



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

CONTROL REALIMENTADO ESTOCÁSTICO DE QUBITS CUÁNTICOS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA INDUSTRIAL

Autor: Sebastián García Cutillas
Director: Javier Molina Vilaplana
Codirector: Juan Ignacio Mulero Martínez

Cartagena, 3 de septiembre de 2021



Universidad
Politécnica
de Cartagena



Índice

Objetivos y resumen	2
1. Introducción al Control Cuántico	4
1.1. Introducción al Control de Sistemas Estocásticos.....	5
1.2. La Estabilidad en Ingeniería de Control.....	7
1.3. Sistemas cuánticos	9
1.4. Control Cuántico Realimentado	20
2. Modelo de control del qubit	23
2.1. Modelo de control de un qubit sometido a disipación	24
3. Resultados y Análisis	30
3.1. Análisis modelo de qubit no controlado	31
3.2. Análisis modelo de qubit controlado	40
Conclusiones y trabajos futuros.....	51
Anejo A. Códigos empleados.....	53
Bibliografía	59



Objetivos y resumen

El control cuántico es un campo científico interdisciplinar en crecimiento que implica principalmente a físicos, matemáticos e ingenieros. Sus aplicaciones van desde la estabilización coherente de registros de qubits (bits cuánticos) para su empleo en computación cuántica hasta el control de reacciones químicas.

En este trabajo se estudiará el problema de control en sistemas cuánticos desde un punto de vista teórico. En este tipo de sistemas, la existencia de disipación y decoherencia imposibilitan que estos sean manipulados arbitrariamente. Cuando estos efectos no se pueden evitar, resulta fundamental aplicar protocolos de control.

Este proyecto se centra en el estudio, simulación y diseño de protocolos de control realimentados, es decir, protocolos que requieren de la medida del sistema, enfocándose en la dinámica y control de un qubit sometido a interacciones con el entorno.

La forma clásica de aprender mecánica cuántica consiste en el estudio de sistemas cuánticos cerrados. En cierto modo, esta misma situación es la que se produce en la mecánica clásica, donde se estudian los sistemas de interés considerando ciertas idealizaciones. No obstante, la realidad es muy distinta a estos casos introductorios, puesto que los sistemas, por su mera existencia en el universo, no son sistemas cerrados.

En el Trabajo Fin de Grado [1] se estudió la dinámica y el control de un qubit aislado, que es lo que se puede considerar como sistema cerrado. La Teoría de Sistemas Cuánticos Abiertos permite realizar el estudio de este reparando también en el entorno en el que se encuentra, trabajando así con un caso más cercano o fiel a la realidad.

La motivación de continuar en esta línea de investigación no ha hecho más que crecer desde el anterior proyecto. Sumado al “Quantum Manifesto” de 2016 por parte de la comunidad científica y respaldado por la Comisión Europea con un proyecto de diez años de duración [2], parece que la lucha por la hegemonía cuántica no ha hecho más que crecer en el entorno empresarial.

Simplemente para ejemplificar estas líneas, en octubre de 2019 el gigante Google consiguió realizar en 200 segundos un cálculo que en el superordenador más potente del mundo hubiese presentado un costo operacional de diez mil años; es decir, ejecutó la operación 158 millones de veces más rápido [3]. Por otro lado, en marzo de 2021, PsiQuantum, nacida con la misión de construir los primeros ordenadores cuánticos comercialmente viables del mundo, esperaba tenerlos disponibles en 2025 [4].

El primer capítulo permitirá introducir algunos conceptos relacionados con la Ingeniería de Control, como, por ejemplo, la definición de estabilidad de Lyapunov, útil para sistemas no lineales, no sin antes presentar el control de sistemas estocásticos, de especial relevancia para el control cuántico. Tras sintetizar algunas nociones básicas sobre mecánica cuántica para la comprensión del proyecto, se abordará la ecuación maestra de Lindblad, fundamental en la Teoría de Sistemas Cuánticos Abiertos. Por último, se expondrá una idea general del control cuántico, todo ello necesario para la simulación de este qubit no aislado.

El segundo capítulo presentará el modelo de qubit con el que se trabajará, así como el control que lo rige, tanto sus ecuaciones como la instalación y ejecución física. Además, se expondrá la representación de la esfera de Bloch y algunas propiedades de las matrices de Pauli, que



permitirán expresar las ecuaciones en dominio complejo del sistema en un espacio tridimensional real.

En el tercer capítulo se realizarán las simulaciones bajo diferentes condiciones, se mostrarán los resultados y se realizarán los análisis pertinentes. Se podrá comprobar cómo funciona el sistema sin control, si el control realiza correctamente su función, la influencia de la eficiencia del detector, el coste del control, entre otros parámetros.

Por último, se cerrará el proyecto con una serie de conclusiones, así como los futuros proyectos que se pueden y deberían abordar en el campo del control de qubits.



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN AL CONTROL CUÁNTICO



Universidad
Politécnica
de Cartagena



Tal y como se describe en [1], el control se define como una rama interdisciplinaria entre las matemáticas y la ingeniería que busca manipular de forma activa el comportamiento de un sistema dinámico. En la actualidad, el rápido progreso de las tecnologías cuánticas, es decir, aquellas que se erigen sobre los fundamentos de la mecánica cuántica, han provocado la necesidad de desarrollar nuevas técnicas y herramientas de control que permitan manipular estos sistemas. Esto supone un reto puesto que, debido a las características específicas de estas tecnologías, no siempre es posible adaptar de forma sencilla los procedimientos clásicos de control a los sistemas cuánticos.

Las tecnologías cuánticas actuales, a pesar de desarrollarse en campos diferentes (sensores, comunicación, simulación y computación), comparten, como ya se ha mencionado, unas mismas leyes de comportamiento basadas en la mecánica cuántica. La unidad de información elemental de esta área es el qubit o bit cuántico. Mientras que un bit clásico solamente presenta dos posibles estados, un qubit puede encontrarse en ambos estados simultáneamente, esto es, el estado del qubit es una combinación lineal de los estados elementales del bit clásico.

Es esta particularidad la que hace del qubit una tecnología con un extraordinario potencial. Concretamente, es esta propiedad la que define al qubit como sistema cuántico, por lo que su comportamiento está determinado por las particulares leyes de la mecánica cuántica. El control de un qubit es, por consiguiente, el primer paso para realizar el control de tecnologías cuánticas más complejas. Además, se trata de un caso totalmente ilustrativo al ser un sistema binario que presenta las características cuánticas de interés para el trabajo.

En este primer capítulo, se realizará una introducción a la Ingeniería de Control de Sistemas Estocásticos puesto que, como se podrá comprobar, los sistemas cuánticos se pueden modelizar como sistemas estocásticos. A continuación, se profundizará en el concepto de estabilidad, una noción fundamental en los sistemas dinámicos, en la ingeniería de control y, más aún, en el control cuántico debido a la gran sensibilidad de los sistemas cuánticos ante pequeñas perturbaciones. Tras esto, se entrará en la materia correspondiente a la mecánica cuántica, ejemplificando a través del qubit algunos conceptos relacionados con esta área y el Control Cuántico; además, se expondrá el marco de la Teoría de Sistemas Cuánticos Abiertos junto con la Ecuación Maestra de Lindblad, permitiéndonos ambas enmarcar el proyecto y generar un modelo para el qubit con entorno, respectivamente. Visto todo esto, se puede comprender con claridad qué es el Control Cuántico Realimentado y por qué es el protocolo de control utilizado en los sistemas cuánticos.

1.1. Introducción al Control de Sistemas Estocásticos

La ingeniería de control persigue, mediante el empleo de leyes matemáticas, gobernar sistemas físicos cumpliendo una serie de especificaciones o requerimientos objetivo. El sistema regido por estas leyes se denomina *sistema controlado*, siendo capaz de reconducirse hacia el valor deseado o de referencia, logrando así que el sistema dinámico funcione de forma óptima [5].

El comportamiento de un sistema de orden n se puede definir por medio de n ecuaciones diferenciales de primer orden. El denominado modelo de *espacio de estados* permite expresar de forma matricial estas ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) & \text{ecuación de estado} \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) & \text{ecuación de salida} \end{cases} \quad (1.1)$$

siendo $u(t)$ el vector de entradas, $y(t)$ el correspondiente a las salidas y donde se ha introducido un conjunto de variables $x(t)$ que son los estados del sistema. Se entiende por



estado la información mínima para determinar la evolución de las variables de un sistema cuando se conoce la entrada, es decir, almacena la historia pasada de un sistema.

El modelo de espacio de estados es especialmente eficaz utilizando resoluciones numéricas, permitiendo obtener la respuesta temporal de un sistema dinámico. Por tanto, podemos imaginar que para el caso de sistemas no lineales puede ser beneficioso emplear este tipo de resolución.

En el control clásico se dispone de la información del sistema, siendo esta la que, mediante la acción de control, permite dirigir el sistema al estado deseado. No obstante, las particularidades de los sistemas cuánticos no permiten obtener toda la información mediante una medición; es más, el hecho de medir perturba el sistema de forma notable, provocando incluso la decoherencia total del sistema (o pérdida de información y características cuánticas) en caso de realizar una medida clásica puntual. De forma general, las ecuaciones que modelizan los sistemas dinámicos cuánticos son Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDE) no lineales, por lo que su comportamiento y, en consecuencia, su tratamiento, difiere al de las ecuaciones diferenciales deterministas asociadas a los sistemas clásicos.

Las ecuaciones diferenciales estocásticas se pueden interpretar como ecuaciones diferenciales ordinarias modificadas de forma que se incluyan efectos aleatorios que perturben el sistema. De forma general, un SDE n -dimensional se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t)) + g(X(t))\xi(t) & t > 0 \\ X(0) = X_0 \end{cases}, \quad (1.2)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ y $\xi(t)$ es un ruido blanco m -dimensional, es decir, sin correlación en el tiempo. No obstante, se puede relacionar con un proceso de Wiener dado por dW [6]. Un proceso de Wiener es el modelo matemático utilizado para representar el movimiento Browniano, es decir, el proceso físico estocástico más elemental caracterizado por presentar trayectorias continuas, incrementos independientes y distribución normal. Estrictamente hablando, el proceso de Wiener hace referencia al modelo matemático, mientras que el movimiento Browniano describe el proceso físico. Por tanto, si se considera que el ruido blanco $\xi(\cdot)$ sigue una distribución normal, se puede establecer la relación entre el ruido blanco y la variación con respecto al tiempo del proceso de Wiener $dW(\cdot)/dt$, de forma que

$$\xi(\cdot) = \frac{dW(\cdot)}{dt}. \quad (1.3)$$

Teniendo en cuenta esta relación y multiplicando (1.2) por dt podemos expresar el SDE como

$$\begin{cases} dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW & t > 0 \\ X(0) = X_0 \end{cases}. \quad (1.4)$$

Se puede observar con claridad la similitud entre este sistema SDE y la ecuación del espacio de estados definida en (1.1). Combinando ambas, se podría llegar a un conjunto de ecuaciones que permitan controlar un SDE

$$\begin{cases} dx(t) = (A(t)x(t) + B(t)u(t))dt + g(x(t))dW \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}, \quad (1.5)$$

para un tiempo $t > 0$ y condiciones iniciales $x(0) = x_0$.



El control de sistemas cuánticos puede enfocarse, en un principio, como un control de sistemas de ecuaciones diferenciales estocásticas donde existe un ruido inherente al sistema con el que se debe trabajar. La presencia de este ruido acentúa aún más el interés en el estudio de la estabilidad del sistema, pues no deja de ser un aspecto que, en casos en los que se requiera una gran precisión, puede contribuir a que el control de este sea inconsistente. Es este uno de los motivos por lo que se presenta a continuación el concepto de estabilidad en la Ingeniería de Control.

1.2. La Estabilidad en Ingeniería de Control

Un concepto básico de la ingeniería de control es la estabilidad. En un sistema lineal, se pueden, por lo general, distinguir dos tipos de estabilidad: la estabilidad interna, basada en el comportamiento de la respuesta a entrada cero; y la estabilidad externa, caracterizada por la entrada; en particular, se define la estabilidad BIBO (*bounded-input, bounded-output stability*) como la que presenta una respuesta limitada ante una entrada también limitada.

No obstante, para sistemas no lineales, como el que nos ocupa en este proyecto, no siempre se pueden aplicar los criterios presentados para sistemas lineales. Para este tipo de sistemas más complejos se pueden realizar análisis de estabilidad internos basados en criterios energéticos, siendo una de las herramientas más potentes la teoría de estabilidad de Lyapunov.

Por tanto, en este apartado presentaremos brevemente los tipos de estabilidad que puede presentar un estado de equilibrio de un sistema no lineal, para posteriormente introducir la estabilidad basada en criterios energéticos, así como la teoría de Lyapunov, que es la que se aplicará en el caso de estudio, siempre intentando enfocar la información en sistemas no lineales. Esta introducción al concepto de estabilidad en la Ingeniería de Control está basada en [7].

1.2.1. Estabilidad interna

Se considera una ecuación de estado no lineal similar a (1.1), donde no se considera la entrada $u(t)$, dada por

$$\dot{x}(t) = f[x(t)], \quad x(0) = x_0, \quad (1.6)$$

para la que los estados de equilibrio \tilde{x} son vectores constantes $n \times 1$ que cumplen $f(\tilde{x}) = 0$. La estabilidad de un estado de equilibrio hace referencia al comportamiento cualitativo de las trayectorias que comienzan en las inmediaciones de ese estado de equilibrio. Por tanto, un sistema no lineal puede presentar diferentes estados de equilibrio, cada uno con unas propiedades de estabilidad diferentes. Por eso, es preferible referirse a la estabilidad en torno a un punto o estado de equilibrio que estabilidad de una ecuación en sí.

Por otro lado, respecto a los estados de equilibrio, es posible trasladar cualquier punto distinto de cero al origen mediante un cambio de variables y consecuente modificación de la ecuación de estado, por lo que se suele tratar la estabilidad del punto de estudio como si se encontrase en el origen, esto es, $\tilde{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se puede decir que un estado de equilibrio $\tilde{x} = 0$ de la Ecuación (1.6) es:

- *Estable* si se puede hacer que la trayectoria de la ecuación permanezca tan cerca como se desee del estado de equilibrio durante todo el tiempo, a partir de un estado inicial cercano al equilibrio.



- *Inestable* si no se alcanza ese margen deseado en torno al punto de equilibrio en un tiempo $t \geq 0$ para al menos una trayectoria y a partir de un estado inicial cercano al equilibrio.
- *Asintóticamente estable* si todas las trayectorias convergen al estado de equilibrio a partir de un estado inicial cercano al equilibrio. A diferencia de un estado de equilibrio solamente estable, el caso asintótico no se limita únicamente a permanecer en las inmediaciones del punto de equilibrio, sino que converge a lo largo del tiempo hacia el mismo. Si el ratio de convergencia es exponencial, se denomina *exponencialmente estable*.
- Por último, un sistema es *globalmente asintóticamente estable* si todas las trayectorias convergen al estado de equilibrio independientemente del estado inicial, que no necesariamente debe ser cercano al equilibrio. Si la ratio de convergencia es exponencial, se puede clasificar como *globalmente exponencialmente estable*.

Para un sistema lineal, debido a que la solución de la ecuación de estado pasa por obtener e^{At} , donde A es la matriz que acompaña a x en la ecuación de estados, basta con conocer los autovalores de A para poder saber si un punto de equilibrio es estable (autovalores con parte real negativa y multiplicidad geométrica igual a multiplicidad algebraica en autovalores con parte real nula) o asintóticamente estable (todos los autovalores de A presentan parte real negativa).

En un sistema no lineal no se puede aplicar este criterio (referido comúnmente como *estabilidad marginal*). No obstante, se puede establecer una relación entre los tipos de estabilidad descritos a partir de consideraciones energéticas; concretamente con la tasa de cambio o variación de energía de las trayectorias del sistema a lo largo del tiempo.

Si se considera un sistema físico en el que la energía se puede definir como una función del estado del sistema, se puede concluir que un sistema es estable si para un estado de equilibrio, correspondiente con un mínimo local de esta función de energía, la energía no aumenta a lo largo de ninguna trayectoria que comience en la vecindad de ese estado de equilibrio. Si, además, se disipa energía a lo largo de estas trayectorias, convergiendo hacia el mínimo local, podemos hablar de estabilidad asintótica. El caso inestable sería aquel en el que la energía aumenta con el paso del tiempo.

Al hablar del comportamiento de la energía del sistema a lo largo del tiempo, estamos haciendo referencia de forma directa a la derivada del sistema. Poder caracterizar la estabilidad a partir de la variación en el tiempo de la energía implica que no sea necesario disponer de un conocimiento explícito de las trayectorias del sistema.

1.2.2. Análisis de estabilidad de Lyapunov

La estabilidad según Lyapunov no deja de ser un análisis de esta basada en criterios energéticos. El potencial de esta teoría reside en estudiar la estabilidad a partir de una clase más general de funciones similares a la energía.

Así, para la ecuación de estado no lineal (1.6), se puede considerar una función real $V(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con derivadas parciales continuas definidas positivas en cada variable de estado, por lo que $V(0) = 0$ y $V(x) > 0 \forall x \neq 0$, al menos en las vecindades del origen, generalizando así la propiedad de que la energía total presenta un mínimo local en el equilibrio.



Para analizar la derivada en el tiempo de la función de Lyapunov $V(x)$ a lo largo de todas las trayectorias de (1.6), se define

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)\dot{x}_n \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Se puede comprobar que $\dot{V}(x)$ se obtiene como el producto interno del gradiente de $V(x)$ y el mapa no lineal $f(x)$ que define la dinámica del sistema. El descubrimiento principal de Lyapunov es que el equilibrio $\tilde{x} = 0$ es estable si $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa, es decir, $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo x en las proximidades del origen; y asintóticamente estable si $\dot{V}(x)$ es definida negativa, esto es, $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ en las proximidades del origen.

Se llama función de Lyapunov a una función definida positiva $V(x)$ para la que $\dot{V}(x)$ es al menos semidefinida negativa. Como se comentó al introducir los criterios de estabilidad energéticos, esta herramienta también presenta el potencial de poder definir la estabilidad de un equilibrio a partir de la dinámica del sistema, sin necesidad de disponer de un conocimiento explícito de las trayectorias de este, motivo por el que se conoce como método directo de Lyapunov.

En sistemas no lineales es particularmente importante debido a que las soluciones de las ecuaciones de estado asociadas a los mismos no disponen, generalmente, de soluciones o trayectorias de forma cerrada.

Al no existir, con carácter general, una forma sistemática de construir la función de Lyapunov, este método proporciona una condición suficiente para concluir la estabilidad o estabilidad asintótica de un sistema. De forma inversa, existe un teorema para la estabilidad asintótica que garantiza, bajo hipótesis adicionales, la existencia de una función de Lyapunov con $\dot{V}(x)$ definida positiva.

Para sistemas lineales, existen formas de construir fácilmente una función de Lyapunov que nos permita conocer la estabilidad del sistema, explotando la característica de que se precisa de autovalores con parte real negativa o igual a cero para garantizar la estabilidad del sistema, generando la conocida como ecuación matricial de Lyapunov. Para sistemas no lineales, la búsqueda de la función implica la utilización de métodos no tan sencillos, pero igualmente efectivos para caracterizar la estabilidad del sistema.

1.3. Sistemas cuánticos

Los sistemas cuánticos, a diferencia de los clásicos, son característicos por su aleatoriedad intrínseca. Las ciencias de la información cuántica son aquellas que estudian la manipulación y el control de estos sistemas. Como ya se ha comentado, los qubits se corresponden con la unidad elemental de información cuántica y, de acuerdo con Mermin [8], son un caso sencillo e ilustrativo para iniciarse en la mecánica cuántica; principalmente, porque, a diferencia de otros sistemas cuánticos más complejos, los qubits son sistemas discretos, esto es, presentan un número finito de estados, concretamente dos (*two-state system*), representando así el sistema físico más sencillo.

En los sistemas cuánticos, al contrario de lo que sucede en los sistemas clásicos, cualquier mínima interacción puede producir errores y fallos del sistema. Mismamente, con respecto al



medio ambiente, interacciones como la colisión de moléculas en el aire con el sistema o intercambios mínimos de energía radiante deben, si no es posible evitarlas, ser controladas para cerciorar el adecuado funcionamiento y evitar la decoherencia o pérdida de información y propiedades cuánticas diferenciadoras de los sistemas clásicos. De todos modos, estos errores pueden ser controlados fácilmente si suceden con una ratio baja, incluso desconociendo su origen.

Para facilitar la comprensión de los qubits, es conveniente presentar en primer lugar los bits clásicos y su comportamiento, introduciendo así cierta nomenclatura. Tras esto, se explicarán algunos conceptos cuánticos, particularizando por los motivos ya expuestos y porque es el objeto de trabajo en el proyecto, en un qubit. A continuación, se expondrá el campo de los Sistemas Cuánticos Abiertos, que nos permitirán trabajar con el qubit y su entorno. Para concluir el capítulo, una vez vistos algunos conceptos de Ingeniería de Control en sistemas estocásticos y de mecánica cuántica, se podrá entender la motivación y utilidad del denominado Control Cuántico Realimentado.

