



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**  
**DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCIÓN**

**“DISEÑO ÓPTIMO DE FORMA Y ARMADO  
DE LÁMINAS DE HORMIGÓN”**

Antonio Tomás Espín

2007



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**  
**DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCIÓN**

PROGRAMA DE DOCTORADO  
ANÁLISIS Y DISEÑO AVANZADO DE ESTRUCTURAS

**“DISEÑO ÓPTIMO DE FORMA Y ARMADO  
DE LÁMINAS DE HORMIGÓN”**

**TESIS DOCTORAL**

Presentada por: D. Antonio Tomás Espín

Dirigida por: Dr. Pascual Martí Montrull

Cartagena, octubre de 2007



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA  
Departamento de Estructuras y Construcción

### **AUTORIZACIÓN DEL DIRECTOR DE LA TESIS**

D. Pascual Martí Montrull, Profesor Doctor del Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, en el Departamento de Estructuras y Construcción

#### **AUTORIZA:**

La presentación de la Tesis Doctoral titulada “Diseño óptimo de forma y armado de láminas de hormigón”, realizada por D. Antonio Tomás Espín, bajo su dirección y supervisión, en el Departamento de Estructuras y Construcción, y que presenta para la obtención del grado de Doctor por la Universidad Politécnica de Cartagena.

En Cartagena, a 10 de octubre de 2007

EL DIRECTOR DE LA TESIS

Fdo.: Pascual Martí Montrull



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA  
Departamento de Estructuras y Construcción

### **AUTORIZACIÓN DEL DEPARTAMENTO RESPONSABLE**

D. Pascual Martí Montrull, Director del Departamento de Estructuras y Construcción

#### **INFORMA:**

Que la Tesis Doctoral titulada “Diseño óptimo de forma y armado de láminas de hormigón”, ha sido realizada por D. Antonio Tomás Espín, bajo la dirección y supervisión de D. Pascual Martí Montrull y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Cartagena, a 15 de octubre de 2007

EL DIRECTOR DEL DEPARTAMENTO

Fdo.: Pascual Martí Montrull

# *Abstract*

The aim of the structural optimization is to obtain a design, i.e. a set of values for the design variables that make minimum an objective function and satisfy a set of restrictions that depend on the variables. The problems in structural optimization can be divided in three categories: sizing, shape and topology.

The approach to shape optimization of concrete shells depends on the objective function used in the problem. A shape of the shell with a predefined stress distribution can be obtained, e.g. a bending-free shape where it is not necessary to obtain the needless shell reinforcement. Apart from the standard objective functions, as the weight or the surface, others can also be used, as the strain energy and the stress levelling.

The problem of the reinforcement in two-dimensional structures can be solved by two methodologies, the one based on applying the ultimate design conditions to the stresses in some points of the structure, and the other using shell design elements. In this last one, each element is used as dimensioning unit having to resist the nodal forces. The balance between the external forces and the internal ones in the reinforcement and the concrete must be set. The problem is solved by iterative numerical methods that use complex non linear equation systems.

In this thesis, the sizing and shape optimum design problem of concrete shells using several objective functions was investigated; the buckling behaviour of the designs by using nonlinear stability studies and semi-empirical methods was analyzed; and a numerical procedure to solve the optimum design problem of reinforcement in concrete shell elements was proposed.

## *Resumen*

El objetivo de la optimización de estructuras es obtener un diseño, es decir, un conjunto de valores para las variables de diseño que hacen mínima una función objetivo, y satisfacen un conjunto de restricciones que dependen de estas variables. Los problemas de optimización de estructuras se pueden dividir en tres categorías: propiedades, forma, y topología.

En la optimización de forma de láminas de hormigón, el enfoque puede ser diverso en función de los objetivos establecidos en el problema. Se pueden buscar superficies para una determinada distribución tensional, o lo que es lo mismo, superficies libres de flexión, no siendo preciso obtener el armado de la lámina al ser éste innecesario. A parte de las clásicas funciones objetivo como el peso o la superficie, también pueden utilizarse otras, como la energía de deformación y el nivel de tensiones.

El problema del armado de estructuras bidimensionales puede resolverse, de forma general, mediante dos metodologías, la basada en aplicar las condiciones de rotura a las tensiones en algunos puntos de la estructura, y la que emplea elementos de diseño tipo lámina. En esta última, cada elemento es considerado una unidad de dimensionado independiente que tiene que resistir sus fuerzas nodales. Se trata de alcanzar el equilibrio entre las fuerzas externas y las internas en la armadura y en el hormigón. Su resolución se aborda mediante aproximaciones sucesivas más o menos complejas debido al manejo de sistemas de ecuaciones no lineales.

En esta tesis se ha investigado el problema de diseño óptimo de propiedades y geometría de láminas de hormigón empleando diversas funciones objetivo; se ha analizado el comportamiento frente a pandeo de los diseños mediante estudios de estabilidad no lineal y métodos semiempíricos; y se ha propuesto un procedimiento numérico para resolver el problema de diseño óptimo del armado de elementos de hormigón tipo lámina.

A Carmen

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Dr. Pascual Martí Montrull sus inestimables consejos y el continuo estímulo para llevar a buen término esta tesis doctoral. Recuerdo de forma especial muchos momentos en los que sus sugerencias sutiles y razonamientos elegantes orientaban eficazmente este trabajo.

Quiero agradecer también a mi esposa, Carmen, su apoyo incondicional. Espero que algún día pueda recuperar algunos de los momentos que perdí con ella por la realización de esta tesis.

Y, finalmente, a mi familia, a mis compañeros del Departamento de Estructuras y Construcción, y a mis amigos, por su ánimo y apoyo desinteresados.



# Índice

<b>LISTA DE TABLAS .....</b>	<b>xxi</b>
<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>xxv</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>xxxi</b>
<b>CAPÍTULO 1      <b>INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS</b></b>	
1.1 INTRODUCCIÓN .....	1
1.1.1 Proceso de diseño .....	1
1.1.2 Diseño óptimo de forma y armado de láminas de hormigón .....	2
1.2 OBJETIVOS DE LA TESIS .....	3
1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS .....	4
<b>CAPÍTULO 2      <b>ESTADO DEL ARTE EN EL ANÁLISIS Y DISEÑO ÓPTIMO DE FORMA                           Y ARMADO DE LÁMINAS DE HORMIGÓN</b></b>	
2.1 INTRODUCCIÓN .....	5
2.2 OPTIMIZACIÓN DE ESTRUCTURAS. RESEÑA HISTÓRICA.....	5
2.3 DISEÑO ÓPTIMO DE LÁMINAS .....	7
2.3.1 Introducción.....	7
2.3.2 Desde los inicios hasta mediados de los 80 .....	8
2.3.3 De mediados de los 80 a mediados de los 90.....	9

2.3.3.1	<i>Aparición de nuevas necesidades</i> .....	9
2.3.3.2	<i>Técnicas de CAGD</i> .....	10
2.3.3.3	<i>Inclusión de no linealidades</i> .....	11
2.3.3.4	<i>Desarrollo de herramientas informáticas y programas de ordenador</i> .....	12
2.3.3.5	<i>Búsqueda de forma</i> .....	13
2.3.4	Últimas tendencias.....	13
2.4	ANÁLISIS Y DISEÑO ÓPTIMO DE PLACAS Y LÁMINAS DE HORMIGÓN .....	16
2.4.1	Introducción.....	16
2.4.2	Etapla constructiva: breve repaso por la obra de Félix Candela .....	17
2.4.3	Diseño de la armadura .....	21
2.4.4	Optimización del coste .....	22
2.4.5	Búsqueda de forma .....	23
2.4.6	Comprobación de estabilidad.....	24
2.4.7	Últimas tendencias.....	27
2.5	PUBLICACIONES DEL DOCTORANDO REFERENTES AL TRABAJO DESARROLLADO EN ESTA TESIS.....	29

***CAPÍTULO 3      BÚSQUEDA DE FORMA DE LÁMINAS DE HORMIGÓN EMPLEANDO  
TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN. MOTIVACIÓN***

3.1	INTRODUCCIÓN .....	31
3.2	PROBLEMA DE BÚSQUEDA DE FORMA DE LÁMINAS DE HORMIGÓN EMPLEANDO TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN .....	32
3.3	OPTIMIZACIÓN CON ANSYS .....	35
3.3.1	Métodos de optimización.....	35
3.3.2	Procedimiento operativo .....	35
3.4	EJEMPLO .....	36
3.5	MOTIVACIÓN.....	40

***CAPÍTULO 4      ESTUDIO DEL DISEÑO ÓPTIMO DE ESPESOR Y GEOMETRÍA DE UN  
PARABOLOIDE HIPERBÓLICO DE HORMIGÓN EMPLEANDO DIVERSAS  
FUNCIONES OBJETIVO***

4.1	INTRODUCCIÓN .....	43
4.2	DESCRIPCIÓN Y MODELIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA .....	44
4.2.1	Introducción.....	44
4.2.2	El paraboloides hiperbólico (hyper).....	44

4.2.3	Modelo de diseño.....	50
4.2.4	Modelo CAD .....	50
4.2.4.1	Parámetros geométricos .....	51
4.2.5	Modelo de análisis .....	52
4.2.5.1	Malla de elementos finitos .....	52
4.2.5.2	Material .....	53
4.2.5.3	Tipo de elemento.....	55
4.2.5.4	Condiciones de contorno .....	55
4.2.5.5	Acciones.....	56
4.2.5.6	Hipótesis de combinación de acciones .....	59
4.3	ANÁLISIS DEL MODELO INICIAL.....	62
4.4	PROCESOS DE OPTIMIZACIÓN .....	65
4.4.1	Función objetivo, variables de diseño y restricciones.....	65
4.4.2	Proceso 1. Función objetivo energía de deformación ( <i>ED</i> ) con espesor mínimo 6 cm .....	66
4.4.3	Proceso 2. Función objetivo energía de deformación ( <i>ED</i> ) con espesor mínimo 8 cm .....	70
4.4.4	Proceso 3. Función objetivo peso ( <i>W</i> ) con espesor mínimo 6 cm.....	74
4.4.5	Proceso 4. Función objetivo peso ( <i>W</i> ) con espesor mínimo 8 cm.....	78
4.4.6	Proceso 5. Función objetivo mayor tensión principal $\sigma_1$ ( $\sigma_i$ ) con espesor mínimo 6 cm .....	82
4.5	RESUMEN DE RESULTADOS .....	86

**CAPÍTULO 5 ANÁLISIS NO LINEAL Y DE ESTABILIDAD DE LÁMINAS DE HORMIGÓN**

5.1	INTRODUCCIÓN.....	89
5.2	ANÁLISIS NO LINEAL .....	90
5.2.1	Introducción.....	90
5.2.2	No linealidad geométrica. Matriz de rigidez tangente .....	90
5.2.3	No linealidad del material.....	94
5.2.3.1	Método incremental .....	94
5.2.3.2	Métodos iterativos .....	95
5.2.4	Leyes de comportamiento del hormigón.....	96
5.2.4.1	Comportamiento rígido-plástico ideal (diagrama rectangular).....	97
5.2.4.2	Comportamiento elástico-plástico ideal (diagrama bilineal) .....	97
5.2.4.3	Comportamiento elástico-plástico no lineal (diagrama parábola-rectángulo).....	98
5.2.4.4	Comportamiento elástico-plástico no lineal (diagrama de Sargin) .....	98

