

DISEÑO ÓPTIMO DE GEOMETRÍA Y DE PROPIEDADES DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

Santiago Torrano y Pascual Martí

Departamento de Ingeniería Mecánica y Energética
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad de Murcia

RESUMEN: En el presente trabajo se plantea el problema de diseño óptimo de geometría y de propiedades de estructuras de hormigón armado y se muestran unos ejemplos resueltos mediante algoritmos de Programación Matemática No Lineal.

Se han considerado dos tipos de elementos estructurales: vigas (de sección transversal rectangular y de sección transversal en T) y pilares (de sección transversal rectangular y de sección transversal circular). Como variables de geometría se utilizan los módulos de unos vectores que tienen su origen en un punto fijo y su extremo en un punto móvil, que define la posición del nudo de la estructura al que está asociado cada vector. Las variables de diseño de propiedades son las dimensiones de la sección transversal de hormigón y las áreas de las armaduras longitudinales y transversales. La función objetivo es el costo de la estructura. Las restricciones planteadas son: restricciones de resistencia a solicitaciones normales y a solicitaciones tangentes, restricciones de cuantía mínima de las armaduras longitudinales y de la armadura transversal y restricciones de desplazamiento.

El sistema de diseño óptimo de estructuras utilizado ha sido DISSENY.

1 INTRODUCCIÓN

El diseño de estructuras es un proceso iterativo en el que se busca, ensayando distintas soluciones, la estructura que cumpla con unos requerimientos de seguridad con el menor costo posible. La experiencia y la intuición del ingeniero son fundamentales para la obtención de un buen diseño, difícilmente el mejor. Cuando el problema de diseño de estructuras se convierte en encontrar el mejor diseño, se habla de Diseño Óptimo de Estructuras.

Dado el carácter iterativo del proceso se presenta la posibilidad de automatizarlo, desarrollando métodos que permitan encontrar los mejores diseños con el menor esfuerzo numérico por parte del ingeniero. Así, Martí (1990) define la optimización de sistemas estructurales como “el desarrollo y aplicación de técnicas de ordenador, interactivas o automáticas, para mejorar los diseños. Se pretende obtener los diseños de costo mínimo que cumplan todas las condiciones de diseño”.

En la literatura sobre la optimización estructural existen diversas investigaciones enfocadas al hormigón armado. Algunas de estas investigaciones se han dirigido a la optimización de secciones transversales (rectangulares, en T o circulares) de elementos de hormigón pretensado (Chou 1977; Friel 1974), otras a la optimización de estructuras, considerando un comportamiento elástico del hormigón (Yang 1982; Kanagasundaram y Karihaloo 1990) o considerando un comportamiento plástico (Cohn 1965; Cohn y MacRae 1984), etc. Algunos investigadores han optado por usar algoritmos de optimización basados en técnicas de Programación Matemática No Lineal (Haug y Arora 1979; Kanasagundaram y Karihaloo 1990; Kirsh 1981), y otros por algoritmos de optimización basados en Criterios de Optimalidad (Adamu et al. 1994; Chou 1977; Moharrami y Grierson 1993).

El problema de diseño óptimo de propiedades de elementos aislados o de estructuras, de hormigón armado, ha venido siendo abordado por diversos autores. Choi y Kwak (1989) desarrollaron un algoritmo sencillo para el diseño óptimo de elementos de hormigón armado a partir de una gran base de datos que contenía secciones cuya capacidad resistente era conocida. Horowitz (1989) desarrolló un algoritmo para el diseño óptimo de columnas sometidas a flexión en dos direcciones, basado en criterios de optimalidad. Moharrami y Grierson (1993) dieron

un paso más, introduciendo el problema de optimización de estructuras planas, aunque considerándolas formadas por elementos de sección transversal rectangular.

En la actualidad se está abordando el estudio de estructuras tridimensionales (Grierson y Fadaee 1995), y se continúa profundizando en el estudio de elementos estructurales, considerando la posibilidad de variación del armado a lo largo del elemento (Adamu y Karihaloo 1995).

