



## Capítulo 3. Teoría y mejora de la transferencia de calor por convección en superficies extendidas

La transferencia de calor abarca una amplia gama de fenómenos físicos que hay que comprender antes de proceder a desarrollar la metodología que conduzca al diseño térmico de los sistemas correspondientes.

Siempre que existe una diferencia de temperatura, la energía se transfiere de la región de mayor temperatura a la de temperatura más baja; de acuerdo con los conceptos termodinámicos la energía que se transfiere como resultado de una diferencia de temperatura, es el calor. Sin embargo, aunque las leyes de la termodinámica tratan de la transferencia de energía, sólo se aplican a sistemas que están en equilibrio; pueden utilizarse para predecir la cantidad de energía requerida para cambiar un sistema de un estado de equilibrio a otro, pero no sirven para predecir la rapidez (tiempo) con que puedan producirse estos cambios. La fenomenología que estudia la transmisión del calor complementa los Principios Primero y Segundo de la Termodinámica clásica, proporcionando unos métodos de análisis que permiten predecir esta velocidad de transferencia térmica.

Las superficies ampliadas tienen un extenso campo de aplicaciones en problemas de transmisión de calor, desde radiadores de automóviles o equipos de aire acondicionado, hasta los elementos combustibles de reactores nucleares refrigerados por gases, o los elementos de absorción y disipación de energía en vehículos espaciales, o los equipos de refrigeración y calentamiento en la industria química, etc.



Antes de entrar en la resolución de los problemas térmicos en superficies específicas, es conveniente hacer una interpretación intuitiva de la necesidad de las superficies ampliadas, que se conocen con el nombre de **aletas**, así como de sus secciones transversales, laterales y perfiles (sección recta), que se corresponden con figuras geométricas con posibilidades de fabricación en serie, tales como las rectangulares, triangulares, trapezoidales, parabólicas e hiperbólicas, con dimensiones en las que la relación (longitud/espesor) es del orden de 5/1 a 50/1, siendo el espesor del orden de 0,5 mm a 10 mm.

Las aletas se pueden disponer sobre superficies planas o curvas. Si la disposición es de tipo longitudinal, se puede admitir que la superficie de encastre donde se apoya la aleta es plana, siempre que el radio del tubo sea elevado frente al espesor de la aleta. Cuando las aletas son sólidos de revolución o paralelepípedos se denominan **protuberancias** y su disposición puede admitirse sobre superficies planas cuando la superficie de la protuberancia en la base sea pequeña frente a la superficie de esta última. Las protuberancias se tratan con distribución de temperatura constante para cada sección recta paralela a la base, lo que equivale a admitir que la relación entre la longitud  $L$  de la protuberancia y el diámetro o longitud equivalente en la base, es elevada, pudiéndose considerar la transmisión de calor como unidireccional; cuando esta hipótesis no se cumpla se estudia el fenómeno de la transmisión de calor en tres dimensiones.

Las aletas y las protuberancias se disponen en la superficie base constituyendo un conjunto, siendo el más frecuente un tubo en el que el número de aletas o protuberancias es variable, con una separación del orden de 1 a 6 centímetros para las aletas, y una distribución de retícula cuadrada o triangular para las protuberancias. Para satisfacer las necesidades térmicas, los elementos se acoplan en serie o en paralelo constituyendo un intercambiador de calor.

Cuando el fluido que circula por las aletas está confinado y se mueve mediante un sistema de bombeo, hay que tener en cuenta la energía necesaria para mantener el coeficiente de convección  $h_c$  a través de las aletas, procurando que la energía térmica extraída sea máxima frente a la energía utilizada en mover el fluido.

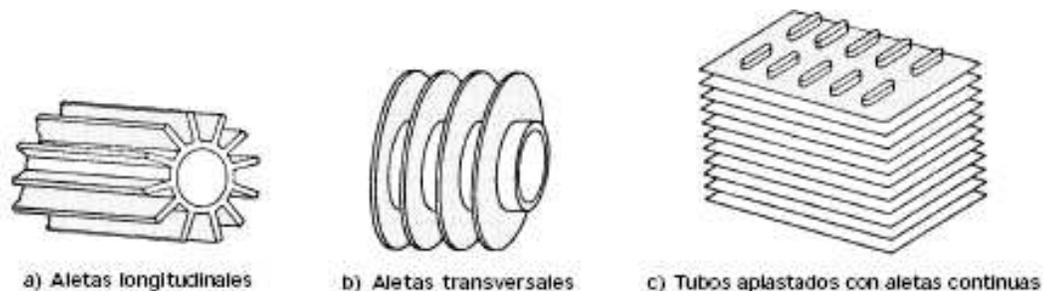


Figura 3.1

Esta situación conduce a un estudio de métodos y costes de fabricación, mantenimiento y rendimiento de los elementos de las aletas, cuyos valores óptimos pueden no coincidir con los óptimos térmicos, por lo que un análisis de estos últimos es importante desde el punto de vista de la fabricación de modelos normalizados, así como de la elección del modelo más adecuado para el usuario.

Para el desarrollo de este capítulo hemos utilizado la siguiente bibliografía: Bejan(1993); Chapman(1984); Incropera y de Witt(1996); Kern y Krauss(1972); Lienhard(1981); Alarcón (2001); Luna Abad y Alhama(2005a,2005b,2006,2008) y Alarcón, Alhama y González Fernández (2004).