5.3	ANÁLISIS DE ESTABILIDAD.....	100
5.3.1	Introducción.....	100
5.3.2	El fenómeno de la inestabilidad en láminas de hormigón.....	101
5.3.3	Método del comité ACI 344 .....	102
5.3.4	Método basado en las recomendaciones de la IASS.....	103
5.3.4.1	Introducción .....	103
5.3.4.2	Fórmula básica.....	104
5.3.4.3	Coficiente de sensibilidad a las imperfecciones .....	105
5.3.4.4	Coficiente de fluencia .....	106
5.3.4.5	Coficiente de armado y fisuración .....	107
5.3.4.6	Coficiente de no linealidad del material.....	109
5.3.4.7	Coficiente de seguridad .....	110
5.4	ANÁLISIS NO LINEAL Y DE ESTABILIDAD EN ANSYS.....	111
5.4.1	Introducción.....	111
5.4.2	Análisis no lineal en ANSYS.....	111
5.4.2.1	Generalidades.....	111
5.4.2.2	No linealidad geométrica y del material .....	113
5.4.2.3	Planteamiento del análisis no lineal de la lámina en hypar.....	113
5.4.3	Análisis de estabilidad en ANSYS .....	116
5.4.3.1	Generalidades.....	116
5.4.3.2	Análisis de estabilidad inicial.....	116
5.4.3.3	Análisis de estabilidad no lineal.....	118
5.5	EJEMPLOS.....	118
5.5.1	Estudio de no linealidad de los diseños del hypar .....	119
5.5.1.1	Tipos de análisis empleados .....	119
5.5.1.2	Diseño inicial.....	119
5.5.1.3	Diseños óptimos.....	125
5.5.1.4	Resumen de resultados .....	128
5.5.2	Estudio de estabilidad de los diseños del hypar.....	130
5.5.2.1	Análisis de estabilidad inicial.....	130
5.5.2.2	Análisis de estabilidad no lineal.....	131
5.5.2.3	Método basado en las recomendaciones de la IASS.....	132
5.5.2.4	Resumen de resultados .....	135

**CAPÍTULO 6 PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO DEL ARMADO DE ELEMENTOS DE HORMIGÓN TIPO LÁMINA**

6.1	INTRODUCCIÓN .....	137
6.2	COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES .....	138
6.3	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO .....	139
6.3.1	Elementos sometidos al estado membrana.....	139
6.3.1.1	<i>Introducción</i> .....	139
6.3.1.2	<i>Armaduras <math>A_{sx}</math> y <math>A_{sy}</math> necesarias</i> .....	141
6.3.1.3	<i>Sólo armadura <math>A_{sx}</math> necesaria</i> .....	142
6.3.1.4	<i>Sólo armadura <math>A_{sy}</math> necesaria</i> .....	143
6.3.1.5	<i>Armadura innecesaria</i> .....	143
6.3.2	Elementos sometidos al estado de flexión y membrana.....	144
6.3.2.1	<i>Introducción</i> .....	144
6.3.2.2	<i>Armadura necesaria en ambas capas (caso BOTH)</i> .....	146
6.3.2.3	<i>Armadura necesaria sólo en la capa inferior (caso BOTTOM)</i> .....	146
6.3.2.4	<i>Armadura necesaria sólo en la capa superior (caso TOP)</i> .....	148
6.3.2.5	<i>Armadura innecesaria (caso FULLCOMP)</i> .....	148
6.3.2.6	<i>Discusión sobre las necesidades de armadura en cada elemento</i> .....	149
6.4	RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO .....	150
6.4.1	Introducción.....	150
6.4.2	Métodos analíticos .....	151
6.4.2.1	<i>Resolución directa</i> .....	151
6.4.2.2	<i>Resolución por etapas</i> .....	151
6.4.3	Métodos semianalíticos .....	152
6.4.3.1	<i>Problema general con ocho variables de diseño</i> .....	153
6.4.3.2	<i>Problema simplificado con dos variables de diseño</i> .....	154
6.4.3.3	<i>Resolución por etapas</i> .....	155
6.4.4	Método numérico.....	157
6.4.4.1	<i>Desarrollo del método</i> .....	157
6.4.4.2	<i>Caso particular de armadura innecesaria</i> .....	161
6.4.4.3	<i>Resolución mediante técnicas de optimización</i> .....	163
6.4.4.4	<i>Cuestiones relacionadas con el carácter numérico del método</i> .....	165
6.5	APLICACIONES EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES PLANOS .....	167
6.5.1	Introducción.....	167
6.5.2	Elementos sometidos a compresión simple .....	167
6.5.2.1	<i>Placa cuadrada</i> .....	167
6.5.2.2	<i>Viga de gran canto</i> .....	171
6.5.3	Elementos sometidos a flexión simple, flexión compuesta o compresión compuesta	173

<i>6.5.3.1 Placa rectangular simplemente apoyada.....</i>	173
<i>6.5.3.2 Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados .....</i>	189

***CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES***

7.1 INTRODUCCIÓN .....	199
7.2 TRABAJOS REALIZADOS .....	199
7.3 CONCLUSIONES .....	200
7.4 TRABAJOS FUTUROS .....	202

<b><i>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</i></b>	203
--	-----

<b><i>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS DEL DOCTORANDO RELACIONADAS CON ESTA TESIS .....</i></b>	223
---	-----

## *Lista de tablas*

<b>Tabla 4.1</b>	Propiedades del material HA-30 (unidades en MPa) .....	55
<b>Tabla 4.2</b>	Ángulo de la bisectriz de un lóbulo con la horizontal ( $K = 0,14$ ; $\omega = 90^\circ$ ) .....	58
<b>Tabla 4.3</b>	Coefficientes eólicos de presión $c_p$ .....	58
<b>Tabla 4.4</b>	Parámetros del modelo inicial.....	62
<b>Tabla 4.5</b>	Altura y radio del modelo inicial .....	63
<b>Tabla 4.6</b>	Localización y valor de las tensiones principales máximas (modelo inicial).....	65
<b>Tabla 4.7</b>	Función objetivo $ED$ con $e_{min} = 6$ cm en los diseños inicial y final .....	66
<b>Tabla 4.8</b>	Variables de diseño (F.Obj. $ED$ con $e_{min} = 6$ cm).....	66
<b>Tabla 4.9</b>	Cumplimiento de las restricciones (F.Obj. $ED$ con $e_{min} = 6$ cm).....	67
<b>Tabla 4.10</b>	Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj. $ED$ con $e_{min} = 6$ cm) .....	69
<b>Tabla 4.11</b>	Función objetivo $ED$ con $e_{min} = 8$ cm en los diseños inicial y final .....	70
<b>Tabla 4.12</b>	Variables de diseño (F.Obj. $ED$ con $e_{min} = 8$ cm).....	71
<b>Tabla 4.13</b>	Cumplimiento de las restricciones (F.Obj. $ED$ con $e_{min} = 8$ cm).....	71
<b>Tabla 4.14</b>	Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj. $ED$ con $e_{min} = 8$ cm) .....	74
<b>Tabla 4.15</b>	Función objetivo $W$ con $e_{min} = 6$ cm en los diseños inicial y final .....	74
<b>Tabla 4.16</b>	Variables de diseño (F.Obj. $W$ con $e_{min} = 6$ cm) .....	75
<b>Tabla 4.17</b>	Cumplimiento de las restricciones (F.Obj. $W$ con $e_{min} = 6$ cm).....	75
<b>Tabla 4.18</b>	Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj. $W$ con $e_{min} = 6$ cm) .....	78
<b>Tabla 4.19</b>	Función objetivo $W$ con $e_{min} = 8$ cm en los diseños inicial y final .....	79
<b>Tabla 4.20</b>	Variables de diseño (F.Obj. $W$ con $e_{min} = 8$ cm) .....	79
<b>Tabla 4.21</b>	Cumplimiento de restricciones (F.Obj. $W$ con $e_{min} = 8$ cm) .....	79
<b>Tabla 4.22</b>	Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj. $W$ con $e_{min} = 8$ cm) .....	82
<b>Tabla 4.23</b>	Función objetivo $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm en los diseños inicial y final .....	82
<b>Tabla 4.24</b>	Variables de diseño (F.Obj. $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm).....	83
<b>Tabla 4.25</b>	Cumplimiento de restricciones (F.Obj. $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm) .....	83

<b>Tabla 4.26</b>	Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj. $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm) .....	86
<b>Tabla 4.27</b>	Procesos de optimización. Valores finales de las variables de geometría.....	87
<b>Tabla 4.28</b>	Procesos de optimización. Valores finales de las funciones objetivo, espesor de la lámina ( $e_1$ ), tensión de compresión máxima ( $\sigma_{c,max}$ ) y desplazamiento vertical máximo ( $u_{z,max}$ ).....	88
<b>Tabla 5.1</b>	Valores mínimos del coeficiente de seguridad (Dulácska y Kollár, 1995) .....	110
<b>Tabla 5.2</b>	Diseño inicial. Análisis lineal vs. análisis NLG. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación .....	120
<b>Tabla 5.3</b>	Diseño inicial. Análisis lineal vs. análisis NLM. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación .....	121
<b>Tabla 5.4</b>	Diseño inicial. Análisis lineal vs. análisis NLGM. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación .....	123
<b>Tabla 5.5</b>	Diseño inicial. Análisis NLM vs. análisis NLGM. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación .....	124
<b>Tabla 5.6</b>	Diseño inicial. Análisis NLG vs. análisis NLGM. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación .....	124
<b>Tabla 5.7</b>	Diseño inicial. Resumen de resultados. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación.....	125
<b>Tabla 5.8</b>	Diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 6$ cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis.....	125
<b>Tabla 5.9</b>	Diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 8$ cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis.....	126
<b>Tabla 5.10</b>	Diseño óptimo (F.Obj. W con $e_{min} = 6$ cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis.....	126
<b>Tabla 5.11</b>	Diseño óptimo (F.Obj. W con $e_{min} = 8$ cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis.....	127
<b>Tabla 5.12</b>	Diseño óptimo (F.Obj. $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis.....	127
<b>Tabla 5.13</b>	Autovalores del diseño inicial.....	131
<b>Tabla 5.14</b>	Autovalores del diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 6$ cm).....	131
<b>Tabla 5.15</b>	Carga de pandeo lineal.....	131
<b>Tabla 5.16</b>	Análisis de estabilidad NLG .....	132
<b>Tabla 5.17</b>	Análisis de estabilidad NLGM.....	132
<b>Tabla 5.18</b>	Coefficiente de sensibilidad a imperfecciones $\alpha_1$ . Parámetros de determinación ....	133
<b>Tabla 5.19</b>	Coefficiente de no linealidad del material $\alpha_4$ .....	134
<b>Tabla 5.20</b>	Carga de pandeo según el método basado en las recomendaciones de la IASS.....	134
<b>Tabla 5.21</b>	Carga de pandeo. Resumen de resultados.....	135
<b>Tabla 6.1</b>	Placa cuadrada. Armadura $A_{sx}$ estricta en cada elemento del modelo.....	170
<b>Tabla 6.2</b>	Placa cuadrada. Armadura $A_{sy}$ estricta en cada elemento del modelo.....	170



<b>Tabla 6.3</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura $A_{sxt}$ estricta en cada elemento del modelo ( $QD = 0$ kN/m) .....	179
<b>Tabla 6.4</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura $A_{sxb}$ estricta en cada elemento del modelo ( $QD = 0$ kN/m) .....	179
<b>Tabla 6.5</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura $A_{syt}$ estricta en cada elemento del modelo ( $QD = 0$ kN/m) .....	180
<b>Tabla 6.6</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura $A_{syb}$ estricta en cada elemento del modelo ( $QD = 0$ kN/m) .....	180
<b>Tabla 6.7</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura $A_{sxb}$ estricta en cada elemento del modelo ( $QD = 150$ kN/m) .....	183
<b>Tabla 6.8</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura $A_{syb}$ estricta en cada elemento del modelo ( $QD = 150$ kN/m) .....	183
<b>Tabla 6.9</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Comparación de resultados para la armadura $A_{sy}$ .....	190
<b>Tabla 6.10</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Comparación de resultados para las armaduras .....	197

