

Nyquist y la realimentación

JUAN IGNACIO MULERO MARTÍNEZ¹

1. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.
Universidad Politécnica de Cartagena.

juan.mulero@upct.es

Resumen

En este pequeño ensayo tratamos de analizar los orígenes de la realimentación a partir de la revisión de los amplificadores realimentados. Cuando enseñamos Regulación Automática muchas veces no llegamos a comprender la revolución que supuso el artículo “Regeneration Theory” de Harry Nyquist publicado en 1932, y el artículo “Stabilized feed-back amplifiers” de Harold S. Black de 1934. También, obviamos las dificultades de razonamiento de aquella época, cuando el concepto de estabilidad de amplificadores realimentados no era tan sencillo de entender y la única herramienta de análisis disponible era el criterio de Routh. La definición original de estabilidad de Nyquist se basó en la respuesta de un sistema frente a perturbaciones que se pueden describir en términos de su transformada de Fourier. Nyquist utilizó el método de residuos para describir la estabilidad, sin embargo lo que desconoce la mayor parte de los ingenieros es que la formulación actual basada en el principio del argumento se la debemos a MacColl, otro matemático de los laboratorios Bell. Podríamos llegar más allá, ya que en la mayoría de las ocasiones, el pensamiento flota sobre la humanidad como una espada de Damócles y tan sólo es una cuestión de tiempo el que surjan teorías con fortaleza. Así pues, el método de respuesta en frecuencia se estaba gestando simultáneamente en Estados Unidos, Alemania y Rusia. Black, Nyquist, MacColl, Hall, Barkhausen, Küpfmüller, Strecker, Mikhailov, Cremer, Leonhard, han sido héroes de esta revolución científica y a ellos debemos rendir tributo. Muy probablemente, sin su pensamiento, el siglo XXI no sería lo que es actualmente.

Proyecto/Grupo de investigación: Título: Sistema de control y navegación de vehículos submarinos autónomos en misiones de monitorización oceanográfica (SICUVA) . Entidad financiadora: Fundación SENECA. Código: 15357/PI/10

Líneas de investigación: *Control No Lineal; Teoría de la Señal ; Mecánica de Robots.*

1 Amplificadores realimentados

Con el surgimiento de las comunicaciones telefónicas, los amplificadores se utilizaron para compensar la atenuación de señal en las líneas a largas distancias. En aquel tiempo, los tubos de vacío eran los componentes que se utilizaban para construir amplificadores ya que aprovechaban el movimiento de los electrones libres en el vacío. La distorsión causada por las características no lineales de los amplificadores basados en tubos de vacío junto con el fenómeno de “drift” fueron obstáculos que impidieron el desarrollo de amplificadores de línea durante mucho tiempo.

Un avance espectacular se produjo con la invención en 1927 del amplificador realimentado por Harold S. Black, un ingeniero eléctrico que trabajaba en los laboratorios de telefonía Bell. Black utilizó la realimentación negativa para conseguir robustez en el amplificador, al reducir la ganancia haciéndolo insensible a las variaciones en las características del tubo. Esta invención posibilitó la construcción de amplificadores estables con características lineales en vez de las no lineales del amplificador con tubos de vacío. Otra ventaja del diseño de la dinámica de un dispositivo es que permite la modularidad en el diseño del sistema completo.

La realimentación, como herramienta para crear un sistema cuya respuesta se adecúe a unas especificaciones de diseño, permite ocultar la complejidad y la variabilidad que puede estar presente dentro del sistema. Esto permite crear sistemas más complejos al no tener que ajustar simultáneamente las respuestas de un gran número de componentes que interactúan. Esta fue una de las grandes ventajas de la realimentación negativa de Black en los amplificadores con tubos de vacío: El dispositivo tenía una respuesta lineal de entrada-salida muy bien definida que no dependía de las características individuales de los tubos de vacío que se utilizaban.