### 3.1. Análisis del proceso de transferencia de calor en aletas: Modelo 1-D

Podemos considerar un elemento diferencial de anchura  $dx$ , tal como se muestra en la figura, sobre el que se definen los siguientes calores:

$Q_1$  es el calor entrante, en  $x$ , por conducción

$Q_2$  es el calor saliente, en  $(x + dx)$ , por conducción

$Q_c$  es el calor disipado por convección en el elemento diferencial

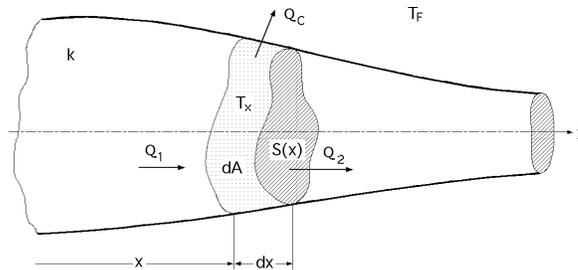


Figura 3.2

Haciendo un balance de flujos térmicos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k S \frac{d\Phi}{dx} \right) dx + h_c \Phi dA = 0 \quad ; \quad -k \frac{dS}{dx} \frac{d\Phi}{dx} dx - k S \frac{d^2\Phi}{dx^2} dx + h_c \Phi dA = 0 \quad (3.1)$$

en la que S es la sección transversal variable y dA la superficie lateral del elemento elegido de la aleta expuesta a la convección.

Dividiéndola por,  $k.S.dx$ , se obtiene:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{d\Phi}{dx} - \frac{h_c}{k} \left( \frac{1}{S} \frac{dA}{dx} \right) \Phi = 0 \quad (3.2)$$



que es de aplicación general a cualquier tipo de configuración de superficie ampliada en la que la conducción de calor sea monodimensional.

Para el caso particular de aleta recta de sección transversal constante, se tiene:

$$S = Cte \Rightarrow dS = 0 ; A = p x \Rightarrow dA = p dx$$

obteniéndose la forma:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \frac{h_c}{k} \frac{p}{S} \Phi = 0 \quad (3.3)$$

si realizamos un cambio de variable

$$\Phi(\xi) = \frac{T_x - T_F}{T_b - T_F} ; T_x = T_F + \Phi(\xi) (T_b - T_F)$$

obtenemos

$$\frac{d^2 \Phi(\xi)}{d\xi^2} - \frac{h_c p L^2}{k S} \Phi(\xi) = 0 \quad (3.4)$$

La distribución de temperaturas se puede expresar en forma adimensional, en función del número de Biot; teniendo en cuenta que el perímetro  $p$  multiplicado por la longitud  $L$  de la aleta, es igual al área total de la superficie lateral  $A = p L$ , resulta

$$\frac{p L^2}{S} = \frac{A L}{S} = L^*$$

que tiene dimensiones de longitud, por lo que se puede considerar como la longitud característica de la aleta ( $L^*$ ), y que podemos relacionar con el número de Biot de la forma:

$$Bi = \frac{h_c p L^2}{k S} = \frac{h_c L^*}{k}$$

La expresión de la ecuación diferencial de la distribución de temperaturas en forma adimensional, correspondiente a la aleta, en función del número de Biot, es:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} - Bi \Phi = 0 \quad (3.5)$$

cuya solución general es:



$$\Phi(\xi) = C_1 e^{-\sqrt{Bi} \xi} + C_2 e^{\sqrt{Bi} \xi} \quad (3.6)$$

Los valores de las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  se determinan una vez se especifiquen las condiciones de contorno.

**Condiciones de contorno.**

La temperatura que se suele conocer inicialmente es la correspondiente a la base de la aleta,  $x = 0$ ,  $T_{x=0} = T_b$ , que es la primera condición de contorno, por lo que:

$$x = 0 \ ; \ \xi = 0 \ ; \ \Phi(0) = \frac{T_b - T_F}{T_b - T_F} = 1 \ ; \ C_1 + C_2 = 1$$

común a los tipos de aletas de sección transversal constante.

La segunda condición de contorno toma diversas formas. Nuestro caso de estudio es el de aleta con convección desde su extremo libre, es decir, condición de contorno en el extremo libre,  $\xi = 1$ .

$$\begin{cases} -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h_c (T - T_F) \Big|_{x=L} = h_c \Phi(1) (T_b - T_F) \\ -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = -k \frac{T_b - T_F}{L} \frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} \end{cases}$$

por lo que:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = -\frac{h_c L}{k} \Phi(1) = -\frac{h_c L}{k} [C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + C_2 e^{\sqrt{Bi}}] \quad (3.7)$$

que igualada a:

$$\frac{d\Phi}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = -\sqrt{Bi} C_1 e^{-\sqrt{Bi}} + \sqrt{Bi} C_2 e^{\sqrt{Bi}} \quad (3.8)$$

y que junto con  $C_1 + C_2 = 1$  permite obtener  $C_1$  y  $C_2$ :



$$C_1 = \frac{(\sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k}) e^{\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} (e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}) + \frac{h_c L}{k} (e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}})} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k}) e^{\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \operatorname{Sh}\sqrt{Bi}}$$

$$C_2 = \frac{(\sqrt{Bi} - \frac{h_c L}{k}) e^{-\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} (e^{\sqrt{Bi}} + e^{-\sqrt{Bi}}) + \frac{h_c L}{k} (e^{\sqrt{Bi}} - e^{-\sqrt{Bi}})} = \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{Bi} - \frac{h_c L}{k}) e^{-\sqrt{Bi}}}{\sqrt{Bi} \operatorname{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{h_c L}{k} \operatorname{Sh}\sqrt{Bi}}$$

