

ADAPTACIÓN DEL MÉTODO CTF A CERRAMIENTOS CON ALTA INERCIA TÉRMICA

MENA BALADÉS, Jesús Daniel ⁽¹⁾; RODRÍGUEZ MAESTRE, Ismael ⁽¹⁾;
CUBILLAS FERNÁNDEZ, Paloma Rocío ⁽¹⁾; ÁLVAREZ GÓMEZ, PASCUAL ⁽¹⁾

jesusdaniel.mena@uca.es

⁽¹⁾Universidad de Cádiz, E.P.S. de Algeciras, Grupo de Investigación en Ingeniería Térmica (iiTer)

RESUMEN

El método de las funciones de transferencia en conducción de calor (CTF) es un método ampliamente utilizado por los programas de simulación térmica de edificios para el cálculo de la transferencia de calor a través de muros multicapas, sin embargo, su aplicabilidad está condicionada a los problemas de estabilidad de la solución debido a los errores procedentes de los procedimientos de cálculo de los coeficientes de la función de transferencia, principalmente en situaciones donde el número de Fourier es bajo, ya sea debido a la reducción del paso de tiempo de simulación o a muros de gran espesor, como los presentes en edificios históricos. Por tanto, el uso de dichas funciones, para muros con alta inercia térmica, se encuentra limitado en los programas de simulación térmica de edificios, incluso en los de reconocido prestigio como pueden ser TRNSYS o EnergyPlus.

La presente comunicación propone una solución que permite aplicar el método de las funciones de transferencia en conducción de calor (CTF) en muros independientemente del número de Fourier asociado, evitando los problemas numéricos. El presente artículo muestra los resultados obtenidos para diferentes casos de estudio comparándolos con soluciones analíticas u obtenidas por el método de elementos finitos (ANSYS®).

Palabras clave: función de transferencia de calor por conducción (CTF), muros alta inercia térmica.

1. Introducción

La edificación es uno de los sectores que más energía consume, pudiendo ya llegar a superar otros como la industria y el transporte. El sector residencial supuso el 27% y el sector servicios el 8% del total de la energía consumida en el mundo en 2011, según la Agencia Internacional de la Energía [1]. Dentro del sector de la edificación, los sistemas de calefacción/refrigeración son los que más energía consumen representando aproximadamente el 50% del total anual, lo que equivale al 10-20% del consumo de energía final [2].

Los programas de simulación térmica de edificios (TRNSYS, EnergyPlus, DOE2,...) han adquirido en las últimas décadas un especial protagonismo. Así, en la predicción en fase de proyecto de las implicaciones energéticas de las diferentes opciones de diseño, en el cumplimiento de la normativa y reglamentación energética, o en su aplicación directa a la auditoría y rehabilitación de edificios, se hace imprescindible la utilización de este tipo de herramientas.

La conducción térmica a través de muros suele calcularse utilizando métodos numéricos, como diferencias finitas o elementos finitos, o mediante el uso de funciones de transferencia [3]. El método de las funciones de transferencia en conducción de calor (CTF) [4] es un método ampliamente utilizado por los programas de simulación térmica de edificios para el cálculo de la transferencia de calor a través de muros [3][5] debido a su gran eficiencia computacional. Sin embargo, la aplicabilidad de dicho método está condicionada a la estabilidad en el cálculo de los coeficientes de la función de transferencia, principalmente en situaciones de alta inercia térmica, donde el número de Fourier es muy bajo, bien porque el paso de tiempo de simulación sea pequeño o bien porque el grosor del muro sea elevado como es el caso de los muros unicapa presentes en edificios históricos [6]. Por tanto, el cálculo de la transferencia de calor en estas circunstancias en los programas de simulación térmica de edificios de reconocido prestigio causa una inestabilidad numérica que conlleva una baja precisión en los resultados. Giuliani et al. [5] estiman errores de entre el 75 y el 400% para los casos estudiados.