En el presente artículo se trata el problema de diseño óptimo de geometría y de propiedades de estructuras de hormigón armado usando algoritmos de Programación Matemática No Lineal y se presentan estrategias para la reducción del número de restricciones.

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO DE GEOMETRÍA Y DE PROPIEDADES DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

2.1 Variables de diseño

Las variables de diseño de geometría utilizadas son los módulos de unos vectores que tienen su origen en un punto fijo y su extremo en un punto móvil, que define la posición del nudo de la estructura al que está asociado cada vector. El sentido del vector se mantiene fijo en todo el proceso de optimización.

Las variables de diseño de propiedades corresponden a la definición de la geometría de la sección transversal del elemento y al armado del mismo. Las variables de diseño de propiedades y de armado consideradas para vigas y para pilares son las mostradas en la figura 1. Tanto las vigas como los pilares pueden ser divididos en j tramos en los que se mantenga la dimensión de la sección transversal pero varíe el armado.

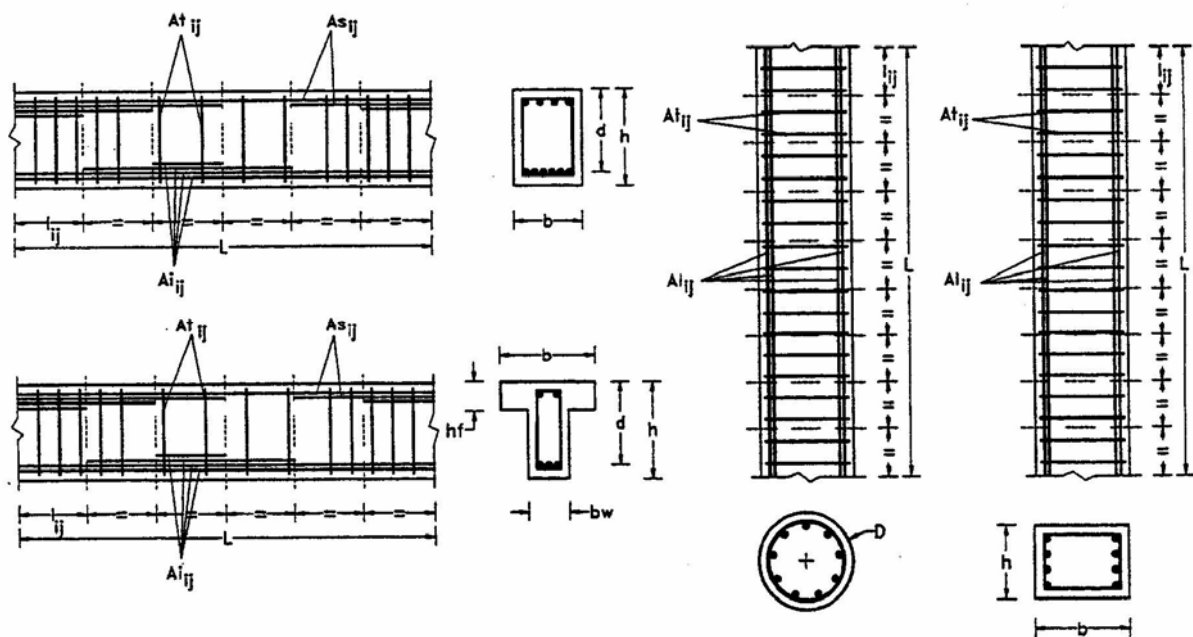


Figura 1 Variables de diseño de propiedades y de armado para los distintos elementos estructurales considerados

Las variables de diseño mostradas en la figura 1 tienen los siguientes significados: $A_{l_{ij}}$, área de la armadura longitudinal del tramo j del pilar i ; $A_{i_{ij}}$, área de la armadura longitudinal inferior del tramo j de la viga i ; $A_{s_{ij}}$, área de la armadura longitudinal superior del tramo j de la viga i ; $A_{t_{ij}}$, área por unidad de longitud de la armadura transversal del tramo j del elemento i ; b ancho de una sección rectangular; b_w , ancho del alma o nervio

de una sección en T; d , canto útil; h , canto total; h_p , espesor de la cabeza de una sección en T, y D , diámetro de una sección circular.