La distribución de temperaturas es

$$\Phi(\xi) = \frac{T(\xi) - T_F}{T_b - T_F} = C_1 e^{-\sqrt{Bi} \xi} + C_2 e^{\sqrt{Bi} \xi} = \frac{\operatorname{Ch}[(1 - \xi)\sqrt{Bi}] + \frac{S \sqrt{Bi}}{p L} \operatorname{Sh}[(1 - \xi)\sqrt{Bi}]}{\operatorname{Ch}\sqrt{Bi} + \frac{S \sqrt{Bi}}{p L} \operatorname{Sh}\sqrt{Bi}} \quad (3.9)$$

El calor disipado toma la forma

$$Q = - \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \left. \frac{d\Phi}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{k S}{L} (T_b - T_F) \sqrt{Bi} (C_1 - C_2) = k S (T_b - T_F) m \frac{\operatorname{Th}(mL) + \frac{h_c}{k m}}{1 + \frac{h_c}{k m} \operatorname{Th}(mL)} \quad (3.10)$$

siendo  $Bi^{1/2} = m.L$ .

Aplicando la condición  $\frac{dQ}{dL} = 0$  se obtiene

$$1 + \frac{h_c}{k m} \operatorname{Th}(mL) = \left\{ \operatorname{Th}(mL) + \frac{h_c}{k m} \right\} \frac{h_c}{k m} \quad ; \quad 1 = \left( \frac{h_c}{k m} \right)^2 \quad (3.11)$$

que se cumple para cualquier valor de  $L$ , e indica las condiciones técnicas a tener en cuenta para colocar aletas sobre una superficie y el efecto que estas producen. Esta ecuación indica que si la resistencia térmica por unidad de superficie frontal de la aleta es menor que la resistencia térmica correspondiente a la convección, hay que colocar aletas, mientras que en el caso contrario, las aletas producen un efecto refrigerante.

## 3.2. Análisis 2-D en aletas

El modelo a utilizar en nuestro estudio es un modelo 2-D, por lo que antes de pasar al análisis plantearemos las ecuaciones que rigen la transferencia de calor tanto en el caso de aleta recta rectangular como en el caso de espín cilíndrico.

### 3.2.1. Definición del modelo 2-D

#### *Espín cilíndrico*

La geometría de estudio es la siguiente:

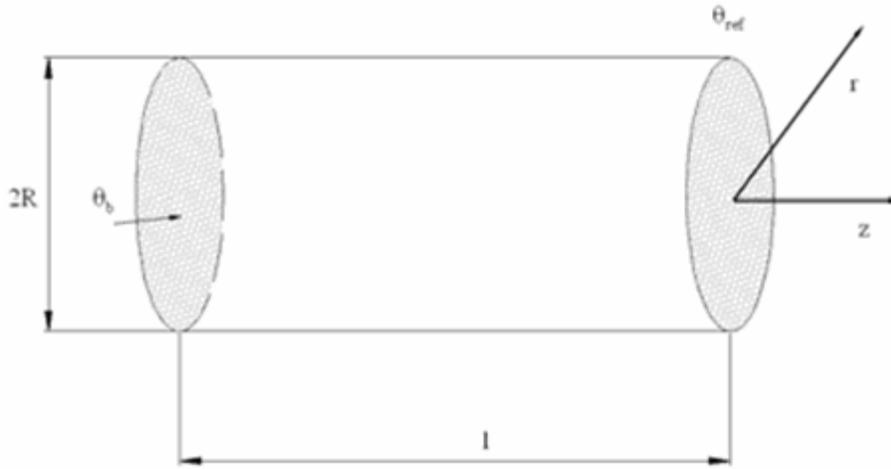


Figura 3.3

Las ecuaciones 2-D que gobiernan el proceso son:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) = \rho c_e \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right); \quad 0 < z < L; \quad 0 < r < R; \quad (3.12)$$

$$k \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = h(\theta - \theta_{ref}) \quad r = R; \quad 0 < z < L; \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad 0 < z < L; \quad (3.14)$$



$$\theta = \theta_b, \quad 0 < r < R, \quad z = 0; \quad (3.15)$$

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = h(\theta - \theta_{ref}) \quad 0 < r < R; \quad z = L \quad (3.16)$$

donde la ecuación (3.16) representa la condición de extremo convectivo. La resolución de las ecuaciones planteadas se realiza mediante el método de simulación por redes (MESIR).

### *Aleta recta rectangular*

La geometría a estudiar es la siguiente:

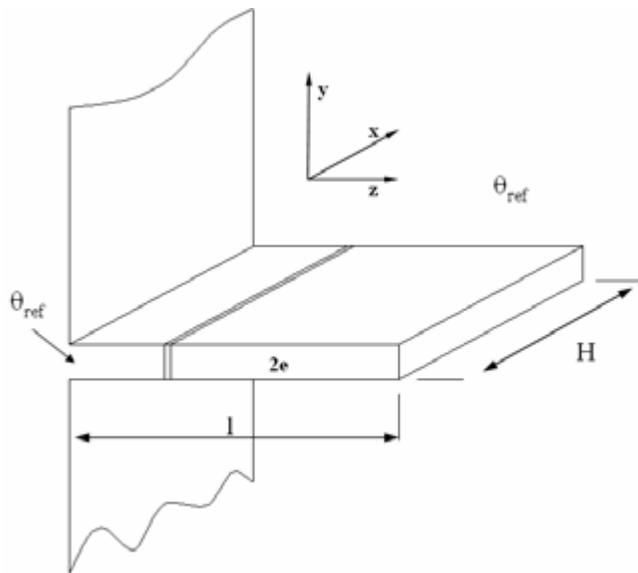


Figura 3.4

Las ecuaciones que caracterizan el proceso son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0; \quad 0 < z < l; \quad 0 < y < e; \quad (3.17)$$

$$k \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = h(\theta - \theta_{ref}) \quad y = e; \quad 0 < z < L; \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad 0 < z < L; \quad (3.19)$$

$$\theta = \theta_b, \quad 0 < y < e, \quad z = 0; \quad (3.20)$$



$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = h(\theta - \theta_{ref}) \quad 0 < y < e; \quad z = L \quad (3.21)$$

Ecuaciones que como en el caso de espín cilíndrico, resolveremos con ayuda del método de simulación por redes.

