

# Efecto Talbot Espacio-Temporal basado en CRLH LWAs: Fundamentos y Validación Experimental

J. S. Gómez-Díaz<sup>(1)</sup>, S. Gupta<sup>(2)</sup>, J. L. Gómez-Tornero<sup>(1)</sup>, M. García-Vigueras<sup>(1)</sup>,  
C. Caloz<sup>(2)</sup> y A. Alvarez-Melcon<sup>(1)</sup>

jsebastian\_gomez@ono.com, alejandro.alvarez@upct.es, christophe.caloz@polymtl.ca

<sup>(1)</sup>Universidad Politécnica de Cartagena, Antiguo Cuartel de Antigones, 30202 Cartagena, Murcia, España

<sup>(2)</sup>École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada

**Abstract**—A tunable spatio-temporal Talbot imaging phenomenon, based on metamaterial composite right/left-handed (CRLH) leaky-wave antennas (LWAs), is presented. This phenomenon, reported for the first time in the microwave domain, is based on the combination of the conventional spatial monochromatic Talbot effect and the transient (polychromatic) character of the pulse radiation phenomenon in the LWA structure. When the elements of a periodic CRLH LWA array are fed simultaneously by an input pulse, the spatial beams corresponding to different temporal frequencies constructively interfere in space so as to form a self-imaged pattern constituted by narrow Talbot zones. This Talbot effect is spatial-temporal since the Talbot zones are localized both in space and time. Furthermore, the scanning law property of the LWA is exploited to provide an off-axis radiation, leading to a tunable Talbot distance. This phenomenon is analyzed theoretically, numerically validated and experimentally demonstrated for the case of narrow-band pulses.

## I. INTRODUCCIÓN

El efecto Talbot fue descubierto por H. F. Talbot en 1836 [1] y ha encontrado aplicación en numerosas líneas de investigación, especialmente en el dominio óptico. Este fenómeno se basa en la difracción de Fresnel para obtener la formación de autoimágenes de un objeto periódico iluminado con luz coherente. Las imágenes aparecen a lo largo de la dirección de iluminación, específicamente a la distancia Talbot ( $z_T$ ). Además, autoimágenes con una periodicidad múltiplo de la original aparecen en distancias Talbot fraccionarias. Esta distancia Talbot puede ser expresada en su versión espacial como

$$d_s = \frac{s}{m} \frac{X^2}{\lambda}, \quad (1)$$

donde  $X$  es la separación de los elementos periódicos,  $\lambda$  es la longitud de la onda incidente y  $s, m \in N$ , con  $(s/m)$  un número entero (para  $z_T$  y sus múltiplos) o un número racional irreducible (para distancias Talbot fraccionarias).

La versión temporal de este efecto [2] aparece cuando una señal periódica en el tiempo se propaga a lo largo de un medio dispersivo de primer orden (como una fibra óptica). En este caso, el tren de pulsos original se reproduce a la distancia Talbot ( $z_T$ ) mientras que trenes de pulsos con una periodicidad múltiplo de la original se encuentran en distancias Talbot fraccionarias. Este fenómeno temporal es debido a la equivalencia matemática entre la difracción de Fresnel paraxial en el espacio y la propagación de pulsos temporales en medio dispersivos. Matemáticamente, la distancia Talbot

en este caso puede expresarse como

$$d_t = \frac{s}{m} \frac{T_r^2}{2\pi|\beta_2|}, \quad (2)$$

donde  $T_r$  es el periodo del tren de pulsos,  $\beta_2$  es el parámetro que controla la dispersión de primer orden (GVD) y  $s, m \in N$ , con  $(s/m)$  un número entero (para  $z_T$  y sus múltiplos) o un número racional irreducible (para distancias Talbot fraccionarias).

La introducción en esta última década de metamateriales electromagnéticos, como son las líneas de transmisión *composite right/left-handed* (CRLH) [3] ha propiciado la aparición de novedosos fenómenos dispersivos en el dominio de las microondas, gracias a la naturaleza dispersiva y de banda ancha de este tipo de líneas. Además, es conocido el empleo de este tipo de líneas como leaky-wave antenas (LWAs) [3], [4], proporcionando por primera vez un haz capaz de escanear el espacio desde *backfire* hasta *endfire*, incluyendo por primera vez la radiación en *broadside*. Este fenómeno reproduce en el dominio de las microondas el comportamiento de las “redes de difracción” [5], con la ventaja de que presentan una alimentación mucho más sencilla.

