

# IMPACTO COMPUTACIONAL DEL ESQUEMA DIAGONALMENTE IMPLÍCITO DE RUNGE-KUTTA (ESDIRK) EN LA SIMULACIÓN NUMÉRICA 1-D TRANSITORIA DE FLUJOS CON CAMBIO DE FASE.

LOPEZ SILVA Ricardo <sup>(1)</sup>; LECUONA NEUMANN Antonio <sup>(1)</sup>, VENTAS GARZÓN Rubén <sup>(1)</sup>,  
VEREDA ORTIZ Ciro <sup>(1)</sup>

ralope1@ing.uc3m.es

<sup>(1)</sup> Grupo de investigación ITEA, Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos, Universidad Carlos III de Madrid, Av. De la Universidad 30, Leganés, Madrid, España. Tel: +34 916246224 Fax: +34 916249430.

## RESUMEN

La simulación numérica 1-D transitoria para flujos con cambio de fase usando esquemas temporales de orden superior es deseable, debido a la gran variación instantánea de las variables dependientes. El empleo del esquema diagonalmente implícito de Runge-Kutta (ESDIRK) es una alternativa interesante, sobre todo cuando el problema se comporta numéricamente de forma rígida, como es el caso de la ebullición en un fluido. Si bien este esquema nos permite aumentar el paso temporal de integración, el mismo también incrementa el tiempo de cómputo requerido. En el presente trabajo se estudia el efecto que tiene el aumento en el orden del esquema temporal sobre el cómputo de un flujo sub-enfriado en un intercambiador de calor simplificado, modelado como una tubería. El caso de estudio es el problema de Bartolomei *et al* [1] para distintas condiciones de flujo de calor y flujo másico en la entrada. Los resultados muestran que un algoritmo de paso temporal fijo, con orden de precisión variable, es una opción a ser considerada para la simulación numérica 1-D transitoria de intercambiadores de calor con comportamiento numéricamente rígido.

Palabras clave: Tiempo de cómputo, Runge-Kutta, simulación numérica 1-D transitoria.

## 1. Introducción

En ingeniería térmica el uso de intercambiadores de calor es esencial, ya que los mismos son parte fundamental de los sistemas involucrados. Entre sus múltiples aplicaciones podemos

mencionar los sistemas de climatización, refrigeración, generadores de vapor, frío solar, etc. En la actualidad, el modelado matemático de intercambiadores de calor mediante uso de técnicas numéricas de CFD 1-D ha cobrado importancia, debido a su alta versatilidad, economía, robustez y fiabilidad en los resultados. Puede decirse que se ha convertido en una herramienta indispensable, no solo en ámbito de la investigación sino también en la industria.

Muchos investigadores han usado técnicas de CFD 1-D para el análisis de intercambiadores de calor en estado transitorio. En el estudio de intercambiadores de placas se pueden encontrar los trabajos de Sharifi [2], Das [3], Das *et al.* [4] y [5], y Lakshmanan [6], entre otros. Estos trabajos comparten una metodología común; debido a la configuración geométrica del intercambiador, los algoritmos empleados para su aproximación numérica consideran una sucesión finita de problemas unidimensionales que interactúan entre sí, desde  $i = 1, 2, \dots, k$ , donde  $k$  es el número de tubos o placas que conforman el intercambiador. Esta metodología ha sido de mucho éxito; sin embargo, al ser problemas sin cambio de fase, numéricamente son más estables y su convergencia es rápida.

Con el tratamiento adecuado se puede extender la formulación para considerar el cambio de fase, típicamente de líquido a vapor. De este modo aumenta la complejidad matemática de los modelos, trayendo como consecuencias que, por un lado su estabilidad numérica esté condicionada, y por el otro el cambio de fase ocurre de manera súbita. Es decir, la fracción de la sección transversal ocupada por el vapor, fracción vacía (void fraction), adquiere un comportamiento numéricamente rígido. Esto incide en que la variación instantánea de la densidad media del fluido es localmente muy alta, necesiándose un tratamiento numérico especial. Por ello se requiere el empleo de esquemas de orden superior de precisión temporal.