1.3.1. Bit clásico o Cbit

Sirviéndonos como ejemplo característico de los ordenadores clásicos, estos están contruidos por pequeños circuitos electrónicos que alcanzan dos posiciones o estados posibles, conocidos como 0 y 1. Esta es la unidad convencional básica de información, denominada bit, y expresa la unidad o respuesta lógica más elemental: verdadero o falso, sí o no.

Por lo general, se emplea el término Cbit (donde la “C” proviene de “classical”) para hacer referencia al sistema clásico de dos estados, mientras que su generalización cuántica se expresa con el término Qbit o qubit (de “quantum”)¹. Para trabajar con qubits (y, por extensión, con Cbits), emplearemos la notación de Dirac o notación *bra-ket* pues es en el símbolo llamado *ket* representado con $| \rangle$ donde, según el estado del sistema, se escribe 0 o 1; esto es, se representan con $|0\rangle$ y $|1\rangle$ los estados estables del Cbit.

En la notación de Dirac, este introdujo $| \rangle$ para manipular vectores, es decir, en el interior del *ket* se puede escribir un elemento que permita detallar qué representa ese vector. Ya que anteriormente se ha indicado que los estados se indican mediante estos *kets*, se confirma que los estados se pueden considerar vectores.

Los dos estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ de un Cbit representan dos vectores ortogonales unitarios en un espacio bidimensional. En el tratamiento con Qbits, esta interpretación es especialmente útil, incluso más bien necesaria. Estos dos estados representarse como vectores columnas de la siguiente manera:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Respecto al tipo de operaciones aplicables a los Cbits, destacan las operaciones reversibles: estas transforman el Bit desde un estado inicial a uno final mediante acciones que pueden ser invertibles; es decir, en las operaciones reversibles, cada estado final deriva de un único estado inicial. Estas transformaciones son fundamentales en los Qbits puesto que todas las operaciones

¹ Se puede emplear indistintamente “Qbit” y “qubit”, pues esta segunda forma deriva de la pronunciación de la primera. Por lo general, en esta memoria se empleará “Qbit” cuando se pretenda destacar diferencias o semejanzas con el bit clásico o Cbit, siendo “qubit” el término habitual para cualquier otro contexto.



relevantes posibles con bits clásicos se corresponden con operaciones reversibles realizables con bits cuánticos.

1.3.2. Conceptos cuánticos básicos

Para introducir algunos conceptos básicos, se comenzará presentando los denominados postulados o axiomas de la mecánica cuántica² ([9], [10]), necesarios para comprender la aplicación de la Ecuación Maestra de Lindblad. Estos se completarán, cuando se crea conveniente, particularizando para el caso de un qubit.

Postulado 1. Marco matemático: Asociado a cualquier sistema aislado físico, existe un espacio complejo de Hilbert \mathcal{H} , conocido como espacio de estados del sistema. El estado de un sistema cuántico en un tiempo t viene dado por un vector normalizado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ denominado vector de estado.

Los espacios de Hilbert permiten extender resultados de espacios vectoriales lineales finitos a espacios infinitos. Como se ha comentado al inicio del capítulo, una de las ventajas de introducirse a la mecánica cuántica a través del qubit es que este sistema es discreto; es decir, existen otros sistemas cuánticos que, por el contrario, presentan infinitos estados posibles. No obstante, en este proyecto trabajamos con sistemas finitos, por lo que es equivalente emplear espacio de Hilbert y espacio lineal.

Como hemos visto anteriormente, un Cbit presenta solamente dos estados posibles: $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Sin embargo, un Qbit aporta posibilidades notablemente mayores. El estado $|\psi\rangle$ asociado a un Qbit puede ser cualquier vector unitario en el espacio bidimensional generado por $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Los escalares de este espacio bidimensional vectorial que contiene los estados de los Qbits son números complejos. El estado general de un Qbit es

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

donde α_0 y α_1 son dos números complejos únicamente limitados por la condición de que $|\psi\rangle$, de igual modo que $|0\rangle$ y $|1\rangle$, debe ser un vector unitario en el espacio complejo. Así, solamente bajo la condición de normalización

$$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = 1 \quad (1.10)$$

se puede decir que el estado $|\psi\rangle$ es una superposición de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ con amplitudes α_0 y α_1 . Resulta sencillo comprobar que si uno de los coeficientes es 0 y el otro es 1, el Qbit se encuentra en uno de los dos estados clásicos $|0\rangle$ o $|1\rangle$.

Por otro lado, todos los vectores unitarios de un espacio de Hilbert se corresponden con posibles estados físicos de un sistema. Estos vectores unitarios se conocen también como estados puros. Por lo general, un sistema cuántico puede estar en un estado $|\psi_i\rangle$ con probabilidad p_i ; se conocerá, por tanto, un conjunto de estados puros descritos por el par $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$. Si más de una de estas probabilidades es distinta de cero, el sistema presenta entonces un estado mixto o mezcla. Un estado mixto o mezcla, en mecánica cuántica, es aquel que no está máximamente determinado, en contraposición con un estado puro.

Los estados mixtos suelen ser representados por el operador densidad o matriz densidad

² Según el autor se pueden definir 4 o 5 axiomas. En este proyecto, no es especialmente relevante emplear un número u otro.



$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (1.11)$$

donde $\langle\psi_i|$ es el vector traspuesto conjugado $|\psi_i\rangle$, es decir, $\langle\psi_i| = |\psi_i\rangle^\dagger = (|\psi_i\rangle^T)^*$.

El operador densidad es, por tanto, un formalismo matemático, presentado por von Neumann, especialmente útil para trabajar con estos estados que no se pueden describir únicamente por una función de ondas. Este operador debe cumplir dos propiedades: que la traza sea igual a 1 ($\text{Tr}[\rho] = 1$) y que sea una matriz positiva ($\rho > 0$). Además, se puede comprobar que es hermitiana o hermítica ($\rho = \rho^\dagger$).

Dada la matriz densidad, se puede distinguir fácilmente entre un estado puro y un estado mixto. Sabiendo que la traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal, se define la pureza como $\text{Tr}[\rho^2]$, siendo igual a la unidad para un estado puro ($\text{Tr}[\rho^2] = 1$) y menor que uno para un estado mixto ($\text{Tr}[\rho^2] < 1$).

Teniendo en cuenta, por tanto, la definición anterior, se puede expresar el estado (1.9) de un Qbit mediante el operador densidad de la siguiente manera:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0^* & \alpha_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha_0|^2 & \alpha_0\alpha_1^* \\ \alpha_0^*\alpha_1 & |\alpha_1|^2 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

donde se ha considerado que el producto de un número complejo por su conjugado es igual a su módulo al cuadrado. Se comprueba, una vez calculada, que la traza de la matriz densidad es, si se trata de un estado puro, igual a la unidad.

La matriz densidad expresa la misma información que el estado de la forma $|\psi\rangle$ y, como ya se ha comentado, se suele emplear porque permite trabajar con estados mixtos o mezcla con mayor facilidad. Ejemplifiquemos con un Qbit de un conjunto de n Qbits, donde la probabilidad de obtener el estado $|\psi_1\rangle$ es P_1 y la de obtener $|\psi_2\rangle$ es P_2 . El operador densidad vendría dado por

$$\rho = P_1 |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + P_2 |\psi_2\rangle\langle\psi_2|, \quad (1.13)$$

donde las probabilidades suman la unidad: $P_1 + P_2 = 1$.

Simplificando el caso anterior de manera que $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ y $|\psi_2\rangle = |1\rangle$:

$$\rho = P_1 |0\rangle\langle 0| + P_2 |1\rangle\langle 1| = P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Queda claramente reflejado que la matriz densidad no solamente expresa la misma información, sino que en estos estados mezcla permite recoger en un único operador las probabilidades de los distintos subestados. Por este motivo, adquiere tanta importancia en el campo de la mecánica cuántica.

Postulado 2. Observables y medida: Los observables son cantidades medibles (por ejemplo, energía, momento de una partícula, etc.) y son representadas por operadores hermíticos $A = A^\dagger$. El valor medido es siempre uno de los autovalores $a_i \in \mathbb{R}$ del observable A , con un autovector asociado $|a_i\rangle$.

Para un estado dado $|\psi_i\rangle$, la probabilidad de obtener el resultado a_i cuando se mide la propiedad descrita por el observable A viene dada por



$$P(a_i) = |\langle \psi | a_i \rangle|^2. \quad (1.15)$$

Tras la medida, se produce el colapso del sistema; es decir, la medición puntual, generalmente, perturba el sistema cambiando su estado. Esta característica de la medida está caracterizada por la regla de Born, siendo uno de los retos a afrontar por el control cuántico.

Resulta de interés profundizar brevemente sobre este aspecto. Al igual que en los Cbits se han destacado las operaciones reversibles, una operación reversible aplicada sobre el estado de un qubit se define como cualquier transformación lineal que modifique el vector unitario de ese estado a otro vector unitario. Este tipo de transformaciones u se denominan unitarias y cumplen la condición

$$uu^\dagger = u^\dagger u = 1. \quad (1.16)$$

Puesto que toda transformación unitaria presenta su inverso unitario, estas acciones sobre el estado de un qubit son reversibles. Este tipo de transformaciones son fundamentales puesto que permiten asociar cualquier operación P que actúa sobre n Cbits, mediante linealidad, con su correspondiente operación unitaria U en n Qbits.

Por el contrario, cuando se trata de la medida, debemos dejar de lado las operaciones reversibles. Para determinar el estado de un Cbit, solamente es necesario saber si ese estado es $|0\rangle$ o $|1\rangle$. No obstante, si se desea especificar el estado de un Qbit con precisión, resulta necesario saber las amplitudes de (1.9), es decir, los coeficientes complejos sometidos a la condición de normalización (1.10).

Sin embargo, este aspecto no implica un gran inconveniente. El principal problema radica en cómo adquirir esa información puesto que al realizar una medición sobre un Qbit se obtiene como salida 0 o 1. Esto es, se produce el colapso del sistema o, lo que es lo mismo, la pérdida de información de los coeficientes que definen el estado del Qbit, habiendo representado estos coeficientes la probabilidad de obtener una salida u otra.

La probabilidad de que se obtenga un resultado en concreto viene determinada por el cuadrado de la amplitud de ese estado $|x\rangle$ dado en la superposición de $|\psi\rangle$ expresado en la base clásica de 2^n . Por tanto, si el estado de n Qbits es

$$|\psi\rangle_n = \sum_{0 \leq x \leq 2^n} \alpha_x |x\rangle_n, \quad (1.17)$$

entonces la probabilidad de obtener 0's o 1's tras el proceso de medición vendrá dada por la expresión binaria del entero x :

$$p(x) = |\alpha_x|^2. \quad (1.18)$$

Esta regla es conocida como la regla de Born y la aplicación más sencilla se da para el caso de un único Qbit. Si el estado de un Qbit es la superposición (1.9) de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ con amplitudes α_0 y α_1 , el resultado de la medida es 0 con probabilidad $|\alpha_0|^2$ o 1 con probabilidad $|\alpha_1|^2$. Por tanto, una vez realizada la medida, el estado inicial $|\psi\rangle$ del Qbit será $|x\rangle$, con coeficiente unidad.

La definición de la regla de Born en base a un estado $|\psi\rangle$ se puede extender, como es lógico, al estado definido por el operador densidad ρ . Ya sea de un modo u otro, el comportamiento definido por esta regla limitará sustancialmente la forma de trabajar con los sistemas cuánticos y, por tanto, con el qubit.



Postulado 3. Evolución temporal unitaria: La evolución temporal de un estado puro de un sistema cuántico cerrado viene dada por la ecuación de Schrödinger

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -i\hbar H|\psi(t)\rangle, \quad (1.19)$$

donde H es el Hamiltoniano del sistema, asociado a la energía de este, y es un operador hermítico del espacio de Hilbert del estado del sistema; \hbar es la constante de Planck reducida que, por lo general, se puede tomar como $\hbar = 1$. Al H ser hermítico, se puede demostrar que la evolución temporal es unitaria.

Para los estados mixtos, la evolución del sistema viene dada por la ecuación de von-Neumann.

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] \equiv \mathcal{L}\rho, \quad (1.20)$$

donde se emplea el conmutador $[H, \rho] = H\rho - \rho H$ y \mathcal{L} es el superoperador de Liouville.

Postulado 4. Sistemas físicos compuestos: El espacio de estados de un sistema físico compuesto por N subsistemas viene dado por el producto tensor del espacio de estados de cada componente: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$, siendo el estado del sistema un vector unitario de \mathcal{H} .

Particularizando para estados de los diferentes espacios, el estado del sistema total viene determinado por el producto tensorial de los estados de los diferentes subsistemas: $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle$. En caso de estados mixtos, el producto tensorial se puede aplicar también al operador densidad: $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \dots \otimes \rho_N$.

Concretando aún más, de igual modo que el estado general de un Qbit (1.9) es una superposición normalizada arbitraria de los dos posibles estados clásicos, si se dispone de n Qbits el estado general es una superposición de los 2^n diferentes estados clásicos, donde sus amplitudes al cuadrado suman la unidad:

$$|\psi\rangle = \sum_{0 \leq x \leq 2^n} \alpha_x |x\rangle_n, \quad (1.21)$$

$$\sum_{0 \leq x \leq 2^n} |\alpha_x|^2 = 1. \quad (1.22)$$

Todo esto lleva a definir el concepto de matriz densidad reducida para estudiar las propiedades de un subsistema correspondiente a un subespacio de Hilbert. Si se dispone de un espacio de Hilbert bipartito en la forma $\mathcal{H} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b$ donde el estado del sistema viene dado por la matriz densidad ρ , el operador densidad reducido del subsistema a viene dado por el operador

$$\rho_a \equiv \text{Tr}_b[\rho], \quad (1.23)$$

donde Tr_b es la traza parcial sobre el subespacio de b :

$$\text{Tr}_b \left[\sum_{i,j,k,l} |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_k\rangle\langle b_l| \right] \equiv \sum_{i,j} |a_i\rangle\langle a_i| \text{Tr} \left[\sum_{k,l} |b_k\rangle\langle b_l| \right]. \quad (1.24)$$

Esta propiedad, como se verá más adelante, es fundamental en los sistemas cuánticos abiertos, puesto que para obtener las ecuaciones de la dinámica del sistema de interés sin tener en cuenta el entorno, que también forma parte del sistema total, bastaría con trazar sobre este último para obtener el operador densidad del sistema de estudio.



1.3.3. Sistemas cuánticos abiertos

Los sistemas cuánticos son muy susceptibles a las variaciones externas, por lo que lo ideal sería trabajar con sistemas cuánticos cerrados, esto es, totalmente aislados. No obstante, en la naturaleza es poco habitual que esto suceda, existiendo una interacción entre el sistema de interés y todo un entorno que no se puede evitar. Por tanto, es necesario emplear métodos que permitan eliminar el entorno de las ecuaciones de la dinámica del sistema de estudio. Este es el problema fundamental de la Teoría de Sistemas Cuánticos Abiertos y aparece representado en la Ilustración 1.1.

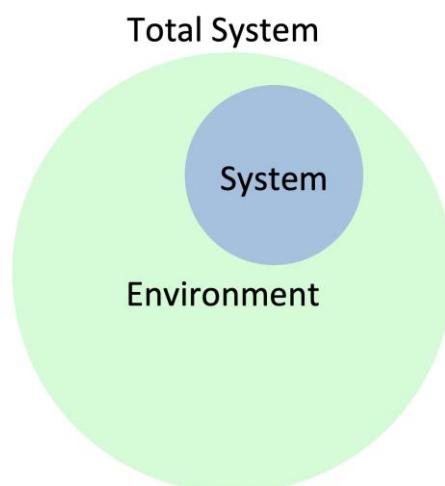


Ilustración 1.1. Sistema cuántico abierto [9]

En esta, podemos observar que, en el caso más general, se dispone de un sistema total formado por un sistema de interés y el entorno. El objetivo de la Teoría de Sistemas Cuánticos Abiertos es, por tanto, inferir las ecuaciones de la dinámica del sistema de interés a partir del sistema total, siendo las halladas, por lo general, más prácticas y sencillas de resolver.

Dentro de los sistemas cuánticos abiertos, existe un caso de especial interés que es el de aquel sistema conectado a diferentes entornos modelados por una interacción Markoviana. Este tipo de interacción consiste, básicamente, en la concepción física de un proceso estocástico. Para este caso, se suele caracterizar la dinámica del sistema mediante la ecuación de Lindblad (también llamada ecuación de Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad) [9].

Respecto a los conceptos matemáticos y cuánticos requeridos para comprender el desarrollo, se realizará, en caso de que sea necesario, una breve introducción de aquellos que no se hayan presentado hasta ahora. El objetivo es que no sea necesario acudir a bibliografía externa para seguir este proyecto. Respecto a la ecuación maestra, se ha extraído lo necesario para este proyecto de [9].

1.3.3.1. Ecuación maestra de Lindblad

En primer lugar, hay que definir correctamente nuestro problema objetivo: se busca la transformación Markoviana más general entre dos matrices densidad; es decir, sabiendo que las cadenas de Markov son sistemas matemáticos que saltan de un estado (situación o conjunto de valores) a otro con una cierta probabilidad, se busca una transformación para llevar a cabo este cambio de estado cuántico (dado por la matriz densidad), o, dicho de otro modo, su evolución. Por tanto, interesa saber cuál es la transformación más general presente en los sistemas cuánticos, así como su descripción matemática.



Se busca un mapa o función³ que transforme matrices densidad en matrices densidad. Definiendo $\rho(\mathcal{H})$ como el espacio de todas las matrices densidad en el espacio de Hilbert \mathcal{H} , se busca una función tal que $\mathcal{V} : \rho(\mathcal{H}) \rightarrow \rho(\mathcal{H})$. Para cerciorar que se cumplen a la salida las propiedades ya comentadas de la matriz densidad, se debe cumplir:

- La preservación de la traza: $\text{Tr}[\mathcal{V}A] = \text{Tr}[A]$, $\forall A \in O(\mathcal{H})$ (dominio de los operadores de \mathcal{H}).
- Completamente positivo: un mapa \mathcal{V} es positivo si y solo si $\forall A \in B(\mathcal{H})$ se cumple que $A \geq 0 \Rightarrow \mathcal{V}A \geq 0$. No obstante, a pesar de que las matrices densidad son positivas y esta opción podría parecer suficiente, no lo es puesto que se desea analizar subsistemas (trazas parciales) de sistemas más complejos, motivo por el que se define la condición de completamente positivo. Un mapa \mathcal{V} es completamente positivo si y solo si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V} \otimes \mathbb{1}_n$ es positivo. La matriz de transposición es un ejemplo de mapa positivo, pero no completamente positivo.

Los mapas que cumplen estas dos propiedades son conocidos como mapas completamente positivos y con conservación de traza. Para hacer referencia a ellos, lo haremos por sus siglas en inglés *CPT-maps* (*Completely Positive and Trace-preserving maps*).

Con estas dos condiciones, se puede derivar una ecuación maestra única como generador de mapas CPT Markovianos, denominados así por cumplir las características ya mencionadas. Esta se puede derivar de diferentes formas que se describirán muy brevemente. Una primera forma de obtenerla, y la más común, está basada en la dinámica microscópica. Por otro lado, se puede obtener la ecuación de Lindblad tratándola como generador CPT, basada en nuestro problema objetivo definido inicialmente.

Derivación de la ecuación de Lindblad a partir de la dinámica microscópica

Una vez explicados el marco matemático y cuántico en el que se está trabajando, se puede completar el esquema presentado en la introducción tal y como aparece en la Ilustración 1.2. En este caso, se sabe que el espacio del sistema total y de los subsistemas vendrá definido por espacios de Hilbert; el estado de cada sistema se puede expresar mediante el operador densidad; por último, el Hamiltoniano cuantificará la energía de cada subsistema. Se empleará el subíndice T para hacer referencia al sistema total y el E para el subsistema correspondiente al entorno, mientras que el sistema de estudio no presentará ningún subíndice.

³ Por lo general, *mapa* es empleado para hacer referencia a una *función* de particular importancia dentro del campo matemático del que se esté hablando. En nuestro caso, emplearemos indistintamente un término u otro.

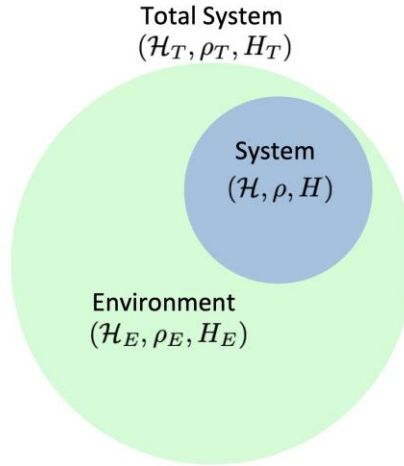


Ilustración 1.2 Sistema cuántico abierto (nomenclatura) [9]

La evolución del sistema total viene dada por la ecuación de von Neumann (1.20)

$$\dot{\rho}_T = -i[H_T, \rho_T(t)]. \quad (1.25)$$

Para obtener la matriz densidad reducida del sistema, es decir, aquella sin la influencia del entorno, se debe realizar la traza parcial del sistema total sobre los grados de libertad del entorno $\rho(t) = \text{Tr}_E[\rho_T]$.