2.2 Función objetivo

La función objetivo es el costo total de la estructura. Éste se obtiene como suma del costo de cada uno de los elementos que la componen, y el costo de cada elemento se desglosa en costo del hormigón, costo del acero y costo del encofrado.

2.3 Restricciones

Se consideran tres tipos de restricciones:

1. resistencia a solicitaciones normales y a solicitaciones tangentes;
2. cuantía mínima de las armaduras longitudinales y de la armadura transversal, y
3. restricciones de desplazamiento.

2.3.1 Resistencia a esfuerzos de flexión simple

La restricción, normalizada, es

$$g_{fs} = 1 - \frac{M_d}{M_u} \geq 0 \quad (1)$$

siendo M_d el momento de cálculo y M_u el momento último.

2.3.2 Resistencia a esfuerzos de flexión compuesta o flexocompresión esviada

La restricción, normalizada, es

$$g_{sen} = 1 - \frac{N_d}{N_u} \geq 0 \quad (2)$$

siendo N_d el axil de cálculo y N_u el axil último.

2.3.3 Resistencia a esfuerzos cortantes

La restricción, normalizada, es

$$g_{set} = 1 - \frac{V_d}{V_u} \geq 0 \quad (3)$$

siendo V_d el esfuerzo cortante de cálculo y V_u el esfuerzo cortante último.

2.3.4 Cuantías geométricas mínimas de las armaduras longitudinales

La restricción, normalizada, es

$$g_{\omega_G} = 1 - \omega_G \frac{A_c}{A_2} \geq 0 \quad (4)$$

en donde ω_G es la cuantía geométrica mínima, en tanto por mil, referida a la sección total de hormigón, que es función del tipo de elemento estructural y del tipo de acero. A_c es la sección total de hormigón y A_2 es la armadura de tracción dada por el cálculo.

2.3.5 Armaduras longitudinales mínimas en flexión simple o compuesta

La restricción, normalizada, es

$$g_{\omega_{A_2}} = 1 - \frac{A_{2min}}{A_2} \geq 0 \quad (5)$$

siendo A_{2min} la armadura de tracción mínima necesaria.

2.3.6 Mínima armadura transversal necesaria

La restricción, normalizada, es

$$g_{At} = 1 - \frac{A_{tmin}}{A_t} \geq 0 \quad (6)$$

siendo A_t la armadura transversal de cálculo y A_{min} la armadura transversal mínima necesaria.

2.3.7 Restricciones de desplazamiento

La restricción, normalizada, es

$$g_d = 1 - \frac{|D|}{|D_{max}|} \geq 0 \quad (7)$$

siendo D_{max} el desplazamiento máximo permitido y D el desplazamiento real producido.

2.3.8 Evaluación de restricciones

Con el fin de reducir el tamaño del problema de diseño, se ha adoptado como estrategia obtener para cada elemento una única restricción. En el caso de las restricciones relacionadas con la resistencia a solicitaciones normales se tienen cuatro para cada elemento:

1. restricción de resistencia a solicitaciones normales en el extremo inicial del elemento;
2. restricción de resistencia a solicitaciones normales en el extremo final del elemento;
3. restricción de cuantía mínima de las armaduras longitudinales, debida a flexión, en el extremo inicial, y
4. restricción de cuantía mínima de las armaduras longitudinales, debida a flexión, en el extremo final.