Una alternativa sencilla para aumentar el orden de precisión temporal es mediante el empleo del esquema de Runge-Kutta diagonalmente implícito (ESDIRK), método que fue desarrollado para la aproximación de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs). Este método ostenta dos características importantes: i) Al ser un método A-estable e implícito, resulta ideal para problemas numéricamente rígidos, ii) Es de fácil implementación computacional. Su empleo en problemas en la dinámica de fluidos es reciente. Por ejemplo, Ijaz [7] hizo uso de este esquema en problemas 2-D para flujos incompresibles. Más recientemente los autores del presente trabajo [8] lo han implementado en problemas 1-D con cambio de fase en una tubería, obteniendo excelentes resultados, con ello ampliando el campo de aplicación del esquema ESDIRK.

En la literatura abierta sobre resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDEs) y/o dinámica de fluidos computacional (CFD) un aspecto que no es abordado en profundidad es el tiempo de convergencia. Por ello, el objetivo del presente trabajo es realizar un estudio comparativo de un problema con cambio de fase (líquido-vapor) en una tubería, con el uso del esquema ESDIRK. De ese modo se podrán extrapolar tales resultados para la elección del esquema ESDIRK más adecuado para un intercambiador de calor dependiendo de las condiciones de flujo másico en la entrada, flujo de calor en la pared y el paso de tiempo.

## 2. Formulación matemática

Asumamos que el flujo es unidimensional a lo largo del eje  $z$  y que la conducción térmica es despreciable en esa dirección. Realizando balances de masa, cantidad de movimiento y energía en un elemento diferencial de fluido se obtiene el modelo cuasi-homogéneo. Los detalles del

modelo pueden ser consultados en Wallis [9] y Kandlikar [10]. Escrito en forma conservativa, este modelo adquiere la siguiente expresión en forma diferencial:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial z} = S_i \quad (1)$$

En esta ecuación, los vectores  $W$ ,  $F$  y  $S$  se definen como:

$$W_i = \begin{bmatrix} \rho_{TP} \\ \frac{\dot{m}}{A} \\ \rho_{TP} \cdot h_{TP} \end{bmatrix} \quad F_i = \begin{bmatrix} \frac{\dot{m}}{A} \\ \frac{1}{A_c} \Theta \cdot \dot{m}^2 \\ \frac{\dot{m}}{A_c} \cdot h_{TP} \end{bmatrix} \quad S_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} - \Phi \cdot f_g \cdot \frac{\dot{m}^2}{8 \cdot \rho_{TP} \cdot A_c^2} \cdot \frac{S_w}{\Delta V} - \rho_{TP} \cdot g \cdot \sin \alpha \\ q'' \cdot \frac{4 \cdot D}{A_c} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\Theta = \frac{x^2}{\rho_g \varepsilon} + \frac{(1-x)^2}{\rho_L (1-\varepsilon)}$$

Adicionalmente se emplea la ecuación de estado para la determinación de la temperatura y de la densidad en función de la presión y de la entalpía.

### 3. Ecuaciones de Cierre

En el modelo descrito por el sistema de ecuaciones (1) se debe incluir alguna información empírica para cerrar la formulación. Para ello, el factor de fricción  $f$  se puede calcular con la correlación de Churchill [11] y la fracción vacía con la correlación de Premoli [12]. El ajuste en la fracción de vacío, para considerar la ocurrencia de ebullición sub-enfriada, se realiza con el modelo de ajuste del perfil de la fracción vacía de Ahmad [13].

### 4.- Discretización espacial

Para la discretización espacial del sistema de ecuaciones (1) se emplea el método de los volúmenes finitos. La discretización se realiza en una malla desplazada, donde en el centro de cada celda se colocan las variables escalares (entalpía, densidad, calidad de vapor, etc.) y en las fronteras se colocan la velocidad (o flujo másico). Los términos convectivos son aproximados mediante un esquema UPWIND de primer orden y el acople entre el flujo másico y la presión se realiza con el algoritmo SIMPLE [14]. La forma discreta estacionaria del sistema (1) escrito de la forma  $A_e \dot{m}_e + A_w \dot{m}_w + A_{Ee} \dot{m}_{Ee} = b$  es:

$$\left. \begin{aligned} A_e &= -(A_w + A_{Ee}) \\ A_w &= -\text{MAX}[\dot{m}_w; 0] \Theta_p \\ A_{Ee} &= -\text{MAX}[-\dot{m}_e; 0] \Theta_E \\ b &= (P_p - P_E) A_c - \Phi \frac{f_g}{8} \frac{P_H \cdot \Delta Z}{A_c^2 \cdot \rho_g} |\dot{m}_e| \dot{m}_e - \rho_{TP} g \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (2) \quad \left. \begin{aligned} A_p &= -(A_w + A_E) \\ A_w &= -\text{MAX}[\dot{m}_w; 0] \\ A_E &= -\text{MAX}[-\dot{m}_e; 0] \\ b &= q'' \frac{4D}{A_c} \Delta V \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

### 5. Método de Runge-Kutta y discretización temporal

En análisis numérico es común aproximar numéricamente la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, o problemas de Cauchy, que sean formulados de la siguiente forma:

$$\frac{du}{dt} = F(u, t) \quad u(t=0) = u_0 \quad t \in [0, \infty) \quad (4)$$

El orden de precisión temporal se incrementa mediante una fórmula de cuadratura (5), evitando así el cálculo de todos los términos de la serie de Taylor correspondiente.

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad \text{Donde} \quad k_i = F\left(t_n + c_i \Delta t, u_n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right) \quad (5)$$

La representación de los coeficientes de la cuadratura en la denominada tabla de Butcher es:

$$\begin{array}{c|cc} & c_1 & \dots & c_s \\ c & A & \vdots & \\ \hline & b^T & c_s & \\ \hline & & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & & b_1 & \dots & b_s \end{array} \quad (6)$$

Los esquemas ESDIRK considerados en este trabajo son: el esquema clásico de primer orden (Euler Backward), los esquemas de tercer orden de precisión de Kennedy & Carpenter (ES3) [15], Alexander (denominado ES33a) [16] y el esquema de cuarto orden de Svortsov [17] (denominado ES54). La tabla de Butcher de estos esquemas puede ser consultada en el Apéndice.

### 6. Implementación computacional

Tomando en cuenta la Ecuación (4), se verifica que la pendiente (F) del problema de valor inicial corresponde al problema en estado estacionario del sistema (1) con signo cambiado, es decir.

$$F = -\left(A_p u_p + \sum_{nb} A_{nb} u_{nb} - b\right) \quad (7)$$

Por tanto, en cada estación (s) dentro del intervalo [t, t + Δt] se debe resolver el problema intermedio:

$$u_p^{(s)} = u_p^n + \Delta t \sum_{r=1}^s a_{rs} F^{(s)} = \Delta t \cdot a_{ss} F^{(s)} + \Delta t \sum_{r=1}^{s-1} a_{rs} F^{(r)} \quad (8)$$

Introduciendo (7) en (8) y reordenando la ecuación resultante, se obtiene la versión discreta del problema de valor inicial, usando el esquema ESDIRK:

$$\left(\frac{1}{a_{ss} \Delta t} + A_p\right) u_p^{(s)} + \sum_{nb} A_{nb} u_{nb}^{(s)} = \frac{1}{a_{ss} \Delta t} u_p^n + b^{(s)} + \frac{\Delta t}{a_{ss}} \sum_{r=1}^{s-1} a_{rs} F^{(r)} \quad (9)$$

El algoritmo numérico consiste en resolver el sistema de ecuaciones (9) desde r = 1 hasta r = s. Evidentemente, al tratarse de un sistema de ecuaciones diferenciales, se comenzará por resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento y conservación de masa mediante el algoritmo SIMPLE y posteriormente la ecuación de la energía.