## *Lista de figuras*

<b>Figura 1.1</b>	Diseño por prueba y error .....	1
<b>Figura 1.2</b>	Diseño optimizado .....	2
<b>Figura 2.1</b>	Iglesia de San Antonio de las Huertas, Tacuba, México (Candela, 1956) .....	18
<b>Figura 2.2</b>	(a) Restaurante Los Manantiales, Xochimilco, México (Candela, 1958). (b) Capilla de Lomas de Cuernavaca, Palmira, México (Candela, 1958) .....	19
<b>Figura 2.3</b>	(a) Planta embotelladora Bacardí, Cuautitlán, México (Candela, 1960). (b) Restaurante submarino. L´Oceanogràfic, Valencia (Candela, 2000) .....	20
<b>Figura 2.4</b>	Edificio de acceso. L´Oceanogràfic, Valencia (Candela, 2001). (a) Lámina en construcción. (b) Lámina en la actualidad .....	21
<b>Figura 3.1</b>	Modelo de optimización (Bletzinger y Ramm, 1993) .....	37
<b>Figura 3.2</b>	Lámina apoyada en los bordes rectos. Resultados de los procesos de optimización.....	38
<b>Figura 3.3</b>	Lámina apoyada en los bordes curvos. Resultados de los procesos de optimización.....	39
<b>Figura 3.4</b>	Lámina apoyada en todos los bordes. Resultados de los procesos de optimización	40
<b>Figura 4.1</b>	Estructura laminar. Perspectiva.....	45
<b>Figura 4.2</b>	Sistemas de coordenadas utilizados en la definición del hyper.....	45
<b>Figura 4.3</b>	Definición de un lóbulo. (a) Planos de intersección. (b) Planta .....	47
<b>Figura 4.4</b>	Definición del plano inclinado. (a) Perspectiva. (b) Perfil.....	49
<b>Figura 4.5</b>	Modelo CAD. Keypoints. (a) Perfil. (b) Planta.....	51
<b>Figura 4.6</b>	Modelo CAD. (a) Líneas. (b) Áreas.....	51
<b>Figura 4.7</b>	Malla de elementos finitos de un lóbulo. (a) Perfil. (b) Planta.....	52
<b>Figura 4.8</b>	Zona del orificio central. Detalle de la malla de elementos finitos .....	53
<b>Figura 4.9</b>	Encuentro de la lámina con el nervio principal. Detalle .....	53
<b>Figura 4.10</b>	Elemento finito <i>Shell93</i> (ANSYS, 2004) .....	55
<b>Figura 4.11</b>	Condiciones de contorno de un sextante de la lámina.....	56
<b>Figura 4.12</b>	Sección por la bisectriz de un lóbulo ( $\omega = 90^\circ$ ).....	57
<b>Figura 4.13</b>	Combinación de acciones en el plano de sotavento .....	60
<b>Figura 4.14</b>	Combinación de acciones en el plano de barlovento .....	61

<b>Figura 4.15</b>	Desplazamientos $u_z$ [m] del modelo inicial. Planta .....	63
<b>Figura 4.16</b>	Tensiones principales $\sigma_1$ [Pa] del modelo inicial. (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	64
<b>Figura 4.17</b>	Tensiones principales $\sigma_3$ [Pa] del modelo inicial. (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	64
<b>Figura 4.18</b>	Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj. ED con $e_{min} = 6$ cm) .....	68
<b>Figura 4.19</b>	Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 6$ cm). (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos $u_z$ [m] .....	69
<b>Figura 4.20</b>	Tensiones principales $\sigma_1$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 6$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	69
<b>Figura 4.21</b>	Tensiones principales $\sigma_3$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 6$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	70
<b>Figura 4.22</b>	Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj. ED con $e_{min} = 8$ cm) .....	72
<b>Figura 4.23</b>	Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 8$ cm). (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos $u_z$ [m] .....	73
<b>Figura 4.24</b>	Tensiones principales $\sigma_1$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 8$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	73
<b>Figura 4.25</b>	Tensiones principales $\sigma_3$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. ED con $e_{min} = 8$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	74
<b>Figura 4.26</b>	Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj. W con $e_{min} = 6$ cm) .....	76
<b>Figura 4.27</b>	Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj. W con $e_{min} = 6$ cm). (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos $u_z$ [m] .....	77
<b>Figura 4.28</b>	Tensiones principales $\sigma_1$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. W con $e_{min} = 6$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	77
<b>Figura 4.29</b>	Tensiones principales $\sigma_3$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. W con $e_{min} = 6$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	78
<b>Figura 4.30</b>	Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj. W con $e_{min} = 8$ cm) .....	80
<b>Figura 4.31</b>	Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj. W con $e_{min} = 8$ cm). (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos $u_z$ [m] .....	81
<b>Figura 4.32</b>	Tensiones principales $\sigma_1$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. W con $e_{min} = 8$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	81
<b>Figura 4.33</b>	Tensiones principales $\sigma_3$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. W con $e_{min} = 8$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	82
<b>Figura 4.34</b>	Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj. $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm) .....	84

<b>Figura 4.35</b>	Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj. $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm). (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos $u_z$ [m] .....	85
<b>Figura 4.36</b>	Tensiones principales $\sigma_1$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	85
<b>Figura 4.37</b>	Tensiones principales $\sigma_3$ [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. $\sigma_t$ con $e_{min} = 6$ cm). (a) Cara inferior. (b) Cara superior .....	86
<b>Figura 5.1</b>	Elemento triangular (tensión plana o deformación plana). (a) Coordenadas nodales. (b) Fuerzas nodales. (c) Tensiones en el elemento .....	91
<b>Figura 5.2</b>	Sistemas de coordenadas y tensiones en el planteamiento de la matriz de rigidez geométrica de un elemento membrana triangular. (a) Sistema de coordenadas global. (b) Plano del elemento y sistema de coordenadas local. (c) Tensiones en los bordes del elemento.....	92
<b>Figura 5.3</b>	Método de análisis incremental. Curva tipo carga–desplazamiento en un nodo $j$ ...	95
<b>Figura 5.4</b>	Curva carga–desplazamiento para dos iteraciones consecutivas. (a) Aplicación de la carga de una vez y obtención de una nueva matriz de rigidez en cada iteración (método de Newton–Raphson). (b) Aplicación de la carga por escalones y obtención de una nueva matriz de rigidez sólo en la primera iteración de cada escalón (método de Newton–Raphson modificado).....	96
<b>Figura 5.5</b>	Comportamiento rígido-plástico ideal del hormigón (diagrama rectangular) .....	97
<b>Figura 5.6</b>	Comportamiento elástico-plástico ideal del hormigón (diagrama bilineal) .....	98
<b>Figura 5.7</b>	Comportamiento elástico-plástico no lineal del hormigón (diagrama parábola rectángulo) .....	98
<b>Figura 5.8</b>	Comportamiento elástico-plástico no lineal del hormigón (diagrama de Sargin) ...	100
<b>Figura 5.9</b>	Trayectorias de inestabilidad en esferas.....	101
<b>Figura 5.10</b>	Comportamiento post-pandeo. (a) Creciente (lámina insensible a imperfecciones). (b) Decreciente (lámina sensible a imperfecciones) .....	102
<b>Figura 5.11</b>	Coefficiente de sensibilidad a las imperfecciones $\alpha_1$ (Recomendaciones de la IASS, 1979) .....	105
<b>Figura 5.12</b>	Coefficiente intermedio de armado y fisuración $\psi$ . (a) Recomendaciones de la IASS, 1979. (b) Propuesta de Kollár, 1993.....	108
<b>Figura 5.13</b>	Coefficiente de armado y fisuración $\alpha_3$ (Recomendaciones de la IASS, 1979) .....	108
<b>Figura 5.14</b>	Esquema operativo de un análisis no lineal en ANSYS.....	112
<b>Figura 5.15</b>	Curva tensión–deformación discretizada del hormigón.....	114
<b>Figura 5.16</b>	Curvas de pandeo. (a) Análisis de estabilidad inicial o de autovalores. (b) Análisis no lineal.....	116
<b>Figura 5.17</b>	Análisis NLG del diseño inicial. Tensiones máximas [Pa]. (a) Tracciones en la cara inferior. (b) Compresiones en la cara superior .....	120
<b>Figura 5.18</b>	Análisis NLG del diseño inicial. Desplazamientos $u_z$ [m] .....	120
<b>Figura 5.19</b>	Análisis NLM del diseño inicial. Tensiones máximas [Pa]. (a) Tracciones en la cara inferior. (b) Compresiones en la cara superior .....	121

<b>Figura 5.20</b>	Análisis NLM del diseño inicial. Desplazamientos $u_z$ [m].....	122
<b>Figura 5.21</b>	Diagrama tensión-deformación no lineal vs. lineal adoptando el módulo de elasticidad secante.....	122
<b>Figura 5.22</b>	Análisis NLGM del diseño inicial. Tensiones máximas [Pa]. (a) Tracciones en la cara inferior. (b) Compresiones en la cara superior .....	123
<b>Figura 5.23</b>	Análisis NLGM del diseño inicial. Desplazamientos $u_z$ [m].....	123
<b>Figura 5.24</b>	Comparación de algunos parámetros de la optimización según el diseño y el tipo de análisis. (a) Máxima tensión de tracción. (b) Máxima tensión de compresión. (c) Máximo desplazamiento vertical. (d) Energía de deformación .....	129
<b>Figura 5.25</b>	Cuatro primeros modos de pandeo del diseño inicial .....	130
<b>Figura 5.26</b>	Carga de pandeo de los diseños inicial y óptimos. Comparación entre valores obtenidos por distintos métodos.....	136
<b>Figura 6.1</b>	Estado de membrana en un elemento lámina de hormigón armado. (a) Fuerzas exteriores. (b) Contribución de la armadura. (c) Contribución del hormigón.....	140
<b>Figura 6.2</b>	Solicitaciones exteriores sobre un elemento lámina sometido al estado de membrana y flexión. (a) Fuerzas. (b) Momentos .....	144
<b>Figura 6.3</b>	Dirección de la fisuración en un elemento lámina de hormigón. (a) Capa superior. (b) Capa inferior.....	145
<b>Figura 6.4</b>	Modelo de un elemento lámina de hormigón armado. (a) Brazos mecánicos de las armaduras. (b) Fuerzas internas (esfuerzos) en el hormigón y en las armaduras ....	145
<b>Figura 6.5</b>	Placa cuadrada. Modelo de elementos finitos y cargas .....	167
<b>Figura 6.6</b>	Placa cuadrada. Esfuerzos de membrana [kN/m]. (a) $N_x$ . (b) $N_y$ . (c) $N_{xy}$ .....	168
<b>Figura 6.7</b>	Placa cuadrada. Densidades de armado [mm <sup>2</sup> /m]. (a) $A_{sx}$ . (b) $A_{sy}$ .....	169
<b>Figura 6.8</b>	Viga de gran canto. Esquema de geometría y cargas .....	171
<b>Figura 6.9</b>	Viga de gran canto. Modelo de elementos finitos. (a) Malla de 210 elementos. (b) Malla de 3360 elementos.....	171
<b>Figura 6.10</b>	Viga de gran canto. Densidades de armado [mm <sup>2</sup> /m]. (a) $A_{sx}$ . (b) $A_{sy}$ .....	172
<b>Figura 6.11</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Modelo de elementos finitos y cargas ....	173
<b>Figura 6.12</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura según el tamaño de malla ( $QD = 0$ kN/m). (a) $A_{syt}$ y $A_{syb}$ en sección de apoyo. (b) $A_{syt}+A_{syb}$ en sección de apoyo. (c) $A_{syb}$ en sección centro de vano. (d) Detalle de $A_{syb}$ en sección centro de vano.....	174
<b>Figura 6.13</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura según el tamaño de malla ( $QD = 150$ kN/m). (a) $A_{syt}$ y $A_{syb}$ en sección de apoyo. (b) $A_{syt}+A_{syb}$ en sección de apoyo. (c) $A_{syb}$ en sección centro de vano. (d) Detalle de $A_{syb}$ en sección centro de vano.....	175
<b>Figura 6.14</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Esfuerzos de flexión [mkN/m] ( $QD = 0$ kN/m). (a) $M_x$ . (b) $M_y$ . (c) $M_{xy}$ .....	176
<b>Figura 6.15</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Mapas de densidad de armado [mm <sup>2</sup> /m] ( $QD = 0$ kN/m). (a) $A_{sxt}$ . (b) $A_{syt}$ . (c) $A_{sxb}$ . (d) $A_{syb}$ .....	177

