Sobre la entropía topológica secuencial de funciones continuas del intervalo.

F. Balibrea Gallego[1] J. S. Cánovas Peña[2] V. Jiménez López[1]

Resumen

En este trabajo establecemos una completa caracterización de las funciones débilmente unimodales desde el punto de vista de la entropía topológica secuencial. Además, utilizamos dicha clasificación para construir funciones del intervalo para las cuales algunas fórmulas satisfechas por la entropía topológica no lo son por la entropía topológica secuencial.

Introducción

Es bien conocido que, dada $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua, se define un *sistema dinámico discreto* como el par $([0,1], f)$. Para cada punto $x \in [0,1]$ se define la *órbita* de dicho punto como $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$. Estos sistemas dinámicos son muy utilizados para modelizar el comportamiento de algunas especies biológicas que viven en un hábitat determinado. En este caso, x es una cierta densidad de población inicial y $f^i(x)$ es la densidad de población después de transcurridas i unidades de tiempo. Un ejemplo bien conocido es el de la familia logística $f_a(x) = ax(1-x)$, donde $a \in [0,4]$ es un parámetro que depende de las condiciones específicas del modelo (ver por ejemplo [7]).

El objeto principal de estudio de los sistemas dinámicos discretos es el comportamiento de todas las posibles órbitas del sistema. Aunque lo deseable sería que todas las órbitas describieran un comportamiento parecido, en realidad los comportamientos de dos órbitas particulares pueden ser totalmente dispares, teniéndose entonces la siguiente definición de caos: una función $f : [0,1] \to [0,1]$ se dice *caótica* si y sólo si existen dos puntos $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, de manera que se satisfacen simultáneamente las condiciones (ver [12]):

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &= 0, \\ \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &> 0. \end{aligned}$$

Como puede fácilmente intuirse es de vital importancia dentro de la teoría de los sistemas dinámicos discretos el poder determinar si un sistema dinámico dado es o no caótico.

Esta noción de caos está estrechamente relacionada con la entropía topológica secuencial de dicha función, que a continuación introducimos (ver [9]). Sea $A = (a_i)_{i=1}^{\infty}$

una sucesión creciente de números naturales. Sea $\varepsilon > 0$. Un conjunto $E \subset [0,1]$ se dice (A,n,ε,f)–separado si para todo par de puntos distintos $x, y \in E$, existe un $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ de manera que $|f^{a_i}(x) - f^{a_i}(y)| > \varepsilon$. Denotemos por $s_n(A,\varepsilon,f)$ el cardinal de un conjunto (A,n,ε,f)–separado maximal. Se define la *entropía topológica secuencial* de f con respecto a la sucesión A como

$$s(A,\varepsilon,Y,f) := \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(A,\varepsilon,Y,f).$$

Cuando $A = (i)_{i=1}^{\infty}$ se tiene que $h_A(f) = h(f)$ coincide con la entropía topológica clásica (ver [1]). Si denotamos por $\mathcal{C}$ el conjunto de las sucesiones crecientes de números naturales, se define

$$h_\infty(f) := \sup_{A\in\mathcal{C}} h_A(f).$$

Con la notación anterior se verifica el siguiente teorema, que establece una caracterización del caos en términos de la entropía topológica secuencial (ver [8]).

Teorema 1 *f es caótica si y sólo si $h_\infty(f) > 0$.*

La caracterización establecida en el Teorema 1 no es completa en el siguiente sentido: no se establece ninguna diferencia aparente entre dos tipos de funciones caóticas esencialmente diferentes, las de tipo 2^∞ y las de tipo mayor que 2^∞. Recordemos brevemente que entendemos por el tipo de una función. Un punto $x \in [0,1]$ se dice *periódico* si existe un número natural n para el cual $f^n(x) = x$. El menor entero positivo satisfaciendo dicha condición se denomina *periodo* de x. f se dice de *tipo* 2^∞ si tiene únicamente puntos periódicos de periodos 2^i para todo $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. f se dice de *tipo mayor que* 2^∞ si tiene algún punto periódico de período $2^i(2n+1)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

En este trabajo consideramos un tipo especial de aplicaciones continuas del intervalo llamadas *débilmente unimodales.*

