000
Bottom	Bilge		9	0,000	13,400	0,000
Side girder			10	0,000	13,870	0,000
Centre girder	Inner bottom	Bulkhead	11	0,000	0,000	2,000
Inner bottom			12	0,000	1,000	2,000
Inner bottom			13	0,000	3,200	2,000
Side girder			14	0,000	4,620	2,000
Inner bottom			15	0,000	5,800	2,000
Inner bottom			16	0,000	8,800	2,000
Side girder			17	0,000	9,250	2,000
Inner bottom			18	0,000	11,200	2,000
Inner bottom	Stool		19	0,000	13,400	2,000
Side girder			20	0,000	13,870	2,000
Bilge			21	0,000	15,378	0,240
Bilge			22	0,000	17,267	1,400
Bilge			23	0,000	18,561	3,680
Side stringer			24	0,000	18,700	4,830
Bilge	Side		25	0,000	18,700	5,667
Stool			26	0,000	15,380	3,500
Side stringer			27	0,000	16,700	4,830
Stool	Inner side		28	0,000	16,700	5,667
Side			29	0,000	18,700	7,667
Side stringer			30	0,000	18,700	9,354
Side			31	0,000	18,700	9,867
Side			32	0,000	18,700	12,067
Side stringer			33	0,000	18,700	13,977
Side			34	0,000	18,700	14,467
Side			35	0,000	18,700	16,467
Side	Deck		36	0,000	18,700	18,600
Inner side			37	0,000	16,700	7,667
Side stringer			38	0,000	16,700	9,354
Inner side			39	0,000	16,700	9,867
Inner side			40	0,000	16,700	12,067

Plates			Key Point	X	Y	Z
				[m]	[m]	[m]
Side stringer			41	0,000	16,700	13,977
Inner side			42	0,000	16,700	14,467
Inner side			43	0,000	16,700	16,467
Inner side	Deck		44	0,000	16,700	18,600
Deck			45	0,000	16,900	18,600
Deck			46	0,000	14,500	18,600
Deck girder			47	0,000	13,873	18,600
Deck			48	0,000	12,100	18,600
Deck			49	0,000	9,700	18,600
Deck girder			50	0,000	9,248	18,600
Deck			51	0,000	7,300	18,600
Deck girder			52	0,000	4,624	18,600
Deck			53	0,000	4,300	18,600
Deck			54	0,000	1,300	18,600
Deck	Bulkhead		55	0,000	0,000	18,600
Bulkhead			56	0,000	0,000	16,000
Bulkhead girder			57	0,000	0,000	13,980
Bulkhead			58	0,000	0,000	13,400
Bulkhead			59	0,000	0,000	10,400
Bulkhead girder			60	0,000	0,000	9,354
Bulkhead			61	0,000	0,000	7,400
Bulkhead girder			62	0,000	0,000	4,827
Bulkhead			63	0,000	0,000	4,400
Deck girder	(plate nº46)		64	0,000	13,978	17,700
Deck girder	(plate nº46)		65	0,000	13,873	17,700
Deck girder	(plate nº46)		66	0,000	13,768	17,700
Deck girder	(plate nº47)		67	0,000	9,353	17,700
Deck girder	(plate nº47)		68	0,000	9,248	17,700
Deck girder	(plate nº47)		69	0,000	9,143	17,700
Deck girder	(plate nº48)		70	0,000	4,729	17,700
Deck girder	(plate nº48)		71	0,000	4,624	17,700
Deck girder	(plate nº48)		72	0,000	4,519	17,700
Bulkhead girder	(plate nº55)		73	0,000	1,600	13,980
Bulkhead girder	(plate nº55)		74	0,000	1,600	13,820
Bulkhead girder	(plate nº56)		75	0,000	1,600	9,354
Bulkhead girder	(plate nº56)		76	0,000	1,600	9,154
Bulkhead girder	(plate nº57)		77	0,000	1,800	4,827
Bulkhead girder	(plate nº57)		78	0,000	1,800	4,507

Plates		Key Point	X	Y	Z
			[m]	[m]	[m]
Transversal girder deck		79	-3,750	0,000	17,700
Transversal girder deck		80	-3,645	0,000	17,700
Transversal girder deck		81	-3,855	0,000	17,700
Transversal girder deck		82	-3,645	4,519	17,700
Transversal girder deck		83	-3,855	4,519	17,700
Transversal girder deck		84	-3,645	4,729	17,700
Transversal girder deck		85	-3,855	4,729	17,700
Transversal girder deck		86	-3,645	9,143	17,700
Transversal girder deck		87	-3,855	9,143	17,700
Transversal girder deck		88	-3,645	9,353	17,700
Transversal girder deck		89	-3,855	9,353	17,700
Transversal girder deck		90	-3,645	13,768	17,700
Transversal girder deck		91	-3,855	13,768	17,700
Transversal girder deck		92	-3,645	13,978	17,700
Transversal girder deck		93	-3,855	13,978	17,700
Transversal girder deck		94	-3,750	16,700	17,700
Transversal girder deck		95	-3,645	16,700	17,700
Transversal girder deck		96	-3,855	16,700	17,700
Transversal girder blkh		97	-3,750	1,600	17,700
Transversal girder blkh		98	-3,600	1,600	17,700
Transversal girder blkh		99	-3,900	1,600	17,700
Transversal girder blkh		100	-3,600	1,600	13,980
Transversal girder blkh		101	-3,900	1,600	13,980
Transversal girder blkh		102	-3,600	1,600	13,820
Transversal girder blkh		103	-3,900	1,600	13,820
Transversal girder blkh		104	-3,600	1,600	9,354
Transversal girder blkh		105	-3,900	1,600	9,354
Transversal girder blkh		106	-3,600	1,600	9,154
Transversal girder blkh		107	-3,900	1,600	9,154
Transversal girder blkh		108	-3,600	1,800	4,827
Transversal girder blkh		109	-3,900	1,800	4,827
Transversal girder blkh		110	-3,600	1,800	4,507
Transversal girder blkh		111	-3,900	1,800	4,507
Transversal girder blkh		112	-3,750	1,800	2,000
Transversal girder blkh		113	-3,600	1,800	2,000
Transversal girder blkh		114	-3,900	1,800	2,000

Como se puede ver en la tabla obtenida, se han definido además de todos los puntos de uniones entre chapas, lo que se ha llamado "transversal girder". Este anillo corresponde a la estructura transversal del buque de estudio y que será espaciado una distancia de 3,75 metros. Además debemos tener en cuenta que este refuerzo transversal tendrá un perfil T, tanto en el mamparo longitudinal como en la cubierta. No será así ni en el costado, ni en el pantoque, ni en el fondo, ya que se hace coincidir exactamente con sus respectivas estructuras interiores. Esto es un hecho que se da en la realidad en la construcción naval. Eso sí, viene acompañado por una reducción de pesos mediante agujeros practicados en las chapas, ya sea para que la estructura sea menos pesada, como para permitir el paso de fluidos a través de ella, así como de personas para poder realizar posibles inspecciones. Cabe tener en cuenta, que se tomará un espesor de 20 mm para este refuerzo transversal excepto en las zonas del bulkhead y de la cubierta donde se asemejará a los valores de los refuerzos longitudinales de dichas estructuras.

Una vez definidos los key-points, y mediante la unión de los mismos, se deberá tratar de conseguir las áreas que definan nuestros elementos estructurales. Para poder hacer eso, antes se ejecutará un comando llamado generador de key-points, que lo que hará será generarnos los key-points gemelos a los anteriormente definidos (todos, excepto los del transversal girder) desplazados la distancia de 3,75 m, anteriormente comentada.

Así pues, se acaban de generar los mismos puntos que teníamos en $x = 0$, pero esta vez en $x = -3,75$.

Con todo ello se puede empezar a definir áreas. A modo de ejemplo definiremos la chapa de la quilla (keelplate), que queda definida por los key-points 1 y 2 en el plano donde $x = 0$ y por los key-points generados correspondientes a los mismos valores de y , z con un valor de $x = -3,75$ (key-points 115 y 116). En la hoja de cálculo se puede ver perfectamente la definición de todas las áreas creadas. Es muy importante tener en cuenta el hecho de que al crear áreas se debe seguir una secuencia correcta. Por ejemplo, para la chapa definida (quilla) se debe crear con el comando: A,1,2,116,115. Si esta sucesión fuera 1,2,115,116 el área estaría mal definida al cruzar una línea por en medio da la misma.

Cabe destacar la importancia de este tipo de asuntos y se debe ser muy cuidadoso con ellos, ya que cualquier pequeño descuido produce errores muy difíciles de detectar a posteriori.

Un ítem muy a tener en cuenta es el hecho de crear todas las áreas correspondientes a elementos que posean su pieza simétrica en la otra "mitad" de la sección con respecto al eje Z (tanto áreas longitudinales como transversales). Una vez realizado esto se podrá proceder a realizar la simetría de los elementos comentados. Y una vez acabada la simetría se podrán colocar los elementos restantes, en nuestro caso, mamparo longitudinal, refuerzos longitudinales del mismo y centre girder.

