

CAPÍTULO IV: MODELOS MATEMÁTICOS Y MODELOS EN RED

IV.1 Modelo matemático 2-D

Existen dos posibilidades, no independientes, de acuerdo con lo expuesto en el capítulo segundo de este proyecto, para definir el modelo matemático:

- Tomando como variable independiente el contenido volumétrico de humedad, θ_v , y
- Tomando como variable independiente el potencial mátrico, ψ_m .

Se seguirá la primera opción por ser θ_v la variable más adecuada debido a los rangos de valores en los que se mueve así como a los rangos de valores de los coeficientes de la ecuación diferencial del modelo. La conversión de los resultados es inmediata por medio de las relaciones que ligan ambas variables independientes, (capítulo II).

IV.1.1 Ecuación diferencial

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo segundo, si tomamos como eje z la profundidad y como eje x la horizontal de un suelo, la ecuación diferencial 2-D del modelo, usando la ecuación de Darcy y practicando el balance de agua a un volumen infinitesimal de suelo, es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_z}{\partial z} \quad (4.1)$$

donde: K es la conductividad hidráulica, θ es el contenido volumétrico de agua en el suelo, y D es la difusividad de agua en el suelo, relacionada con la conductividad hidráulica y la capacidad específica por la expresión

$$D_z = \frac{K_z}{C} \quad (4.2)$$

$$D_x = \frac{K_x}{C} \quad (4.3)$$

La ecuación diferencial del modelo tomando como variable el potencial mátrico, según se mostró en el capítulo segundo, es:

$$C \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \psi_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \right) + \frac{\partial K_z}{\partial z} \quad (4.4)$$

IV.1.2 Condiciones de contorno

Pueden clasificarse en:

- **Humedad constante:** Esta condición puede ser aplicada tanto a la superficie del terreno como a la capa freática, en su caso:

$$\theta(z = z_0, t) = \theta_0$$

- **Suelo impermeable (condición adiabática):** Esta condición, que puede aplicarse también tanto a la superficie del suelo como a una cierta profundidad, como a los laterales del suelo marcados como fronteras por la propia naturaleza del suelo, implica que no existe flujo de agua a través de la cota marcada:

$$\partial\theta/\partial z = 0, \quad z = z_0$$

$$\partial\theta/\partial x = 0, \quad x = x_0$$

- **Flujo constante de agua:** Esta condición, que habitualmente se da en las cotas superficiales del suelo debido fundamentalmente a la irrigación, tiene ciertas restricciones ya que no puede superar ciertos valores que impliquen contenidos de humedad por encima del 100% en ninguna cota del suelo.
- **Flujos o contenidos de humedad dependientes del tiempo en la superficie.** Pueden asumirse, fácilmente, condiciones no estacionarias en la frontera siempre que éstas sean compatibles entre sí y que los valores de flujos sean de pequeño valor para evitar lo mencionado en el caso anterior.

IV.1.3 Ecuaciones de dependencia de los coeficientes de la ecuación diferencial

- **Conductividad Hidráulica (K):** Su relación con el contenido volumétrico de agua viene dada, habitualmente, por la fórmula:

$$K = A * \exp(B * \theta) \quad (4.5)$$

donde A y B son dos constantes. K se expresa normalmente en mm/h.

La figura 2.13, Capítulo II, muestra una serie típica de curvas de valores del parámetro K para distintos tipos de suelos agrícolas.

- **Capacidad específica de agua del suelo (C) :** Ésta es la relación local entre el contenido volumétrico de agua y el potencial mátrico:

$$C = \frac{d\theta}{d\psi_m} \quad (4.6)$$

Su expresión matemática puede obtenerse para cada suelo a partir de la relación anterior.

Las figuras 2.14 y 2.31, Capítulo II, muestran la variación de θ y de Ψ_m para distintos tipos de suelos.

- **Coefficiente de difusión de agua en suelo (D) o difusividad:** Es la relación entre K y C , ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$):

$$D = \frac{K}{C} \quad (4.7)$$

IV.2 Modelo de N capas

La única diferencia con el caso anterior es que existen unas características diferenciadas en el suelo para cada rango o espesor de la capa, siendo la ecuación diferencial que rige el proceso, la misma en todas las capas. Por otro lado, dos nuevas condiciones de frontera pueden señalarse en la frontera entre capas, una derivada de la continuidad del contenido volumétrico de agua y otra asociada a la conservación del flujo de agua. Condiciones que, como se verá inmediatamente no requieren ningún tipo de consideración a la hora de elaborar el modelo en red ya que las leyes de los circuitos las asumen implícitamente (leyes de Kirchhoff).