<b>Figura 6.16</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Superficies de densidad de armado ( $QD = 0$ kN/m). (a) $A_{sxt}$ . (b) $A_{syt}$ . (c) $A_{sxb}$ . (d) $A_{syb}$ .....	178
<b>Figura 6.17</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Esfuerzos de membrana [kN/m] y de flexión [mkN/m] ( $QD = 150$ kN/m). (a) $N_x$ . (b) $N_y$ . (c) $M_x$ . (d) $M_y$ . (e) $M_{xy}$ .....	181
<b>Figura 6.18</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Mapas de densidades de armado [ $\text{mm}^2/\text{m}$ ] ( $QD = 150$ kN/m). (a) $A_{sxb}$ . (b) $A_{syb}$ .....	182
<b>Figura 6.19</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Superficies de densidad de armado ( $QD = 150$ kN/m). (a) $A_{sxt}$ . (b) $A_{syt}$ . (c) $A_{sxb}$ . (d) $A_{syb}$ .....	182
<b>Figura 6.20</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 0$ kN/m). (a) $A_{syt}$ y $A_{syb}$ en la sección de apoyo. (b) $A_{syt}+A_{syb}$ en la sección de apoyo. (c) $A_{syb}$ en la sección centro de vano .....	184
<b>Figura 6.21</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 50$ kN/m). (a) $A_{syt}$ y $A_{syb}$ en la sección de apoyo. (b) $A_{syt}+A_{syb}$ en la sección de apoyo. (c) $A_{syb}$ en la sección centro de vano .....	185
<b>Figura 6.22</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 100$ kN/m). (a) $A_{syt}$ y $A_{syb}$ en la sección de apoyo. (b) $A_{syt}+A_{syb}$ en la sección de apoyo. (c) $A_{syb}$ en la sección centro de vano .....	186
<b>Figura 6.23</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 150$ kN/m). (a) $A_{syt}$ y $A_{syb}$ en la sección de apoyo. (b) $A_{syt}+A_{syb}$ en la sección de apoyo. (c) $A_{syb}$ en la sección centro de vano .....	187
<b>Figura 6.24</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 200$ kN/m). (a) $A_{syt}$ y $A_{syb}$ en la sección de apoyo. (b) $A_{syt}+A_{syb}$ en la sección de apoyo. (c) $A_{syb}$ en la sección centro de vano .....	188
<b>Figura 6.25</b>	Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 250$ kN/m). (a) $A_{syt}$ y $A_{syb}$ en la sección de apoyo. (b) $A_{syt}+A_{syb}$ en la sección de apoyo. (c) $A_{syb}$ en la sección centro de vano .....	189
<b>Figura 6.26</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Modelo de elementos finitos y carga.....	191
<b>Figura 6.27</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Esfuerzos de flexión [mkN/m]. (a) $M_x$ . (b) $M_y$ . (c) $M_{xy}$ .....	191
<b>Figura 6.28</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Mapas de densidades de armado [ $\text{mm}^2/\text{m}$ ]. (a) $A_{sxb}$ . (b) $A_{syb}$ . (c) $A_{sxt}$ . (d) $A_{syt}$ .....	192
<b>Figura 6.29</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Superficies de densidad de armado. (a) $A_{sxb}$ . (b) $A_{syb}$ . (c) $A_{sxt}$ . (d) $A_{syt}$ .....	193
<b>Figura 6.30</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Definición de las secciones en estudio.....	193
<b>Figura 6.31</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Resultados de armado. Sección 1. (a) $A_{sx}$ . (b) $A_{sy}$ . (c) $A_{sxt}+A_{sxb}$ . (d) $A_{syt}+A_{syb}$ .....	194
<b>Figura 6.32</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Resultados de armado. Sección 2. (a) $A_{sx}$ . (b) $A_{sy}$ . (c) $A_{sxt}+A_{sxb}$ . (d) $A_{syt}+A_{syb}$ .....	195

<b>Figura 6.33</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Resultados de armado.	
	Sección 3. (a) $A_{sx}$ . (b) $A_{sy}$ . (c) $A_{sxt}+A_{sxb}$ . (d) $A_{syt}+A_{syb}$ .....	196
<b>Figura 6.34</b>	Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Resultados de armado.	
	Sección 4. (a) $A_{sx}$ . (b) $A_{sy}$ . (c) $A_{sxt}+A_{sxb}$ . (d) $A_{syt}+A_{syb}$ .....	197

# Lista de símbolos

## MAYÚSCULAS ROMANAS

$A$	Un coeficiente de la ecuación general de un plano.
$A_c$	Área de hormigón en la misma dirección que $A_s$ .
$A_s$	Área de armadura en una dirección cualquiera.
$A_{s,min}$	Área mínima de armadura en una dirección cualquiera.
$A_{sx}, A_{sy}$	Área de armadura en dirección $x, y$ .
$A_{sx,min}, A_{sy,min}$	Área mínima de armadura en dirección $x, y$ .
$B$	Un coeficiente de la ecuación general de un plano.
$C$	Profundidad del plano de cimentación desde el punto intersección de los tres lóbulos de la estructura (o altura del hyper en su centro).
$D$	Un coeficiente de la ecuación general de un plano.
$DIFAT, DIFAB$	Diferencia entre $a_i, a_b$ en dos iteraciones sucesivas.
$D_j$	Desplazamiento del nodo $j$ .
$E$	Módulo de elasticidad longitudinal. Constante de la ecuación general de un plano.
$E_c$	Módulo de deformación longitudinal secante del hormigón.
$E_{c1}$	Módulo de deformación longitudinal secante desde el origen a la tensión máxima de compresión $f_{cm}$ .
$E_{ci}$	Módulo de deformación longitudinal tangente en el origen.
$E_{co}$	$= 2,15 \cdot 10^4$ MPa.
$E_{cr}$	Módulo de deformación longitudinal de fluencia.
$ED$	Energía de deformación.
$E_j$	Módulo de deformación longitudinal secante del hormigón a la edad de $j$ días.
$E_s$	Módulo de deformación longitudinal del acero.
$F$	Denominación de una zona eólica de una cubierta.
$F_j$	Fuerza/carga en el nodo $j$ .
$G$	Denominación de una zona eólica de una cubierta.
$G$	Acción de peso propio.
$G_{k,j}$	Valor característico de las acciones permanentes.



$G_{kj}^*$	Valor característico de las acciones permanentes de valor no constante.
H	Denominación de una zona eólica de una cubierta.
I	Un nodo de esquina de un elemento finito Shell93 de ANSYS.
J	Un nodo de esquina de un elemento finito Shell93 de ANSYS.
K	Un nodo de esquina de un elemento finito Shell93 de ANSYS.
$K$	Constante de la ecuación de la superficie media de un paraboloide hiperbólico. Coeficiente de mayoración de la resistencia del hormigón debido al efecto confinamiento.
$K_b$	Coeficiente de mayoración de la resistencia del hormigón debido al efecto confinamiento en la capa inferior.
$K_t$	Coeficiente de mayoración de la resistencia del hormigón debido al efecto confinamiento en la capa superior.
L	Un nodo de esquina de un elemento finito Shell93 de ANSYS.
$L$	Longitud desde el centro de la estructura hasta la clave del borde libre.
M	Un nodo intermedio de un elemento finito Shell93 de ANSYS.
$M_{cb}, M_{ct}$	Momento de la fuerza del hormigón en la capa inferior, superior.
$M_{cxb}, M_{cyb}, M_{cxyb}$	Momentos de las fuerzas en el hormigón en la capa inferior.
$M_{cxt}, M_{cxt}, M_{cxyt}$	Momentos de las fuerzas en el hormigón en la capa superior.
$M_{sx}, M_{sy}$	Momentos de las fuerzas en la armadura.
$M_x, M_y, M_{xy}$	Momentos de flexión en un elemento finito.
N	Un nodo intermedio de un elemento finito Shell93 de ANSYS.
$N_c$	Fuerza en la biela comprimida del hormigón.
$N_{c1}, N_{c2}$	Fuerzas principales de compresión en el hormigón.
$N_{c1b}, N_{c2b}$	Fuerzas principales de compresión en el hormigón en la capa inferior.
$N_{cb,max}, N_{ct,max}$	Fuerza máxima de compresión en el hormigón en la capa inferior, superior.
$N_{ct}, N_{cb}$	Fuerza de compresión en el hormigón en la capa superior, inferior.
$N_{c1t}, N_{c2t}$	Fuerzas principales de compresión en el hormigón en la capa superior.
$N_{cxb}, N_{cyb}$	Fuerza de compresión en el hormigón de dirección $x$ , $y$ en la capa inferior.
$N_{cxt}, N_{cxt}$	Fuerza de compresión en el hormigón de dirección $x$ , $y$ en la capa superior.
$N_{cxyb}, N_{cxyt}$	Esfuerzo cortante en el hormigón en la capa inferior, superior.
$N_s$	Función objetivo suma de fuerzas en las armaduras.
$N_{sx}, N_{sy}$	Fuerza en la armadura de dirección $x$ , $y$ .
$N_{sxb}, N_{syb}$	Fuerza en la armadura de dirección $x$ , $y$ en la capa inferior.
$N_{sxt}, N_{syt}$	Fuerza en la armadura de dirección $x$ , $y$ en la capa superior.
$NT$	Nivel tensional.
$N_x, N_y, N_{xy}$	Fuerzas de membrana en un elemento finito.
O	Origen de coordenadas. Un nodo intermedio de un elemento finito Shell93 de ANSYS.
$OLDAT, OLDAB$	Valores de $a_t, a_b$ en la iteración anterior.
P	Punto. Un nodo intermedio de un elemento finito Shell93 de ANSYS.

$Q$	Proyección perpendicular del punto P sobre el eje director $x'$ .
$QD$	Carga hidrostática de compresión actuando en las caras laterales de la placa.
$Q_{k,1}$	Valor característico de la acción variable determinante.
$Q_{k,i}$	Valor característico de la acción variable concomitante.
$R$	Radio de una esfera.
$R_1, R_2$	Radios medios principales de curvatura de una lámina.
$R1, R2, R1', R2'$	Puntos extremos de las parábolas sobre las que apoya la estructura.
$R45$	Intersección del plano bisectriz de un lóbulo con la recta que une $R2$ y $R2'$ .
$S_1, S_2$	Variables de diseño de geometría.
$S_i$	Área de influencia en el nodo $i$ .
$SRSS$	Raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las fuerzas residuales.
$TOLDIFA$	Tolerancia de convergencia para la diferencia entre $a_i$ o $a_b$ en dos iteraciones sucesivas.
$V$	Volumen.
$VD$	Función desplazamiento volumétrico.
$W$	Peso.
$X'$	Coordenada de un punto según el eje director $x'$ .
$Y'$	Coordenada de un punto según el eje director $y'$ .

#### MAYÚSCULAS ROMANAS (VECTORES Y MATRICES)

<b>B</b>	Matriz que relaciona las deformaciones en los puntos del elemento con los desplazamientos nodales.
<b>D</b>	Vector de desplazamientos nodales.
<b>D*</b>	Vector desplazamientos nodales del elemento.
<b>F</b>	Vector de fuerzas nodales.
$\overline{\mathbf{F}}$	Vector de fuerzas nodales en la configuración deformada en cada iteración.
$\overline{\mathbf{F}}_{elem}$	Vector de fuerzas $\overline{\mathbf{F}}$ para un elemento.
<b>G</b>	Vector del peso propio.
<b>Q</b>	Vector de cargas externas en nudos.
<b>R</b>	Vector resultante de la combinación de acciones.
<b>S</b>	Matriz de rigidez.
<b>S*</b>	Matriz de rigidez del elemento.
<b>S<sub>e</sub></b>	Matriz de rigidez elástica.
<b>S<sub>g</sub></b>	Matriz de rigidez geométrica.
<b>S<sub>t</sub></b>	Matriz de rigidez tangente.
<b>U</b>	Vector de la sobrecarga de uso.
<b>V</b>	Vector de la acción de viento.