En esta comunicación, se presenta por primera vez el efecto Talbot espacio-temporal sintonizable. Este fenómeno, obtenido en el dominio de las microondas, está basado en la combinación del efecto Talbot espacial monocromático con la respuesta en régimen transitorio de la radiación de pulsos temporales que se encuentra en las CRLH LWAs. Específicamente, el fenómeno se observa cuando todos los elementos de un array, en teoría infinito, de antenas CRLH leaky-wave se alimentan de forma simultánea con un pulso modulado, como se puede observar en la Fig. 1. En este caso, los diferentes haces espaciales, que se corresponden con distintas frecuencias temporales, interfieren en el espacio formando un patrón de interferencia que reconstruye la propagación de los pulsos en las antenas. Como ocurre en el dominio óptico, una multiplicación del número de pulsos se encuentra en distancias Talbot fraccionarias. Este patrón de interferencia se observa en regiones Talbot, y no únicamente en un plano (es decir, una distancia fija) debido al ancho de banda del pulso de entrada. Además, el fenómeno está localizado de forma espacial (a la distancia Talbot o la distancia Talbot fraccionaria) y de forma temporal (cuando el pulso radiado alcanza la distancia de observación) simultáneamente. Finalmente, y como una diferencia fundamental respecto al caso óptico, el escaneo completo del espacio de las CRLH LWAs

es aprovechado para obtener una distancia Talbot sintonizable de forma eléctrica, aprovechando la variación de la dirección de radiación en función de la frecuencia.

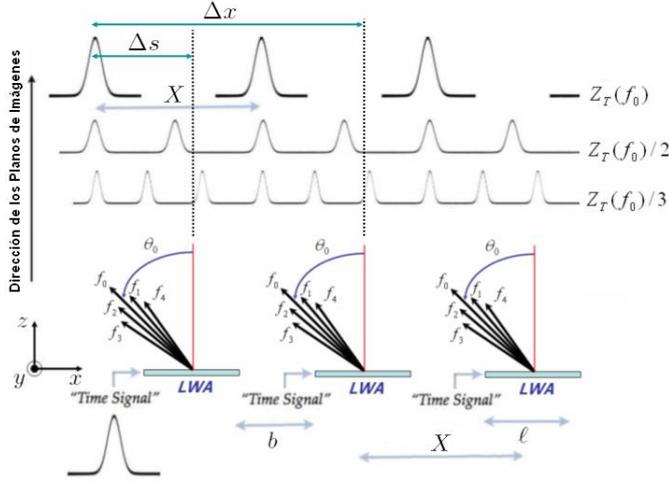


Fig. 1: Configuración de un array compuesto por un número infinito de antenas CRLH leaky-wave propuesta para la obtención del efecto Talbot espacio-temporal. Cada antena radia las diferentes componentes frecuenciales del pulso modulado usado como excitación a distintas regiones del espacio. Por simplicidad, solo se muestran las envolventes de los pulsos recibidos en el plano Talbot principal y dos planos fraccionarios.

El efecto Talbot espacio-temporal sintonizable es estudiado de forma analítica mediante un enfoque en el dominio transformado de Fourier [6] y es posteriormente validado empleando un método numérico basado en las funciones de Green temporales [7]. Posteriormente, se diseñó y fabricó un array de antenas CRLH LWA para demostrar experimentalmente y por primera vez en el dominio de las microondas la existencia de este fenómeno. Posibles aplicaciones de este efecto varían desde multiplexadores espaciales, a sistemas de alimentación inalámbricas de arrays de antenas, incluyendo sistemas quasi-ópticos.

