Universidad Politécnica de Cartagena

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Perturbaciones de señales transitivas suaves

Sergio Arroyo Cegarra

Proyecto Fin de Carrera.
Escuela de Arquitectura e Ingeniería de la Edificación

Director: Dr. D. Juan Luis García Guirao

Cartagena, 2010

A mi familia y a mi novia.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su apoyo y ánimo me han ayudado a realizar este trabajo.

En primer lugar, quiero dar las gracias al profesor Juan Luis García Guirao, director de este Proyecto Final de Carrera, por su generosa y valiosa ayuda en la elaboración del mismo. Y por supuesto quiero agradecer la ayuda y el apoyo de toda mi familia y de mi novia.

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

AUTORIZACIÓN DE LA PRESENTACIÓN DEL PROYECTO FIN DE CARRERA POR EL DEPARTAMENTO RESPONSABLE

D. Sergio Amat Plata, Director del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística,

INFORMA:

Que el Proyecto Final de Carrera titulado "***Perturbaciones de señales transitivas suaves***", ha sido realizado por D. Sergio Arroyo Cegarra, bajo la dirección y supervisión de D. Juan Luis García Guirao y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea defendido.

En Cartagena, a de de 2010

EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

Fdo. Sergio Amat Plata

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

D. Juan Luis García Guirao, Profesor Titular de Universidad del Área de Matemática Aplicada en el Departamento de Matemática Aplicada y Estadística,

AUTORIZA:

La presentación del Proyecto Final de Carrera titulado "***Perturbaciones de señales transitivas suaves***", realizado por D. Sergio Arroyo Cegarra, bajo mi dirección y supervisión, en el Departamento de Matemática Aplicada y Estadística, y que presenta para su defensa.

En Cartagena, a de de 2010

EL DIRECTOR DEL PROYECTO FINAL DE CARRERA

Fdo. Juan Luis García Guirao

Índice general

Introducción

Nos encontramos actualmente por necesidad en un punto donde se busca incondicionalmente el ahorro de energía pero sin despreciar por supuesto la calidad de vida. Este camino nos está conduciendo a una arquitectura que busca una automatización casi completa de una vivienda.

Se entiende por domótica al conjunto de sistemas capaces de automatizar una vivienda, aportando servicios de gestión energética, seguridad, bienestar y comunicación, y que pueden estar integrados por medio de redes interiores y exteriores de comunicación, cableadas o inalámbricas, y cuyo control goza de cierta ubicuidad, desde dentro y fuera del hogar. Se podría definir como la integración de la tecnología en el diseño inteligente de un recinto.

A este proceso de automatización de la vivienda influye el enorme desarrollo de las nuevas tecnologías, como la robótica y sobre todo el abaratamiento de los costes de producción, pues como casi toda nueva tecnología, en sus comienzos solo podían ser disfrutados por unos cuantos, debido a los elevados costes.

Los beneficios que aporta la domótica son múltiples, y cada día surgen nuevos. Por ello es conveniente agruparlos en los siguientes apartados:

(a) El ahorro energético gracias a una gestión tarifaria e ïnteligente"de los sistemas y consumos

(b) La potenciación y enriquecimiento de la propia red de comunicaciones.

(c) La más contundente seguridad personal y patrimonial.

(d) La teleasistencia.

(e) La gestión remota (v.gr. vía teléfono, radio, internet, etc.) de instalaciones y equipos domésticos.

(f) Como consecuencia de todos los anteriores apartados se consigue un nivel de confort muy superior. Nuestra calidad de vida aumenta considerablemente.

A continuación para entender mejor como interviene la domótica en una vivienda, vamos a enumerar algunos de sus usos en distintos ámbitos.

- En el ámbito del ahorro energético:

(a) Programación y zonificación de la climatización.

(b) Racionalización de cargas eléctricas: desconexión de equipos de uso no prioritario en función del consumo eléctrico en un momento dado. Reduce la potencia contratada.

(c) Gestión de tarifas, derivando el funcionamiento de algunos aparatos a horas de tarifa reducida.

- En el ámbito del nivel de confort:

(a) Apagado general de todas las luces de la vivienda.

(b) Automatización del apagado/ encendido en cada punto de luz.

(c) Regulación de la iluminación según el nivel de luminosidad ambiente.

(d) Automatización de todos los distintos sistemas/ instalaciones / equipos dotándolos de control eficiente y de fácil manejo.

(e) Integración del portero al teléfono, o del videoportero al televisor.

- En el ámbito de la protección personal y patrimonial.

(a) Detección de un posible intruso.

(b) Simulación de presencia.

(c) Detección de conatos de incendio, fugas de gas, escapes de agua.

(d) Alerta médica. Teleasistencia.

(e) Cerramiento de persianas puntual y seguro.

- En el ámbito de las comunicaciones:

(a) Control remoto.

(b) Transmisión de alarmas.

(c) Intercomunicaciones.

Uno de los elementos que componen la automatización de una vivienda son las señales, siendo estas tratadas en este proyecto. Estas señales puden ser transmitidas por dos medios: pudiendo ser por cableados (Fibra óptica, XDSL) o por inalámbricos (Wifi, Bluetooth).

Estas señales son las encargadas de enviar la orden desde el elemento emisor (sensor, mando a distancia) al elemento receptor (persiana, lámparas). Nuestro objetivo es estudiar las llamadas señales transitivas como referencia de señales caóticas siguiendo al pie de la letra los resultados del artículo [KS 97]. El fenómeno de la caoticidad es un tema de actualidad ya que al coexistir múltiples señales se pueden acoplar y generar comportamientos no predecibles que con la ayuda de las matemáticas debemos de minimizar.

Capítulo 1

Transitividad topológica para un S.D.D.

Nuestro objetivo es dar una visión general sobre el concepto de *transitividad topológica* para un sistema dinámico discreto (S.D.D) (X, f) donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una aplicación continua de una manera puramente topológica que nos permita realizar una incursión futura al caso f diferenciable.

La transitividad topológica es una característica global de un sistema dinámico, pero la estructura local del mismo cumple ciertas condiciones tales como la ausencia de conjuntos invariantes atractores. Esto no implica que no existan una gran diversidad de sistemas satisfaciendo la condición ya que, por ejemplo, algunos de ellos tienen conjuntos de puntos periódicos densos mientras que otros son sistemas minimales y por tanto no poseen ningún punto periódico.

El concepto de transitividad topológica, según [GH2 95], se remonta al año 1920 usado por G. D. Birkhoff [B 50] (ver también [B 27]).

Consideraremos un sistema (semi)dinámico discreto (X, f) dado por un espacio métrico (espacio de fases) X y una aplicación continua $f : X \to X$. Un punto $x \in X$ "se traslada", siendo su trayectoria la secuencia $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots$, donde f^n es la iterada n–ésima de f. El punto $f^n(x)$ es la posición de x después de n unidades de tiempo. El conjunto de puntos de la trayectoria de x por f se llama orbita de x, y se denota por $\mathrm{orb}_f(x)$.

Como motivación del concepto de transitividad topológica podemos considerar un sistema físico real, donde nunca se determina o mide exactamente la posición salvo un cierto error, en esta situación, en lugar de la iteración de puntos se debería estudiar la iteración de (pequeños) subconjuntos abiertos del espacio de fases y describir su dinámica. Si por ejemplo definimos la minimalidad de (X, f) como el requerimiento de que cada punto $x \in X$ visite cada conjunto V abierto en X (es decir, $f^n(x) \in V$ para algún $n \in \mathbb{N}$) entonces, tiene sentido plantearse estudiar el siguiente concepto: cada subconjunto abierto no vacío U de X visita cada subconjunto abierto no vacío V de X en el siguiente sentido: $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Si el sistema (X, f) cumple esta propiedad, entonces se denomina *topológicamente transitivo*. Decimos también, abusando de la notación que la aplicación f es topologicamente transitiva en el caso en que no pueda surgir ninguna confusión referente al espacio de fases subyacente.

Intuitivamente, una aplicación f topologicamente transitiva, tiene puntos que acaban moviendose bajo iteración partiendo de un entorno arbitrariamente pequeño a cualquier otro. En consecuencia, el sistema dinámico no puede descomponerse en dos subsistemas (conjuntos disjuntos con interiores no vacios) los cuales no interactúan bajo f, es decir, son invariantes bajo la aplicación de f ($A \subset X$ es invariante si $f(A) \subset A$).

En cuanto a la terminología, algunos autores en lugar de “topológicamente transitiva” utilizan “regionalmente transitiva” [GH2 95], [P 83], “topológicamente ergódica” [dV 93], cf. [P 83], “topológicamente irreducible” [S 66], “nómada” [BH 87].

Por otro lado, algunos autores que trabajan con la noción de transitividad topológica están utilizando definiciones de esta noción diferentes o incluso, generalmente hablando, no equivalentes a nuestra definición. Por ejemplo, a f a menudo se le denomina topológicamente transitiva si hay un punto $x \in X$ cuya órbita es densa en X, ver por ejemplo [ALM3 93], [dMvS2 93], [W 82]. Sobre esto veremos más en la Sección 1.1 donde mostramos que si X es compacto (incluso menos) entonces las definiciones mencionadas son equivalentes.

También queremos atraer la atención al hecho de que la transitividad topológica (incluso la dinámica topológica en su totalidad) se puede estudiar en diferentes contextos además de en éste. Notemos que, si no se dice lo contrario, X es un espacio métrico (más adelante nos restringiremos más) y $f : X \to X$ es un una aplicación continua, en general no invertible. Sin entrar en detalles se debe tener en cuenta como mínimo que:

- en lugar de sistemas dinámicos discretos se puden considerar continuos.
- considerando un sistema discreto, se debe ser más o menos restrictivo en cuanto al

espacio de fases en el que estamos (indicar si, X es igual a un espacio topológico, a un continuum, una variedad diferenciable,...)

- Se puede ser más o menos restrictivo en cuanto a la aplicación con la que estemos. Aunque considerando una aplicación general f no continua difícilmente se puede obtener algo razonable. Existen sólo unos pocos intentos para estudiar la dinámica de biyecciones, de funciones α-Baire, etc. Es importante estudiar la dinámica de transformaciones de intercambio de intervalo o funciones continuas a trozos o monotonas a trozos sobre el intervalo. Por otro lado, pueden considerarse funciones diferenciables o funciones invertibles: homeomorfismos o difeomosfismos (especialmente en dimensiones más elevadas). Para funciones invertibles se tiene en cuenta tanto la transitividad como la transitividad parcial (la terminología no es universal) que no son equivalentes ([W 82], pp. 127-129). Por último, es importante remarcar que en lugar de una única aplicación f debemos ocuparnos en general de grupos de transformaciones (este es el caso, por ejemplo, de la monografía [GH2 95]).

A lo largo de este trabajo "transitivo" siempre significará "topologicamente transitivo".

Notar que también existe "transitividad métrica" (definida para sistemas con medida de probabilidad invariante) que de hecho es "ergodicidad" en el sentido de teoría ergódica, ver por ejemplo [OU2 41], [H 56], [DGS3 77], [P 83], [W 82], [K 85] y [KH2 95].

1.1. Definiciones y transitividad topológica

Nuestra elección de definición. Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ continua. Consideramos las siguientes dos condiciones:

(TT) Para cada par de conjuntos no vacíos U y V en X, existe un entero positivo n tal que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$

(DO) Existe un punto $x_0 \in X$ tal que la órbita de x_0 es densa en X.

Normalmente, **adoptamos la condición (TT) como la definición de transitividad topológica**, aunque algunos autores por el contrario adoptan **(DO)**. A cualquier punto con órbita densa se le llama *punto transitivo*, por el contrario a un punto que no es transitivo se le llama *intransitivo*. Al conjunto de puntos transitivos o intransitivos de (X, f) se denotará por tr(f) o intr(f) respectivamente, siempre que no pueda surgir ningún malentendido sobre quien es del espacio de fases. En tal caso también hablaremos de puntos transitivos o intransitivos de f.

En general, las dos condiciones son independientes. De hecho, tomando $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, dotado de la métrica usual, y $f : X \to X$ definida por $f(0) = 0$ y $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Claramente, f es continua. El punto $x_0 = 1$ es (el único) punto transitivo de (X, f) pero el sistema no es topologicamente transitivo (tomar, por ejemplo, $U = \{\frac{1}{2}\}, V = \{1\}$). Así (DO) no implica (TT).

Veamos que (TT) tampoco implica (DO). Para ello tomamos la función tienda de campaña $g : I \to I$, $I = [0, 1]$ y $g(x) = 1 - |2x - 1|$. Sea X el conjunto de todos los puntos periódicos de g y $f = g|_X$ (un punto x es *periódico* para g si $g^n(x) = x$ para algún entero positivo n; al menor de esos n se le llama periodo de x). Entonces el sistema (X, f) no satisface la condición (DO) puesto que X es infinito (denso en I) mientras que la orbita de algún punto periódico es finita. Pero sí se cumple la condición (TT). Esto se deriva del hecho de que para cualquier subintervalo no degenerado J de I existe un k entero positivo con $g^k(J) = I$ (ver Ejemplo 1.2.3). Por lo tanto, siempre que J_1 y J_2 son subintervalos abiertos no vacíos de I, existe una orbita periódica de g que corta tanto a J_1 como a J_2. Esto muestra que el sistema (X, f) es (TT).

Sin embargo, bajo alguna suposición adicional sobre el espacio de fases (o sobre la función) las dos definiciones, (TT) y (DO), son equivalentes. De hecho, tenemos:

Teorema 1.1.1 ([Si 92]). *Si X no tiene puntos aislados entonces (DO) implica (TT). Si X es separable y de segunda categoría de Baire, entonces (TT) implica (DO).*

La dinámica topológica (en el ámbito discreto) tradicionalmente estudia las propiedades cualitativas de los homeomorfismos de un espacio métrico compacto o al menos de un espacio topológico de Hausdorff (ver [dV 93], cf [W 82], [DGS3 77], [BC2 92]). Como se ha dicho antes, en este capítulo la aplicación será más general, concretamente será una aplicación continua de un espacio métrico en sí mismo. Si se considera la situación clásica cuando X es métrico compacto, entonces (TT) implica (DO) pero no a la inversa y son equivalentes siempre que X no tiene puntos aislados, como reza el Teorema 1.1.1. Por lo tanto, a veces, nos restringiremos a espacios métricos compactos con puntos no aislados.

(X, f) es un **sistema dinámico estándar** (**SDS**) si no posee puntos aislados.

Dado un sistema dinámico (X, f), el conjunto $\omega - limite$ de un punto $x \in X$ bajo f, $\omega_f(x)$, es el conjunto de todos los puntos límites de la trayectoria de x, i.e., $y \in \omega_f(x)$

si y solo si $f^{n_k}(x) \to y$ para alguna secuencia de enteros $n_k \to \infty$. Un punto x se llama *nonwandering* si para cada entorno U de x existe un entero positivo n tal que $f^n(U) \cap U \neq \varnothing$. El conjunto de todos los puntos *nonwandering* de f se denotará $\Omega(f)$.

El siguiente teorema se deriva fácilmente de las definiciones y su desmotración en partes puede encontrarse en (cf. [BC2 92], [DGS3 77], [dV 93] y [W 82].)

