El algoritmo de Weiszfeld para la resolución del problema económico de Weber

Cañavate Bernal, Roberto J.
Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos
Universidad Politécnica de Cartagena
E-mail: r.canavate@upct.es

Cobacho Tornel, Mª Belén
Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos
Universidad Politécnica de Cartagena
E-mail: belen.cobacho@upct.es

Rodríguez Gómez, José Miguel
Departamento de Métodos Cuantitativos e Informáticos
Universidad Politécnica de Cartagena
E-mail: jose.rodriguez@upct.es

Resumen

El problema económico de Weber ha sido ampliamente tratado en la literatura, tanto teórica como empíricamente, gracias a su gran adaptabilidad a la modelización de situaciones reales. Su caso particular más estudiado es el que considera distancias euclídeas, debido en parte al respaldo que este tipo de distancias ha recibido de algunos estudios aplicados. El algoritmo de Weiszfeld sigue siendo el método más utilizado para su resolución a pesar de que puede existir un conjunto de puntos iniciales para los que el algoritmo no converja. En [Brimberg, 1995] se acotaba el tamaño de este conjunto y se concluía que la probabilidad de elegir al azar uno de estos punto iniciales es prácticamente nula. Sin embargo, en el documento [Cánovas et al., 1999] se rebate la validez de las demostraciones realizadas en dicho artículo. De cualquier modo, se presenta en este trabajo un sencillo método de elección del punto inicial para el algoritmo de Weiszfeld que asegura la convergencia al óptimo, esto es, que elimina los problemas de aplicación del proceso iterativo de Weiszfeld.

Palabras clave: Problema de Weber, Algoritmo de Weiszfeld, Norma euclídea.

1 Introducción

A principios del siglo XX, en su influyente libro sobre localización de industrias (véase [Weber, 1909]), el economista Alfred Weber formuló el siguiente problema: *Se necesita establecer la ubicación de una fábrica que se abastecerá de materia prima de dos almacenes, y cuyo producto se venderá en un cierto mercado. La distancia desde la fábrica a los almacenes y al mercado suponen un coste para la fábrica que puede ser estimado y que se considera proporcional a dicha distancia. ¿Cuál es la localización que genera un menor coste económico para la empresa?* Este problema, cuya resolución requiere la búsqueda de un punto que minimice la suma de las distancias ponderadas (por el factor de proporción de los costes) a los tres puntos conocidos (los dos almacenes y el mercado), y al que se denomina *el problema de Weber*, es el origen de una gran corriente de aplicaciones prácticas, adaptaciones y generalizaciones que perdura hasta nuestros días, y que lo convierten en un tema especialmente fructífero.

Es importante observar que aunque el problema original de Weber fue formulado para únicamente tres puntos conocidos y para la localización de industrias, las aplicaciones prácticas (véase, por ejemplo, [Burstall et al., 1962], [Haley, 1963] y [O'Kelly, 1986]) conllevan normalmente una gran cantidad de puntos, y abarcan ámbitos tan diversos como la ergonomía o robótica (véase [Foulds y Hamacher, 1993] y [Cañavate et al., 2001]).

Por otra parte, un aspecto fundamental es la determinación de la función de medida que se utilizará para estimar la distancia a los puntos fijos. Diversos estudios se han llevado a cabo sobre el tema, destacando los realizados para la determinación de las funciones apropiadas para la estimación de distancias reales por carretera. Entre ellos se pueden citar [Love y Morris, 1972] y [Love y Morris, 1979], sobre las distancias por carretera entre 25 ciudades de los Estados Unidos, y [Berens y Körling, 1985] y [Berens y Körling, 1988], acerca de las distancias por autopista entre 117 ciudades de la antigua República Federal de Alemania. Aunque los dos primeros parecían indicar que la norma l_p era la función adecuada para la estimación de la distancia por carretera entre ciudades, los trabajos de Berens y Körling contradecían los resultados de Love y Morris, afirmando que era preferible la utilización de la norma euclídea. Algunos autores sugieren que esta discrepancia en los resultados se debe principalmente a la diferencia entre las características geográficas de las zonas estudiadas, apuntando la posibilidad de que la norma euclídea sea más adecuada para las estimaciones de distancias en Europa, mientras que la norma l_p se ajusta mejor en la zona norteamericana. En cualquier caso, en este trabajo la única distancia que se considerará será la asociada a la norma euclídea.