## II. DERIVACIÓN DE LA DISTANCIA TALBOT ESPACIO-TEMPORAL

Para la derivación teórica de la distancia Talbot sintonizable, consideraremos un array de CRLH LWAs con un número infinito de elementos, separados una distancia  $b$  y con una longitud  $\ell$ . Todos los elementos son alimentados de forma simultánea con un pulso de entrada, como se ilustra en Fig. 1. Este pulso se puede definir como  $\Psi(t) = \Psi_0(t)e^{j\omega_0 t}$ , donde  $\Psi_0(t)$  es la envolvente temporal de variación lenta y  $\omega_0$  es la frecuencia de modulación. Posteriormente, para un tiempo en particular  $t = t'$ , se considera la distribución espacial del campo a lo largo de cada antena  $A_e(x, z = 0)$ . De esta forma, tomando la transformada de Fourier espacial de la distribución del campo a lo largo del array, se obtiene

$$\tilde{A}_a(k_x, z = 0) = \Delta k_x \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_e(k_x = p\Delta k_x) \delta(k_x - p\Delta k_x), \quad (3)$$

donde  $\Delta k_x = 2\pi/X$  es el número de onda en el dominio espacial y  $X = b + \ell$  es la separación total entre los distintos elementos.

El siguiente paso es caracterizar la función de transferencia de espacio libre, teniendo en cuenta el tipo de radiación particular de las CRLH LWAs en campo lejano. Este proceso es similar a la incidencia de una onda plana oblicua sobre una red de difracción [8]. Para ello, se propone emplear un eje auxiliar para las constantes de propagación, de forma que la antena siempre radie en broadside en el problema auxiliar. Los detalles matemáticos se pueden encontrar en [6]. Tras realizar algunas operaciones algebraicas, y centrándonos en el primer término de dispersión, que es el que caracteriza al efecto Talbot, la función de transferencia puede expresarse como

$$\tilde{H}(k_x, z) = e^{-j \left[ \frac{1}{c} \left( \frac{\omega_0 \psi^2(\omega_0)}{2 \cos^3 \theta_0} + v_g(\omega_0) \tan \theta_0 \psi(\omega_0) \right) k_x^2 \right] z} \quad (4)$$

donde  $z$  es la distancia de observación,  $v_g(\omega_0)$  es la velocidad de grupo en la CRLH LWA a la frecuencia de modulación,  $\theta_0$  es la dirección de radiación de la LWA para esa misma frecuencia y el término  $\psi$  es definido como

$$\psi = \frac{c}{\omega^2} [\omega - k_x(\omega)v_g(\omega)] \Big|_{\omega=\omega_0}. \quad (5)$$

Finalmente, el campo radiado a una distancia  $z$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} \tilde{A}_r(k_x, z) &= \tilde{A}_a(k_x, z = 0) \tilde{H}(k_x, z) \\ &= \Delta k_x \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_e(p\Delta k_x) \delta(k_x - p\Delta k_x) e^{jp^2\phi}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$\phi = \frac{1}{c} \left( \frac{\omega_0 \psi^2(\omega_0)}{2 \cos^3 \theta_0} + v_g(\omega_0) \tan \theta_0 \psi(\omega_0) \right) \Delta k_x^2 z. \quad (7)$$

Satisfaciendo la condición

$$p^2\phi = 2\pi q' = 2\pi q p^2, \quad (8)$$

donde  $q, q' \in \mathcal{N}$  ( $q'$  varía con  $p$ , pero  $q$  es constante), el factor de fase de la ecuación Eq. (6) se reduce a la unidad, de tal forma que  $\tilde{A}_r(k'_x, z) \propto \tilde{A}_a(k'_x, z = 0)$ . Así la distribución del campo en la distancia  $z$  es una replica exacta de la distribución del campo en las antenas ( $z = 0$ ). De esta forma, la distancia  $z$  es la distancia Talbot, que puede expresarse como

$$z_t = \frac{X^2 \omega_0^2 \cos^3 \theta_0}{\lambda_0 [(\omega_0 - k_x v_g)^2 + 2(\omega_0 - k_x v_g) k_x v_g \cos^2 \theta_0]}. \quad (9)$$

En este punto, es necesario comentar las diferencias de esta distancia Talbot espacio-temporal y sintonizable respecto a la distancia Talbot espacial. En primer lugar, obtenemos un control adicional sobre la distancia, gracias al empleo de la radiación de las LWA a cualquier dirección del espacio. Esto es una ventaja añadida respecto al caso equivalente en óptica, donde se necesitaba obtener una onda plana oblicua (generalmente de forma mecánica) para excitar la red de difracción. En nuestro caso, este efecto es obtenido de forma natural gracias a la radiación de las CRLH LWA. También es interesante observar que el empleo de un tipo de antena u otro cambia la forma en la que la distancia Talbot varía con la frecuencia. Sin embargo, en el caso de radiación broadside, se

puede demostrar que la Eq. 9 se reduce a la distancia Talbot espacial [Eq. 1]. Para cualquier otra dirección de radiación, la distancia Talbot varía según Eq. 9.