IV.3 Modelo en red 1-D

La nomenclatura utilizada para el modelo 1-D se muestra en la figura 4.1. Una extensión de esta nomenclatura para el modelo 2-D es inmediata añadiendo los flujos de entrada y salida de agua y sus correspondientes potenciales de contenido de humedad para la componente horizontal (coordenada x).

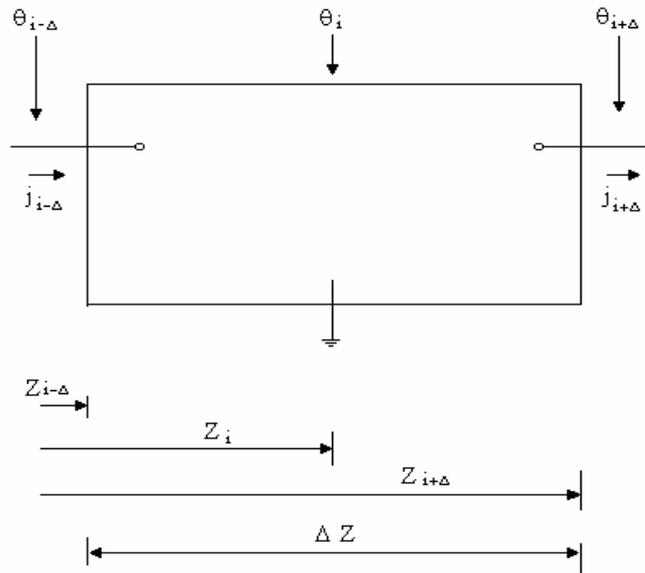


Figura 4.1 Nomenclatura de una celda (1-D)

Tomando diferencias finitas para la variable espacial en la ecuación (4.1)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\Delta Z} (j_{i-\Delta} - j_{i+\Delta}) + \frac{1}{\Delta X} (j_{i-\Delta} - j_{i+\Delta}) + \frac{\Delta K_z}{\Delta Z} \quad (4.8)$$

y usando la ley de Darcy

$$j = K \frac{\Delta\theta}{\Delta z} \quad (4.9)$$

obtenemos

$$\Delta z \frac{d\theta}{dt} = K_{i-\Delta} \frac{\theta_{i-\Delta} - \theta_i}{\Delta z / 2} - K_{i+\Delta} \frac{\theta_i - \theta_{i+\Delta}}{\Delta z / 2} + K_{i-\Delta} - K_{i+\Delta} \quad (4.10)$$

Llamando a cada uno de los términos de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}
 j_{alm} &= \Delta z \frac{d\theta}{dt} \\
 j_{ent,dif} &= K_{i-\Delta} \frac{\theta_{i-\Delta} - \theta_i}{\Delta z / 2} \\
 j_{sa,dif} &= K_{i+\Delta} \frac{\theta_i - \theta_{i+\Delta}}{\Delta z / 2} \\
 j_{ent,gravedad} &= K_{i-\Delta} \\
 j_{sal,gravedad} &= K_{i+\Delta}
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

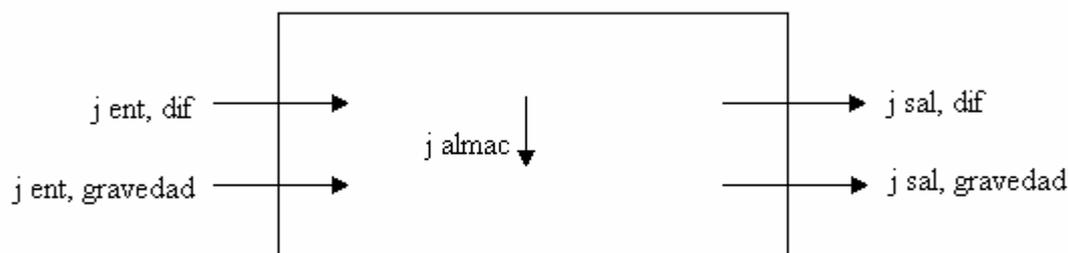


Figura 4.2 Balance hídrico en la celda

dicha ecuación puede escribirse como un balance de flujos de agua en la celda, figura 4.2.