## MINÚSCULAS ROMANAS

$a$	Coficiente de encofrado.
$a_b, a_t$	Espesor de la capa de hormigón comprimido inferior, superior.
$b$	Ancho.
$b_i, b_j, b_k, c_i, c_j, c_k$	Elementos de la matriz <b>B</b> .
$c$	Variable profundidad del plano de cimentación desde el punto intersección de los tres lóbulos de la estructura (o variable altura del hyper en su centro).
$c_e$	Coficiente medio de exposición.
$c_p$	Coficiente eólico de presión.
$d_i$	Módulo del vector desplazamiento en cada nodo $i$ .
$d_{ij}$	Elementos de la matriz de elasticidad para estados de tensión plana y deformación plana.
$e, e_1$	Espesor de la lámina.
$e_2$	Espesor del nervio que circunda el orificio central.
$e_3$	Espesor del nervio principal.
$e_i$	Espesor medio de la lámina en el área $S_i$ .
$e_{min}$	Espesor mínimo.
$f(\alpha, \omega)$	Una función intermedia de definición del paraboloide hiperbólico.
$f_c$	Resistencia a compresión del hormigón en el instante de aplicación de la carga.
$f_{cd}$	Resistencia de cálculo a compresión del hormigón.
$f_{cd1}$	Resistencia de cálculo a compresión del hormigón en zonas no fisuradas.
$f_{cd2}$	Resistencia de cálculo a compresión del hormigón en zonas fisuradas.
$f_{ck}$	Resistencia característica a compresión del hormigón.
$f_{cm}$	Resistencia media a compresión del hormigón.
$f_{cm,j}$	Resistencia media a compresión del hormigón a la edad de $j$ días.
$f_{cmo}$	= 10 MPa.
$f_{ct,d}$	Resistencia de cálculo a tracción del hormigón.
$f_{ct,k}$	Resistencia característica a tracción del hormigón.
$f_t$	Resistencia a tracción del material.
$f(\mathbf{x})$	Función objetivo.
$f_{yk}$	Resistencia característica del acero.
$g$	Carga permanente.
$g(\alpha, \omega)$	Una función intermedia de definición del paraboloide hiperbólico.
$g_k(\mathbf{x})$	Restricción de diseño de desigualdad $k$ .
$h$	Espesor del elemento finito o espesor constante del elemento estructural plano.
$h_c$	Brazo mecánico medio de las bielas comprimidas del hormigón.
$h_j(\mathbf{x})$	Restricción de diseño de igualdad $j$ .
$h_{xt}, h_{xb}, h_{yt}, h_{yb}$	Brazo mecánico de la armadura en dirección $x$ o $y$ en la capa superior (subíndice $t$ ) o inferior (subíndice $b$ ).

$i$	Incremento de carga $i$ -ésimo. Un nodo de esquina de un elemento triangular.
$j$	Un nodo de esquina de un elemento triangular.
$k$	Un nodo de esquina de un elemento triangular.
$l$	Longitud.
$l_{ij}, l_{rk}, l_{ir}$	Longitudes finales entre puntos del elemento triangular.
$l_{ij,in}, l_{rk,in}, l_{ir,in}$	Longitudes iniciales entre puntos del elemento triangular.
$m_d$	Número de restricciones de desigualdad.
$m_i$	Número de restricciones de igualdad.
$n$	Número de variables. Número de nodos del modelo. Número de elementos del modelo. Relación entre el módulo de elasticidad del acero y el de fluencia.
$p_0$	Carga de pandeo lineal reducida ( $= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 p_{cr}$ ).
$p_{cr}$	Carga de pandeo lineal o bifurcacional.
$p_{cr}^{NLG}$	Carga de pandeo resultante del análisis NLG.
$p_{cr}^{NLGM}$	Carga de pandeo resultante del análisis NLGM.
$p_d$	Carga de pandeo de cálculo.
$p_{nl}$	Carga de pandeo no lineal reducida ( $= \alpha_4 p_0$ ).
$p_{ult}$	Carga última o de rotura de una lámina bajo compresión excéntrica en el instante de plastificación de los materiales.
$p'_{ult}$	Carga última o de rotura de una lámina bajo compresión centrada en el instante de plastificación de los materiales.
$q$	Carga variable.
$q_b$	Presión dinámica del viento.
$q_e$	Sobrecarga de viento.
$q_{e,pres}$	Sobrecarga de viento en presión.
$q_{e,succ}$	Sobrecarga de viento en succión.
$r$	Coordenada cilíndrica radio. Punto medio entre los nodos $i$ y $j$ de un elemento triangular.
$u$	Un grado de libertad en cada nodo del elemento.
$u_z$	Desplazamiento vertical.
$u_{z,max}$	Desplazamiento vertical máximo.
$v$	Un grado de libertad en cada nodo del elemento.
$w$	Imperfecciones geométricas de una lámina.
$w_0$	Medida de las imperfecciones geométricas de una lámina.
$w'$	Flecha.
$w''$	Imperfección (amplitud de la desviación de forma).
$x, y, z$	Ejes de coordenadas. Variables coordenadas. Ejes globales de un elemento.
$x^*, y^*, z^*$	Ejes locales de un elemento.
$x', y'$	Ejes directores.
$x_i^I (x_i^S)$	Límite inferior (superior) de la variable $i$ .

y Profundidad del diagrama rectangular de tensiones.

### MINÚSCULAS ROMANAS (VECTORES Y MATRICES)

**d** Matriz de elasticidad para estados de tensión plana y deformación plana.  
**g** Vector de fuerzas residuales o residuo.  
**x** Vector n-dimensional de variables de diseño.

### MINÚSCULAS GRIEGAS

$\alpha$  Coordenada cilíndrica ángulo. Pendiente de una cubierta. Factor de reducción de la resistencia del hormigón para compresiones permanentes. Relación de tensiones principales en un estado biaxial de compresión.

$\alpha_1$  Coeficiente de sensibilidad a las imperfecciones.

$\alpha_{1,esfera}$  Coeficiente de sensibilidad a las imperfecciones para una esfera.

$\alpha_{1,cil.corto}$  Coeficiente de sensibilidad a las imperfecciones para un cilindro corto.

$\alpha_{1,cil.mediano}$  Coeficiente de sensibilidad a las imperfecciones para un cilindro mediano.

$\alpha_2$  Coeficiente de fluencia.

$\alpha_3$  Coeficiente de armado y fisuración.

$\alpha_4$  Coeficiente de no linealidad del material.

$\alpha_b$  Relación de tensiones principales en un estado biaxial de compresión en la capa inferior.

$\alpha_t$  Relación de tensiones principales en un estado biaxial de compresión en la capa superior.

$\alpha_{total} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$

$\alpha_{total,esfera} = \alpha_{1,esfera} \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$

$\alpha_{total,cil.corto} = \alpha_{1,cil.corto} \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$

$\alpha_{total,cil.mediano} = \alpha_{1,cil.mediano} \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$

$\beta$  Ángulo de inclinación del plano que define el borde libre de la estructura con respecto a la horizontal.

$\beta_1, \beta_2$  Parámetros de control sobre los segmentos en la formulación  $\beta$ -spline.

$\beta_i$  Factor de incremento de carga.

$\chi$  Profundidad del eje neutro.

$\delta$  Ángulo formado entre el eje  $x$  y el punto inicial del apoyo de la estructura.

$\delta_{ij}, \delta_{rk}, \delta_{lr}$  Deformaciones entre puntos del elemento triangular.

$\varepsilon$  Deformación relativa longitudinal.

$\varepsilon_c$  Deformación relativa del hormigón.

$\varepsilon_{c1} = -0,0022.$

$\varepsilon_{c,lim}$  Deformación unitaria límite del hormigón.

$\varepsilon_r$  Deformación relativa en el caso lineal, adoptando un módulo de deformación longitudinal reducido (secante).

$\varepsilon_s$	Deformación relativa del acero.
$\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \gamma_{xy}^*$	Deformaciones en el elemento triangular en los ejes locales.
$\gamma$	Ángulo del eje director $x'$ con el eje $x$ . Coeficiente de seguridad.
$\gamma_b$	Coeficiente de seguridad adoptado en el caso de fallo por pandeo.
$\gamma_c$	Coeficiente de seguridad de minoración de la resistencia del hormigón.
$\gamma_{G,j}$	Coeficiente parcial de seguridad para las acciones permanentes.
$\gamma_{G^*,j}$	Coeficiente parcial de seguridad para las acciones permanentes de valor no constante.
$\gamma_m$	Coeficiente de seguridad adoptado en el caso de fallo por plastificación del material.
$\gamma_{Q,1}$	Coeficiente parcial de seguridad para la acción variable determinante.
$\lambda_0$	Coeficiente de radio y espesor en casquetes esféricos.
$\mu$	Relación de armado.
$\nu$	Coeficiente de Poisson.
$\theta$	Ángulo de incidencia del viento sobre una estructura. Ángulo de la biela comprimida del hormigón.
$\theta_b$	Ángulo de la biela comprimida del hormigón en la capa inferior.
$\theta_{ix}^*, \theta_{iy}^*, \theta_{jx}^*, \theta_{jy}^*$	
$\theta_{kx}^*, \theta_{ky}^*$	Rotaciones del elemento con respecto a los ejes locales $x^*, y^*$ .
$\theta_t$	Ángulo de la biela comprimida del hormigón en la capa superior.
$\sigma$	Tensión normal.
$\sigma_1$	Tensión principal de tracción.
$\sigma_2$	Tensión principal intermedia.
$\sigma_3$	Tensión principal de compresión.
$\sigma_a$	Tensión admisible.
$\sigma_c$	Mayor tensión principal de compresión.
$\sigma_{c,lim}$	Tensión de compresión en el hormigón correspondiente a la deformación unitaria límite.
$\sigma_{ij}$	Valor medio de la tensión principal $i$ en los nodos del elemento $j$ .
$\sigma_t$	Mayor tensión principal de tracción.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensiones normales en ejes globales $x, y, z$ .
$\sigma_x^*, \sigma_y^*, \sigma_z^*$	Tensiones normales en ejes locales $x^*, y^*, z^*$ .
$\sigma_{x,in}^*, \sigma_{y,in}^*, \sigma_{z,in}^*$	Tensiones normales en ejes locales $x^*, y^*, z^*$ en el estado inicial.
$\tau_{xy}$	Tensión tangencial en el plano $xy$ .
$\tau_{xy}^*$	Tensión tangencial en el plano $x^*y^*$ .
$\tau_{xy,in}^*$	Tensión tangencial en el plano $x^*y^*$ en el estado inicial.
$\omega$	Ángulo formado por los ejes directores.
$\psi$	Ángulo que forma cada punto de la bisectriz de un lóbulo con la horizontal. Coeficiente intermedio de armado y fisuración.
$\psi_{0,1}$	Coeficiente $\psi$ para láminas no fisuradas con una capa de armadura.

$\psi_{0,2}$	Coefficiente $\psi$ para láminas no fisuradas con dos capas de armadura.
$\psi_{0,i}$	Coefficiente de combinación.
$\psi_{0,i}Q_{k,i}$	Valor representativo de combinación de las acciones variables concomitantes.
$\psi_1$	Coefficiente $\psi$ para láminas fisuradas con una capa de armadura según las recomendaciones de la IASS.
$\psi_2$	Coefficiente $\psi$ para láminas fisuradas con dos capas de armaduras según las recomendaciones de la IASS.
$\psi_{\infty,1}$	Coefficiente $\psi$ para láminas fisuradas con una capa de armadura según la propuesta de Kollár, 1993.
$\psi_{\infty,2}$	Coefficiente $\psi$ para láminas fisuradas con dos capas de armadura según la propuesta de Kollár, 1993.