2 El problema de Weber con la norma euclídea

Matemáticamente, el problema de Weber se puede formular del siguiente modo: *dada una cantidad finita de puntos distintos $a_1, ..., a_m$ de $\mathbb{R}^n$, con pesos asociados $w_i > 0$,* *hallar el punto de $\mathbb{R}^n$ que minimiza la función*

$$W(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i \, \|x - a_i\| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

donde $\|x - a_i\|$ es la distancia euclídea entre el punto x y el punto a_i, y $w_i > 0$ es el coste o ponderación que corresponde al punto a_i. Se denominarán vértices a los puntos $a_1, ..., a_m$, pesos a los valores reales positivos $w_1, ..., w_m$ y función de Weber a la aplicación W anterior.

Si los vértices están contenidos en una recta de $\mathbb{R}^n$ el problema es fácilmente resoluble y no será tratado aquí. Por tanto, aunque no se especifique directamente, se supondrá a lo largo de todo el trabajo que los vértices no están alineados. Bajo esta suposición la función de Weber es estrictamente convexa, de lo que se deduce que existe un único óptimo para el problema de Weber, al que se denotará en adelante por $\overline{x}$.

Teorema 2.1
La función de Weber, W, es estrictamente convexa. Además, W tiene un único mínimo global, el cual se encuentra en la envolvente convexa de los vértices.

La convexidad es siempre una característica muy apreciada en problemas de minimización, ya que si la función es de clase $\mathcal{C}^1$, la condición necesaria de mínimo local se convierte en una caracterización de los mínimos globales. Por ejemplo, si W es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $\overline{x}$ sería el único punto que anula el gradiente de W, esto es, $\nabla W(x) = 0$. Desgraciadamente, la función de Weber es de clase $\mathcal{C}^1$ sobre el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$ pero no es derivable sobre los vértices.

Corolario 2.2
Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ distinto de los vértices es óptimo del problema de Weber si, y sólo si,

$$\nabla W(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\|x - a_i\|}(x - a_i) = 0. \tag{2}$$

Con lo anterior queda totalmente determinada la optimalidad de un punto $x \neq a_i$ $\forall\, i = 1, \ldots, m$, pero nada se sabe sobre la optimalidad de los vértices. Sin embargo, denotando

$$\nabla_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|x - a_i\|}(a_k - a_i),$$

es posible presentar un sencillo test que determina si un vértice es óptimo o no.

Teorema 2.3
El vértice a_k es el óptimo del problema de Weber si, y sólo si, $\|\nabla_k\| \leq w_k$.

Mediante este teorema es posible, a la hora de buscar un método de resolución para el problema de Weber, restringirse al caso en que ningún vértice es óptimo, ya que basta aplicar el test previamente a los vértices para determinar si alguno de ellos alcanza el mínimo del problema.

3 El algoritmo de Weiszfeld

Para enfrentarse al caso en que ningún vértice es óptimo, se ha de encontrar un método de resolución de la ecuación $\nabla W(x) = 0$. Para ello se puede intentar despejar el punto x en (2), aunque esto sólo se puede realizar de forma parcial.

