

El problema de Kepler en un sistema de referencia rotante. Estudio topológico del espacio fásico.

M. C. Balsas, E. S. Jiménez y J. A. Vives

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística (UPCT)

Avenida Dr. Fleming s/n

Antiguo Edificio del Hospital de Marina. 30202-Cartagena (Murcia)

E-mail: mcarmen.balsas@upct.es, elena.jimenez@upct.es, juanantonio.vives@upct.es.

Resumen. En este trabajo se describe la dinámica hamiltoniana, en unas variedades invariantes del movimiento kepleriano en un sistema de referencia rotante. Por medio del teorema de Liouville-Arnold y un estudio particular de la aplicación momento en sus puntos críticos, obtenemos una completa clasificación del espacio fásico asociado a este sistema. Este problema modela numerosos tipos de movimientos de cuerpos como el movimiento de un satélite con respecto a un sistema de referencia situado en la tierra, el movimiento relativo de órbitas y el movimiento de satélites volantes en formación, esto es, los satélites múltiples que trabajan juntos en un grupo para lograr el objetivo de uno más grande, generalmente más costoso.

1 Introducción

El problema clásico de los dos cuerpos involucra el movimiento de un cuerpo alrededor de otro influenciados por su gravitación mutua, (ver [4]). Los ejemplos más comunes incluyen un satélite que se mueve en una órbita alrededor de un planeta, de un planeta que se mueve en una órbita alrededor de una estrella y de un electrón clásico que se mueve en una órbita alrededor de un núcleo atómico. Newton solucionó el problema considerando los dos cuerpos como masas puntuales. Algunos casos generalizados son más realistas, por ejemplo un cuerpo rígido y una masa puntual o dos cuerpos rígidos. Este trabajo presenta el estudio cualitativo del flujo de fases de un movimiento kepleriano en un sistema de referencia rotante.

Recientemente, Condurache y Martinusi han estudiado el problema de Kepler en sistemas de referencia giratorios (véase [2] y [3]). Condurache y Martinusi utilizan una regularización vectorial del tiempo y dan una solución exacta vectorial para este problema. La aportación de este trabajo es presentar una clasificación topológica del flujo de fases asociado a este sistema. Por medio del teorema de Liouville-Arnold y de un análisis particular de la aplicación momento, obtenemos la clasificación topológica completa del flujo. En este trabajo utilizamos técnicas similares a las usadas en [5].

Consideremos ya el objeto de nuestro estudio. En unas variedades invariantes del movimiento, la dinámica del sistema canónico viene descrita por la función hamiltoniana $H: E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + \alpha p_\theta - \frac{1}{r}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante estructural del sistema y $E = \mathbb{R}^+ \times S^1 \times \mathbb{R}^2$, es el espacio de fases donde el hamiltoniano está definido.

Nótese que $H = H_{\text{kepler}} + \alpha p_\theta$ donde H_{kepler} representa el hamiltoniano de Kepler asociado al problema de los dos cuerpos y el término αp_θ , añade a la dinámica de Kepler el efecto asociado a la rotación del sistema de referencia.

Definimos $(H, p_\theta): E \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, como la aplicación momento asociada al sistema. Decimos que el valor $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ es un valor crítico para la aplicación momento si dicha aplicación no es diferenciable en ese valor, en caso contrario decimos que es un valor regular.

2 Dinámica hamiltoniana del sistema

Si queremos realizar un estudio cualitativo de la dinámica asociada al sistema hamiltoniano, debemos considerar los siguientes conjuntos:

$$E_h = H^{-1}(h) = \{(r, \theta, p_r, p_\theta) \in E: g(r, p_r, p_\theta) = h\},$$

$$J_k = \{z \in E: p_\theta = k\},$$

$$I_{hk} = E_h \cap J_k$$

siendo $z = (r, \theta, p_r, p_\theta)$ y $E_h \approx g^{-1}(h)$, donde \approx denota "difeomorfo a" y $g^{-1}(h)$ es una superficie de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, denominada superficie de energía. Estos conjuntos son denominados variedades de energía

constante, variedades de momento constante y variedades de energía-momento constante. Estas variedades son invariantes por el flujo hamiltoniano del sistema, ya que H y p_θ son dos integrales primeras independientes y en involución. Por tanto, el sistema hamiltoniano es integrable.