En el caso de las restricciones de resistencia a solicitaciones tangentes, debidas a cortante, también se tienen cuatro para cada elemento:

1. restricción de resistencia a solicitaciones tangentes debidas a esfuerzos cortantes en el extremo inicial del elemento;
2. restricción de resistencia a solicitaciones tangentes debida a esfuerzos cortantes en el extremo final del elemento;
3. restricción de cuantía mínima de las armaduras transversales en el extremo inicial, y
4. restricción de cuantía mínima de las armaduras transversales en el extremo final.

Para tener una única restricción se han implementado dos posibilidades:

1. utilizar el valor de la peor restricción:

$$g = \text{minimo}(g_1, g_2, g_3, \dots, g_k) \quad (8)$$

2. utilizar la función de Kreisselmeier-Steinhauser:

$$g = KS_g = -\frac{1}{\rho} \text{Ln} \sum_k e^{-\rho g_k} \quad (9)$$

siendo ρ un parámetro que permite controlar la precisión que se desea en la aproximación a la función considerada y g_k el valor de la restricción k-ésima.

Utilizar el mínimo valor del conjunto de restricciones tiene la ventaja de que se usa exactamente el valor de la peor restricción. Tiene el inconveniente de que no se consideran el resto de restricciones, con los problemas de oscilaciones que ello puede provocar.

Utilizar la función de Kreisselmeier-Steinhauser tiene la ventaja de que se usa un valor (envolvente) representativo de todas las restricciones. Otra ventaja de esta función es que al agruparse un conjunto de restricciones en un único valor, se pueden abordar problemas mucho más complejos en cuanto al número de restricciones. Tiene el inconveniente de que el valor adoptado no se corresponde exactamente con el de la restricción más violada (aunque se puede acercarse tanto como queramos mediante el valor de ρ).

3 IMPLEMENTACIÓN EN EL SISTEMA DISSENY

En el presente trabajo se ha empleado el sistema de diseño óptimo de estructuras DISSENY (Martí y Company 1985). En esencia, el Sistema DISSENY consta de cuatro grandes módulos: uno de análisis, otro de optimización y dos interfaces. El módulo de optimización utiliza un algoritmo de programación matemática no lineal, basado en programación cuadrática. El análisis de la estructura se lleva a cabo mediante el programa de

Elemento Finitos ADEF (Martí y Company 1993). Las dos interfaces proporcionan a los módulos de optimización y análisis la información que necesitan, actualizada después de cada etapa del ciclo de diseño.

El alcance del presente trabajo supuso el desarrollo y la implementación de dos interfaces específicas para el tratamiento de las secciones de hormigón armado, INTOA_H e INTAO_H. En la interface INTOA_H se determinan los valores estáticos de las secciones de hormigón implementadas, necesarios para el análisis de la estructura. En la interface INTAO_H se evalúa los valores de la función objetivo y de las restricciones del problema, necesarios para el módulo de optimización.

4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

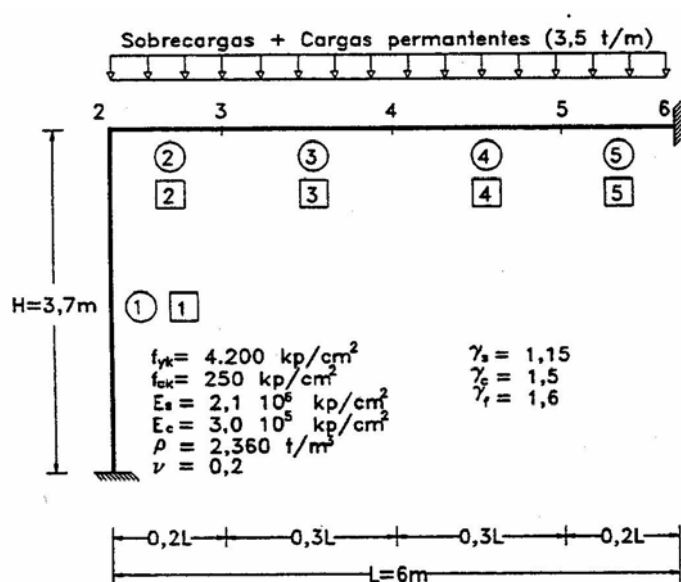
4.1 Estructura de dos barras

En este ejemplo se muestra una estructura formada por un pilar y una viga (figura 2).