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\|x - a_i\|}(x - a_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\|x-a_i\|} a_i}{\sum_{j=1}^{m} \frac{w_j}{\|x-a_j\|}}. \tag{3}$$

A la vista de estos resultados, se propuso en [Weiszfeld, 1937] un método de resolución para el problema de Weber, cuya idea principal es generar una sucesión de puntos de modo que cada nuevo punto esté más próximo a verificar la ecuación (3). Pues bien, esta idea no es nueva dentro del análisis numérico y formalmente consiste en definir una función de iteración coincidente con el segundo miembro de la ecuación,

$$T(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\|x-a_i\|} a_i}{\sum_{j=1}^{m} \frac{w_j}{\|x-a_j\|}}, \tag{4}$$

y dado el punto correspondiente a la iteración r-ésima, x_r, generar el siguiente mediante dicha función, $x_{r+1} = T(x_r)$. Sin embargo, un primer escollo surge nada más observar la aplicación: T no está definida en el conjunto $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Para extender la definición a los vértices, y dado que la discontinuidad de la función en dichos puntos es evitable, parece adecuado hacerlo de modo que T sea continua en todo $\mathbb{R}^n$, es decir, $T(a_i) = a_i$ $\forall\, i = 1, \ldots, m$.

Definición 3.1
Se llama función de Weiszfeld *a la aplicación* $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida como*

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{\|x-a_i\|} a_i}{\sum_{j=1}^{m} \frac{w_j}{\|x-a_j\|}} & si\ x \notin \{a_1, \ldots, a_m\} \\ a_i & si\ x = a_i\ para\ i = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{5}$$

Lema 3.2
La función de Weiszfeld es continua en $\mathbb{R}^n$.

Del desarrollo efectuado en (3) se deduce inmediatamente la estrecha relación entre el óptimo de W y los puntos fijos de T.

Lema 3.3
Si $x \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$ *entonces* x *es la única solución al problema de Weber (*$x = \overline{x}$*), si, y sólo si,*

$$x = T(x). \tag{6}$$

Además, si un punto x no verifica la igualdad (6), entonces $T(x)$ tiene un valor objetivo menor que el de x.

Teorema 3.4 ([Kuhn, 1973])
Si $x \neq T(x)$ *entonces* $W[T(x)] < W(x)$.

Definición 3.5
Se denomina **sucesión de Weiszfeld** *a la sucesión de puntos,* $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$*, generada a partir de* $x_0 \in I\!R^n$ *del siguiente modo:*

$$x_r = T\left(x_{r-1}\right) \quad \forall\, r \in \mathbb{N},\ r \geq 1.$$

De los dos resultados previos se desprende que la imagen mediante W de la sucesión de Weiszfeld es monótona decreciente, y que si $x_r = x_{r+1}$ para cierto $r \in \mathbb{N}$ (y ninguno de los dos puntos es un vértice), entonces x_r es el óptimo del problema de Weber. Aún en el caso de que la sucesión no contenga al óptimo se puede asegurar que converge a él (véase teorema 3.6), lo que la convierte en un método adecuado para la resolución (quizás aproximada) del problema de Weber.

Teorema 3.6 ([Kuhn, 1973])
Sea $x_0 \in I\!R^n$ *y sea* $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$ *la sucesión de Weiszfeld. Si* $\left\{(x_r)_{r\in\mathbb{N}}\right\} \bigcap \{a_1, \ldots, a_m\} = \emptyset$*, entonces*

$$\lim_{r\to\infty} x_r = \overline{x}.$$

3.1 Criterios de inicio y parada

Como se ha observado, la sucesión de Weiszfeld necesita de un punto inicial. Existen pocas referencias en la literatura sobre la mejor elección de este punto, por lo que en la mayoría de los trabajos aplicados se utiliza, debido en parte a su sencillez de cálculo, el centro de gravedad de los vértices como punto inicial de la sucesión:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_i}{\sum_{j=1}^{m} w_j}.$$

Por otra parte, no se puede garantizar que la sucesión de Weiszfeld alcance el punto óptimo (véase teorema 3.6), lo que obliga a concretar algún criterio práctico para la finalización de la sucesión. Este criterio debe establecerse de modo que el último punto de la sucesión de Weiszfeld calculado verifique algún criterio de optimalidad, por ejemplo, que esté acotada la máxima diferencia entre el valor objetivo óptimo y el valor objetivo de dicho punto. Uno de los criterios que se pueden emplear es el que viene desarrollado en [Love y Yeong, 1981].