Teorema 1.1.2. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es topológicamente transitiva (i.e., se cumple (TT)),*
2. *para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U y V en X, existe un entero no negativo n tal que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$,*
3. *para cada conjunto abierto no vacío U en X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es densa en X,*
4. *para cada conjunto abierto no vacío U en X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ es densa en X,*
5. *para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U y V en X, existe un entero positivo n tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \varnothing$,*
6. *para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U y V en X, existe un entero no negativo n tal que $f^{-n}(U) \cap V \neq \varnothing$,*
7. *para cada conjunto abierto no vacío U en X, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es densa en X,*
8. *para cada conjunto abierto no vacío U en X, $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U)$ es densa en X,*
9. *si $E \subset X$ es cerrado y $f(E) \subset E$, entonces $E = X$ ó E no es denso en ninguna parte de X,*
10. *si $U \subset X$ es abierto y $f(U) \subset U$, entonces $U = \varnothing$ ó U es denso en X,*
11. *existe un punto $x \in X$ tal que $\omega_f(x) = X$,*
12. *existe un conjunto $G_\delta - denso$ $A \subset X$ tal que $\omega_f(x) = X$ siempre que $x \in A$,*
13. *el conjunto tr(f) es $G_\delta - denso$,*
14. *la función f es sobreyectiva y el conjunto tr(f) es no vacío,*
15. *$\Omega(f) = X$ y tr(f)es no vacío,*
16. *existe un punto $x \in X$ tal que el conjunto $\{f^n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ es denso en X.*

Aún más, las 16 condiciones anteriores implican que:

17. *el conjunto tr(f) es no vacío (i.e., se cumple (DO)).*

Si, además, (X, f) es un sistema dinámico estándar entonces también (17) es equivalente al resto.

Para otra condición en esta línea (también de "tipo ergódico") ver [KR2 68], c.f. [P 83], p.152 (notar que al menos en [P 83]) la función es un homeomorfismo).

La transitividad topológica se conserva por *conjugación topología*. Esto es, sean (X, f) e (Y, g) dos sistemas dinámicos y supongamos que son topologicamente conjugados, i.e., existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Entonces f es topologicamente transitiva sobre X si y sólo si g es topologicamente transitiva sobre Y.

Si h no es un homeomorfismo sino solo una aplicación sobreyectiva continua (*semiconjugada*) entonces la transitividad de f implica la transitividad de g pero no a la inversa. En este caso en que (X, f) es una *extensión* de (Y, g) e (Y, g) es un *factor* de (X, f).

Si h es una aplicación inyectiva continua entonces ninguna de las dos implicaciones entre la transitividad de f y la transitividad de g se mantiene. Pero si h es una aplicación inyectiva abierta, no necesariamente continua, ("abierta" significa que envía intervalos abiertos a intervalos abiertos) entonces la transitividad de g implica la transitividad de f. Lo contrario no es cierto (aun cuando h es continua).

1.2. Ejemplos de funciones transitivas

Hay que indicar que es imposible dar una visión completa de ejemplos de sistemas transitivos en la literatura, por lo que nos limitaremos a mencionar algunos casos que consideramos representativos.

Inicialmente debemos recordar que un sistema dinámico se llama *minimal* si todos los puntos son transitivos. Trivialmente, la minimalidad de un sistema dinámico implica su transitividad pero no al contrario.

Consideramos que los siguientes ejemplos son los más conocidos y/o simples de sistemas transitivos.

Ejemplo 1.2.1. Sea (X, f) un sistema dinámico y sea $x_0 \in X$ un punto periódico de f. Denotamos por Y la órbita (finita) de x_0 y sea $g = f|_Y$. Entonces el sistema dinámico (Y, g) es transitivo. Sin embargo no es un SDS, satisface tanto (TT) como (DO), por lo tanto cumple las 17 condiciones del Teorema 1.1.2. Notar también que (Y, g) es minimal.

Ejemplo 1.2.2. Sea $\mathbb{S}$ el circulo unidad y sea $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ una rotación irracional. Entonces $(\mathbb{S}, f)$ es topologicamente transitiva, en realidad minimal.

Ejemplo 1.2.3. Sea $I = [0, 1]$ y $f \in C(I)$ la función tienda de campaña estandar definida por $f(x) = 1 - |2x - 1|$. Si J es un subintervalo cerrado de I el cual no contiene al $\frac{1}{2}$ entonces $f(J)$ es el doble de larga que J; por lo tanto, $f^k(J)$ contiene al $\frac{1}{2}$ para cualquier k. Entonces $f^{k+2}(J)$ es un intervalo cerrado que contiene al 0 y repitiendo el argumento, duplicando la longitud, tenemos que $f^n(J) = I$ para algún n. Fácilmente esta propiedad implica transitividad (en general la propiedad es más fuerte que la transitividad, ver también Teorema 1.1.2 y completar la información con [LM2 94], p.66). El sistema no es minimal, ya que el conjunto de puntos periódicos es denso en I. (No existen sistemas minimales en I).

Ejemplo 1.2.4. La función $g \in C(I)$ definida por $g(x) = 4x(1-x)$ es topológicamente transitiva. Esto se deriva del hecho de que la función tienda de campaña f es topológicamente conjugada a g, siendo el homeomorfismo de conjugación $h(x) = \sin^2(\pi x/2)$

Ejemplo 1.2.5. Sea Σ el conjunto de todas las secuencias infinitas de $0's$ y $1's$. Se define la distancia entre dos secuencias $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$ y $t = (t_0 t_1 t_2 \ldots)$ como $\varrho(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty}(1/2^i)|s_i - t_i|$. La *función de cambio* $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ viene dada por $\sigma(s_0 s_1 s_2 \ldots) = (s_1 s_2 s_3 \ldots)$. Entonces (Σ, σ) es un sistema dinámico estándar. Es transitivo, ya que el punto $s^* = (0100011011000001\ldots)$ construido al enumerar sucesivamente todos los bloques de $0's$ y $1's$ de longitud 1, después los de longitud 2, etc, tiene órbita densa. El sistema no es minimal ya que tiene puntos periódicos. El conjunto de puntos periódicos es denso en Σ. En efecto, tomando un punto $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) \in \Sigma$, el punto $t_n = (s_0 \ldots s_n s_0 \ldots s_n \ldots)$ es periódico (con periodo divisor de $n + 1$) y $t_n \to s$ cuando $n \to \infty$. Recordemos que el sistema (Σ, σ) aparece de un modo natural cuando se investiga la dinámica de una función definida en un intervalo que tiene una 2-herradura (ver la Sección 2.5) para la definición de una herradura.) es decir, es turbulento en la terminología de [BC2 92]. Ver, e.g. [BC2 92], p.35.

Ejemplo 1.2.6. Representemos el conjunto de Cantor C como el conjunto Σ de todas las secuencias infinitas de $0's$ y $1's$ con la métrica definida en el Ejemplo 1.2.5. Tomemos la *"calculadora"* (ver, e.g., [N 82], p.14 o [BC2 92], p.133 o [S 66]), i.e. la función $f : \Sigma \to \Sigma$ definida por $f(s_0 s_1 s_2 \ldots) = 1 + (s_0 s_1 s_2 \ldots)$. En lugar de una definición precisa de la suma binaria damos dos ejemplos:

$$1 + (0000\ldots) = (1000\ldots)$$

$$1 + (11001000\ldots) = (00101000\ldots)$$

(De un modo más preciso, el grupo abeliano $(\Sigma, +)$, más que la función f en sí misma, normalmente se denomina calculadora). Entonces f es transitiva, siendo $s = (000\ldots)$ un punto transitivo (f es, incluso, minimal, ver [BC2 92] p.134).

Recordemos también que la dinámica sobre C inducida por f es un ejemplo de la llamada dinámica *solenoidal*.

Ejemplo 1.2.7. Consideremos el Toro de dimensión 2, $\mathbb{T} = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ y una matriz A tal que todas las entradas de A son enteros, $det(A) = +1$ ó -1 y A es hiperbólica, i.e. ninguno de sus autovalores tiene valor absoluto uno. La aplicación inducida sobre $\mathbb{T}$ por A se llama automorfismo toral hiperbólico (de hecho es un difeomorfismo). Todo automorfismo toral hiperbólico es topológicamente transitivo (pero no minimal, ya que tienen puntos periódicos densos). Ver, e.g., [D 89] para los detalles, cf. [AH2 94].

Topologicamente transitivo es una condición necesaria pero no suficiente para ergodicidad de un sistema dinámico ([H 56], [S1 68], [S 69]). A menudo la demostración de transitividad topológica de un sistema se derivaba de la demostración de su ergodicidad. Esto está fuera de nuestro alcance.

Se pueden encontrar gran cantidad de ejemplos complejos de sistemas transitivos. Nuestra intención no es dar un estudio completo de ello, pero si mencionamos, como mínimo, los resultados debidos a Ye, y a Sidorov (aunque actualmente no sean los más importantes), ya que no parecen ser demasiado conocidos. Por un momento dejamos la suposición de que el espacio de fases es compacto, puesto que hay muchos ejemplos interesantes en el plano o en el cilindro $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.8. Ejemplos en el plano y en $\mathbb{R}^n$. Parece que Shnirelman [S 30] fue el primero en dar un ejemplo de una función transitiva en el plano. Más tarde Besicovitch [B 37], [B 51] construyó funciones verificando la propiedad de un modo más sencillo (ver también [O 37], [OU2 41]). [B 37] demostró que para cualquier función $f(\varphi)$ de una subfamilia de la familia de todas las funciones continuas 2π- periódicas, existe un número irracional Θ tal que la función del plano en sí misma definida por

$$F(\varrho e^{i\varphi}) = \varrho e^{f(\varphi)} \cdot e^{i(\varphi+2\pi\Theta)}$$

es transitiva (en ocasiones a las funciones de esta forma se las denominan funciones de Shnirelman-Besicovitch y en el caso suave podrían llamarse funciones Shnirelman-Besicovitch-Anosov, cf. [S2 68]). Las funciones transitivas en [S 30] y [B 51] se construyen de un modo análogo. Entonces Sidorov, inspirado por estos resultados y métodos, obtuvo el siguiente resultado más profundo y general.

Teorema 1.2.1 ([S 66])**.** Sea $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria creciente de enteros positivos y sea n un número entero ≥ 2. Entonces existe una función $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que para algún punto $x \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $\{T_n^{k_i}(x) : i \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2.9. Ejemplos en regiones en $\mathbb{R}^n$. Sidorov [S2 68] pudo demostrar que para cualquier región conexa $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ existe una aplicación transitiva C^∞ de D en sí misma. (Esto lo demostró para flujos y después discretizó usando el resultado de Oxtoby y Ulam (ver [OU2 41], Teorema 6) diciendo que si $T_\lambda, -\infty < \lambda < +\infty$ es un flujo continuo topológicamente transitivo en un espacio métrico separable, entonces para todos los valores de λ, excepto un conjunto de primera categoría en la recta $-\infty < \lambda < +\infty$, los automosfismos T_λ son topológicamente transitivos.

En dimensión 2, se demuestra en [S2 68], que para cualquier región $D \subset \mathbb{R}^2$ difeomorfa al disco unidad existe una función en sí misma transitiva C^∞ de D. (Para demostrar esto, Sidorov probó que una función Shnirelman-Besicovitch-Anosov, modificada en el disco unidad de un modo apropiado cumple todos los requisitos.)

Para resultados más profundos ver e.g., [AK2 70]. Ver también [O 71], [OU2 41] y, para flujos, [A 74], [ST21 88], [ST22 88], [LT2 95].

Ejemplo 1.2.10. Método categórico vs ejemplos explícitos. El método categórico (ver [O 71]) se ha utilizado satisfactoriamente para demostrar la existencia de aplicaciones transitivas en algunos espacios. Para ilustrar esto, recordar de nuevo que Besicovitch [B 37] dio un ejemplo explícito de un automorfismo transitivo del plano. Parecía que (ver [O 71], p. 71) "no fue fácil construir uno para el cuadrado unidad cerrado, sin hablar de uno que conserva el área o que deja los puntos de la frontera fijos". La existencia de tales transformaciones se estableció primero por el método categórico [O 37].

Hoy se conocen ejemplos explícitos de funciones transitivas en el cuadrado basadas en las funciones Shnirelman-Besicovitch, ver [X 90]. Tales ejemplos existen incluso en la clase de funciones triangulares del cuadrado, i.e., funciones continuas de la forma $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$, ver Teorema 2.6.2.

El método categórico también ha sido utilizado para establecer métricamente la existencia (lo que implica existencia topológica) de automorfismos transitivos [OU2 41], [MPV3 75].

Finalmente vamos a mencionar el siguiente ejemplo de un homeomorfismo minimal sobre el Toro.

Ejemplo 1.2.11. Considerar un homeomorfismo del Toro de dos dimendiones $S : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, de la forma $S(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)$, donde $1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son racionalmente independientes y $+ : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ está definido de manera obvia. Entonces S es minimal (y ergódica con respecto a la medida Lebesgue). M. Rees [R 81] encontró un homeomorfismo minimal S_1 que es una extensión de S (i.e., $\varphi \circ S_1 = S \circ \varphi$ para alguna aplicación sobreyectiva continua φ de $\mathbb{T}$) tal que S_1 tiene entropía topológica positiva. Ver también [R 81] para referencias relativas a estos resultados.

Ejemplo 1.2.12. Homeomorfisfos Pseudo-Anosov. Sea M una superficie compacta orientada y conexa, con frontera y $f : M \to M$ un homeomorfismo. Hay dos tipos básicos de homeomorfismos que aparecen en la clasificación Nielsen-Thurston: los homeomorfismos de orden finito y los pseudo-Anosov.

Un homeomorfismo f se dice que es de orden *finito* si $f^n = id$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Los homeomorfismos de orden finito tienen entropía topológica cero.

Un homeomorfismo f se dice que es *pseudo-Anosov* si existe un número real $\lambda > 1$ y un par de foliaciones medidas transversas $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ tal que $f(\mathcal{F}^s) = \lambda^{-1}\mathcal{F}^s$ y $f(\mathcal{F}^u) = \lambda\mathcal{F}^u$. Los homeomorfismos pseudo-Anosov son topológicamente transitivos, tienen entropía topológica positiva, y tienen particiones de Markov [FLP3 79], ver también [T 88], [HT2 85].

Ejemplo 1.2.13. Sobre cilindros y otros espacios. Para ejemplos de aplicaciones topológicamente transitivas en cilindros ($\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, o más generales) ver [S 30], [B 37], [B 51], [G 44], [GH2 95], Sección 14, [S1 73],[S2 73], [K 75], ver también [H 55].

Para construcciones de flujos transitivos ver e.g., [A 74],[ST21 88], [ST22 88] y [LT2 95].

Para otros ejemplos ver, e.g., [dV 93], [OU2 41], [GH2 95].

Capítulo 2

Puntos transitivos e intransitivos

Tengamos en cuenta que en un sistema dinámico (X, f), si $x \in$ intr(f) $\Rightarrow$ $f(x) \in$ intr(f) y si $f(x) \in$ tr(f) $\Rightarrow$ $x \in$ tr(f). Si el sistema es estándar entonces tenemos equivalencias en lugar de implicaciones.

