

Los diagramas frecuenciales de Mikhailov y el Teorema de Hermite-Biehler

JUAN IGNACIO MULERO MARTÍNEZ

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.
Universidad Politécnica de Cartagena.

`juan.mulero@upct.es`

Resumen

Este ensayo analiza el teorema de Mikhailov-Leonhard-Cremer y sus conexiones con el teorema de Hermite-Biehler. En particular permite analizar la estabilidad de los sistemas dinámicos lineales e invariantes en el tiempo a través de diagramas frecuenciales que explotan el principio del argumento. Generalmente, la respuesta en frecuencia es descrita en Ingeniería de Telecomunicación a través de los diagramas de Bode y los diagramas de Nyquist. La potencia de los diagramas de Mikhailov reside en el hecho de que ofrece unas condiciones gráficas muy simples para analizar la estabilidad de polinomios de coeficientes reales. Tanto los diagramas de Nyquist como los de Mikhailov se remontan a los años treinta del siglo pasado, aunque el pionero en aplicar el principio del argumento fue Nyquist. Fundamentalmente el teorema de Mikhailov establece condiciones necesarias y suficientes para que un polinomio con coeficientes reales positivos sea estable. En particular, determina la estabilidad analizando el número de veces que la trayectoria del polinomio rodea el origen del plano complejo cuando la frecuencia varía de cero a infinito. En este ensayo se pone de manifiesto que el teorema de Mikhailov es una versión gráfica (o geométrica) del criterio de Hermite-Biehler (versión algebraica) que permite determinar la estabilidad de polinomios sin necesidad de calcular explícitamente las raíces de los mismos.

Proyecto de investigación: Diseño de un vehículo de inspección submarina autónoma para misiones oceanográficas Entidad financiadora: Ministerio de Ciencia e Innovación Referencia del proyecto: DPI2009-14744-C03-02 (subprograma DPI)

Líneas de investigación: *Sistemas No Lineales; Teoría de la Señal; Teoría de la Aproximación; Mecánica de Robots*

1. Introducción

Siempre que a un sistema se le dota de realimentación surge la cuestión de la estabilidad de una forma natural. En 1788 James Watt inventó el regulador centrífugo para controlar la velocidad del árbol de salida de una máquina de vapor. Cuando rotaba a una velocidad de referencia dada, unos pesos suspendidos describían un cono. Cuando la velocidad se modificaba, el ángulo que determinaban los conos cambiaba. Este cambio en el ángulo se utilizaba para ajustar la cantidad de vapor y así restablecer la velocidad de referencia original. Posteriormente al invento de Watt aparecieron numerosos reguladores sobre todo en Alemania, Francia y Gran Bretaña, con diversas aplicaciones. Como ilustración G. B. Airy utilizó un regulador con fricción para controlar la posición de un telescopio y así contrarrestar el movimiento de rotación de La Tierra. Muy probablemente en los trabajos de Airy es donde aparece por primera vez una explicación de la inestabilidad de sistemas de control realimentados utilizando un análisis basado en ecuaciones diferenciales. Sin embargo, el primer análisis en profundidad publicado sobre la estabilidad se debe a James Clerk Maxwell (sí, el “genio tartamudo” de las leyes del electromagnetismo), que utilizó un regulador en un experimento para establecer un estándar preciso para el ohmio. En un artículo de Maxwell del año 1867 se establecen las ecuaciones diferenciales que gobiernan el regulador y la linealización en torno a un punto de equilibrio. Maxwell asegura que el regulador será estable si las raíces de una cierta ecuación con coeficientes reales tienen partes reales negativas. Podemos afirmar que éste es el primer artículo de la historia donde se hace referencia a la negatividad de las partes reales de las raíces de la ecuación característica, propiedad que nos acompaña de forma inevitable en los sistemas continuos lineales e invariantes en el tiempo. ¡Un golpe de intuición de uno de los mayores genios de la física de todos los tiempos! Maxwell intentó establecer condiciones de estabilidad examinando los coeficientes de la ecuación característica pero sólo tuvo éxito para ecuaciones de orden tres. ¿Por qué falló?. ¿Cuándo es posible encontrar fórmulas algebraicas para las soluciones de ecuaciones polinómicas?. Históricamente la ecuación quintica siempre se atravesó a generaciones de matemáticos. Hubo que esperar al año 1824 para que el matemático noruego Niels Henrik Abel diera una prueba formal de la no existencia de una solución algebraica general para la ecuación de grado quintico. Posteriormente, Evariste Galois dio el gran salto mortal utilizando argumentos de extensión de cuerpos, y concluyendo que para ecuaciones de grado mayor o igual a cinco, no siempre era posible encontrar soluciones algebraicas, es decir que incluyeran sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces. Por tanto, si no existen mecanismos cuantitativos que de una forma general nos permitan obtener soluciones algebraicas de ecuaciones polinómicas, ¿es posible dar información cualitativa sobre las raíces de un polinomio a partir de sus coeficientes tal y