Una vez hecha la simetría y adjuntado las piezas "no simétricas" a la sección se podrá observar algo como lo siguiente:

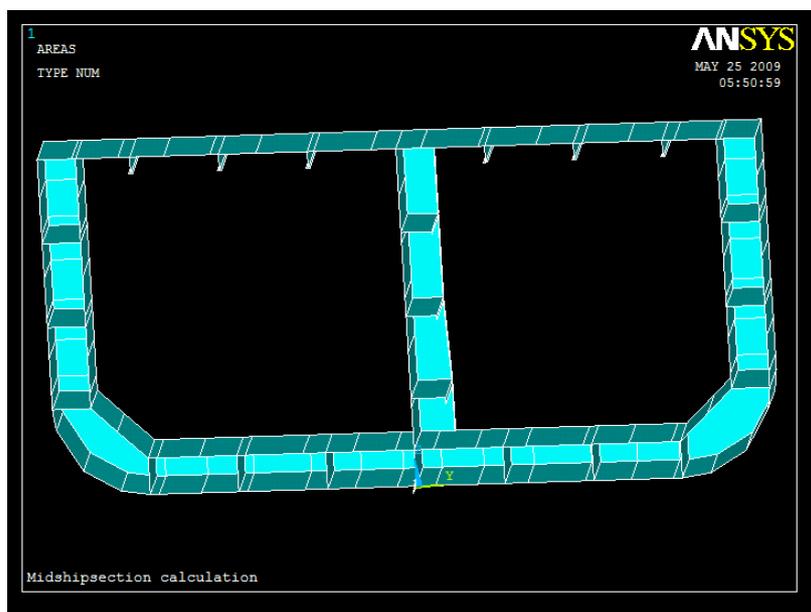


Fig.3 – Sección media del buque de estudio

En la imagen extraída de la modelación en ANSYS se puede observar perfectamente los elementos que componen la sección del buque de estudio incluido el citado anillo transversal que cubre perfectamente el área que anteriormente se había definido.

La siguiente acción a realizar es la creación de un mamparo transversal, que cubra toda la sección. Este mamparo debe tener unas propiedades especiales, ya que debe servir para poder aplicar posteriormente las fuerzas que actuarán sobre la estructura sin poder deformarse. Para ello se ha considerado que dicho mamparo debe tener un espesor igual a 50 mm.

En este apartado es muy importante ser muy cuidadosos con la definición de este elemento. Se debe tratar de definirlo con los máximos key-points que sean posibles. Por el contrario, para el resto de áreas creadas se ha tratado de definir las a través de áreas rectangulares con 4 key-points. En zonas especiales, como puede ser el pantoque, también se ha tratado de generar áreas con los máximos números de puntos posibles.

Así pues, se puede decir que a mayor complicación de la zona a estudiar mayor deben ser el número de key-points para definir dicha parte de la estructura.

Una vez completado la definición de áreas el siguiente paso será asignar propiedades a estas áreas. Pero este es un punto en el que nos deberemos detener para tratar de explicar cómo se debe definir.

En primer lugar definiremos el tipo de elemento que estamos utilizando:

ET,1,shell93

En segundo lugar las propiedades del material, en este caso acero, definidas por su módulo de Young y su coeficiente de Poisson:

MP,EX,1,200E3

MP,PRXY,1,0.3

Y el tercer elemento a reparar en él serán los espesores de cada una de las chapas.

Si se observa con detenimiento la sección definida se puede ver claramente que se han obviado los refuerzos longitudinales (stiffeners). Pero este suceso debe verse reflejado en el espesor de la estructura. Por tanto, ¿Cuál será la solución? Se deberá calcular el área seccional de dichos refuerzos y agregar esa área a través de la conversión a un espesor equivalente. Para entender mejor lo realizado se tratará de resumir brevemente los pasos a seguir, para posteriormente presentar la tabla de cálculos.

- Obtener el área seccional de cada tipo de los refuerzos.
- Contar el número de refuerzos que están encima de cada plancha.
- Multiplicar estos dos valores anteriores, para conseguir un área total.
- Dividir esta área total con la anchura de la plancha para encontrar un espesor añadido a la plancha.
- Sumar este espesor añadido con el original de la plancha para obtener el espesor equivalente que aplicaremos directamente en los cálculos de ANSYS.

Nota: Se podría calcular un espesor equivalente para un conjunto de chapas más o menos homogéneo, pero se ha decidido tratar cada chapa por separado.

	Plates	b	t	nº stff.	Area stff.	T. Area stff.	t _{eq}	t _{ANSYS}
		[m]	[m]		[cm ²]	[cm ²]	[mm]	[mm]
1	Keel	1,000	0,018	1	58,8	58,8	5,9	23,9
2	Bottom	2,200	0,014	3	58,8	176,4	8,0	22,0
3	Bottom	2,600	0,014	1	58,8	58,8	2,3	16,3
				1	58,8	58,8	2,3	16,3
4	Bottom	3,000	0,014	4	58,8	235,2	7,8	21,8
5	Bottom	2,400	0,014					14,0
				2	58,8	117,6	4,9	18,9
6	Bottom	2,200	0,014	3	58,8	176,4	8,0	22,0
7	Bilge	2,000	0,022					22,0
								22,0
8	Bilge	2,230	0,022					22,0

	Plates	b	t	nº stff.	Area stff.	T. Area stff.	t _{eq}	t _{ANSYS}
		[m]	[m]		[cm ²]	[cm ²]	[mm]	[mm]
9	Bilge	2,660	0,022					22,0
10	Bilge	2,000	0,022					22,0
				1	73,3	73,3	3,7	25,7
11	Inn. Bottom	1,000	0,014	1	62,2	62,2	6,2	20,2
12	Inn. Bottom	2,200	0,014	3	62,2	186,6	8,5	22,5
13	Inn. Bottom	2,600	0,014	1	62,2	62,2	2,4	16,4
				1	62,2	62,2	2,4	16,4
14	Inn. Bottom	3,000	0,014	4	62,2	248,8	8,3	22,3
15	Inn. Bottom	2,400	0,014					14,0
				2	62,2	124,4	5,2	19,2
16	Inn. Bottom	2,200	0,014	3	62,2	186,6	8,5	22,5
17	Stool	3,000	0,016					16,0
				2	62,2	124,4	4,1	20,1
18	Stool	2,600	0,016	2	62,2	124,4	4,8	20,8
				1	73,3	73,3	2,8	18,8
19	Inn. Side	2,000	0,016	2	73,3	146,6	7,3	23,3
20	Inn. Side	2,200	0,014	2	73,3	146,6	6,7	20,7
								14,0
21	Inn. Side	2,200	0,014	3	73,3	219,9	10,0	24,0
22	Inn. Side	2,400	0,014	2	73,3	146,6	6,1	20,1
								14,0
23	Inn. Side	2,000	0,014	3	49,7	149,1	7,5	21,5
24	Inn. Side	2,130	0,016	2	49,7	99,4	4,7	20,7
25	Centre girder	2,000	0,016	2	49,7	99,4	5,0	21,0
26	Side girder	2,000	0,012	2	49,7	99,4	5,0	17,0
27	Side girder	2,000	0,012	2	49,7	99,4	5,0	17,0
28	Side girder	2,000	0,012	2	49,7	99,4	5,0	17,0
29	Side stringer	2,000	0,014	2	69,6	139,2	7,0	21,0
30	Side stringer	2,000	0,014	2	69,6	139,2	7,0	21,0
31	Side stringer	2,000	0,014	2	69,6	139,2	7,0	21,0
32	Side shell	2,000	0,016	2	57,4	114,8	5,7	21,7
								16,0
33	Side shell	2,200	0,016	2	57,4	114,8	5,2	21,2
								16,0
34	Side shell	2,200	0,016	3	57,4	172,2	7,8	23,8
35	Side shell	2,400	0,016	2	57,4	114,8	4,8	20,8
								16,0
36	Side shell	2,000	0,016	3	45,5	136,5	6,8	22,8
37	Sheer strake side	2,130	0,016	2	45,5	91	4,3	20,3
38	Sheer strake deck	1,800	0,016	2	29,6	59,2	3,3	19,3
39	Deck	2,400	0,016					16,0
				3	29,6	88,8	3,7	19,7
40	Deck	2,400	0,016					16,0
				2	29,6	59,2	2,5	18,5

Plates		b	t	nº stff.	Area stff.	T. Area stff.	t _{eq}	t _{ANSYS}
		[m]	[m]		[cm ²]	[cm ²]	[mm]	[mm]
41	Deck	2,400	0,016	3	29,6	88,8	3,7	19,7
42	Deck	2,400	0,016	2	29,6	59,2	2,5	18,5
43	Deck	3,000	0,016	3	29,6	88,8	3,0	19,0
44	Deck	3,000	0,016	4	29,6	118,4	3,9	19,9
45	Deck	1,300	0,016	1	29,6	29,6	2,3	18,3
46	Deck girder	0,900	0,016					16,0
		0,210	0,020					20,0
47	Deck girder	0,900	0,016					16,0
		0,210	0,020					20,0
48	Deck girder	0,900	0,016					16,0
		0,210	0,020					20,0
49	Bulkhead	2,600	0,014	3	37,3	111,9	4,3	18,3
50	Bulkhead	2,600	0,014	2	37,3	74,6	2,9	16,9
51	Bulkhead	3,000	0,014	4	69,6	278,4	9,3	23,3
52	Bulkhead		0,014	1	69,6	69,6	2,3	16,3
				2	69,6	139,2	4,6	18,6
53	Bulkhead		0,014	3	69,6	208,8	7,0	21,0
								14,0
54	Bulkhead	2,400	0,014	3	58,3	174,9	7,3	21,3
55	Bulkh. girder	1,600	0,018					18,0
		0,160	0,024					24,0
56	Bulkh. girder	1,600	0,024					24,0
		0,200	0,028					28,0
57	Bulkh. girder	1,800	0,026					26,0
		0,320	0,030					30,0
	Transversal girder deck	0,900	0,016					16,0
		0,210	0,020					20,0
	Transversal girder bulkhead	1,600	0,026					26,0
		0,300	0,030					30,0
	Transversal girder bulkhead	1,600	0,026					26,0
		0,300	0,030					30,0
	Transversal girder bulkhead	1,800	0,026					26,0
		0,300	0,030					30,0
	Heavy plate		0,050					50,0
	Transversal girder		0,020					20,0

Una vez calculado el espesor equivalente de cada chapa se deberá crear un algoritmo en la hoja de cálculo para que asocie el espesor correspondiente a la chapa que queremos y que estará definida en ANSYS mediante un área.

Una vez hecho esto, se introducirá una selección de comandos como los que trataremos de explicar a continuación:

```
ASEL,S,,,Ai, Aj, Δ  
AATT,MAT,REAL,TYPE
```

Vamos a explicar la sintaxis de este comando. El algoritmo para ASEL sería el siguiente;

- Selecciona area
- Desde al area i
- Hasta el area j
- Con un incremento de Δ areas

Y para el comando AATT:

- Para el área o áreas seleccionadas asigna el material, espesor (que debemos definir anteriormente) y tipo de elemento.