Harold S. Black afirmaba en el año 1934 que uno de los usos clave de la realimentación consiste en conseguir robustez a la incertidumbre (“constancia en la amplificación”). Esta es una de las propiedades más útiles de la realimentación y es lo que permite diseñar sistemas realimentados basados en modelos considerablemente más simples. En su artículo “Stabilized Feedback Amplifiers” decía lo siguiente:

“Sin embargo, al construir un amplificador cuya ganancia se hace deliberadamente, digamos 40 decibelios o mayor de lo necesario y luego la salida se realimenta a la entrada de manera tal que compense el exceso de ganancia, se consigue una mejora extraordinaria en la constancia de la amplificación y en la independencia con respecto a la no linealidad”.

2 Dificultades para entender la realimentación

Consideremos un amplificador no realimentado (en lazo abierto) de ganancia μ que proporciona una señal de salida $y(t) = \mu x(t)$, donde $x(t)$ es la señal de entrada. Cuando se realimenta el amplificador se genera una señal $b(t) = \beta y(t)$, que se resta a la señal de referencia $r(t)$ para producir una entrada efectiva $e(t)$ en el amplificador¹. La ecuación de realimentación ideal se puede escribir en los siguientes términos,

$$y = \mu e = \mu(r - \beta y)$$

A partir de esta expresión se puede obtener la ganancia del amplificador realimentado, $\frac{y}{r} = \frac{\mu}{1 + \mu\beta}$, donde el factor de realimentación $\mu\beta$ representa la transmisión a lo largo del circuito formado por el amplificador y el circuito de realimentación (circuito β). De hecho, el factor de realimentación representa la magnitud de la señal realimentada superpuesta a la referencia, comparada con la verdadera señal aplicada a la entrada del amplificador:

$$\mu\beta = \frac{r - e}{e} = \frac{\beta y}{e}$$

Por ejemplo, tomando un factor de realimentación $\mu\beta = 50$, la señal realimentada βy es 50 unidades por cada unidad en la entrada del amplificador. En los primeros años de desarrollo del principio de realimentación se hacía el siguiente razonamiento falaz: Si en cada vuelta de realimentación la señal realimentada $b(t) = \beta y(t)$ se ve amplificada en un factor $\mu\beta$, tras k vueltas la señal b sería $(\mu\beta)^k e$ y si $\mu\beta > 1$, entonces b divergería. Además la señal de error se fija para una referencia $r(t)$ constante:

$$e(t) = \frac{1}{1 + \mu\beta} r(t)$$

¿Cómo es posible que el sistema llegue a ser estable si la señal $b(t)$ no está acotada? Este problema desconcertó a los ingenieros electrónicos durante muchos años. Para ilustrar este punto en relación a la dificultad para comprender la realimentación mediante un razonamiento cualitativo incluyo la siguiente anotación de Nyquist:

“El Señor Black propuso un repetidor con realimentación negativa y probó mediante experimentos que poseía las ventajas que había predicho para él. En particular, su ganancia era constante y bastante grande, y suficientemente lineal por lo que las señales espúreas causadas por la interacción de los distintos canales se mantuvieran dentro de los límites admisibles. En los mejores casos, el factor de realimentación, la cantidad comúnmente conocida como $\mu\beta$ (la función de transferencia) tenía que ser numéricamente mucho mayor que la unidad. La posibilidad de estabilidad con un factor de realimentación mayor

¹La teoría de realimentación se aplica a cuatro tipos de amplificadores según las magnitudes de entrada y salida (tensión ó corriente).