### 7. Experimentos numéricos

Para determinar el impacto computacional que tiene el orden de precisión del esquema ESDIRK en problemas con cambio de fase, se repite numéricamente el experimento de ebullición sub-enfriada realizado por Bartolomei [1]. Este experimento consiste en una tubería

vertical sometida a un flujo de calor constante, donde agua sub-enfriada entra a un caudal másico constante, implicando así una solución estacionaria a largo plazo. Los demás datos del experimento se muestran en la Tabla 1. La discretización espacial de todas las simulación es de  $\Delta z = 0.03$  m y el criterio para establecer que se alcanzó el estado estacionario es que la norma  $L_1$  de todas las variables sea menor a  $1 \times 10^{-4}$ . En todos los casos la comparación se realiza con el tiempo de cómputo requerido por el ordenador para alcanzar el estado estacionario ( $t_{CPU}$ ). En este trabajo se usó un ordenador personal Intel®, Core™ i5-2400, con dos núcleos 3.1 y 3.3 GHz respectivamente.

**Tabla 1.** Condiciones del experimento de Bartolomei

$D$ [m]	$L$ [m]	$P(z=L)$ [bar]	$T(z=0)$ [°C]
0,012	1,5	108	266,7

Las Figuras 1.a y 1.b presentan el tiempo de cómputo requerido para alcanzar el estado estacionario para dos condiciones de flujo de calor en la pared distintos, variando el flujo másico en la entrada del tubo, expresado como el flujo másico, caudal por unidad de área de sección transversal ( $G$ ).

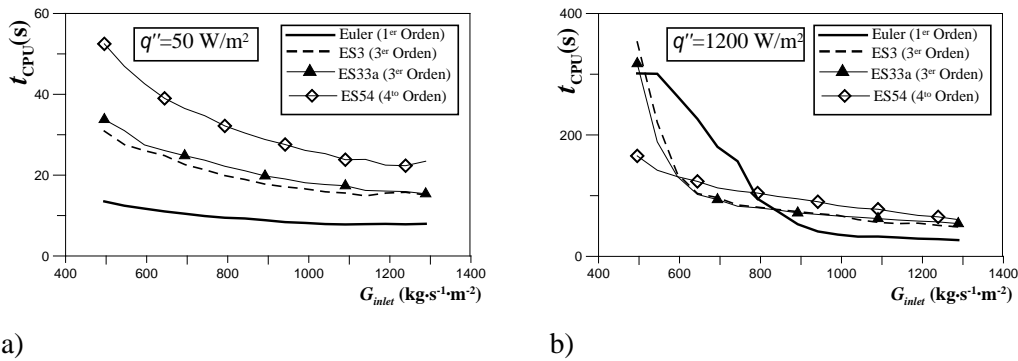


Figura 1 Tiempo de computo total para: a)  $q'' = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , b)  $q'' = 1200 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Se observa que en el primer caso (Figura 1.a), con menor flujo de calor en la pared, que el método Euler Backward alcanza el estacionario a menor costo computacional, mientras que el esquema de 4º orden de Svortsov ES54 es el que más tiempo requiere. Este efecto radica en que por la concepción del algoritmo numérico se debe aproximar el problema tantas veces como número de estaciones internas tenga el esquema ESDIRK considerado; por ejemplo, para el método de Euler dentro de  $[t, t + \Delta t]$  se debe resolver un solo problema implícito (en  $t = t + \Delta t$ ), mientras que para el esquema ES54 se deben resolver 5 problemas implícitos correspondientes a la posiciones  $t_i = t + c_i \Delta t$  (con  $c_i$  de acuerdo a su representación en la tabla de Butcher, donde  $i = 2, \dots, 5$ ). Sin embargo, al aumentar el flujo de calor en la pared (Figura 1.b) se observa que hay un punto en torno a  $G = 850 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  en donde el método de Euler demanda mayor tiempo de cálculo.