Respecto a la energía del sistema, esta viene determinada a partir del hamiltoniano del sistema total, que se puede expresar como $H_T = H_S \otimes \mathbb{1}_E + \mathbb{1}_S \otimes H_E + \alpha H_I$, con $H_S \equiv H \in \mathcal{H}$, $H_E \in \mathcal{H}_E$ y $H_I \in \mathcal{H}_T$. La interacción de los subsistemas viene determinada por el tercer término, siendo α una medida de la fuerza de esta interacción sistema – entorno. El término de interacción de puede descomponer como $H_I = \sum_i S_i \otimes E_i$, con $S_i \in B(\mathcal{H})$ y $E_i \in B(\mathcal{H}_E)$. Por último, cabe destacar que es útil trabajar con la representación de interacción (una representación intermedia entre la de Schrödinger y Heisenberg⁴), donde las matrices densidad evolucionan con el tiempo debido a la interacción hamiltoniana, pero los operadores evolucionan con los hamiltonianos del sistema y el entorno.

Una vez realizado el planteamiento completo del problema, se deriva la ecuación maestra a través de desarrollos matemáticos y aproximaciones o suposiciones que permitan obtener un resultado coherente y satisfactorio, siendo algunas de estas las siguientes:

- Se considera que la fuerza de interacción entre el sistema y el entorno es pequeña.
- Para un tiempo $t = 0$, el sistema y el entorno presentan un estado separable $\rho_T(0) = \rho(0) \otimes \rho_E(0)$, es decir, que no existe correlación entre el sistema y el entorno.
- El estado inicial del entorno es térmico⁵, esto es, un estado mixto; como ya se ha explicado, es un estado cuántico definido por varias funciones de onda y que no está

⁴ En mecánica cuántica, las representaciones dinámicas permiten formular matemáticamente la dinámica de un sistema cuántico. Algo similar a lo que ocurre, salvando las distancias, con la especificación lagrangiana o euleriana de un campo de flujo o con la selección de sistemas de coordenadas diferentes. La representación de Heisenberg considera que los operadores (observables y otros) son función del tiempo, mientras que los estados son independientes de este; por su parte, la representación de Schrödinger considera que los operadores son constantes y que son los estados los que evolucionan en el tiempo.

⁵ Basta con considerarlo como un estado cuántico que describe un equilibrio térmico.



máximamente determinado debido a situaciones donde el observador no sabe qué estados particulares o puros están siendo manipulados.

- A lo largo de la derivación de la ecuación maestra, se extienden las aproximaciones iniciales a toda la evolución del sistema: no existe correlación entre sistema y entorno y el estado del entorno es siempre térmico $\hat{\rho}_T(t) = \hat{\rho}(t) \otimes \hat{\rho}_E(0)$ ⁶.
- Aproximación de onda giratoria (*rotating wave*): se eliminan términos de oscilación mucho más rápida que la escala de tiempo típica de la evolución del sistema. Además, al trabajar en un régimen de bajo acoplamiento, se consideran únicamente términos resonantes.

Tras todo esto, se puede llegar a la Ecuación Maestra de Lindblad en forma diagonal

$$\dot{\rho}(t) = -i[H + H_{LS}, \rho(t)] + \sum_{i,\omega} \left(L_i(\omega)\rho(t)L_i^\dagger(\omega) - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i(\omega), \rho(t)\} \right) \equiv \mathcal{L}\rho(t), \quad (1.26)$$

donde los operadores L_i son los operadores de salto y H_{LS} es el hamiltoniano del efecto Lamb. Los operadores de salto deben su nombre al fenómeno denominado salto cuántico, que es una transición o salto brusco en un sistema cuántico de un estado cuántico a otro, o lo que es lo mismo, de un nivel de energía a otro, sin estar regido este cambio por la ecuación de Schrödinger. Por su parte, el hamiltoniano del efecto Lamb renormaliza los niveles de energía del sistema debido a la interacción con el entorno.

En la ecuación están también presentes los operadores conmutador y anticonmutador. El conmutador de los operadores lineales A y B se define como $[A, B] = AB - BA$, mientras que el anticonmutador de estos resulta en $\{A, B\} = AB + BA$.

La Ecuación Maestra de Lindblad representa la evolución temporal de un subsistema de interés perteneciente a un sistema cuántico total, que incluye uno o varios entornos, sin depender explícitamente de este sistema total ni del entorno.

Al representar una evolución temporal, el primer sumando a la derecha de la ecuación recuerda a la ecuación de von-Neumann (1.20) presentada para la evolución de los estados mixtos de un sistema, al que únicamente se ha añadido el hamiltoniano del efecto Lamb, es decir, la energía asociada a la interacción con el entorno.

Por otro lado, aparece un segundo término que recoge los posibles saltos cuánticos que se pueden producir debido a las diferentes funciones de onda (entornos o baños) del sistema. Finalmente, estos términos se pueden agrupar en un superoperador de Liouville \mathcal{L} , de modo similar también a (1.20), y que representa ese mapa CPT que buscábamos al inicio del desarrollo.

Derivación de la ecuación de Lindblad como generador CPT

La segunda forma de derivar la ecuación maestra se basa en buscar un generador CPT markoviano que permita transformar unas matrices densidad en otras de la forma más general posible. A partir de las definiciones vistas para un mapa CPT, se puede definir cuál es la forma más general de un mapa CPT y de qué forma se buscará obtener estos mapas.

⁶ El acento circunflejo $\hat{}$ expresa el valor estimado del operador u observable.



En primer lugar, se puede demostrar que un mapa $\mathcal{V} : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ que se pueda escribir en la forma $\mathcal{V}\rho = V^\dagger \rho V$ con $V \in B(\mathcal{H})$ es positivo. Esta es una condición suficiente, pero no necesaria.

A partir de este lema, el teorema de Choi establece una condición más general: un mapa lineal $\mathcal{V} : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ es completamente positivo si y solo si puede ser expresado como

$$\mathcal{V}\rho = \sum_i V_i^\dagger \rho V_i, \quad (1.27)$$

con $V_i \in B(\mathcal{H})$.

Por último, hay que cumplir la propiedad de conservación de traza unitaria para que se pueda obtener un mapa CPT. Basándose en el anterior, se presenta el teorema de Choi-Kraus: un mapa lineal $\mathcal{V} : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$ es completamente positivo y conservador de traza si y solo si puede ser expresado como

$$\mathcal{V}\rho = \sum_l V_l^\dagger \rho V_l, \quad (1.28)$$

con $V_l \in B(\mathcal{H})$ cumpliendo

$$\sum_l V_l V_l^\dagger = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}. \quad (1.29)$$

Los operadores V_l que cumplen esta última condición son denominados operadores de Krauss, motivo por el que se emplea también el término mapa de Krauss para denominar a los mapas CPT.

Conocido el tipo de mapa que se busca, se debe buscar la ecuación maestra que permita describir la evolución en el tiempo del sistema a partir de este tipo de mapa CPT. Para ello, se parte de la ecuación de von-Neumann (1.20). Empleando las propiedades de los mapas CPT (conservación de la traza y completamente positivo), además de la propiedad cíclica de la traza ($\text{Tr}[\dot{\rho}] = 0$) y otras consideraciones, se puede obtener la ecuación en forma diagonal de Lindblad (para una única frecuencia relevante ω)

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_k \Gamma_k \left(L_k \rho(t) L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho(t)\} \right) \equiv \mathcal{L}\rho(t), \quad (1.30)$$

siendo el Hamiltoniano donde, por lo general, se incorporará o sobre el que actuará el control.

1.3.3.2. Propiedades y resolución de la Ecuación Maestra de Lindblad

La ecuación maestra, además de poder describir de una forma sencilla la evolución temporal del sistema de estudio en un sistema cuántico abierto, presenta algunas propiedades de interés matemático y cuántico:

- Si todos los operadores de salto son hermíticos, la pureza del sistema cumple $\frac{d}{dt}(\text{Tr}[\rho^2]) \leq 0$.
- La ecuación de Lindblad es invariante bajo transformaciones unitarias de los operadores de salto y bajo tipos concretos de transformaciones unitarias no homogéneas.
- Las dos propiedades anteriores permiten encontrar operadores de salto sin rastro sin pérdida de generalidad.



Para la resolución de la ecuación maestra, simplemente basta con resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales con un número de ecuaciones igual a la dimensión de la matriz densidad. Por tanto, la dimensión del sistema determinará o limitará la resolución del problema. De forma general, los métodos empleados se dividen en dos grandes grupos:

- Integración: utilizados generalmente cuando se quiere estudiar el comportamiento del sistema para períodos cortos de tiempo. Se pueden diferenciar algoritmos numéricos típicos como Runge-Kutta o algunos con mayor coste computacional, pero con propiedades como la conservación de la traza como es el algoritmo de Crank-Nicholson.
- Diagonalización: Cuando se pretende calcular el estado estacionario del sistema ($t \rightarrow \infty$) es más eficiente trabajar con métodos de diagonalización del superoperador de Liouvillian, puesto que permite conocer autovalores y autovectores y, por tanto, se limitará el estudio a los autovectores con autovalor cero, pues son los únicos que sobreviven cuando $t \rightarrow \infty$.

Conocida la ecuación maestra a partir de la que derivará el modelo de qubit estudiado en el proyecto, es necesario saber qué protocolo se empleará para controlar dicho qubit. Este protocolo se explica con cierto detalle a continuación.

1.4. Control Cuántico Realimentado

En el control cuántico realimentado (*Quantum Feedback Control*⁷) [11], un observador monitoriza, de forma continua, un sistema cuántico y utiliza esa información para controlar el sistema a través de la modificación del observable que se está midiendo y/o del Hamiltoniano del sistema.

Recordemos que, en el ámbito de la mecánica cuántica, un observable es cualquier variable medida a la salida que nos permita conocer el estado del sistema mientras que el Hamiltoniano H es un operador que cuantifica la energía total del sistema.

Es importante saber diferenciar entre la medida definida por la Regla de Born y la monitorización efectuada en un QFC. En este, se desarrolla una medida continua en el tiempo, siendo tratada como una “parte” del sistema; esto permite determinar las amplitudes de los estados de la superposición: la evolución se observa formando parte de ella. Por otro lado, la medición de Born se trata de una acción puntual, en un instante concreto, que solamente devuelve un estado del sistema generador, por lo que se pierde la información de los coeficientes.

Por tanto, en contraposición a lo que sucede en un control clásico, en QFC la medición continua modifica la dinámica del sistema formando parte del lazo de realimentación. Sin embargo, es posible trabajar en el marco de la teoría clásica de control debido a que los sistemas cuánticos no son más que sistemas dinámicos no lineales con ruido.

Ya se ha visto que la evolución de un sistema cuántico aislado viene expresada por la ecuación de Schrödinger (1.19), mientras que, si se tiene en cuenta el entorno, la dinámica viene expresada por la ecuación maestra de Lindblad (1.26). Para el caso que nos ocupa, reescribiremos la ecuación como

$$\dot{\rho} = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)[H, \rho] + \gamma D[c]\rho, \quad (1.31)$$

⁷ QFC.



con

$$D[c]\rho = 2c^\dagger \rho c - c^\dagger c \rho - \rho c^\dagger c, \quad (1.32)$$

γ una constante de velocidad y c un operador que cuantifica el acoplamiento entre entorno y sistema.

La ecuación maestra permite recoger en una sola ecuación los efectos producidos por los diferentes baños que afectan al sistema de interés. Por tanto, se puede incluir a la ecuación también el efecto provocado por la monitorización del sistema; no obstante, resulta conveniente, en primer lugar, explicar qué se entiende por monitorizar.

La monitorización de un sistema consiste en efectuar una lectura continua de una propiedad de este. Tomando de propiedad la posición x como ejemplo, en cada diferencial de tiempo o paso dt se adquiere una pequeña información de esta.

Basta con referirnos al concepto clásico de medición para comprender por qué se adquiere solamente una pequeña información: las medidas reales son inexactas, esto es, se obtiene en ellas el valor real de la propiedad, x , más un error aleatorio, ϵ , que limita el resultado, R . Su equivalente cuántico se puede expresar como

$$R = \langle X \rangle + \epsilon, \quad (1.33)$$

siendo X el operador para el observable x y $\langle X \rangle = \text{Tr}[X\rho]$ su valor esperado.

Este error ϵ se puede considerar, ya que no presenta correlación en el tiempo, como un ruido blanco ξ . Además, si es Gaussiano y, por tanto, sigue una distribución normal (lo más probable por el Teorema Central del Límite⁸), se puede demostrar que la varianza del error, $\text{Var}(\epsilon) = \sigma_\epsilon^2$, es proporcional a $1/dt$ y que ϵ lo es a $1/\sqrt{dt}$. De este modo, el valor R se vuelve infinito a medida que $dt \rightarrow 0$. Para subsanarlo, se pueden reescribir las ecuaciones en términos de $dr = Rdt$, siendo esto una cantidad finita. Se tiene entonces

$$dr = \langle X \rangle dt + g dW, \quad (1.34)$$

donde g es una función o constante que define la cantidad de ruido y dW es una variable aleatoria gaussiana con media cero y varianza igual a dt que se ha podido introducir gracias a la relación (1.3) y que, por consiguiente, su valor se obtiene para cada intervalo dt de la función de densidad de probabilidad para una distribución normal.

Se puede concluir que monitorizar consiste en realizar una medida continua de una cantidad física x , proporcionando así un flujo continuo de resultados de medida $dr(t)$. Dicho esto, es importante conocer cómo evoluciona el estado ρ en cada intervalo de tiempo debido a la monitorización. El estado $\rho(t)$ varía hasta $\rho(t) + d\rho$, en un intervalo dt , con

$$d\rho = -kD[X]\rho + \sqrt{2k}(X\rho + \rho X - 2\langle X \rangle \rho)dW, \quad (1.35)$$

siendo $k = 1/(8g^2)$ la velocidad a la que se obtiene información de x del sistema y, de forma general, $\langle X \rangle = \text{Tr}[X\rho]$. El término dW proviene de forma directa de la medida de dr .

⁸ El Teorema Central del Límite postula que, en condiciones muy generales respecto a las distribuciones de los sumandos, la suma de variables aleatorias independientes tiende a distribuirse normalmente a medida que aumenta el número de sumandos.



Conociendo ya la variación sobre el sistema producido por la monitorización, únicamente resta incorporar la realimentación. En QFC, la manera de realizar el control consiste, como ya se ha indicado al inicio, en modificar el Hamiltoniano H del sistema, así como, si se desea, el observable medido X , de forma que estos sean función de los resultados de la medida. Concretamente, se permite que H y X en el tiempo t sean cualquier función de los resultados de la medición $dr(t)$ obtenidos hasta ese momento.

El operador densidad en el tiempo t determina el comportamiento futuro del sistema; por este motivo, la gran mayoría de protocolos de control cuánticos se desarrollan haciendo que $H(t)$ y $X(t)$ sean funciones de $\rho(t)$. Es decir, el observador monitoriza $\rho(t)$ desde el tiempo inicial hasta el tiempo t ; tras esto, se toma $H = H(t, \rho)$ y $X = X(t, \rho)$. De este modo, la evolución de ρ considerando la monitorización y el control viene dada por la ecuación

$$d\rho = -\left(\frac{i}{\hbar}\right)[H(t, \rho), \rho]dt + D[c]\rho dt - kD[X(t, \rho)]\rho dt + \sqrt{2k}[X(t, \rho)\rho + \rho X(t, \rho) - 2\langle X(t, \rho) \rangle \rho]dW, \tag{1.36}$$

que es una ecuación estocástica pues presenta un término fluctuante de forma aleatoria y que está regida por las reglas del cálculo estocástico. Un esquema sobre el control cuántico realimentado se recoge en la Ilustración 1.3.

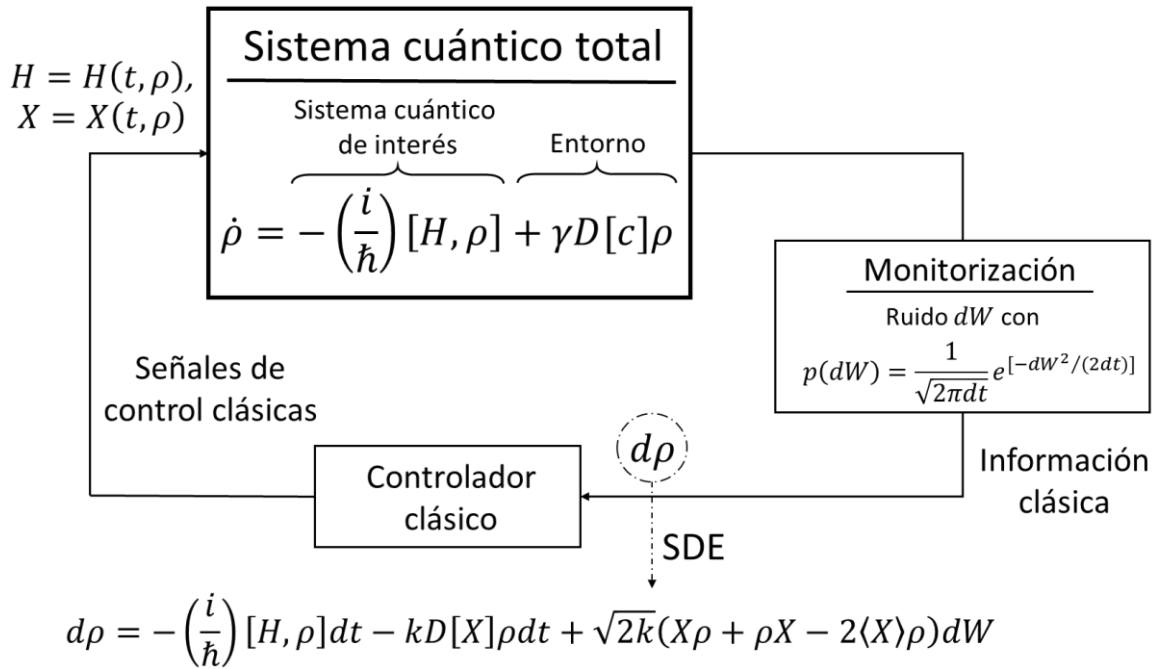


Ilustración 1.3 Control cuántico realimentado (QFC)

El problema del control cuántico reside en determinar $H(t, \rho)$ y/o $X(t, \rho)$ con el objetivo de alcanzar, en presencia de ruido, la evolución deseada de la forma más precisa posible. Este fin último puede ser: producir una evolución lo más parecida posible a la deseada, alcanzar el estado deseado en un tiempo T o llegar a un estado deseado de la forma más rápida posible, siendo este último la meta del modelo estudiado en este proyecto.



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

CAPÍTULO 2. MODELO DE CONTROL DEL QUBIT



Universidad
Politécnica
de Cartagena



2.1. Modelo de control de un qubit sometido a disipación

El objetivo de este proyecto es controlar un qubit “dentro” de un sistema total con entorno. Esto implica que el qubit está sometido a una disipación que producirá la decoherencia de este, es decir, la pérdida de sus propiedades cuánticas, entre las que se encuentra la superposición de estados; es decir, alcanzará aleatoriamente uno de los estados binarios posibles. Por tanto, el control no busca seguir una trayectoria deseada, sino estabilizarse en el estado de energía deseado de los dos estados de energía posibles.

El modelo empleado (de [12]) se basa en un protocolo de medición continua para un solo qubit conocido como medición cuántica no destructiva (*Quantum nondemolition (QND) measurement*), donde la incertidumbre de la medida observable no aumenta desde su valor medido durante la evolución del sistema. Recordemos que los sistemas cuánticos son profundamente sensibles a los cambios e incluso a la medida, por lo que la solución para la medida (y el control) reside en monitorizar el sistema de forma continua procurando modificarlo lo menos posible.

La instalación física considerada corresponde al experimento inverso de la caja de fotones; se considera un qubit, dentro de una cavidad, interactuando con un campo electromagnético confinado, siendo la salida de esta “caja” o cavidad la que se mide, proporcionando información sobre el estado del qubit. Un esquema del experimento aparece en la Ilustración 2.1.

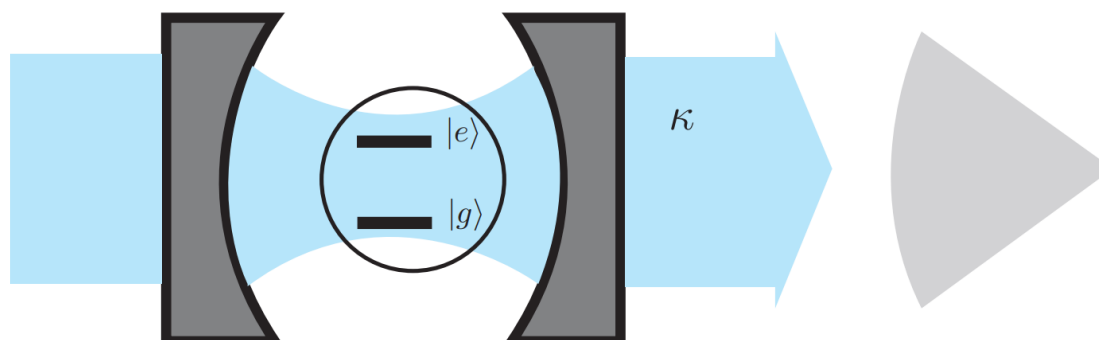


Ilustración 2.1 Esquema de la instalación: inverso del experimento de la caja de fotones [12]

En esta Ilustración, se pueden apreciar los dos posibles estados finales del qubit que se encuentra dentro de la cavidad, siendo estos niveles energéticos relevantes $|e\rangle$ y $|g\rangle$. Por otro lado, al considerar que la cavidad no es ideal, existen fugas del campo electromagnético, filtrándose este a una velocidad κ .