Además, si un sistema dinámico (X, f) es transitivo entonces por el Teorema 1.1.2 ($(1) \Rightarrow (13)$) tiene un conjunto G_δ-denso de puntos transitivos. Podemos ver cómo se puede probar esto (siempre que haya sido establecido que $(1) \Rightarrow (8)$). Teniendo en cuenta que un punto es transitivo si y sólo si visita todos los conjuntos de una base contable $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ de conjuntos abiertos (observemos que X es compacto). Entonces:

$$\text{tr}(f) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U_k) \right).$$

Ahora es suficiente con utilizar que $(1) \Rightarrow (8)$ en el Teorema 1.1.2.

Podemos ver también que como una consecuencia inmediata del párrafo anterior tenemos que si (X, f) es transitivo y un punto $x_0 \in X$ está aislado entonces es un punto transitivo. Pero, de hecho, la transitividad del sistema implica más: el punto x_0 es periódico y X es exactamente la órbita de x_0. Ya que por lo general conocemos si el espacio de fases considerado tiene un punto aislado, el Teorema 1.1.2 únicamente tiene algo de valor para sistemas dinámicos estándar.

También es instructivo distinguir dos casos dependiendo de si el espacio X es o no finito. A veces es útil distinguir si en X existen puntos aislados o no.

Primero consideremos un sistema dinámico (X, f) con un espacio de fases finito X. Si el sistema consta exactamente de una única órbita periódica, entonces es transitivo y todos los puntos son transitivos. De lo contrario no es transitivo y a lo sumo un punto es transitivo.

Ahora suponemos que X es infinito y que el sistema puede no tener puntos transitivos. El ejemplo usado en la apartado 1.1 para demostrar que (DO) no implica (TT) muestra que el sistema puede tener un único punto transitivo. Es fácil demostrar que si el sistema tiene dos puntos transitivos a, b, entonces es transitivo (y así tiene un conjunto G_δ-denso de puntos transitivos). (*Demostración*: En un SDS un punto transitivo es suficiente para conseguir la transitividad de (X, f), por tanto X tiene un punto aislado x_0. Si tanto a como b son aislados, siendo puntos transitivos, entonces pertenecen a la misma órbita periódica y X es exactamente dicha órbita, por lo tanto el sistema es transitivo. Por ello suponemos que a no es un punto aislado. Puesto que a es transitivo y f es continua, $f^n(U) = \{x_0\}$ para algún $n > 0$ y algún entorno U de a. Ya que a es transitivo y U es infinito existe un $k > 0$ con $f^{n+k}(a) \in U$. Entonces la orb(a) es finita y X =orb(a). Si a es periódico el sistema es transitivo. Si no, el punto b distinto de a y perteneciendo a orb(a) no puede ser transitivo.)

Finalmente, asumiremos que (X, f) no sea un sistema dinámico infinito arbitrario sino uno *estándar*. De esta forma los puntos transitivos se comportan como deseamos. Concretamente, si x es un punto transitivo en un SDS entonces $f^n(x)$ es un punto transitivo para todo n, todos los puntos de la trayectoria de x son diferentes entre si y la trayectoria de x visita cualquier bola en X infinitas veces. Recordar también que si en un SDS existe un punto transitivo entonces el sistema es transitivo y por lo tanto el conjunto de puntos transitivos es G_δ-denso. Así, en un SDS (X, f), existen las siguientes posibilidades:

(a) tr(f)=$\varnothing$, intr(f)=X,

(b) tr(f) es G_δ-denso y

  (b1) intr(f)=$\varnothing$ (minimalidad) o

  (b2) intr(f) es denso (Ejemplo 1.2.3)

Teorema 2.0.2. [cf.[A 93]] Sea (X, f) un SDS. Entonces el conjunto intr(f) es vacío o denso en X (equivalentemente: si tr(f) tiene interior no vacío entonces el sistema es minimal).

El enunciado debe ser conocido, pero la única referencia que podemos dar es [A 93], p. 77, ejercicio 30, el cual implícitamente contiene este resultado. Ya que Hint para el ejercicio asume el conocimiento de la teoría explicada en el libro, presentamos aquí una sencilla prueba basada en las ideas de [A 93]. Para un resultado similar al Teorema 2.0.2 en el caso de un homeomorfismo en un espacio no compacto ver [S 77] (y otros artículos citados allí).

En efecto, suponemos que Int(tr(f))$\neq \varnothing$. Esto implica la transitividad del sistema porque es estándar. La preimagen de un punto transitivo es un punto transitivo y la órbita de cualquier punto transitivo intersecta a Int(tr(f)), tenemos

$$\mathrm{tr}(f) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\mathrm{Int}(\mathrm{tr}(f))).$$

Por tanto tr(f) es abierto y, siendo el sistema transitivo, denso. Entonces el conjunto intr(f) es cerrado y no denso. Además, f(tr(f))=tr(f) y f(intr(f))=intr(f) (notar que f es sobreyectiva). Queremos demostrar que intr(f)=$\varnothing$. Supongamos, por el contrario que éste no es el caso y consideramos un entorno cerrado $U \neq X$ del conjunto intr(f). Entonces

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \mathrm{intr}(f)$$

ya que la órbita de cualquier punto de U\intr(f) intersecta al conjunto abierto $X \backslash U$.El conjunto $f(X\backslash \mathrm{Int}U)$ es compacto y disjunto con intr(f). Así uno puede encontrar en U un entorno cerrado V de intr(f) con $f^{-1}(V) \subset U$. Por consiguiente,

$$\mathrm{intr}(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \mathrm{intr}(f).$$

Denotamos por $V_n = \bigcap_{k=1}^{n} f^{-k}(V)$. Entonces $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados con $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \mathrm{intr}(f) \subset \mathrm{Int}V$. Así, existe m tal que

$$V_m = f^{-1}(V) \cap f^{-2}(V) \cap \cdots \cap f^{-m}(V) \subset IntV.$$

Ahora definimos

$$W = V \cap V_{m-1} = V \cap f^{-1}(V) \cap \cdots \cap f^{-(m-1)}(V).$$

Entonces $W \subset V$ y $f^{-1}(W) = f^{-1}(V) \cap f^{-2}(V) \cap \cdots \cap f^{-m}(V) = V_m = V \cap V_m \subset V \cap V_{m-1} = W$. Finalmente, tener en cuenta que W es un entorno cerrado de intr(f). Pero la existencia de un conjunto W tal que Int($X \backslash W$) $\neq \varnothing$, Int(W) $\neq \varnothing$ y $f^{-1}(W) \subset W$ contradice la transitividad de f (la órbita de un punto $x \in$ tr(f)$\cap$($X\backslash W$) no corta al conjunto W).

Si (X, f) es un sistema dinámico topológicamente transitivo y X es simultáneamente un espacio de medida (con, digamos, alguna medida “usual”), podemos preguntarnos cuál es la medida del conjunto tr(f). Ya que el problema involucra topología y medida, es de esperar que, generalmente, la respuesta no sea fácil y, por otro lado, que los ejemplos concretos que mejor conocemos, pueden ser absurdos.

Aquí solamente decimos que es fácil demostrar que la función tienda (Ejemplo 1.2.3) tiene un conjunto de puntos transitivos con medida de Lebesgue total pero que no es difícil encontrar un ejemplo de función transitiva $f : I \to I$ con λ(tr(f))< 1 (λ es la medida de Lebesgue). Una posibilidad es tomar en I un Conjunto de Cantor C con $\lambda(C) > 1 - \varepsilon$, $\text{mín}\, C = 0$, $\text{máx}\, C = 1$. Todos los puntos de C son puntos fijos de f y en todos los intervalos contiguos de C la función f constará de tres trozos de recta creciente, decreciente, creciente (sólo teniendo cuidado al considerar los “picos” suficientemente grandes en cada intervalo contiguo para garantizar la transitividad (incluso una propiedad más fuerte: para cada intervalo $J \subset I$ existe algún n con $f^n(J) = I$), pero no “picos” demasiados grandes para asegurar la continuidad de la función). Entonces λ(tr$f$)$< \varepsilon$. En [S 69] hay un ejemplo de aplicación topológicamente transitiva en cualquier región compacta conexa en $\mathbb{R}^3$ con λ(tr(f))=0.

Los ejemplos de funciones (homeomorfismos) con propiedades similares sobre el cilindro $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ se encuentran en [S1 73].

Para analizar aspectos de la teoría de la medida de la transitividad, añadimos algunos artículos recientes que tratan como mínimo, en parte, con el problema de la medida del conjunto de puntos transitivos (en dimensión uno): [VS 90], [L 94], [BKNvS 96], [H].

En relación con los puntos transitivos también mencionaremos resultados de A. Iwanik.

Dos puntos transitivos x, y en un SDS (X, f) (ver [I 89], [I 91] para una situación más general), se dicen *independientes* si (x, y) es transitivo en el sistema producto $(X, f)^2 = (X \times X, f \times f)$ (aquí $f \times f$ está definida por $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$). Si dos de tales puntos existen entonces (X, f) se llama *topologically weakly mixing*. Un subconjunto E de X se llama independiente para el sistema (X, f) [I 89] si para cualquier colección finita $x_1, x_2, \dots, x_n$ de puntos distintos de E el punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es transitivo en el sistema producto $(X, f)^n$ (entonces cada x_i es transitivo en (X, f)). Un subconjunto E de X se llama *totalmente independiente* para (X, f) [I 91] si para cualquier entero positivo r el conjunto E es independiente para el sistema (X, f^r) (no confundir con $(X, f)^r$)

En [I 89] se muestra, entre otros resultados, que en cada sistema topologically weakly mixing existe un conjunto independiente no contable. Se han estudiado conjuntos totalmente independientes en [I 91].

Para nociones "mixing" en sentido topológico ver también [F 67], [DGS3 77], [P 83], cf. [W 82] (son análogas a las nociones correspondientes de la teoría ergódica). Recordar que topological strong mixing (definida en el apartado 2.2 como topological mixing) implica topologically weakly mixing, lo que implica transitividad topológica.

2.1. Transitividad de una función y sus iteradas

Sea (X, f) un sistema dinámico, si $n \in \mathbb{N}$ y f^n es transitiva entonces trivialmente f es transitiva, mientras que lo contrario no es cierto. Como contraejemplo sencillo se puede tomar una función f definida sobre la unión de, digamos cuatro, intervalos compactos disjuntos de tal manera que es transitiva (por lo tanto los intervalos son permutados cíclicamente). Entonces f^n no es transitiva si n es par. Para ver que también esto es posible si X es conexa, tomar la 3-estrella (observando como la carta Y, algunas veces se llama espacio Y) y una función transitiva la cual permuta cíclicamente los tres extremos, siendo fijada la ramificación de puntos. (E.g. f lleva cada extremo al siguiente, dos de ellos linealmente y la restante como en la función tienda de campaña, limealmente por segmentos con dos trozos). Entonces tomamos las tercera iteración. Podemos ver el ejemplo de función transitiva pero no bitransitiva en la Sección 2.2.

El siguiente teorema es probablemente un resultado más popular de la teoría (cf. [CM2 86], ver [A 93], p.77, ejercicio 31 y, para homeomorfismos, [S 77]).

Teorema 2.1.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico y $n \geq 2$. Si f es transitiva pero no lo es f^n, entonces existe un conjunto cerrado $K \neq X$ con interior no vacío y un divisor $m > 1$ de n (puede ser $m = n$) tal que*

(1) $f^m(K) = K$,

(2) $K \cup f(K) \cup \cdots \cup f^{m-1}(K) = X$,

(3) *Int*$(f^i(K) \cap f^j(K)) = \varnothing$ *para* $0 \leq i, j \leq m-1, i \neq j$.

Finalmente, notar que si f^m y f^n son transitivas entonces f^{mn} lo es, cf. [CM2 86] (pero como vimos antes, f^{m+n} puede no ser transitiva).

2.2. Transitividad de dimensión uno

Consideraremos el intervalo compacto real $I = [0, 1]$. Hay que reseñar que cuando hablamos de un intervalo siempre nos referimos a un intervalo no degenerado.

Existen dos ejemplos típicos de funciones transitivas en I. Uno de ellos es la función tienda (Ejemplo 1.2.3), donde se ve fácilmente que todas las iteradas de dicha función son transitivas. En particular f^2 es transitiva. Una función $f : I \to I$ tal que f^2 es transitiva se le llama *bitransitiva*, además notemos que si f es bitransitiva entonces también es transitiva.

El otro ejemplo es la función lineal continua a trozos definida por $f(0) = 1/2$, $f(1/4) = 1$, $f(1/2) = 1/2$ y $f(1) = 0$. Entonces f es transitiva pero f^2 no lo es, siendo los subintervalos $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$ invariantes para f^2. Siendo la restricción de f^2 en cualquiera de esos intervalos bitransitiva. (Sin embargo, si $f \in C(I)$ es transitiva, entonces f^n es transitiva para todo $n > 0$ impar, ver [CM2 86].)

El siguiente teorema muestra que no existen otras posibilidades.

Teorema 2.2.1 ([BM21 85], cf. [B1 82] and [BC2 92], p.156). *Sea $f \in C(I)$ transitiva. Entonces f es bitransitiva o existe un punto $c \in$ Int$[0, 1]$ tal que $f([0, c]) = [c, 1]$, $f([c, 1]) = [0, c]$ y $f^2|_{[0,c]}$ y $f^2|_{[c,1]}$ son bitransitivas. (Claramente el punto c es el único punto fijo de f.)*

Por lo tanto, si $f \in C(I)$ es transitiva y tiene como mínimo dos puntos fijos entonces es bitransitiva. Pero existen funciones bitransitivas con sólo un punto fijo.

Una función $f \in C(I)$ es *monótona a trozos* si existen puntos $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ tal que para cada $k \in \{1, 2, \ldots n\}$, la restricción de f a cada intervalo $[a_{k-1}, a_k]$ es monótona (no necesariamente estricta). Naturalmente, si f es transitiva entonces todos los trozos son estrictamente monótonos. Notar también que aquí “monótona a trozos” significa “monótona a trozos con un número finito de trozos de monoticidad”.

Antes de presentar el siguiente teorema conviene recordar que un sistema dinámico (X, f) o una aplicación f en sí misma se llama topologically mixing si, para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U y V, existe un entero positivo N tal que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ para todo $n > N$. Evidentemente si f es topologically mixing entonces también es transitiva pero no el recírpoco (ver Ejemplo 1.2.3). Más adelante veremos que sobre un intervalo, topologically mixing es equivalente a bitransitividad.

Teorema 2.2.2 ([BM21 85], [BM22 87], [CM2 86], cf.[BC2 92] pp.157-159)**.** *Sea $f \in C(I)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es bitransitiva (i.e., f^2 es transitiva),

(2) f^n es transitiva para todo $n > 0$,

(3) f es transitiva y tiene un punto periódico de periodo impar mayor que 1,

(4) f es topologically mixing,

(5) para cada $\varepsilon > 0$ y para cada intervalo $J \subset I$ existe un entero positivo N tal que $f^n(J) \supset [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ para todo $n > N$.

Además, si f es monótona a trozos, entonces la siguiente afirmación es equivalente a las 5 afirmaciones anteriores:

(6) para cada intervalo $J \subset I$ existe algún entero positivo n con $f^n(J) = I$.