$$J_{alm} = j_{ent,dif} - j_{sal,dif} + j_{ent,gravedad} - j_{sal,gravedad}
 \tag{4.12}$$

Tomando para la conductividad y el potencial mátrico funciones genéricas, que aparecen generalmente en la bibliografía, de la forma,

$$K = a * e^{b\theta}
 \tag{4.13}$$

$$\Psi_m = -c * \theta^{-d}
 \tag{4.14}$$

donde e es la base de los logaritmos neperianos ($e = 2.71828$),

la derivada del potencial mátrico respecto de la humedad es

$$\frac{\partial \Psi_m}{\partial \theta} = c * d * \theta^{-d-1}
 \tag{4.15}$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.2 y 4.3), el valor de la difusividad es

$$D_z = a * c * d * e^{b\theta} * \theta^{-d-1} \tag{4.16}$$

ahora las expresiones (4.11) anteriores se escriben:

$$j_{ent} = a * c * d * e^{b\theta_{i-\Delta z}} * \theta_{i+\Delta z}^{-d-1} * \frac{\theta_{i-\Delta z} - \theta_i}{\Delta z / 2} \tag{4.17}$$

$$j_{sal} = a * c * d * e^{b\theta_{i+\Delta z}} * \theta_{i+\Delta z}^{-d-1} * \frac{\theta_i - \theta_{i+\Delta z}}{\Delta z / 2} \tag{4.18}$$

$$j_{Kent} = a * b * e^{b\theta_i} * \frac{\theta_{i-\Delta z} - \theta_i}{2} \tag{4.19}$$

$$j_{Ksal} = a * b * e^{b\theta_i} * \frac{\theta_i - \theta_{i+\Delta z}}{2} \tag{4.20}$$

Usando la analogía

θ (contenido de humedad) \equiv Potencial eléctrico (V), y

j (flujo de humedad $m^{-1} s^{-1}$) \equiv Corriente eléctrica (A/m^2)

podemos diseñar el modelo en red, figura 4.3.

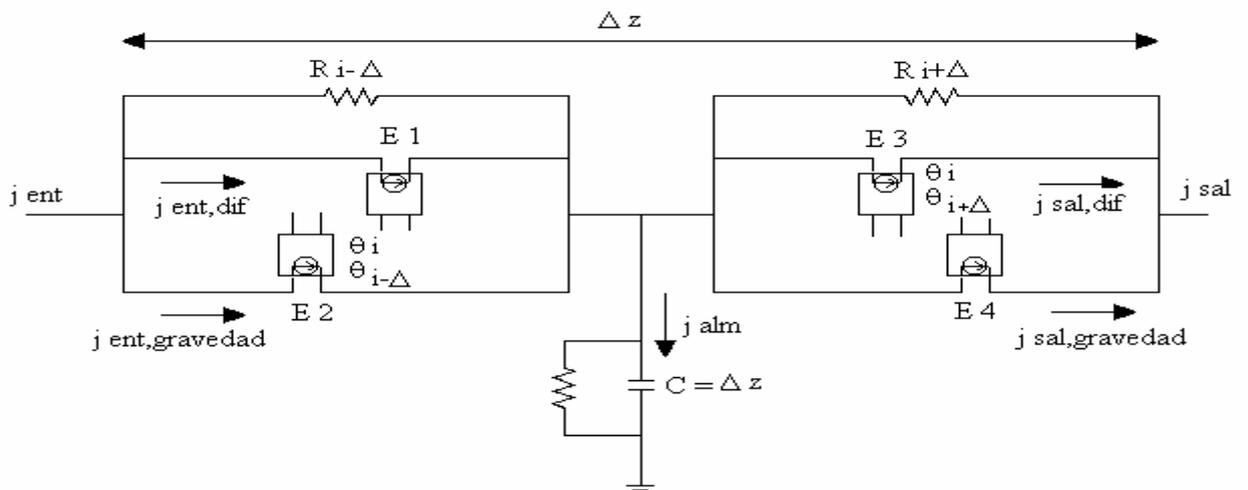


Figura 4.3 Modelo en red de la celda elemental.