En la última década, diversos autores han analizado la aplicabilidad y limitaciones del método CTF, y algunos han propuesto mejoras para la generación de los coeficientes de la función de transferencia. Li et al. [7] muestran la ventaja del método de dominio de la frecuencia frente al método de búsqueda de raíz y al método de espacio estado para números de Fourier mayores de 10^{-3} . Maestre et al. [8] proponen un método que asegura la aplicabilidad de la búsqueda directa de raíces que permite su aplicación en muros simulados con paso de tiempo corto (hasta 1.8×10^{-3}). Beccali et al. [6] y Ciulla et al. [9] han remarcado la importancia en la elección del número de polos, especialmente cuando se aplica el método CTF a muros gruesos. Sus estudios abarcan 35 muros de ASHRAE, pero el menor de los números de Fourier resultante para un paso de tiempo horario fue de 2.5×10^{-2} . Delcroix et al. [10] han adaptado el método de espacio de estado para implementar un nuevo modelo para generar los coeficientes de CTF en TRNSYS. Este método deja de ser fiable en problemas donde el número de Fourier esté alrededor de 10^{-3} ó 10^{-4} .

Ninguno de los métodos mencionados parece superar plenamente los problemas que surgen al aplicar el método CTF en dominios donde el número de Fourier es inferior a 10^{-3} .

Esta comunicación propone una solución para poder aplicar el método CTF a muros unicapa de alta inercia térmica presentes en edificios históricos [6]. La solución propuesta se basa en la división del dominio en un conjunto de capas lo suficientemente delgadas como para que la generación de los coeficientes de la función de transferencia no se vea afectada de inestabilidades y lo suficientemente gruesas como para que el primer coeficiente del término cruzado, $Y(0)$, causante de las inestabilidades numéricas, sea despreciable.

En primer lugar se realiza una descripción del método propuesto y posteriormente se calcula el flujo de calor unidimensional transitorio en una serie de test analíticos y casos de estudio en los que los números de Fourier alcanzan valores de hasta 10^{-4} .

2. Descripción del método propuesto

Mitalas y Stephenson[4] utilizaron el método CTF para resolver la conducción transitoria unidimensional a través de muros multicapas. Estimaron la transferencia de calor como una serie finita de temperaturas y flujos. De tal manera que para un muro unicapa la temperatura y el flujo de calor a ambos lados del muro puede expresarse como:

$$q_{out}(t) = X(0) \cdot T_{out}(t) + Y(0) \cdot T_{int}(t) + \Psi_{out}(t) \quad (1)$$

$$q_{int}(t) = -Y(0) \cdot T_{out}(t) + Z(0) \cdot T_{int}(t) + \Psi_{int}(t) \quad (2)$$

Donde

$$\Psi_{out}(t) = \sum_{j=1}^{nT_{out}} T_{out}(t - j\Delta t) X(j) + \sum_{j=1}^{nT_{int}} T_{int}(t - j\Delta t) Y(j) + \sum_{j=1}^{nq_{out}} \Phi(j) q_{out}(t - j\Delta t) \quad (3)$$

$$\Psi_{int}(t) = \sum_{j=1}^{nT_{int}} T_{int}(t - j\Delta t) Z(j) - \sum_{j=1}^{nT_{out}} T_{out}(t - j\Delta t) Y(j) + \sum_{j=1}^{nq_{out}} \Phi(j) q_{int}(t - j\Delta t) \quad (4)$$

El cálculo de los coeficientes de las ecuaciones anteriores puede realizarse por varios métodos: Método de Laplace y transformada Z [11], método de espacio estado [12] o por medio de un análisis en frecuencia a través de la transformada de Fourier [13].

El método desarrollado en esta comunicación propone la división del muro en capas lo suficientemente delgadas para permitir el cálculo estable de los coeficientes de la función de transferencia, pero lo suficientemente gruesas para poder tener la ventaja de poder despreciar el coeficiente Y(0) evitando los problemas numéricos y resolviendo de forma sencilla las ecuaciones que gobiernan el sistema. El muro (Fig. 1) puede dividirse en un conjunto de capas con propiedades físicas homogéneas y temperatura independiente. Las condiciones de contorno exterior e interior son convectivas sin restricción en la evolución de la temperatura del aire.