### 3.2.2. Longitud característica generalizada

El orden de magnitud de la longitud característica para el modelo 1-D, puede ser obtenido mediante análisis dimensional. Esta técnica ha sido ya utilizada para estudiar problemas en espines cilíndricos. Como en ese caso, y añadiendo un simple criterio cuantitativo, se puede establecer un valor preciso para esta longitud característica el cual puede ser usado para fabricar aletas reales.

La longitud característica,  $l_g$ , es el orden de magnitud de la longitud de la aleta donde se produce la mayor disipación de calor. Mas precisamente, se define como la longitud de la aleta para la cual la temperatura decrece hasta una fracción específica de la diferencia de temperatura  $\Delta\theta$ , diferencia entre la temperatura de la base y la temperatura ambiente.  $l_g$  es la inversa del conocido parámetro de aleta,  $m$ , el cual se obtiene a partir de la ecuación de conducción.

El uso de análisis dimensional discriminado, en contraste con el análisis dimensional clásico, hace posible una distinción en las direcciones espaciales como si fuesen dimensionalmente diferentes. Esta hipótesis atribuye diferentes ecuaciones dimensionales a las magnitudes de carácter vectorial (como la densidad de flujo calorífico, superficies, perímetro, etc.) y a las características físicas también de carácter vectorial o tensorial (como la conductividad térmica y el coeficiente de transferencia de calor). Como consecuencia, el número de monomios adimensionales que resulta de la aplicación del teorema de Pi disminuye, y la solución del problema resulta más precisa.

Cuando la aproximación 1-D no es aplicable (el número de Biot transversal es relativamente grande,  $Bi_t$ ) la longitud característica depende de  $Bi_t$ , y una nueva longitud característica,  $l_g^*$ , aparece asociada a cada  $Bi_t$ . Asumir las hipótesis del modelo 1-D proporciona una temperatura en cada punto de la sección transversal de la aleta, mientras que la fracción específica de  $\Delta\theta$  que define  $l_g^*$  no depende de la coordenada transversal. En contraste, con la frecuentemente aceptada hipótesis 2-D, la fracción específica de la diferencia de temperaturas  $\Delta\theta$ , depende de la coordenada transversal, la cual indica que se debe escoger un valor determinado de la coordenada transversal para definir la nueva  $l_g^*$ .

En resumen,  $l_g^*$  es la porción de una aleta 2-D para la cual el criterio de temperatura de superficie  $\theta_b \leq \theta_z \leq \theta_b - \Delta\theta$  se satisface. El tipo de condición de contorno en el extremo de la aleta no tiene influencia en  $l_g^*$ , ya que la aleta considerada es muy larga. Con esta



porción de aleta,  $0 < z < l_g^*$ , la mayor parte del flujo de calor que penetra en la base es disipada.

### *Espín cilíndrico*

La utilización de la hipótesis de modelo 1-D proporciona una única temperatura en cada localización axial del espín por lo que la longitud característica puede establecerse adecuadamente. Sin embargo, para el caso 2-D, la hipótesis comúnmente aceptada indica que no hay una única temperatura en cada localización axial de la aleta.

A pesar de ello, la temperatura decrece en cada sección conforme el radio se incrementa. Usando el mismo significado físico para conducción 2-D y 1-D, la dependencia entre la nueva longitud característica y el número de Biot transversal se determina como  $l_g^* = f(Bi_t)$ . La longitud  $l_g^*$  decrece conforme  $Bi_t$  se incrementa.

El uso de análisis dimensional discriminado, en contraste con el análisis dimensional clásico, hace posible una distinción entre las direcciones espaciales como si fuesen dimensionalmente diferentes. Esta hipótesis atribuye diferentes ecuaciones dimensionales a las magnitudes de carácter vectorial (como la densidad de flujo calorífico, superficies, perímetro, etc.) y a las características físicas también de carácter vectorial o tensorial (como la conductividad térmica y el coeficiente de transferencia de calor). Como consecuencia, el número de monomios adimensionales que resulta de la aplicación del teorema de Pi disminuye, y la solución del problema resulta más precisa.

La geometría para el análisis es la siguiente:

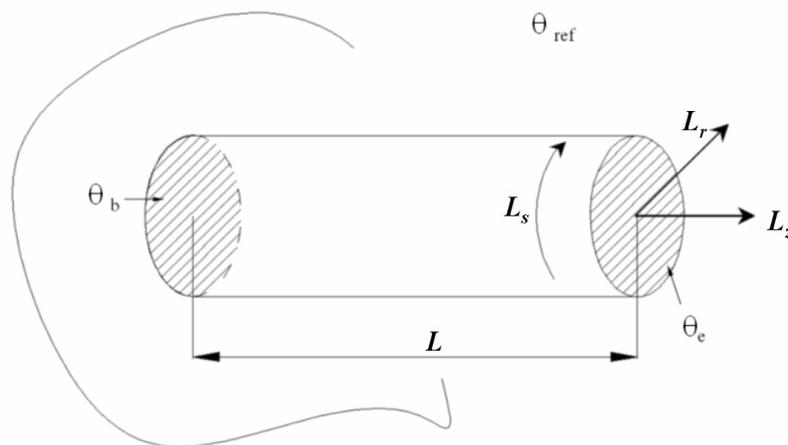


Figura 3.5



La base dimensional adecuada para el análisis es

$$\{L_s, L_r, L_z, Q, \theta, T\}$$

donde  $L_s$ ,  $L_r$ , y  $L_z$  representan la dimensión de la longitud de acuerdo con las direcciones circunferencial, radial o axial,  $Q$  es la dimensión del calor, y  $\theta$  y  $T$  son las dimensiones de temperatura y tiempo respectivamente. La masa  $M$ , no se incluye en el análisis, puesto que no los efectos inerciales no están presentes en el problema.