Definición 2 *$f : [0,1] \to [0,1]$ se dice* débilmente unimodal *si es no constante, $f(0) = f(1)$ y existe $c \in (0,1)$ de forma que $f|_{[0,c]}$ es creciente y $f|_{[c,1]}$ es decreciente. Denotamos por $\mathcal{U}([0,1])$ el conjunto de funciones débilmente unimodales y por $\mathcal{W}([0,1])$ el conjunto de funciones débilmente unimodales de tipo 2^∞.*

El propósito de este trabajo es clasificar completamente las funciones débilmente unimodales desde el punto de vista de la entropía topológica secuencial y obtener fórmulas precisas para el cálculo de ésta en el caso de funciones de tipo 2^∞. Aprovecharemos los cálculos obtenidos para demostrar que ciertas fórmulas válidas para la entropía topológica no se satisfacen en caso de la entropía topológica secuencial. Remitimos al lector a las referencias [2], [3], [4] y [6] para leer las demostraciones de los resultados de las siguientes secciones.

Cálculo de la entropía topológica secuencial

La principal herramienta para el cálculo explícito de la entropía topológica secuencial de funciones débilmente unimodales de tipo 2^∞ es la dinámica simbólica introducida por V. Jiménez López en [11], que a continuación explicamos.

Sean

$$\mathbb{Z}^\infty = \{(\alpha_i)_{i=1}^\infty : \alpha_i \in \mathbb{Z}\}$$

y

$$\mathbb{Z}^n = \{(\alpha_i)_{i=1}^n : \alpha_i \in \mathbb{Z}\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos $f \in \mathcal{W}([0,1])$ arbitraria. Dividimos el intervalo $[0,1]$ en dos conjuntos disjuntos $A(f)$ y $K(f)$ (o A y K), donde A es el conjunto de los puntos asintóticamente periódicos ($a \in A$ sii existe un punto periódico p de forma que $\limsup_{n\to\infty} |f^n(a) - f^n(p)| = 0$), y $K = [0,1] \setminus A$. El conjunto K puede dividirse en intervalos compactos (posiblemente degenerados) K_α, con $\alpha \in \mathbb{Z}^\infty$, de manera que todos los puntos $x \in K_\alpha$ tienen el mismo comportamiento dinámico. En particular se satisfacen las siguientes propiedades:

(P1) El intervalo $K_{\mathbf{0}}$ ($\mathbf{0} = (0,0,...,0,...)$) contiene todos los máximos absolutos de f.

(P2) Definimos en $\mathbb{Z}^\infty$ el siguiente orden total: si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^\infty$, $\alpha \neq \beta$ y k es el primer entero tal que $\alpha_k \neq \beta_k$ entonces $\alpha < \beta$ si Card $\{1 \leq i < k : \alpha_i \leq 0\}$ es par y $\alpha_k < \beta_k$ o Card $\{1 \leq i < k : \alpha_i \leq 0\}$ es impar y $\beta_k < \alpha_k$. Así $\alpha < \beta$ sii $K_\alpha < K_\beta$ (esto es, $x < y$ para todo $x \in K_\alpha$, $y \in K_\beta$).

(P3) Sean $\alpha \in \mathbb{Z}^\infty$, $\alpha \neq \mathbf{0}$, y k el primer entero tal que $\alpha_k \neq 0$. Definimos $\beta \in \mathbb{Z}^\infty$ por $\beta_i = 1$ para $1 \leq i \leq k-1$, $\beta_k = 1 - |\alpha_k|$ y $\beta_i = \alpha_i$ para $i > k$ Entonces $f(K_\alpha) = K_\beta$ y $f(K_{\mathbf{0}}) \subset K_{\mathbf{1}}$ ($\mathbf{1} = (1,1,...,1,...)$).

(P4) Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^\infty$, definimos $\alpha|_n \in \mathbb{Z}^n$ como $\alpha|_n = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Sea $K_{\alpha|_n}(f)$ (o $K_{\alpha|_n}$) el menor intervalo conteniendo los intervalos K_β, $\beta \in \mathbb{Z}^\infty$, tales que $\alpha|_n = \beta|_n$. Entonces $K_\alpha = \bigcap_{n=1}^\infty K_{\alpha|_n}$.