#### MINÚSCULAS GRIEGAS (VECTORES Y MATRICES)

$\varepsilon$	Vector de deformaciones.
$\sigma$	Vector de tensiones.
$\sigma_u$	Matriz de tensiones debidas a los desplazamientos nodales unitarios

#### MAYÚSCULAS GRIEGAS

$\Delta$	Incremento.
$\Delta f$	= 8 MPa.
$\Sigma$	Suma.
$\Omega$	Área del elemento.
$\Omega_{in}$	Área del elemento en el estado inicial.

#### ACRÓNIMOS

AASHTO	American Association of State Highway and Transportation Officials.
ACHE	Asociación Científico-técnica del Hormigón Estructural.
ACI	American Concrete Institute.
ASCE	American Society of Civil Engineers.
BSS	Buckling State of Stress.
CAD	Computer Aided Design.
CAGD	Computer Aided Geometric Design.
CEB	Comité Européen du Béton.
CEN	Comité Européen du Normalisation.
CMM	Cracked Membrane Model.
CODISYS	Computer Optimal Design Integrated System.
DAF	Diagramas de Armado a Flexión.
DESAP1	Structural design program with stress and displacement constraints.

DESAP2	Structural design program with stress and buckling constraints.
DISSENY	Sistema interactivo para el diseño de estructuras basado en técnicas de optimización.
FASTOP	Flutter and Strength Optimization Program.
FE	Finite Element.
FEM	Finite Element Method.
FETI	Finite Element Tearing and Interconnecting.
FIP	Fédération Internationale de la Précontrainte.
FSD	Fully Stressed Design.
HYPAR	Hyperbolic Paraboloid.
IABSE	International Association for Bridge and Structural Engineering.
IASS	International Association for Shell and Spatial Structures.
IETcc	Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja.
IMCYC	Instituto Mexicano del Cemento Y del Concreto.
L	Análisis Lineal.
LFRD	Load and Resistance Factor Design.
MC	Model Code.
MEF	Método de los Elementos Finitos.
NLG	Análisis No Lineal Geométrico.
NLGM	Análisis No Lineal Geométrico y del Material.
NLM	Análisis No Lineal del Material.
NURBS	Non Uniform Rational B-Splines.
RAND	Research And Development.
RC	Reinforced Concrete.
SADDLE	Structural Analysis and Dynamic Design Language.
TC	Technical Committee.



# Introducción y objetivos

## 1.1 INTRODUCCIÓN

### 1.1.1 Proceso de diseño

Antes de la aplicación de las modernas técnicas de optimización al diseño, el proceso de diseño requería de experiencia por parte del diseñador, el cual debía utilizarla en casi todas las etapas del proceso de diseño. El método que se empleaba era el siguiente: el diseñador definía un diseño inicial cuyo comportamiento era analizado numéricamente; de los resultados de dicho análisis se podían deducir (por experiencia o intuición) los cambios a realizar para mejorar el diseño. El proceso finalizaba cuando se consideraba que el diseño era lo suficientemente bueno.

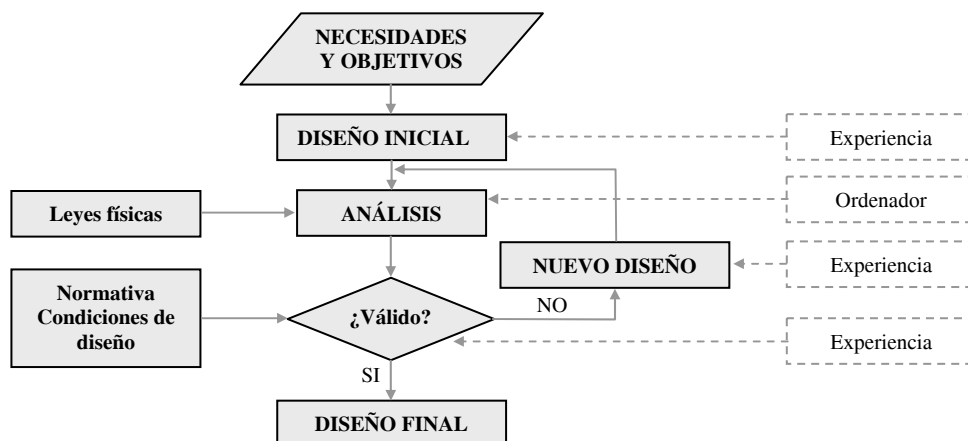
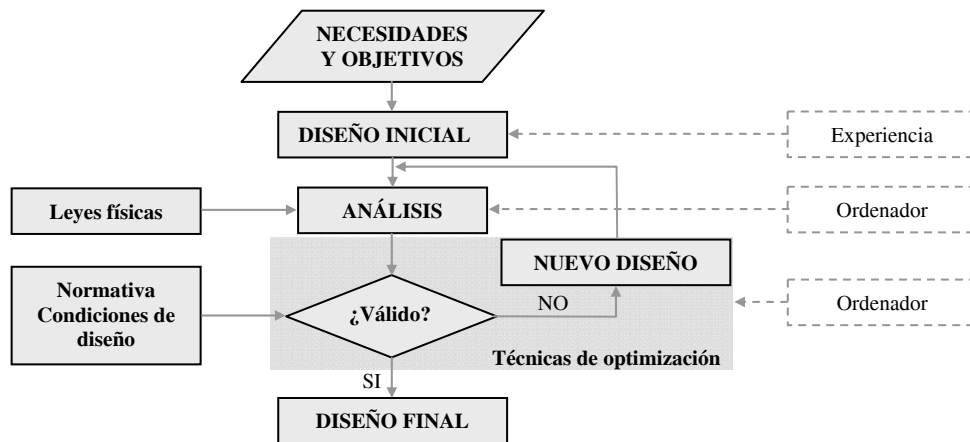


Figura 1.1 Diseño por prueba y error

Este método, denominado de prueba y error (Figura 1.1), presentaba el inconveniente de que las modificaciones dependían totalmente de la experiencia del diseñador, lográndose soluciones buenas, pero no las mejores y, además, con un alto

precio en tiempo por parte del diseñador.

Para compatibilizar una resolución del problema más económica en tiempo empleado, con el ensayo de un mayor número de soluciones que acerquen el resultado al óptimo, se formuló el problema de modo que fuese apto para resolverse automáticamente. Así, se reformó el proceso de diseño según el esquema mostrado en la Figura 1.2.



**Figura 1.2** Diseño optimizado

Un paso previo a la tarea de diseño es definir una idealización del objeto a diseñar, a fin de obtener un modelo que incluya un número finito de los aspectos más importantes del diseño y sea más sencillo de manejar que el objeto real. Ese proceso de idealización debe realizarlo el diseñador, utilizando para ello la experiencia adquirida en diseños precedentes. Sin embargo, lejos de encontrarse desasistido en tal labor, el diseñador cuenta con una serie de pautas establecidas y generalizadas que no puede rechazar arbitrariamente.

En el presente trabajo se va a aplicar el esquema de la Figura 1.2.

### 1.1.2 Diseño óptimo de forma y armado de láminas de hormigón

La aplicación de las técnicas de optimización a estructuras laminares de hormigón supone generar diseños cuyo comportamiento mecánico ha sido previamente dirigido por el diseñador. En primer lugar es necesario, para la descripción de la geometría del modelo, el empleo de elementos de diseño geométrico asistido por ordenador CAGD (computer aided geometric design), como son los polinomios de Lagrange, curvas y superficies de Bézier, B-splines y patches de Coons. El modelo geométrico, definido por curvas y superficies cuyos puntos de control suelen ser las variables de diseño, se transforma, mediante un preprocesador, en un modelo numérico de nodos y elementos para su posterior análisis.

En la optimización de forma de láminas, el enfoque puede ser diverso en función de los objetivos establecidos en el problema. Por una parte, se pueden desarrollar

procesos de optimización que obtengan superficies para una determinada distribución tensional, o lo que es lo mismo, superficies libres de flexiones en láminas, no siendo preciso obtener el armado de la lámina al ser éste innecesario. Otro enfoque es el de integrar la optimización de forma con la optimización de armado, haciendo entonces que el mecanismo resistente de la lámina se alcance no sólo a través de la forma que adopte en el espacio, sino también por la cuantía y disposición de armaduras en su interior. A parte de las clásicas funciones objetivo como el peso o la superficie, también pueden utilizarse otras, como la energía de deformación y el nivel de tensiones.

El problema del armado de elementos estructurales planos puede resolverse, de forma general, mediante dos metodologías, la basada en aplicar las condiciones de rotura a las tensiones en algunos puntos de la estructura, y la que emplea elementos de diseño tipo placa. En esta última, cada elemento es considerado una unidad de dimensionado independiente que tiene que resistir sus fuerzas nodales. Se trata de alcanzar el equilibrio entre las fuerzas externas y las internas en la armadura y en el hormigón. Esta metodología se ha extendido posteriormente al diseño de elementos lámina al incorporar el resto de esfuerzos involucrados en el problema. Su resolución se aborda mediante aproximaciones sucesivas más o menos complejas debido al manejo de sistemas de ecuaciones no lineales. En el presente trabajo se ha empleado esta metodología para la obtención del diseño óptimo de la armadura de elementos lámina de hormigón.

Considerando la continua proliferación de programas de análisis y optimización que emplean el método de los elementos finitos, parece razonable hoy día desarrollar rutinas de usuario que se puedan ensamblar con los módulos de análisis y optimización de estos programas. El hecho de utilizar un procesador de análisis compatible con el de optimización hace que mejore la eficiencia y fiabilidad del proceso de diseño, pudiendo centrar los esfuerzos en aspectos más interesantes que en programar un módulo convencional de análisis de estructuras o un algoritmo conocido de optimización.

## **1.2 OBJETIVOS DE LA TESIS**

El comportamiento estructural de las láminas se desarrolla básicamente a través de su forma, por lo que pueden buscarse pequeñas modificaciones en su geometría que, sin alterar demasiado la configuración estética inicial, mejoren su comportamiento mecánico, a la vez que se cumplan las condiciones de diseño.

Por otra parte, las estructuras bidimensionales pueden presentar flexiones, ocasionalmente acompañadas de compresiones, que provocan tracciones importantes, por lo que resulta necesario dotarlas de una armadura en su interior que absorba esas tracciones. En este caso es interesante conocer cuál es la cantidad y disposición de armadura más idónea para soportar los esfuerzos que las someten.

En la línea de buscar un mayor conocimiento en el diseño óptimo de forma y armado de láminas de hormigón, los objetivos de esta tesis son:

- a) Investigar el problema de diseño óptimo de propiedades y geometría de láminas de hormigón empleando diversas funciones objetivo.
- b) Estudiar, mediante análisis no lineal, las mejoras obtenidas en el comportamiento estructural.
- c) Analizar el comportamiento frente a pandeo de los diseños mediante estudios de estabilidad no lineal y métodos semiempíricos.
- d) Proponer un procedimiento numérico para resolver el problema de diseño óptimo del armado de elementos de hormigón tipo lámina.

### **1.3 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS**

Esta tesis se ha estructurado en siete capítulos, incluyendo este primer capítulo de introducción y objetivos.

En el capítulo 2 se hace una revisión de las investigaciones realizadas en el campo del diseño óptimo de láminas, en general, y de láminas de hormigón, en particular, y en el del análisis y armado de elementos bidimensionales de hormigón. Posteriormente se relacionan las publicaciones referentes al tema de la tesis presentadas por el doctorando en el desarrollo de la misma.

El capítulo 3 se introduce en el campo de la búsqueda de forma de láminas de hormigón empleando técnicas de optimización, concluyendo con las motivaciones que han provocado el desarrollo de esta tesis.