como intuyó Maxwell?. En este ensayo analizamos esta cuestión de acuerdo a un criterio geométrico y a un criterio algebraico para la estabilidad de sistemas. Estos criterios se basan en el entrelazado de frecuencias: el primer criterio se debe a Mikhailov (Leonhard y Cremer) mientras que el segundo se lo debemos a Hermite y Biehler.

Las condiciones de estabilidad basadas en diagramas de frecuencia tienen una larga historia. En su forma más general, estas condiciones se remontan a 1829 con el principio del argumento de Cauchy. Para el caso específico de polinomios, estas condiciones se siguen del teorema de Hermite-Biehler. La utilización gráfica del principio del argumento fue introducido a la comunidad ingenieril por Nyquist en 1932. En 1938, Mikhailov dio unas condiciones gráficas más simples para analizar la estabilidad de polinomios. En 1944 y 1947 Leonhard y Cremer, respectivamente, dieron condiciones similares. Por este motivo, el diagrama de Mikhailov es algunas veces llamado diagrama de Cremer-Leonhard. Este método frecuencial fue extendido a familias de polinomios en 1950 por Curtis. Sin embargo, la extensión se hizo conocida por la comunidad de Ingeniería de Control gracias a Zadeh y Desoer. Esta aproximación fue etiquetada por Barmish como la aproximación utilizando el “principio de exclusión cero”. Actualmente no está claro qué autor merece ser considerado como el padre de este principio

2. Familias parametrizadas de polinomios

Consideremos el plano complejo \mathbb{C} con su topología natural (heredada de \mathbb{R}^2) y establezcamos una partición en dos regiones S y $U = \mathbb{C} \setminus S$ donde S es un abierto, i.e. $\mathbb{C} = S \cup \partial S \cup \dot{U}$. En teoría de señal se suelen hacer las siguientes particiones $S = \mathbb{C}^-$, $\partial S = \{j\omega : \omega \in \mathbb{R}\}$, $\dot{U} = \mathbb{C}^+$ para sistemas continuos y $S = D(0, 1)$, $\partial S = \{e^{j\Omega} : \Omega \in [0, 2\pi)\}$, $U = \mathbb{C} \setminus D(0, 1)$ para sistemas discretos. En ambos casos, la frontera ∂S representa la región donde se debe evaluar un polinomio para obtener su respuesta en frecuencia.

Para enfatizar en lo que sigue que un polinomio p de coeficientes reales en la indeterminada $s \in \mathbb{C}$, i.e. $p \in \mathbb{R}_n[s]$, tiene el vector de coeficientes $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ utilizaremos la notación $p(s; a)$. El conjunto de las raíces de este polinomio será denotado por $\mathcal{Z}(p(\cdot; a))$.