que la unidad era desconcertante. Suponiendo que el factor es negativo no era obvio cómo esto ayudaría. Si el factor fuera -10 , el efecto de una vuelta alrededor del lazo de realimentación sería cambiar la magnitud de la corriente de 1 a -10 . Tras una segunda vuelta alrededor del lazo la corriente sería 100, y así sucesivamente. El resultado total se parece mucho a una serie divergente y no estaba claro cómo esta serie creciente podría producir un resultado finito y por tanto estable tal y como la experiencia nos demuestra. La parte que falta a este argumento es que los números que describen los términos sucesivos 1, -10 , 100, y así sucesivamente, representan el estado estacionario, mientras que en cualquier instante finito muchos términos todavía no han alcanzado el estado estacionario, y algunos de ellos, que están destinados a hacerse muy grandes, apenas han alcanzado una magnitud perceptible. Mis cálculos estaban principalmente dirigidos a reemplazar la serie divergente indefinida anteriormente referida, por una serie que da el valor real alcanzado en un tiempo específico t . La serie obtenida de esta forma es convergente en vez de divergente y, más aún, converge a valores en correspondencia con los descubrimientos experimentales. Esto explica cómo acometí el trabajo. Quizá también convendría explicar esto con más detalle. Durante los cálculos, los hechos con los cuales el término estabilidad condicional había estado asociado, se hicieron aparentes. Un aspecto de esto era que es posible tener un lazo de realimentación estable y que se puede convertir en inestable incrementando la pérdida del lazo. Esto parecía un resultado muy sorprendente y requería que todos estos pasos fueran examinados y detallados en lo sucesivo”.

¿Qué ocurre cuando $|\mu\beta| \gg 1$? Podemos responder a esta pregunta en la situación límite,

$$\lim_{|\mu\beta| \rightarrow \infty} \frac{y}{r} = \lim_{|\mu\beta| \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \frac{\mu\beta}{1 + \mu\beta} = \frac{1}{\beta}$$

La amplificación es inversamente proporcional a β . En palabras de H. S. Black: “Bajo esta condición la amplificación es independiente de μ pero depende de β . Consecuentemente, la característica total será controlada por el circuito de realimentación que puede incluir equalizadores u otras redes correctivas”.

En 1928 los diseñadores de amplificadores no comprendían las condiciones generales bajo las cuales un amplificador con realimentación era estable. Los diseñadores sabían (i) que necesitaban un valor negativo grande de $\mu\beta$ en relación al ancho de banda, (ii) la ganancia decrecía y que el retraso de fase aumentaba conforme la frecuencia crecía, (iii) en amplificadores conectados en cascada el retraso de fase podía alcanzar rápidamente los 180° , (iv) si la ganancia $\mu\beta$ se hacía más grande que 1 cuando el retraso de fase alcanzaba 180° el amplificador se hacía inestable. Sin embargo, ¿Cómo se podía determinar la estabilidad? El único método conocido hasta entonces era el test de Routh. Para poder utilizar este test era necesario expresar las ecuaciones del amplificador realimentado como un conjunto de ecuaciones diferenciales. Esto era sencillo para redes basadas en componentes pasivos (que son lineales), sin embargo las

ecuaciones que describían los tubos de vacío eran no lineales, y un amplificador multietapa complicado requería de cincuenta ecuaciones diferenciales para describir su comportamiento.

3 Un poco de historia sobre la Respuesta en Frecuencia.

Nyquist comenzó con la siguiente definición de estabilidad: *“El circuito se dice estable cuando una pequeña perturbación, que se va desvaneciendo, resulta en una respuesta que se desvanece. Se dice que es inestable cuando tal perturbación resulta en una respuesta que crece indefinidamente”*.

Las matemáticas que subyacen al análisis de Nyquist se obtienen a partir de los trabajos de Cauchy. Nyquist formuló el problema de una forma tal que el principio del argumento de Cauchy se podría haber utilizado perfectamente, sin embargo rehusó de manera sorprendente este camino y utilizó un razonamiento basado en cálculo de residuos. Realmente, fue L. A. MacColl, otro matemático de los laboratorios Bell, el que unos años más tarde dio una demostración para una clase restringida de funciones que se podían expresar como funciones racionales en variable compleja, y que se basaba por primera vez en el principio del argumento. Esta forma de actuar se ha mantenido como estándar en todos los libros de texto de Ingeniería. Nyquist tampoco tuvo en cuenta los sistemas dinámicos con polos en el semiplano derecho. Ahora bien, muchos servomecanismos tenían un término de integración pura en lazo abierto, y que originaban polos en el origen. MacColl y A. C. Hall, proporcionaron extensiones al criterio de Nyquist para tener en cuenta este caso. En 1945 Frey extendió el criterio para tratar con sistemas que eran inestables en lazo abierto.