Existen ejemplos que demuestran que sin la suposición de monoticidad a trozos, (6) es estrictamente más fuerte que (1)-(5).

Se pueden añadir otras dos afirmaciones, siendo cada una de ellas equivalente a cada una de las afirmaciones (1)-(5):

(5') f^n es topologically mixing para algún $n > 0$,

(5") f^n es topologically mixing para todo $n > 0$.

Hemos mencionado que si f es una función transitiva definida en un intervalo, entonces f^n es transitiva para todo n impar. Darse cuenta también que f tiene un punto fijo y comparar esto con

Teorema 2.2.3 ([CM2 86])**.** *Si $f \in C(\mathbb{S})$ es transitiva y tiene un punto fijo, entonces f^n es transitiva para cada impar $n > 0$.*

Para el círculo existe un teorema análogo al Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.4 ([CM2 86])**.** *Sea $f \in C(\mathbb{S})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) existe un m tal que f^m es transitiva y tiene un punto fijo y un punto de periodo impar mayor que 1,

(2) existe un m tal que f^{2m} es transitiva y f^m tiene un punto fijo,

(3) f^n *es transitiva para cada* $n > 0$ *y* f *tiene puntos periódicos,*

(4) f *es topologically mixing*

Además, si f *es monótona a trozos, entonces la siguiente afirmación es equivalente al resto:*

(5) para cada intervalo $J \subset \mathbb{S}$ *existe algún entero positivo* n *con* $f^n(J) = \mathbb{S}$.

Por una “variedad ramificada unidimensional” Blokh [B 84] entiende cualquier espacio métrico compacto cuya estructura local en un punto arbitrario x puede describirse como “un número finito de intervalos que tienen el punto x como punto final común” (notar que el círculo también está incluido en esta definición y que no requiere conexión). En [B 87] (donde, en contraste con [B 84], se dan sólo enunciados sin demostración) los llama shortly graphs. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f se denotarán $P(f)$.

Necesitamos recordar la definición de la llamada propiedad de especificación. (X, f) (la métrica en X se denota por ϱ) o la aplicación f en sí misma se dice que satisface la *propiedad de especificación* si cumple lo siguiente: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero $M(\varepsilon)$ tal que para algún $k \geq 2$, para cualesquiera k puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, para cualesquiera enteros $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_k \leq b_k$ con $a_i - b_{i-1} \geq M(\varepsilon)$ para $2 \leq i \leq k$, y para cualquier entero p con $p \geq M(\varepsilon) + b_k - a_1$, existe un punto $x \in X$ con $f^p(x) = x$ tal que $\varrho(f^n(x), f^n(x_i)) \leq \varepsilon$ para $a_i \leq n \leq b_i, 1 \leq i \leq k$.

Si f tiene la propiedad de especificación, entonces f es transitiva, $P(f)$ es denso y la entropía topológica de f es positiva, ver [DGS3 77].

Teorema 2.2.5 ([B 84], [B 87]). *Sea* K *una variedad ramificada unidimensional (un grafo) y* $f \in C(K,)$ *transitiva. Entonces para algún* n, $K = \bigcup_{i=0}^{n-1} K_i$, *donde todos los* K_i *son conjuntos compactos conexos,* $K_i \cap K_j$ *es finito para* $i \neq j$, $f(K_i) = K_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-2$, $f(K_{n-1}) = K_0$ *y son posibles dos casos:*

1. $P(f) \neq \emptyset$, *entonces* $f^n|_{K_i}$ *tiene la propiedad de especificación,* $i = 0, 1, \ldots, n-1$,

2. $P(f) = \emptyset$, *entonces todos los* K_i *son homeomorfos al círculo y* $f^n|_{K_i}$ *son conjugadas a rotaciones irracionales,* $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

2.3. Transitividad y periodicidad densa

Si $P(f)$ es denso en X, diremos que f ó (X, f) tiene periodicidad densa.

Naturalmente, la periodicidad densa no puede implicar transitividad si el espacio de fases tiene más de un punto (considerar la función identidad). En algunos espacios el recíproco tampoco es cierto (una rotación irracional en el círculo). Pero hay espacios donde la transitividad implica periodicidad densa.

Sharkovskii ([S2 64], cf. [BM21 85], [BC2 92], p. 156) demostró que si $f \in C(I)$ es transitiva entonces $P(f)$ es densa en I. Este resultado clásico puede generalizarse sustancialmente.

Un espacio conexo X tiene un *intervalo no conectado* si existe un subconjunto abierto J de X, homeomorfo a un intervalo abierto, tal que $X \backslash J$ no está conectado.

Teorema 2.3.1 ([AKLS4]). *Si en el sistema (X, f) el espacio X es conexo y tiene un intervalo no conectado y f es transitiva entonces $P(f)$ es denso en X.*

Si X es la unión de dos círculos disjuntos entonces tiene un intervalo no conectado pero X no es conexo y hay una función transitiva $f \in C(X)$ sin puntos periódicos (cf. Teorema 2.2.5, caso (2)).

Si X es sólo un círculo entonces está conectado pero no tiene un intervalo no conectado. De nuevo, la función transitiva puede tener un punto no periódico.

En el círculo es suficiente añadir un supuesto adicional:

Teorema 2.3.2 ([CM2 86]). *Si $f \in C(\mathbb{S})$ es transitiva y $P(f)$ es no vacío entonces $P(f)$ es denso en $\mathbb{S}$.*

Por otro lado, recordar lo siguiente

Teorema 2.3.3 ([AK2 79]). *Sea $f \in C(\mathbb{S})$. Entonces f es transitiva y $P(f) = \varnothing$ si y sólo si f es topológicamente conjugada a una rotación irracional.*

En cuanto a funciones transitivas definidas sobre grafos, notar que en el caso (1) del *Teorema 2.2.5 tenemos periodicidad densa*, ya que la propiedad de especificación lo implica (y $x \in P(f^n)$ si y sólo si $x \in P(f)$).

En el cuadrado I^2 la transitividad no implica periodicidad densa. Incluso, hay una función en sí misma triangular continua del cuadrado la cual es transitiva y no es densa en ningún conjunto denso de puntos periódicos, ver el Teorema 2.6.2.

Ver también el Ejemplo 1.2.6 y la función S en el Ejemplo 1.2.11 para ver que *en el conjunto de Cantor y en el Toro la transitividad no implica periodicidad densa*. De un modo más general, si X es infinito y admite una función minimal f entonces $P(f) = \varnothing$ y, por consiguiente, la transitividad en X no implica periodicidad densa.

2.4. Transitividad y caos

El término caos, en relación con una función, fue utilizado en primer lugar por Li y Yorke [LY], aunque sin dar ninguna definición formal. Hoy existen varias definiciones de lo que significa que una función sea caótica, algunas de ellas actuando razonablemente solo en espacios de fase especiales. Aunque podría decirse que "tantos autores, tantas definiciones de caos", tras ellas normalmente está la idea de impredecibilidad del comportamiento de todas las trayectorias o de "algunas" trayectorias o, como mínimo, de una trayectoria, cuando la posición del punto cuya trayectoria es considerada se da con un error (inestabilidad de puntos o dependencia sensible a las condiciones iniciales son términos normalmente utilizados para describir este fenómeno).

Ya que la transitividad topológica es por lo general parte de la definición de caos o transitividad implica o es implicada por el caos (al menos en algunos espacios), mencionamos aquí algunos tipos de caos e indicamos su relación con la transitividad.

Algunas veces $f \in C(I)$ se denomina caótica si tiene una órbita periódica cuyo período no es una potencia de 2, cf. [BC2 92], p.33 (en el intervalo, es de hecho equivalente a la positividad de la entropía topológica de f, ver [ALM3 93], p.231). La definición anterior está relacionada con el orden de Sharkovskii del conjunto $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \cdots \succ 4\cdot 3 \succ 4\cdot 5 \succ 4\cdot 7 \succ \cdots \succ \cdots \succ$$

$$2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ \cdots \succ \cdots \succ 2^\infty \succ \cdots \succ 2^n \succ \cdots \succ 4 \succ 2 \succ 1.$$

También utilizaremos el símbolo $\succeq$ de un modo natural. Para $t \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ denotamos por $S(t)$ al conjunto $\{k \in \mathbb{N} : t \succeq k\}$ ($S(2^\infty)$ representa el conjunto $\{1, 2, 4, \dots, 2^k, \dots\}$). Sea $f \in C(I)$ y Per(f) el conjunto de periodos de sus puntos periódicos.
Teorema de Sarkovskii ([S1 64], [S 65]). *Para cada $f \in C(I)$ existe una $t \in \mathbb{N}\cup\{2^\infty\}$ con Per(f)=$S(t)$. Por otro lado, para cada $t \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ existe una $f \in C(I)$ con Per(f)=$S(t)$.*

Si Per(f) = $S(t)$, entonces f se denomina de *tipo t*. Cuando hablamos de tipos los consideramos ordenados por el orden Sharkovskii. Así la definición anterior dice que una función definida en un intervalo es caótica si su tipo es mayor que 2^∞.

Si $f \in C(I)$ es bitransitiva, entonces su tipo es un número impar $2r + 1$, donde $r > 0$ (ver Teorema 2.2.2). Este tipo no puede ser 3, i.e., es posible que $r > 1$ (e.g., la función en [ALM3 93], p.37, Fig. 2.2.2, es bitransitiva y su tipo es 7).

Así, si f es transitiva pero no bitransitiva, entonces (ver Teorema 2.2.1) el tipo de f^2 es un número impar $2s + 1$, $s > 0$ de donde el tipo de f es $2 \cdot (2s + 1)$, $s > 0$. Es sorprendente que podamos exigir aquí que siempre $s = 1$. Esto se deriva del hecho de que si f es transitiva entonces, por [B1 82], f^2 tiene el supuesto L-esquema de Sharkovskii, y que si g tiene un L-esquema entonces g tiene un punto periódico de periodo 3 (ver [S1 64]). Por consiguiente, si f es transitiva entonces tiene un punto periódico de periodo 6 (la afirmación de que cualquier función transitiva tiene un punto periódico de periodo 6 también se demuestra en [BC2 87]). Ahora es suficiente utilizar el hecho de que f, siendo transitiva pero no bitransitiva, únicamente tiene un punto fijo y puntos periódicos de periodos pares (ver Teorema 2.2.1) y por consiguiente tiene tipo 6.

Por lo tanto, todas las funciones transitivas en el intervalo son caóticas en el sentido considerado pero no en el inverso.

Caos en el sentido de Li y Yorke. La definición de caos de Li-Yorke fue fijada sobre las bases de [LY2 75] y más tarde se encontraron otras definiciones equivalentes [JS2 86]. Al final resultó [KS2 89] que una función $f \in C(I)$ es caótica en el sentido de Li y Yorke si y sólo si existen dos puntos $x, y \in I$ con $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ y $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$ (Entonces el conjunto $\{x, y\}$ se llama a two- point scrambled set).

Si $f \in C(I)$ es transitiva entonces es caótica en el sentido Li y Yorke (en la siguiente sección se presentará un resultado más fuerte; compara esto con el círculo cuando las rotaciones irracionales tienen un two- point scrambled set). El recíproco no es cierto (ya que caos en el sentido Li-Yorke permite que f sea constante en un subintervalo de I).

Pero en [BH 87] está demostrado que, bajo la Hipótesis de Continuidad, una función $f \in C(I)$ es bitransitiva si y sólo si existe un extremally scrambled set incontable para f, i.e., un conjunto incontable S tal que para cada $x, y \in S$ con $x \neq y$, y $\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$ y $\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 1$ (Notar que 1 es la longitud de I).

Caos genérico sobre el intervalo. Este tipo de caos, propuesto por A. Lasota (ver [P 85]), es más fuerte que el considerado anteriormente. Aunque el intervalo tiene dimensión uno, existe un aspecto bidimensional en este caos.

Para una función $f \in C(I)$ define el siguiente conjunto plano:

$$C(f) = \{(x, y) \in I^2 : \liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0 \text{ y} \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0\}.$$

Un intervalo compacto $T \subset I$ se llamará intervalo invariante transitivo de f si es f-invariante y la restricción de f al intervalo T es topológicamente transitiva. Según A. Lasota una función $f \in C(I)$ se llama generalmente caótica si el conjunto $C(f)$ es residual en I^2. Del mismo modo, diremos que f es densamente caótica si $C(f)$ es densa en I^2 (ver también las definiciones de ε-caos genérico y denso en [S 90], que de hecho son equivalentes a caos genérico).

En [S 90] se encuentran varias condiciones equivalentes para caos genérico. En [S 92] se demuestra que en una clase de funciones las cuales contienen todas las funciones monótonas a trozos, la noción de caos denso y la de caos genérico coinciden (para un ejemplo (perteneciente a I. Mizera)de función densamente caótica la cual no es generalmente caótica, ver [S 90]).

La transitividad topológica implica caos genérico. El recíproco no es cierto, ya que existen funciones genéricamente caóticas arbitrariamente cercanas a una función constante. Sin embargo, hay sólo una "pequeña" diferencia entre estas dos nociones:

Teorema 2.4.1 ([S 90]). *Sea $f \in C(I)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es genéricamente caótica,

(b) las siguientes dos condiciones se cumplen simultaneamente:

- *(b-1) f tiene un único intervalo invariante transitivo o dos intervalos invariantes transitivos teniendo un punto en común,*
- *(b-2) para cada intervalo J existe un intervalo invariante transitivo T de f tal que Int(T) $\cap \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(J) \neq \varnothing$.*

Caos en el sentido de Ruelle y Takens (Auslander y Yorke). Sea (X, f) un sistema dinámico. Denotamos la métrica de X por ϱ. Sea $\varepsilon > 0$. La función f se llama Lyapunov ε-inestable de un punto $x \in X$ si para cada entorno U de x, existe $y \in U$ y $n \geq 0$ con

$\varrho(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ (algunos autores escriben $\geq \varepsilon$ pero no tiene ninguna influencia en lo que sigue). La función f se llama inestable en un punto x (o el punto x es llamado inestable) si existe $\varepsilon > 0$ tal que f es Lyapunov ε-inestable en x. Para más información ver , e.g., [G 79], [AY2 80], [B2 82], [Pr 83].

En [RT2 71] (según [AY2 80]) un sistema (X, f) con f sobreyectiva se dice caótico si cada punto es inestable y X contiene una órbita densa. La inestabilidad de todos los puntos en un sistema implica que el sistema tiene puntos no aislados. Así, el caos en un SDS se define como "transitividad topológica más inestabilidad puntual".

Además si un SDS tiene la propiedad de inestabilidad puntual entonces puede ocurrir que no exista $\varepsilon > 0$ tal que todos los puntos sean ε-inestables con este ε. Pero si, adicionalmente, el sistema tiene una órbita densa (i.e., es transitivo) entonces la inestabilidad puntual (en realidad la inestabilidad del punto con órbita densa) implica inestabilidad puntual uniforme, i.e., la existencia de tal $\varepsilon > 0$ común.

Naturalmente, en general no existe relación entre transitividad e inestabilidad puntual. Pero sobre el intervalo, transitividad implica inestabilidad puntual (lo recíproco no es cierto, incluso asumiendo la inestabilidad puntual uniforme).