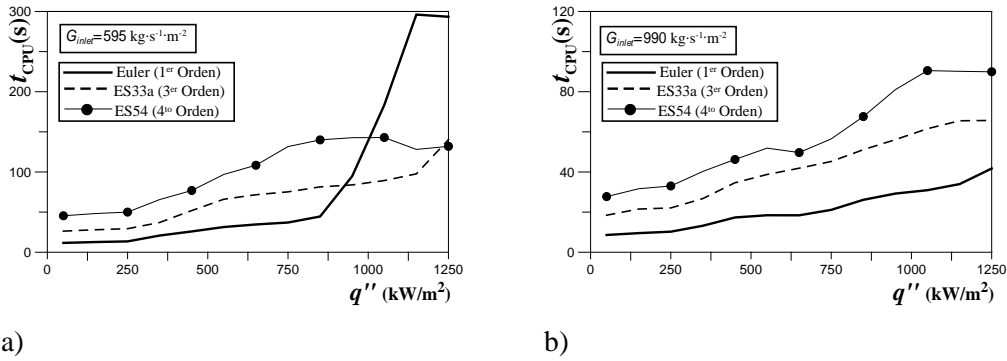


Figura 2 Tiempo de computo total para: a)  $G_{inlet} = 595 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ , b)  $G_{inlet} = 990 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$

Un comportamiento similar se puede observar cuando se mantiene fijo el flujo másico y se varía el flujo calor (Figuras 2.a y 2.b). De nuevo aparecen dos zonas diferenciadas cuando  $G_{inlet} = 595 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$  en torno a  $q'' = 1.000 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  (Figura 2.a).

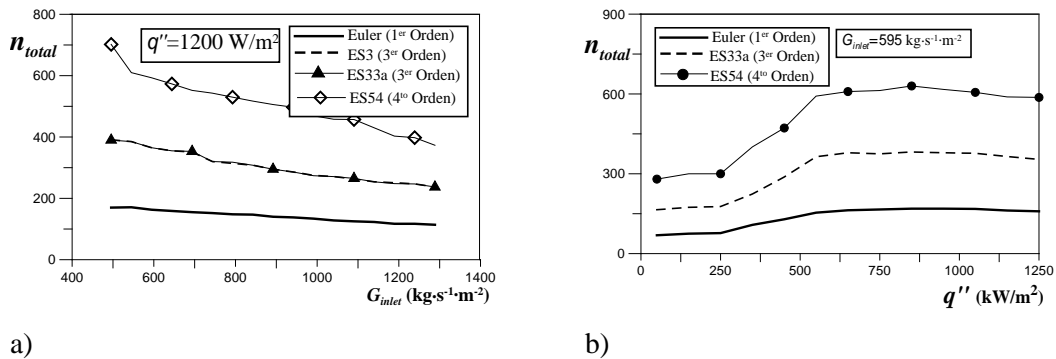


Figura 3 Numero de iteracions totales: a)  $q'' = 1.200 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ , b)  $G_{inlet} = 595 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$

Las Figuras 3.a y 3.b muestran el número de iteraciones totales requerido para alcanzar el estado estacionario. Ambas corresponden a los casos donde los esquemas de orden superior tenían menor tiempo de cálculo en las Figuras 1 y 2. Se observa que el número de iteraciones es siempre menor para el método de Euler, por lo que se infiere que el tiempo de cómputo individual requerido en cada paso de tiempo debe ser mayor para alcanzar un tiempo total de cómputo mayor. La explicación de este comportamiento, desde el punto de vista físico, radica en que al tener flujos de calor elevados, la ebullición ocurre de manera súbita, aumentando la rigidez numérica del sistema. Y cuando el flujo másico es menor, los tiempos de residencia del fluido dentro del tubo son mayores, ocasionando que una mayor cantidad de fluido sea evaporada. En esos casos se requiere mayor precisión temporal para capturar mayor información de la física relevante del problema.

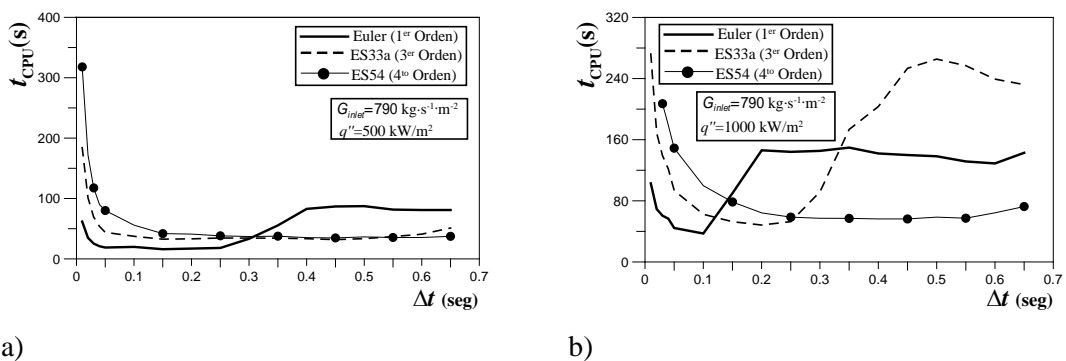


Figura 4 Tiempo de cómputo total en función del paso de tiempo empleado: a)