Nyquist en vez de examinar las raíces de la ecuación característica introdujo la cantidad $AJ(\omega)$ como sigue: *“Representemos por la cantidad compleja $AJ(\omega)$ el ratio por el cual el amplificador y el circuito realimentado modifican la corriente en una vuelta”*.

La cantidad $-AJ(s)$ es lo que hoy llamamos la función de transferencia de lazo para un sistema realimentado mientras que $AJ(\omega)$ representa las transmisiones en estado estacionario de señales senoidales alrededor del lazo. Debido al signo negativo, el punto crítico en el artículo “Regeneration Theory” es $+1$ en vez de -1 tal y como se utiliza actualmente. Era razonable que una oscilación se mantuviera en una frecuencia ω_0 si $AJ(\omega_0) = 1$. Intuitivamente, sería razonable también esperar que el sistema se comportaría de forma estable para $|A(j\omega_0)| < 1$ en la frecuencia ω_0 donde el argumento de $A(j\omega_0)$ es cero. Esto significa que en estado estacionario la señal se atenúa después de una vuelta al lazo de realimentación. Sin embargo, se había observado experimentalmente que el sistema podría ser inestable incluso cuando $|A(j\omega_0)| > 1$. Esto está relacionado con el hecho de que algunos amplificadores inestables se podían estabilizar haciendo crecer la ganancia de realimentación. Este fenómeno

desconcertante se llamó estabilidad condicional. Nyquist resolvió el problema y mostró que un criterio de estabilidad se podría desarrollar al analizar el grafo de la función $AJ(\omega)$ y en particular las circunvalaciones alrededor del punto crítico. La implicación inmediata del teorema de Nyquist fue descrita perfectamente por su colega Bode en el siguiente pasaje:

“Aunque las implicaciones de la invención de la realimentación negativa aparecieron rápidamente, las ideas originales de Black requirieron de apoyo y confirmación en muchas direcciones antes de que la explotación ingenieril de este campo pudiera desarrollarse con éxito y seguridad. Por ejemplo, la invención dependía básicamente de amplificadores con ganancias que excedían mucho de la unidad. El hecho de que tales estructuras pudieran existir, sin estabilidad, parecía dudoso en 1927 para muchas personas. Obviamente, para avanzar, necesitábamos de criterios prácticos que dijeran al ingeniero de diseño qué propiedades debería buscar para conseguir un sistema estable. Afortunadamente, para los amplificadores con realimentación negativa la solución requerida fue rápidamente desarrollada por Nyquist dentro de un análisis clásico.”

Nyquist no fue el único en investigar los problemas de estabilidad. Así, en Alemania, Heinrich Georg Barkhausen, que estaba estudiando circuitos osciladores dio con la fórmula para la autoexcitación, $|KGH(j\omega)| = 1$. Este fue el mismo criterio ($\mu\beta = 1$) que utilizaron los ingenieros de la compañía Bell y otros en Estados Unidos. De hecho, este criterio se utilizó bastante en Alemania para determinar la estabilidad para amplificadores realimentados tanto positiva como negativamente. K. Küpfmüller contribuyó a los métodos de respuesta en frecuencia al relacionar el comportamiento frecuencial con la respuesta transitoria y con la estabilidad en lazo cerrado. Su aproximación a la estabilidad se basaba en la representación del comportamiento dinámico en la forma de una ecuación integral, y dio un criterio aproximado de estabilidad basado en la respuesta transitoria.

F. Strecker, en un libro de 1950, afirmaba haber descubierto el método de la respuesta en frecuencia y un criterio equivalente al de Nyquist en un coloquio del Laboratorio Central de Siemens sito en Halske en 1930. La publicación de este trabajo en la literatura no se produjo hasta después de la Segunda Guerra Mundial, por razones obvias.