Es precisamente este campo filtrado, es decir, la salida de la cavidad, lo que se monitoriza y proporciona información sobre el qubit; se mide de forma continua mediante un proceso de detección homodina donde el observable físico medido es la cuadratura $X_\lambda = (e^{i\lambda} \mathbf{a}^\dagger + e^{-i\lambda} \mathbf{a})/2$. Expliquemos brevemente qué significa esto.



La detección homodina (*homodyne detection*) o directa [13] es una técnica que consiste en mezclar en un divisor de haz⁹ el campo a medir con un campo coherente¹⁰ a la misma frecuencia llamado oscilador local y que sería idéntica a la señal de interés si llevara información nula, para medir la fotocorriente a la salida del divisor de haz. Básicamente, la onda incidente se convierte en una señal eléctrica medible. Un esquema sobre una detección homodina ordinaria [14] se muestra en Ilustración 2.2, donde *signal* *a* es la señal que se desea medir, *local oscillator* *b* es el oscilador local y *c* y *d* son los haces de salida; los fotodetectores PD se encargan de generar la corriente eléctrica, es decir, la medida, a partir de estas ondas de salida.

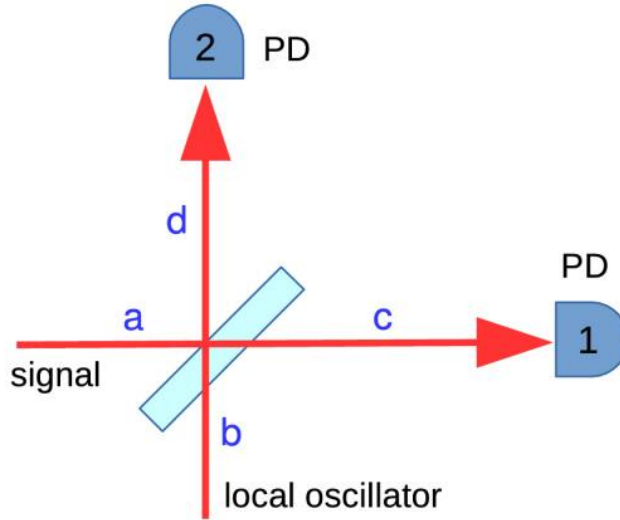


Ilustración 2.2 Detección homodina [14]

Por su parte, los operadores cuadratura son los principales observables en la descripción de variables continuas de los campos cuánticos y su importancia radica en la capacidad de medirlos directamente mediante la detección homodina. Su nombre se debe a que son la generalización cuántica del concepto de cuadratura clásico, es decir, el estado relativo en el que se hallan dos ondas con diferencia de fase igual a $\pm\pi/2 + 2\pi k$. Esta generalización se consigue mediante los operadores escalera de aniquilación \mathbf{a} y de creación \mathbf{a}^\dagger , que disminuyen y aumentan, respectivamente, el autovalor λ de otro operador; en este caso, la energía del sistema.

Tomando algunas consideraciones relacionadas con el acoplamiento y la ratio de fuga del campo electromagnético particulares de la instalación estudiada, se puede eliminar la dinámica de la cavidad dando lugar a una ecuación estocástica maestra para el qubit, con la forma de ecuación maestra vista en (1.26) pero con un término difusivo correspondiente al proceso estocástico.

$$d\rho_t = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho_t]dt + \frac{\Gamma_m}{4}(\sigma_z \rho_t \sigma_z - \rho_t)dt + \frac{\sqrt{\eta\Gamma_m}}{2}(\sigma_z \rho_t + \rho_t \sigma_z - 2\text{Tr}(\sigma_z \rho_t)\rho_t)dW_t, \quad (2.1)$$

donde $\rho_t \equiv \rho$ es la matriz densidad (estado) del qubit en un tiempo t ; $H = \frac{\omega_{eg}}{2}\sigma_z$ es el hamiltoniano del sistema para el caso sin control, con ω_{eg} la frecuencia del qubit; Γ_m es la ratio

⁹ Un divisor de haz es un dispositivo óptico que, como su propio nombre indica, divide un rayo de luz en dos, presentando dos modos de entrada y dos modos de salida que están relacionados entre sí a través de la transmisión y reflexión de las ondas.

¹⁰ Un campo coherente es un campo que mantiene su fase durante un cierto tiempo.



de disipación o decaimiento y $\eta \in [0,1]$ es la eficiencia del detector. Por otro lado, σ_z es una de las matrices de Pauli ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) que más adelante se introducirán brevemente.

Además de esta ecuación, se puede obtener la señal medida y_t en un instante t como

$$dy_t(\rho) = dW_t + \sqrt{\eta\Gamma_m} \text{Tr}(\sigma_z \rho_t) dt. \quad (2.2)$$

La función de Lyapunov asociada al sistema es

$$V(\rho) = 1 - \text{Tr}(\sigma_z \rho)^2 \quad (2.3)$$

y permite demostrar el siguiente teorema asociado al SME (2.1) con $H/\hbar = \omega_{eg}\sigma_z/2$ y $\eta > 0$: para cualquier estado inicial ρ_0 , la solución ρ_t converge con $t \rightarrow \infty$ a uno de los estados de energía $|g\rangle\langle g|$ o $|e\rangle\langle e|$ con probabilidades $p_g = \text{Tr}(|g\rangle\langle g|\rho_0)$ y $p_e = \text{Tr}(|e\rangle\langle e|\rho_0)$, respectivamente. Este es el motivo por el que el control busca estabilizarse en uno de esos estados, pero decidiendo cuál, no permitiendo que sea de forma arbitraria.

Para poder decidir entre ambos estados iniciales, se puede modificar el Hamiltoniano H a partir de una acción de control $u(\rho)$, de forma que

$$H = \frac{\omega_{eg}}{2} \sigma_z + \frac{u(\rho)}{2} \sigma_x \quad (2.4)$$

y

$$u(\rho) = -\alpha \text{Tr}(i[\sigma_x, \rho] \rho_{\text{tag}}) + \beta (1 - \text{Tr}(\rho \rho_{\text{tag}})), \quad (2.5)$$

con $\alpha, \beta > 0$ y $\beta^2 < 8\alpha\eta$; el estado objetivo es definido por $\rho_{\text{tag}} = |g\rangle\langle g|$ o $|e\rangle\langle e|$.

Este control sigue las reglas de QFC y físicamente se asemeja a la instalación típica de óptica cuántica [15] representada en la Ilustración 2.3. En este caso, se incide con un campo de sonda láser (*probe laser*) sobre la cavidad que contiene el qubit, donde el campo dispersado se mide mediante un detector homodino (*detector*).

La información de la medida κ alimenta a un controlador (*digital control*), donde tras filtrar la señal (*filtering equation*), esta puede servir para ejecutar una ley de control mediante un actuador (*control law*) sobre, en este caso, el campo magnético confinado en la cavidad (*magnetic coils*). Como se explicó anteriormente, en el control cuántico realimentado, el control y la medida modifican el sistema formando parte de él, dando lugar a las ecuaciones estocásticas clásicas.

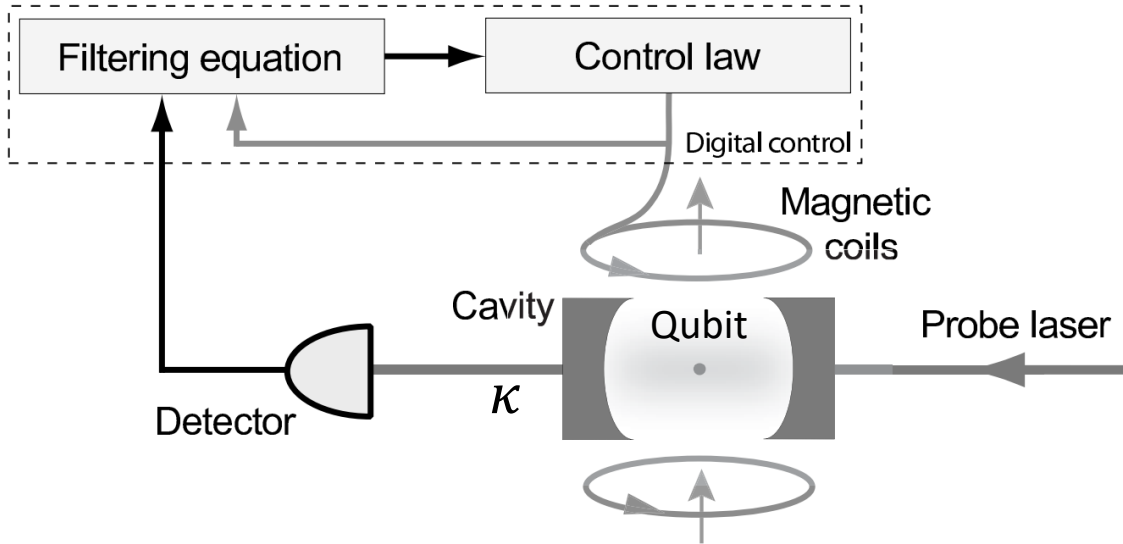


Ilustración 2.3 Instalación típica para QFC de un sistema cuántico: particularizado para el caso de estudio a partir de [15]

2.1.1. Modelo de control representado en la esfera de Bloch

Introducido el modelo de qubit con el que se va a trabajar, conviene presentar brevemente qué son las matrices de Pauli y la esfera de Bloch (una explicación con mayor detalle se puede encontrar en [1]).

Basta con recordar que las matrices de Pauli son

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

y que, junto con la matriz identidad $\mathbb{1}_2 \equiv \mathbb{1}$, forman una base para el álgebra 4-dimensional de matrices bidimensionales de números complejos $\mathcal{B} = \{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$; es decir, puesto que las cuatro son hermíticas, cualquier matriz bidimensional A de coeficientes complejos se puede escribir como una combinación lineal real de las cuatro.

Teniendo en cuenta esta transformación, la esfera de Bloch es una representación geométrica de los estados de un sistema binario, como el qubit, como puntos de una esfera unitaria. Se puede comprobar, por tanto que, incluyendo un factor $1/2$ debido a que la base \mathcal{B} no está normalizada, la matriz densidad se puede escribir como

$$\rho = \frac{1}{2} [p_1 \mathbb{1} + p_x \sigma_x + p_y \sigma_y + p_z \sigma_z] = \frac{1}{2} [\mathbb{1} + p \cdot \sigma], \quad (2.7)$$

donde $p = (p_x, p_y, p_z)$, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ y la normalización de la matriz densidad lleva a $p_1 = 1$.

Se concluye que la matriz densidad de un sistema binario se puede expresar siempre como un vector real de tres componentes $p = (p_x, p_y, p_z)$. Estos vectores se denominan vectores de Bloch y presentan un radio igual o menor que el de la esfera de Bloch, de radio unidad.

Por tanto, es práctico e intuitivo trabajar con la esfera de Bloch en puesto de la matriz densidad: se transformarán las ecuaciones (2.1) a (2.5) para expresarlas en función de los vectores de Bloch. Para ello, se explotarán algunas propiedades de cálculo de las matrices de Pauli tales como

- Los cuadrados de las matrices son iguales a la matriz identidad:



$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1}. \quad (2.8)$$

- Son anticonmutativas a pares, presentando el producto de cualquiera dos de ellas una sencilla relación con la tercera; estas relaciones difieren solamente en la permutación cíclica de x , y y z :

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z, \\ \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y = i\sigma_x, \\ \sigma_z \sigma_x &= -\sigma_x \sigma_z = i\sigma_y. \end{aligned} \quad (2.9)$$

- Su conmutador viene dado por

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (2.10)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor de Levi-Civita. El valor del tensor de Levi-Civita depende del número de permutaciones necesarias para reducir los índices a la serie ordenada ascendente: si se realiza un número par de intercambios de posiciones, el tensor adquiere el valor $+1$; si el número de permutaciones es impar, su valor es -1 ; en caso contrario (índices se repiten), el tensor es igual a 0 .

Concretando para tres dimensiones, el tensor de Levi-Civita se define como

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (1,2,3), (2,3,1) \text{ o } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es } (3,2,1), (1,3,2) \text{ o } (2,1,3), \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.11)$$

- Su anticonmutador $\{\sigma_i, \sigma_j\}$ viene dado por

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{1}, \quad (2.12)$$

con

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (2.13)$$

- La traza de cualquiera de ellas es igual a cero: $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$.

La linealidad de la traza y que la matriz identidad sea el elemento neutro del producto de matrices, junto con estas propiedades de las matrices de Pauli, y sabiendo que entre las derivadas temporales de los vectores de Bloch y las componentes de la matriz densidad para un tiempo t existen las siguientes relaciones

$$\dot{p}_{t_x} = 2\text{Re}(\dot{\rho}_{t_{01}}), \quad \dot{p}_{t_y} = -2\text{Im}\dot{\rho}_{t_{01}}, \quad \dot{p}_{t_z} = 2\dot{\rho}_{t_{00}}; \quad (2.14)$$

se pueden obtener las ecuaciones de estudio expresadas en las coordenadas de la esfera de Bloch. De este modo, el SME de estudio, en el caso de un qubit controlado, se puede expresar de forma matricial como



$$\begin{pmatrix} dp_{t_x} \\ dp_{t_y} \\ dp_{t_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_m}{2} & -\frac{1}{\hbar} \omega_{eg} & 0 \\ \frac{1}{\hbar} \omega_{eg} & -\frac{\Gamma_m}{2} & -\frac{1}{\hbar} u \\ 0 & \frac{1}{\hbar} u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{t_x} \\ p_{t_y} \\ p_{t_z} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} -\sqrt{\eta \Gamma_m} p_{t_x} p_{t_z} \\ \sqrt{\eta \Gamma_m} p_{t_y} p_{t_z} \\ \sqrt{\eta \Gamma_m} (-p_{t_z}^2 + 1) \end{pmatrix} dW_t. \quad (2.15)$$

El control $u(\rho)$ se expresa ahora como

$$u(p) = \alpha (p_y p_{tag_z} - p_z p_{tag_y}) + \frac{\beta}{2} \left(1 - (p_x p_{tag_x} + p_y p_{tag_y} + p_z p_{tag_z}) \right), \quad (2.16)$$

con $\alpha, \beta > 0$ y $\beta^2 < 8\alpha\eta$; el vector objetivo tendrá que ser el equivalente a los estados posibles señalados anteriormente, es decir, $p_{tag_z} = 1$ o $p_{tag_z} = -1$.

La salida también se puede expresar en función de las componentes del vector de Bloch como (2.17) así como la función de Lyapunov como aparece en (2.18).

$$dy_t(p) = \sqrt{\eta \Gamma_m} p_{t_z} dt + dW_t, \quad (2.17)$$

$$V(p) = 1 - p_z^2. \quad (2.18)$$



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

CAPÍTULO 3. RESULTADOS Y ANÁLISIS



Universidad
Politécnica
de Cartagena



Llegados a este punto del proyecto, se puede comenzar a realizar simulaciones del qubit. Se desarrollarán, en primer lugar, algunas pruebas para ver el comportamiento del qubit sin aplicar control, tanto para el caso de trayectorias individuales como simulaciones promediadas; caracterizado este caso, se controlará el qubit, donde se estudiarán también los parámetros de los que depende el sistema y su influencia sobre este.

Este trabajo se realizará empleando el software MATLAB, concretamente la función *sde*. Los parámetros del modelo presentarán, por lo general, los siguientes valores: $T_{mes} = 1$ (constante de tiempo de la medida), $\Gamma_m = 1/T_{mes}$ (ratio de emisión espontánea), $\hbar = 1$ (constante de Planck reducida), $\omega_{eg} = 2\pi/T_{mes}$ (frecuencia natural), $\eta = 1$ (eficiencia; $\eta = 1$ para caso ideal) y $dt = 0.01$ s (paso para resolución numérica). El tiempo de simulación se especificará en cada caso y se podrá visualizar de forma sencilla e intuitiva en las gráficas. En el Anejo A se encuentra tanto el código empleado como una breve explicación de este.

3.1. Análisis modelo de qubit no controlado

La función *sde* nos permite seleccionar el número de trayectorias a simular. Por tanto, para un tiempo de simulación $T = 10$ s y unas coordenadas iniciales dadas en coordenadas esféricas¹¹ $(R, \varphi, \theta) = (1, 0, 0)$, estudiaremos una trayectoria individual, representando sus curvas características en la Ilustración 3.1.

Las componentes p_x y p_y van amortiguándose a lo largo del tiempo debido a la disipación a la que está sometida el qubit. Respecto a la componente en z , presenta una gran variabilidad a lo largo de la simulación debida al ruido al que está sometida. No obstante, no parece alcanzar un estado estable al finalizar los 10 segundos.

La salida y_t es simplemente la acumulación del término de Wiener y p_z (puesto que Γ_m y η son iguales a 1). En un principio, no tiene mayor interés. Por otro lado, conforme a la función de Lyapunov, se observa que conforme p_z se aleja del cero, esta disminuye; esto significa, como es lógico, que cuanto más próximo se encuentra el qubit a uno de los estados puros $|g\rangle\langle g|$ y $|e\rangle\langle e|$, más estable es el sistema.

¹¹ R es el radio de la esfera que define el punto, φ el azimutal y θ la colatitud, estas dos últimas expresadas en radianes.

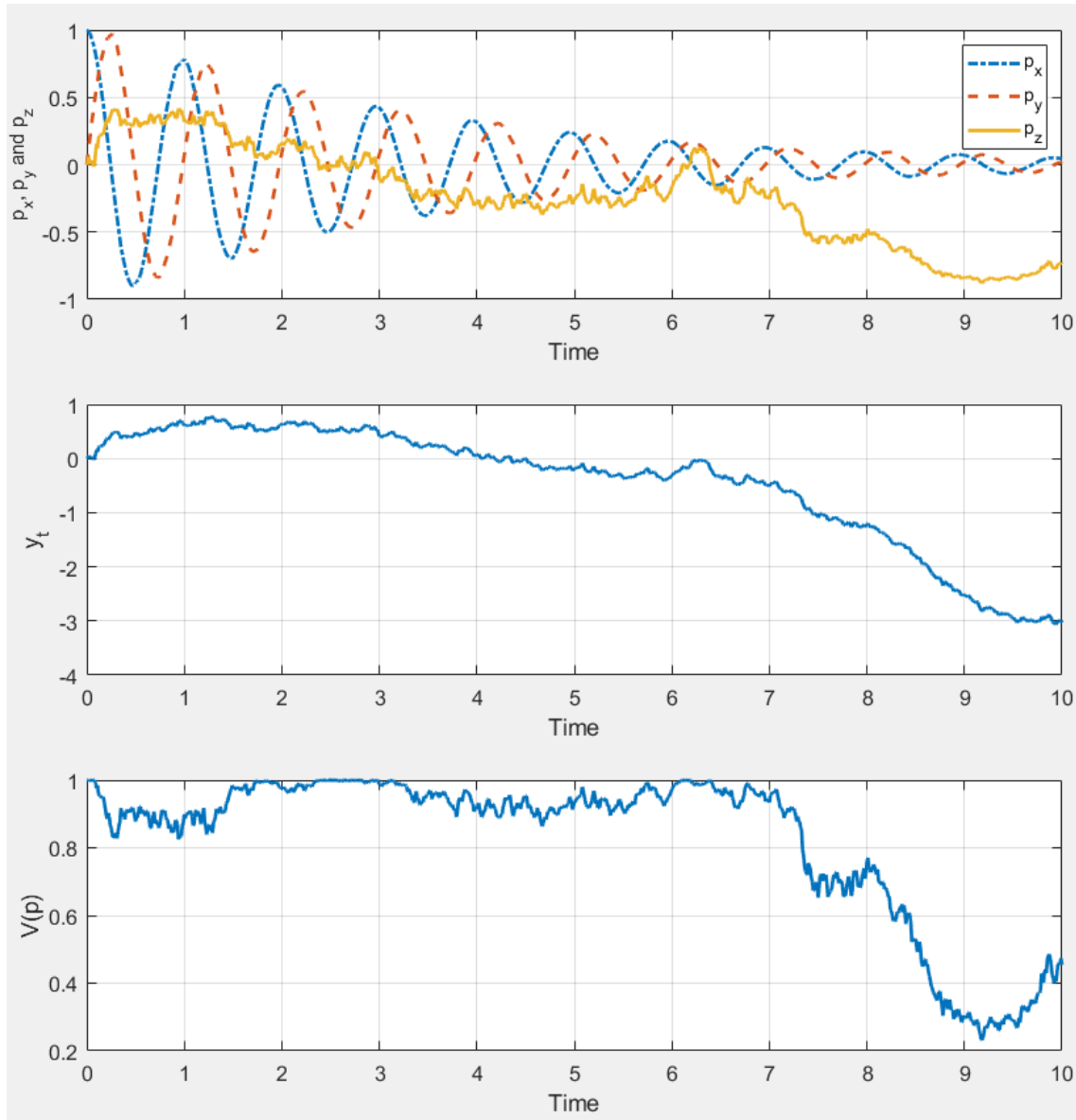


Ilustración 3.1 Simulación de qubit no controlado. Primera trayectoria ($T = 10\text{ s}$)
Componentes del vector de Bloch, salida del detector y función de Lyapunov

Se realiza de nuevo la simulación para un tiempo mayor de simulación (Ilustración 3.2). Se observa de forma clara la relación comentada: conforme p_z adquiere el estado $+1$ o -1 , la función de Lyapunov tiende a cero, lo que significa que la energía del sistema se va disipando. Al emplear más tiempo de simulación, se ve cómo el qubit, a pesar de encontrarse en un estado máximamente mixto en algunos momentos (en torno a los segundos $15 - 25$), finalmente adquiere el estado puro $p_z = 1$, fijándose en ese valor a partir de ese momento (para $t \rightarrow \infty$).