Como es conocido, el único requerimiento que un análisis dimensional requiere es que el conjunto de dimensiones sea completo y que las magnitudes que representan sean independientes unas de otras.

La lista de magnitudes relevantes para análisis 2-D, caso estacionario, y aleta larga, es:  $k_r$  (conductividad térmica radial),  $k_z$  (conductividad axial),  $h$  (coeficiente convectivo de transferencia de calor),  $R$  (radio del cilindro) y  $\Delta\theta$  ( $\Delta\theta = \theta_b - \theta_{ref}$ ). La longitud de la aleta,  $L_o$ , no forma parte de las variables relevantes del problema, puesto que la longitud efectiva que disipa el calor se asume que es una porción pequeña de  $L_o$ . Las ecuaciones dimensionales de estas variables son las siguientes:

$$[k_r] = Q\theta^{-1}T^{-1}L_s^{-1}L_z^{-1}L_r,$$

$$[k_z] = Q\theta^{-1}T^{-1}L_s^{-1}L_r^{-1}L_z,$$

$$[h] = Q\theta^{-1}T^{-1}L_s^{-1}L_z^{-1},$$

$$[S_i] = L_rL_s,$$

$$[P] = L_s,$$

$$[\Delta\theta] = \theta$$

con las que construimos la tabla 3.1

Base	$P_e$	$S_t$	$k_n$	$k_{ax}$	$H$	$\Delta\theta$
$L_r$		1	1	-1		
$L_s$	1	1	-1	-1	-1	
$L_z$			-1	1	-1	
$T$			-1	-1	-1	
$Q$			1	1	1	
$\theta$			-1	-1	-1	1

Tabla 3.1



La aplicación del teorema de Buckingham sobre las ecuaciones dimensionales ofrece solo un monomio adimensional (discriminado)

$$\pi_1 = hR/k_r$$

y  $hR/k_r$  es el denominado número de Biot transversal,  $Bi_t = hR/2k_r$

Ahora, podemos ver que la longitud característica,  $l_g^*$ , representa la porción de la aleta donde se produce la disipación del calor. Desde el punto de vista del análisis dimensional, esta es una magnitud que si existe, se obtiene a partir de las variables de las adimensionales del problema por medio de una apropiada ecuación dimensional.

Puesto que  $[l_g^*] = L_z$ , introduciendo la nueva variable en la tabla 3.1, aparece un nuevo monomio adimensional

$$\pi_2 = l_g^* / (S_t k_{ax} / Ph)^{1/2}$$

Siguiendo las reglas del análisis dimensional, la longitud característica puede expresarse como

$$l_g^* = (S_t k_{ax} / Ph)^{1/2} f_1(hR/k_r) = (S_t k_{ax} / Ph)^{1/2} f_2(Bi_t)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones arbitrarias desconocidas.

También, puesto que el grupo de variables  $(S_t k_{ax} / Ph)^{1/2}$  tiene dimensiones de longitud axial, se denomina a este parámetro  $l^*$ , y podemos escribir la expresión general de la forma

$$l_g^* / l^* = f_1(hR/k_r) = f_2(Bi_t)$$

$$l_g^* / D = f_4(hR/k_r) = f_2(Bi_t)$$

donde  $D$  es el diámetro de la aleta.

Hay que remarcar que  $l^*$  es un tipo de longitud característica en la que la influencia del  $Bi_t$  es despreciable, puesto que se refiere a la longitud de la aleta. De hecho,  $l^*$  se le denomina también parámetro de aleta y aparece normalmente cuando el proceso de no dimensionalización se aplica a la ecuación de conducción de la aleta.

Para  $Bi_t$  del orden de magnitud 0.001 (equivalente a asumir las hipótesis de modelo 1-D), la longitud característica se define como

$$l^* = (S_t k_{ax} / Ph)^{1/2}$$



### *Aleta recta longitudinal*

El análisis dimensional discriminado guía directamente no solo a monomios adimensionales que juegan un papel independiente en la solución del problema, sino también a las magnitudes inherentes del problema, si estas existen.

El modelo a utilizar en el análisis de aleta recta rectangular es el siguiente:

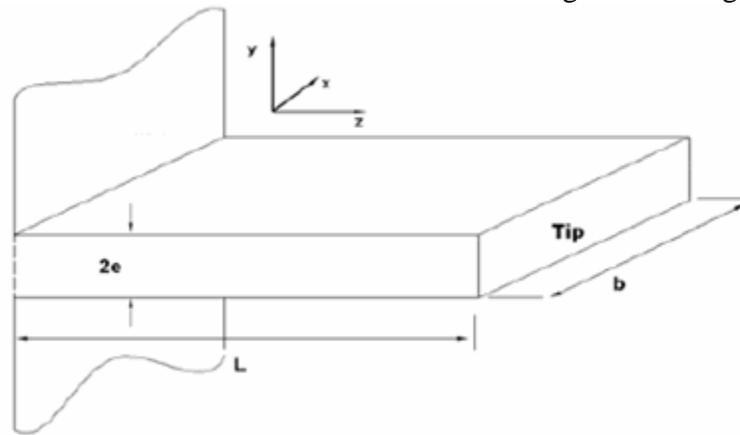


Figura 3.6

De acuerdo con la geometría del problema (asumimos que  $b \gg 2e$ ), y escogiendo tres longitudes para caracterizar esta geometría, una de las bases dimensionales para el problema es

$$\{L_x, L_y, L_z, Q, \theta, T\}$$

La lista de variables relevantes para el modelo 2-D, en caso estacionario, es  $k_y$ ,  $k_z$ ,  $h$ ,  $e$ , y  $\Delta\theta$ . Las ecuaciones dimensionales para estas variables son:

$$[k_y] = Q \theta^{-1} T^1 L_x^{-1} L_z^{-1} L_y$$

$$[k_z] = Q \theta^{-1} T^1 L_x^{-1} L_y^{-1} L_z$$

$$[S_t] = L_y L_z$$

$$[P] = L_x$$

$$[\Delta\theta] = \theta$$

Los exponentes dimensionales de estas variables se agrupan en la siguiente tabla:



Base	P	$S_t$	$k_z$	$k_y$	$h$	$\Delta\theta$
$L_x$	1		-1	-1		
$L_y$		1	-1	1	-1	
$L_z$		1	1	-1	-1	
$T$			-1	-1	-1	
$Q$			1	1	1	
$\theta$			-1	-1	-1	1

Tabla 3.2

El único (discriminado) monomio adimensional (o monomio Pi) resultante de la aplicación del teorema de Pi a las variables de la tabla es  $\pi_1 = hS_t/Pk_y = Bi_t$ , número de Biot transversal. Sin embargo, nosotros podemos buscar una longitud característica paralela al eje z, llamada  $l_g^*$ . Introduciendo esta cantidad en la tabla  $1, [l_g^*] = L_z$ , un nuevo monomio adimensional aparece:  $\pi_2 = l_g^*/(S_t k_z/Ph)^{1/2}$ . Como consecuencia, la longitud característica puede expresarse de la forma

$$l_g^* = (S_t k_z/Ph)^{1/2} f_1(hS_t/Pk_y) = (S_t k_z/Ph)^{1/2} f_2(Bi_t)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  denotan funciones arbitrarias desconocidas. También, puesto que el grupo de variables  $(S_t k_z/Ph)^{1/2}$  tiene dimensiones de longitud axial, llamada  $l^*$ , podemos escribir la expresión anterior en la forma

$$l_g^* / l^* = f_1(hS_t/Pk_y) = f_2(Bi_t)$$

Cuando se asume la hipótesis de modelo 1-D, el efecto de la conducción transversal es insignificante ( $k_y$  no aparece en la lista de variables relevantes, y  $Bi_t$  no puede ser establecido). En este caso, se demuestra inmediatamente que la única longitud característica que el análisis discriminado dimensional ofrece es  $l^*$ . Además,  $l^*$  es una cantidad inherente a aletas 1-D, independientemente de la longitud real de la aleta, y puede ser usado para fabricar las longitudes adimensionales reales en los gráficos, por ejemplo para representar la eficiencia. De hecho, este es el método seguido en la mayoría de libros que se basan sus argumentos derivados del trabajo con ecuaciones diferenciales, donde  $l^*$  se denomina parámetro de aleta.



### 3.3. Caracterización y optimización en superficies extendidas

#### 3.3.1. Parámetros de diseño clásicos

El calor disipado por una superficie con aletas se evalúa generalmente con el concurso de unos coeficientes, llamados genéricamente coeficientes de rendimiento o de prestaciones. Los coeficientes clásicos, *eficiencia* y *efectividad*, fueron definidos en el ámbito de las hipótesis simplificadoras. Sus limitaciones a la hora de afrontar configuraciones geométricas y/o procesos más complejos han llevado a la definición de nuevos coeficientes, entre los que destaca la *admitancia de entrada* (*input admittance*), el *factor de aumento* (*augmentation factor*), o el *coeficiente de mejora* (*enhancement*).

Los coeficientes de prestaciones pueden ser divididos en dos grandes grupos: los que comparan el calor disipado por la aleta con el de un cierto estándar: la *eficiencia* los que son proporcionales al calor disipado por la aleta: la *efectividad*, el *factor de aumento*, la *admitancia de entrada* y el *coeficiente de mejora*, con el matiz de que este último es inversamente proporcional al calor disipado, mientras que los demás lo son de forma directa.

La eficiencia es probablemente el coeficiente más familiar entre los ingenieros. La contribución de una aleta a la disipación de calor se computa de forma sencilla por el aumento de la superficie de intercambio, ponderada con el valor la eficiencia. Los coeficientes del segundo grupo se aplican con facilidad en cálculo y diseño de equipos. Así, el calor disipado por una aleta es el que disiparía la superficie base multiplicado por la efectividad o el factor de aumento, o simplemente el producto de la admitancia por el gradiente térmico en la superficie base de la aleta.

#### *Eficiencia*

Harper y Brown (*Harper and Brown, 1922*) definieron el parámetro más usado hasta la fecha, la llamada *eficiencia* de la aleta (aunque ellos la denominaron *effectiveness*, palabra que en inglés se utiliza hoy para denominar al parámetro que en castellano se conoce como *efectividad*). La eficiencia de la aleta,  $\eta$ , se define como la relación entre el calor disipado por la aleta en la unidad de tiempo,  $Q_a$ , y el que disiparía si toda ella estuviera a la temperatura de la base:

$$\eta = \frac{Q_a}{h_2 S_a \theta_b} \quad (3.22)$$

donde  $S_a$  es la superficie exterior total de la aleta y  $\theta_b = T_b - T_0$ , el *exceso o sobrettemperatura* de la base de la aleta respecto al entorno de ésta. Una definición alternativa es la *relación entre el calor disipado por la aleta y el que disiparía la misma aleta de conductividad infinita*.