A. V. Mikhailov, en 1938, propuso un método de respuesta en frecuencia que es similar al de Nyquist. Su razonamiento se basa en la obtención de un polinomio característico $p(s)$ a partir de las ecuaciones diferenciales del sistema, y en la representación de $p(j\omega)$ en el plano complejo. El gran mérito del método de Nyquist frente al de Mikhailov radica en el hecho de que no se necesita de ningún conocimiento sobre las ecuaciones diferenciales del sistema. Cremer en 1947 y Leonhard en 1940, propusieron métodos equivalentes al de Mikhailov.

4 Versión de MacColl del Criterio de Estabilidad de Nyquist

El criterio de Nyquist se basa en la siguiente pregunta: ¿cómo podemos determinar el número de polos de una función racional $R(z)$ que se encuentran a la derecha o a la izquierda del eje imaginario? Para ello debemos recurrir a un principio que los matemáticos denominan el “principio del argumento” y los ingenieros llaman la “propiedad de circunvalación”. Este principio lo enunciaremos de forma simplificada para nuestros propósitos en los siguientes términos: si Γ es una curva cerrada en el plano y $f(z)$ una función de variable que es derivable en un entorno de la curva y en todos los puntos interiores a la misma, excepto en quizá unos pocos puntos en los que puede tener polos, y si suponemos además que para todo $z \in \Gamma$, $f(z) \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0(f) - N_p(f)$$

donde N_0 , N_p representan el número de ceros y el número de polos de f interiores a Γ (contando su multiplicidad). La integral se calcula recorriendo la curva en el sentido contrario a las agujas del reloj. Este resultado tan sencillo toma su nombre del hecho de que la integral de línea representa la variación del argumento, $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z)$ de la función f cuando se recorre la curva en sentido positivo. También lo podemos interpretar como el número de circunvalaciones ω_n de la curva $f(\Gamma)$ en torno al origen.

Aplicaremos el principio del argumento a la función racional $R(s)$ sobre la curva Γ_M que se obtiene por yuxtaposición del intervalo $[-iM, +iM]$ con la semicircunferencia en \mathbb{C}^+ que une los extremos de este intervalo. Para un valor suficientemente grande de $M > 0$, la curva $R(\Gamma_M)$ da el mismo número de vueltas alrededor del origen ya que la curva encierra todos los polos y ceros de $R(z)$ en \mathbb{C}^+ . En la situación límite, es decir cuando $M \rightarrow \infty$, el valor de R a lo largo de la parte semicircular de Γ_M no cambia, y en consecuencia el valor constante a lo largo de esta parte es igual al de $R(s)$ en los puntos extremos, i.e. $R(j\omega)$ en $\omega = \pm\infty$. Más aún, si R tiene más polos que ceros, en el límite cuando $M \rightarrow \infty$, $R(j\infty) = R(-j\infty) = 0$. Esto significa que la parte semicircular de Γ_M no aporta nada al número de vueltas de $f(\Gamma_M)$ en torno al origen cuando M es suficientemente grande. Por lo tanto, podemos hallar directamente el número de vueltas de $R(s)$ a lo largo de la parte de la trayectoria que coincide con el eje imaginario, es decir la gráfica de $R(j\omega)$ cuando $\omega \in (-\infty, \infty)$. Resulta obvio que si conocemos el número de ceros en \mathbb{C}^+ también conocemos el número de polos en esa región.

Sabemos que una condición suficiente para que un sistema sea estable consiste en que todas las raíces de $1 + KG(s)H(s) = 0$ estén en el semiplano izquierdo. Definimos la función $R(s) = \frac{1}{K} + G(s)H(s)$ de manera que los ceros de $R(s)$ coincidan con los polos en lazo cerrado del sistema y los polos de $R(s)$

sean los polos de $G(s)H(s)$. En virtud de la propiedad de circunvalación, sólo debemos evaluar $R(j\omega)$ cuando $-\infty < \omega < \infty$ como medio para determinar $N_0 - N_p$.