Finalmente, es interesante comentar que el proceso de interferencia obtenido no es ideal. Ello es consecuencia de las aberraciones que aparecen en la descripción de la función de transferencia del canal y que no se han incluido por razones de espacio. El efecto de las aberraciones es la limitación práctica del ángulo de radiación a unos  $\pm 25^\circ$ , para conseguir una reproducción fiel de los pulsos originales en la distancia Talbot.

### III. VALIDACIÓN NUMÉRICA Y DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL

Los resultados numéricos presentados en este apartado han sido obtenidos con la técnica numérica presentada en [7]. La antena CRLH LW empleada está formada por  $N = 16$  celdas, de longitud  $p = 1.56$  cm ( $\ell = Np$ ) con unos parámetros circuitales  $C_R = 4.5$  pF,  $C_L = 2.5$  pf,  $L_R = 4.5$  nH and  $L_L = 2.5$  nH. Inicialmente, los elementos del array de antenas son alimentados con un pulso Gaussiano modulado a la frecuencia de broadside ( $f_0 = 1.50$  GHz) y con un FWHN de 1.178 ns. La distancia Talbot obtenida en este caso, con una separación de  $b = 0.5$  m, es de  $z_T = 2.74$  m. En la Fig. 2 se presenta la magnitud del campo eléctrico radiado por un array de 40 antenas, a las distancias  $z_T$ ,  $z_T/2$  y  $z_T/3$ . Detalles de la radiación en las distancias  $z_T$  y  $z_T/3$  pueden ser observados en la Fig. 3.

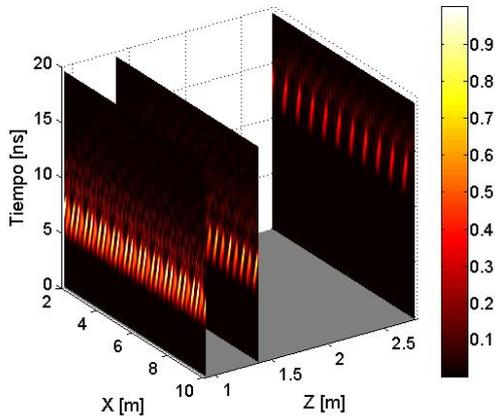


Fig. 2: Campo eléctrico normalizado (magnitud) radiado por el array de CRLH LWA mostrado en Fig. 1 (situado en  $z = 0$  a lo largo del eje- $x$ ), con una separación entre dos antenas consecutivas de  $b = 0.5$  m y excitado con un pulso modulado Gaussiano, en función de la posición  $x$  y el tiempo, en las distancias  $z = z_T = 2.74$  m,  $z = z_T/2 = 1.37$  m y  $z = z_T/3 = 0.91$  m.

Como se esperaba, se puede observar en las figuras la reconstrucción de los pulsos originales en la distancia Talbot, localizados en un instante temporal. Esta reconstrucción no es perfecta, debido especialmente al comportamiento dispersivo de orden superior que presenta la antenas CRLH LW. Además, se confirma la multiplicación del número de pulsos en distancias Talbot fraccionarias (2 y 3), tal y como se esperaba por los desarrollos teóricos.

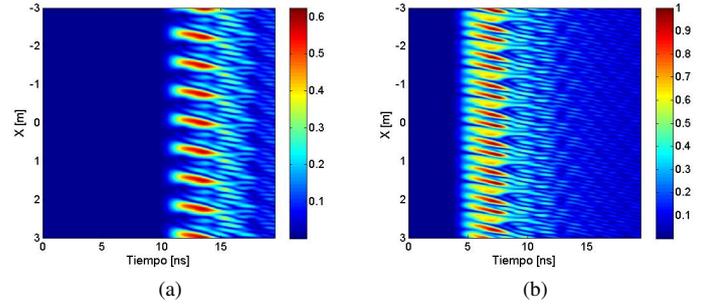


Fig. 3: Campo eléctrico normalizado (magnitud) radiado por un array de 20 antenas CRLH (situado en  $z = 0$  a lo largo del eje- $x$  y alimentado con un pulso Gaussiano modulado) en dos diferentes distancias de propagation (eje  $z$ ). a)  $z = z_T = 2.74$  m. b)  $z = z_T/3 = 0.91$  m.