Parámetros de diseño: En la figura 2 se indican los parámetros de los materiales y algunos de los parámetros geométricos. Se ha considerado un recubrimiento de 3 cm.

Los parámetros de costo son: 10.865 ptas/m³ para el hormigón, 4.087 ptas/m³ para el encofrado, 147 ptas/kg para las armaduras longitudinales y 158 ptas/kg para las armaduras transversales.

El estado de cargas es: 1,6 (sobrecarga + carga permanente) + peso propio.



Variables de diseño: En este ejemplo se han considerado 17 variables de diseño. El pilar es considerado como un único elemento y las variables de diseño son el canto, el ancho y las armaduras longitudinales y transversales. La viga ha sido dividida en cuatro tramos. Todos los tramos tienen el mismo canto y ancho (que coincide con el canto del pilar) y para cada uno de ellos se han definido tres variables: área de las armaduras longitudinales superiores, área de las armaduras longitudinales inferiores y área de las armaduras transversales. En la figura 2 se ha especificado la codificación utilizada para los nudos, elementos (círculos) y grupo de propiedades (cuadrados).

Función objetivo: la función objetivo es el costo de la estructura.

Restricciones: se han considerado restricciones de resistencia debidas a solicitaciones normales, restricciones de resistencia debidas a solicitaciones tangentes, restricciones de cuantías mínimas de las armaduras longitudinales debidas a solicitaciones de flexión simple o compuesta, y restricciones de cuantías mínimas de las armaduras transversales debidas a solicitaciones tangentes. Los valores mínimos han sido establecidos de acuerdo con lo especificado en la Instrucción EH-91.

En las tablas 1 y 2 se muestran los resultados de la optimización.

Tabla 1 Valores iniciales y óptimos de las variables de diseño

Variable	Inicial	Óptimo	Variable	Inicial	Óptimo	Variable	Inicial	Óptimo
h1 (m)	0,40000	0,30000	AS4 (m ²)	0,00019	0,00026	AT1 (m ² /m)	0,00042	0,00031
b (m)	0,35000	0,30000	AS5 (m ²)	0,00170	0,00209	AT2 (m ² /m)	"	0,00042
h2 (m)	0,50000	0,43000	AI2 (m ²)	0,00046	0,00061	AT3 (m ² /m)	"	0,00031
AL (m ²)	0,00067	0,00092	AI3 (m ²)	0,00077	0,00090	AT4 (m ² /m)	"	0,00034
AS2 (m ²)	0,00044	0,00046	AI4 (m ²)	"	0,00089	AT5 (m ² /m)	0,00056	0,00083
AS3 (m ²)	1,0e-006	1,0e-006	AI5 (m ²)	1,0e-006	1,0e-006			

Tabla 2 Función objetivo, iteraciones y restricción más violada

Función objetivo (ptas)		Iteraciones	R.M.V.
Inicial	Final		
86.800	74.460	15	-0,03948

4.2 Arco

En este ejemplo se considera un arco (figura 3) modelizado mediante doce elementos viga de hormigón armado, de sección transversal rectangular. El arco está sometido únicamente a peso propio y está empotrado. En la figura 3 se muestra la codificación utilizada en la estructura para los nudos, elementos (círculos) y grupo de propiedades (cuadrados).