En flujo estacionario, el calor disipado coincide con el que cruza la base,  $Q_b$ , por lo general más fácilmente evaluable, por lo que (1) se transforma en

$$\eta_b = \frac{Q_b}{h_2 S_a \theta_b} \quad (3.23)$$

Aunque la eficiencia se define para aletas aisladas, el calor disipado por el conjunto aleta-pared (p.e. en un intercambiador) se ha expresado tradicionalmente en función de este parámetro, asumiendo conocida la temperatura en la base de la aleta y basándose en el llamado concepto de *resistencia térmica* y de *suma de resistencias*.

Si se asume que la temperatura en la base de la aleta es conocida y coincide con la de la pared a la que está unida (hipótesis clásica), y  $h$  en la *superficie lateral es igual a  $h$  en la pared* ( $h_2$ ), en un flujo estacionario el calor disipado por la aleta es

$$Q_{ap} = Q_p + Q_a = h_2 (S_p + \eta S_a) \theta_b \quad (3.24)$$

siendo  $S_p$  la superficie del tramo de pared sin aleta. Por otra parte, la resistencia térmica se define como relación

$$\text{Flujo } (Q) = \frac{\text{Fuerza conductora } (\theta)}{\text{Resistencia } (R)} \quad (3.25)$$

De (3.23) despejamos la resistencia térmica de la superficie cubierta de aletas (bañada por el fluido 2)

$$R_{2ap} = \frac{\theta_b}{Q_{ap}} = \frac{1}{h_2 (S_p + \eta S_a)} \quad (3.26)$$

de forma que la resistencia total de la pared con aletas resulta

$$R_T = \frac{1}{US} = R_1 + R_p + R_{2ap} = \frac{1}{h_1 S} + \frac{L_p}{k_f S} + \frac{1}{h_2 (\eta S_a + S_p)} \quad (3.27)$$

donde  $U$  es el coeficiente global de transmisión de calor del conjunto aleta-pared y  $S$  es la superficie del tramo de pared considerado sobre el que se añade la aleta ( $S=2d \cdot b$ ).

En cualquier caso, como ha sido puesta de manifiesto por muchos investigadores y se discute ampliamente en capítulos siguientes de esta memoria, la hipótesis de temperatura en la base de la aleta conocida e igual a la de la superficie desnuda, dista mucho de la realidad, sobrevalorando el flujo total del conjunto. Coeficientes previamente definidos por otros autores, que se describen a continuación y otros nuevos propuestos en los capítulos siguientes de esta memoria superan este problema.



### **Efectividad**

Definida por Gardner (*Gardner, 1942*) como la relación entre el calor conducido a través de la base de la aleta y el que se disiparía por la misma área de la base de la superficie primaria, a la misma temperatura, si la aleta no estuviera presente:

$$\xi = \frac{\text{calor disipado a través de la aleta}}{\text{calor disipado sin aleta}} = \frac{Q}{h_2 S_b (T_b - T_2)} = \frac{S_a}{S_b} \eta \quad (3.28)$$

donde  $S_b$  es la superficie de la pared soporte antes de añadirle la aleta, que coincide con el área transversal (YZ) de la base de la aleta,  $A_b$ .

Un coeficiente relacionado con éste es la **efectividad global de superficie proyectada**, que recoge Bejan (*Bejan, 1993*), definido como la relación entre el calor disipado,  $Q_{ap}$ , por una superficie con aletas (aleta más pared soporte adyacente) y el que disipa la misma superficie desnuda,  $Q_0$ .

$$\xi_0 = \frac{Q_{ap}}{Q_0} = \frac{Q_{ap}}{h(2db)(T_b - T_\infty)} \quad (3.29)$$

$$\xi_0 = \xi \frac{S_a}{A_b} + \frac{S_0}{A_b}$$

donde  $S_0$  es la superficie considerada antes de añadirle la aleta ( $2db$  en el caso de una aleta longitudinal rectangular).

La efectividad es el coeficiente preferido, entre otros, en los casos en que hay generación interna de calor. Valores de  $\xi \leq 0$  implican que el calor generado en la aleta supera o iguala el que procede de la pared, teniendo entonces la aleta ningún sentido como elemento que mejore la transmisión de calor del sistema.

### **Admitancia de entrada**

Kraus y col. (*Kraus et al., 1978*) proponen una formulación completamente distinta, también basada en las hipótesis clásicas, y definen el coeficiente **admitancia de entrada**,  $Y_i$ , (*Kraus, 1988*) como

$$Y_i = \frac{Q_b}{\theta_b} \quad (3.30)$$

que está relacionado con la eficiencia a través de

$$Y_i = \eta h S_a \quad (3.31)$$



La idea fundamental que subyace en este parámetro es proporcionar información directa del calor disipado en función únicamente de la sobretemperatura en la base (*driving force*). Es el resultado de una formulación matricial de funciones de transferencia, que permite la evaluación de aletas con disposiciones especiales (en serie, ramificadas, bucles, etc.), para lo que se apoya en la teoría de grafos, lo cual le confiere una gran potencia y versatilidad (discretización de aletas, inclusión de fuentes térmicas, etc.).