Desarrollando este algoritmo para todas las áreas se consigue darle las propiedades deseadas a los elementos estructurales previamente definidos como áreas. Una vez aplicadas las propiedades, se deberá ejecutar el comando para generar áreas. Esta función nos ayudará a poder generar la totalidad de nuestro bloque, que tendrá una longitud de 30 metros. Recordemos que el mamparo transversal no debe ser nuevamente regenerado. El resto de elementos sí deberán ser abarcados por esta función. Así pues, se puede observar el modelado de la sección estudiada.

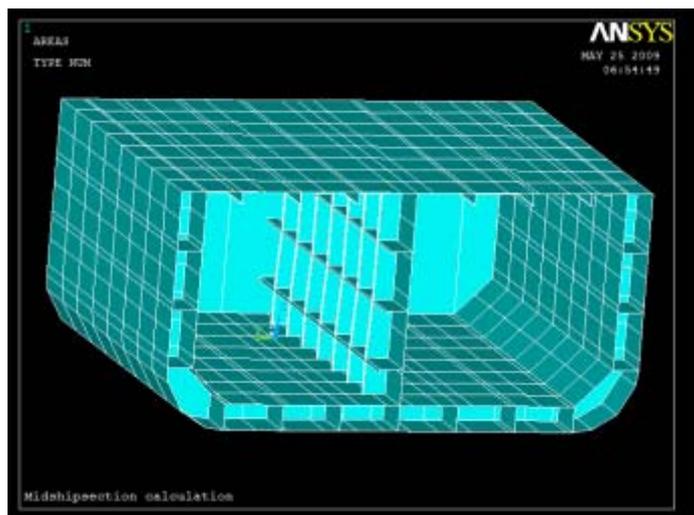


Fig.4 – Bloque completo de estudio del buque

Para finalizar el pre-proceso solo resta unir las áreas (AGLUE) para que las cargas puedan distribuirse a lo largo de la estructura. Este comando nos dará muchos problemas a lo largo del desarrollo del proyecto.

Además, se procederá a realizar la malla necesaria para poder analizar la estructura bajo diferentes tipos de cargas. El tamaño de la malla tendrá gran importancia a la hora de realizar los cálculos. A mayor tamaño de malla, menor tiempo requerido para realizar los cálculos pero también menor precisión en los cálculos. A menor tamaño de malla, mejor fiabilidad de los cálculos, pero también mayor tiempo empleado.

En el presente estudio se ha decidido tomar un tamaño de malla de 800 mm, equivalente al mayor de los espaciados entre refuerzos longitudinales de la sección media del buque. A continuación se procede a presentar una serie de representaciones gráficas que ANSYS nos da la posibilidad de visualizar.

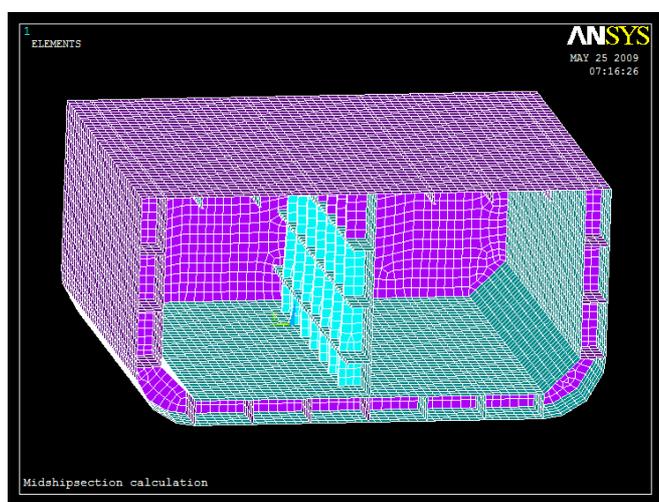


Fig.5 – Mallado del bloque de estudio

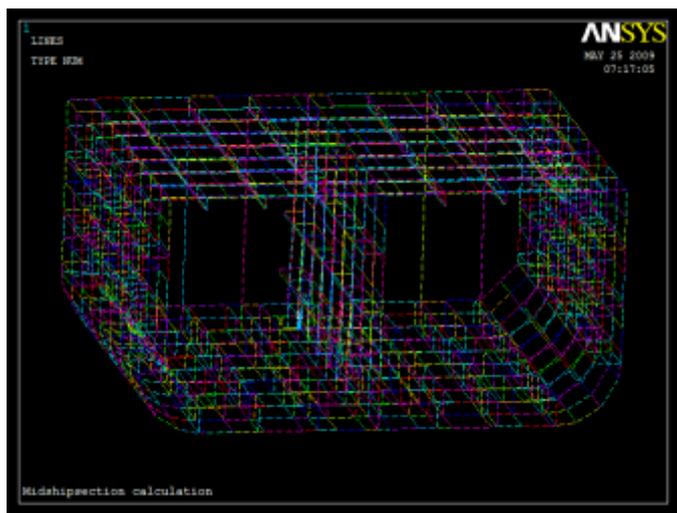


Fig.6 – Líneas que definen el bloque de estudio

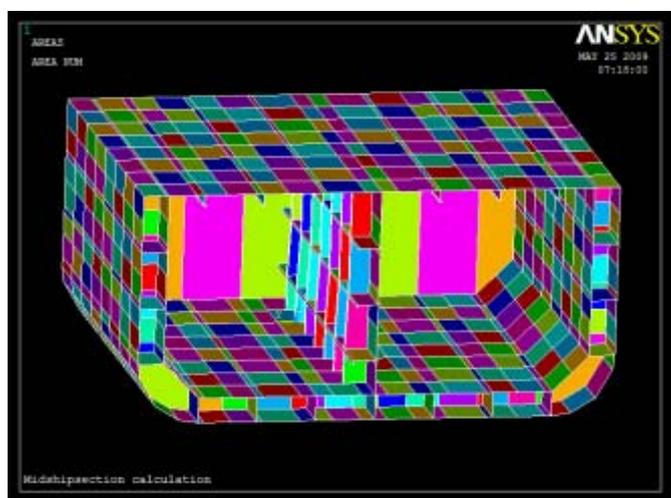


Fig.7 – Áreas existentes en el bloque estructural

Por último se presenta una gráfica donde se puede observar el amplio rango de espesores que posee la sección media.

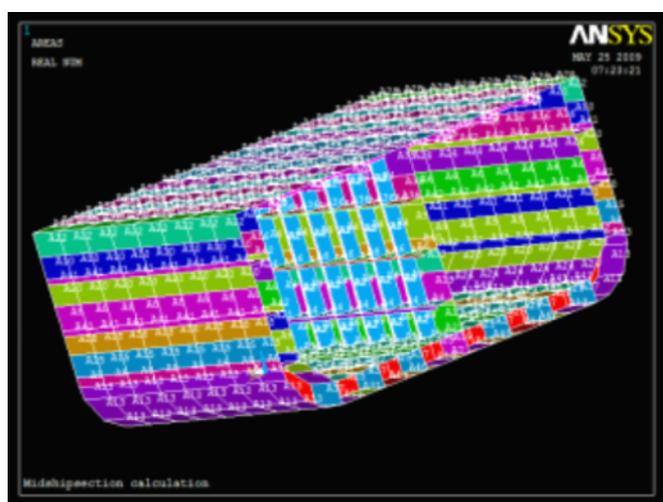


Fig.8 – Rango de espesores de las chapas

IV.3.- Condiciones de contorno:

Una vez cumplido uno de los objetivos fundamentales, el conocimiento del modelado, vamos a tratar de analizar lo que le sucedería a la estructura de estudio si se le aplicara una serie de cargas. Para poder hacer eso, en primer lugar se debe definir las condiciones de contorno.

En ellas se definirá el hecho que en la posición opuesta al mamparo transversal se deben aplicar las siguientes condiciones:

- Desplazamiento en el eje $x = 0$
- Desplazamiento en el eje $y = 0$
- Desplazamiento en el eje $z = 0$
- Rotación con respecto al eje $x = 0$
- Rotación con respecto al eje $y = 0$
- Rotación con respecto al eje $z = 0$

IV.4.- Aplicación de cargas:

Una vez definidas las condiciones de contorno se tratará de aplicar las siguientes 4 condiciones de carga:

- Fuerzas cortantes verticales
- Fuerzas cortantes horizontales
- Momentos flectores verticales
- Momentos flectores horizontales

Para aplicar dichas fuerzas y poder generar en la estructura una distribución de tensiones cortantes o normales, se debe conocer el área asociada a cada nodo, ya que el procedimiento de ANSYS así lo requiere.