¿Qué ocurre si aplicamos nuestro principio a la curva $\Gamma = \{G(j\omega)H(j\omega) : \omega \in \mathbb{R}\}$? En este caso el número de vueltas que da Γ alrededor de $-\frac{1}{K}$, que denotamos por $\text{Ind}(\Gamma, -\frac{1}{K})$, verifica la fórmula

$$\begin{aligned} \text{Ind}\left(\Gamma, -\frac{1}{K}\right) &= N_0\left(\frac{1}{K} + GH\right) - N_p \\ &= N_p\left(\frac{GH}{1 + KGH}\right) - N_p(GH). \end{aligned}$$

Esto significa que el sistema realimentado es estable, es decir $N_p\left(\frac{GH}{1+KGH}\right) = 0$ si y sólo si

$$\text{Ind}\left(\Gamma, -\frac{1}{K}\right) = -N_p(GH).$$

Nyquist utilizó precisamente esta idea. Notemos que $G(j\omega)H(j\omega) = R(j\omega) - \frac{1}{K}$, de forma que el número de veces que $G(j\omega)H(j\omega)$ rodea el punto $-\frac{1}{K}$ coincide exactamente con el número de veces que $R(j\omega)$ rodea el origen.

Según Norbert Wiener, la curva $\Gamma = \{G(j\omega)H(j\omega) : \omega \in \mathbb{R}\}$ puede tener múltiples autointersecciones, sin embargo, en general la curva, dividirá el plano complejo en componentes conexas². La condición de que GH esté limitada en \mathbb{C}^+ nos indica que ∞ no puede ser un punto interno. La respuesta en frecuencia realimentada $\frac{GH(j\omega)}{1 + KGH(j\omega)}$ es infinita si y sólo si $GH(j\omega) = -\frac{1}{K}$, y además “infinito” es un punto interno de $\frac{GH(j\omega)}{1 + KGH(j\omega)}$ sólo y cuando $-1/K$ es un punto interno de $GH(j\omega)$. Si el punto $-1/K$ es externo, se demuestra que no hay dificultad, y la realimentación es estable. Si $-1/K$ está en la frontera, la situación es más complicada, aunque en la mayoría de los casos el sistema suele entrar en una oscilación de amplitud estacionaria.

Si la función $GH(s) = s$, es decir un operador diferencial, entonces $GH(j\omega) = j\omega$, por lo que la curva es simple, y divide \mathbb{C} en dos componentes conexas. Al recorrer la curva en sentido antihorario vemos que el interior de $GH(j\omega)$ es \mathbb{C}^+ . El punto $-1/K$ es siempre externo, y la función de transferencia en lazo cerrado es $\frac{s}{1 + Ks}$. Realmente, nos interesan los polos en lazo cerrado,

²Si la curva fuese cerrada y simple, poco habría que decir, ya que en virtud del teorema de la curva de Jordan podemos afirmar directamente que hay exactamente dos componentes conexas.

por lo que podemos considerar la respuesta en frecuencia $\frac{1}{1 + jK\omega}$:

$$u + jv = \frac{1}{1 + jK\omega}; \quad u = \frac{1}{1 + K^2\omega^2}, v = \frac{-K\omega}{1 + K^2\omega^2}.$$

Más aún, $\left| \frac{1}{1 + jK\omega} \right|^2 = u^2 + v^2 = u$, que representa una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ localizada en $(\frac{1}{2}, 0)$. En este caso la realimentación admisible es ilimitada puesto que $-\frac{1}{K}$ está fuera de la circunferencia. La función respuesta impulsiva se determina fácilmente como $h(t) = \frac{1}{K} e^{-t/K} 1(t)$ que es claramente estable para cualquier K .

¿Qué es lo que ocurre si conectamos en serie dos bloques realimentados? En este caso, la función de transferencia en lazo cerrado es $\left(\frac{s}{1 + Ks} \right)^2$ y podemos analizar la respuesta en frecuencia

$$u + jv = \frac{(1 - jK\omega)^2}{(1 + K^2\omega^2)^2}; \quad u = \frac{(1 - K^2\omega^2)}{(1 + K^2\omega^2)^2}, v = \frac{-2K\omega}{(1 + K^2\omega^2)^2}.$$

con módulo al cuadrado, $u^2 + v^2 = \frac{1}{(1 + K^2\omega^2)^4}$, o lo que es lo mismo,

$$\omega = -\frac{v}{(u^2 + v^2) 2K}.$$

En consecuencia,

$$u = (u^2 + v^2) \left(1 - \frac{K^2 v^2}{4K^2(u^2 + v^2)} \right) = (u^2 + v^2) - \frac{v^2}{4(u^2 + v^2)}.$$