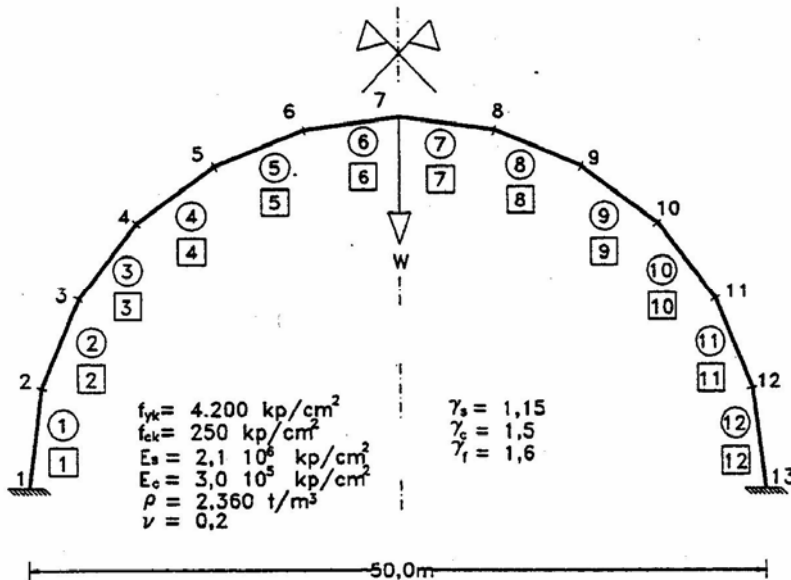


Figura 3 Arco. Parámetros y codificación

diseño son el canto, la armadura superior y la armadura inferior. Los valores de estas variables son comunes a todos los elementos.

- Caso 2: Con 18 variables de diseño. Las variables de diseño son el canto, la armadura superior y la armadura inferior de cada uno de los elementos.
- Caso 3: Con 9 variables de diseño. Las variables de diseño son el canto, la armadura superior, la armadura inferior y las distancias de los puntos 2,3,4,5,6 y 7 al centro de la base del arco.

Los diseños iniciales para los casos 1 y 2 se han obtenido mediante dimensionado del arco con canto constante igual a 60 cm. El diseño inicial del caso 3 ha sido el diseño óptimo del caso 1.

Función objetivo: la función objetivo es el costo de la estructura.

Parámetros de diseño: En la figura 3 se indican los parámetros de los materiales y algunos de los parámetros geométricos. Se ha considerado un ancho de 1 m y un recubrimiento de 3 cm. Se consideran los mismos parámetros de costo que en el caso anterior.

El estado de cargas es: 1,6 peso propio.

Variables de diseño: La simetría de la estructura ha permitido la reducción del número de variables.

Se han considerado 3 casos:

- Caso 1: Con 3 variables de diseño. Las variables de

Restricciones: se han considerado restricciones de resistencia debidas a solicitaciones normales y restricciones de cuantía mínima de las armaduras longitudinales debidas a solicitaciones de flexión simple o compuesta.

Las tablas 3, 4 muestran los resultados de la optimización.

Tabla 3 Valores iniciales y óptimos de las variables de diseño

Variab.	Inicial	Caso 1	Óptimo	Caso 2	Caso 3	Variab.	Inicial	Caso 1	Óptimo	Caso 2	Caso 3	Variab.	Inicial	Caso 1	Óptimo	Caso 2	Caso 3
h1 (m)	0,6000	0,5000	0,4310	0,1000		AS3 (m ²)	0,0053	“	0,0008	“		AI5 (m ²)	0,0121	“	0,0003	“	
h2 (m)	0,6000	“	0,1982	“		AS4 (m ²)	0,0053	“	0,0008	“		AI6 (m ²)	0,0121	“	0,0002	“	
h3 (m)	0,6000	“	0,2512	“		AS5 (m ²)	0,0053	“	0,0007	“		R1 (m)	25,000	25,000	25,000	0,2162	
h4 (m)	0,6000	“	0,1426	“		AS6 (m ²)	0,0053	“	0,0007	“		R2 (m)	25,000	“	“	0,1946	
h5 (m)	0,6000	“	0,1000	“		AI1 (m ²)	0,0121	0,0094	0,0094	0,0002		R3 (m)	25,000	“	“	0,1809	
h6 (m)	0,6000	“	0,1000	“		AI2 (m ²)	0,0121	“	0,0004	“		R4 (m)	25,000	“	“	0,1741	
AS1 (m ²)	0,0053	0,0045	0,0008	0,0002		AI3 (m ²)	0,0121	“	0,0001	“		R5 (m)	25,000	“	“	0,1700	
AS2 (m ²)	0,0053	“	0,0010	“		AI4 (m ²)	0,0121	“	0,0003	“		R6(m)	25,000	“	“	0,1700	