Para el cálculo de dichas áreas se deben definir 2 tipos de áreas que encontraremos en nuestra estructura:

- Áreas rectas:

$$A = \frac{z_{i-1} - z_i}{2} \cdot t_i + \frac{z_i - z_{i+1}}{2} \cdot t_{i+1} + \frac{y_{i-1} - y_i}{2} \cdot t_i + \frac{y_i - y_{i+1}}{2} \cdot t_{i+1}$$

- Áreas
inclinadas:

$$A = \sqrt{\left(\frac{z_{i-1} - z_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_{i-1} - y_i}{2}\right)^2} \cdot t_i + \sqrt{\left(\frac{z_i - z_{i+1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_i - y_{i+1}}{2}\right)^2} \cdot t_{i+1}$$

Además, se debe recordar que existen áreas donde confluyen varias líneas y que por tanto la definición de áreas se dará como suma de las áreas nodales calculadas para cada línea confluyente. A continuación se muestra la tabla realizada en la hoja de cálculo para el cálculo de áreas nodales y donde se puede observar los nodos de confluencia especialmente reseñados:

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
37	20,3	1963	0	18700	18600	3613,4
	20,3	1968	0	18700	18244	7216,7
	20,3	1967	0	18700	17889	7206,5
	20,3	1966	0	18700	17534	7216,7
	20,3	1965	0	18700	17178	7226,8
	20,3	1964	0	18700	16822	7216,7
36	22,8	1912	0	18700	16467	7399,5
	22,8	1917	0	18700	16134	7603,8
	22,8	1916	0	18700	15800	7603,8
	22,8	1915	0	18700	15467	7592,4
	22,8	1914	0	18700	15134	7603,8
	22,8	1913	0	18700	14800	7603,8
35-up	16	1895	0	18700	14467	5756,2
	16	1896	0	18700	14222	3920,0
35-down	20,8	1645	0	18700	13977	5267,2
	20,8	1859	0	18700	13659	6624,8
	20,8	1858	0	18700	13340	6624,8
	20,8	1857	0	18700	13022	6614,4
	20,8	1856	0	18700	12704	6624,8
	20,8	1855	0	18700	12385	6624,8
34	23,8	1804	0	18700	12067	7674,5
	23,8	1809	0	18700	11700	8722,7
	23,8	1808	0	18700	11334	8722,7
	23,8	1807	0	18700	10967	8734,6
	23,8	1806	0	18700	10600	8722,7
	23,8	1805	0	18700	10234	8722,7
33-up	16	1787	0	18700	9867	6419,3
	16	1788	0	18700	9610,5	4104,0
33-down	21,2	1594	0	18700	9354	5032,7
	21,2	1751	0	18700	9072,8	5960,4
	21,2	1750	0	18700	8791,7	5960,4
	21,2	1749	0	18700	8510,5	5961,4
	21,2	1748	0	18700	8229,3	5960,4
	21,2	1747	0	18700	7948,2	5960,4
32	21,7	1696	0	18700	7667	6597,0
	21,7	1701	0	18700	7333,7	7233,7
	21,7	1700	0	18700	7000,3	7233,7
	21,7	1699	0	18700	6667	7232,6
	21,7	1698	0	18700	6333,7	7233,7
	21,7	1697	0	18700	6000,3	7233,7
10-up	25,7	556	0	18700	5667	6304,5
	25,7	559	0	18700	5457,8	5377,7
	25,7	558	0	18700	5248,5	5379,0
	25,7	557	0	18700	5039,2	5377,7

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
10-down	22	522	0	18700	4830	5874,1
	22	525	0	18665	4542,5	6371,7
	22	524	0	18630	4255	6370,4
	22	523	0	18596	3967,5	6370,4
9	22	454	0	18561	3680	6791,9
	22	461	0	18399	3395	7206,7
	22	460	0	18238	3110	7206,7
	22	459	0	18076	2825	7212,1
	22	458	0	17914	2540	7212,1
	22	457	0	17752	2255	7212,1
	22	456	0	17590	1970	7206,7
8	22	455	0	17429	1685	7206,7
	22	403	0	17267	1400	7671,5
	22	408	0	16952	1206,7	8131,4
	22	407	0	16637	1013,3	8131,4
	22	406	0	16322	820	8121,6
	22	405	0	16008	626,67	8121,8
7-up	22	404	0	15693	433,33	8131,2
	22	369	0	15378	240	8264,8
	22	372	0	15001	180	8398,4
	22	371	0	14624	120	8398,4
	22	370	0	14247	60	8398,4
	22	352	0	13870	0	4199,2
29	21	522	0	18700	4830	3496,5
	21	1554	0	18367	4830	7003,5
	21	1555	0	18033	4830	7003,5
	21	1556	0	17700	4830	6993,0
	21	1557	0	17367	4830	7003,5
	21	1558	0	17033	4830	7003,5
	21	1009	0	16700	4830	3496,5
30	21	1594	0	18700	9354	3496,5
	21	1595	0	18367	9354	7003,5
	21	1596	0	18033	9354	7003,5
	21	1597	0	17700	9354	6993,0
	21	1598	0	17367	9354	7003,5
	21	1599	0	17033	9354	7003,5
	21	1145	0	16700	9354	3496,5
31	21	1645	0	18700	13977	3496,5
	21	1646	0	18367	13977	7003,5
	21	1647	0	18033	13977	7003,5
	21	1648	0	17700	13977	6993,0
	21	1649	0	17367	13977	7003,5
	21	1650	0	17033	13977	7003,5
	21	1264	0	16700	13977	3496,5

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
38	19,3	1963	0	18700	18600	2895,0
	19,3	2015	0	18400	18600	5790,0
	19,3	2016	0	18100	18600	5790,0
	19,3	2017	0	17800	18600	5790,0
	19,3	2018	0	17500	18600	5790,0
	19,3	2019	0	17200	18600	5790,0
39-right	16	2014	0	16900	18600	3695,0
	16	2065	0	16800	18600	1600,0
	16	1383	0	16700	18600	800,0
24	20,7	1383	0	16700	18600	3684,6
	20,7	1388	0	16700	18244	7358,9
	20,7	1387	0	16700	17889	7348,5
	20,7	1386	0	16700	17534	7358,9
	20,7	1385	0	16700	17178	7369,2
	20,7	1384	0	16700	16822	7358,9
23	21,5	1332	0	16700	16467	7254,0
	21,5	1337	0	16700	16134	7170,3
	21,5	1336	0	16700	15800	7170,3
	21,5	1335	0	16700	15467	7159,5
	21,5	1334	0	16700	15134	7170,3
	21,5	1333	0	16700	14800	7170,3
22-up	14	1315	0	16700	14467	5294,8
	14	1316	0	16700	14222	3430,0
22-down	20,1	1264	0	16700	13977	4910,9
	20,1	1269	0	16700	13659	6401,9
	20,1	1268	0	16700	13340	6401,9
	20,1	1267	0	16700	13022	6391,8
	20,1	1266	0	16700	12704	6401,9
	20,1	1265	0	16700	12385	6401,9
21	24	1213	0	16700	12067	7599,9
	24	1218	0	16700	11700	8796,0
	24	1217	0	16700	11334	8796,0
	24	1216	0	16700	10967	8808,0
	24	1215	0	16700	10600	8796,0
	24	1214	0	16700	10234	8796,0
20-up	14	1196	0	16700	9867	6199,5
	14	1197	0	16700	9610,5	3591,0
20-down	20,7	1145	0	16700	9354	4705,9
	20,7	1150	0	16700	9072,8	5819,8
	20,7	1149	0	16700	8791,7	5819,8
	20,7	1148	0	16700	8510,5	5820,8
	20,7	1147	0	16700	8229,3	5819,8
	20,7	1146	0	16700	7948,2	5819,8

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
19	23,3	1094	0	16700	7667	6793,4
	23,3	1099	0	16700	7333,7	7767,1
	23,3	1098	0	16700	7000,3	7767,1
	23,3	1097	0	16700	6667	7765,9
	23,3	1096	0	16700	6333,7	7767,1
	23,3	1095	0	16700	6000,3	7767,1
18-up	18,8	1060	0	16700	5667	5849,4
	18,8	1063	0	16700	5457,8	3933,9
	18,8	1062	0	16700	5248,5	3934,8
	18,8	1061	0	16700	5039,2	3933,9
18-down	20,8	1009	0	16700	4830	5214,7
	20,8	1014	0	16480	4608,3	6495,8
	20,8	1013	0	16260	4386,7	6495,8
	20,8	1012	0	16040	4165	6496,5
	20,8	1011	0	15820	3943,3	6495,8
	20,8	1010	0	15600	3721,7	6495,8
17-up	20,1	958	0	15380	3500	6815,7
	20,1	963	0	15128	3250	7127,8
	20,1	962	0	14877	3000	7127,8
	20,1	961	0	14625	2750	7134,9
	20,1	960	0	14373	2500	7127,8
	20,1	959	0	14122	2250	7127,8
	20,1	941	0	13870	2000	3567,5
39-left	19,7	1383	0	16700	18600	3615,0
	19,7	2072	0	16333	18600	7220,1
	19,7	2073	0	15967	18600	7220,1
	19,7	2074	0	15600	18600	7229,9
	19,7	2075	0	15233	18600	7220,1
	19,7	2076	0	14867	18600	7220,1
40-right	16	2071	0	14500	18600	6127,0
	16	2123	0	14186	18600	5016,0
40-left	18,5	2122	0	13873	18600	5232,8
	18,5	2140	0	13578	18600	5466,8
	18,5	2141	0	13282	18600	5476,0
	18,5	2142	0	12986	18600	5466,8
	18,5	2143	0	12691	18600	5457,5
	18,5	2144	0	12396	18600	5466,8
41	19,7	2139	0	12100	18600	6678,0
	19,7	2191	0	11700	18600	7880,0
	19,7	2192	0	11300	18600	7880,0
	19,7	2193	0	10900	18600	7880,0
	19,7	2194	0	10500	18600	7880,0
	19,7	2195	0	10100	18600	7880,0

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
42-right	16	2190	0	9700	18600	5748,0
	16	2242	0	9474	18600	3616,0
42-left	18,5	2241	0	9248	18600	4811,5
	18,5	2259	0	8923,3	18600	6006,0
	18,5	2260	0	8598,7	18600	6006,0
	18,5	2261	0	8274	18600	6007,0
	18,5	2262	0	7949,3	18600	6006,0
	18,5	2263	0	7624,7	18600	6006,0
43-right	19	2258	0	7300	18600	6181,2
	19	2310	0	6965,5	18600	6355,5
	19	2311	0	6631	18600	6355,5
	19	2312	0	6296,5	18600	6355,5
	19	2313	0	5962	18600	6355,5
	19	2314	0	5627,5	18600	6355,5
	19	2315	0	5293	18600	6355,5
	19	2316	0	4958,5	18600	6355,5
43-left	16	2309	0	4624	18600	4473,8
	16	2378	0	4462	18600	2592,0
44	19,9	2377	0	4300	18600	5027,3
	19,9	2395	0	3925	18600	7462,5
	19,9	2396	0	3550	18600	7462,5
	19,9	2397	0	3175	18600	7462,5
	19,9	2398	0	2800	18600	7462,5
	19,9	2399	0	2425	18600	7462,5
	19,9	2400	0	2050	18600	7462,5
	19,9	2401	0	1675	18600	7462,5
45	18,3	2394	0	1300	18600	6705,0
	18,3	2463	0	975	18600	5947,5
	18,3	2464	0	650	18600	5947,5
	18,3	2465	0	325	18600	5947,5
	18,3	2462	0	0	18600	2973,8
46-web	16	2122	0	13873	18600	1800,0
	16	2497	0	13873	18375	3600,0
	16	2498	0	13873	18150	3600,0
	16	2499	0	13873	17925	3600,0
	16	2496	0	13873	17700	1800,0
46-flange	20	2530	0	13978	17700	520,0
	20	2531	0	13926	17700	1050,0
	20	2496	0	13873	17700	1060,0
	20	2548	0	13820	17700	1050,0
	20	2547	0	13768	17700	520,0
47-web	16	2241	0	9248	18600	1800,0
	16	2565	0	9248	18375	3600,0
	16	2566	0	9248	18150	3600,0
	16	2567	0	9248	17925	3600,0
	16	2564	0	9248	17700	1800,0