No obstante, cumpliendo el teorema asociado al modelo, se fija en uno de los valores puros de forma arbitraria, tal y como se aprecia en la Ilustración 3.3. Para unas mismas condiciones, pero diferente trayectoria (pues los valores de ruido son diferentes), se observa que p_z se estabiliza en esta ocasión en $p_z = -1$. Además, el estado estable se ha alcanzado unos 20 segundos antes que en la primera trayectoria; esto es, el tiempo que podríamos denominar transitorio no es siempre el mismo.

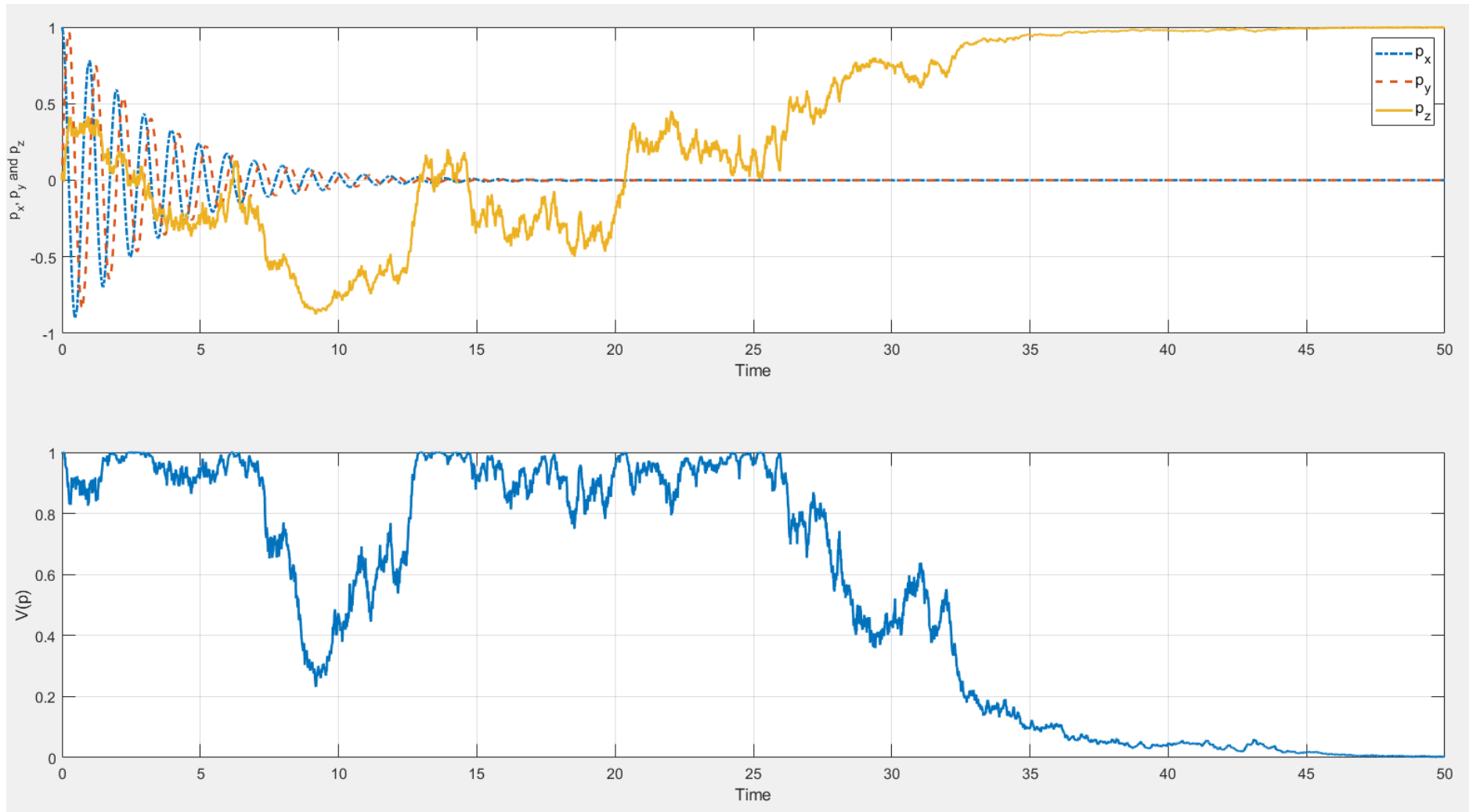


Ilustración 3.2 Simulación de qubit no controlado. Primera trayectoria ($T = 50$ s)
Componentes del vector de Bloch y función de Lyapunov

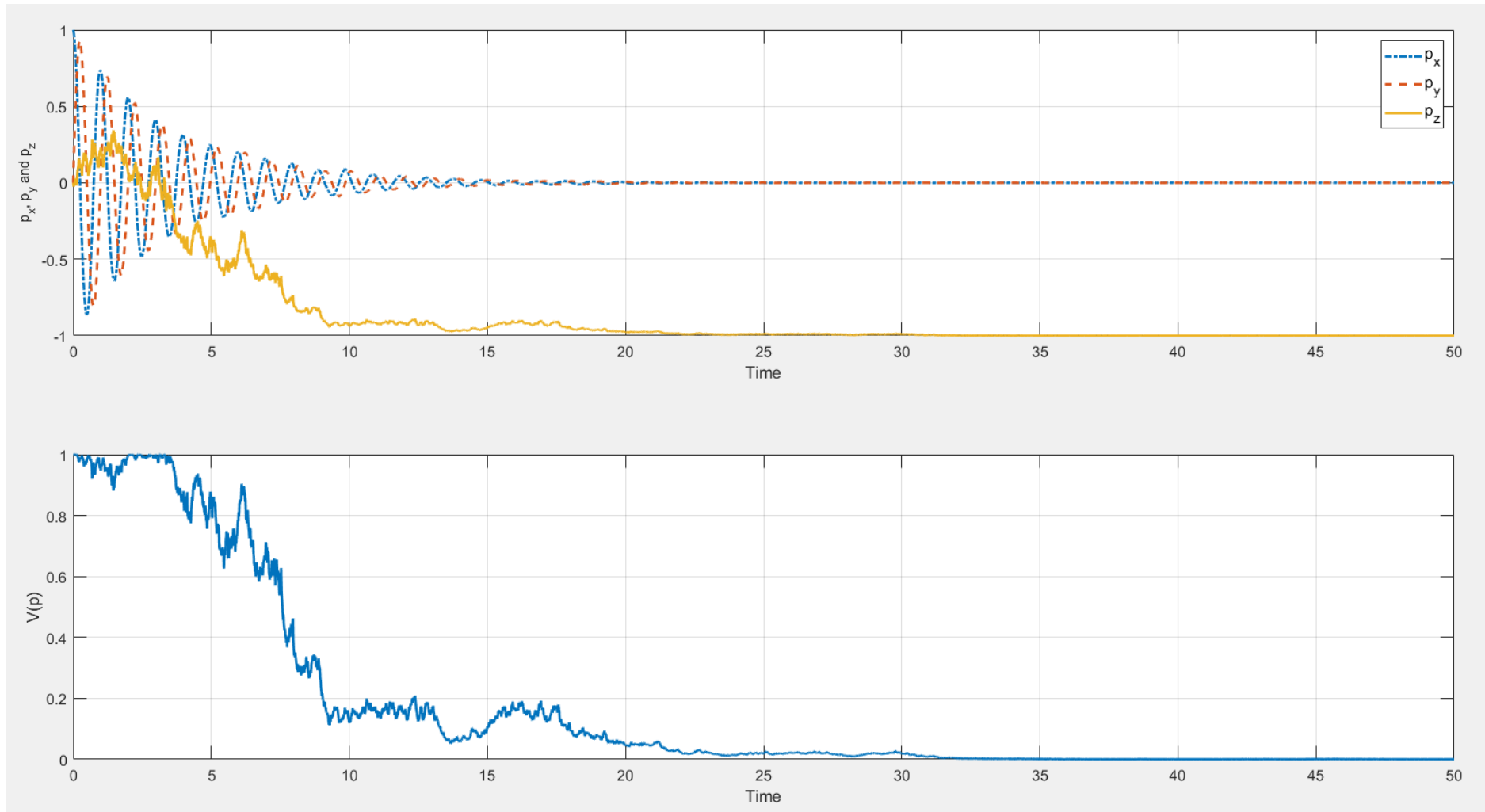


Ilustración 3.3 Simulación de qubit no controlado. Segunda trayectoria ($T = 50$ s)
Componentes del vector de Bloch y función de Lyapunov



Estos ejemplos ilustran de manera extraordinaria el objetivo del control: conseguir, antes de que la decoherencia sea absoluta, alcanzar el estado del qubit deseado de los dos posibles.

Restaría, antes de continuar con el caso del qubit controlado, saber con qué probabilidad se alcanza un estado u otro de los dos posibles. Para ello, podemos realizar simulaciones promediadas y, puesto que el qubit alcanza para $t \rightarrow \infty$ el estado de $p_z = 1$ o $p_z = -1$, según el valor medio de p_z , $\overline{p_z} \in [-1, +1]$, se sabrá cuál es el estado final estable de la mayoría de las trayectorias, pudiendo sacar incluso porcentajes de probabilidad.

De este modo, para un tiempo de simulación $T = 200 s$ (para cerciorar la estabilización del sistema), 300 trayectorias y las mismas condiciones iniciales, se ve claramente en la Ilustración 3.4 e Ilustración 3.5 que todas las simulaciones de p_z acaban estabilizándose en uno de los dos estados posibles; se comprueba que $\overline{p_z}$ es igual a cero, significando esto que se estabiliza indistintamente en uno de los dos estados con la misma probabilidad para cada uno de ellos.

Por último, el promedio de Lyapunov $\bar{V}(p)$ refleja perfectamente esta estabilización: a medida que se van estabilizando las trayectorias, la función va decreciendo al valor mínimo de cero.

Con todas estas pruebas, se pueden inferir algunas características del sistema: una vez que p_z adquiere uno de los estados, el sistema se mantiene estable; por tanto, si el qubit no controlado comienza en uno de esos estados, se mantendrá en ese estado.

Por otro lado, el promedio de la componente en z , $\overline{p_z}$, refleja, para esas condiciones iniciales, las probabilidades de adquirir un estado u otro de los posibles; para el caso inicial en el plano ecuatorial de la esfera, esto es, $p_{z_0} = 0$, la probabilidad de alcanzar un estado final u otro es la misma. Teniendo en cuenta el comportamiento que siguen los sistemas cuánticos, tiene sentido pensar que cuanto más cercana sea la componente p_z inicial a uno de los estados finales, mayor será la probabilidad de alcanzar el estado correspondiente. Efectivamente, si se establece como condición inicial $(r, \varphi, \theta) = (1, 0, \pi/6)$ se puede apreciar que la coordenada p_z adquiere ambos estados estables, pero la probabilidad de alcanzar $p_z = +1$ es de un 75%, mientras que la de $p_z = -1$ del 25% restante (Ilustración 3.6).

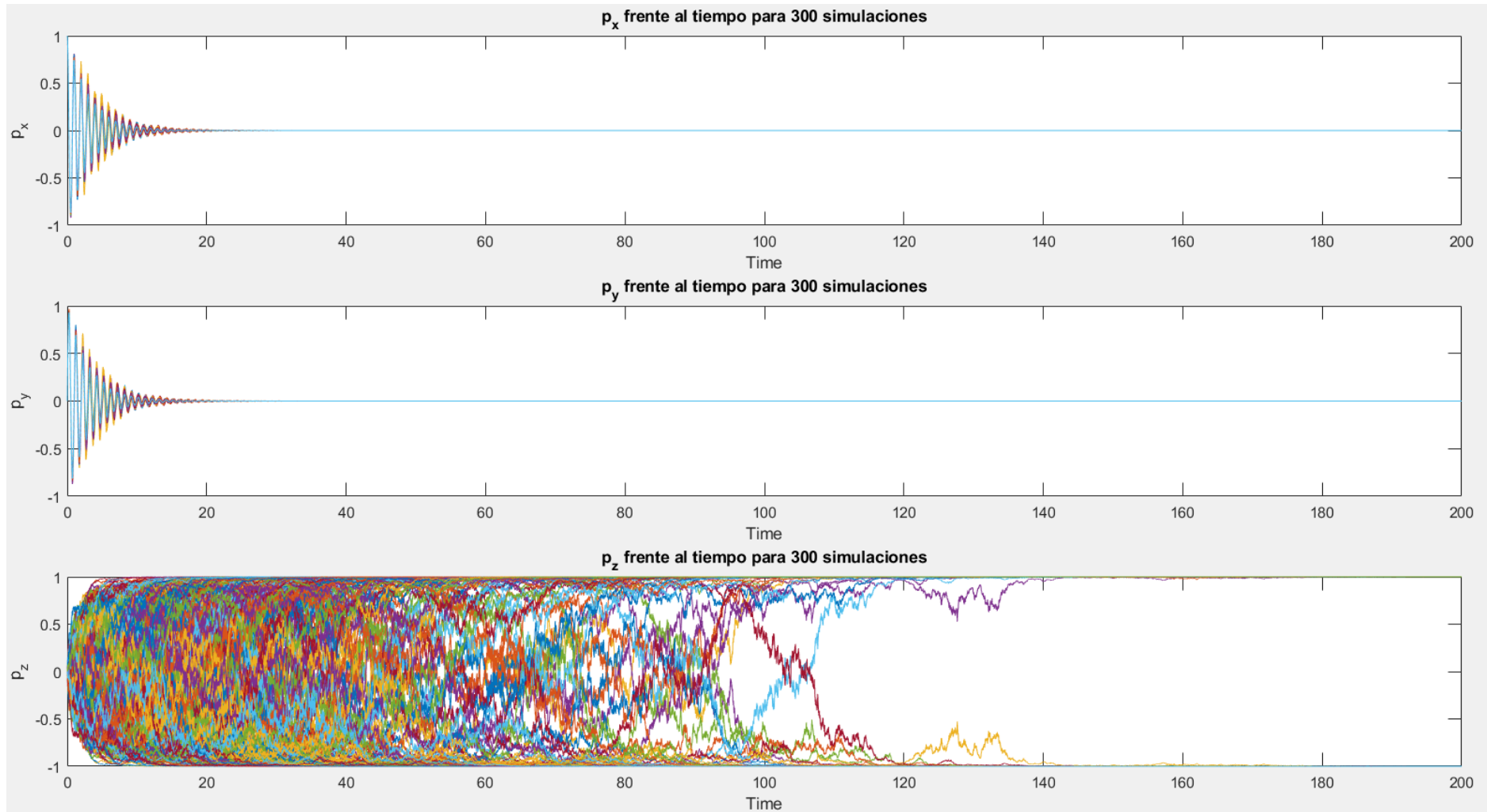
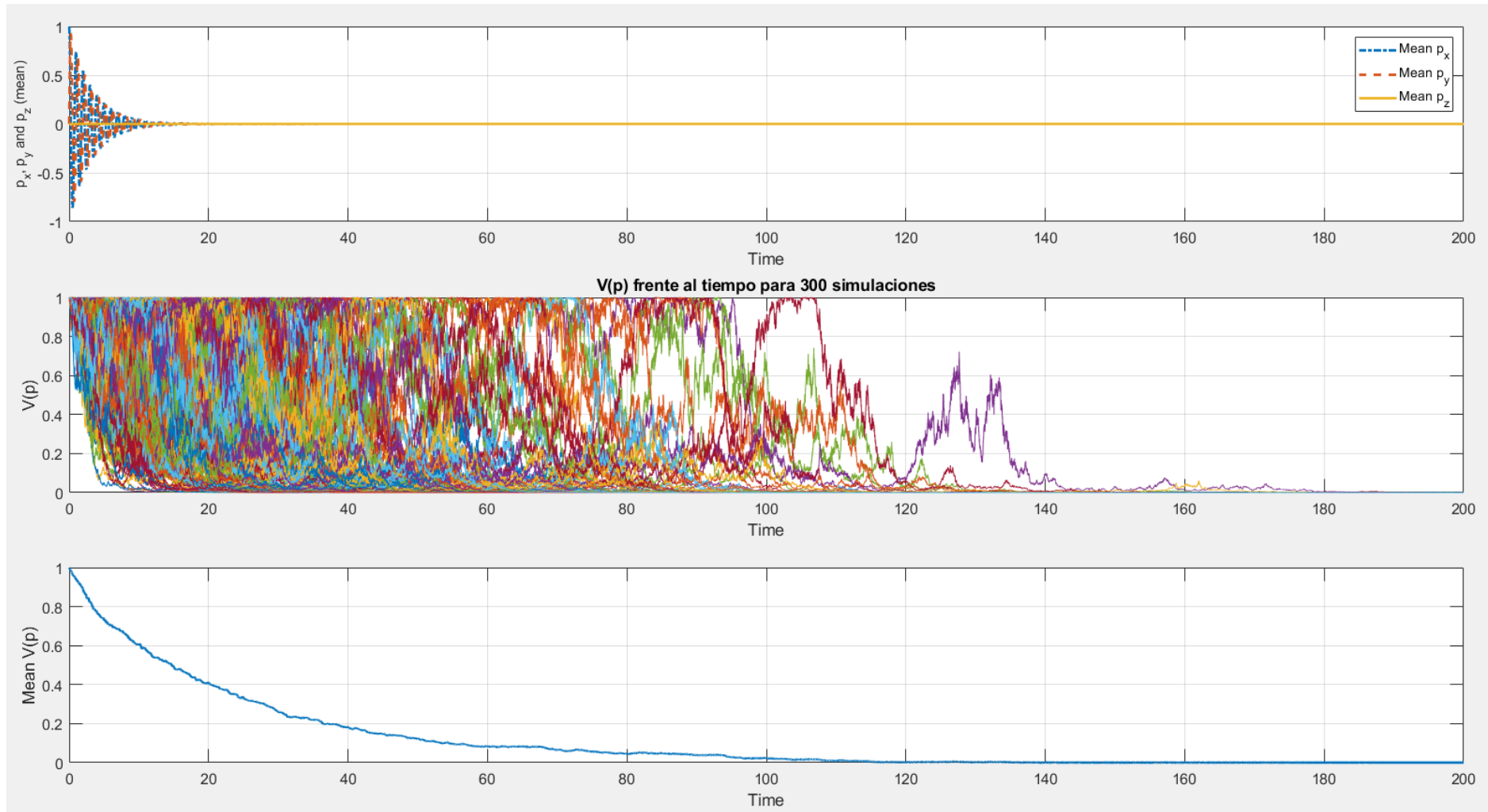


Ilustración 3.4. Simulación de qubit no controlado. 300 trayectorias ($T = 200$ s) (I)
Componentes del vector de Bloch para todas las trayectorias



*Ilustración 3.5 Simulación de qubit no controlado. 300 trayectorias ($T = 200$ s) (II)
Componentes promediadas del vector de Bloch, funciones de Lyapunov para todas las trayectorias y función de Lyapunov promediada*