Teorema 3.7
Sea $\alpha > 0$ una constante y

$$D_r = W(x_r) - \nabla W(x_r) \cdot x_r + \min_{i=1,\ldots,m} [\nabla W(x_r) \cdot a_i] \quad \forall\, r \in \mathbb{N}.$$

En las condiciones del problema de Weber, si un punto de la sucesión de Weiszfeld verifica que

$$\frac{W(x_r) - D_r}{D_r} \leq \alpha,$$

entonces, el error porcentual que se produce al considerar a x_r como punto óptimo del problema de Weber es, en términos de la función objetivo, inferior al α por ciento. En otras palabras,

$$\frac{W(x_r) - W(\overline{x})}{W(\overline{x})} \leq \alpha.$$

Algoritmo 3.8 (Weiszfeld)

Paso Previo: *Si $\|\nabla_k\| \leq w_k$ para algún $k = 1, \ldots, m$, entonces el vértice a_k es óptimo. PARAR.*

En caso contrario, fijar el nivel de error, $\alpha > 0$. Ir al Criterio de Inicio.

Criterio de Inicio: *Hacer $x_0 = \frac{\sum_{i=1}^m w_i a_i}{\sum_{j=1}^m w_j}$ y $k = 0$. Ir al Criterio de Parada.*

Criterio de Parada: *Hacer $D_k = W(x_k) - \nabla W(x_k) \cdot x_k + \min_{i=1,\ldots,m} [\nabla W(x_k) \cdot a_i]$.*

Si $\frac{W(x_k) - D_k}{D_k} \leq \alpha$, PARAR. El punto x_k es una solución al problema de Weber con un nivel de error inferior a α.

En caso contrario, hacer $k = k + 1$ e ir al Paso k.

Paso k: *Hacer x_k=$T\,(x_{k-1})$. Ir al Criterio de Parada.*

4 Problemas de convergencia

En la sección precedente se ha demostrado que si la sucesión de Weiszfeld no contiene ningún vértice, entonces converge al óptimo del problema de Weber. Esta salvedad es muy importante, ya que por la definición de T en los vértices, $T(a_i) = a_i$, si existe un $r \in \mathbb{N}$ y un vértice no óptimo, a_i, tal que $x_r = a_i$, se tendría que $x_{r+h} = a_i \;\; \forall\, h \in \mathbb{N}$ y la sucesión de Weiszfeld convergería al punto a_i no óptimo. Este detalle fundamental fue ignorado por Weiszfeld, quien no tuvo en cuenta que pueden existir puntos fuera del conjunto $\{a_1, \ldots, a_m\}$ cuya imagen mediante T coincide con un vértice que no es necesariamente óptimo. El siguiente ejemplo permite comprobar que esta hipótesis es real.

Ejemplo 4.1
Sean $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (1, 0)$, $a_3 = (0, -1)$, $a_4 = (0, 0)$ *y* $a_5 = (-1, 0)$, *con pesos asociados* $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$, $w_5 = 5$. *Es fácil comprobar que el único mínimo del problema de Weber es el punto* $a_5 = (-1, 0)$, *y que por lo tanto, el resto de vértices no son óptimos. Además,*

$$T\left(\frac{3}{2}, 0\right) = T\left(\frac{2}{3}, 0\right) = (0, 0) = a_4.$$

Obsérvese que dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la sucesión de Weiszfeld, esto es, $(x_r)_{r\in\mathbb{N}}$, se puede construir como

$$x_r = T^r(x_0) \quad \text{para } r \in \mathbb{N},$$

donde $T^r(x) = T\left[T^{r-1}(x)\right]$, y $T^0(x) = x$. De este modo, el conjunto de puntos iniciales cuya sucesión de Weiszfeld contiene al vértice a_i viene dada por

$$K_i(T) = \bigcup_{r=1}^{+\infty} T^{-r}(a_i),$$

donde, $T^{-r}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \;/\; T^r(y) = x\}$.