Denotemos por $\mathcal{A} = \{\alpha \in \{0,1\}^\infty : K_\alpha \text{ es no degenerado}\}$. El conjunto $\mathcal{A}$ no puede ser arbitrario. De hecho, debe ser numerable y satisfacer la siguiente condición (ver [11]): dados $\alpha, \beta \in \{0,1\}^\infty$ decimos que $\alpha \preceq \beta$ si existe un entero positivo k tal que $f^k(K_\alpha) = K_\beta$ y $f^i(K_\alpha) \neq K_{\mathbf{0}}$ para $1 \leq i < k$. Se verifica entonces que si $\beta \in \mathcal{A}$ y $\alpha \preceq \beta$, entonces $\alpha \in \mathcal{A}$. Decimos que f tiene *esencialmente un único intervalo no degenerado* K_α si todo intervalo no degenerado de f, K_β, satisface que $\beta \preceq \alpha$ o $\alpha \preceq \beta$.

Dada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea $Z^\alpha = (z_i^\alpha)_{i=1}^\infty$ una sucesión de enteros positivos de manera que $\alpha_i = 0$ si y sólo si $i = z_j^\alpha$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Podemos enunciar entonces el siguiente resultado:

Teorema 3 *Sea $f \in \mathcal{W}([0,1])$ y sea $\alpha \in \mathcal{A}$. Consideremos la sucesión $2^{Z^\alpha} = (2^{z_i^\alpha})_{i=1}^\infty$. Entonces*

$$h_{2^{Z^\alpha}}(f) = \log 2.$$

Demostración. Ver [4]. ■

Fijemos ahora la sucesión de enteros $A = (2^i)_{i=1}^{\infty}$ y sea $\sigma : \mathbb{Z}^{\infty} \to \mathbb{Z}^{\infty}$ la aplicación *shift*, dada por $\sigma((a_i)_{i=1}^{\infty}) = (a_{i+1})_{i=1}^{\infty}$ para todo $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\infty}$. Sea $\mathcal{S}_n(\alpha)$ el conjunto de sucesiones de naturales de longitud $n \in \mathbb{N}$ satisfaciendo las siguientes condiciones: si $(m_i)_{i=1}^{n} \in \mathcal{S}_n(\alpha)$, entonces

(a1) $m_i \leq m_{i+1}$ para $i = 1, 2, ..., n-1$.

(a2) $m_i \leq i$ para $i = 1, 2, ..., n$.

(a3) Para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $m_i = z_j^{\alpha}$ para algún entero positivo j.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$s(k, \alpha) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \operatorname{Card}(\mathcal{S}_n(\sigma^k(\alpha))).$$

Se puede comprobar que $s(k, \alpha) \geq s(l, \alpha)$ si $k \leq l$. Se define entonces

$$s(\alpha) := \lim_{k \to \infty} s(k, \alpha).$$

Se verifica entonces el siguiente resultado, que permite calcular la entropía topológica secuencial de una función $f \in \mathcal{W}([0,1])$.

Teorema 4 *En la condiciones anteriores*

$$h_A(f) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} s(\alpha).$$

Demostración. Ver [4]. ■

Aunque en general es difícil obtener el número proporcionado por el Teorema 4, éste puede calcularse explícitamente en los siguientes casos particulares.

Teorema 5 *Sea $f \in \mathcal{W}([0,1])$ de manera que tiene esencialmente un único intervalo no degenerado K_α, $\alpha \in \{0,1\}^{\infty}$, tal que existe $p \in \mathbb{N}$ con $\alpha|_p = \sigma^{np-1}(\alpha)|_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $q = Card\{1 \leq i \leq p : \alpha_i = 0\}$ y $r = q/p$. Entonces*

$$h_A(f) = \begin{cases} \log 2 & si\ r > 1/2. \\ \log\left((1-r)^{r-1} r^{-r}\right) & si\ r \leq 1/2\ y\ q \neq 0. \\ 0 & si\ q = 0. \end{cases}$$

Demostración. Ver [4]. ■

Corolario 6 *Sea $f \in \mathcal{W}([0,1])$ de manera que tiene esencialmente un único intervalo no degenerado K_α, $\alpha \in \{0,1\}^{\infty}$, tal que Z^{α} es una sucesión aritmética de diferencia $d \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$h_A(f) = \begin{cases} d^{-1} \log\left(d^d (d-1)^{1-d}\right) & si\ d \neq 1. \\ \log 2 & si\ d = 1. \end{cases}$$

Demostración. Se sigue del Teorema 5. ■

Consideremos para cada $\alpha \in \{0,1\}^\infty$ la sucesión $Z_n(\alpha) = \text{Card } \{i \in \{1,2,\dots,n\} : \alpha_i = 0\}$.