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
47-flange	20	2598	0	9353	17700	525,0
	20	2599	0	9300,5	17700	1050,0
	20	2564	0	9248	17700	1050,0
	20	2616	0	9195,5	17700	1050,0
	20	2615	0	9143	17700	525,0
48-web	16	2309	0	4624	18600	1800,0
	16	2633	0	4624	18375	3600,0
	16	2634	0	4624	18150	3600,0
	16	2635	0	4624	17925	3600,0
	16	2632	0	4624	17700	1800,0
48-flange	20	2666	0	4729	17700	525,0
	20	2667	0	4676,5	17700	1050,0
	20	2632	0	4624	17700	1050,0
	20	2684	0	4571,5	17700	1050,0
	20	2683	0	4519	17700	525,0
17-down	16	941	0	13870	2000	1880,0
	16	942	0	13635	2000	3760,0
16	22,5	890	0	13400	2000	6008,8
	22,5	895	0	13033	2000	8246,3
	22,5	894	0	12667	2000	8246,3
	22,5	893	0	12300	2000	8257,5
	22,5	892	0	11933	2000	8246,3
	22,5	891	0	11567	2000	8246,3
15-right	19,2	839	0	11200	2000	7248,8
	19,2	844	0	10875	2000	6240,0
	19,2	843	0	10550	2000	6240,0
	19,2	842	0	10225	2000	6240,0
	19,2	841	0	9900	2000	6240,0
	19,2	840	0	9575	2000	6240,0
15-left	14	822	0	9250	2000	4695,0
	14	823	0	9025	2000	3150,0
14	22,3	754	0	8800	2000	5756,3
	22,3	761	0	8425	2000	8362,5
	22,3	760	0	8050	2000	8362,5
	22,3	759	0	7675	2000	8362,5
	22,3	758	0	7300	2000	8362,5
	22,3	757	0	6925	2000	8362,5
	22,3	756	0	6550	2000	8362,5
	22,3	755	0	6175	2000	8362,5
13-right	16,4	720	0	5800	2000	6600,3
	16,4	723	0	5505	2000	4838,0
	16,4	722	0	5210	2000	4838,0
	16,4	721	0	4915	2000	4838,0

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
13-left	16,4	686	0	4620	2000	5330,0
	16,4	689	0	4265	2000	5822,0
	16,4	688	0	3910	2000	5822,0
	16,4	687	0	3555	2000	5822,0
12	22,5	635	0	3200	2000	7036,4
	22,5	640	0	2833,3	2000	8249,6
	22,5	639	0	2466,7	2000	8249,6
	22,5	638	0	2100	2000	8250,8
	22,5	637	0	1733,3	2000	8249,6
	22,5	636	0	1366,7	2000	8249,6
11	20,2	591	0	1000	2000	6650,4
	20,2	594	0	750	2000	5050,0
	20,2	593	0	500	2000	5050,0
	20,2	592	0	250	2000	5050,0
	20,2	590	0	0	2000	2525,0
7-down	22	352	0	13870	0	2585,0
	22	353	0	13635	0	5170,0
6	22	301	0	13400	0	6622,0
	22	306	0	13033	0	8063,0
	22	305	0	12667	0	8063,0
	22	304	0	12300	0	8074,0
	22	303	0	11933	0	8063,0
	22	302	0	11567	0	8063,0
5-right	18,9	250	0	11200	0	7108,3
	18,9	255	0	10875	0	6142,5
	18,9	254	0	10550	0	6142,5
	18,9	253	0	10225	0	6142,5
	18,9	252	0	9900	0	6142,5
	18,9	251	0	9575	0	6142,5
5-left	14	233	0	9250	0	4646,3
	14	234	0	9025	0	3150,0
4	21,8	165	0	8800	0	5662,5
	21,8	172	0	8425	0	8175,0
	21,8	171	0	8050	0	8175,0
	21,8	170	0	7675	0	8175,0
	21,8	169	0	7300	0	8175,0
	21,8	168	0	6925	0	8175,0
	21,8	167	0	6550	0	8175,0
	21,8	166	0	6175	0	8175,0
3-right	16,3	131	0	5800	0	6491,8
	16,3	134	0	5505	0	4808,5
	16,3	133	0	5210	0	4808,5
	16,3	132	0	4915	0	4808,5

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
3-left	16,3	97	0	4620	0	5297,5
	16,3	100	0	4265	0	5786,5
	16,3	99	0	3910	0	5786,5
	16,3	98	0	3555	0	5786,5
2	22	46	0	3200	0	6927,0
	22	51	0	2833,3	0	8066,3
	22	50	0	2466,7	0	8066,3
	22	49	0	2100	0	8067,4
	22	48	0	1733,3	0	8066,3
	22	47	0	1366,7	0	8066,3
1	23,9	2	0	1000	0	7021,2
	23,9	5	0	750	0	5975,0
	23,9	4	0	500	0	5975,0
	23,9	3	0	250	0	5975,0
	23,9	1	0	0	0	2987,5
28	17	941	0	13870	2000	2833,1
	17	1518	0	13870	1666,7	5667,0
	17	1517	0	13870	1333,3	5667,0
	17	1516	0	13870	1000	5666,4
	17	1515	0	13870	666,67	5666,7
	17	1514	0	13870	333,33	5666,7
	17	352	0	13870	0	2833,3
27	17	822	0	9250	2000	2833,1
	17	1478	0	9250	1666,7	5667,0
	17	1477	0	9250	1333,3	5667,0
	17	1476	0	9250	1000	5666,4
	17	1475	0	9250	666,67	5666,7
	17	1474	0	9250	333,33	5666,7
	17	233	0	9250	0	2833,3
26	17	686	0	4620	2000	2833,1
	17	1438	0	4620	1666,7	5667,0
	17	1437	0	4620	1333,3	5667,0
	17	1436	0	4620	1000	5666,4
	17	1435	0	4620	666,67	5666,7
	17	1434	0	4620	333,33	5666,7
	17	97	0	4620	0	2833,3
25	21	590	0	0	2000	3499,7
	21	6790	0	0	1666,7	7000,4
	21	6789	0	0	1333,3	7000,4
	21	6788	0	0	1000	6999,6
	21	6787	0	0	666,67	7000,0
	21	6786	0	0	333,33	7000,0
	21	1	0	0	0	3500,0

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
49	18,3	2462	0	0	18600	2973,8
	18,3	6822	0	0	18275	5947,5
	18,3	6823	0	0	17950	5947,5
	18,3	6824	0	0	17625	5947,5
	18,3	6825	0	0	17300	5947,5
	18,3	6826	0	0	16975	5947,5
	18,3	6827	0	0	16650	5947,5
50-up	18,3	6828	0	0	16325	5947,5
	16,9	6821	0	0	16000	5821,4
	16,9	6890	0	0	15663	5686,9
	16,9	6891	0	0	15327	5686,9
	16,9	6892	0	0	14990	5695,3
	16,9	6893	0	0	14653	5686,9
50-down	16,9	6894	0	0	14317	5686,9
	14	6889	0	0	13980	4877,7
51	14	6941	0	0	13690	4060,0
	23,3	6940	0	0	13400	6398,8
	23,3	6958	0	0	13025	8737,5
	23,3	6959	0	0	12650	8737,5
	23,3	6960	0	0	12275	8737,5
	23,3	6961	0	0	11900	8737,5
	23,3	6962	0	0	11525	8737,5
	23,3	6963	0	0	11150	8737,5
52-up	23,3	6964	0	0	10775	8737,5
	16,3	6957	0	0	10400	6504,1
	16,3	7026	0	0	10138	4262,5
	16,3	7027	0	0	9877	4258,4
52-down	16,3	7028	0	0	9615,5	4262,5
	18,6	7025	0	0	9354	5160,2
	18,6	7060	0	0	9028,3	6057,1
	18,6	7061	0	0	8702,7	6057,1
	18,6	7062	0	0	8377	6058,0
	18,6	7063	0	0	8051,3	6057,1
53-up	18,6	7064	0	0	7725,7	6057,1
	21	7059	0	0	7400	6405,8
	21	7111	0	0	7078,4	6753,6
	21	7112	0	0	6756,8	6754,6
	21	7113	0	0	6435,1	6754,7
	21	7114	0	0	6113,5	6753,6
	21	7115	0	0	5791,9	6754,7
	21	7116	0	0	5470,2	6754,6
53-down	21	7117	0	0	5148,6	6753,6
	14	7110	0	0	4827	4871,3
	14	7179	0	0	4613,5	2989,0

plate	t [mm]	Node	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	A [mm ²]
54	21,3	7178	0	0	4400	5754,5
	21,3	7195	0	0	4000	8520,0
	21,3	7196	0	0	3600	8520,0
	21,3	7197	0	0	3200	8520,0
	21,3	7198	0	0	2800	8520,0
	21,3	7199	0	0	2400	8520,0
	21,3	590	0	0	2000	4260,0
55-web	18	6889	0	0	13980	3600,0
	18	7236	0	400	13980	7200,0
	18	7237	0	800	13980	7200,0
	18	7238	0	1200	13980	7200,0
	18	7235	0	1600	13980	3600,0
55-flange	24	7235	0	1600	13980	960,0
	24	7270	0	1600	13900	1920,0
	24	7269	0	1600	13820	960,0
56-web	24	7025	0	0	9354	4800,0
	24	7287	0	400	9354	9600,0
	24	7288	0	800	9354	9600,0
	24	7289	0	1200	9354	9600,0
	24	7286	0	1600	9354	4800,0
56-flange	28	7286	0	1600	9354	1400,0
	28	7321	0	1600	9254	2800,0
	28	7320	0	1600	9154	1400,0
57-web	26	7110	0	0	4827	3900,0
	26	7338	0	300	4827	7800,0
	26	7339	0	600	4827	7800,0
	26	7340	0	900	4827	7800,0
	26	7341	0	1200	4827	7800,0
	26	7342	0	1500	4827	7800,0
	26	7337	0	1800	4827	3900,0
57-flange	30	7337	0	1800	4827	2400,0
	30	7389	0	1800	4667	4800,0
	30	7388	0	1800	4507	2400,0

Nota: La numeración de las planchas es equivalente a las definidas en el fichero de AutoCAD.