Definición 4.2
Sea T la función de Weiszfeld de un problema de Weber con vértices $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Se llama conjunto de Kuhn *del problema de Weber, y se denotará por $K(T)$, al conjunto de puntos iniciales que originan una sucesión de Weiszfeld que contiene algún vértice. Formalmente,*

$$K(T) = \bigcup_{i=1}^{m} K_i(T) = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{r=1}^{+\infty} T^{-r}(a_i) \right).$$

La primera vez que se advirtió de esta posibilidad fue en [Kuhn, 1973]. En aquel trabajo, Kuhn paliaba el problema asegurando que el conjunto de 'malos puntos iniciales', esto es, el conjunto de Kuhn, era numerable, y por tanto, 'pequeño'. De este modo, si se escoge al azar el punto inicial de la sucesión de Weiszfeld, la probabilidad de que dicho punto pertenezca al conjunto de Kuhn es nula, quedando salvaguardada, al menos teóricamente, la validez del algoritmo de Weiszfeld.

Teorema 4.3 ([Kuhn, 1973])
El conjunto de Kuhn es numerable.

Sin embargo, los contraejemplos de [Chandrasekaran y Tamir, 1989] mostraron que el teorema anterior no se verificaba de forma general. En el mismo artículo, Chandrasekaran y Tamir observaron que en todos los contraejemplos que habían encontrado el conjunto de vértices estaba contenido en un hiperplano de $\mathbb{R}^n$, así que conjeturaron que si se añadía al teorema 4.3 la hipótesis de que los vértices no estuvieran contenidos en ningún hiperplano, entonces sí sería válida la tesis del teorema.

Conjetura 4.4 (Chandrasekaran y Tamir)
Si los vértices del problema de Weber no están contenidos en ningún hiperplano de $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto de Kuhn es numerable.

Posteriormente, en el trabajo [Brimberg, 1995] se presentó la primera demostración de la conjetura 4.4, e incluso se extendió la tesis de la conjetura de Chandrasekaran y Tamir hasta obtener una caracterización de la numerabilidad del conjunto de Kuhn.

Teorema 4.5 ([Brimberg, 1995])
El conjunto de Kuhn es numerable $\Leftrightarrow$ el conjunto de vértices no está contenido en ningún hiperplano de $\mathbb{R}^n$.

Al igual que para el artículo de Kuhn, pronto aparecieron objeciones al resultado. Por una parte, se expusieron en [Cánovas et al., 1999] contraejemplos a la afirmación correspondiente a la implicación '$\Rightarrow$', con lo cual no puede considerarse cierta en general. De otra parte, también se presentaron en [Cánovas et al., 1999] contraejemplos a algunos de los argumentos clave de la prueba de la implicación '$\Leftarrow$' realizada en [Brimberg, 1995], y puesto que ésta es la implicación que demuestra la conjetura 4.4, debe considerarse que dicha conjetura permanece abierta. Es interesante notar que los contraejemplos del trabajo [Cánovas et al., 1999] muestran que no puede ser aceptada la demostración de la conjetura de Chandrasekaran y Tamir, pero no rechazan el contenido de la conjetura.

5 Modificación del algoritmo de Weiszfeld

En cualquier caso, el problema sobre la validez del algoritmo de Weiszfeld, derivado de la posibilidad de que el punto inicial pertenezca al conjunto de Kuhn, sigue latente. En esta sección se mostrará que modificando el criterio de inicio es posible escoger de forma sencilla un punto inicial para el algoritmo fuera del conjunto de Kuhn. Para simplificar la escritura se utilizarán las siguientes notaciones:

$$s(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|a_k - a_i\|}, \quad G_k = \nabla_k - w_k \frac{\nabla_k}{\|\nabla_k\|} \quad \forall\, k = 1, \ldots, m.$$

Definición 5.1

Sea a_k un vértice no óptimo de un problema de Weber. Sea $c \in [1,2]$ cualquiera. Se define $x_0^k \in I\!R^n$ como

$$x_0^k = a_k - \frac{c}{s(k)} \cdot G_k. \tag{7}$$

Teorema 5.2

Si a_k es un vértice no óptimo, entonces $W(x_0^k) < W(a_k)$.