Caos en el sentido de Devaney. La definición de caos en sentido Devaney se hizo bastante popular debido, parcialmente, a la redundancia en la definición que se encontró más tarde. En esta definición (ver [D 89]), el sistema (X, f) es caótico si:

(1) f es transitiva,

(2) los puntos periódicos de f son densos en X,

(3) f tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Aquí dependencia sensible significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que f es Lyapunov ε-inestable en cada punto en X (ε es el mismo para todos los puntos, i.e., dependencia sensible = inestabilidad puntual uniforme). Recordar también que la terminología no está unificada. En la definición original de dependencia sensible a las condiciones iniciales de Guckenheimer (para funciones definidas en un intervalo) la inestabilidad puntual uniforme era requerida para un conjunto de medida de Lebesgue positiva [G 79].

Resultó que (1) y (2) juntas implican (3) siempre que X no sea un conjunto finito (cuando transitividad implica que el sistema es exactamente una sóla órbita periódica).

Teorema 2.4.2 ([S 66], [BBCDS5 92], [GW2 93]). *Sea X un espacio métrico infinito y sea $f : X \to X$ continua. Si f es transitiva y tiene puntos periódicos densos entonces f tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales.*

De hecho en [GW2 93] además se asume que el espacio es compacto y pueden encontrarse muchos resultados relacionados. También en [S 66] hay resultados relacionados. Ver también [VB2 94].

Para más información sobre el caos de Devaney sobre el intervalo ver [L 93]. Entre otros, está demostrado que f tiene entropía topológica positiva si y sólo si existe un conjunto invariante cerrado $D \subset X$ tal que $f|_D$ es caótico en el sentido Devaney. Así, si una función f definida en el intervalo tiene entropía positiva entonces es transitiva en un conjunto invariante cerrado el cual (debido a la dependencia sensible a las condiciones iniciales de este conjunto) tiene puntos no aislados, esto es un conjunto perfecto. Para un resultado más fuerte ver Teorema 2.5.4.

2.5. Transitividad y entropía topológica

Para poder discutir la relación entre transitividad y entropía (topológica), primero debemos conococer algunas definiciones.

La *entropía topológica* de una función $f \in C(X)$, denotada por $h(f)$, fue presentada en [AKM3 65] como un invariante de la topológica conjugada y análogo a la noción de entropía métrica (teoría de la medida) (ver, e.g., [DGS3 77],[W 82]). Damos aquí una de las definiciones equivalentes que fueron presentadas por Bowen [B 71].

Sea (X, ϱ) un espacio métrico compacto y sea $f : X \to X$ una aplicación continua. Un subconjunto E de X se llama *(n, ε)-separado* si para cada dos puntos diferentes $x, y \in E$ existe $0 \leq j < n$ con $\varrho(f^j(x), f^j(y)) > \varepsilon$. Sea $s_n(f, \varepsilon)$ la máxima cardinalidad posible de un conjunto (n, ε)-separado. Entonces la entropía (topológica) de f está definida por
$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon).$$
Recordar que $h(f^n) = n \cdot h(f)$ para cualquier entero n no negativo.

Para funciones definidas en un intervalo la siguiente noción es muy útil para calcular la entropía (ver [ALM3 93] para más detalles).

Una familia de subintervalos de un intervalo J forman una partición de J si son disjuntos dos a dos y su unión es J. Un intervalo J_1 f-cubre a un intervalo J_2 si $f(J_1) \supset$

J_2. Si $f \in C(I)$ y $s \geq 2$, entonces un *s-herradura* de f es un intervalo $J \subset I$ y una partición D de J en s subintervalos tal que la clausura de cada elemento de D f-cubre a J. Si f tiene un s-herradura entonces $h(f) \geq \log s$, ver [ALM3 93], p.207.

No tiene sentido la pregunta de que si la positividad de la entropía de f implica la transitividad de f. Es más, la transitividad es una característica global. Una función tendiendo dos conjuntos invariantes A, B con interiores no vacíos no puede ser transitiva. Pero la positividad de la entropía puede ser causada por el hecho de que $f|_A$ tiene entropía positiva ($h(f) \geq h(f|_A)$).

Por otro lado, la cuestión de que si la transitividad implica la positividad de la entropía es un reto. Además, si la respuesta es afirmativa, uno puede preguntarse cuál es la mejor cota inferior para la entropía de la función transitiva en el espacio considerado.

Existen espacios en los que las funciones transitivas pueden tener entropía topológica cero. Aparte de los ejemplos triviales tales como los espacios finitos, existen ejemplos clásicos sobre el círculo y sobre el toro (rotaciones irracionales, ver Ejemplo 1.2.2 y la función S en el Ejemplo 1.2.11.

Pero en algunos espacios esto no es el caso. Aquí tenemos un resultado de este tipo muy conocido:

Teorema 2.5.1 ([B2 82], [BC2 87], cf. [ALM3 93], p.260)**.** *Sea $f \in C(I)$ transitiva. Entonces f^2 tiene un 2-herradura y por lo tanto $h(f) \geq (1/2)\log 2$.*

Podemos ver el ejemplo de una función transitiva pero no bitransitiva al comienzo del capitulo 2, que demuestra que la igualdad es posible.

Teorema 2.5.2 ([BC2 87])**.** *Sea $f \in C(I)$ transitiva y como mínimo con dos puntos fijos (esto es lo mismo que decir que f es una función bitransitiva con al menos dos puntos fijos), entonces f tiene un 2-herradura y por lo tanto $h(f) \geq \log 2$.*

De nuevo, la igualdad es posible (función tienda estándar).

Una función monótona a trozos f se dice lineal a trozos (de pendiente constante β) si todos los trozos de monotonicidad son lineales con el coeficiente de la pendiente de valor absoluto β. El siguiente teorema muestra que una función transitiva definida en un intervalo monótona a trozos es siempre conjugada a una función “mejor” (con la misma entropía).

Teorema 2.5.3 ([P 66], cf. [ALM3 93], p. 260 y [Pr 88], p. 57). *Si $f \in C(I)$ es monótona a trozos y transitiva entonces f es topológicamente conjugada a alguna función lineal a trozos de pendiente constante $\beta = \exp(h(f))$.*

Antes de plantear el siguiente resultado, recordemos que la topological mixing ha sido definida como una noción más fuerte que la transitividad topológica.

Teorema 2.5.4 ([BC2 92], pp. 162 y 218; cf. [X 88]). *Una función $f \in C(I)$ tiene entropía topológica positiva si y sólo si existe un número entero positivo n y un conjunto infinito cerrado X tal que X es invariante bajo f^n y la restricción de f^n a X es topologically mixing.*

Ver también [BC2 92], p. 229, Teorema 28 ((i)⇔(vi)). La situación en el círculo es más complicada. La parte sustancial del siguiente resultado está implícitamente contenido en el Teorema 2.2.5. (Para la definición del grado de una función círculo ver [ALM3 93].)

Teorema 2.5.5 ([ALM3 93], p. 267). *Sea $f \in C(\mathbb{S})$ transitiva. Entonces $h(f) > 0$ ó f es conjugada a una rotación irracional (a través de un homeomorfismo de grado 1).*

La mejor cota inferior de la entropía de las funciones transitivas definidas en el círculo de un grado dado es la siguiente:

Teorema 2.5.6 ([BGMY4 80], [B 87], [AK2 79], [AKLS4]). *Sea $f \in C(\mathbb{S})$ una función transitiva de grado d definida en el círculo. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) Si $|d| > 1$, entonces $h(f) \geq \log|d|$.

(b) Si $d = 0$, entonces $h(f) \geq \log 2$.

(c) Si $d = -1$, entonces $h(f) \geq (\log 3)/2$.

(d) Si $d = 1$ y f tiene puntos periódicos, entonces $h(f) > 0$.

(e) Si $d = 1$ y f no tiene puntos periódicos, entonces $h(f) = 0$.

Además, existen funciones transitivas definidas en el círculo f_0, f_{-1} y f_d con grado 0, -1 y $d \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$, respectivamente, tal que $h(f_0) = \log 2$, $h(f_{-1}) = (\log 3)/2$ y $h(f_d) = \log|d|$.

Las partes (d) y (e) están probadas en [B 87] y [AK2 79], respectivamente, (ver también [LM2 93]), y la parte (a) está probada en [BGMY4 80] (ver también [ALM3 93]). El resto están probadas en [AKLS4].

Una pregunta natural es: ¿existe una cota inferior positiva para la entropía topológica de una función transitiva definida en el círculo de grado 1 con puntos periódicos? En el siguiente teorema se dan la respuesta negativa.

Teorema 2.5.7 ([AKLS4]). *El ínfimo de las entropías topológicas (positivas) para las funciones transitivas definidas en el círculo de grado 1 con puntos periódicos es cero.*

Hemos planteado resultados para el intervalo y el círculo. Con respecto a representaciones generales, recordar que del Teorema 2.2.5 se obtiene que si una función transitiva definida en un grafo tiene puntos periódicos, entonces tiene entropía topológica positiva (pero esta entropía puede ser arbitrariamente pequeña, ver a continuación).

En particular, si el grafo es un árbol (i.e., un espacio conectado que es homeomorfo a la unión finita de muchas copias del intervalo unidad, pero que no contienen a un subespacio homeomorfo al círculo), entonces cualquier f transitiva tiene entropía positiva (ya que f tiene un punto fijo) y de nuevo no existe cota inferior positiva si no fijamos el número puntos finales del árbol (ver a continuación).

Surge una pregunta natural sobre cuál es la mejor cota inferior para la entropía topológica de funciones en sí mismas transitivas definidas sobre árboles, dependiendo del número de puntos finales y del número de bordes del árbol. No se conoce una fórmula general que permita calcular el ínfimo de las entropías topológicas de todas las funciones en sí mismas transitivas definidas en un árbol dado y se deduce que sería complicado.

Franks y Misiurewicz en [FM2 93] estudiaron una clase especial de funciones transitivas definidas en un árbol que surgen de un modo natural en el estudio de los homeomorfismos del disco. Para tal tipo de funciones se obtuvo la cota $(\log 2)/n$ para la entropía topológica, donde n es el número de puntos finales del árbol. En [FL2 93] se consideró un problema similar para funciones definidas en un árbol obtenido a partir de difeomorfismos pseudo-Anosov de un disco perforado. La cota de la entropía topológica obtenida en este caso es $\log(1+\sqrt{2})/k$, donde k es el número de perforaciones.

Se conoce una cota inferior (positiva) para las entropías de funciones transitivas definidas en un árbol, aunque, en general, no es la mejor cota inferior:

Teorema 2.5.8 ([ABLM4 96]). *Sea f una función transitiva continua definida en un árbol. Entonces $h(f) \geq (\log 2)/n$ donde n es el número de puntos finales del árbol.*

En [AKLS4] se demostró lo mismo para funciones n-star(definidad en la n-estrella es el subespacio del plano complejo el cual se describe más fácilmente como el conjunto de todos los números complejos z tales que z^n están en el intervalo unidad $[0, 1]$, es decir, un punto central (el origen) con n copias del intervalo $[0, 1]$ adjunto a él. Notar que 1-estrella y 2-estrella son homeomórfas. Para $n > 2$, n-estrella es un árbol que tiene un único punto ramificado (el origen) que se denotará por b. En lo siguiente sólo consideraremos n-estrella con $n \geq 2$. Cualquier función continua de una n-estrella en sí misma se denomina una función n-estrella).

Teorema 2.5.9 ([AKLS4]). *Sea f una función transitiva continua definida en una n-estrella. Entonces se cumple lo siguiente:*

(1) Si $f(b) \neq b$, entonces $h(f) \geq (\log 2)/2$ (no se sabe si ésta es la mejor cota inferior).

(2) Si $f(b) = b$, entonces $h(f) \geq (\log 2)/n$ (la igualdad es posible).

Actualmente es natural preguntarse cuál es la relación entre transitividad y entropía topológica para dimensiones mayores. En la siguiente sección mostramos (ver Teorema 2.6.3) que en el cuadrado I^2 existe una orientación transitiva conservando el homeomorfismo con entropía cero. Además, *en cualquier cubo I^n hay una función transitiva (triangular) con entropía cero.*

Finalmente, queremos mencionar el siguiente aspecto de la relación entre transitividad y entropía.

Continuando con [CS2 93] decimos que $f \in C(X)$ es *entropía-minimal* si el único subconjunto Y de X f-invariante no vacío cerrado tal que $h(f|_Y) = h(f)$ es $Y = X$. Claramente cada función minimal es entropía-minimal. También una parte del siguiente resultado se cumple en cada sistema dinámico.

Teorema 2.5.10 ([CS2 93]). *Sea $f \in C(X)$. Si f es entropía-minimal entonces es topológicamente transitiva. Si $X = I$ y f es monótona a trozos entonces también se cumple el recíproco.*

2.6. Sobre algunas extensiones de las funciones transitivas

En primer lugar, recordamos que las funciones triangulares están definidas como sigue. Sea (X_i, ϱ_i) un espacio métrico para $i = 1, 2, \ldots, n$. Asumimos que el conjunto $\prod_{i=1}^n X_i$ está dotado con la métrica $\varrho(x, y) = \text{máx}_{1 \leq i \leq n} \varrho_i(x_i, y_i)$, donde $x =$

$(x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Una función F de $\prod_{i=1}^n X_i$ en sí misma se denomina *triangular* si es continua y es de la forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \ldots, F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \tag{2.1}$$

donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$. Así la triangularidad significa continuidad y la dependencia de la i-ésima función componente solo sobre las primeras i variables para cada i . El conjunto de todas las funciones triangulares de $\prod_{i=1}^n X_i$ en sí misma se denotará por $C_\triangle(\prod_{i=1}^n X_i)$. Cuando todos los espacios X_i son el intervalo I, en lugar de $C_\triangle(\prod_{i=1}^n X_i)$, escribimos simplemente $C_\triangle(I^n)$ y *siempre* entenderemos que una función $F \in C_\triangle(I^n)$ es triangular a *todos* los niveles. Esto es, satisface (2.1). Si $n \geq 2$, siempre podemos pensar en la función F como una función triangular definida sobre el "rectángulo" $(\prod_{i=1}^{n-1} X_i) \times X_n$ por $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$, donde $x = (x_1, x_2 \ldots, x_{n-1})$, $y = x_n$, y $f(x) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \ldots, F_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))$, $g(x, y) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Aquí f también es una función triangular (y no una continua arbitraria) de $(\prod_{i=1}^{n-1} X_i)$ en sí misma y $g(x, y)$ es una función de $(\prod_{i=1}^{n-1} X_i) \times X_n$ a X_n.

Denotaremos por $C_\triangle(X \times I)$ el conjunto de todas las funciones triangulares de $X \times I$ en sí misma. También, cada función $F \in C_\triangle(X \times I)$ se escribirá como $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$ donde $f \in C(X)$ y g es una función continua de $X \times I$ en I. En lugar de $g(x, y)$ también podemos escribir $g_x(y)$, donde $g_x : I \to I$ es una familia de funciones continuas dependiendo continuamente de $x \in X$. La función f se llama *función base* de F y las funciones g_x se llaman *funciones fibra*. La función F divide al rectángulo $X \times I$ en fibras uno-dimensionales $I_x = \{x\} \times I$ para $x \in X$ tal que cada fibra está trazada por F en la fibra.