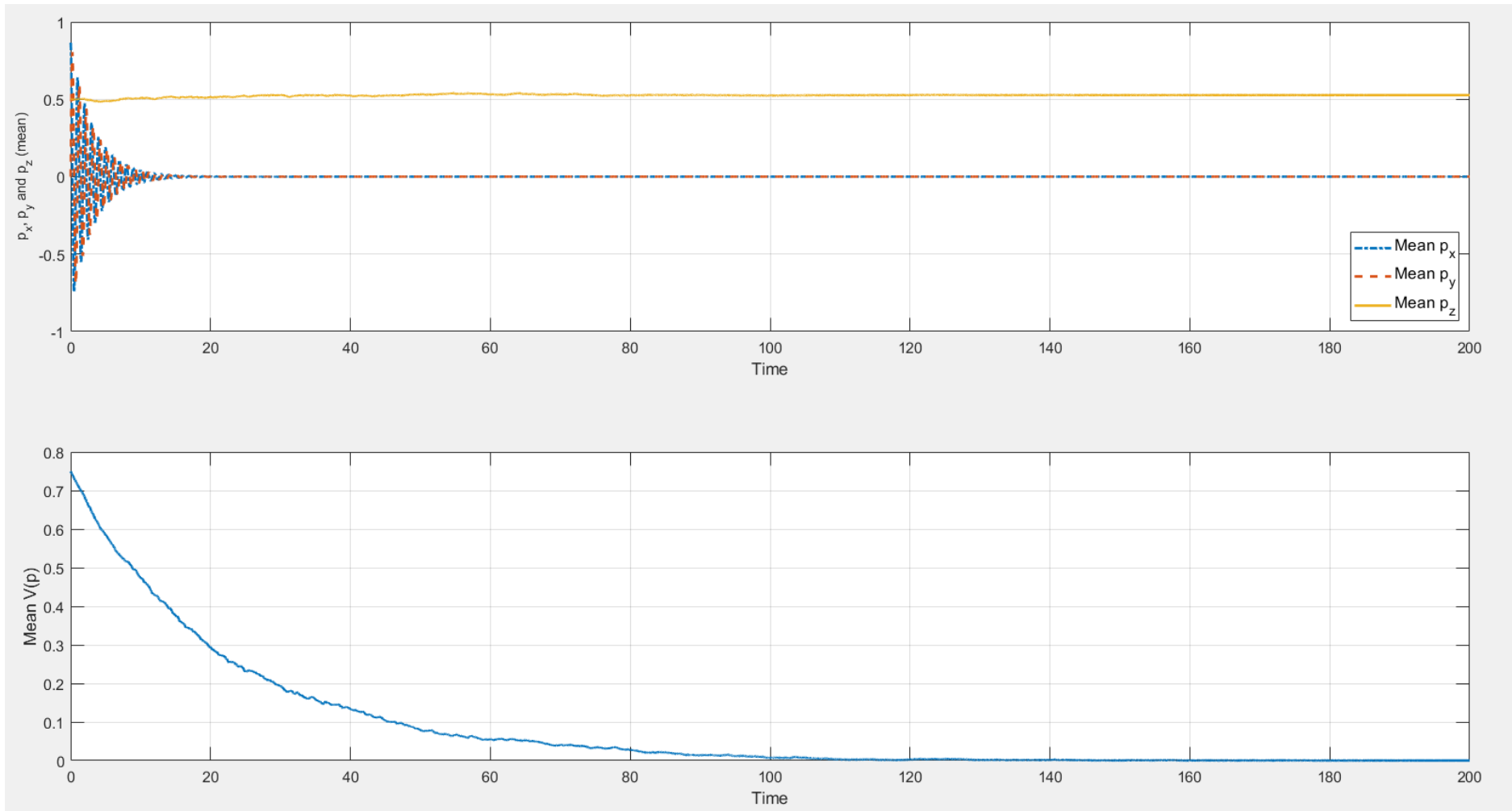


Ilustración 3.6 Simulación de qubit no controlado. 300 trayectorias ($T = 200$ s) y condiciones iniciales $(r, \varphi, \theta) = (1, 0, \pi/6)$
 Componentes promediadas del vector de Bloch y función de Lyapunov promediada



Esto se puede demostrar también resolviendo las ecuaciones de forma analítica para el estado estacionario. Debido a que las ecuaciones estocásticas (2.15) están expresadas en la forma de Itô, el promedio del conjunto se puede obtener eliminando los términos estocásticos, es decir, aquellos multiplicados por dW . Así, se obtienen los siguientes resultados:

$$p_x = e^{-\frac{\Gamma_m t}{2}} \left(-C_2 e^{-\frac{t\omega_{eg_i}}{\hbar}} + C_3 e^{\frac{t\omega_{eg_i}}{\hbar}} \right) i, \quad (3.1)$$

$$p_y = e^{-\frac{\Gamma_m t}{2}} \left(C_2 e^{-\frac{t\omega_{eg_i}}{\hbar}} + C_3 e^{\frac{t\omega_{eg_i}}{\hbar}} \right), \quad (3.2)$$

$$p_z = C_1. \quad (3.3)$$

Por un lado, se observa que existen términos exponenciales de la forma e^{xi} , que mediante las relaciones de Euler se pueden expresar como senos y cosenos.

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x. \quad (3.4)$$

Por tanto, los paréntesis de p_x y p_y están acotados a valores trigonométricos multiplicados por constantes; todo esto, a su vez, multiplica a $e^{-\frac{\Gamma_m t}{2}}$, una exponencial negativa, por lo que, cuando $t \rightarrow \infty$: $(p_x, p_y) \rightarrow 0$, como se había podido ver en las simulaciones numéricas. Por su parte, p_z presentará un valor constante, que depende de las condiciones iniciales, también en concordancia con lo explicado anteriormente.

Además, conocemos el comportamiento del qubit en promedio; por ejemplo, en el caso de que las condiciones iniciales se correspondan con coordenadas del plano medio ecuatorial de la esfera, el qubit se mantiene oscilando en ese plano hasta alcanzar el estado de pureza mínima, esto es, el centro de la esfera de Bloch. Por tanto, describe una trayectoria circular que decrece con el tiempo. Sabiendo que la ecuación de una circunferencia, en este caso en plano XY , de centro en el origen viene dada por

$$x^2 + y^2 = R_{XY}^2, \quad (3.5)$$

se puede realizar la suma de los cuadrados de las componentes en x y en y de la esfera, es decir, la suma de p_x^2 y p_y^2 . De este modo

$$p_x^2 + p_y^2 = 4C_2C_3e^{-\Gamma_m t} = R_{XY}^2. \quad (3.6)$$

Se confirma que las componentes p_x y p_y constituyen una circunferencia de radio $R_{XY} = \sqrt{4C_2C_3e^{-\Gamma_m t}}$, que presenta una exponencial negativa que depende de la ratio de disipación y que, por tanto, acabará presentando un radio igual a cero.

Las constantes dependen, lógicamente, de las condiciones iniciales, por lo que para obtenerlas basta con sustituir en las ecuaciones las coordenadas del vector de Bloch con el que se inicialice la simulación. Concretamente, como el valor final de p_z dependía de su proximidad a los estados puros posibles, $p_z = C_1 = p_{z_0}$. Respecto a C_2 y C_3 que aparecen en p_x y p_y , las circunferencias descritas dependen del plano paralelo al plano ecuatorial XY de la esfera donde se inicialice el qubit.

Esta solución analítica confirma también que, independientemente de la eficiencia η del detector, el qubit alcanzará los mismos estados con las mismas probabilidades puesto que η aparece únicamente en el término difusivo del SDE. Otro hecho diferente es que la eficiencia afecte a la pureza del estado alcanzado en un tiempo determinado. De hecho, promediar es



equivalente a eliminar los términos estocásticos, donde para ambos casos se ha comprobado que el qubit no alcanza un estado totalmente puro; es el término difusivo el que permite alcanzar un estado puro. En un principio, parece que una disminución de la eficiencia requerirá un tiempo de control mayor y, por tanto, un también mayor coste energético hasta alcanzar el estado final deseado.

Por otro lado, cuanto mayor sea la ratio de decaimiento, antes alcanzará el qubit un estado puro de forma arbitraria (el control precisará ser más rápido). Su estudio tiene mayor interés en el caso del qubit controlado.

3.2. Análisis modelo de qubit controlado

En esta ocasión, se implementa el control dado en (2.16), donde se toma $\alpha = 2/T_{mes}$ y $\beta = 0,9\sqrt{8\eta\alpha}$ (valores recomendados en la bibliografía). Se seguirá estudiando el mismo caso ideal ($\eta = 1$) con los parámetros indicados al inicio del capítulo, donde se desea que el qubit alcance el estado $p_{z_d} = +1$. Debido a que el qubit puede alcanzar el estado deseado “aleatoriamente” sin control, interesa no estudiar solamente trayectorias individuales, sino hacerlo en conjuntos de trayectorias.

Para unas condiciones iniciales mixtas $(R, \varphi, \theta) = (1,0,0)$ y tiempo de simulación $T = 50$ s, se presentan los resultados para 10 trayectorias en la Ilustración 3.7 – Ilustración 3.9. En primer lugar, cabe destacar que no todas las simulaciones alcanzan el estado deseado durante el período de simulación. No obstante, se puede comprobar que \bar{p}_z es cercano a +1.

El promedio de la función de Lyapunov, $\bar{V}(p)$, decrece de forma aproximadamente exponencial, a pesar de que existen trayectorias que no evolucionan como se desearía. La función de control decrece de forma oscilatoria el tiempo que existen componentes p_x y p_y distintas de cero. Una vez que se alcanza el estado deseado $p_z = +1$, la señal de control es cero, pero sigue activa para el caso en el que se presenten pequeñas perturbaciones en el sistema. Respecto a $\bar{u}(p)$, el control se aproxima lentamente a cero conforme las trayectorias alcanzan el objetivo.

En las trayectorias individuales se pueden observar algunas perturbaciones que incluso provocan que no se cumpla la condición de unitariedad del sistema, significando esto que $p_z > 1$, algo imposible en un sistema cuántico. Esto se debe a que el control no está bien ajustado para los valores de ruido aleatoriamente generados, presentando valores de α y β más altos de los necesarios. Estas perturbaciones se pueden evitar, a costa de que aumente el tiempo en alcanzar el estado deseado, disminuyendo la fuerza del control.

Para ser más precisos, analizando la ley de control (2.16), conforme $p_y \rightarrow 0$, la influencia de α decrece considerablemente ya que es proporcional a p_y^2 ; es, por tanto, el parámetro β el que resulta interesante reducir (se puede comprobar que para $\beta = 0.5\sqrt{8\eta\alpha}$, no se producen estas perturbaciones a pesar de que el control es ligeramente más lento).

No obstante, como en este proyecto nos interesa el resultado promediado y lo único a lo que afectaría la reducción de estos coeficientes es en un aumento del tiempo de simulación, en principio no daremos mayor importancia a estas trayectorias desviadas.

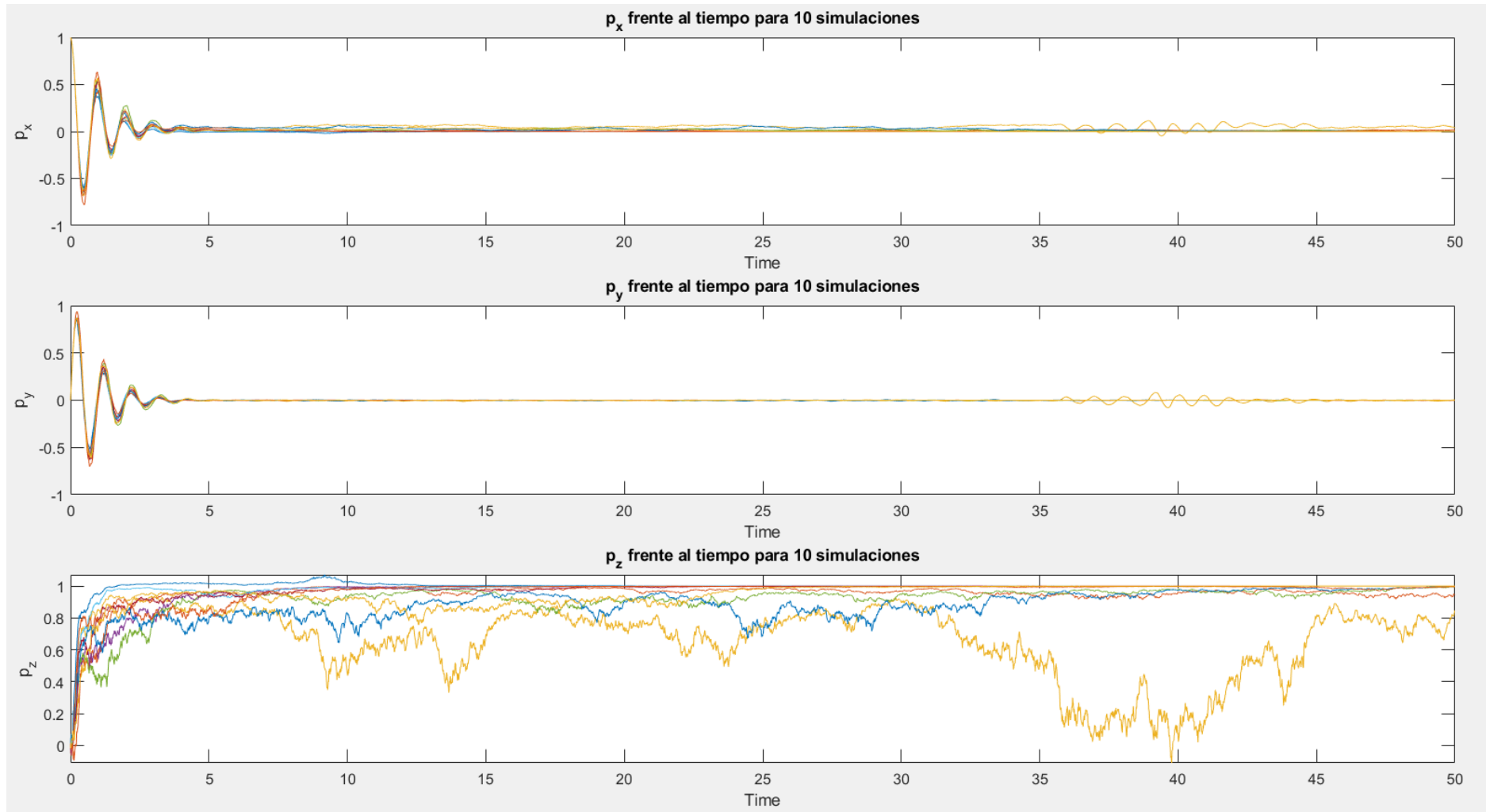


Ilustración 3.7 Simulación de qubit controlado. 10 trayectorias ($T = 50$ s) (I)
Componentes del vector de Bloch para todas las trayectorias

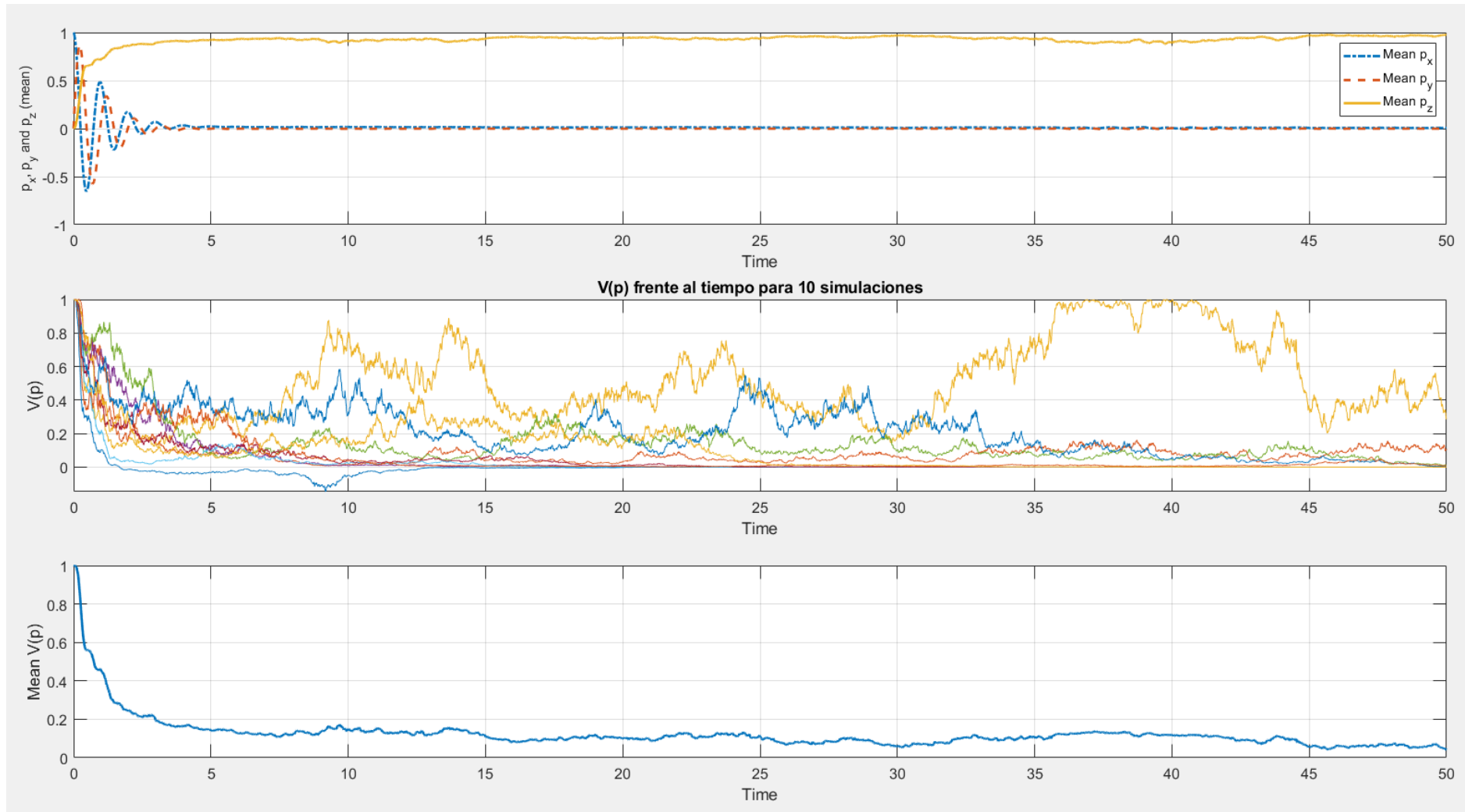
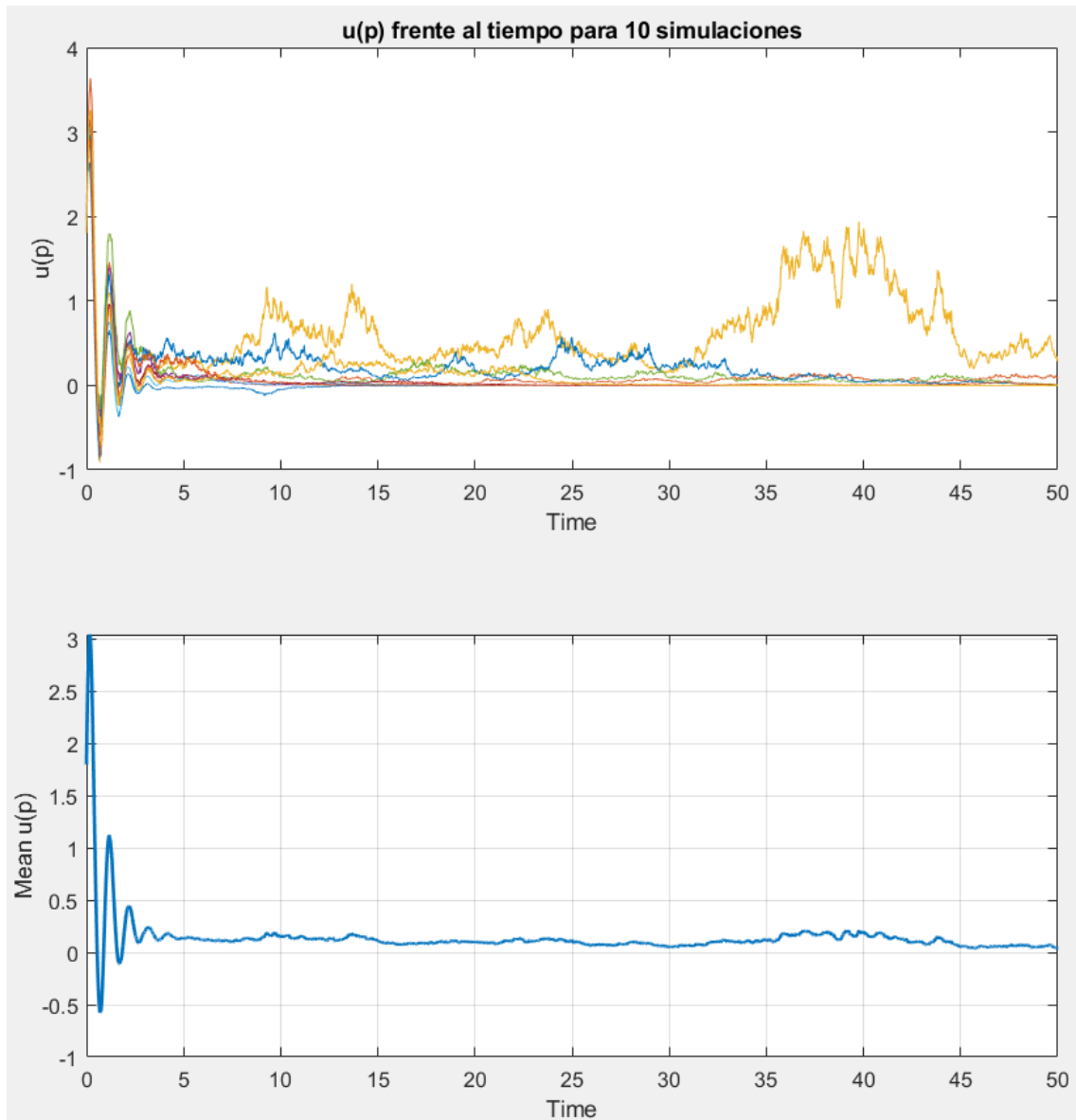


Ilustración 3.8 Simulación de qubit controlado. 10 trayectorias ($T = 50$ s) (II)
 Componentes promediadas del vector de Bloch, funciones de Lyapunov para todas las trayectorias y función de Lyapunov promediada



*Ilustración 3.9 Simulación de qubit controlado. 10 trayectorias ($T = 50$ s) (III)
Señal de control para todas las trayectorias y señal de control promediada*

Si aumentamos el tiempo de simulación hasta 200 s (se incrementa también el número de trayectorias a 300), se comprueba que, finalmente, todas las trayectorias alcanzan el estado deseado (Ilustración 3.10). Esto se puede observar en las funciones promediadas para el estado estacionario $t_{final} = 200$ s: $\bar{p}_z = 1$, $\bar{V}(p) = 0$ y $\bar{u}(p) = 0$.