Tabla 4 Función objetivo, iteraciones y restricción más violada

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Función objetivo inicial (ptas)	2.914.627		1.019.939
Función objetivo final (ptas)	2.475.016	1.019.939	634.343
Iteraciones	3	36	39

La figura 4 muestra los cantos y la forma óptima (caso 3), así como los diagramas de momentos flectores de los diseños óptimos.

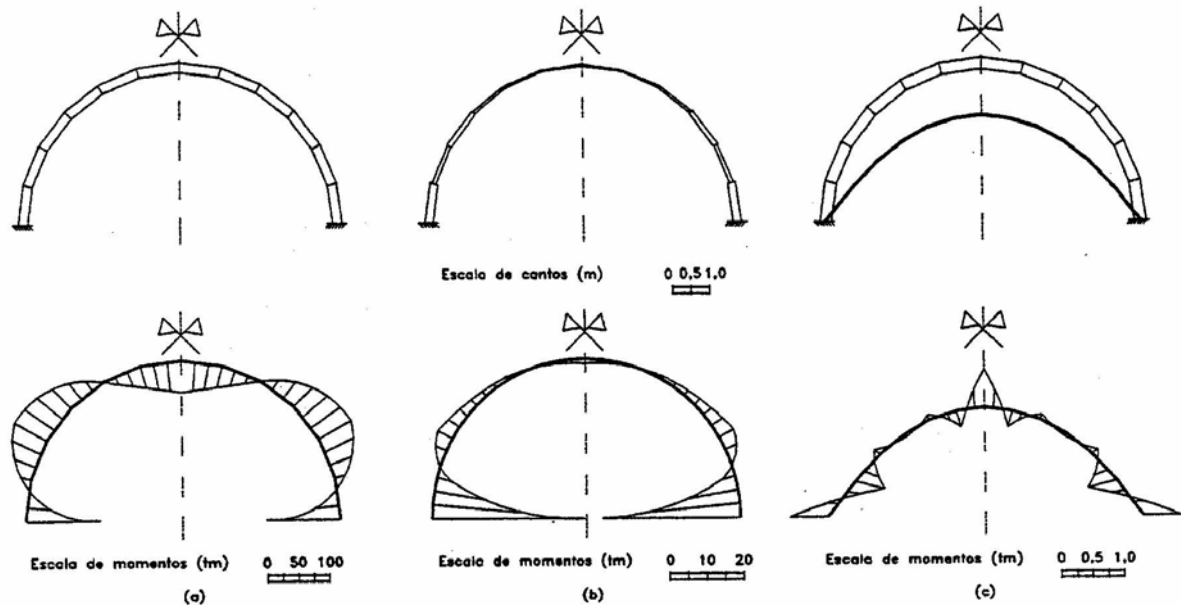


Figura 4 Cantos y forma óptimos y diagramas de momentos flectores de los diseños óptimos. a) Caso 1. b) Caso 2. c) Caso 3

5 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Considerando como variables de diseño las dimensiones de las secciones transversales de los elementos y las áreas de las armaduras longitudinales y transversales, y siendo éstas comunes a todos los elementos del mismo tipo, se consigue una reducción de la función objetivo del orden del 14%.