Demostración:

Por la definición de x_0^k se tiene que $\left(x_0^k - a_k\right) s(k) = -cG_k$. Ahora, si se suma $2G_k$ en ambos miembros y se multiplica escalarmente la igualdad resultante por el vector $x_0^k - a_k$, se obtiene un valor negativo ya que $c > 0$ y $x_0^k - a_k$ y G_k tienen la misma dirección pero sentidos opuestos. De este modo,

$$\left(x_0^k - a_k\right) \cdot \left[\left(x_0^k - a_k\right) s(k) + 2G_k\right] = (2-c)\left(x_0^k - a_k\right) \cdot G_k \leq 0,$$

donde $\cdot$ indica el producto escalar usual de vectores en $I\!R^n$. Además, se produce la igualdad si, y sólo si, $c = 2$. Ahora, desarrollando el lado izquierdo de la desigualdad,

$$\left[x_0^k \cdot x_0^k - 2x_0^k \cdot a_k + a_k \cdot a_k\right] s(k) + 2x_0^k \cdot \nabla_k - 2a_k \cdot \nabla_k + \left(x_0^k - a_k\right) \cdot \left(-2w_k \frac{\nabla_k}{\|\nabla_k\|}\right)$$

y teniendo en cuenta la definición de $s(k)$ y de ∇_k,

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|a_k - a_i\|} \left[x_0^k \cdot x_0^k - a_k \cdot a_k - 2x_0^k \cdot a_i + 2a_k \cdot a_i\right] + \left(x_0^k - a_k\right) \cdot \left(-2w_k \frac{\nabla_k}{\|\nabla_k\|}\right).$$

Por último, sumando y restando $a_i \cdot a_i$ en el interior del corchete y reorganizando términos, se llega a que

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|a_k - a_i\|} \left[\left\|x_0^k - a_i\right\|^2 - \|a_k - a_i\|^2\right] + \left(x_0^k - a_k\right) \cdot \left(-2w_k \frac{\nabla_k}{\|\nabla_k\|}\right) \leq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|a_k - a_i\|} \left\|x_0^k - a_i\right\|^2 + \left(x_0^k - a_k\right) \cdot \left(-2w_k \frac{\nabla_k}{\|\nabla_k\|}\right) \leq \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} w_i \|a_k - a_i\| \ \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|a_k - a_i\|} \left\|x_0^k - a_i\right\|^2 + \left(x_0^k - a_k\right) \cdot \left(-2w_k \frac{\nabla_k}{\|\nabla_k\|}\right) \leq W(a_k).$$

Pero $x_0^k - a_k$ y $-2w_k \frac{\nabla_k}{\|\nabla_k\|}$ son dos vectores no nulos que tienen la misma dirección y sentido, así que su producto escalar es $2w_k \left\|x_0^k - a_k\right\|$. Añadiendo este resultado a la última desigualdad se obtiene

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|a_k - a_i\|} \left\|x_0^k - a_i\right\|^2 + 2w_k \left\|x_0^k - a_k\right\| \leq W(a_k).$$

Sustituyendo $\left\|x_0^k - a_i\right\|^2 = \left[\left(\left\|x_0^k - a_i\right\| - \|a_k - a_i\|\right) + \|a_k - a_i\|\right]^2$ en la desigualdad y reorganizando términos se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|a_k - a_i\|} \left(\left\|x_0^k - a_i\right\| - \|a_k - a_i\|\right)^2 \quad & + \\ 2\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} w_i \left\|x_0^k - a_i\right\| + 2w_k \left\|x_0^k - a_k\right\| \quad & \leq \quad 2W(a_k) \end{aligned}$$

o lo que es igual, denotando $\gamma = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{m} \frac{w_i}{\|a_k - a_i\|} \left(\left\|x_0^k - a_i\right\| - \|a_k - a_i\|\right)^2$,

$$\gamma + \sum_{i=1}^{m} w_i \left\|x_0^k - a_i\right\| = \gamma + W\left(x_0^k\right) \leq W(a_k), \tag{8}$$

y se tiene la igualdad si, y sólo si, $c = 2$.