Tras la validación numérica, se procedió a la demostración experimental del fenómeno. Para ello, se empleó un array de 7 antenas CRLH LW, con parámetros circuitales  $C_R = 1.29$  pF,  $C_L = 0.602$  pf,  $L_R = 3.0$  nH and  $L_L = 1.4$  nH. El prototipo fabricado puede apreciarse en la Fig. 4. El funcionamiento es el siguiente. Inicialmente, se emplea un generador arbitrario de funciones para obtener un pulso gaussiano en banda base. Posteriormente, el pulso es modulado mediante un mezclador (tomando una frecuencia de entrada de un oscilador local) y amplificado. El pulso es introducido en un divisor Wilkinson, que lo transmite a 7 cables idénticos. Es importante indicar que las longitudes de estos cables son críticas para obtener una adecuada sincronización en la radiación de los pulsos. Los cables alimentan a las antenas CRLH LW, que están separadas entre si una distancia de  $X = 22$  cm. Las antenas están sujetas a una superficie de madera, variable en altura, para poder cambiar de forma sencilla la distancia sobre la que realizar la medida. Finalmente, la radiación de las antenas es recibida por una antena receptora, que barre una línea de observación sobre el suelo. La antena está conectada con un osciloscopio digital de tiempo real, para poder obtener así la evolución de los pulsos en función del tiempo.

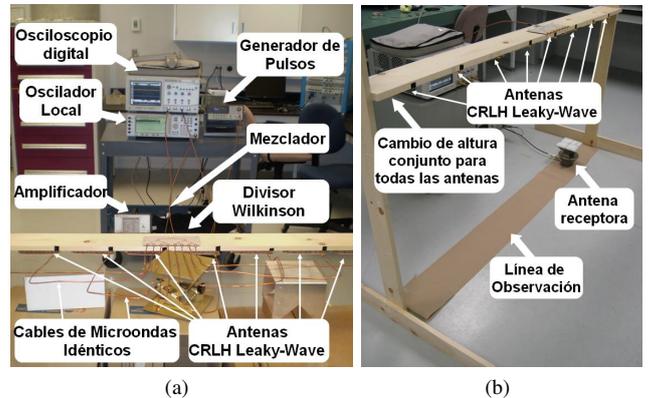
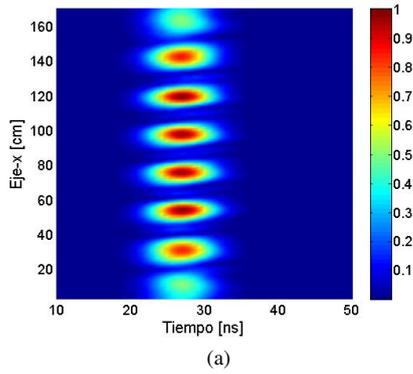
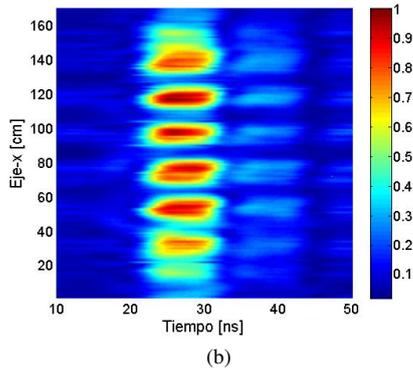


Fig. 4: Vista general del sistema y equipos empleados para reproducir el efecto Talbot espacio temporal. a) Generación, distribución y radiación de pulsos modulados. b) Radiación y recepción de pulsos modulados.



(a)



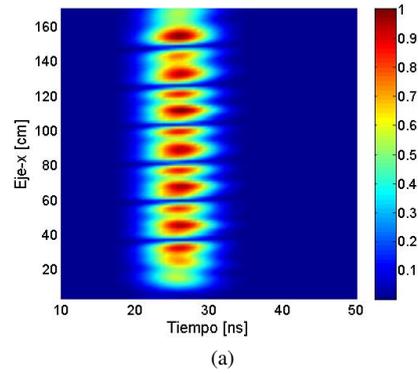
(b)

Fig. 5: Campo eléctrico normalizado (magnitud) radiado por un array de 7 antenas CRLH LWAs, alimentadas por un pulso Gaussiano con frecuencia de modulación  $f_0 = 3.745$  GHz, a la distancia Talbot de  $z_T = 0.5483$  m. a) Simulación numérica [7]. b) Medidas experimentales.