Sea $p(s; a) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$ un polinomio en $\mathbb{R}[s]$ con las raíces en S , y $p(s; b)$ el mismo polinomio con las raíces en \dot{U} , siempre podemos definir una función continua de los coeficientes $a : I \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $a_n(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in I$, y $a(0) = a$, $a(1) = b$. Esto da lugar a una familia de polinomios $\mathcal{P}_\lambda(s)$ parametrizada según λ :

Definición 1 $\mathcal{P}_\lambda(s)$ se caracteriza porque cada $p \in \mathcal{P}_\lambda(s)$ satisface las dos siguientes propiedades:

- (i) *Invarianza del grado:* $gr(p) = n$ fijo.
- (ii) *Continuidad de p con respecto al parámetro λ sobre el intervalo $I = [0, 1]$.*

Una pregunta natural es si el conjunto de raíces de $\mathcal{P}_\lambda(s)$ debe intersectar en

algún momento la frontera ∂S cuando nos movemos de un abierto a otro. La respuesta es afirmativa tal y como veremos a través del teorema del cruce de la frontera. Antes necesitamos plantear una cuestión topológica: Si $p(s; a(\mu))$ es S -estable, ¿podemos encontrar un δ tal que para todo $\lambda \in (\mu - \delta, \mu + \delta) \cap I$, $p(s; a(\lambda))$ sigue siendo S -estable (i.e. $\mathcal{Z}(p(\cdot; a(\lambda))) \subset S$)?

Para dar respuesta a esta pregunta necesitamos la siguiente proposición que es una sencilla aplicación del Teorema de Rouché.

Proposición 1 *Sea $p(s; a)$ un polinomio en $\mathbb{R}_n[s]$. Supongamos que $\mathcal{Z}(p(\cdot; a)) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ donde cada α_i tiene multiplicidad t_i de manera que $p(s) = a_n \prod_{i=1}^m (s - \alpha_i)^{t_i}$. Elijamos discos abiertos $D(\alpha_k, r_k)$ con radios $r_k < \rho$, siendo $\rho = \min\{|\alpha_i - \alpha_j| : i \neq j\}$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$, y un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $c \in B(a, \varepsilon)$ el polinomio $q(s) = p(s; c)$ tiene exactamente t_k raíces en cada disco $D(\alpha_k, r_k)$.*

Demostración. La demostración es una sencilla aplicación del Teorema de Rouché. \square

Corolario 2 *La aplicación $a \rightarrow \mathcal{Z}(p(\cdot; a))$, que asocia a cada vector de coeficientes $a \in \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_n \neq 0\}$ la n -tupla de las raíces de $p(s, a)$ es continua.*

Este corolario da perfecto sentido a la sentencia: “Las raíces de un polinomio dependen continuamente del vector de coeficientes”.

Corolario 3 *El conjunto de los λ tales que $p(s; a(\lambda))$ es S -estable es abierto en I .*

Teorema 4 (Cruce de la Frontera) *Supongamos que $p(s; a(\lambda))$ tiene todas sus raíces en S , mientras que $p(s; a(\mu))$ tiene como mínimo una raíz en U . Entonces existe como mínimo un $\rho \in (\lambda, \mu]$ tal que*

- (i) $p(s; \rho)$ tiene todas sus raíces en $S \cup \partial S$,
- (ii) $p(s; \rho)$ tiene como mínimo una raíz en ∂S .

Demostración. La demostración es muy conocida en Topología matemática. \square

Este principio tan sencillo se puede enunciar como sigue:

Teorema 5 *Supongamos que la familia de polinomios $\Omega(s)$ es de grado constante, contiene como mínimo un polinomio estable. Entonces la familia entera es estable si y sólo si*

$$0 \notin \Omega(s) \text{ para todo } s \in \partial S$$

3. Propiedades de la estabilidad Hurwitz.

Un polinomio $p \in \mathbb{R}_n[s]$ es Hurwitz cuando todas sus raíces tienen partes reales negativas.

Proposición 6 Si $p \in \mathbb{R}_n[s]$ es Hurwitz entonces todos sus coeficientes son no nulos y tienen el mismo signo (ya sea positivo o negativo).