Finalmente, $\gamma \geq 0$ y más aún, se puede asegurar que $\gamma > 0$. En efecto, γ se anula sólo si $\left\|x_0^k - a_i\right\| = \|a_k - a_i\|$ $\forall\, i = 1, \ldots, m,\ i \neq k$, y sustituyendo el valor de γ y las igualdades $\left\|x_0^k - a_i\right\| = \|a_k - a_i\|$ en (8) se deduce que $w_k \left\|x_0^k - a_k\right\| = 0$, esto es, que $x_0^k = a_k$, lo que es una contradicción con la definición de x_0^k.

Puesto que $\gamma > 0$, se deduce directamente de (8) que $W\left(x_0^k\right) < W\left(a_k\right)$. $\square$

Corolario 5.3
Si $W(a_k) = \min_{i=1,\dots,m} W(a_i)$*, entonces* x_0^k *no pertenece al conjunto de Kuhn.*

Demostración:

Se sabe por el teorema 5.2, que si x_0^k viene dado por la expresión (7), entonces $W\left(x_0^k\right) < W(a_k)$. Por la hipótesis sobre el vértice a_k, se tiene además que $W\left(x_0^k\right) < W(a_i)\ \forall\, i = 1,\dots,m$. Ahora, la sucesión de Weiszfeld generada con el punto inicial x_0^k verifica (véase teorema 3.4)

$$W(x_0^k) \geq W(x_1) \geq \cdots \geq W(x_r) \geq \cdots$$

de modo que

$$W(x_r) < W(a_i) \ \Rightarrow\ x_r \neq a_i \quad \forall\, i = 1,\dots,m,\ \forall\, r = 1,2,\dots,$$

es decir, $x_0^k \notin K(T)$. □

Con estos resultados, si el punto inicial de la sucesión de Weiszfeld es x_0^k se puede asegurar que dicha sucesión converge al óptimo. Además, es interesante observar que el punto inicial que ofrece este método depende del valor $c \in [1,2]$ tomado, pero que para cualquiera de ellos, x_0^k no pertenece al conjunto de Kuhn. Se abre de este modo la puerta a futuros estudios que determinen la conveniencia de la utilización de uno u otro valor de c dentro del citado intervalo.

Algoritmo 5.4 (Weiszfeld modificado)

Paso Previo: *Determinar* $W(a_k) = \min_{i=1,\dots,m} W(a_i)$*. Si* $\|\nabla_k\| \leq w_k$*, entonces el vértice* a_k *es óptimo. PARAR.*

En caso contrario, fijar el nivel de error, $\alpha > 0$*. Ir al Criterio de Inicio.*

Criterio de Inicio: *Fijar* $c \in [1,2]$*. Hacer* $x_0 = a_k - \frac{c}{s(k)} \cdot G_k$ *y* $r = 0$*. Ir al Criterio de Parada.*

Criterio de Parada: *Hacer* $D_r = W(x_r) - \nabla W(x_r) \cdot x_r + \min_{i=1,\dots,m} [\nabla W(x_r) \cdot a_i]$.

Si $\frac{W(x_r) - D_r}{D_r} \leq \alpha$*, PARAR. El punto* x_k *es una solución al problema de Weber con un nivel de error inferior a* α*.*

En caso contrario, hacer $r = r + 1$ *e ir al Paso* r*.*

Paso r**:** *Hacer* $x_r = T(x_{r-1})$*. Ir al Criterio de Parada.*

6 Conclusiones

El algoritmo de Weiszfeld es el método más utilizado para la resolución empírica del problema económico de Weber. Sin embargo, este algoritmo posee algunos problemas de convergencia que, de ser cierta la conjetura de Chandrasekaran y Tamir, tienen una repercusión más teórica que práctica.