E_1 es un generador de corriente controlado por tensión. Se trata de un generador de corriente especial cuyo valor puede ser especificado en el programa. En este caso la corriente de E_1 coincide con $j_{ent,dif}$, es decir, es una corriente dependiente de los potenciales θ_i y $\theta_{i-\Delta}$, señalados entre corchetes en la figura, de acuerdo con la expresión matemática (4.15). De la misma forma, cada uno de los generadores de corriente controlados por tensión, E_2 , E_3 , y E_4 , proporcionan las corrientes $j_{ent,gravedad}$, $j_{sal,dif}$ y $j_{sal,gravedad}$, de acuerdo con las funciones de control dadas por (4.16), (4.17) y (4.18).

En cuanto a la corriente j_{alm} , puede ser implementada por un simple condensador C de valor Δz . Su conexión, entre los generadores de entrada y salida y el nudo común, es tal que la ecuación (4.12) se satisface. Por último, las resistencias $R_{i-\Delta}$ y $R_{i+\Delta}$ son necesarias para establecer la condición de continuidad eléctrica en corriente continua requerida por el programa Pspice.

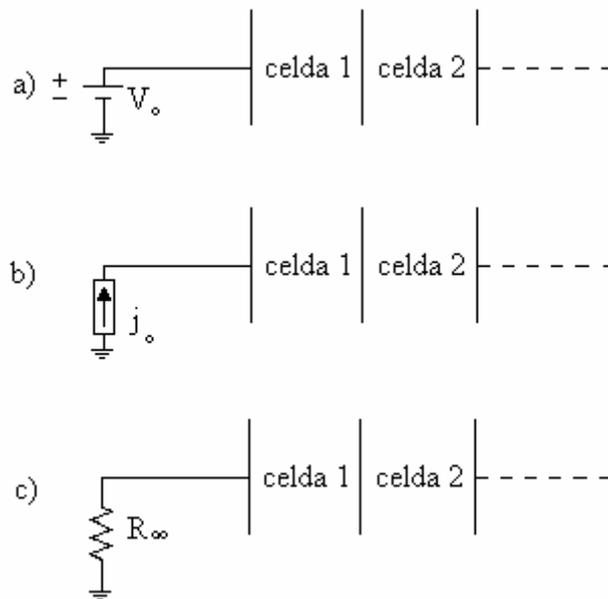


Figura 4.4 Modelo en red para las condiciones de contorno

Una conexión en serie de N de estos circuitos elementales reproduce todo el medio. Valores de N alrededor de 40 ó 50 son suficientes para conseguir resultados con errores despreciables. Al modelo en red resultante es necesario añadir las condiciones de contorno en la superficie y fondo del terreno. Esto se logra por medio de dispositivos eléctricos elementales como los que se muestran en la figura 4.4. La condición de humedad constante, figura 4.4(a), se implemente por

medio de un generador de tensión constante cuyo valor coincide con la humedad exterior; la condición flujo constante se implementa por medio de un generador de corriente constante, figura 4.4(b) y la condición de impermeabilidad requiere una simple resistencia de valor muy elevado (infinito), figura 4.4(C). Otras condiciones de contorno diferentes pueden implementarse fácilmente.

De acuerdo con lo expuesto en el capítulo siguiente, el fichero que se ejecuta en Pspice, equivalente al modelo en red anterior, es un fichero de texto organizado en dos secciones. Una la de especificación del propio modelo, que se elabora mediante subcircuitos, y otra que recoge datos complementarios tales como el tiempo de simulación, la precisión requerida a la respuesta, la organización de los datos de salida, etc. Un ejemplo de este fichero puede verse al final de dicho capítulo.

IV.4 Modelo en red 2-D

La componente horizontal del flujo de agua se modela dentro de la celda de la misma forma que la componente vertical, excluyendo el término gravitatorio. Dos generadores controlados similares a E_1 y E_2 , figura 4.3 se disponen en el modelo 1-D a sendas entradas correspondientes a las paredes laterales horizontales de la celda. El resto de componentes son los mismos que aparecen en la figura 4.3.