Teorema 7 *Sea $f \in \mathcal{W}([0,1])$ de manera que tiene esencialmente un único intervalo no degenerado K_α, $\alpha \in \{0,1\}^\infty$, tal que Z^α es una sucesión geométrica de razón $r > 1$. Entonces*

$$h_A(f) = 0.$$

Demostración. Ver [4]. ■

En el caso de no poder calcular explícitamente el límite del Teorema 4, podemos obtener cotas superiores e inferiores de la entropía topológica secuencial de la manera siguiente: para cada $\alpha \in \{0,1\}^\infty$ sea $k_n(\alpha) = \min\{Z_n(\alpha), [n/2]\}$, donde $[x]$ denota la parte entera de $x \in \mathbb{R}$. Sean

$$r_s(\alpha) := \limsup_{n\to\infty} \frac{k_n(\alpha)}{n} \quad \text{y} \quad r_i(\alpha) := \liminf_{n\to\infty} \frac{k_n(\alpha)}{n}.$$

Se verifica entonces el siguiente resultado.

Teorema 8 *Sea $f \in \mathcal{W}([0,1])$ de manera que tiene un único intervalo no degenerado K_α, $\alpha \in \{0,1\}^\infty$. Entonces*

$$r_i(\alpha)\log 2 \le h_A(f) \le \log\left((1-r_i(\alpha))^{r_s(\alpha)-1} r_i(\alpha)^{-r_s(\alpha)}\right).$$

Demostración. Ver [4]. ■

Las cotas superiores e inferiores del Teorema 8 son las mejores posibles en el siguiente sentido: existen funciones débilmente unimodales $f_1, f_2 \in \mathcal{W}([0,1])$ teniendo únicamente intervalos no degenerados K_{α_1} y K_{α_2} de manera que

$$h_A(f_1) = r_i(\alpha)\log 2$$

y

$$h_A(f_2) = \log\left((1-r_i(\alpha))^{r_s(\alpha)-1} r_i(\alpha)^{-r_s(\alpha)}\right).$$

Clasificación de funciones débilmente unimodales

Podemos clasificar las funciones débilmente unimodales desde el punto de vista de la entropía topológica secuencial como muestra el siguiente teorema.

Teorema 9 *Sea $f \in \mathcal{W}([0,1])$. Entonces:*

(a) f es no caótica si y sólo si $h_\infty(f) = 0$.

(b) f es caótica de tipo 2^∞ si y sólo si $h_\infty(f) = \log 2$.

(c) *f es caótica de tipo mayor que 2^∞ si y sólo si $h_\infty(f) = \infty$.*

Demostración. Ver [4]. ■

Como puede apreciarse, la caracterización del Teorema 9 es más completa que la del Teorema 1. Además, el apartado (b) del mismo establece un nexo de unión en términos de entropía topológica secuencial entre todas las funciones caóticas de tipo 2^∞. En [8] se conjeturó que este nexo de unión tenía que venir dado por una sucesión universal A, en particular $(2^i)_{i=1}^\infty$, de manera que toda función caótica de tipo 2^∞ satisfaría que $h_A(f) > 0$ (para funciones de tipo mayor que 2^∞ se tiene que $h(f) > 0$). Sin embargo, se demostró en [10] el siguiente resultado:

Teorema 10 *Para toda sucesión creciente de números naturales A existe una función caótica f_A de manera que $h_A(f_A) = 0$.*

El contraejemplo del Teorema 10 estaba construido con funciones que tienen un número infinito de trozos monótonos. El Teorema 7 demuestra que la conjetura de [8] falla incluso para funciones con un número finito de trozos de monotonicidad.

Aunque para funciones débilmente unimodales se ha encontrado este nexo de unión, no está claro que ocurre cuando se consideran funciones continuas arbitrarias. En este sentido, conjeturamos el siguiente resultado:

Conjetura 1 *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua, caótica y de tipo 2^∞. Entonces*

$$h_\infty(f) = \log 2.$$

Algunos contraejemplos.