Demostración. Supongamos que $p(s) = a_n \prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)$ es estable Hurwitz. Por hipótesis, cada α_i o bien es real satisfaciendo $\alpha_i < 0$, o es complejo, en cuyo caso $\bar{\alpha}_i$ también sería una raíz verificando,

$$(s - \alpha_i)(s - \bar{\alpha}_i) = s^2 - 2 \operatorname{Re}(\alpha_i)s + |\alpha_i|^2$$

con $\operatorname{Re}(\alpha_i) < 0$. Por tanto, todos los coeficientes de $\prod_{i=1}^n (s - \alpha_i)$ serán positivos y todos los coeficientes de p serán no nulos y tendrán el mismo signo que a_n . \square

Proposición 7 (Mikhailov-Leonhard-Cremer) Sea $p \in \mathbb{R}_n[s]$ un polinomio Hurwitz, entonces la fase de $p(j\omega)$, $\arg(p(j\omega))$, es una función continua de ω y monótona creciente sobre $(-\infty, \infty)$. El incremento neto de fase cuando ω varía desde $-\infty$ a ∞ es $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(p(j\omega)) - \arg(p(-j\omega)) = n\pi$.

Demostración. Simplemente debemos expresar p como un un producto de monomios:

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (s - \alpha_i),$$

donde α_i son las raíces de p . Calculemos ahora la fase de $p(j\omega)$:

$$\arg(p(j\omega)) = \arg(a_n) + \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - \alpha_i).$$

Como los coeficientes de p son reales $\arg(p(j\omega)) = 0$. Cuando $\omega \rightarrow \infty$, $\arg(j\omega - \alpha_i) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, y similarmente cuando $\omega \rightarrow -\infty$, $\arg(j\omega - \alpha_i) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. Si sumamos la contribución de las fases parciales concluimos que $\arg(p(j\omega)) = n\pi$. \square

Ejemplo 1 Determinemos si es Hurwitz el polinomio $p(s) = s^3 + 3s^2 + 3$. Calculamos $p(j\omega)$ y $\arg(p(j\omega))$:

$$p(j\omega) = 3 - 3\omega^2 + j\omega(1 - \omega^2)$$

$$\arg(p(j\omega)) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(p(j\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arctg\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arg(p(j\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \arctg\left(\frac{\omega}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}, \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(p(+j\omega)) - \arg(p(-j\omega)) &= \pi \neq 3\pi.\end{aligned}$$

Así p no es Hurwitz.

La existencia de un número finito de frecuencias para las cuales el valor del polinomio se encuentra en cuadrantes distintos es lo que se conoce en la literatura rusa como el criterio de Mikhailov-Leonhard, y es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Nota 1 El polinomio $p \in \mathbb{R}_n[s]$ tiene ceros con partes reales negativas si y solo si el diagrama de respuesta de Mikhail-Leonhard atraviesa exactamente n cuadrantes en sentido positivo.

Ejemplo 2 Consideremos el polinomio $p(s) = s^3 + 9s^2 + 4s + 1$ y analicemos las implicaciones del criterio de estabilidad de Mikhailov-Leonhard. Para ello representaremos el diagrama de frecuencias de $p(j\omega)$ cuando ω varía desde 0 a $+\infty$, véase la figura 1. La parte real de $p(j\omega)$ es $-9\omega^2 + 1$ (con una raíz positiva en $\omega = \frac{1}{3}$) y la parte imaginaria $\omega(-\omega^2 + 4)$ (con una raíz positiva en $\omega = 2$). Para el rango de frecuencias $0 < \omega < \frac{1}{3}$, la parte real e imaginaria de p son positivas ($p(j\omega)$ se encuentra en el primer cuadrante). Para frecuencias en el rango $\frac{1}{3} < \omega < 2$, la parte real se hace negativa mientras que la parte imaginaria sigue siendo positiva ($p(j\omega)$ se sitúa en el segundo cuadrante). Por último, cuando $\omega > 2$, $p(j\omega)$ se sitúa en el tercer cuadrante.