El teorema de Liouville-Arnold demuestra que, para los sistemas hamiltonianos integrables, los conjuntos invariantes asociados a las intersecciones de todas las integrales primeras independientes y en involución son genéricamente subvariedades del espacio de fases. Por otra parte, si el flujo en tales subvariedades es completo, entonces estas subvariedades son difeomorfas a la unión de cilindros generalizados y el flujo en ellos se conjuga a un flujo lineal. (Para más detalles sobre sistemas hamiltonianos y la prueba del teorema anterior véase [1] y [4].

Cuando no estamos bajo las hipótesis del teorema de Liouville-Arnold tenemos que hacer un estudio particular de los conjuntos invariantes para los valores críticos de la aplicación momento. Estos valores corresponden a los puntos de equilibrio de la aplicación momento o a los valores donde hay un máximo o un mínimo de la superficie de energía.

3 Regiones de Hill

Las regiones de Hill son regiones del espacio de fases donde ocurre el movimiento de todas las órbitas que tienen energía h . Estas regiones se caracterizan completamente por medio del potencial. Completando cuadrados en el hamiltoniano tenemos

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} (p_\theta + \alpha r^2)^2 - \frac{\alpha^2 r^2}{2} - \frac{1}{r} \right),$$

donde $\tilde{V}(r) = (-\alpha^2 r^2 / 2 - 1/r)$ es el potencial en coordenadas polares simplécticas.

Las regiones de Hill vienen determinada por los puntos críticos del potencial \tilde{V} , estos puntos críticos vienen dados por las raíces reales positivas de la ecuación $1 - \alpha^2 r^3 = 0$. Es fácil ver que esta ecuación tiene una única raíz real positiva que denotamos por r_c .

Para cada $h \in \mathbb{R}$ definimos las regiones de Hill $R(h)$ de I_h como $R(h) = \pi(I_h)$ donde $\pi: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \times S^1$ es la proyección natural. Así pues, para cada $h \in \mathbb{R}$ la región de Hill está definida por

$$R(h) = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times S^1 : \tilde{V} \leq h\}$$

y es fácil comprobar que $R(h) = \{r \in \mathbb{R}^+ : \tilde{V} \leq h\} \times S^1$.

Tabla 1: Clasificación topológica de las regiones de Hill, donde h_c es el punto crítico del potencial.

$\forall \alpha$ (véase Fig. 1)	
$h < h_c$	$R(h) \approx [(0, A_1] \cup [A_2, +\infty)) \times S^1$
$h \geq h_c$	$R(h) \approx (0, +\infty) \times S^1$

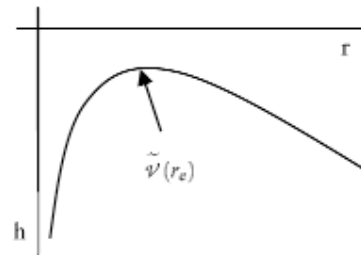


Fig. 1: Gráfica del potencial $\tilde{V}(r) = (-\alpha^2 r^2 / 2 - 1/r)$ donde $h_c = \tilde{V}(r_c)$ es el punto crítico de \tilde{V} .

Denotamos por $h_c = \tilde{V}(r_c)$ el valor del potencial en el punto crítico r_c . Los valores A_1 y A_2 son los puntos de intersección entre el gráfico del potencial y la recta $\tilde{V} = h$, usando los resultados anteriores, la clasificación topológica de las regiones de Hill se da en Tabla 1 y la gráfica de la función potencial se puede ver en Fig. 1.

4 Clasificación topológica del flujo de fases

En esta sección estudiamos la topología de los conjuntos invariantes E_h e $I_{h,c}$. Para dar la clasificación topológica de estos conjuntos necesitamos los siguientes resultados y notación.

Observe que $z_c = (r_c, \theta_c, p_r, p_\theta) \in E$ es un punto de equilibrio del flujo hamiltoniano si y solamente si $\tilde{z}_c = (r_c, \theta_c)$ es un punto crítico del potencial. Por otra parte, $\pi(z_c) = \tilde{z}_c$. Por esta razón, el flujo hamiltoniano tiene un único punto de equilibrio. Denotamos por $h_c = H(r_c, \theta_c, 0, p_{\theta_c})$ a dicho punto de equilibrio.

Para el cálculo de los extremos de la superficie de energía, usamos el teorema de la función implícita, obteniendo la ecuación $-1 - 2hp_0^2 + 2ap_0^3 = 0$, cuyas raíces reales determinan los máximos y mínimos de la superficie. Denotamos por $c_i, i = 1, 2, 3$ a estos extremos.