$$G_{inlet} = 790 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \text{ y } q'' = 500 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}, \text{ b) } G_{inlet} = 790 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \text{ y } q'' = 1.000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Por último, si se repite el problema, pero haciendo un barrido en el paso de tiempo utilizado, resulta que para pasos de tiempos muy pequeños el tiempo de cómputo del método de Euler es menor. Lo contrario ocurre si se aumenta el paso de tiempo a valores mayores de 0,35 s. Esto confirma los resultados de las Figuras 1, 2 y 3. En ellas, para ciertas condiciones, se requiere un mínimo de precisión temporal, evitando así un número excesivo de iteraciones internas o individuales, aproximando así satisfactoriamente el problema en un menor tiempo computacional. No obstante, al resolver un problema de simulación no se conoce a priori cual es el paso de tiempo óptimo, de modo que una alternativa para reducir el tiempo de cómputo es trabajar con métodos con pasos de tiempos fijos, aumentando el orden de precisión temporal en los momentos en que el mismo sea requerido.

## 8. Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos se puede concluir:

- El orden de precisión temporal incide de manera directa en el tiempo de cómputo total.
- El número de iteraciones totales es siempre mayor a medida que se aumenta el orden de precisión del esquema ESDIRK.
- Para condiciones de cálculo extremas, un orden de precisión temporal mayor disminuye el tiempo de cómputo.
- El desarrollo de un algoritmo óptimo en tiempo de cómputo es posible con métodos de paso de tiempo fijos aumentando el orden de precisión cuando sea requerido.

## 9. Agradecimientos

Se quiere agradecer la financiación aportada por el Ministerio de Economía y Competitividad mediante el proyecto ENE2013-45015-R

### Nomenclatura

$A_c$	Sección de paso ( $\text{m}^2$ )	$t$	Tiempo (s)	<b>Sub-índices</b>	
$a$	Matriz de Butcher	$t_{\text{CPU}}$	Tiempo de cómputo	$Ee, e, w,$ $W, P, E$	Coordenadas cardinales
$D$	Diámetro	$u$	Función genérica	$TP$	Bifásico
$f$	Factor de fricción	$x$	Calidad	nb	Nodos vecinos
$G$	Flujo másico ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$z$	Coordenada axial		
$g$	Constante de la gravedad	<b>Griega</b>		<b>Super-índices</b>	
$h$	Entalpía específica ( $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ )	$\alpha$	Angulo (rad)	<b>s</b>	Estación
$L$	Longitud de la tubería	$\Delta V$	Volumen diferencial	$r$	Contador
$\dot{m}$	Flujo másico ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$\Delta t$	Paso de tiempo (s)		
$n$	Número de iteración	$\Delta Z$	Paso especial (m)		
$P$	Presión (Pa)	$\varepsilon$	Fracción vacía		
$P_H$	Perímetro hidráulico (m)	$\rho$	Densidad ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )		

$q''$  Flujo de calor ( $\text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$ )  $\Phi$  Multiplicador de Lockhart y Martinelli