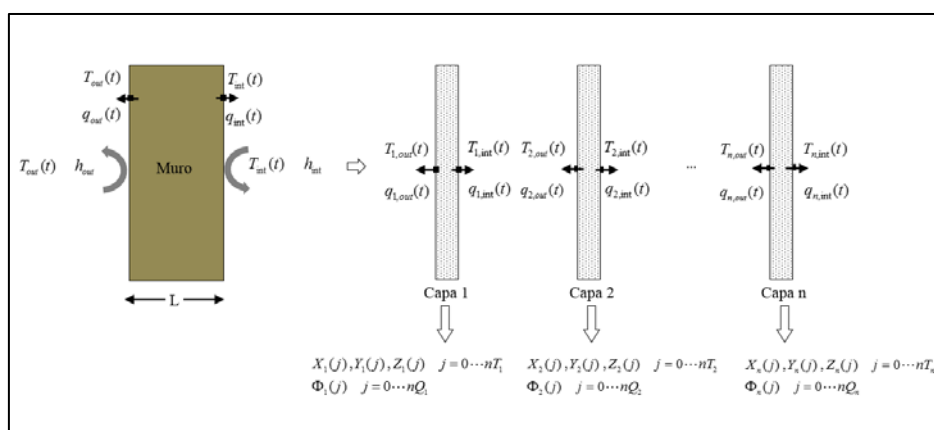


Figura 1: Esquema de división del muro en capas

Para cada una de las capas en las que el muro se divide se podrían particularizar las ecuaciones (1) y (2) de tal forma que se obtendría el siguiente conjunto de ecuaciones para calcular el flujo de calor en la superficie exterior e interior de cada capa:

$$q_{i,out}(t) = X_i(0) \cdot T_{i,out}(t) + Y_i(0) \cdot T_{i,int}(t) + \Psi_{i,out}(t) \quad i = 1 \dots n \quad (5)$$

$$q_{i,int}(t) = -Y_i(0) \cdot T_{i,out}(t) + Z_i(0) \cdot T_{i,int}(t) + \Psi_{i,int} \quad i = 1 \dots n \quad (6)$$

El valor del término cruzado de la función de transferencia, $Y_i(0)$, es prácticamente despreciable. Por tanto, las expresiones anteriores podrían reescribirse como:

$$q_{i,out}(t) = X_i(0) \cdot T_{i,out}(t) + \Psi_{i,out}(t) \quad i = 1 \dots n \quad (7)$$

$$q_{i,int}(t) = Z_i(0) \cdot T_{i,int}(t) + \Psi_{i,int} \quad i = 1 \dots n \quad (8)$$

Como puede comprobarse, el flujo de calor en cualquiera de las superficies exterior o interior se obtiene como función dependiente únicamente de la temperatura en dicha superficie para el mismo instante de tiempo y del historial de flujos y temperaturas en ambas superficies.

2.1. Resolución del sistema

La resolución del sistema completo para cada paso de tiempo se realiza en tres etapas diferentes. En una primera etapa, se resuelven las temperaturas y flujos de calor de la capa número 1 en contacto con el exterior. Los flujos y temperaturas en las superficies intermedias constituyen la segunda etapa. El acoplamiento de la última capa con el interiores la última etapa.

Cálculo de la temperatura y flujo de calor de la primera capa

En la superficie exterior de la primera capa existe un flujo de calor por convección que puede calcularse haciendo uso de la Ley de Enfriamiento de Newton como:

$$q_{1,out}(t) = h_{ext} \cdot (T_{1,out}(t) - T_{ext}(t)) \quad (9)$$

Por continuidad en cada una de las superficies en contacto, se cumplen las siguientes relaciones:

$$q_{1,int}(t) = -q_{2,out}(t), \quad T_{1,int}(t) = T_{2,out}(t) \quad (10)$$

Haciendo uso de la expresión (7) particularizada para la primera capa y utilizando la expresión (9) resulta:

$$X_1(0) \cdot T_{1,out}(t) + \Psi_{1,out}(t) = h_{ext} \cdot (T_{1,out}(t) - T_{ext}(t)) \quad (11)$$

Las temperatura superficiales exterior para la primera capa puede obtenerse como:

$$T_{1,out}(t) = \frac{\Psi_{1,out}(t) + h_{ext} \cdot T_{ext}(t)}{h_{ext} - X_1(0)} \quad (12)$$

Cálculo de la temperatura y flujo de calor de las capas intermedias

El flujo de calor para un instante de tiempo determinado, en cada una de las superficies de las capas en las que se divide el muro, solo depende del valor de la temperatura en dicha superficie en dicho instante de tiempo, quedando desacoplado de lo que ocurre en ese mismo instante en la superficie opuesta.