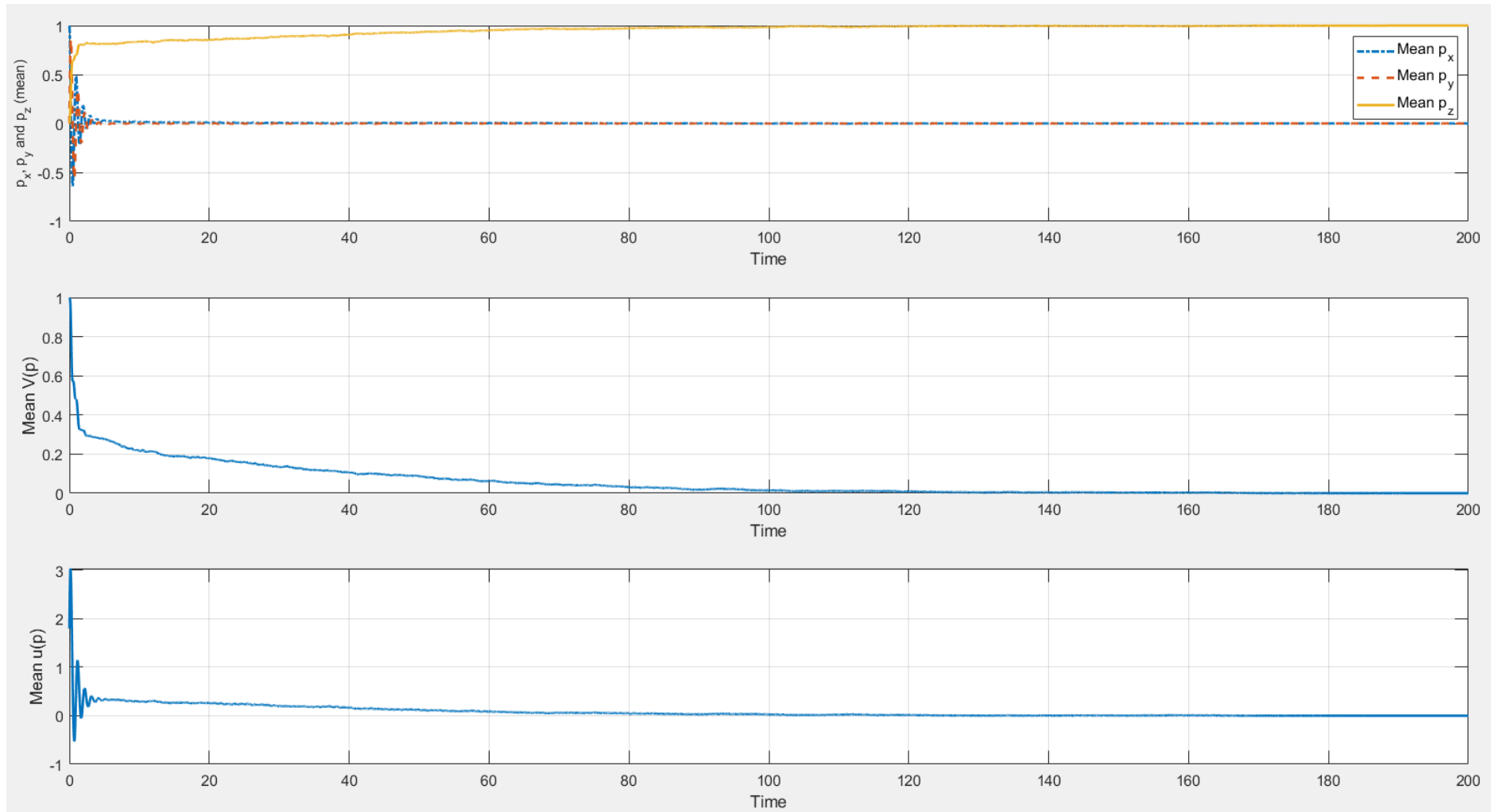


Ilustración 3.10 Simulación de qubit controlado. 300 trayectorias ($T = 200$ s)
 Componentes promediadas del vector de Bloch, función de Lyapunov promediada y señal de control promediada



Comprobado cómo funciona el control del qubit, se puede estudiar la influencia de algunos parámetros que no hemos destacado hasta ahora. El primero de ellos es la eficiencia del detector. Se ha estado trabajando con un detector ideal con $\eta = 1$, pero el control también es válido para los casos en los que la eficiencia es menor que la unidad. Este hecho se refleja en la Ilustración 3.11, donde se muestra, para diferentes estados iniciales representados a partir del desfase inicial con respecto al valor deseado $p_z = +1$ (en abscisas) para los planos XZ e YZ , el valor de pureza r^2 alcanzado al final del tiempo de simulación $T = 10$ s (en ordenadas) para diferentes eficiencias¹².

Por lo general, se puede controlar el qubit para cualquier valor de eficiencia, pero lógicamente la pureza del sistema es menor conforme disminuye esta, lo que implica que el control sea más lento. Conforme el vector inicial es más cercano al valor deseado, mayor es la pureza. Se puede comprobar también que el sentido natural de rotación del qubit junto con el ángulo inicial afecta a la pureza, llegando a generarse una situación particular para ángulos entre $3\pi/4$ y π para los desfases respecto al plano XZ . Esto no se produce con los desfases respecto al plano perpendicular, es decir, el YZ , presentando un comportamiento prácticamente simétrico en todo el plano.

Para realizar una caracterización más completa del control se ha realizado un estudio del coste de control en función, también, de la eficiencia. Puesto que se dispone de los valores que toma $u(p)$ a lo largo de toda la evolución del sistema, se puede realizar la integral de la función mediante métodos numéricos para calcular la superficie bajo la curva. En este caso, se ha empleado la regla trapezoidal, que divide en un número finito de trapecios el área bajo la función, obteniéndose los siguientes resultados (Ilustración 3.12).

Se refleja lo que se ha ido comentando a lo largo del texto: conforme mayor es la pureza, la energía que aporta el control al sistema es menor y, por tanto, también lo es su coste. No obstante, se puede apreciar un comportamiento que, en principio, parece contradictorio con lo que se acaba de expresar: cuanto menor es la eficiencia, menor es el coste del control (en un tiempo $t < t_{final}$).

Sin embargo, esto tiene sentido puesto que, atendiendo a las ecuaciones del modelo (2.15), $\beta = \beta(\eta)$, por lo que al disminuir la eficiencia lo hace también uno de los parámetros del control, por lo que se está limitando la fuerza que es capaz de ejercer este y, por tanto, la energía que el feedback es capaz de aportar. A pesar de esto, el coste del control, una vez alcanzado el estado deseado en un tiempo t_{final} (y no en un tiempo $t < t_{final}$), será mayor, puesto que al disminuir la eficiencia, se necesita más tiempo para alcanzar el estado deseado.

Se observa también que para los mismos desfases iniciales que presentaban ciertas dificultades en las gráficas anteriores, el coste de control aumenta considerablemente, procurando estabilizar el sistema a base del incremento de este.

¹² Se recuerda que, tras presentar el primer postulado de la mecánica cuántica, se definió la pureza como $r = \text{Tr}[\rho^2]$, por lo que, en términos del vector de Bloch, $r = (1 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2$.

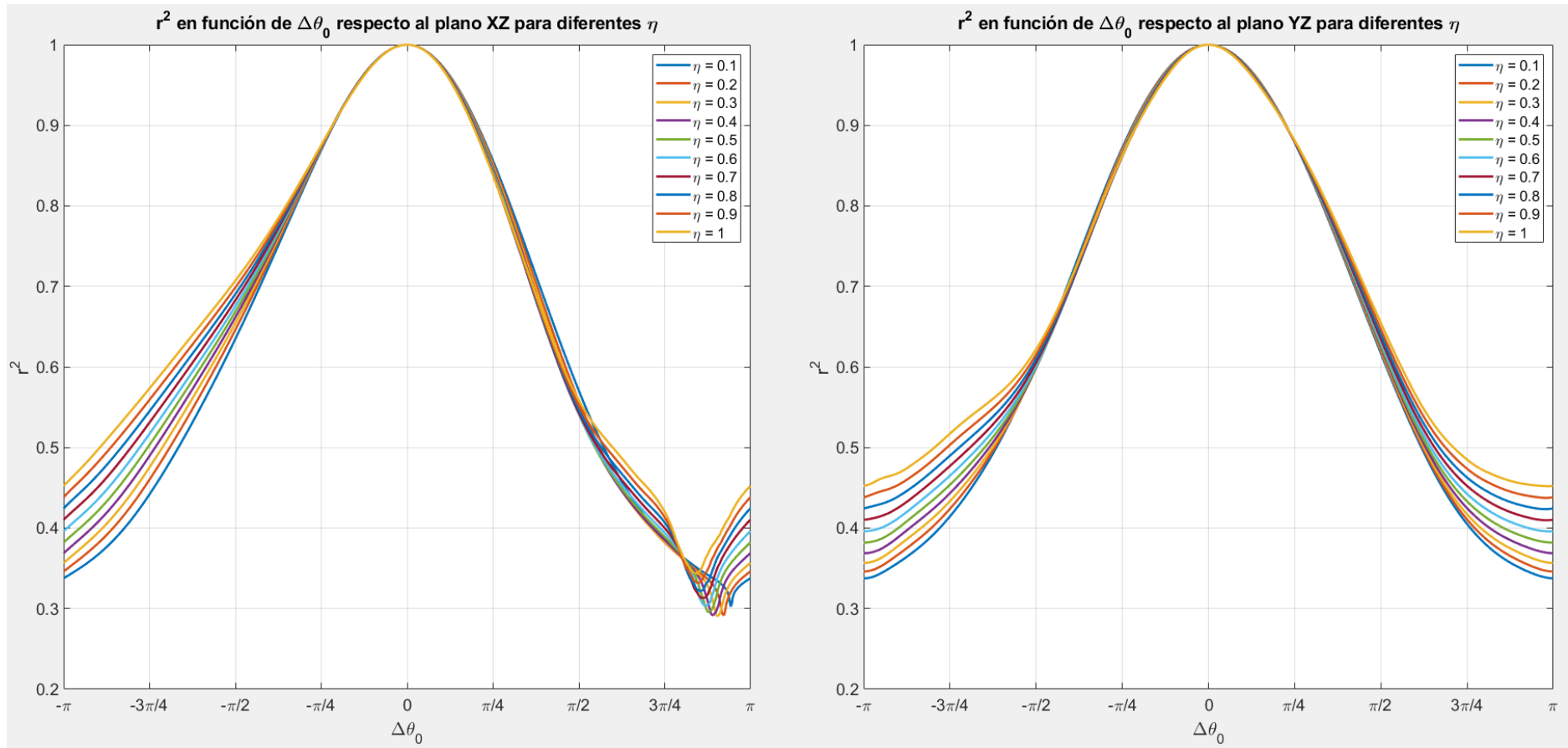


Ilustración 3.11 Simulación de qubit controlado. 300 trayectorias ($T = 10$ s) (I)
 Pureza r^2 en función del desfase inicial $\Delta\theta_0$ con respecto a los planos XZ e YZ para diferentes eficiencias η

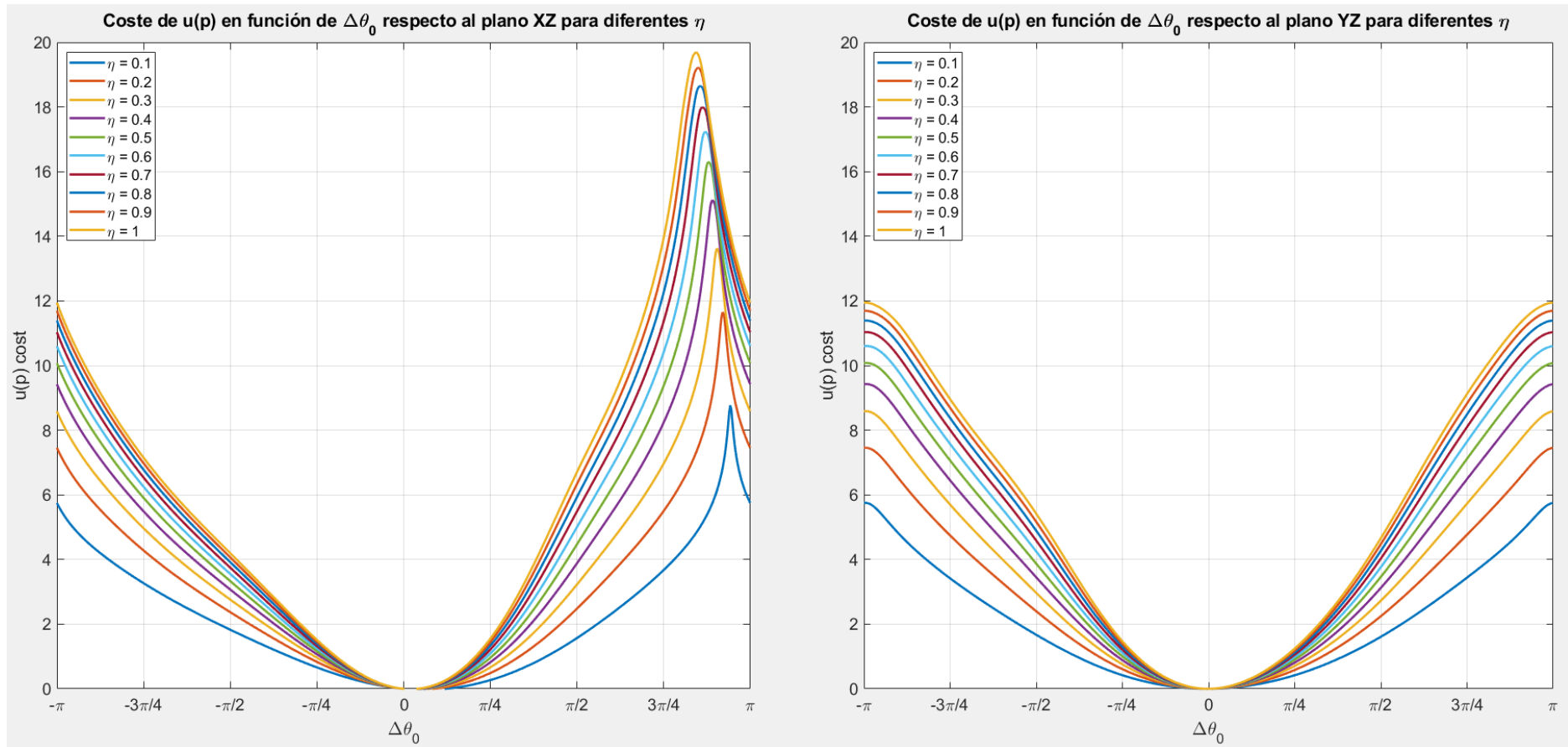


Ilustración 3.12 Simulación de qubit controlado. 300 trayectorias ($T = 10$ s) (II)
 Coste del control $u(p)$ en función del desfase inicial $\Delta\theta_0$ con respecto a los planos XZ e YZ para diferentes eficiencias η



Otro parámetro de interés en los sistemas cuánticos es la ratio de decaimiento Γ_m , o lo que es lo mismo, la velocidad a la que el sistema, en este caso el qubit, pierde sus propiedades cuánticas debido a la disipación. Si se estuviera trabajando, de forma ideal, con un qubit totalmente aislado, se podría mantener el qubit en un estado mixto a lo largo del tiempo, o incluso realizar un control basado en la frecuencia de oscilación de este ([1]). No obstante, como se ha podido comprobar de diferentes formas a lo largo de este proyecto, el entorno provoca la decoherencia del sistema, siendo necesario estabilizar el qubit en uno de los estados clásicos (el deseado) antes de que este se estabilice de forma arbitraria en uno de ellos.

Para estudiar la influencia de esta ratio Γ_m , se procede de forma análoga a como se ha realizado para el estudio de la eficiencia η , mostrando, para los planos de la esfera XZ e YZ y un detector ideal, $\eta = 1$, la pureza alcanzada (Ilustración 3.13) y el coste del control (Ilustración 3.14) tras 10 segundos de simulación para diferentes ratios. El valor mínimo seleccionado de Γ_m y que permite estudiar el sistema sin que se produzcan incompatibilidades es $\Gamma_m = 0,5$.

En las Ilustraciones en cuestión, se puede observar claramente el efecto del decaimiento: cuanto mayor es esta ratio, menor es la pureza alcanzada, sobre todo para valores alejados del estado final deseado. Además, la ratio es mucho más influyente para valores menores de la unidad que para mayores; es decir, la diferencia en la pureza alcanzada es más sustancial al emplear valores $\Gamma_m < 1$ que valores mayores que la unidad, donde todas las líneas se encuentran mucho más cercanas (a pesar de que incluso a partir de $\Gamma_m = 2$ los incrementos en la ratio son mayores).

Respecto al coste del control, al no depender este de Γ_m , conforme aumenta la ratio, aumenta la necesidad de control y, con ello, el coste, presentando un comportamiento bastante parecido en ambos planos de la esfera.

Al igual que ocurría en las gráficas donde se estudiaba la eficiencia, existe una cierta particularidad, sobre todo en referencia a la pureza r^2 , para los desfases iniciales entre $3\pi/4$ y π . Esto se puede deber a, como ya se ha comentado, el sentido natural de rotación del qubit, o, por ejemplo, algún tipo de asimetría en la instalación o el sistema físico.

Comparando la influencia de Γ_m con la de η , se comprueba que es mucho más influyente este último parámetro, siendo, por tanto, menos limitante la eficiencia del detector que la ratio de disipación. Con “menos limitante” se pretende expresar que tanto la pureza como el coste del control presentan menos variación al modificar la eficiencia que la ratio; además, el coste del control, por ejemplo, es en términos generales, menor para diferentes eficiencias que para diferentes ratios.

Esto tiene sentido puesto que en QFC se considera desde un principio la influencia de ruido debido a la medida, por lo que el control actúa también sobre este. En cambio, la disipación es irreversible e incontrolable, siendo un factor que no se puede atenuar y que modifica totalmente la meta u objetivo del control (es necesario alcanzar el estado deseado antes de que se produzca la decoherencia total en vez de controlar el sistema en, por ejemplo, un valor mixto).