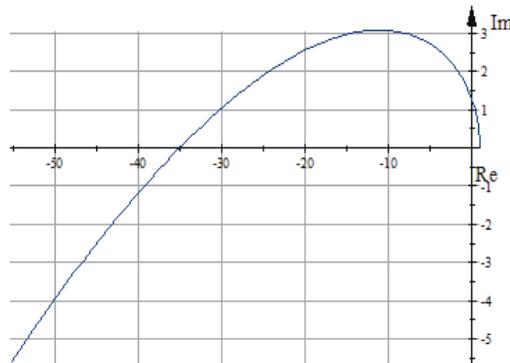


Figura 1: Diagrama de Mikhailov-Leonhard para el polinomio $p(s) = s^3 + 9s^2 + 4s + 1$

4. La propiedad de entrelazado de frecuencias

Para introducir la propiedad de entrelazado de frecuencias necesitamos previamente definir las partes par e impar de un polinomio. Por simplicidad supondremos que cuando polinomio p tenga grado par éste sea $gr(p) = n = 2m$ (resp. $gr(p) = 2m + 1$ cuando p tenga grado impar).

Definición 2 *Cualquier $p \in \mathbb{R}[s]$ con $gr(p) = n$, $p(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$, se puede expresar como suma de polinomios:*

$$p(s) = p_{par}(s) + p_{impar}(s).$$

Los polinomios $p_{par}, p_{impar} \in \mathbb{R}[s]$ se denominan parte par (resp. impar) de p y se definen como sigue:

$$p_{par}(s) = \sum_{i=0}^m a_{2i} s^{2i},$$

$$p_{impar}(s) = \sum_{i=1}^m a_{2i-1} s^{2i-1}.$$

La respuesta en frecuencia de un polinomio $p \in \mathbb{R}[s]$ se puede escribir en coordenadas cartesianas como

$$p(j\omega) = p_e(\omega) + j\omega p_o(\omega).$$

donde los polinomios $p_e \in \mathbb{R}_{2m}[\omega]$, $p_o \in \mathbb{R}_{2m-2}[\omega]$ si n es par ($p_o \in \mathbb{R}_{2m}[\omega]$ si n es impar), son simétricos con respecto al eje imaginario (si $p_e(\alpha) = 0$ (resp. $p_o(\beta) = 0$), entonces $p_e(-\alpha) = 0$ (resp. $p_o(-\beta) = 0$)) y se definen de la siguiente forma:

$$p_e(\omega) = p_{par}(j\omega) = \sum_{i=0}^m (-1)^i a_{2i} \omega^{2i}.$$

$$p_o(\omega) = \frac{p_{impar}(j\omega)}{j\omega} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} a_{2i-1} \omega^{2(i-1)}.$$

Cuando las raíces de p_e y de p_o sean reales las dotaremos de un orden total:

$$-\omega_{e,m} < \dots < -\omega_{e,2} < -\omega_{e,1} < 0 < \omega_{e,1} < \omega_{e,2} < \dots < \omega_{e,m} \quad (1)$$

$$-\omega_{o,m-1} < \dots < -\omega_{o,2} < -\omega_{o,1} < 0 < \omega_{o,1} < \omega_{o,2} < \dots < \omega_{o,m-1}$$

Notemos que los polinomios p_e y p_o son formas cuadráticas en ω . Con estas definiciones estamos en condiciones de introducir el concepto de entrelazado de frecuencias.

Definición 3 (Entrelazado de Frecuencias) *Un polinomio $p \in \mathbb{R}_n[s]$ se dice que satisface la propiedad de entrelazado en frecuencia si:*

- (i) $a_{2m}a_{2m-1} > 0$ cuando n es par ($a_{2m-1}a_{2m-2} > 0$ si n es impar).
(ii) Todas las raíces de p_e y de p_o son reales distintas. Las raíces positivas de p_e y de p_o se entrelazan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \cdots < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \cdots < \omega_{o,m-1} < \omega_{e,m} < \omega_{o,m} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Se puede probar que una descripción alternativa de la propiedad de entrelazado es la siguiente:

Definición 4 Un polinomio $p \in \mathbb{R}_n[s]$ se dice que satisface la propiedad de entrelazado en frecuencia si:

- (i) los coeficientes líder de los polinomios p_{par} y p_{impar} tienen el mismo signo..
(ii) Los ceros de p_{par} y p_{impar} son distintos y se alternan sobre el eje imaginario

5. El teorema de Hermite-Biehler

El teorema de Hermite-Biehler¹ tiene sus orígenes en una carta que Charles Hermite remitió al matemático (que vivía en Berlín) Borchardt en 1854. Curiosamente en el aniversario del nacimiento de Hermite celebrado en 1922 no se hizo mención alguna de este gran resultado. Hubo que esperar a 1977 para que P.C. Parks tradujera la carta al inglés y fuera así divulgada a la comunidad científica. Parks nos presenta una demostración elegante del criterio de estabilidad basada en la carta de Hermite. A mediados del siglo XIX Hermite estaba ocupado en obtener un criterio que decidiera si las raíces de un polinomio característico tenían partes imaginarias positivas. Obviamente, un simple cambio de variable permite obtener un criterio de estabilidad para el semiplano izquierdo del plano complejo. La potencia de este resultado reside en el uso de formas cuadráticas para investigar la estabilidad. Probablemente Hermite se centró en la parte imaginaria por motivos de facilidad de formulación. El trabajo de Hermite ayudó sustancialmente a Hurwitz (1895) para obtener un criterio para la estabilidad de sistemas continuos, i.e. para establecer condiciones necesarias y suficientes que garanticen que las raíces de una ecuación algebraica tengan partes reales negativas.

Teorema 8 (de Hermite-Biehler o del entrelazado) Un polinomio $p \in \mathbb{R}_n[s]$ es Hurwitz si y solo si satisface la propiedad de entrelazado de frecuencias.

Demostración. \Rightarrow : Consideremos un polinomio Hurwitz $p(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$. Debemos probar las condiciones de la definición de entrelazado en frecuencia. La condición (i) es inmediata ya que en virtud de la proposición 6 todos los coeficientes a_i tienen el mismo signo. Supondremos sin pérdida de generalidad que todos los coeficientes son positivos. Para probar la condición (ii) consideraremos que el grado del polinomio es par, $n = 2m$ (el caso impar se

¹El teorema de Hermite-Biehler en algunas ocasiones se conoce como el criterio de posición y salto (Gap and Position Stability Criterion).

demuestra de forma análoga). Por ser p un polinomio Hurwitz, la proposición 7 garantiza que la fase varía desde $-m\pi$ a $m\pi$ cuando ω se mueve desde $-\infty$ hacia $+\infty$. Restringiendo la atención a las frecuencias positivas, i.e. $\omega \in [0, \infty)$, la fase de $p(j\omega)$ varía desde 0 hasta $m\pi$. Esto significa que $p(j\omega)$ comienza en la componente de continua $p(0) = a_0 > 0$, rodeando m veces el origen antes de moverse asintóticamente hacia infinito. Además $p(j\omega) \neq 0$ por lo que la función nunca atraviesa el origen.

El dar m vueltas al origen significa que $p(j\omega)$ debe cortar m veces el eje real (contando el corte inicial en a_0) y el eje imaginario. Cuando corta el eje real $\text{Im}\{p(j\omega)\} = \omega p_o(\omega) = 0$, y los cortes se producen en las raíces de $\omega p_o(\omega)$:, $0, \omega_{o,1}^p, \dots, \omega_{o,m-1}^p$. Observemos que el primer corte se produce cuando $\omega = 0$, es decir sobre el eje real en $p(0) = a_0$. Similarmente, los cortes sobre el eje imaginario se consiguen por la condición $\text{Re}\{p(j\omega)\} = p_e(\omega) = 0$, es decir en las raíces de $p_e(\omega)$ que serán $\omega_{e,1}^p, \dots, \omega_{e,m}^p$. Dado que $p(j\omega)$ rodea al origen antes de dirigirse a infinito cuando $\omega \rightarrow \infty$, es claro que las frecuencias se deben entrelazar:

$$0 < \omega_{e,1}^p < \omega_{o,2}^p < \dots < \omega_{o,m-1}^p < \omega_{e,m}^p.$$