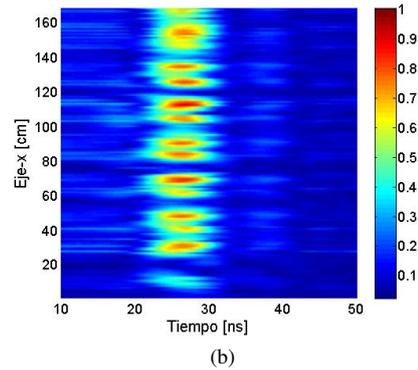
Las Figs. 5 y 6 muestran la radiación recibida en función del espacio a la distancia Talbot ( $z_T$ ) y la distancia Talbot fraccionaria ( $z_T/2$ ) para dos frecuencias de modulación diferentes. Como puede observarse, la concordancia de los resultados experimentales con las simulaciones numéricas es muy buena, especialmente considerando la rudimentariedad del prototipo empleado. Finalmente, es importante destacar que el fenómeno de la multiplicación de pulsos se ha verificado en la situación más complicada, empleando una radiación *forward*. Esto confirma la validez de la distancia Talbot sintonizable obtenida de forma teórica.

#### IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un novedoso efecto Talbot espacio-temporal y sintonizable, basado en antenas composite right/left-handed (CRLH) leaky-wave (LWA). El fenómeno está basado en la combinación del efecto Talbot espacial con la radiación de pulsos temporales por este tipo de antenas y se presenta, por primera vez, en el dominio de las microondas. Gracias a la radiación en todo el espacio (desde *backfire* hasta *endfire*) de las CRLH LWAs, se obtiene una distancia Talbot sintonizable con la frecuencia. Para obtener el fenómeno se emplea un array de CRLH LWAs, alimentadas de forma simultánea con un pulso modulado, obteniendo una reproducción de la distribución de los pulsos sobre las antenas en la distancia Talbot, y una multiplicación del número de pulsos en distancias Talbot fraccionarias. El novedoso efecto



(a)



(b)

Fig. 6: Campo eléctrico normalizado (magnitud) radiado por un array de 7 antenas CRLH LWAs, alimentadas por un pulso Gaussiano con frecuencia de modulación  $f_0 = 4.0$  GHz, a la distancia Talbot fraccionaria de  $z_T/2 = 0.2874$  m. a) Simulación numérica [7]. b) Medidas experimentales.

Talbot obtenido ha sido analizado de forma teórica, validado de forma numérica y demostrado de forma experimental.

#### V. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido cofinanciado por el Ministerio de Educación y Ciencia (Proyecto: TEC2007-67630-C03-02, Beca: FPU-AP2006-015).

#### REFERENCES

- [1] H. F. Talbot, *Philos. Mag.* **9**, 401 (1836).
- [2] J. Azaña and M. A. Muriel, "Temporal Self-Imaging Effects: Theory and Application for Multiplying Pulse Repetition Rates", *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron* **7**, 728 (2001).
- [3] C. Caloz and T. Itoh, "Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications", *New Jersey: Wiley-Interscience, 2005*.
- [4] A. Oliner and D. R. Jackson, "Leaky-wave antennas" in *Antenna Engineering Handbook*, 4 rd ed (McGraw-Hill, New York, 2007).
- [5] B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (Wiley-Interscience, 2007), 2nd ed.
- [6] J. S. Gómez-Díaz, S. Gupta, A. Alvarez-Melcon and C. Caloz, "Spatio-Temporal Talbot Phenomenon using Metamaterial Composite Right/Left-Handed Leaky-Wave Antennas", *Journal of Applied Physics*, **104**, 104901 (2008)
- [7] J. S. Gomez-Diaz, A. Alvarez-Melcon and C. Caloz, "Time-Domain Green's Function Technique for Highly-Dispersive Metamaterial Waveguide and Antenna Structures" in *IEEE Asia-Pacific Microwave Conference* (Hong-Kong, China, 2008).
- [8] M. Testorf, J. Jahns, N. A. Khilo and A. M. Goncharenko, "Talbot effect for oblique angle of light propagation", *Optics Comm.* **129**, 167 (1996).