Pasando esta expresión a coordenadas polares: $u = \rho \cos(\theta)$, $v = \rho \sin(\theta)$,

$$\rho \cos(\theta) = \rho^2 - \frac{\sin^2(\theta)}{4} = \rho^2 - \frac{1}{4} + \frac{\cos^2(\theta)}{4} = -\frac{1}{4} + \left(\rho - \frac{\cos(\theta)}{2} \right)^2 + \rho \cos(\theta),$$

esto es,

$$\rho - \frac{\cos(\theta)}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

y, por tanto, la curva es una cardioide con la cúspide a la derecha y el centro en el origen (realmente una epicicloide definida por la rodadura de una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ sobre otra del mismo radio). En particular, tenemos las ecuaciones $\sqrt{\rho} = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\sqrt{\rho} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (que son una sola puesto que producen la misma traza $\rho = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)$).

Dado que la curva no corta el eje real negativo, podemos concluir que el número de selecciones de K estables es ilimitado (de hecho, la respuesta impulsiva es $h(t) = \frac{1}{K^2} e^{-t/K}$).

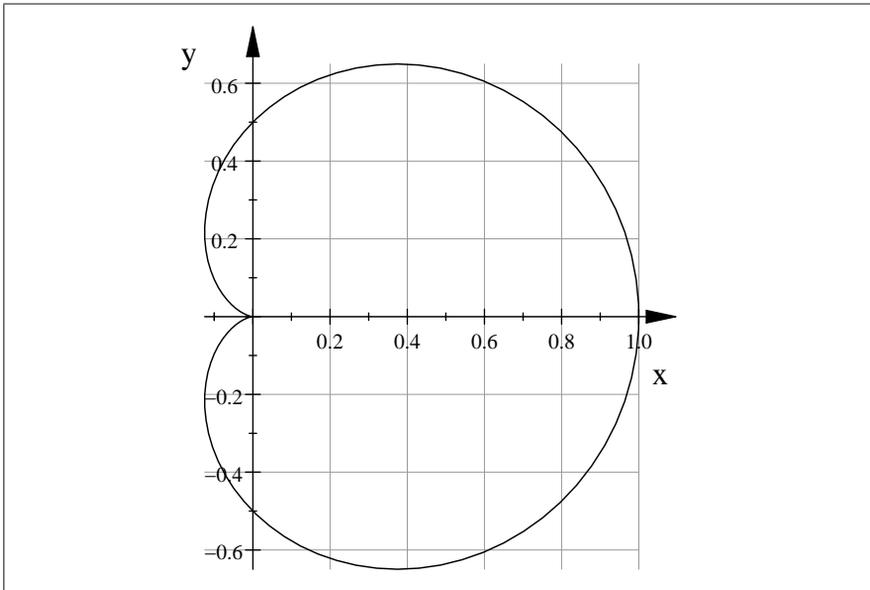


Figura 1: Cardioide

Ahora conectaremos en serie tres elementos diferenciales realimentados, considerando la respuesta en frecuencia

$$u + jv = \frac{1}{(1 + jK\omega)^3}.$$

Aquí llegamos a que

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + j\sqrt[3]{\rho} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right) &= \frac{1}{1 + jK\omega}, \\ \sqrt[3]{\rho^2} \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sqrt[3]{\rho^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{3}\right) &= \sqrt[3]{\rho} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \end{aligned}$$

es decir $\sqrt[3]{\rho} = \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$, que es una curva parecida a la cardioide. Aquí la realimentación con $K > \frac{1}{8}$ produce inestabilidad. De hecho, la respuesta impulsiva es de la forma $h(t) = \frac{t^2}{2K^3} e^{-t/K}$. Esto significa que podemos conectar hasta dos bloques realimentados para conseguir el máximo rango sobre la ganancia.