En cualquier caso, estos problemas se pueden soslayar totalmente introduciendo un nuevo y sencillo método de elección del punto inicial. Esta leve modificación del algoritmo de Weiszfeld permite asegurar que la sucesión generada mediante dicho algoritmo converge, bajo cualquier circunstancia, al óptimo del problema de económico de Weber.

Además, la elección de este punto depende del valor escogido de un cierto parámetro, c, que varía en el intervalo $[1, 2]$. La influencia que el valor de este parámetro produce en la convergencia del algoritmo es, por el momento, desconocida, y será objeto de futuras investigaciones.

Referencias

[Berens y Körling, 1985] W. Berens, F.J. Körling (1985). *On estimating road distances by mathematical functions.* European Journal of Operational Research, 21, 54-56.

[Berens y Körling, 1988] W. Berens, F.J. Körling (1988). *On estimating road distances by mathematical functions - A rejoinder.* European Journal of Operational Research, 36, 254-255.

[Brimberg, 1995] J. Brimberg (1995). *The Fermat-Weber location problem revisited.* Mathematical Programming, 71, 71-76.

[Burstall et al., 1962] R.M. Burstall, R.A. Leaver, J.E. Sussams (1962). *Evaluation of transport costs for alternative sites - A case study.* Operational Research Quarterly, 13, 345-354.

[Cánovas et al., 1999] L. Cánovas Martínez, R.J. Cañavate Bernal, A. Marín Pérez. *On the convergence of the Weiszfeld algorithm.* Enviado para publicación.

[Cañavate et al., 2001] R.J. Cañavate Bernal, J.M. Rodríguez Gómez, M.B. Cobacho Tornel. *Optimización de la secuencia de movimientos de un brazo robot en una cadena de ensamblaje: el problema económico de Weber con normas poliédricas.* XV Reunión de ASEPELT. A Coruña.

[Chandrasekaran y Tamir, 1989] R. Chandrasekaran, A. Tamir (1989). *Open questions concerning Weiszfeld's algorithm for the Fermat-Weber location problem.* Mathematical Programming, 44, 293-295.

[Foulds y Hamacher, 1993] L.R. Foulds, H.W. Hamacher (1993). *Optimal bin location and sequencing in printed circuit board assembly.* European Journal of Operational Research, 66, 279-290.

[Haley, 1963] K.B. Haley (1963). *The siting of depots.* Int. J. Prod. Res., 2, 41-45.

[Kuhn, 1973] H.W. Kuhn (1973). *A note on Fermat's problem.* Mathematical Programming, 4, 98-107.

[Love y Morris, 1972] R.F. Love, J.G. Morris (1972). *Modelling intercity road distances by mathematical functions.* Operational Research Quarterly, 23, 61-71.

[Love y Morris, 1979] R.F. Love, J.G. Morris (1979). *Mathematical models of road travel distances.* Management Science, 25, 130-139.

[Love y Yeong, 1981] R.F. Love, W.Y. Yeong (1981). *A stopping rule for facilities location algorithms.* AIIE Transactions, 13, 357-362.

[Ostresh, 1978] L.H. Ostresh (1978). *On the convergence of a class of iterative methods for solving the Weber location problem.* Operations Research, 26, 597-609.

[O'Kelly, 1986] M.E. O'Kelly (1986). *The location of interacting hub facilities.* Transportation Science, 20, 92-106.

[Weber, 1909] A. Weber (1909). *Über den standort der industrien.* Tübingen. (Traducción de C.J. Friederich (1929): *Theory of the location of industries.* Chicago: University of Chicago Press.)

[Weiszfeld, 1937] E.V. Weiszfeld (1937). *Sur le point pour lequal la somme des distances de n points donnés est minimum.* The Tohoku Mathematical Journal, 43, 335-386.