Aunque, en este sentido, las funciones triangulares son similares a unas básicas (más concretamente, F es una extensión de f), existen diferencias fundamentales en la dinámica entre ellas para el caso $X = I$ (ver [K 92]).

La entropía topológica de funciones triangulares ha sido estudiada en [K 92] y [AKS3 93]. Aquí sólo recordar que, por la fórmula de Bowen [B 71],

$$\max\{h(f), \sup_{x \in X} h(F, I_x)\} \leq h(F) \leq h(f) + \sup_{x \in X} h(F, I_x),$$

donde $h(F, I_x)$ es la entropía de F en la fibra I_x (sólo considerar conjuntos (n, ε)-separados situados en I_x).Además, observar que si $F = (f, g_x)$ es transitiva (en $X \times I$) entonces f es transitiva (en I) pero no la recíproca.

Si $f \in C(X)$ es transitiva, la pregunta es si puede extenderse a una función transitiva $F \in C_\triangle(X \times I)$ (esto significa que las funciones bases de F serán f). Esto es fácil de hacer, es suficiente tomar $F(x,y) = (f(x), g_x(y))$ donde, para cada $x \in X$, $g_x(y) = g(y) = 1 - |2y-1|$ (usar la definición (TT) y el hecho de que para la función tienda estándar esto cumple (6) del Teorema 2.2.2). Pero si $h(f)$ es finita entonces tenemos que $h(F) = h(f) + h(g) > h(f)$ (ver [G 71]).

Entonces, modificaremos la pregunta. Dada una f transitiva, ¿es posible extenderla a una F transitiva sin aumentar la entropía? (Cf. [SW2 91] donde se considera la pregunta inversa: Si (X,F) tiene entropía positiva, ¿tiene un factor (Y,f) con entropía estrictamente menor?).

Teorema 2.6.1 ([AKLS4]). *Sea (X,ϱ) un espacio métrico compacto y sea $f \in C(X)$ una función transitiva que no es minimal. Entonces la función f puede extenderse a la función $F \in C_\triangle(X \times I)$ (i.e., f es la función base de F) de tal modo que F es transitiva y tiene la misma entropía que f.*

El teorema, siendo probado por el método categórico, no aporta ejemplos explícitos de funciones triangulares transitivas cuya entropía no es mayor que la entropía de sus funciones base. En el caso particular cuando $X = I$, también hay ejemplos explícitos.

Teorema 2.6.2 ([AKLS4]). *La función*

$$F : (x,y) \mapsto (1 - |2x-1|, y^{\exp(x-\beta)}),$$

donde β es cualquier número irracional de $(0, 2/3)$, es una función transitiva de $C_\triangle(I^2)$ con entropía topológica $h(F) = \log 2$ (la misma que la entropía de la función base) tal que el conjunto de puntos periódicos está contenido en $I \times \{0,1\}$ (y por lo tanto en ningún sitio es densa en I^2).

Del Teorema 2.6.1 obtenemos las primeras tres partes del siguiente:

Teorema 2.6.3 ([AKLS4]). *Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

(1) Sea (X,ϱ) un espacio métrico compacto tal que no hay funciones minimales en $C(X)$. Entonces

$$\text{ínf}\{h(f) : f \in C(X) \text{ es transitiva}\} = \text{ínf}\{h(F) : F \in C_\triangle(X \times I) \text{ es transitiva}\}$$

y si uno de estos ínfimos es mínimo entonces el otro también.

(2) Para cada $n = 2, 3, \ldots$

$$\text{mín}\{h(F) : F \in C_\triangle(I^n) \text{ es transitiva}\} = \text{mín}\{h(f) : f \in C(I) \text{ es transitiva}\} = (1/2)\log 2$$

(3) Para cada $n = 2, 3, \ldots$ hay funciones transitivas de $C(I^n)$ con entropías topológicas positivas arbitrariamente pequeñas. Por consiguiente,

$$\inf\{h(f) : f \in C(I^n) \text{ es transitiva y } h(f) > 0\} = 0$$

(4) Existe una orientación transitiva manteniendo el homeomorfismo de I^2 con entropía topológica cero. Por consiguiente,

$$\min\{h(f) : f \in C(I^2) \text{ es transitiva}\} = 0$$

(5) Para cada $n = 2, 3, \ldots$

$$\min\{h(f) : f \in C(I^n) \text{ es transitiva}\} = 0$$

Las partes (3), (4) y (5) probablemente son conocidas pero no podemos dar otras referencias. Quizás podrían deducirse de [AK2 70] y [K 79] (¿incluso para difeomorfismos C^∞?). Sin embargo, en estos dos artículos la noción de entropía topológica no se menciona en ningún caso.

2.7. Resultados diversos

Ahora queremos dirigir la atención hacia otros resultados relacionados con la transitividad, principalmente los unidimensionales. Estos en ningún caso agotan los temas no tratados (o no lo suficientemente tratados) en los apartados anteriores o incluso los resultados conocidos sobre estos temas. Simplemente esperamos indicar la diversidad de resultados sobre la transitividad en la literatura.

1. Si en un sistema dinámico (X, f) un punto x pertenece a su conjunto ω-límite $\omega_f(x)$ entonces la restricción de f a $\omega_f(x)$ es transitiva, ver, e.g. [A 93], p. 69.

2. Una función monótona a trozos $f \in C(I)$ se dice *extendida* si existe una constante $\lambda > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \geq \lambda|x - y|$ siempre que tanto x como y pertenezcan a algún intervalo en el cual f es monótona.

   Una función extendida no necesita ser transitiva y una función monótona transitiva a trozos no necesita ser extendida (Ejemplo 1.2.4). Sin embargo, en [JP2 89] se prueba que si una función monótona a trozos $f \in C(I)$ es extendida entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y un intervalo cerrado $J \subset I$ tal que J es invariante para f^n y $f^n|_J$ es transitiva en J.

3. Los espacios límite inversos pueden utilizarse exitosamente para estudiar la transitividad. Ver, e.g., [BM22 87] (notar que el Lema 0 fue tomado de [AY2 80] sin el supuesto de que f es sobreyectiva).

4. En [BK2 93] todos los pares (v, e) de números se encuentran con la propiedad de que hay una función transitiva $f \in C(I)$ cuya variación es v y la entropía topológica es e.

5. En [Pr 88] la transitividad de las funciones definidas en el intervalo monótonas a trozos se investiga minuciosamente.

6. Podemos encontrar en [BC2 87] un procedimiento efectivo para determinar si una función definida en el intervalo denominada lineal Markov es transitiva.

7. Si $f \in C(I)$ y $P = \{p_1 < \ldots < p_n\}$ es un conjunto invariante finito de f, sea f_p la función definida en $[p_1, p_n]$ la cual coincide con f en P y la cual es lineal en $[p_i, p_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n-1$. Entonces $h(f) = \sup h(f_P)$ donde el supremo es sustituido por todos los conjuntos invariantes finitos [T 80]. En [CH2 91] se muestra que para funciones transitivas, este supremo se alcanza en algún conjunto invariante finito si y sólo si la función es monótona a trozos y el conjunto contiene los puntos finales del intervalo y los puntos decisivos de la función (i.e. los puntos de (I) en la cual f no es monótona).

8. Sea $f_s \in C(I)$ definida por $f_s(x) = sx$ si $0 \leq x \leq 1/2$ y $f_s(x) = s(1-x)$ si $1/2 \leq x \leq 1$ (c.f Ejemplo 1.2.3). Si $s \in [\sqrt{2}, 2]$ entonces $I_s = [f_s^2(1/2), f_s(1/2)]$ es un intervalo invariante para f. En [BDOT4 91] se muestra que el conjunto de parámetros para el cual la órbita del punto crítico $1/2$ es densa en I_s, es G_δ-densa en $[\sqrt{2}, 2]$.

9. En [AC2] se prueba que $F \subset I$ es el conjunto de puntos fijos de alguna función transitiva de $C(I)$ si y sólo si F es un conjunto cerrado no vacío, en ningún sitio denso, diferente de cada $\{0\}, \{1\}$ y $\{0, 1\}$.

10. Un conjunto compacto $A \subset X$ se denomina transitivo bajo f si existe un punto en A cuyo conjunto ω-límite es el conjunto A (equivalentemente, el sistema $(A, f|_A)$ es transitivo). Sea x~y si y sólo si x, y pertenecen a la misma componente conexa de A. Considerar el espacio cociente $K = A$/~con la identificación topológica y la función continua $\tilde{f} : K \to K$ inducida por f. En [BS2 95] el sistema $(K, \tilde{f})$ se estudia siempre que X sea localmente un espacio métrico compacto (se investiga también la influencia de la estabilidad Liapunov o la estabilidad asintótica del conjunto A).

Capítulo 3

Perturbaciones suaves en funciones transitivas definidas en un intervalo

3.1. Introducción y planteamiento del resultado principal

Queremos mostrar para la clase $\mathcal{D}$ de todas las funciones C^∞ definidas en un intervalo en si mismo, transitivas y topológicamente conjugadas a un polinomio algebraico, la siguiente propiedad de tipo estabilidad: la clase $\mathcal{D}$ tiene puntos no aislados y para cada $f \in \mathcal{D}$ y cualquier número real positivo y arbitrariamente pequeño ε, existe una función $g \in \mathcal{D}$ que comparte con f los mismos puntos fijos excepto uno y tal que $\|f - g\|_1 = \varepsilon$. Por el contrario, también mostramos que para cada $f \in \mathcal{D}$ existe una función C^∞ definida en un intervalo en sí mismo topológicamente conjugada a un polinomio, no transitiva y próxima en la topología $\|\cdot\|_1$ a la función f.

Consideramos un sistema dinámico discreto de la forma (I, f) donde I es el intervalo compacto unidad $[0, 1]$ y $f : I \to I$ es una función continua. Dichos sistemas dinámicos están bien considerados (ver [BC2 92] y [D 89]) debido a que son buenos ejemplos de problemas que surgen de la teoría de la Dinámica Topológica y modelan varios fenómenos de la biología, de física, de química, de ingeniería y de las ciencias sociales (ver e.g., [DM2 78], [P 91], [VdP 27]). En muchos casos, en la formulación de dichos modelos $f \in C^\infty$, es una aplicación analítica o polinómica.

En esta sección nos concentraremos en el conjunto de funciones transitivas suaves definidas en un intervalo en sí mismo (i.e., existe un punto $x_0 \in I$ con trayectoria densa en I) ya que forman una clase más general de sistemas que los polinomios caóticos y tienen propiedades dinámicas interesantes. En particular, consideramos la clase $\mathcal{D}$ de todas las funciones C^∞ transitivas definidas en un intervalo en sí mismas las cuales son topológicamente conjugadas a un polinomio algebraico con coeficientes reales. Recordar que en este contexto transitividad es equivalente a caos en el sentido Devaney([D 89]).

La razón de este trabajo es intentar responder a la siguiente cuestión para sistemas dinámicos discretos generados por funciones de la clase $\mathcal{D}$: dada una función f en $\mathcal{D}$, ¿de qué modo "pequeñas perturbaciones" de f se comportan de acuerdo con la propiedad de transitividad?.

En la literatura se ha tratado extensamente un problema similar; el caso de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden que modelan el oscilador no lineal con escape caótico de un pozo de potencial (ver, e.g. Duffing [T 89] o Hemholtz [CBL3 01]). En muchos de estos ejemplos y usando pequeñas perturbaciones trigonométricas o elípticas, el comportamiento caótico puede suprimirse o incluso iniciarse (ver [L 98]).

En el ámbito de los sistemas discretos es posible tener dos situaciones. Por un lado, como en el caso continuo, existen pequeñas perturbaciones de f que rompen la transitividad. LLamamos *pequeña perturbación* de la función f a una función g definida en un intervalo en sí mismo tal que $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$ para un pequeño $\varepsilon > 0$. Por otro lado, mostramos que siempre existen pequeñas perturbaciones suaves de la función $f \in \mathcal{D}$ pertenecientes a la clase $\mathcal{D}$, i.e., existe un modo de perturbacion suave de la función f conservando la conjugación del polinomio sin romper la caoticidad.

Notar que para funciones continuas transitivas definidas en un intervalo existe una pequeña perturbación transitiva. Este resultado fue demostrado en [BC2 92].

El resultado principal de este capítulo, lo exponemos a continuación (ver [BGL10]).

Teorema Principal. *Sea $f \in \mathcal{D}$ y sea ε un número real positivo arbitrariamente pequeño. Existe una función $g \in \mathcal{D}$ con los mismos puntos fijos que f excepto uno tal que $\|f-g\|_1 = \varepsilon$.*

3.2. Definiciones y observaciones

En este apartado introducimos las definiciones, notaciones y observaciones que utilizaremos para demostrar el Teorema Principal.

Sea (I, f) un sistema dinámico discreto, recordar que:

- Dos funciones continuas definidas en un intervalo en sí mismo, f, g, son *topológicamente conjugadas* si y sólo si existe un homeomorfismo $h : I \to I$ tal que $h \circ f = g \circ h$.
- $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I}\{|f(x)|\}$.
- Si f es como mínimo de tipo C^1, $\|f\|_1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Observación 3.2.1 Sea $P = P(x)$ una función polinómica definida en I en sí mismo, entonces $\#(Fix(P)) < \infty$.

En efecto, las funciones polinómicas con coeficientes reales tienen un número finito de raíces. Esto obliga a que el número de puntos fijos sea finito ya que son raíces del polinomio $P(x) - x$.

Observación 3.2.2 Sea f una función de clase $\mathcal{D}$. Existe una pequeña perturbación $\tilde{f}$ de f que no es transitiva.

El siguiente argumento también es válido para funciones transitivas sin la condición de que sean topológicamente conjugadas a una función polinómico. Sea $f \in \mathcal{D}$ función transitiva de clase C^∞ definida en un intervalo en sí mismo y topológicamente conjugada a una función polinómica. Sea x_0 un punto fijo de f (Fix(f)$\neq \varnothing$ por la continuidad de f). Sea δ un número real positivo arbitrariamente pequeño. Consideremos el entorno de $x_0, \mathcal{U} := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. En el caso de que x_0 sea 0 ó 1, consideramos $\mathcal{U}$ como los conjuntos $[0, \delta)$ ó $(-\delta, 1]$, respectivamente. Definimos $\tilde{f}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \backslash \mathcal{U}, \\ x & \text{si } x \in \mathcal{U}. \end{cases}$$

Notar que $\tilde{f}$ no es una función transitiva. En efecto, no es posible tener un punto fijo con órbita densa porque cuando la órbita de este punto visita el conjunto $\mathcal{U}$ permanece sobre él para siempre. Por otro lado, por la construcción está claro que $\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty = \delta$, terminando la demostración. Notar que la función $\tilde{f}$ puede construirse de una manera sencilla suavizando los puntos decisivos y verificando $\left\|f - \tilde{f}\right\|_1 = \delta$.