Considerando las mismas variables de diseño para cada uno de los elementos, se consiguen unas reducciones del orden del 65%, a cambio aumenta considerablemente el número de iteraciones.

Al considerar como variables de diseño las secciones transversales de los elementos y las armaduras longitudinales y transversales (considerando éstas comunes a todos los elementos del mismo tipo) y variables de diseño de geometría, se consigue una reducción de la función objetivo del orden del 78% respecto al diseño óptimo del caso 1.

El uso de variables de geometría provoca una readaptación de la forma de la estructura de forma que se produce una redistribución de esfuerzos para conseguir una óptima utilización de las propiedades de los materiales. Así, en el ejemplo 2, se observa como el empleo de variables de geometría produce una disminución importantísima de los momentos actuantes sobre los elementos, tendiendo a trabajar el hormigón fundamentalmente a compresión.

6 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha estudiado el problema de diseño óptimo de propiedades y de geometría de estructuras de hormigón armado. Se han detallado las variables de diseño, la función objetivo y las restricciones impuestas al diseño.

Se han resuelto varios ejemplos mediante el sistema de diseño óptimo DISSENY, basado en algoritmos de Programación Matemática No lineal.

Con el uso conjunto de variables de geometría y de variables de propiedades, se consiguen unos diseños óptimos considerablemente más baratos que usando únicamente variables de propiedades.

7 REFERENCIAS

- ADAMU, A. et al. (1994), Optimal design of reinforced concrete beam using continuum-type optimality criteria, *Struct. Optim.*, 7, 91-102.
- CHOI, C., KWAK, H. (1989), Optimum RC member design with predetermined discrete sections, *Struct. Design. Publ by ASCE*, 566-575.
- CHON, M.Z. (1965), Optimum limit design for reinforced concrete continuous beams, *Proceedings of Institution for Civil Engineers*. London, 30, 675-707.
- CHON, M.Z., MACRAE, A.J. (1984), Optimization of structural concrete beams, *J. Struct. Engng., ASCE*. 110, (7), 1573-1588.
- CHOU, T. (1977), Optimum reinforced concrete T - beam sections, *J. Struct. Div., ASCE*, 103, (8), 1605-1617.
- FRIEL, L.L. (1974), Optimal singly reinforced concrete sections, *ACI J., Proc.*, 71, (11), 556-558.
- HAUG, E.J., ARORA, J.S. (1979), *Applied optimal design*, John Wiley & Sons.
- HOROWITZ, B. (1989), Design of columns subjected to biaxial bending, *ACI Struct. Journal*, 86, (6), Nov-dec, 717-722.
- KANAGASUNDARAM, S , KARIHALOO, B. L. (1990), Minimum cost design of reinforced concrete structures. *Struct. Optim.*, 2, (3), 173-184.
- KIRSH, U. (1981), *Optimum structural design*, McGraw Hill.
- MARTÍ, P., COMPANY, P.P., SANCHIS, M. (1985), DISSENY: un sistema interactivo para el diseño de estructuras basado en técnicas de optimización, *Anales de Ingeniería Mecánica*, nº3, (1).
- MARTÍ, P.; COMPANY, P.P. (1993), *Análisis interactivo de estructuras por elementos finitos*. Murcia: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Murcia.
- MARTÍ, P. (1990), *Optimización estructural*. E.T.S.I.I., Universidad Politécnica de Valencia.

- MOHARRAMI, H., GRIERSON, D. (1993), Computer-automated design of reinforced concrete frameworks, *J. Struct. Engng.*, 119, 7, 2036-2058.
- MOPU, EH-91. (1991), *Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado.*
- TORRANO, S. (1994), *Diseño, implementación y prueba de un preprocesador y de un postprocesador para el diseño óptimo de estructuras tridimensionales de hormigón armado*, Proyecto final de carrera, E.P.S., Cartagena.
- YANG, M. (1982), *Optimization of reinforced concrete structures*. Tesis doctoral. University of Illinois at Urbana-Champaign.