Tabla 2: Clasificación topológica de E_h e I_{hk} .

$\forall \alpha$			
h	E_h	I_{hk}	
$h < h_c$	$S^3 \setminus \{S^1 \cup S^1\}$	ϕ	$c_1 < k$
		S^1	$k = c_1$
		$S^1 \times S^1$	$0 < k < c_1$
		$S^1 \times \square$	$k = 0$
		$S^1 \times S^1$	$a < k < 0$
		$S^1 \times \square$	$k \leq a$
$h = h_c$	Y (véase Fig. 2)	ϕ	$c_1 < k$
		S^1	$k = c_1$
		$S^1 \times S^1$	$0 < k < c_1$
		$S^1 \times \square$	$k = 0$
		$S^1 \times S^1$	$h_c < k < 0$
		S^1	$k = h_c$
		$S^1 \times S^1$	$a < k < h_c$
		$S^1 \times \square$	$k \leq a$
$h > h_c$	$\{S^1 \setminus S^1\} \cup \{S^1 \setminus S^1\}$	ϕ	$c_1 < k$
		S^1	$k = c_1$
		$S^1 \times S^1$	$0 < k < c_1$
		$S^1 \times \square$	$k = 0$
		$S^1 \times S^1$	$c_2 < k < 0$
		ϕ	$c_3 < k < c_2$
		S^1	$k = c_3$
		$S^1 \times S^1$	$a < k < c_2$
		$S^1 \times \square$	$k \leq a$

Para clasificar las trayectorias necesitamos un nuevo valor a . Este último valor es la raíz real positiva de la ecuación $h - \alpha p_\theta = 0$. Es fácil ver que, de a en adelante, todas las trayectorias dejan de estar acotadas. Cuando estamos en $p_\theta = k = 0$ las órbitas tampoco son acotadas. En el resto de los casos o no tenemos superficie de energía, o tenemos un punto o tenemos una trayectoria acotada.

Finalmente, S^{n-1} con $n > 1$, es la esfera de \square^n e Y es la unión de dos abiertos sólidos, identificándose punto a punto con dos círculos de cada toro que no pueden contraerse a un punto aislado del correspondiente toro (véase [5]).

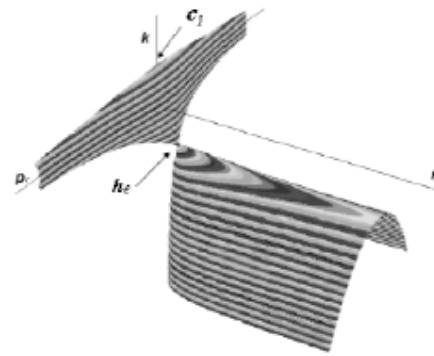


Fig. 2: $g^{-1}(h)$ para $h = h_c$ donde h_c es el punto de equilibrio y c_1 corresponde al valor de k para el extremo de la superficie de energía.

La clasificación topológica de E_h e I_{hk} se da en la Tabla 2. Para comprender esta topología se presenta la figura de la superficie de energía, véase Fig. 2.

5 Conclusiones

En este trabajo hemos considerado el problema de Kepler en un sistema de referencia rotante. Se ha descrito la dinámica hamiltoniana en las variedades invariantes E_h, J_k e I_{hk} y finalmente, se ha obtenido una completa clasificación topológica del espacio de fases asociado al sistema, la cual nos servirá para en posteriores trabajos calcular las variables acción-ángulo y dar una completa clasificación de las trayectorias periódicas y cuasiperiódicas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al Departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la UPCT.

Referencias

- [1] V. I. Arnold et al. "Systems III (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)". Springer Verlag, Berlin. (1978).
- [2] D. Condurache and V. Martinusi, "Kepler's Problem in Rotating Reference Frames. Part1: Prime Integrals, Vectorial Regularization. Journal of Guidance, Control, and Dynamics", 30, 2007, 192-200.
- [3] D. Condurache and V. Martinusi, "Kepler's Problem in Rotating Reference Frames. Part2: Relative Orbital Motion. Journal of Guidance, Control, and Dynamics", 30, 2007, 201-213.
- [4] H. Goldstein. "Classical Mechanics". Addison-Wesley. (1980).
- [5] J. Llibre et al. "Phase portraits of the two-body problem with Manev potential". J. of Physics A: Mathematical and General 34, 919-1934. (2001)