Haciendo uso de nuevo de la continuidad en el flujo de calor y en la temperatura en las superficies intermedias, se obtiene:

$$q_{i+1,out}(t) = -q_{i,int}(t), \quad T_{i+1,out}(t) = T_{i,int}(t) \quad (13)$$

Particularizando las expresiones (7) y (8) para las capas $i-1$ e i respectivamente, pueden obtenerse las siguientes expresiones:

$$T_{i,int}(t) = T_{i+1,out}(t) = -\frac{\Psi_{i,int}(t) + \Psi_{i+1,out}(t)}{Z_i(0) + X_{i+1}(0)} \quad i = 1 \dots (n-1) \quad (14)$$

$$q_{i,int}(t) = Z_i(0) \cdot T_{i,int}(t) + \Psi_{i,int}(t) \quad i = 1 \dots (n-1) \quad (15)$$

Cálculo de la temperatura y flujo de calor de última capa

La expresión (8) particularizada para la capa n permite obtener el flujo de calor en la superficie interior del muro, dicho flujo se calcula como:

$$q_{n,int}(t) = Z_n(0) \cdot T_{n,int}(t) + \Psi_{n,int}(t) \quad (16)$$

En la superficie interior de muro existe un flujo de calor por convección que puede calcularse haciendo uso de la Ley de Enfriamiento de Newton como:

$$q_{n,int}(t) = h_{int} \cdot (T_{n,int}(t) - T_{int}(t)) \quad (17)$$

Igualando las expresiones (16) y (17) puede calcularse la temperatura en la superficie interior del muro,

$T_{n,int}(t)$, como:

$$T_{n,int}(t) = \frac{\Psi_{n,int}(t) + h_{int} \cdot T_{int}(t)}{h_{int} - Z_n(0)} \quad (18)$$

Selección del número de capas

El número de capas, n , en las que hay que dividir el muro así como el espesor mínimo y máximo de las capas ha sido estudiado por Maestre et al. [14] obteniendo la siguiente expresión para obtener el número de capas:

$$n = \sqrt{\frac{Fo_i}{Fo}} \quad (19)$$

Siendo Fo_i el número de Fourier óptimo de una capa, 0.007[14] y Fo el número de Fourier del problema completo.

3. Test Realizados

Se realizan una serie de test frente a una solución analítica [15] y posteriormente una serie de casos de estudio, de muros unicapa de edificios históricos, son comparados con los resultados obtenidos por un método numérico de referencia, método de elementos finitos, a través del software ANSYS®.

3.1. Test Analíticos

Se trata de un muro de arenisca ($k = 3.0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$; $\rho = 2400 \text{ kgm}^3$; $C_p = 1000 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$) de espesores 1 y 1.5m. Se ha realizado una simulación de 24 horas con tres pasos de tiempo diferentes, 900s, 1800s y 3600s. De tal forma que los números de Fourier obtenidos para cada test están comprendidos entre 4.5×10^{-3} y 5×10^{-4} .

El test consiste en el enfriamiento o calentamiento de una placa de material homogéneo sometida a un flujo convectivo, $h = 8.72 \text{ W/m}^2\text{K}$, a temperatura constante del fluido igual por ambas caras, en este caso $T_f = 20^\circ\text{C}$, partiendo de una condición inicial también homogénea, $T_o = 15^\circ\text{C}$. Aunque el problema no refleja una configuración real de transferencia de calor a través de un muro, su simplicidad y la disponibilidad de solución analítica[15] permiten realizar la comprobación del método.

Para evaluar el error se ha utilizado como indicador el error cuadrático medio (RMSE) de la temperatura superficial y del flujo de calor superficial, además del error relativo para temperatura y flujo de calor.

En la tabla 1 se muestran los resultados obtenidos en los test realizados, se observó como el error relativo en temperatura se sitúa, en todos los casos, como máximo en el 0.2% y en flujo en el 0.9%. Mientras que el RMSE en temperatura es como máximo de 0.02°C y en flujo 0.21 W/m^2 . En las fig. 2 y 3 se representan los resultados obtenidos para las primeras 15 horas de simulación para el caso de 1m y paso de tiempo de 3600s y para el caso de 1.5m y paso de tiempo de 900s, respectivamente.