Estas áreas calculadas para los nodos con coordenada Y en la parte positiva tendrán su área gemela en el nodo de iguales coordenadas pero con coordenada Y en la parte negativa de los ejes. Estas áreas nodales se pueden encontrar en la hoja de cálculo que se adjunta junto con este PFC.

IV.5.- Fuerzas cortantes verticales:

En primer lugar se aplicará a la estructura estudiada fuerzas cortantes verticales. El procedimiento a seguir es el siguiente:

$$\tau_v = \frac{Q_{sv} + Q_{wv}}{A_v}$$

Dando como INPUT los valores de las fuerzas cortantes existentes en el buque de estudio y realizando el cálculo de las áreas verticales que existen en el mismo, se puede obtener el valor de la tensión tangencial vertical. Multiplicando esta tensión por las áreas nodales de cada nodo obtendremos la fuerza que se debe aplicar a cada nodo (ver hoja de cálculo).

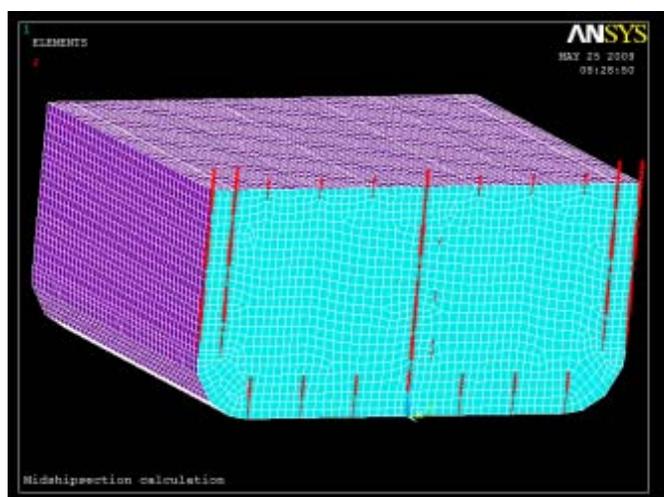


Fig. 9 – Aplicación de fuerzas cortantes verticales

Una vez realizado esto y aplicadas las fuerzas al buque, el resultado obtenido es el siguiente:

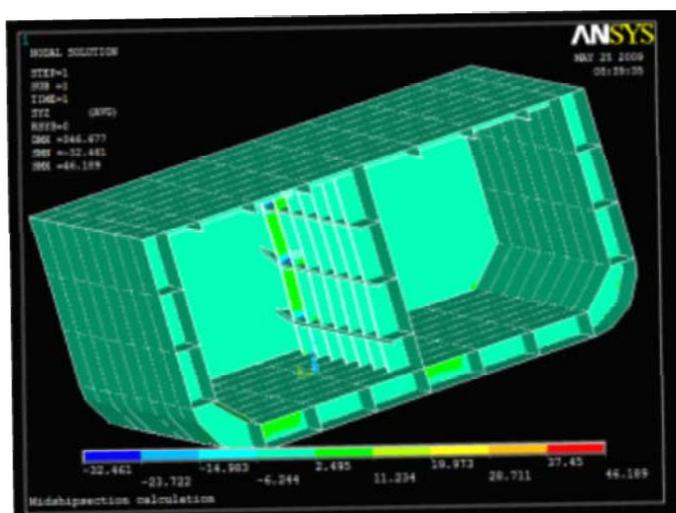


Fig. 10 – Comportamiento de la zona de estudio del buque.

Comentario: Analizando los resultados obtenidos parece que el rango de valores obtenidos es aceptable, pero si nos fijamos detenidamente en la estructura vemos que en la zona del mamparo transversal, los bulkheadgirders están totalmente deformados hacia arriba. ¿Por qué? Sin tener la certeza absoluta podemos decir que puede existir un problema a la hora de ejecutar el comando que permite unir las áreas (AGLUE) ya que las fuerzas aplicadas a la sección no son lo suficientemente grandes como para generar esa deformación. Por tanto, los datos que se pueden extraer de este análisis no serán muy fiables. Es necesario reseñar aquellos apartados en los que ANSYS no da un resultado esperado ya que este hecho ayuda a la hora de aprender y comprender el funcionamiento del software.

IV.6.- Fuerzas cortantes horizontales:

Al igual que se procedió para las fuerzas cortantes verticales, se efectúan los mismos cálculos para las fuerzas cortantes horizontales. El único punto que se debe tener en cuenta es el hecho que la fuerza cortante horizontal viene definido por las reglas con la siguiente expresión. Por lo demás, los cálculos son del mismo tipo.

$$\tau_h = \frac{Q_h}{A_h}$$

Una vez calculada la tensión de corte, $\tau = -7,64$ MPa y multiplicándola por las áreas nodales se encuentran las fuerzas a aplicar en cada nodo:

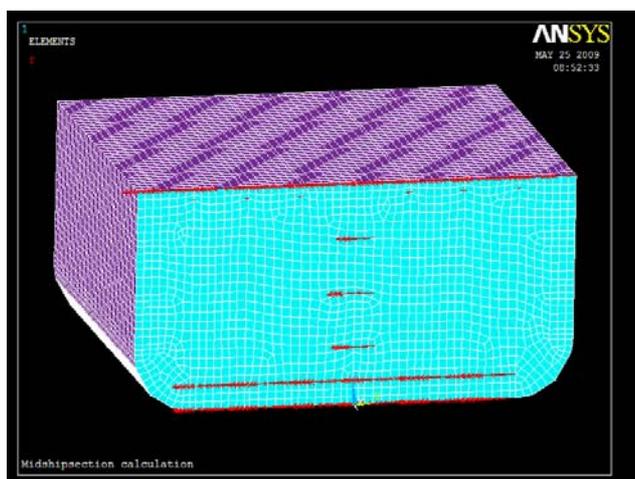


Fig. 11 – Aplicación de fuerzas cortantes horizontales

Representando los resultados obtenidos (distribución de tensiones cortantes) para la aplicación de las fuerzas cortantes horizontales:

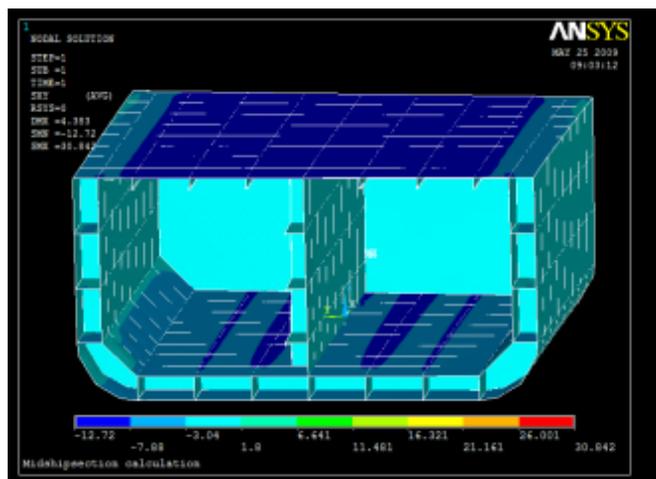
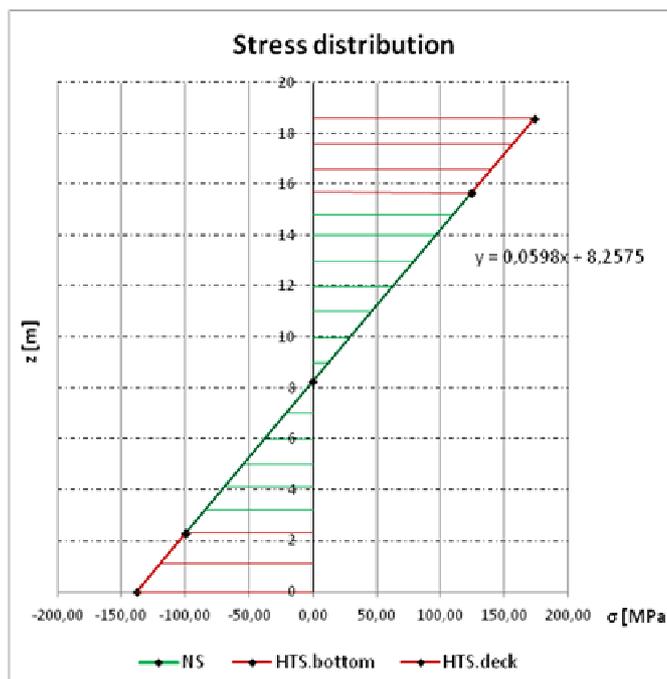


Fig. 12 – Comportamiento de la zona de estudio del buque.

En este caso parece que la estructura no se deforma, aparentemente, y la distribución de tensiones cortantes parece bastante acorde con el hecho de que en los lugares cercanos a los elementos longitudinales estos sufren en mayor grado que el resto.