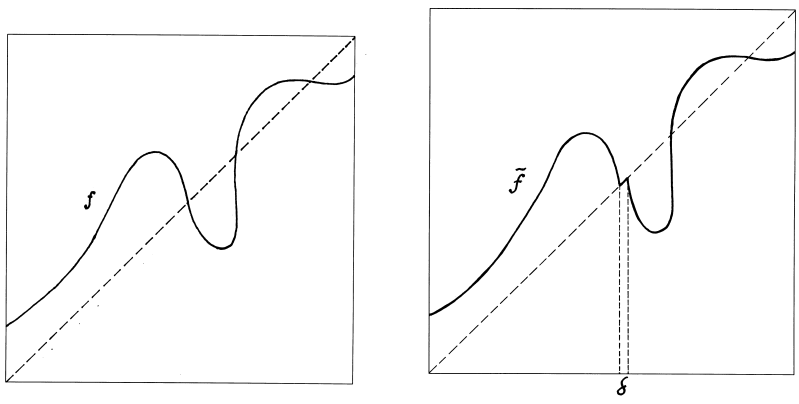
• Sea f_1 una función de clase $\mathcal{D}$ y sea ε un número real positivo arbitrariamente pequeño. Existe una función $f_2 \in \mathcal{D}$ tal que $\|f_1 - f_2\|_1 < \varepsilon$ (i.e., en la clase $\mathcal{D}$ existen puntos no aislados).

En efecto, la idea es conjugar la función f_1 con un difeomorfismo de I en I suficientemente próximo a la identidad, (por ejemplo, $x \mapsto x + \varepsilon x(1-x)$). La función que resulta, f_2, se encuentra en $\mathcal{D}$, es diferente a f_1 porque la localización del punto crítico en $(0,1)$ cambiará (notar que la existencia de dicho punto crítico se mantiene por transitividad). El resultado se sigue inmediatamente de la construcción después de algunos cálculos de derivadas.

Observación 3.2.3 Notar que la existencia de funciones $f_{2,\varepsilon}$ en $\mathcal{D}$, tan parecidas como queramos a la función dada $f_1 \in \mathcal{D}$, no implica que f_1 y las funciones $f_{2,\varepsilon}$ pertenezcan a la misma clase morfológica de funciones.

Efectivamente, consideramos la familia uniparamétrica, utilizada en algunos modelos, generada por la suma de la parábola conjugada a la "función tienda" a un polinomio de cuarto grado dependiendo del parámetro λ. De este modo, obtenemos la familia de funciones definidas en el intervalo $f_\lambda(x) = 4x(1-x) + \lambda x(x-1)(x-\frac{1}{2})^2$. Si consideramos la función f_{12}, tenemos una función unimodal de I en sí misma sobreyectiva transitiva y con un punto fijo neutro en 0. Cualquier incremento pequeño de λ hace 0 atractor y por tanto f_{12} no puede ser C^1-aproximada por funciones de la familia f_λ.

Nota 3.2.1. *En las siguientes figuras se muestra la construcción presentada en la Observación 3.2.2*



La Observavión 3.2.2 justifica la elección de $\|\cdot\|_1$ para el estudio del problema de perturbaciones de funciones transitivas.

3.3. Demostración del Teorema Principal

Como herramienta clave para la demostración utilizaremos una consecuencia del siguiente resultado sobre transformaciones suaves entre intervalos compactos (ver [J 92]).

Lema 3.3.1. *Sean* $[a_1, a_2]$ *y* $[b_1, b_2]$ *dos subintervalos compactos de I y sean* m_1 *y* m_2 *dos números reales positivos tal que* $0 < m_2 \leq m_1 \leq \frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$. *Entonces existe una función creciente de clase* C^∞ $t : [a_1, a_2] \to [b_1, b_2]$ *cumpliendo las siguientes propiedades:*

(1) $t(a_i) = b_i$, $i = 1, 2$;

(2) $t'(a_i) = m_i$, $i = 1, 2$ *y* $0 < t'(x) \leq m_1$ *para cada* $x \in [a_1, a_2]$*;*

(3) $t^{n)}(a_i) = 0$, $i = 1, 2$ *para todo* $n \geq 2$.

Corolario 3.3.1.1. *Sean* Π_1 *y* Π_2 *dos particiones finitas del intervalo* I *con el mismo número de puntos. Existe un* C^∞*-difeomorfismo* $T_{\Pi_1\Pi_2}$ *en* I *tal que* $T_{\Pi_1\Pi_2}(\Pi_1) = \Pi_2$.

Demostración. Sean $\Pi_1 = \{0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq 1\}$ y $\Pi_2 = \{0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_n \leq 1\}$ dos particiones del intervalo I dadas por la hipótesis. Para $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sea $m_i := \text{máx}\{\frac{b_{k+1}-b_k}{a_{k+1}-a_k} : k \in \{i, \ldots, n-1\}\}$ y $t_i : [a_i, a_{i+1}] \to [b_i, b_{i+1}]$ la función creciente C^∞ dada por el Lema 3.3.1. La función $T_{\Pi_1\Pi_2}$ definida de la forma $T_{\Pi_1\Pi_2}\,|_{[a_i,a_{i+1}]} := t_i$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Demostración del Teorema Principal: Sea $f \in \mathcal{D}$ una función transitiva C^∞ definida en un intervalo en sí mismo topológicamente conjugada a una función polinómica y sea ε un número real positivo fijo arbitrariamente pequeño. Lo que tenemos que demostrar es que existe una función $g \in \mathcal{D}$ tal que $\|f - g\|_1 = \varepsilon$.

Por la Observación 3.2.1 las funciones polinómicas tienen un número finito de puntos fijos. Puesto que el número de puntos fijos es topológicamente invariante (i.e., este número es el mismo para funciones topológicamente conjugadas), los elementos de la clase $\mathcal{D}$ tienen un número finito de puntos fijos. Así, sea $\Pi_1 = \{0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq 1\}$ una partición de I formada por los puntos fijos de f.

Ya que $f \in \mathcal{D}$, entonces

$$f = h \circ P \circ h^{-1} \tag{3.1}$$

donde P es la función polinómica y h es un homeomorfismo C^∞ en I. Denotamos por $\{b_i\}_{i\in\Lambda}$, $\#(\Lambda) = \#(\Pi_1) = n$, el conjunto de puntos fijos de P y sea Π_2 la partición co-rresponiente de I obtenida a partir de la ordenación de dichos puntos fijos en el intervalo.

Usando el Corolario 3.3.1.1, sea $T_{\Pi_2\Pi_1}$ el difeomorfismo que transforma Π_2 en Π_1. Entonces

$$Q := T_{\Pi_2\Pi_1} \circ P \circ T^{-1}_{\Pi_2\Pi_1}$$

en una función en I topológicamente conjugada a una polinómica con el mismo número de puntos fijos que f, es decir, Fix(f)=Fix(Q)=Π_1.

Entonces

$$P = T^{-1}_{\Pi_2\Pi_1} \circ Q \circ T_{\Pi_2\Pi_1} \tag{3.2}$$

y usando (3.2) y (3.1) obtenemos

$$f = \tilde{h} \circ Q \circ \tilde{h}^{-1} \tag{3.3}$$

donde $\tilde{h} := h \circ T^{-1}_{\Pi_2\Pi_1}$ y Fix(f) = Fix(Q) = Π_1.

Consideramos ahora una nueva partición del intervalo I de la forma $\Pi_3 = \{0 \leq a_1 < \ldots < a_{j-1} < a'_j < a_{j+1} < \ldots < a_n \leq 1\}$ donde $a'_j := a_j + \delta$ y $\delta > 0$ escogido adecuadamente. Notar que Π_1 y Π_3 sólo se diferencian en el elemento de la posición j.

Usando de nuevo el Corolario 3.3.1.1, sea $T_{\Pi_1\Pi_3}$ el difeomorfismo que transforma la partición Π_1 en Π_3 y definimos la función polinómica

$$\tilde{Q} := T_{\Pi_1\Pi_3} \circ Q \circ T^{-1}_{\Pi_1\Pi_3} \tag{3.4}$$

verificando Fix($\tilde{Q}$)= Π_3.

Finalmente, como candidata para cumplir la tesis del teorema, definimos la función $g := \tilde{h} \circ \tilde{Q} \circ \tilde{h}^{-1}$. Vamos a empezar demostrando que g pertenece a la clase $\mathcal{D}$. En efecto, g es topológicamente conjugada a la función polinómica $\tilde{Q}$ y de tipo C^∞ ya que se obtiene por composición de funciones C^∞. Por otro lado, g es una función transitiva por la herencia obtenida por topología conjugada de la función transitiva polinómica $\tilde{Q}$. Por los mismos argumentos, $\tilde{Q}$ es transitiva porque Q es transitiva y Q es transitiva porque P es transitiva: La transitividad de P se debe a la transitividad de f la cual pertenece a la clase $\mathcal{D}$.

Para terminar la demostración mostraremos que $\|f-g\|_1 = \|f-g\|_\infty + \|f'-g'\|_\infty < \varepsilon$ para un valor de δ apropiado.

$$\|f-g\|_\infty = \left\| \tilde{h} \circ Q \circ \tilde{h}^{-1} - \tilde{h} \circ \tilde{Q} \circ \tilde{h}^{-1} \right\|_\infty$$

y

$$\|f'-g'\|_\infty = \left\| (\tilde{h} \circ Q \circ \tilde{h}^{-1})' - (\tilde{h} \circ \tilde{Q} \circ \tilde{h}^{-1})' \right\|_\infty$$

dependiendo de $\left\|Q - \tilde{Q}\right\|_\infty$ y $\left\|Q' - \tilde{Q}'\right\|_\infty$, respectivamente.

En efecto, dado un homeomorfismo C^∞ en I semejante a $\tilde{h}$, para cada función continua de I en sí mismo, en particular para f, se cumple

$$\left\|f \circ \tilde{h}^{-1}\right\|_\infty = \sup_{z=\tilde{h}^{-1}(x)\in I} |f(z)| = \|f\|_\infty ,$$

ya que $\tilde{h}^{-1}(I) = I$.

El Teorema del Valor Intermedio garantiza que

$$\tilde{h}(Q(z)) - \tilde{h}(\tilde{Q}(z)) = \tilde{h}'(\xi)(Q(z) - \tilde{Q}(z)) \tag{3.5}$$

para $\xi \in (\mathrm{mín}\{Q(z), \tilde{Q}(z)\}, \mathrm{máx}\{Q(z), \tilde{Q}(z)\})$. Derivando respecto a z en (3.5) obtenemos

$$\tilde{h}'(Q(z))Q'(z) - \tilde{h}'(\tilde{Q}(z))\tilde{Q}'(z) = \tilde{h}'(\xi)(Q'(z) - \tilde{Q}'(z)). \tag{3.6}$$

Por otro lado, consideramos la diferencia $f'(x) - g'(x)$ que es igual a

$$\left(\tilde{h}'(Q(z)) \cdot Q'(z) - \tilde{h}'(\tilde{Q}(z)) \cdot \tilde{Q}'(z)\right) \cdot (\tilde{h}^{-1})'(x)$$

con $z = \tilde{h}^{-1}(x)$. Utilizando (3.6) tenemos

$$\|f' - g'\|_\infty = \left\|\tilde{h}'\right\|_\infty \left\|(\tilde{h}^{-1})'\right\|_\infty \left\|Q' - \tilde{Q}'\right\|_\infty .$$

Por otro lado,

$$\|f - g\|_\infty = \left\|\tilde{h} \circ Q - \tilde{h} \circ \tilde{Q}\right\|_\infty = \sup_{z=\tilde{h}^{-1}(x)\in I} \left|\tilde{h}(Q(z)) - \tilde{h}(\tilde{Q}(z))\right| .$$

Usando (3.5) obtenemos

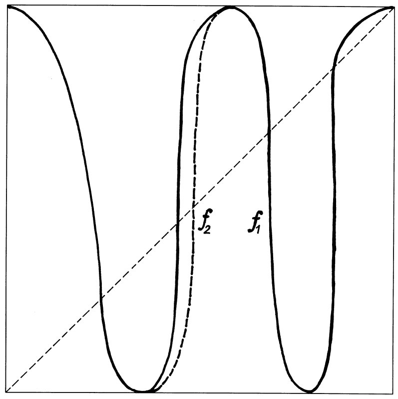
$$\|f - g\|_\infty = \left\|\tilde{h}'\right\|_\infty \left\|Q - \tilde{Q}\right\|_\infty .$$

Finalmente hemos demostrado que

$$\|f - g\|_1 = \left\|\tilde{h}'\right\|_\infty \left\|Q - \tilde{Q}\right\|_\infty + \left\|\tilde{h}'\right\|_\infty \left\|(\tilde{h}^{-1})'\right\|_\infty \left\|Q' - \tilde{Q}'\right\|_\infty .$$

Puesto que $\left\|Q - \tilde{Q}\right\|_\infty = \delta$ y $\left\|Q' - \tilde{Q}'\right\|_\infty = 0$, eligiendo$\delta = \frac{\varepsilon}{\left\|\tilde{h}'\right\|_\infty}$ la demostración está acabada.

Nota 3.3.2. *La siguente figura muestra la posición relativa de dos funciones* f_1 *y* f_2 *próximas en la topología* $\|\cdot\|_1$.



Observación 3.3.1 Como consecuencia de nuestro resultado principal una cuestión natural sería : sea $f \in \mathcal{D}$ y sea $\mathcal{U}$ un entorno de f en la topología $\|\cdot\|_1$, ¿es la clase $\mathcal{D}$ en la topología $\|\cdot\|_1$ densa en $\mathcal{U}$?.

Bibliografía

[A 74] D.V. Anosov, *Mathematics of the USSR: Izvestija* **8** (1974), 525–552.

[An 04] A. Antuña, *El teorema del muestreo potencial asintótico*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, 2004.

[A 93] E. Akin, *The General Topology of Dynamical Systems*, Graduate Studies in Mathematics, 1. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[ABLM4 96] Ll. Alseda, S. Baldwin, J. Llibre and M. Misiurewicz, *Entropy of transitive tree maps*, Topology **36**, (1996) (to appear).

[AC2] S. Agronsky and J. Ceder, *On the set of fixed points of nomadic functions on* $[0, 1]$, Preprint.

[AH2 94] N. Aoki and K. Hiraide, *Topological theory of dynamical systems. Recent advances*, North-Holland mathematical library, vol. 52, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1994.

[AK2 70] D.V. Anosov and A.B. Katok, *New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms* , Trans. Moscow. Math. Soc. **23** (1970), 1–35.

[AK2 79] J.Auslander and Y.Katznelson, *Continuous maps of the circle without periodic points*, Israel J. Math. **32** (1979), 375–381.

[AKLS4] Ll.Alseda, S.Kolyada, J.Llibre and L.Snoha, *Entropy and periodic points for transitive maps*, Preprint CRM 305/1995 (revised version to be published), Barcelona.

[AKM3 65] R.L. Adler, A.G. Konheim and M.H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309–319.

[AKS3 93] Ll. Alseda, S. Kolyada and L. Snoha, *On topological entropy of triangular maps of the square*, Bull. Austral. Math. Soc. **48** (1993), 55–67.

[ALM3 93] Ll. Alsedà, J. Llibre and M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, World Scienticfic Publ., Singapore, 1993.

[AY2 80] J. Auslander and J.A. Yorke, *Interval maps, factors of maps, and chaos*, Tôhoku Math. Journ. **32** (1980), 177–188.