Tabla 1: Resultados test analíticos

L [m]	Δ t[s]	Nº Capas	Fo	Y(0)	Error T Superficial		Error Flujo de Calor	
					RMS E[$^\circ\text{C}$]	Relativ o[%]	RMSE[W/m 2]	Relativ o[%]
1	3600	2	4.5E-03	3.064E-06	0.02	0.12	0.21	0.90
1	1800	2	2.2E-03	2.102E-12	0.01	0.07	0.14	0.47
1	900	3	1.1E-03	7.284E-11	0.01	0.04	0.09	0.24
1.5	3600	2	2.0E-03	3.064E-12	0.02	0.11	0.21	0.74
1.5	1800	3	1.0E-03	2.102E-12	0.02	0.06	0.14	0.39
1.5	900	4	5.0E-04	3.233E-12	0.01	0.03	0.10	0.21

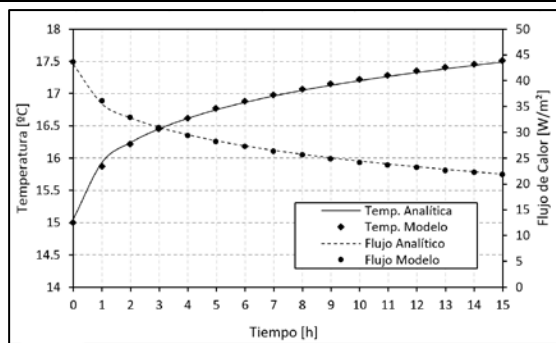


Figura 2: Caso 1m con paso de tiempo 3600s

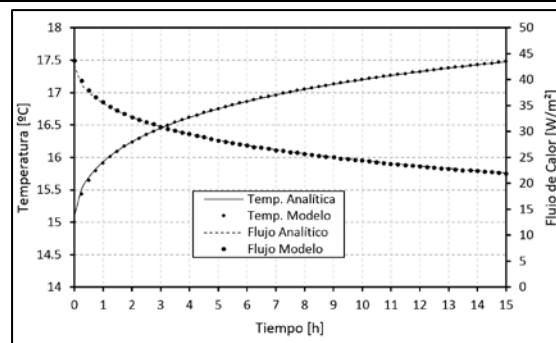


Figura 3: Caso 1.5m con paso de tiempo 900s

3.2. Casos de estudio

La condición de contorno interior es convectiva, siendo la temperatura del aire interior la obtenida de una simulación anual de un local climatizado entre 20 y 25°C durante 12 horas situado en Madrid, de 800m^2 de superficie y 4000m^3 de volumen. Los muros del local están orientados al suroeste y el ratio entre muro/ventana es de 0.2. Las ganancias internas son altas: la densidad de ocupación es de $4\text{m}^2/\text{per.}$ y la carga por iluminación y equipamiento son de 12 y 10 W/m^2 , respectivamente. La

condición de contorno exterior es, igualmente, convectiva siendo la temperatura del aire la temperatura atmosférica anual del archivo meteorológico TMY3 de Madrid [16].

La solución de referencia es la obtenida aplicando el método de elementos finitos (FEM) a través del software ANSYS®. En particular, los problemas de conducción unidimensional pueden resolverse asumiendo una función lineal entre dos nodos (utilizando el elemento LINK33 de ANSYS) y su precisión sólo depende del grado de discretización del problema, del número de nodos.

Para obtener el número óptimo de nodos se ha resuelto el problema con solución analítica [15] para distintos espesores de muro y distintos pasos de tiempo, de manera que se obtuviesen distintos números de Fourier. En la fig. 4 se representa el error relativo del flujo de calor en función del número de nodos para cada número de Fourier considerado. En ella puede observarse como, para todos los números de Fourier estudiados, el error mínimo se obtiene con mallas con un número de 250 nodos y superiores.