En el capítulo 4 se ha realizado un estudio del diseño óptimo de espesor y geometría de una lámina de hormigón en forma de paraboloide hiperbólico empleando diversas funciones objetivo (energía de deformación, peso y mayor tensión principal de tracción), con dos valores mínimos para el espesor (0,06 y 0,08 m), y bajo diversas restricciones tensionales y de control geométrico.

En el capítulo 5 se revisan los métodos de análisis no lineal de láminas de hormigón y los procedimientos que contemplan el fenómeno de la inestabilidad. A continuación se aplican estos procedimientos en sendos estudios sobre los diseños de la lámina empleada en los procesos de optimización.

En el capítulo 6 se propone un procedimiento de resolución del problema de diseño óptimo del armado de elementos de hormigón tipo lámina, aplicado al caso de elementos estructurales planos sometidos a distintos estados tensionales.

Finalmente, en el capítulo 7 se recogen las conclusiones de la tesis y algunas sugerencias para trabajos futuros.

# *Estado del arte en el análisis y diseño óptimo de forma y armado de láminas de hormigón*

## **2.1 INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se ha hecho una revisión de las investigaciones realizadas en el campo del diseño óptimo de láminas, en general, y de láminas de hormigón, en particular, y en el del análisis y armado de elementos estructurales planos. No se ha pretendido realizar una exhaustiva revisión, sino describir aquellos trabajos que se han considerado más significativos y relacionados, directa o indirectamente, con el desarrollado en esta tesis.

Primeramente se realiza una reseña histórica de los inicios de la optimización de estructuras, para efectuar a continuación la revisión de la literatura concerniente al diseño óptimo de láminas, y al análisis y diseño óptimo de placas y láminas de hormigón. Para finalizar, se relacionan y comentan los estudios publicados hasta la fecha por el doctorando referentes al trabajo desarrollado en la tesis.

## **2.2 OPTIMIZACIÓN DE ESTRUCTURAS. RESEÑA HISTÓRICA**

Una de las primeras aplicaciones de la optimización estructural fue la optimización de forma de un voladizo (Michell, 1904). Pero tuvo que transcurrir medio siglo hasta que se iniciara, en los años 50, una búsqueda de métodos de optimización sistemáticos, objetivos y fiables, en los que no fuera necesario recurrir a la experiencia del diseñador. En ellos se siguieron dos vías de desarrollo:

- a) los criterios de optimalidad, y
- b) la programación matemática.

Mediante los *criterios de optimalidad* se solucionan problemas concretos de optimización, dirigiendo la solución por medio de la aplicación de criterios que se sabe, o se cree, que son apropiados para el problema tratado. Algunos de los criterios de

optimalidad tienen un claro sentido físico; tal es el caso del diseño FSD (fully stressed design), que es aquél en el cual cada elemento de la estructura soporta una tensión límite bajo, al menos, uno de los estados de cargas especificados. Berke, Gellatly, Venkayya y Khot sentaron las bases de estos métodos con numerosas publicaciones en los años 60. Puede consultarse una referencia detallada del método en Gellatly y Berke (1973).

Las primeras aplicaciones de los métodos basados en *programación matemática* aparecieron en los años 50. Los basados en programación lineal se utilizaron ampliamente como técnica de optimización de procesos. Heyman (1951), Foulkes (1954), Livesley (1956) y Prager (1957) fueron algunos investigadores destacados en este campo.

Sin embargo, desde el primer momento se intentó formular el problema de optimización de una forma adecuada, y así Klein (1955) reconoció la importancia fundamental de las restricciones de desigualdad en la formulación general del problema de diseño óptimo, y reveló que el problema más general era un problema no lineal. Por otra parte, Pearson (1958) trató el diseño óptimo de estructuras de barras sometidas a múltiples estados de carga. En su desarrollo introdujo tres ideas de gran importancia:

- a) el tratamiento integrado del análisis y la optimización;
- b) la conversión del problema con restricciones de desigualdad en uno o más problemas equivalentes sin restricciones, y
- c) la reducción de la dimensión del problema por medio de cambios de variables.

El desarrollo de las técnicas de programación matemática durante la década de los 40 y primeros años de los 50, junto con el *desarrollo de los computadores y del método de los elementos finitos* (MEF) a principios de la década de los 60, hizo posible el nacimiento de la optimización estructural como hoy se la conoce. Schmit (1960) introdujo la idea de acoplar el análisis por el MEF con la programación matemática no lineal. Durante la década de los 60 se desarrollaron dos grandes sistemas que combinaban los elementos finitos con la programación matemática. El primero se debió a Gellatly, Gallagher y Lubracki (1964) para Bell Aerosystems y el segundo fue realizado en la Boeing por Tocher y Karnes (1971).

Cuando estos primeros sistemas empezaron a ser operativos se manifestaron sus carencias. En primer lugar apareció el problema de la gran cantidad de tiempo que requería la resolución de problemas prácticos, incluso los más sencillos, debido al tamaño de los problemas resultantes de acoplar los elementos finitos con la programación matemática. Un primer paso para superar este problema consistió en aumentar la eficiencia de los programas de elementos finitos, adaptándolos a las particularidades del problema de optimización. Al tener que realizar gran cantidad de análisis muy similares, se desarrollaron ideas como la de distinguir entre partes repetibles y no repetibles en el análisis, o la de realizar análisis aproximados.

No obstante, los métodos matemáticos empleados seguían siendo incapaces de resolver eficientemente la optimización. Por ello, se siguió investigando en busca de

perfeccionarlos. Además, se empezaron a comprender mejor los problemas particulares debidos a la aplicación de estos métodos al diseño de estructuras, poniéndose de manifiesto que la ineficiencia residía en tres características del problema a resolver:

- a) la gran cantidad de variables de diseño;
- b) la gran cantidad de restricciones de desigualdad, y
- c) que muchas restricciones son funciones implícitas de las variables de diseño.

En la década de los 70, una gran parte de las investigaciones se dedicó a resolver estas cuestiones.

Entre tanto, los múltiples problemas asociados con el uso del ordenador en el diseño de estructuras fueron abordados independientemente, dando lugar a varias vías de desarrollo paralelas. Uno de estos problemas era el de gestionar la información que se maneja en un problema de diseño. Se determinó la inviabilidad de utilizar las bases de datos desarrolladas en el campo de la gestión comercial, dadas las claras particularidades que presenta la información a tratar, principalmente el ser muy variada. Los trabajos de Felippa (1979) establecieron la necesidad de un tratamiento específico de esta información. Posteriormente, se definieron modelos apropiados que permitieron unos primeros desarrollos operativos, como el realizado por Rajan y Bhatti (1986).

También el *análisis de sensibilidades* recibió una atención creciente. De la tendencia original a utilizar métodos particulares incluidos en el propio código de optimización, se pasó, a finales de los 70, a intentar una formulación general y eficiente de este problema. Uno de los métodos de análisis de sensibilidades para respuesta lineal bajo cargas estáticas y dinámicas fue descrito por Arora y Haug (1979). En este artículo se apuntó además una segunda aplicación del análisis de sensibilidades, el aportar información al diseñador que le permita hacer cambios conociendo el efecto aproximado que van a provocar, reduciendo el proceso de prueba y error habitual en la búsqueda de soluciones.

Por último, otro de los problemas que se empezó a tratar era el de facilitar el uso de los programas desarrollados. La gran cantidad de datos que necesita un programa de elementos finitos para definir el modelo de análisis era la causa de muchas horas de trabajo y múltiples fallos. Para paliar este problema, se desarrollaron programas *preprocesadores* que ayudaron a generar el modelo, a partir de una información básica proporcionada por el usuario.

## 2.3 DISEÑO ÓPTIMO DE LÁMINAS

### 2.3.1 Introducción

El estado del arte del problema de diseño óptimo de láminas se ha dividido en tres partes por orden cronológico.

La primera comprende desde los inicios hasta mediados de los años 80.

La segunda abarca la década siguiente, que fue la más prolífica y de máximo

desarrollo en este campo de investigación. Se ha dividido en varios apartados, tratando aspectos decisivos en la resolución de los problemas detectados en el pasado y que establecen las bases en la consecución de avances posteriores.

Por último, se presentan algunas de las investigaciones recientes aparecidas en el último decenio.

### **2.3.2 Desde los inicios hasta mediados de los 80**

La búsqueda de forma de superficies sometidas a una determinada carga tiene sus orígenes en Pucher (1934), quien definió la función de las fuerzas en una membrana mediante una sola ecuación diferencial considerando un tensor oblicuo de fuerzas elásticas. Esta ecuación sirvió como base teórica a posteriores desarrollos en la obtención de superficies sometidas a esfuerzos de membrana, como por ejemplo la solución analítica de esfuerzos en el paraboloides hiperbólico (Canals y Molina, 1961) o la ecuación de la velaria (Canals y Palomar, 1962) entendida como la superficie que adopta una membrana rectangular de bordes rígidos sometida a una presión constante. Posteriormente aparecieron los procedimientos numéricos para resolver la ecuación de membrana de Pucher, completada con ciertas condiciones de contorno, por ejemplo mediante diferencias finitas (Korda, 1965; Csonka, 1973; Alpa, Bozza, Corsanego y Del Grosso, 1978).

Los primeros trabajos de optimización de forma de láminas como hoy se los conoce datan de principios de los años 70, coincidiendo con el desarrollo de los procesadores de computación. Están muy focalizados hacia la creación de procedimientos capaces de describir el modelo de diseño de un modo eficaz.

Las primeras investigaciones empleaban las coordenadas de los nodos del contorno del modelo de elementos finitos como variables de diseño (Zienkiewicz y Campbell, 1973). Esta aproximación presentaba serios inconvenientes, pues la utilización de dichas coordenadas requiere un gran número de variables de diseño y tiende a producir formas con contornos discontinuos.

Para generar fronteras suavizadas era preciso imponer numerosas restricciones a los nodos localizados en ellas mediante el empleo de curvas de Bézier, esto es, funciones polinómicas a trozos que describen la forma del contorno (Francavilla, Ramakrishnan y Zienkiewicz, 1975), o mediante combinación lineal de estas funciones (Dems, 1980). Ha habido otras aproximaciones menos generales, como el empleo de distancias radiales (Hou y Chen, 1984) o de distancias a puntos (Yoo, Haug y Choi, 1984).

Para forzar la continuidad entre elementos adyacentes de la frontera, una estrategia mejor consistió en emplear splines (Yang y Choi, 1985) y B-splines (Braibant y Fleury, 1984), con la ventaja adicional de emplear polinomios de bajo orden.

Estas técnicas para modelizar geometrías y resolver los problemas en el contorno fueron reflejadas en las primeras revisiones que se realizaron sobre el estado del arte de



la optimización de forma de estructuras (Haftka y Grandhi, 1985; Ding, 1986).

Otro de los inconvenientes que surgieron en este tipo de problemas fue la débil conexión entre la definición del modelo mediante las variables de diseño y el generador de malla.

Imam (1982) introdujo un planteamiento general para la optimización de forma tridimensional mediante la creación del concepto de *elemento de diseño*. Este elemento es considerado un modelo en sí mismo de una parte de la estructura, representando su forma y conteniendo a la malla de elementos finitos. Para determinar las coordenadas de cualquier punto de la superficie del elemento de diseño se utiliza el mapeo isoparamétrico, es decir, la misma representación isoparamétrica de la forma empleada para los elementos individuales.

Esta técnica para calcular las posiciones de los puntos internos de un elemento de diseño es ligeramente refinada por Botkin (1982), al utilizar sólo las posiciones de ocho nodos clave. Las variables de diseño son ahora cantidades geométricas como el radio, la posición del centro de un orificio o las amplitudes de funciones de forma preestablecidas que definen la frontera de los elementos de diseño.

Braibant y Fleury (1986) presentaron una variante más general de esta técnica, emplear unos puntos de referencia o keypoints para definir esas subregiones o elementos de diseño. Estos puntos sólo pueden moverse por unas trayectorias previamente definidas, calculando la posición del resto de puntos mediante técnicas de interpolación.