IV.7.- Momentos flectores verticales:

Hasta este punto se ha observado cómo afectan a la estructura las fuerzas cortantes. A partir de este momento se tratará de analizar lo que ocurre con los momentos flectores. En primer lugar se tratará de analizar el comportamiento de la estructura ante momentos flectores verticales. Para ello se aplican fuerzas axiales a la estructura longitudinal. Se utilizará como INPUT la siguiente distribución de tensiones.



Se aplicará a los nodos de estudio ($x = 0$ e intersección entre el mamparo transversal y elementos longitudinales de la sección) una fuerza F con valor igual a:

$$F = \sigma \cdot A$$

De nuevo, se debe recurrir a la hoja de cálculo para poder saber la cantidad de fuerza que se va a aplicar y sobre qué nodo se va a localizar.

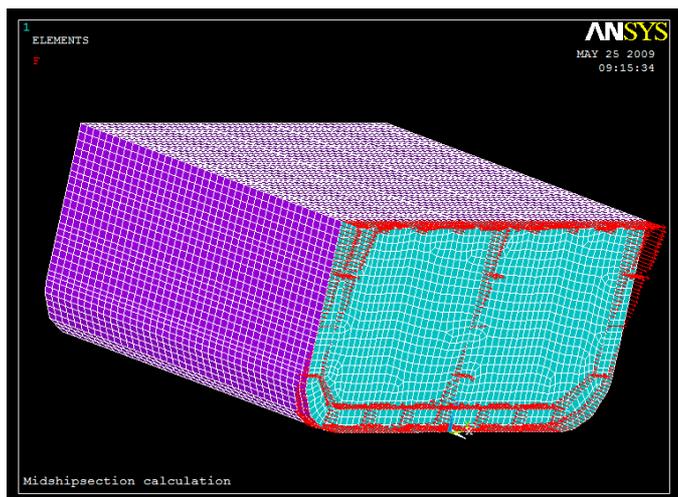


Fig. 13 – Aplicación de fuerzassimulando el comportamiento de la aplicación de momentos flectores verticales.

En la representación se puede observar claramente las fuerzas axiales aplicadas con respecto al eje Y.Y una vez obtenidos los resultados se presenta el gráfico de distribución de tensiones normales:

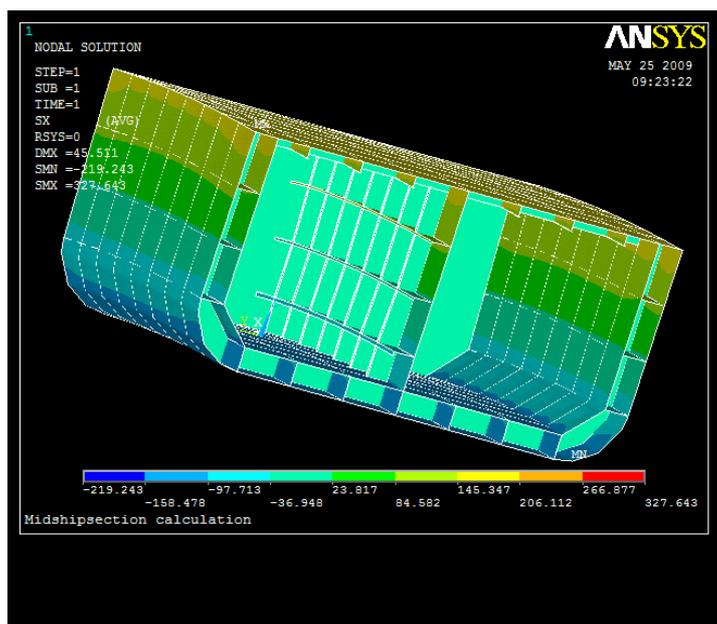


Fig. 14 – Comportamiento de la zona de estudio del buque.

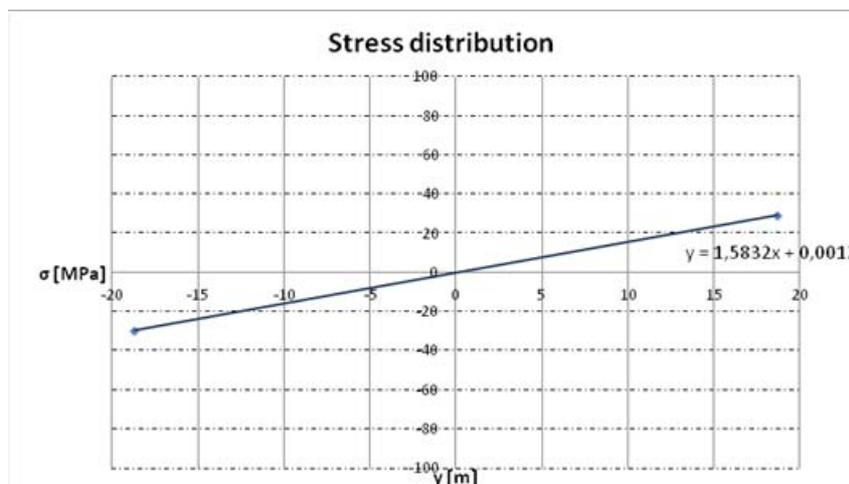
En esta ocasión sí que se puede afirmar que el resultado del cálculo ha sido el esperado. No cabe ninguna duda de que los valores obtenidos son muy razonables.

Se puede observar que la zona de cubierta se encuentra en valores de unos 200 MPa. Si recordamos que en la cubierta (donde se encuentra el acero de alta resistencia con un valor admisible de 355 MPa), y aplicando un coeficiente de seguridad de 0,65 se obtiene un valor admisible de 230 MPa. Por tanto, estamos dentro del rango de seguridad. Por otro lado en el fondo, nos encontramos con exactamente la misma situación. Los valores allí también rondan los 200 MPa y al haber usado el mismo material los cálculos son muy parejos. Otro factor que indica que los resultados son correctos es el hecho que haya un constante cambio de color en cuanto se asciende o desciende dentro de la propia sección.

El único dato que nos hace ser un poco recelosos de estos cálculos es la enorme curvatura que parece coger el casco del buque.

IV.8.- Momentos flectores horizontales:

Los mismos cálculos que se han llevado a cabo en el anterior apartado se tratarán de resolver aquí. El único hecho que varía es que ahora la distribución de fuerzas será en torno al eje Z, y donde la distribución de tensiones (INPUT) viene definida por el comportamiento que muestra el siguiente gráfico:



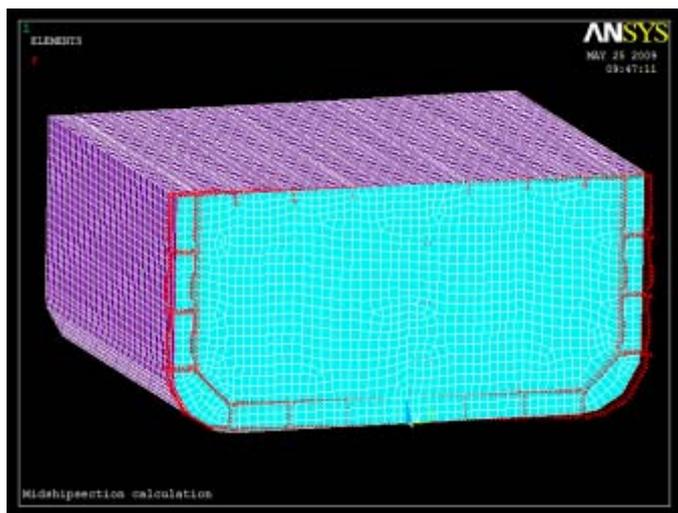


Fig. 15 – Aplicación de fuerzassimulando el comportamiento de la aplicación de momentos flectores verticales.

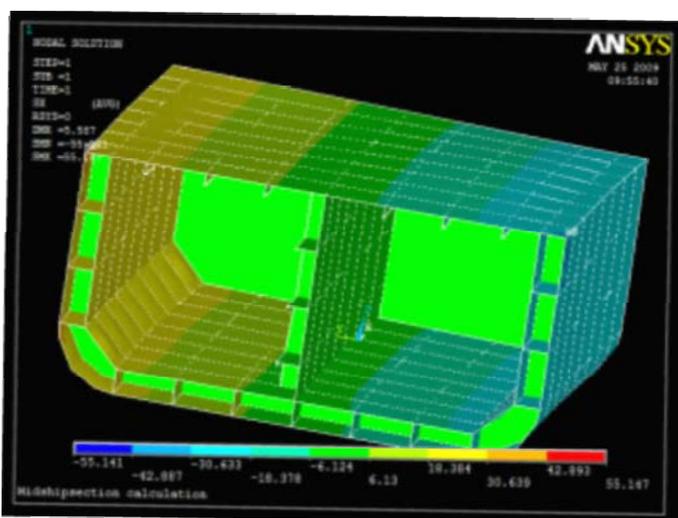


Fig. 16 – Comportamiento de la zona de estudio del buque.

En este caso, y al igual que en el anterior los resultados obtenidos parecen estar bastante en consonancia con la realidad del buque. La distribución vuelve a ser muy homogénea y cambiando progresivamente de color sin zonas de cambios bruscos. Pero vuelve a aparecer esta deformación tan severa en algunos puntos de la estructura. En este caso es fácil observar dicha deformación en la zona de cubierta.

V.- Conclusiones

El presente PFC ha pretendido presentar, a partir de unos conceptos ya conocidos, el método del análisis isogeométrico. Desde un punto de vista teórico éste ha sido el principal objetivo del presente estudio, además de recordar técnicas de refinamiento. Las conclusiones a este estudio se muestran en el apartado correspondiente y no se cree conveniente volver a incidir sobre las ellas.

Desde el punto de vista práctico, y más interesante, se ha resuelto un caso práctico de análisis de deformaciones y tensiones en la sección media de un buque dado (petrolero).