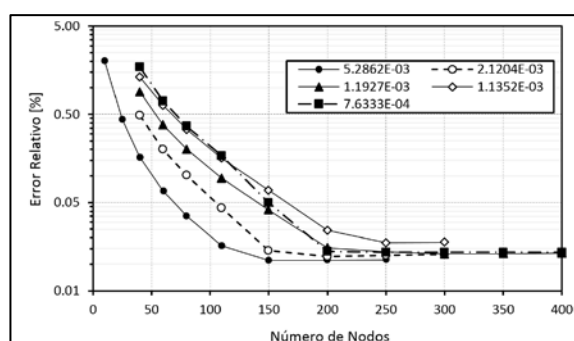


Figura 4: Error relativo Flujo de calor en función del número de nodos

De cada caso simulado se ha calculado el error relativo de la temperatura y del flujo de calor en la superficie interior del muro así como sus respectivos errores cuadráticos medios en comparación con el método de referencia. En la tabla 2 están recogidos los resultados obtenidos, se observa como el error relativo en temperatura es como máximo del 0.72% para todos los casos y el RMSE de la temperatura de 0.21°C en todas las simulaciones realizadas. Así mismo, se observa como el error relativo del flujo de calor no llega al 6.5% en ninguno de los casos estudiados y el RMSE máximo es de 1.78 W/m². En la fig. 5 y 6 se representa los resultados obtenidos para la temperatura superficial interior del muro entre el día 3 y 4 de simulación para los casos de 1.5 m con pasos de tiempo de 900s y 1800s, respectivamente.

Tabla 2: Resultados casos estudio

L [m]	Δ t[s]	N° Capas	Fo	Y(0)	Error T Superficial		Error Flujo de Calor	
					RMS E[°C]	Relativ o[%]	RMSE[W/m ²]	Relativ o[%]
1	3600	2	4.5E-03	3.064E-06	0.21	0.72	1.78	5.63
1	1800	2	2.2E-03	2.102E-12	0.03	0.14	0.26	3.19
1	900	3	1.1E-03	7.284E-11	0.07	0.31	0.58	6.49
1.5	3600	2	2.0E-03	3.064E-12	0.21	0.70	1.78	5.78
1.5	1800	3	1.0E-03	2.102E-12	0.03	0.14	0.26	2.94
1.5	900	4	5.0E-04	3.233E-12	0.07	0.31	0.58	6.32

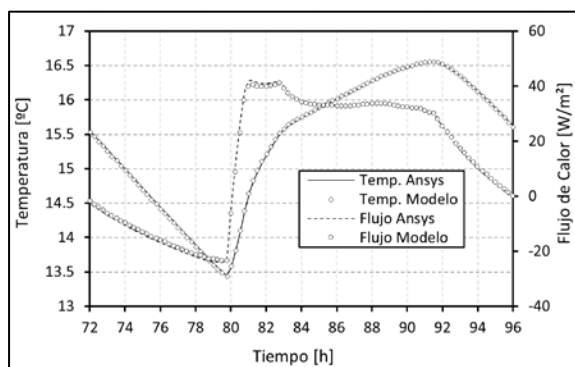


Figura 5: Caso 1.5m con paso de tiempo 900s

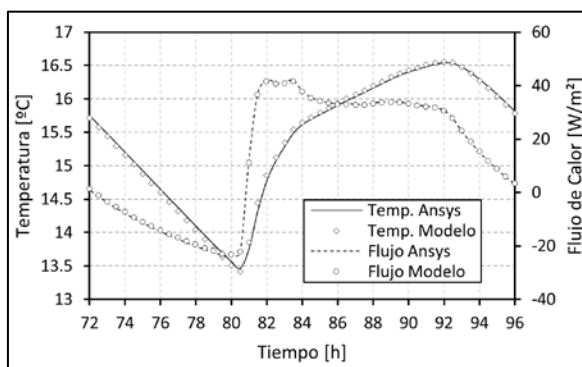


Figura 6: Caso 1.5m con paso de tiempo 1800s

4. Conclusiones

En la presente comunicación se ha presentado un método basado en las funciones de transferencia en conducción de calor (CTF) que permite su aplicación a muros con bajos números de Fourier, como son los muros unicapa presentes en edificios históricos, evitando las inestabilidades numéricas.

El modelo está basado en la división del muro en un número de capas tal que permita el cálculo preciso de los coeficientes de las funciones de transferencia en cada capa pero que, a su vez, permita obtener un valor prácticamente despreciable para el primer término del coeficiente cruzado $Y(0)$.