### REFERENCIAS

- [1] BARTOLOMEI, G.G, *et al.*, J. M. *An experimental investigation of true volumetric vapor content with sub-cooled boiling in tubes.* Thermal Engineering, 1982, vol. 3, n° 29, pp. 132-135.
- [2] SHARIFI F, NARANDJI G. *Dynamic Simulation of Plate Heat Exchangers,* International Communications in Heat and Mass Transfer, 1995, vol. 22, pp. 213-225.
- [3] DAS S.K., MURUGESAN K. *Transient Response of Multipass Plate Heat Exchanger with Axial Thermal Dissipation.* Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 2000, vol. 43, pp. 4327-4345.
- [4] DAS S.K, SPANG B, ROETZEL W. *Dynamic Analysis of Plate Heat Exchangers with Dispersion in Both Fluidos.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 1995, vol. 38, pp. 1127-1140.
- [5] DAS S.K, SPANG B, ROETZEL W. *Dynamic Behaviour of Plate Heat Exchangers-Experiments and Modeling.* Journal of Heat Transfer, 1995, vol. 117, pp. 859-864.
- [6] LAKSHMANAN C. C. *Dynamic Simulations of Plate Heat Exchangers.* Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 1990, vol. 33, no. 5, pp. 995-1002.
- [7] IJAZ, M. ANAND. N.K. *Simulation of Unsteady Incompressible Viscous Flow Using Higher-Order Implicit Runge-Kutta Methods: Staggered Grids.* Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 52, 2007.
- [8] LOPEZ R., LECUONA A., NOGUEIRA J. , VEREDA C. *Effect of the Order of Accuracy in the Singly Diagonally Implicit Runge-Kutta (ESDIRK) Scheme in the Determination of the Transient Void Fraction and Pressure Drop in Pipes.* VII Congreso Ibérico de Ciencias y Técnicas del Frío (CYTEF 2014). Tarragona, España, 2014.
- [9] WALLIS G. B. *One-dimensional Two-phase Flow,* McGraw Hill, 1969.
- [10] KANDLIKAR S.C. *Handbook of Phase Change: Boiling and Condensation,* Taylor & Francis, 1999.
- [11] CHURCHILL S. W. *Friction Factors Equations Spans all Fluids Flow Regimes.* Chemical Engineering, 1977, n° 84, pp. 91-102.
- [12] PREMOLI A. *A dimensional correlation for evaluating two phase mixture density.* La Termotecnica, 1971, n° 25, pp. 17-26
- [13] . AHMAD S. Y. *Axial Distribution of Bulk Temperature and Void Fraction in a Heated Channel with Inlet Subcooling.* Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, 1970 vol. 92, n° 4, pp. 595-609.
- [14] S. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow,* Mc. Graw Hill, 1980.
- [15] KENNEDY C. A. y CARPENTER M. H. *Additive Runge-Kutta schemes for convection-diffusion-reaction.* Applied Numerical Mathematics , 2003, n° 44, pp. 139-181.



- [16] ALEXANDER, R. *Design and Implementation of DIRK Integrators for Stiff Systems*. Appl. Numer. Math., 2003, n° 46, pp. 1-17.
- [17] SVORTSOV L. M. *Diagonally Implicit Runge-Kutta for Stiff Problems*. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2110-2123.
- [18] BUTCHER J.C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 2008, 2ª edición.
- [19] FERZIGER J. H. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 2003, Springer, 3ª Edición, 2003.
- [20] HAIRER H., WANNER G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff Problems*, 1996, Springer, 1996.

Apéndice

Tablas de Butcher de los esquemas ESDIRK considerados.

Euler Backward

0	0	0
1	0	1
	0	0

ES3, Kennedy & Carpenter [14]

0	0	0	0	0
0,871733	0,4358665	0,4358665	0	0
0.6	0,257648	-0,0935147	0,4358665	0
1	0,187641	-0,595297	0,9717899	0,4358665
	0,187641	-0,595297	0,9717899	0,4358665

ES54, SKVORTSOV [17], [18]

0	0	0	0	0	0	0
1/3	1/6	1/6	0	0	0	0
2/3	1/6	1/3	1/6	0	0	0
1	11/24	-1/4	5/8	1/6	0	0
1	11/36	-1/6	11/12	-2/9	1/6	0
1	1/8	3/8	3/8	-1/12	1/24	1/6
	1/8	3/8	3/8	-1/12	1/24	1/6

ES33a, R. Alexander [15]

0	0	0	0	0
0,871733	0,435866	0,435866	0	0
0,608966	0,264880	-0,091780	0,435866	0
1	0,192101	-0,618121	0,990154	0,435866
	0,192101	-0,618121	0,990154	0,435866