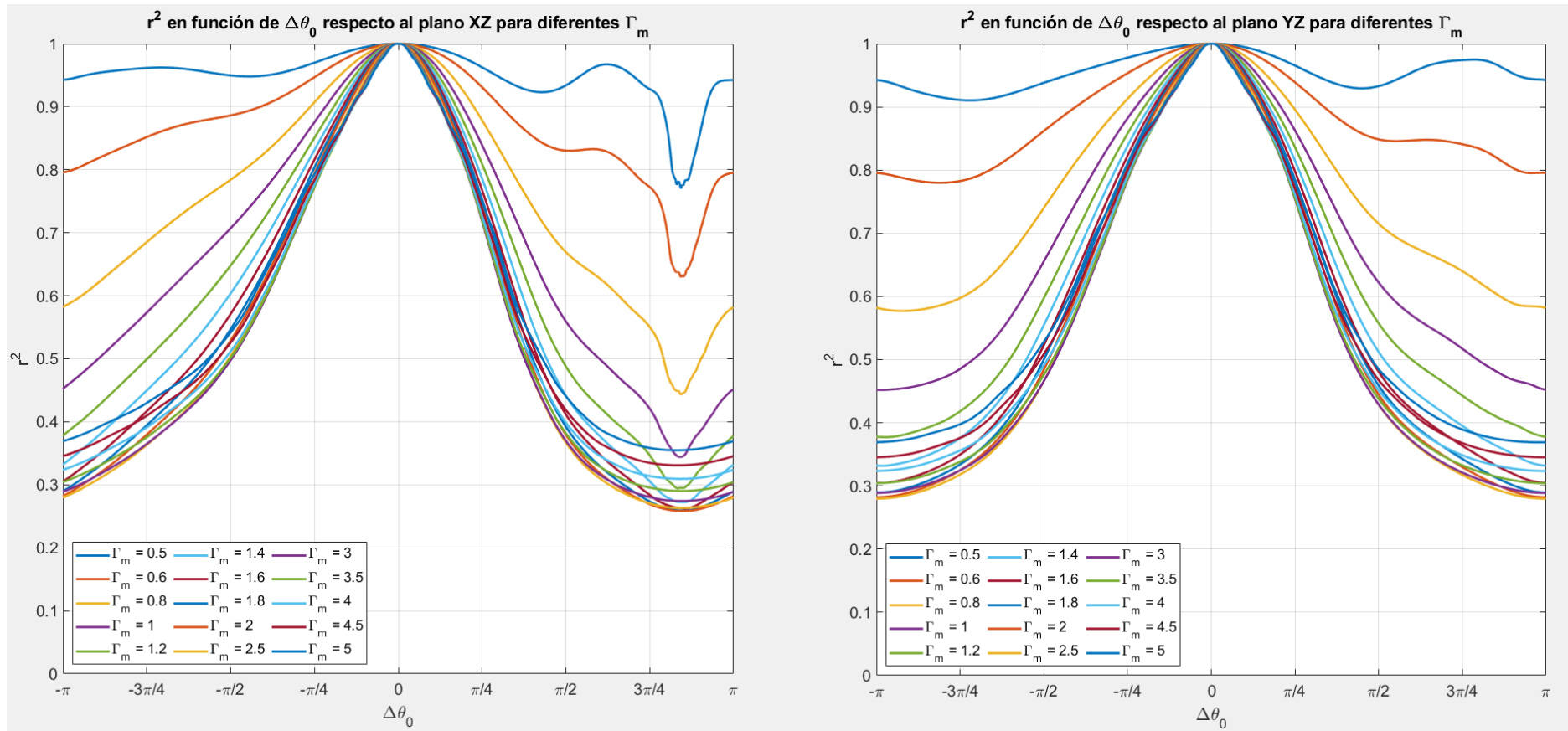


Ilustración 3.13 Simulación de qubit controlado. 300 trayectorias ($T = 10$ s) (I)
 Pureza r^2 en función del desfase inicial $\Delta\theta_0$ con respecto a los planos XZ e YZ para diferentes ratios de decaimiento Γ_m

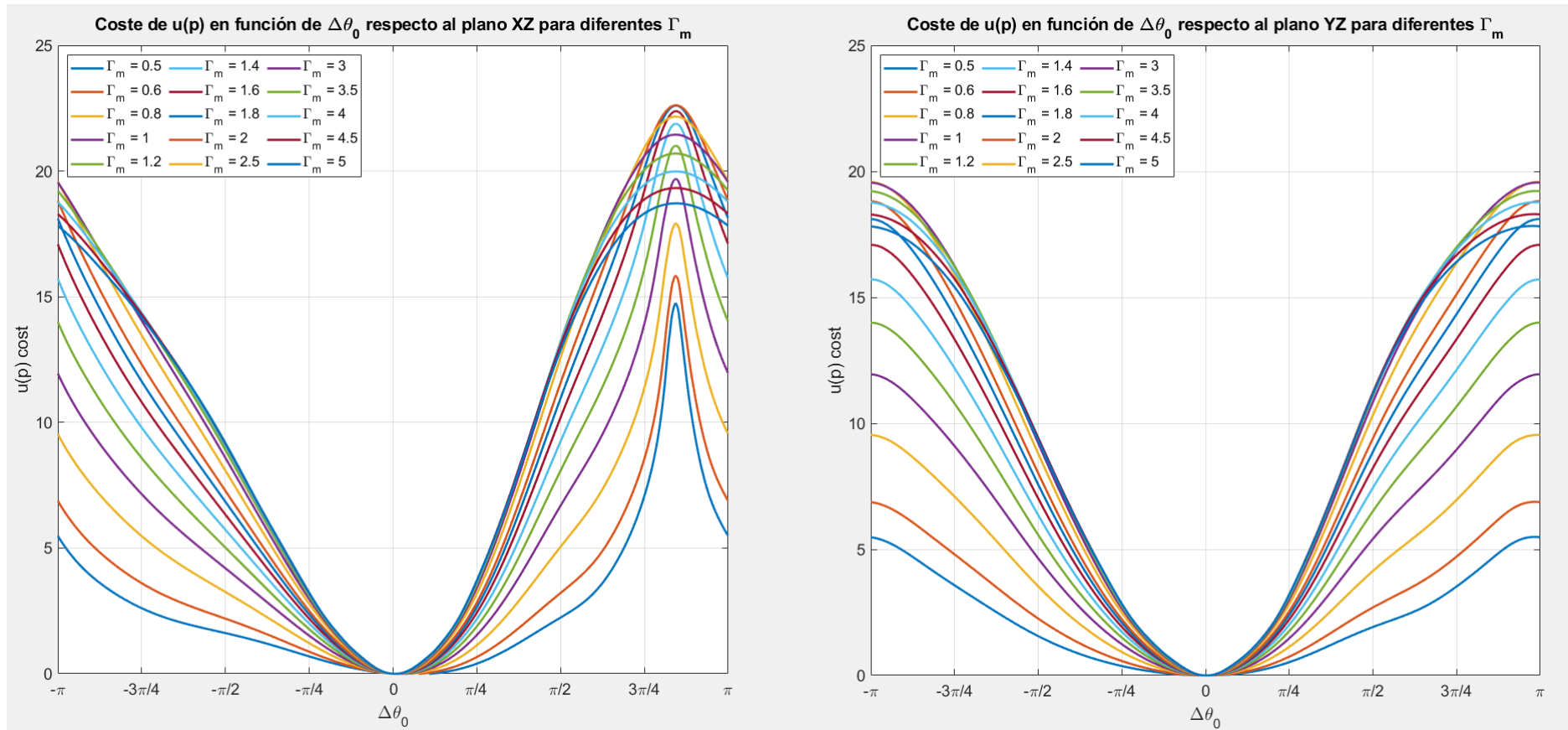


Ilustración 3.14 Simulación de qubit controlado. 300 trayectorias ($T = 10$ s) (II)
 Coste del control $u(p)$ en función del desfase inicial $\Delta\theta_0$ con respecto a los planos XZ e YZ para diferentes ratios de decaimiento Γ_m



Conclusiones y trabajos futuros

El objetivo de este proyecto era realizar la simulación y control de un qubit perteneciente a un sistema global con entorno. Se buscaba, en cierto modo, continuar con el camino lógico a seguir en la Ingeniería de Control Cuántico comenzada en el Trabajo Fin de Grado, donde se trabajó con un qubit aislado que, finalmente, resulta ser un caso ideal del objetivo que se aborda en este proyecto. La idea era aprovechar el conocimiento y lecciones aprendidas del anterior trabajo para poder continuar con un modelo más cercano a la realidad.

Para ello, además de aprovechar los conocimientos en control en el espacio de estados adquiridos en la asignatura Ingeniería de Control de Procesos del Máster, se ha continuado estudiando (y presentando) conceptos como la estabilidad de sistemas no lineales y herramientas para el estudio de esta como el análisis según Lyapunov, que ha permitido inferir características del qubit a partir de la simulación de esta función. Por otro lado, ha resultado fundamental comprender en qué se basa la Teoría de Sistemas Cuánticos Abiertos, donde se engloban el conjunto de herramientas y recursos como la ecuación maestra de Lindblad y que ha posibilitado contextualizar el problema y comprender el modelo del qubit objetivo sometido a diferentes baños o entornos que lo perturban.

Al tratarse de un proyecto que busca acercarse más a la realidad, se ha analizado la instalación experimental asociada al modelo del qubit, así como una aproximación el lazo de control físico que se emplea, siendo en este caso un sistema de realimentación típico de la óptica cuántica. Además, estas ecuaciones en el dominio complejo asociadas al modelo se han transformado, empleando una vez más la esfera de Bloch, a un dominio tridimensional real, acercando así la teoría cuántica a un campo más cercano a la Ingeniería de Control.

Visto el modelo, se realizaron simulaciones numéricas para analizar el comportamiento del qubit tanto no controlado como aplicando una ley de control. En primer lugar, se comprobaron las limitaciones que conlleva que el qubit no se encuentre totalmente aislado. Se ha podido ver con claridad en qué se traducen los coeficientes cuánticos del estado de un qubit, provocando esa respuesta “aleatoria” fuertemente determinada por el estado inicial y que se ha podido cuantificar mediante promedios y probabilidades. Se ha analizado también qué implica la disipación y la correspondiente decoherencia en un sistema cuántico que, aunque en un campo como la mecánica cuántica sea algo obvio, se ha podido ilustrar de forma sencilla mediante la resolución analítica de las ecuaciones promediadas de Itô.

Respecto al control del qubit, se ha comprobado que el modelo cumple con lo que ofrece: alcanzar el estado deseado de los estados de la base clásica para que no se produzca la estabilización en uno de ellos de forma arbitraria debido a la decoherencia. Además, se han analizado parámetros como la eficiencia o la ratio de desvanecimiento para planos característicos de la esfera de Bloch, obteniendo conclusiones a partir de la pureza del sistema o el coste del control.

No obstante, este proyecto podría ser la antesala a la continuación a otros trabajos de Ingeniería de Control cuántico. Resultaría curioso, en primer lugar, estudiar si existe alguna forma de añadir energía al sistema que permita mantener al qubit en algún plano mixto de la esfera de Bloch o, mismamente, siguiendo una trayectoria de evolución, otorgando mayor libertad al control del sistema. No obstante, al tratarse el modelo de una instalación real, habría que considerar limitaciones experimentales que dificultarían la definición de este aporte energético.



Por otro lado, aunque no haya sido objeto de este proyecto, una vez analizado el comportamiento de un qubit más cercano a un caso real, sería interesante finalmente trabajar con dos qubits entrelazados, donde se pueda apreciar que no solo el entorno afecta notablemente al control del qubit, sino también el entrelazamiento cuántico que pueda existir entre dos qubits.



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

ANEJO A. CÓDIGOS EMPLEADOS



Universidad
Politécnica
de Cartagena



La simulación del SDE que modeliza el qubit se ha resuelto mediante la función *sde* incorporado en el Financial Toolbox de MATLAB [17]. Este conjunto de herramientas permite tratar los SDE como objetos y resolverlos numéricamente mediante el método de Euler-Maruyama.

Para definir el sistema, los inputs de la función son el término de tendencia o drift y el término de difusión o difusivo de la ecuación estocástica (ambos han sido definidos como funciones *handle*), así como el tiempo y condiciones iniciales. Una vez definido el sistema, se puede resolver numéricamente el sistema estocástico con la propiedad *simulate* del objeto, indicando el tiempo de simulación, el paso de la resolución numérica, el número de trayectorias y otras características como si se desea que el proceso sea antitético o no (técnica de reducción de varianza consistente en la creación de trayectorias de ruido iguales, pero de signo contrario).

La resolución del problema consta, principalmente, de una primera definición de las constantes y variables, seguida de la construcción y simulación del modelo de SDE a emplear (definición de la señal de control, los términos drift y difusivo, condiciones iniciales, etc.) para aplicar las funciones *sde* y *simulate*, seguida de la serie de cálculos a partir de los resultados obtenidos (cálculo de la función de Lyapunov, de los valores empleados del control, medias de las trayectorias, redimensionamiento de matrices, etc.). Por último, se representan las gráficas de interés.

A partir de este código general, mediante la realización de bucles, modificación de parámetros y funciones sencillas, se pueden obtener el resto de los resultados presentados en la memoria, como el cálculo de la pureza en función de la eficiencia o el coste del control (función *trapz*).

Aunque en principio no aparezcan en la memoria, para la representación de la esfera de Bloch y el qubit en tres dimensiones se pueden emplear funciones generadas en archivos independientes, modificadas para tomar directamente los valores medios de las componentes p_x , p_y y p_z del sistema. Los códigos empleados para este uso son accesibles en [1] y se corresponden con las funciones *plotBlochSphere.m* y *visualizeBlochVect.m*.

Por último, cabe destacar que para la resolución analítica de las ecuaciones promediadas se empleó cálculo simbólico y las funciones *dsolve* y *simplify*, para resolver el sistema ODE y simplificar los resultados, respectivamente.



A.1. Simulación de qubit (no) controlado

```

% (Un)Controlled Qubit
%
% Authors: Ph.D. Javier Molina-Vilaplana
%          Ph.D. Juan Ignacio Mulero-Martinez
%          M's D. Sebastián García Cutillas
%
% We use the MATLAB Financial Toolbox with the Euler-Maruyama method
% (Ito)
%
% Reference: "Dynamics and Control of Open Quantum Systems", Mazyar
% Mirrahimi and Pierre Rouchon, March 2018,
% https://cas.mines-paristech.fr/~rouchon/MasterUPMC/LectureNotes-03-
% 18.pdf
%
% The model is extracted from equation (4.11), page 69 in the above
% reference.

clc; clear; close all;

%% Model Constants
Tmes = 1; % measurement time constant
gamma_m = 1/Tmes; % Spontaneous emission rate
h = 1; % Planck constant
w_eg = 2*pi/Tmes; % Natural frequency
eta = 1; % Efficiency of the detector
dt = 0.01; % step
T = 10*Tmes; % Terminal time

rng('default'); % regenerate random seed

%% (Non) Controlled Qubit model (SDE)
%
% Feedback stabilization of z=1
p_tag_x = 0; p_tag_y = 0; p_tag_z = 1;
[p_tag_x, p_tag_y, p_tag_z] = sph2cart(0,pi/2,1);

alpha=2/Tmes; beta=0.9*sqrt(8*eta*alpha);

if alpha < 0 || beta < 0 || (beta^2 >= 8 * alpha * eta)
    return
end

%u=@(t,X) 0; % Non-controlled qubit

u=@(t,X) (alpha * (X(2) * p_tag_z - X(3) * p_tag_y) + ...
    beta / 2 * (1 - (X(1) * p_tag_x + X(2) * p_tag_y + X(3) *
    p_tag_z)));

% Drift Term:
%
drift=@(t,X) [-gamma_m / 2 * X(1) - 1/h * w_eg * X(2);
    1/h * w_eg * X(1) - gamma_m/2 * X(2) - 1/h * u(t,X) * X(3);
    1/h * u(t,X) * X(2);
    sqrt(eta * gamma_m) * X(3)];

```




```

% px = X(1); py = X(2); pz = X(3);

% Diffusion Term:
%

sigma = @(t,X) [-sqrt(eta*gamma_m) * X(1) * X(3);
  sqrt(eta*gamma_m) * X(2) * X(3);
  sqrt(eta * gamma_m) * (1 - (X(3))^2);
  1]*0.25;
%sigma = @(t,X) [0;0;0;0];

% Simulation of the (un)controlled qubit
%
% Building of the model

[px0,py0,pz0]=sph2cart(0,0,1); %[x,y,z] =
sph2cart(azimuth,elevation,r)
% azimuth: from x to y; elevation: from x-y to z; r = radius;
x0=[px0;py0;pz0;0];
obj = sde(drift,sigma, 'StartTime',0, 'StartState',x0);

nPaths=300; % nTrials or nPaths

[X2,time,dW] = obj.simulate(T/dt, 'DeltaTime',dt, 'nTrials',
nPaths, 'Antithetic', true);

% Resizing vectors
%

px = reshape(X2(:,1,:), [length(time),nPaths]);
py = reshape(X2(:,2,:), [length(time),nPaths]);
pz = reshape(X2(:,3,:), [length(time),nPaths]);

% Computing mean values for the stochastic state paths
%

mX=mean(X2,3);
m_px=mean(px,2);
m_py=mean(py,2);
m_pz=mean(pz,2);

% Computing Lyapunov function
V = 1 - pz.^2;
mV = mean(V,2);

% Signal control u(p)

if u(time,X2)==0
    u_values = zeros(length(time),nPaths);
    m_u = mean(u_values,2);
else
    u_values = (alpha * (X2(:,2,:) * p_tag_z - X2(:,3,:) * p_tag_y) +
    ...
    beta / 2 * (1 - (X2(:,1,:) * p_tag_x + X2(:,2,:) * p_tag_y +
X2(:,3,:) * p_tag_z)));
    u_values = reshape(u_values, [length(time),nPaths]);
    m_u = mean(u_values,2);
end

```



```

%% Displaying output results
%

% p Bloch mean values
%

figure;
subplot(2,1,1);
plot(time,mX(:,1:3));
xlabel('Time');
grid on;
legend('Mean p_{x}', 'Mean p_{y}', 'Mean p_{z}');
subplot(2,1,2);
plot(time,mX(:,4));
xlabel('Time');
legend('y_{t}');
grid on;

% p Bloch paths
%

figure;
subplot(3,1,1);
plot(time,px)
title(['p_{x} frente al tiempo para ', num2str(nPaths), ...
      ' simulaciones'])
xlabel('Time');
ylabel('p_{x}', 'FontSize', 11, 'Rotation', 0)
subplot(3,1,2);
plot(time,py)
title(['p_{y} frente al tiempo para ', num2str(nPaths), ...
      ' simulaciones'])
xlabel('Time');
ylabel('p_{y}', 'FontSize', 11, 'Rotation', 0)
subplot(3,1,3);
plot(time,pz)
title(['p_{z} frente al tiempo para ', num2str(nPaths), ...
      ' simulaciones'])
xlabel('Time');
ylabel('p_{z}', 'FontSize', 11, 'Rotation', 0)

% Control signal u(t,X)
%

figure
subplot(2,1,1);
plot(time,m_u);
xlabel('Time');
grid on;
legend('Mean u(p)');
subplot(2,1,2);
plot(time,u_values);
title(['u(p) frente al tiempo para ', num2str(nPaths), ...
      ' simulaciones'])
xlabel('Time');
ylabel('u(p)', 'Rotation', 0);
grid on;

% Lyapunov function
%
```



```
figure;
subplot(2,1,1);
plot(time,mV);
xlabel('Time');
grid on;
legend('Mean Lyapunov Function');
subplot(2,1,2);
plot(time,V);
title(['V(p) frente al tiempo para ',num2str(nPaths), ...
      ' simulaciones'])
xlabel('Time');
ylabel('V(p)', 'Rotation',0);
grid on;

%% Bloch sphere
%
figure
visualizeBlochVect
```



Bibliografía

- [1] S. García, "Control cuántico óptimo realimentado de un Qubit de estado sólido", Trabajo Fin de Grado, Universidad Politécnica de Cartagena, 2019.
<http://hdl.handle.net/10317/7982>
- [2] "Quantum Technology | The future is Quantum", *Quantum Technology*. [Online].
<https://qt.eu>
- [3] F. Arute et al., "Quantum supremacy using a programmable superconducting processor", *Nature*, vol. 574, no. 7779, pp. 505-510, 2019.
<https://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>
- [4] C. Cookson, "PsiQuantum expects commercial quantum computer by 2025", *Financial Times*, 2021.
<https://www.ft.com/content/a5af3039-abbf-4b25-92e2-c40e5957c8cd>
- [5] J. Gil Nobajas and A. Rubio Díaz-Cordovés, *Fundamentos de control automático de sistemas continuos y muestreados*. San Sebastián: J.J. Gil, 2009.
- [6] L. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*. American Mathematical Society, 2014.
- [7] R. Williams and D. Lawrence, *Linear state-space control systems*. Hoboken, N.J.: John Wiley & Sons, 2007, pp. 198-217.
- [8] "Fundamental properties of Cbits and Qbits", lecture notes on Quantum Computation, N. Mermin, Cornell University, 2006
<http://www.lassp.cornell.edu/mermin/qcomp/chap1.pdf>
- [9] D. Manzano, "A short introduction to the Lindblad master equation", *AIP Advances*, vol. 10, no. 2, 2020.
<http://dx.doi.org/10.1063/1.5115323>
- [10] "Theory of Open Quantum Systems", class notes for PHYS450, Department of Physics and Astronomy, Northwestern University, 2013.
<https://sites.northwestern.edu/koch/teaching/>
- [11] K. Jacobs and A. Shabani, "Quantum feedback control: how to use verification theorems and viscosity solutions to find optimal protocols", *Contemporary Physics*, vol. 49, no. 6, pp. 435-448, 2008.
<https://doi.org/10.1080/00107510802601781>.
- [12] P. Rouchon and M. Mirrahimi, *Dynamics and Control of Open Quantum Systems*. Paris, 2015, pp. 69-71.
<https://cas.mines-paristech.fr/~rouchon/MasterUPMC/LectureNotes-03-18.pdf>
- [13] M.F. Noriega, "Midiendo la Detección Homodina con Resolución de Número de Fotones", Trabajo Fin de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, 2010.
<http://132.248.9.195/ptb2010/agosto/0660223/Index.html>
- [14] A. Auyuanet, E. Benech, H. Failache and A. Lezama, "Full statistics of ideal homodyne detection using real (noisy) local oscillator", *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 36, no. 1, p. 140, 2018.
<https://doi.org/10.1364/JOSAB.36.000140>



- [15] M. Mirrahimi and R. Van Handel, "Stabilizing Feedback Controls for Quantum Systems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 46, no. 2, pp. 445-467, 2007.
<https://doi.org/10.1137/050644793>
- [16] J. Wang and H. Wiseman, "Feedback-stabilization of an arbitrary pure state of a two-level atom", *Physical Review A*, vol. 64, no. 6, 2001.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.64.063810>
- [17] "Financial Toolbox Documentation", *MathWorks España*. [Online].
<https://es.mathworks.com/help/finance/>