[B 27] G. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1927.

[B 37] A.S. Besicovitch, *A problem on topological transformation of the plane*, Fund. Math. **28** (1937), 61–65.

[B 50] G.D. Birkhoff, *Collected mathematical papers*, vols. 1, 2, 3, New York, 1950.

[B 51] A.S. Besicovitch, *A problem on topological transformation of the plane II.*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **47** (1951), 38–45.

[B 71] R. Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 401–414.

[B1 82] A.M. Blokh, *On one interpretation of Sharkovskii theorem*, in Oscillation and stability of solutions of differential-functional equations, Inst. Mat. Acad. Sci., Kiev, (1982), 3–8. (Russian)

[B2 82] A.M. Blokh, *On sensitive mappings of the interval*, Russian Math. Surveys **37** (1982), 203–204.

[B 84] A.M. Blokh, *On transitive mappings of one-dimensional ramified manifolds*, in Differential-difference equations and problems of mathematical physics, Inst. Mat. Acad. Sci., Kiev, (1984), 3–9. (Russian)

[B 87] A.M. Blokh, *On the connection between entropy and transitivity for one-dimensional mappings*, Russian Math. Surveys **42** (1987), 165–166.

[BBCDS5 92] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, *On Devaneys denfition of chaos* , Amer. Math. Monthly **99** (1992), no. 4, 332–334.

[BC2 87] L. Block and E.M. Coven, *Topological conjugacy and transitivity for a class of piecewise monotone maps of the interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), 297–306.

[BC2 92] L. Block and W.A. Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Lecture Notes in Math., vol. 1513, Springer, Berlin, 1992.

[BCR3 75] A.M. Bruckner, J. Ceder and M. Rosenfeld, *On invariant sets for functions*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **3**, (1975), no. 2, 333–347.

[BDOT4 91] K.M. Brucks, B. Diamond, M.V. Otero-Espinar and C. Tresser, *Dense orbits of critical points for the tent map*, Contemp. Math. **117** (1991), 57–61.

[BGL10] F. Balibrea, J.L. Guirao and M.A. López *Disurbing smooth trasitive internal maps*, International Journal Bifurcations and chaos (2010).

[BGMY4 80] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz and L. S. Young, *Periodic points and topological entropy of one-dimensional maps*, Lecture Notes in Math., vol. 819, Springer, Berlin, 1980, pp. 18–34.

[BH 87] A.M. Bruckner and Thakyin Hu, *On scrambled sets for chaotic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **301**, (1987), 289–297.

[BK2 93] J. Bobok and M. Kuchta, *Topological entropy and variation for transitive maps*, Math. Slovaca **43** (1993), 345–355.

[BKNvS 96] H.Bruin, G.Keller, T. Novicki and S. van Strien, *Wild Cantor attractors exist*, Ann. of Math. **143** (1996), 97–130.

[BM21 85] M.Barge and J.Martin, *Chaos, periodicity and snakelike continua*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 355–365.

[BM22 87] M.Barge and J.Martin, *Dense orbits on the interval*, Michigan Math. Journal **34** (1987), 3–11.

[BS2 95] J. Buescu and I. Stewart, *Liapunov stability and adding machines*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **15** (1995), 271–290.

[CBL3 01] R. Chacón, F. Balibrea & M.A. López, *Role of nolinear dissipation in the suppresion of chaotic escape from a potential well*, Phys, Lett. A. **279** (2001), 38–46.

[CH2 91] E.M. Coven and M.C. Hidalgo, *On the topological entropy of transitive maps of the interval*, Bull. Austral. Math. Soc. **44** (1991), 207–213.

[CM2 86] E.M. Coven and I.Mulvey, *Transitivity and the center for maps of the circle*, Ergod. Th.& Dynam. Sys. **6** (1986), 1–8.

[CS2 93] E.M. Coven and J. Smítal, *Entropy-minimality*, Acta Math. Univ. Comen. **62** (1993), 117–121.

[D 89] R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., Addison Wesley, 1989.

[DGS3 77] M. Denker, C. Grillenberger and K. Sigmund, *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 527, Springer-Verlag, 1977.

[DM2 78] R.A. Dana & L. Montrucchio, *Dynamical Complexity in Doupoly Games*,J.Econom. Theory **40** (1986), 40–56

[dMvS2 93] W. de Melo and S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer, Berlin, 1993.

[dV 93] J.de Vries, *Elements of Topological Dynamics*, Mathematics and its applications, vol. 257, Kluwer, Dordrecht, 1993.

[F 67] H.Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory*, Math. Syst. Theory **1** (1967), 1–49.

[FL2 93] J. Fehrenbach and J. Los, *Une minoration de l'entropie topologique des difféomorphismes du disque*, preprint (1993).

[FM2 93] J. Franks and M. Misiurewicz, *Cycles for disk homeomorphisms and thick trees*, Contemp. Math. **152** (1993), 69–139.

[FLP3 79] A. Fathi, F. Laudenbach and V.Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Asterisque **66-67** (1979), Societe Mathematique de France, Paris, 1–284.

[G 44] W.H. Gottschalk, *Orbit-closure decompositions and almost periodicity properties*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), no. 12, 915–919.

[G 71] L.W. Goodwyn, *The product theorem for topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 445–452.

[G 79] J.Guckenheimer, *Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps*, Commun. Math. Phys. **70** (1979), 133–160.

[GH2 95] W.H. Gottschalk and G. A. Hedlund, *Topological Dynamics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 36, Providence, RI, 1995.

[GW2 93] E. Glasner and B. Weiss, *Sensitive dependence on initial conditions*, Nonlinearity **6** (1993), 1067–1075.

[H] A.J. Homburg, *Piecewise smooth one dimensional maps with nowhere vanishing derivative*, Preprint 39/96, Inst. Math. I, Freie Universitat, Berlin.

[H 55] G.A. Hedlund, *A class of transformations of the plane*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **51** (1955), no. 4, 554–564.

[H 56] P.R. Halmos, *Lectures on ergodic theory*, The mathematical society of Japan, Tokyo, 1956.

[HK2 53] T. Homma and S. Kinoshita, *On the regularity of homeomorphisms of* E^n, J. Math. Soc. Japan **5** (1953), 365–371.

[HT2 85] M.Handel and W.Thurston, *New proofs of some results of Nielsen*, Adv. Math. **56** (1985), 173–191.

[I 89] A.Iwanik, *Independent sets of transitive points*, Dynamical Systems and Ergodic Theory, Banach Center Publications, vol. 23, PWN, Warsaw, 1989, pp. 277–282.

[I 91] A.Iwanik, *Independence and scrambled sets for chaotic mappings*, The Math. Heritage of C.F. Gauss (George M. Rassias, ed.), World Scientic, Singapore, 1991, pp. 372–378.

[J 92] V. Jiménez, *Large chaos in smooth fuctions of zero topological entropy*, Bull. Austral. Math. Soc. **46** (1992)

[JP2 89] K. Janková and M. Polakovic, *Transitivity of expanding maps of the interval*, Acta Math. Univ. Comenianae **56–57** (1989), 243–247.

[JS2 86] K. Janková and J. Smítal, *A characterization of chaos*, Bull. Austral. Math. Soc. **34** (1986), 283–292.

[K 58] S. Kinoshita *On orbits of homeomorphisms*, Colloq. Math. **6** (1958), 49–53.

[K 75] A.B. Krygin, *On -limit sets of the cylindrical cascade*, Izv. Akad. Nauk SSSR ser. Mat. **39** (1975), no. 4, 879–898.

[K 79] A. Katok, *Bernoulli diffeomorphisms on surfaces*, Ann. of Math. **110** (1979), 529–547.

[K 85] U. Krengel, *Ergodic theorems*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1985.

[K 92] S.F. Kolyada, *On dynamics of triangular maps of the square*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **12** (1992), 749–768.

[KS 97] S.F. Kolyada and L. Snoha *Some aspect of topological transitivity. A survey*, Grazer Math. Ber. **334** (1997), 3–35.

[KH2 95] A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[KR2 68] H.B. Keynes and J.B. Robertson, *On ergodicity and mixing in topological transformation groups*, Duke Math. J. **35** (1968), 809–819.

[KS2 89] M. Kuchta and J. Smítal, *Two point scrambled set implies chaos*, European Conference on Iteration Theory (ECIT 87), World Sci. Publishing, Singapore, 1989, pp. 427–430.

[L 93] Shihai Li, *ω-chaos and topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 243–249.

[L 94] M.Yu. Lyubich, *Combinatorics, geometry and attractors of quasi-quadratic maps*, Ann. of Math. **140** (1994), 347–404.

[L 98] M.A. López, *Umbral orden/caos y bifurcaciones de sistemas no autónomos bajo perturbaciones periódicas generalizadas*, PhD Thesis, University of Murcia.

[LM2 93] J. Llibre and M. Misiurewicz, *Horseshoes, entropy and periods for graph maps*, Topology **52** (1993), 149–164.

[LM2 94] A. Lasota and M.C. Mackey, *Chaos, Fractals, and Noise : Stochastic Aspects of Dynamics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1994.

[LT2 95] D.A. Lawrence and E.S. Thomas, *A note on transitive flows* , Ergod. Theory & Dynam. Sys. **15** (1995), 333–339.

[LY2 75] T.Y. Li and J.A. Yorke, *Period three implies chaos*, Amer. Math. Monthly **82** (1975), 985–992.

[M 79] M. Misiurewicz, *Horseshoes for mappings of an interval*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. **27** (1979), 167–169.

[MPV3 75] J. Moser, E. Phillips and S. Varadhan, *Ergodic theory, A seminar, Courant Institut of Mathematical Sciences*, New York University, 1975.

[N 82] Z. Nitecki, *Topological dynamics on the interval*, Ergodic Theory and Dynamical Systems II, (College Park, Md., 1979-80), Progr. Math. 21, Birkhauser, Boston, Mass., (1982), pp. 1–73.

[O 37] J.C. Oxtoby, *Note on transitive trasformations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **23** (1937), 443–446.

[O 71] J.C. Oxtoby, *Measure and category*, Springer - Verlag, New York, 1971.

[OU2 41] J.C. Oxtoby and S.M. Ulam, *Measure - preserving homeomorphisms and metrical transitivity*, Ann. Math. **42** (1941), 874–920.

[P 66] W. Parry, *Symbolic dynamics and transformations of the unit interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966), 368–378.

[P 83] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 2, Cambridge University Press, 1983.

[P 85] J. Piórek, *On the generic chaos in dynamical systems*, Acta Math. Univ. Iagell. **5** (1985), 293–298.

[P 91] T. Puu, *Chaos in Duopoly Pricing*, Chaos Solitions and Fractals **1** (1991), 573–581.

[Pr 83] C. Preston, *Iterates of Maps on an Interval*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 999, Springer, Berlin, 1983.

[Pr 88] C. Preston, *Iterates of Piecewise Monotone Mappings on an Interval*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1347, Springer, Berlin, 1988.

[R 81] M. Rees, *A minimal positive entropy homeomorphism of the 2-torus*, Jour. London Math. Soc. **23** (1981), 537–550.

[RT2 71] D. Ruelle and F. Takens, *On the nature of turbulence*, Comm. Math. Phys. **20 (and 23)** (1971), 167–192 (and 343–344).

[S 30] L.G. Shnirelman, *An example of a transformation of the plane*, Izv. Donsk. Polytech. Inst. **14** (1930), 64–74. (Russian)

[S1 64] A.N.Sharkovskii, *Coexistence of cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrain. Math. Zh. **16** (1964), 61–71. (Russian)

[S2 64] A.N. Sharkovskii, *Nonwandering points and the centre of a continuous mapping of the line into itself*, Dopovidi Ukrain. Acad. Sci. **7** (1964), 865–868. (Ukrainian)

[S 65] A.N.Sharkovskii, *On cycles and the structure of a continuous mapping*, Ukrain. Math. Zh. **17** (1965), 104–111. (Russian)

[S 66] Ye.A. Sidorov, *Topologically indecomposable transformations of the n-dimensional space*, Volzh. Mat. sbornik **5**, (1966), 326– 330. (Russian).

[S1 68] Ye.A. Sidorov, *The existence of topologically indecomposable transformations in an n-dimensional region which are not ergodic*, Mat. Zametki **3** (1968), no. 4, 427–430. (Russian)

[S2 68] Ye.A. Sidorov, *Smooth topologically transitive dynamical systems*, Mat. Zametki **4** (1968), no. 6, 751–759. (Russian)

[S 69] Ye.A. Sidorov, *Connection between topological transitivity and ergodicity*, Izv. vysh. utcheb. zav., Mat. **83** (1969), no. 4, 77–82. (Russian)

[S1 73] Ye.A. Sidorov, *Topologically transitive cylindrical cascades*, Mat. Zametki **14** (1973), no. 3, 441–452. (Russian)

[S2 73] Ye.A. Sidorov, *On a class of minimal sets*, Uspekhi Mat. nauk **28** (1973), no. 4, 225–226. (Russian)

[S 77] Ye.A. Sidorov, *Some properties of transitive dynamical systems*, Differential and integral equations, Mezhvuzovskii sbornik, vyp. 1, Gorkii, 1977, pp. 44–51. (Russian)

[S 90] L'. Snoha, *Generic chaos*, Comment. Math. Univ. Carolinae **31** (1990), no. 4, 793–810.

[S 92] L'. Snoha, *Dense chaos*, Comment. Math. Univ. Carolinae **33** (1992), no. 4, 747–752.

[Si 92] S. Silverman, *On maps with dense orbits and the definition of chaos*, Rocky Mountain Jour. Math. **22** (1992), 353–375.

[ST21 88] Russel A. Smith and E.S. Thomas, *Some examples of transitive smooth flows on differentiable manifolds*, J. London Math. Soc. **37** (1988), 552–568.

[ST22 88] Russel A. Smith and E.S. Thomas, *Transitive flows on two-dimensional manifolds*, J. London Math. Soc. **37** (1988), 569–576.

[SW2 91] M. Shub and B. Weiss, *Can one always lower topological entropy?*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **11** (1991), 535–546.

[T 80] Y. Takahashi, *A formula for topological entropy of one-dimensional dynamics*, Sci. Papers College Gen. Ed. Tokyo Univ. **30** (1980), 11–22.

[T 88] W.Thurston, *On the geometry and dynamics of dieomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417–431.

[T 89] J.M.T. Thompson, *Chaotic phenomena triggering the escape from a potencial well*, Proc. R. Soc. Lond **A 421** (1989) 195–225.

[VdP 27] Van der Pool, *Forced oscilations in a circuit with no linear resistence*, London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag, **3**, (1927) 109–123

[VB2 94] M. Vellekoop and R. Berglund, *On intervals, transitivity = chaos*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 4, 353–355.

[VS 90] S. van Strien, *Hyperbolicity and invariant measures for general* C^2 *maps satisfying the Misiurewicz condition*, Comm. Math. Phys. **128** (1990), 437–495.

[W 82] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer, New York, 1982.

[X 88] J. Xiong, *Chaoticity of interval self-maps with positive entropy*, Intern. Centre for Theor. Physics Trieste, preprint IC/88/385 (1988).

[X 90] Xiao-Quan Xu, *Explicit transitive automorphisms of the closed unit square*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 571–572.