\Leftarrow : Supondremos que $p(s)$ satisface la propiedad de entrelazado de frecuencias y que p tiene grado $n = 2m$, siendo $p_{2m}, p_{2m-1} > 0$. Los otros casos se demuestran exactamente igual. Consideremos el entrelazado de las raíces de p_e y de p_o :

$$0 < \omega_{e,1}^p < \omega_{o,2}^p < \dots < \omega_{o,m-1}^p < \omega_{e,m}^p.$$

Los polinomios p_e y p_o pueden ser factorizados con estas raíces:

$$p_e(\omega) = a_{2m} \prod_{k=1}^m \left(\omega^2 - \left(\omega_{e,k}^p \right)^2 \right),$$

$$p_o(\omega) = a_{2m-1} \prod_{k=1}^m \left(\omega^2 - \left(\omega_{o,k}^p \right)^2 \right).$$

Ahora consideraremos un polinomio estable $q \in \mathbb{R}_n[s]$ con el mismo grado que p ($n = 2m$) y con todos sus coeficientes positivos: $q(s) = \sum_{i=0}^{2m} b_i s^i$. Este polinomio siempre existe ya que por ejemplo $q(s) = (s+1)^{2m}$ verifica las condiciones anteriores. Dado que q es Hurwitz, en virtud de la implicación anterior, q_e tendrá raíces positivas $\omega_{e,1}^q, \dots, \omega_{e,m}^q$ que se entrelazan con las raíces positivas $\omega_{o,1}^q, \dots, \omega_{o,m-1}^q$ de q_o . Al igual que hicimos con p_e y p_o , también podemos factorizar q_e y q_o :

$$q_e(\omega) = b_{2m} \prod_{k=1}^m \left(\omega^2 - \left(\omega_{e,k}^q \right)^2 \right),$$

$$q_o(\omega) = b_{2m-1} \prod_{k=1}^m \left(\omega^2 - \left(\omega_{o,k}^q \right)^2 \right).$$

Construimos el polinomio $p_\lambda(s) = p_\lambda^e(s) + sp_\lambda^o(s)$ haciendo

$$p_\lambda^e(\omega) = ((1-\lambda)b_{2m} + \lambda a_{2m}) \prod_{k=1}^m \left(\omega^2 - \left((1-\lambda) (\omega_{e,k}^q)^2 + \lambda (\omega_{e,k}^p)^2 \right) \right),$$

$$r_i(\omega) = ((1-\lambda)b_{2m-1} + \lambda a_{2m-1}) \prod_{k=1}^m \left(\omega^2 - \left((1-\lambda) (\omega_{o,k}^q)^2 + \lambda (\omega_{o,k}^p)^2 \right) \right).$$

Los coeficientes de r_λ son polinomios continuos en λ y por lo tanto continuos en $[0, 1]$. Observemos que cuando $\lambda = 0$, $p_0(s) = q(s)$ y cuando $\lambda = 1$, $p_1(s) = p(s)$. Además el coeficiente líder de p_λ es $((1-\lambda)b_{2m} + \lambda a_{2m}) > 0$ cuando λ varía en $[0, 1]$.