En primer lugar, se han realizado una serie de test de los cuales se dispone de solución analítica, obteniendo unos resultados con errores relativos máximos inferiores a 0.5%, para temperaturas superficiales, y a 1%, para flujos de calor, con unos errores cuadráticos medios asociados inferiores a 0.05°C y $0.5\text{W}/\text{m}^2$, respectivamente.

A continuación, se han comprobado los resultados obtenidos en una simulación anual de una serie de casos de estudio comparándolos con un método numérico de referencia como es el método de los elementos finitos. Los resultados obtenidos sitúan los errores relativos por debajo del 1% y del 6.5% para temperaturas y flujos de calor, respectivamente, así como unos errores cuadráticos medios que se sitúan por debajo de 0.5°C y $2\text{W}/\text{m}^2$ en todos los casos analizados.

5. Referencias

- [1] International Energy Agency (IEA), "Energy Statics. Energy Balances 2011," 2013.
- [2] L. Pérez-Lombard, J. Ortiz and C. Pout, "A review on buildings energy consumption information," *Energy and Buildings*, vol. 40, pp. 394-398, 2008.
- [3] M. Cellura, M. Mistretta, V. Lo Brano and A. Orioli, "To Asses de Validity of the Transfer Function Method: A Neural Model for the Optimal Choice of Conduction Transfer Functions," *ASHRAE Transactions*, vol. 2, pp. 585-596, 2010.
- [4] G. Mitalas and D. Stephenson, "Calculation of heat conduction transfer functions for Multi-Layer slabs," *ASHRAE Transactions*, vol. 77, pp. 117-126, 1971.
- [5] M. Giuliani, E. Avesani and U. Oberegger, "Quantitative Comparision of Massive Walls Thermal Response Among Commercial Software," in *13th Conference of International Building Performance Simulation Association (BS2013)*, Chambèry, Francia, 2013.
- [6] G. Beccali, M. Cellura, V. Lo Brano and A. Orioli, "Is the transfer function method reliable in a European building context? A theoretical analysis and a case study in the south of Italy," *Applied Thermal Engineering*, vol. 25, pp. 341-357, 2004.

- [7] L. Xiang Qian, C. Youming, J. Spitler and D. Fisher, "Applicability of calculation methods for conduction transfer function of building construction," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 48, pp. 1441-1451, 2008.
- [8] I. Maestre, P. Cubillas and L. Pérez-Lombard, "Transient heat Conduction in Multi-layer walls: an efficient strategy for Laplace's method," *Energy and Buildings*, vol. 42, no. 4, pp. 541-546, 2010.
- [9] G. Ciulla, V. Lo Brano and A. Orioli, "A Criterion for the Assesment of the Realiability of ASHRAE Conduction Transfer Function Coefficients," *Energy and Buildings*, vol. 42, no. 9, pp. 1426-1436, 2010.
- [10] B. Delcroix, M. Kummert, A. Daoud and M. Hiller, "Improved conduction transfer function coefficient generation in TRNSYS multizone Building Model," in *13th Conference of International Building Performance Simulation Association*, Chàmbery, Francia, 2013.
- [11] D. Stephenson and G. Mitalas, "Cooling load calculation by thermal response factors," *ASHRAE Transactions*, vol. 73, no. III.I, pp. 1-7, 1967.
- [12] J. Seem, S. Klein, W. Beckman and J. Mitchell, "Transfer function for efficient calculation of multidimensional transient heat transfer," *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 111, pp. 5-12, 1989.
- [13] M. Davies, "A time domain estimation of wall conduction transfer function coefficients," *ASHRAE Transaction*, vol. 102, no. 1, pp. 328-343, 1996.
- [14] I. R. Maestre, J. D. Mena, L. Pérez-Lombard and J. González-Gallero, "Fitting conduction transfer function method to low Fourier numbers: application to ground-coupled floors," *Journal of Building Performance Simulation*, pp. 1-11, 2014.
- [15] P. J. Schneider, *Conduction Heat Transfer*, Madison: Addison-Wesley, Reading, 1955.
- [16] EnergyPlus, "EnergyPlus, Weather Data," U.S. Departament of Energy, 2012. [Online]. Available: http://apps1.eere.energy.gov/buildings/energyplus/cfm/weather_data2.cfm/region=6_europe_wmo_region_6.