### ***El factor de aumento y el coeficiente de mejora***

Su definición se basa en el concepto de resistencia térmica  $R$ . El factor de aumento,  $Aug$  (augmentation factor), fue definido por Heggs et al. (*Heggs and Stone, 1980*) para sistemas aleta-pared sometidos a convección y radiación, y mide el aumento de calor que se obtiene en una pared al añadir una aleta. Compara el calor transmitido por la superficie compuesta (aleta-pared) con el que transmitiría la pared desnuda, para un mismo gradiente térmico entre fluidos a ambos lados del sistema considerado:

$$Aug = \frac{Q_{ap}}{Q_{pd}} = \frac{R_{Tp}}{R_{Tap}} = \frac{R_1 + R_p + R_2}{R_1 + R_p + R_{2ap}} \quad (3.32)$$

$R_{Tp}$  y  $R_{Tap}$  son las resistencias totales de pared desnuda y conjunto aleta-pared, respectivamente.  $R_1$  y  $R_2$ , son las resistencias convectivas de la pared desnuda bañada por los fluidos 1 y 2.  $R_p$ , es la resistencia de la pared y  $R_{2ap}$  la resistencia convectiva del conjunto aleta-pared bañado por 2. El factor de aumento tiene expresión analítica en sistemas estacionarios unidimensionales, estando relacionado con la eficiencia.

### **3.3.2. Nuevos coeficientes de prestaciones en superficies adicionales**

#### ***Admitancia térmica inversa***

La admitancia inversa  $Y_s$ , y es su principal diferencia con la admitancia de entrada,  $Y_i$ , hace referencia al calor que *transmite* la aleta, que en la configuración más frecuente, aleta simple unida a una pared soporte, coincide con el calor *disipado* por la aleta (y pared adyacente).

$$Y_s = \frac{Q_s}{\theta_e} \quad (3.33)$$

siendo  $Q_s = Q_d$  el calor disipado o *de salida*, disipado al entorno o transmitido a otros elementos sistema considerado y  $\theta_e$  la sobretemperatura en la sección de entrada del mismo. El cálculo analítico de la admitancia inversa en el estudio de aletas no es sencillo, debido a la complejidad del cálculo de  $Q_s$ . En el caso de una aleta simple  $Q_s$  es el calor disipado por toda su superficie exterior  $S_a$ :



$$Q_s = \int_{S_a} h * \theta * dS + \sum_j k * A_j * \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L_j} \quad (3.34)$$

donde  $\theta_e = \theta_b$ , o sobretemperatura en la base de la aleta y  $j$  el número de elementos conectados a la aleta. En procesos independientes del tiempo o en el estacionario  $Y_i = Y_s$ .

La admitancia inversa tiene dimensiones de potencia dividido por temperatura, o en términos de termodinámica de redes, de *flujo* dividido por *fuerza*, es decir, de inversa de resistencia o *impedancia*. La idea intuitiva que subyace tras este coeficiente es que el calor que disipa una aleta está directamente relacionado con el gradiente térmico que impulsa la transmisión de calor o sobretemperatura en su base. La aleta es un elemento que aumenta la superficie de transmisión térmica de la pared a la que se une, pero que también ofrece cierta resistencia al flujo térmico. Así pues, el concepto de admitancia es inherente al propio concepto de superficies adicionales.

### ***Admitancia térmica inversa específica***

La admitancia inversa es un coeficiente con excelentes características, pero no está referido a la materia empleada ni a un óptimo. Para superar este inconveniente se ha definido la ***admitancia térmica inversa específica***,  $y_s$ , o relación entre la admitancia inversa,  $Y_s$ , y la masa,  $m$  de la aleta:

$$y_s = \frac{Y_s}{m} = \frac{Q_s}{\theta_e \cdot m} \quad (3.35)$$

Las dimensiones de la admitancia inversa específica son (W/kg·K). Cabe también la definición de la admitancia específica respecto al volumen. La admitancia específica participa de las cualidades de la admitancia:

- La admitancia específica es un parámetro consistente al derivar directamente del concepto de *admitancia*.
- La admitancia específica no se refiere a un estándar “externo”, pero al referir el calor disipado a la propia masa, no tiene lugar el inconveniente de que a mayores dimensiones mayor coeficiente.
- Es un coeficiente de eficiencia o rendimiento.

El máximo calor disipado  $Q_s$  para una masa dada (el *óptimo*) coincide con el máximo de  $y_s$ , ya que la optimización se realiza para unas condiciones de contorno dadas ( $\theta_e$  constante), es decir, que lo que se optimiza es la relación  $Q_s/\theta_e$ .



### ***Admitancia térmica inversa relativa***

Dos críticas pueden hacerse aún al anterior coeficiente: que no es adimensional y que su valor máximo no es la unidad. Para superar estos inconvenientes y hacer más explícita la referencia a un estándar, se define a continuación la *admitancia relativa*,  $y_r$ ,

$$y_r = \frac{y_s}{y_{opt}} \quad (3.36)$$

siendo  $y_{opt}$  la admitancia específica en el óptimo de una aleta de tipología (longitudinal, anular, rectangular, triangular, etc.) y/o un material dados. La determinación de este coeficiente requiere la determinación del óptimo, que es específico de cada tipo o configuración de aletas.

La admitancia inversa relativa es un coeficiente adimensional y su valor máximo es la unidad. Este parámetro complementa los anteriores, proporciona mayor información, aunque requiere del conocimiento de otros datos suplementarios. Puede considerarse un coeficiente ideal en el sentido de que responde a todos los requerimientos que se ha indicado que debía cumplir un buen coeficiente de prestaciones. La admitancia inversa relativa muestra el margen de mejora que se tiene en un diseño concreto (tipo o perfil de aleta).