En esta sección vamos de poner de manifiesto diferencias significativas entre la entropía topológica y la entropía topológica secuencial. Recordemos primero algunas definiciones necesarias. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Un punto $x \in [0,1]$ se dice *nonwandering* si para todo entorno U de x existe un entero k tal que $f^k(U) \cap U \neq \emptyset$. Se define el conjunto *nonwandering*, $\Omega(f)$ como el conjunto de todos los puntos nonwandering de f. Dado $x \in [0,1]$ definimos el conjunto *omega límite de x*, $\omega(x, f)$ como el conjunto de los puntos límite de $\{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$. Finalmente, sea $\omega(f) = \bigcup_{x\in[0,1]} \omega(x, f)$. Para la entropía topológica clásica se verifica el siguiente resultado (ver [5]).

Teorema 11 *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ continua. Entonces*

(a) $h(f^k) = kh(f)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

(b) $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$.

(c) $h(f) = h(f|_{\omega(f)})$.

(d) $h(f) = \sup_{x\in[0,1]} h(f|_{\omega(x,f)})$.

Sin embargo para la entropía topológica secuencial ninguna de las fórmulas del Teorema 11 son válidas en general. En particular, consideremos una función $f \in \mathcal{W}(I)$ de manera que tiene esencialmente un único intervalo no degenerado K_0. Entonces para $A = (2^i)_{i=1}^{\infty}$ se verifica por el Teorema 3 que $h_A(f) = \log 2$. Puede verse en [2] que $h_A(f^2) = h_A(f) = \log 2$, con lo que la fórmula (a) no es válida en este contexto. Por otra parte, puede verse en [6] que $h_A(f|_{\Omega(f)}) = 0$. Así, considerando la sucesión A se verifica que

$$\log 2 = h_A(f) > h_A(f|_{\Omega(f)}) = 0.$$

Finalmente, de las inclusiones $\omega(x, f) \subset \omega(f) \subset \Omega(f)$, se deduce análogamente que las fórmulas (c) y (d) son también falsas.

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente financiado por los proyectos PB/2/FS/97 (Fundación Séneca, Comunidad Autónoma de Murcia) y D.G.I.C.Y.T. PB95–1004.

Referencias

[1] R. L. Adler, A. G. Konheim and M. H. McAndrew, *Topological entropy,* Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309–319.

[2] F. Balibrea, J. S. Cánovas Peña and V. Jiménez López, *Some results on entropy and sequence entropy,* Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. (to appear)

[3] F. Balibrea, J. S. Cánovas Peña and V. Jiménez López, *Commutativity and non-commutativity of the topological sequence entropy,* Ann. Inst. Fourier (to appear)

[4] F. Balibrea, J. S. Cánovas and V. Jiménez López, *Topological sequence entropy of weakly unimodal maps,* preprint (1999).

[5] A. Blokh, *The spectral descomposition for one-dimensional maps,* Dynam. report. Expositions Dynam. Systems (N. S.), 4, Springer, Berlin 1995.

[6] J. S. Cánovas, *Topological sequence entropy on the nonwandering set can be less than on the whole space: an interval counterexample,* preprint (1999).

[7] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems,* Addison–Wesley Studies in Nonlinearity, ReedWood City, CA, 1989.

[8] N. Franzová and J. Smítal, *Positive sequence topological entropy characterizes chaotic maps,* Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 1083–1086.

[9] T. N. T. Goodman, *Topological sequence entropy,* Proc. London Math. Soc. **29** (1974), 331–350.

[10] R. Hric, *Topological sequence entropy for maps of the interval,* Proc. Amer. Math. Soc. (to appear)

[11] V. Jiménez López, *An explicit description of all scrambled sets of weakly unimodal functions of type 2^∞*, Real. Anal. Exch. **21** (1995/1996), 1–26.

[12] M. Kutcha and J. Smítal, *Two-point scrambled set implies chaos*, European Conference on Iteration Theory (Caldes de Malavella, 1987), 427–430, World Sci. Publishing, Teanek, NJ, 1989.

1. Departamento de Matemáticas. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. Facultad de Matemáticas. Espinardo (Murcia). Aptdo de correos 4021. 30100 E-mail: balibrea@fcu.um.es y vjimenez@fcu.um.es

2. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Murcia. Campus de Cartagena. Paseo de Alfonso XIII. 30203 Cartagena (Murcia). E-mail: canovas@plc.um