Analizando los resultados obtenidos se pueden observar unos resultados acordes con lo esperado. Por encima de los resultados, que no dejan de ser una constatación de la realidad de un buque ya construido, se debe prestar atención en la forma de obtención de los mismos.

Tal como se ha ido comentando a lo largo del proyecto, la utilización de un software tan específico como es ANSYS requiere de un conocimiento profundo del mismo y de lo que en él se analiza.

Han existido numerosos problemas durante la realización del análisis práctico y concretamente durante la modelización de la sección media del buque.

Se podría definir dos tipos de problemas/errores encontrados; Errores de sintaxis en la programación y problemas derivados de una incorrecta creación del modelo. Los primeros son relativamente sencillos de detectar puesto que el propio software los localiza y se los muestra al usuario. La segunda tipología de problemas es más difícil de detectar puesto que solo se manifiestan con unos resultados finales que distan de la realidad que se espera obtener. Éstos últimos son interesantes de estudiar, pero difíciles de comprender, ya que existen pocas "pistas" que permitan enfocar claramente donde está el error cometido.

A pesar de esos problemas, la misión del ingeniero es poder modelizar y analizar los resultados obtenidos de tal manera que puedan obtener conclusiones de los mismos y este punto es evidente que se ha logrado.

VI.-Bibliografía

- D.F. Rogers, An Introduction to NURBS With Historical Perspective.
- T.J. Barth, Simplified numerical methods for gas dynamics systems on triangulated domains, Ph.D. Thesis.
- M. McMullen, A. Jameson, J.J. Alonso, Application of a non-linear frequency domain solver to the Euler and Navier–Stokes equations.
- M. Gee, W.A. Wall, E. Ramm, Parallel multilevel solutions of nonlinear shell structures.
- G.M. Stanley, Continuum-based shell elements.
- T.J. Barth, Numerical methods for gasdynamic systems on unstructured meshes.
- B. Szabó, A. Düster, E. Rank, The p-version of the finite element method.
- B. Szabó, I. Babuska, Finite Element Analysis.
- E. Rank, A. Düster, V. Nübel, K. Preusch, O.T. Bruhns, High order finite elements for shells.
- S. Abhyankar, C. Bajaj, Automatic parameterization of rational curves and surfaces I: conics and conicoids.
- S. Abhyankar, C. Bajaj, Automatic parameterization of rational curves and surfaces II: cubics and cubicooids.
- S. Abhyankar, C. Bajaj, Automatic parameterization of rational curves and surfaces III: algebraic plane curves.
- S. Abhyankar, C. Bajaj, Automatic parameterization of rational curves and surfaces IV: algebraic space curves.
- C. Bajaj, J. Chen, R. Holt, A. Netravali, Energy formulations of A-splines.
- C. Bajaj, J. Chen, G. Xu, Modeling with cubic A-patches.
- F. Cirak, M. Ortiz, Fully C1-conforming subdivision elements for finite deformation thin shell analysis.
- F. Cirak, M. Ortiz, P. Schröder, Subdivision surfaces: a new paradigm for thin shell analysis.
- F. Cirak, M.J. Scott, E.K. Antonsson, M. Ortiz, P. Schröder, Integrated modeling, finite-element analysis, and engineering design for thin-shell structures using subdivision.
- T.J.R. Hughes, The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.
- L. Piegl, W. Tiller, The NURBS Book (Monographs in Visual Communication).
- P. Kagan, A. Fischer, P.Z. Bar-Yoseph, Mechanically based models: adaptive refinement for B-spline finite element.
- J. Bonet, S. Kulasegaram, M.X. Rodriguez-Paz, M. Profit, Variational formulation for the smooth particle hydrodynamics (SPH) simulation of fluid and solid problems.
- P. Breitenkopf, A. Rassinoux, J. Savignat, P. Villon, Integration constraint in diffuse element method.
- J.S. Chen, W. Dongdong, S.B. Dong, An extended meshfree method for boundary value problems.
- J.S. Chen, V. Kotta, H. Lu, D. Wang, D. Moldovan, D. Wolf, A variational formulation and a double-grid method for mesoscale modeling of stressed grain growth in polycrystalline materials.
- W. Dongdong, J.S. Chen, Locking-free stabilized conforming nodal integration for meshfree Mindlin–Reissner plate formulation.
- G.E. Fasshauer, Toward approximate moving least squares approximation with irregularly spaced centers.
- Fernandez-Mendez, A. Huerta, Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods.
- A. Huerta, S. Fernandez-Mendez, W.K. Liu, A comparison of two formulations to blend finite elements and mesh-free methods.
- A. Huerta, Y. Vidal, P. Villon, Pseudo-divergence-free element free Galerkin method for incompressible fluid flow.
- G. Li, N.R. Aluru, Positivity conditions in meshless collocation methods.
- S. Li, H. Lu, W. Han, W.K. Liu, D. Simkins Jr., Reproducing kernel element method. Part II: globally conforming Im/Cn hierarchies
- W.K. Liu, W. Han, H. Lu, S. Li, J. Cao, Reproducing kernel element method. Part I: theoretical formulation.

- H. Lu, S. Li, D. Simkins Jr., W.K. Liu, J. Cao, Reproducing kernel element method. Part III: generalized enrichment and applications
- T. Rabczuk, T. Belytschko, S.P. Xiao, Stable particle methods based on Lagrangian kernels.
- D. Simkins Jr., S. Li, H. Lu, W.K. Liu, Reproducing kernel element method. Part IV: globally compatible Cn (nP1) triangular hierarchy.
- D. Sulsky, A. Kaul, Implicit dynamics in the material-point method.
- X. Wang, W.K. Liu, Extended immersed boundary method using FEM and RKPM.
- Z. Wu, Dynamically knots setting in meshless method for solving time dependent propagations equation.
- P.L. Gould, Introduction to Linear Elasticity.
- S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells.
- M. Bischoff, Wall W.A., K.U. Bletzinger, E. Ramm, Models and finite elements for thin-walled structures.
- T. Belytschko, H. Stolarski, W.K. Liu, N. Carpenter, J.S.-J. Ong, Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements.
- C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics.
- P. Moin, Fundamentals of Engineering Numerical Analysis.
- T.J.R. Hughes, L.P. Franca, A mixed finite element formulation for Reissner–Mindlin plate theory: uniform convergence of all higher order spaces.
- G. Engel, K. Garikipati, T.J.R. Hughes, M.G. Larson, L. Mazzei, Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity.
- E. Oñate, M. Cervera, Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node: a simple three node triangle.
- E. Oñate, F. Zarate, Rotation-free triangular plate and shell elements.
- R. Phaal, C.R. Calladine, A simple class of finite-elements for plate and shell problems.
- A.N. Brooks, T.J.R. Hughes, Streamline upwind/Petrov–Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations.
- J.E. Akin, T.E. Tezduyar, Calculation of the advective limit of the SUPG stabilization parameter for linear and higher-order elements.
- M. Bischoff, K. Bletzinger, Improving stability and accuracy of Reissner–Mindlin plate finite elements via algebraic subgrid scale stabilization.
- P.B. Bochev, M.D. Gunzburger, J.N. Shadid, On inf-sup stabilized finite element methods for transient problems.
- E. Burman, P. Hansbo, Edge stabilization for Galerkin approximations of convection–diffusion–reaction problems.
- R. Codina, O. Soto, Approximation of the incompressible Navier–Stokes equations using orthogonal subscale stabilization and pressure segregation on anisotropic finite element meshes.
- A.L.G.A. Coutinho, C.M. Diaz, J.L.D. Alvez, L. Landau, A.F.D. Loula, S.M.C. Malta, R.G.S. Castro, E.L.M. Garcia, Stabilized methods and post-processing techniques for miscible displacements.
- V. Gravemeier, W.A. Wall, E. Ramm, A three-level finite element method for the incompressible Navier–Stokes equations.
- I. Harari, Stability of semidiscrete formulations for parabolic problems at small time steps.
- G. Hauke, L. Valiño, Computing reactive flows with a field Monte Carlo formulation and multi-scale methods.
- B. Koobus, C. Farhat, A variational multiscale method for the large eddy simulation of compressible turbulent flows on unstructured meshes - application to vortex shedding.
- A. Masud, R.A. Khurram, A multiscale/stabilized finite element method for the advection–diffusion equation.
- T.E. Tezduyar, S. Sathe, Enhanced-discretization space–time technique (EDSTT).
- F.L. Chalot, Industrial aerodynamics
- C. Johnson, U. Nävert, J. Pitkäranta, Finite element methods for linear hyperbolic problems.
- T.J.R. Hughes, G. Scovazzi, L.P. Franca, Multiscale and stabilized methods.
- T.J.R. Hughes, Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods
- T.J.R. Hughes, G. Feijóo, L. Mazzei, J.B. Quinicy, The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics.
- L.B. Wahlbin, Local behavior in finite element methods.

- T.D. Blacker, CUBIT mesh generation environment users manual.
- H. Qin, D. Terzopoulos, Triangular NURBS and their dynamic generalizations.
- K. Höllig, Finite Element Methods with B-Splines.
- A.G. Kravchenko, P. Moin, R. Moser, Zonal embedded grids for numerical simulation of wall-bounded turbulent flows.
- A.G. Kravchenko, P. Moin, K. Shariff, B-spline method and zonal grids for simulation of complex turbulent flows.
- W.Y. Kwok, R.D. Moser, J. Jimenez, A critical evaluation of the resolution properties of B-spline and compact finite difference methods.
- K. Shariff, R.D. Moser, Two-dimensional mesh embedding for B-spline methods.
- P. Wriggers, Computational Contact Mechanics.
- H. Qin, D. Terzopoulos, D-NURBS: a physics-based framework for geometric design.
- T.J.R. Hughes et al. / Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.
- Apuntes asignatura Dimensionamiento de Estructuras Navales (DEN) – IST (Universidad Técnica de Lisboa) Pr. Yordan Garbatov.
- Apuntes asignatura Comportamiento de Estructuras Navales (CEN) – IST (Universidad Técnica de Lisboa) Pr. Yordan Garbatov.