Ahora procedemos por reducción al absurdo suponiendo que p no es Hurwitz. En virtud del teorema del cruce de la frontera concluimos que debe existir un $\lambda \in [0, 1]$ tal que r_λ posea al menos una raíz en el eje imaginario. Esta situación se produce cuando $p_\lambda^e(\omega) + jp_\lambda^o(\omega) = 0$, es decir cuando $p_\lambda^e(\omega) = p_\lambda^o(\omega) = 0$, lo cual significa que estos polinomios deben tener alguna raíz real en común. Las raíces $\omega_{e,k}^\lambda$ de p_λ^e y las raíces $\omega_{o,k}^\lambda$ de p_λ^o satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} (\omega_{e,k}^\lambda)^2 &= (1-\lambda) (\omega_{e,k}^q)^2 + \lambda (\omega_{e,k}^p)^2, \\ (\omega_{o,k}^\lambda)^2 &= (1-\lambda) (\omega_{o,k}^q)^2 + \lambda (\omega_{o,k}^p)^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Veamos a continuación que el orden de las raíces se preserve a través de combinaciones convexas. Tomemos dos índices $1 \leq i < j \leq m$, a partir de (2) es claro que $(\omega_{e,i}^q)^2 < (\omega_{e,j}^q)^2$, $(\omega_{o,i}^q)^2 < (\omega_{o,j}^q)^2$. También es directo comprobar que las raíces de p_λ^e y de p_λ^o se entrelazan:

$$0 < (\omega_{e,1}^\lambda)^2 < (\omega_{o,1}^\lambda)^2 < (\omega_{e,2}^\lambda)^2 < \cdots < (\omega_{o,m-1}^\lambda)^2 < (\omega_{e,m}^\lambda)^2.$$

Sin embargo, el orden total anterior lleva a una contradicción ya que p_λ^e y p_λ^o nunca tendrían una raíz común. \square

Ejemplo 3 Consideremos de nuevo el polinomio $p(s) = s^3 + 9s^2 + 4s + 1$. Aquí los polinomios $p_e(\omega)$ y $p_o(\omega)$ son respectivamente $9\omega^2 + 1$, y $\omega^2 + 4$. Es obvio que las raíces positivas de estos polinomios se entrelazan.

Ejemplo 4 Consideremos el polinomio $p(s) = s^7 + 4s^6 + 11s^5 + 29s^4 + 36s^3 + 61s^2 + 34s + 36$. Entonces $p(j\omega) = p_e(\omega) + jp_o(\omega)$, donde $p_e(\omega) = -4\omega^6 + 29\omega^4 - 61\omega^2 + 36$, $p_o(\omega) = -\omega^6 + 11\omega^4 - 36\omega^2 + 34$. Las gráficas de p_e y p_o se muestran en la figura 2. Tal y como se puede observar el polinomio $p(s)$ satisface la propiedad de entrelazado. Para verificar que p es realmente un polinomio Hurwitz, simplemente debemos calcular las raíces del polinomio: $-0,0477 \pm 1,9883j$, $-0,2008 \pm 1,4200j$, $-0,2898 \pm 1,1957j$, $-2,9293$. Dado que todas las raíces de p están en el semiplano izquierdo concluimos que p es un polinomio Hurwitz.

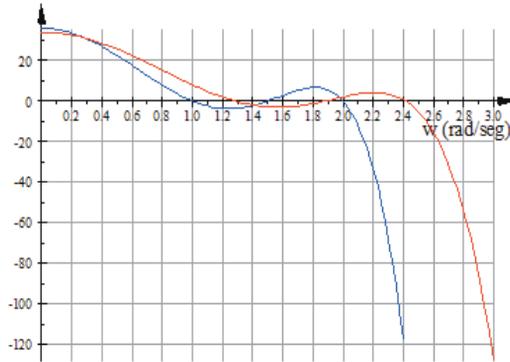


Figura 2: Propiedad de entrelazado de frecuencias para el polinomio $p(s) = s^7 + 4s^6 + 11s^5 + 29s^4 + 36s^3 + 61s^2 + 34s + 36$. Representación de $p_e(\omega)$ (azul), $p_o(\omega)$ (rojo)

6. Conclusiones

El Teorema de Leonhard-Mikhailov y el Teorema de Hermite-Biehler tienen el mismo significado. Podemos decir que el Teorema de Leonhard-Mikhailov es la versión geométrica mientras que el Teorema de Hermite-Biehler es la versión algebraica. Ambos teoremas permiten decidir cuándo una ecuación algebraica posee raíces con partes reales negativas por lo que representan criterios de estabilidad para sistemas lineales.