Estos procedimientos ofrecen un modo eficaz de descripción del modelo de diseño, pues los elementos finitos que constituyen el modelo de análisis se definen de acuerdo a la parametrización de los elementos de diseño, por lo que los cambios afectan al modelo geométrico más que al modelo de análisis.

Paralelamente al desarrollo de estos procedimientos para generar el modelo de diseño, aparecen las primeras *herramientas informáticas* de optimización, centradas fundamentalmente en el diseño automático, en los que una vez formulado el problema e introducidos los datos se generaba una solución, sin intervención del usuario. Estos programas tipo “caja negra” resultaban muy eficientes, a costa de servir para un único tipo de aplicación. Solían emplear criterios de optimalidad como base para la optimización estructural. Una extensa relación de estos programas iniciales puede consultarse en la revisión efectuada por Venkayya (1972). La mayoría de ellos fueron propiciados por la industria aeroespacial, como los denominados DESAP1 y DESAP2 desarrollados por Kiusalaas y Reddy (1977), o FASTOP desarrollado por Wilkinson, Markowitz, Batill, George y Lener (1977).

### **2.3.3 De mediados de los 80 a mediados de los 90**

#### **2.3.3.1 Aparición de nuevas necesidades**

Estos trabajos iniciales evidencian algunas necesidades que surgen en el campo del diseño óptimo de láminas. Precisamente en las revisiones de Imam (1982) y Haftka y Grandhi (1985) se advierte sobre la importancia de tres aspectos:

- a) mejorar los métodos de análisis y minimizar el número de éstos para reducir los tiempos de cálculo en el computador;
- b) desarrollar técnicas de generación automática de mallas, y
- c) cuidar la selección de las variables de diseño.

El primer aspecto ha venido siendo un campo de investigación activo del que ya se ha hecho alguna mención en la reseña histórica del apartado 2.2.

En relación con la segunda cuestión, Botkin (1991) propone un procedimiento de generación automática de malla, y Canales, Tárrago y Hernández (1994) emplean un método de refinamiento de malla adaptativo, ambos específicamente desarrollados para problemas de diseño óptimo de forma.

Respecto al tercer aspecto, Belegundu y Rajan (1988) determinan qué parámetros de generación del modelo pueden ser identificados como variables de diseño, sin violar la integridad de éste ni la del generador de malla, adoptando una mayor generalidad en el proceso de diseño y en la predicción de los cambios de forma. Chen, Zhang y Gu (1991) y Zhang, Beckers, Duysinx y Fleury (1993) desarrollan una metodología de diseño que se integra en la optimización de forma de estructuras bidimensionales con restricciones de igualdad. Proponen un procedimiento para seleccionar las variables de diseño independientes, y establecen una ley de deformación de la malla de elementos finitos para evaluar los gradientes en el análisis de sensibilidad.

Las variables de diseño de geometría no son independientes ni explícitas, están implícitamente acopladas mediante restricciones geométricas que imponen la conservación de la regularidad y suavidad del contorno del problema. La adecuada determinación de éstas supone, por tanto, una etapa clave para integrar eficientemente los métodos de optimización numérica con las técnicas de CAGD (computer aided geometric design).

### **2.3.3.2 Técnicas de CAGD**

Con la aparición de estas técnicas se abre una nueva vía en la investigación de la optimización de forma. Hasta entonces, se distinguía entre proceso de diseño y proceso computacional. El diseño generalmente se realizaba mediante herramientas de CAD (computer aided design), y las técnicas computacionales se utilizaban para el análisis de la respuesta de la estructura. A continuación los resultados de este análisis se empleaban para mejorar el diseño inicial. De este modo, el diseño óptimo de forma era una tarea interactiva entre métodos computacionales y técnicas de CAD, pudiendo manejar sólo geometrías relativamente sencillas para poder asumir los costes computacionales. Este ha sido el caso de láminas con simetría de revolución, de gran interés además por sus aplicaciones prácticas (Hinton, Rao y Sienz, 1992; Ramm, Bletzinger y Reitinger, 1993;

Gates y Accorsi, 1993; Imam y Mustahsan, 1995).

Por tanto, la integración de las herramientas CAD, mecánica computacional y herramientas de optimización se convierte en el aspecto básico dentro de este contexto. Para facilitar la utilización de los modelos geométricos en la optimización de forma, se desarrolló el citado concepto de elemento de diseño, como medio para unificar los modelos geométricos y de análisis.

Normalmente, la transformación de un modelo CAD en un modelo numérico se realiza mediante un preprocesador. La geometría, definida por curvas y superficies, se transforma en un modelo de nodos y elementos. Shyy, Fleury e Izadpanah (1988) y Schramm y Pilkey (1993) emplearon los elementos geométricos del proceso CAD directamente en la definición del modelo numérico, utilizando curvas CAGD, esto es, curvas que definen las fronteras de elementos finitos de orden elevado, y siendo los puntos de control de dichas curvas las variables de diseño.

Zumwalt y El-Sayed (1993) incorporan las curvas  $\beta$ -splines a la técnica del elemento de diseño, desarrollando una formulación capaz de describir variedad de formas con pocos parámetros de control. La formulación  $\beta$ -spline es una generalización de la B-spline mediante el uso de unos parámetros adicionales,  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , de control sobre los segmentos, de tal modo que se modifica la continuidad paramétrica entre ellos pero se mantiene la continuidad geométrica.

### **2.3.3.3 Inclusión de no linealidades**

En la etapa de los 90, de aplicación de las técnicas que aglutinan diseño geométrico, análisis estructural y de sensibilidades, y programación matemática, las funciones objetivo clásicas como el peso o la superficie comienzan a dejar paso a otras menos convencionales (Bletzinger, Kimmich y Ramm, 1990; Bernadou, Palma y Rousselet, 1991; Ramm, 1992). Se desarrollan nuevos modelos y métodos de resolución del problema de diseño óptimo de forma que contemplan las no linealidades, especialmente la no linealidad geométrica y los fenómenos de inestabilidad.

Ringertz (1992) plantea unos métodos numéricos con elementos finitos para la optimización de láminas con no linealidad geométrica, adoptando como variables de diseño el espesor y las dimensiones de la sección transversal de los rigidizadores. Polynkin, Van Keulen y Toropov (1995) optimizan estructuras de pared delgada con comportamiento no lineal geométrico utilizando el método de la aproximación multipunto (técnica iterativa que emplea una sucesión de aproximaciones para las restricciones y la función objetivo usando los resultados previos en varios puntos del diseño). Incluyen las imperfecciones iniciales de la forma, consideradas como una distorsión proporcional a los primeros modos de pandeo de la estructura ideal. Reitinger y Ramm (1995) estudian la optimización de láminas con comportamiento no lineal geométrico, permitiendo la inclusión de fenómenos de inestabilidad y de sensibilidad a imperfecciones en el diseño estructural.

#### 2.3.3.4 Desarrollo de herramientas informáticas y programas de ordenador

Si la década de los 60 tuvo importancia por iniciarse lo que se puede considerar como la optimización estructural moderna, la década de los 70 se caracterizó por la búsqueda de la eficiencia, comenzando a desarrollarse programas de ordenador para la consecución de este objetivo. Los diferentes métodos de optimización resuelven el problema de diseño de forma iterativa, siendo necesario en cada iteración calcular los valores de la función objetivo, las restricciones y, en algunos casos, sus derivadas. Estos valores se calculan a partir de los resultados del análisis. Así pues, el software de diseño óptimo de estructuras está compuesto de software de optimización y software de análisis, organizados dentro de un proceso iterativo.

Respecto a los *programas dedicados al análisis* puede citarse a Scordelis (1986), que desarrolló un programa para el caso de láminas cilíndricas y prismáticas con comportamiento elástico lineal. Posteriormente este programa fue alcanzando mayor sofisticación a base de ir incluyendo, por ejemplo, vigas de borde, refuerzos interiores, geometría curvilínea y ortotropía, para finalizar desarrollando unos programas para bóvedas y cúpulas de crucero. Chan (1982) elaboró un programa para analizar láminas de hormigón con vigas de borde incorporando comportamiento no lineal del material, no linealidad geométrica y efectos dependientes del tiempo. Más tarde, Roca y Marí (1993) implementaron un modelo numérico para el análisis no lineal de láminas de hormigón pretensado.

Después de aquellos primeros rígidos *programas de optimización* de tipo caja negra desarrollados en los años 70, han ido apareciendo otros de tipo interactivo, donde el usuario puede intervenir en la evolución del diseño de un modo más flexible. Sin embargo, su eficiencia resulta muy condicionada por el flujo de datos entre las distintas partes del programa, y su utilidad depende en gran medida de la experiencia del usuario.

Martí, Company y Sanchís (1985 y 1986) desarrollan DISSENY, un sistema interactivo para el diseño de estructuras basado en técnicas de optimización. El sistema tiene implementado el procesador de análisis ADEF (Martí y Company, 1993); un procesador de optimización que emplea un algoritmo de programación cuadrática sucesiva, y una interfaz optimización-análisis encargada de calcular las propiedades de la sección transversal y actualizar las coordenadas de los nudos de la estructura.

Navarrina (1991) presenta el programa DAO2, un sistema asistido por ordenador basado en una metodología general para el diseño óptimo de estructuras que incluye análisis de sensibilidades de primer y segundo orden.

Gates y Accorsi (1993) utilizaron el programa comercial de análisis MSC/NASTRAN para ensamblarle distintos módulos de generación adaptativa de mallas, subestructuras y técnicas de optimización lineales y no lineales, con el objetivo de optimizar la forma de láminas permitiendo grandes cambios de forma.

Ramm, Bletzinger y Reitinger (1993) y Bletzinger y Ramm (1993) desarrollan el

programa CARAT en el que acoplan modelo de diseño, análisis no lineal geométrico, análisis de sensibilidades con derivadas analíticas y programación cuadrática sucesiva.

En esta línea, Tárrago, Canales y Arias (1994) presentan el programa CODISYS, un sistema para la optimización de forma de estructuras que integra análisis, evaluación de sensibilidades y métodos de programación matemática en un entorno CAD.

Por último, Gotsis (1994) modifica el programa original DESAP1 (Kiusalaas y Reddy, 1977) para poder optimizar estructuras laminares de débil espesor. En el módulo de análisis introduce nuevas formulaciones para los elementos, y en el módulo de optimización sustituye el procedimiento iterativo de resolución de una ecuación de cuarto orden por su solución analítica.

### **2.3.3.5 Búsqueda de forma**

La integración de herramientas CAD–análisis–optimización ha abierto un nuevo horizonte en la indagación de distintas posibilidades. Por ejemplo, se puede interpretar la optimización estructural como un método de diseño inverso respecto al método tradicional, esto es, la respuesta estructural viene definida inicialmente para después *buscar* la topología y la forma de la estructura.

Existen dos líneas en la búsqueda de forma óptima de láminas:

- a) Métodos inversos, que a su vez se dividen en
  - a.1) modelos colgantes;
  - a.2) analogía de la membrana, y
- b) optimización estructural de forma.

Los modelos colgantes se basan en los experimentos de Isler (Isler, 1959 y 1993). El objetivo es pasar de una estructura flectada a una membrana comprimida, sin realizar una búsqueda más intensa dentro de esta última. La simulación numérica se realiza mediante el MEF con análisis no lineal y grandes desplazamientos (Ramm, 1991 y 1992).

La analogía de la membrana tiene como fin encontrar la forma de la estructura que provoque un estado tensional predefinido de tracción en equilibrio con las condiciones de vinculación y las cargas externas (Otto y Rasch, 1995). Pueden emplearse diversas técnicas computacionales como la relajación dinámica (Barnes, 1994), el método de la densidad de fuerza (Linkwitz y Schek, 1971) o los métodos de linealización modificada (Haug y Powell, 1972; Suzuki y Hangai, 1991).

La optimización estructural de forma abarca las disciplinas de CAGD, mecánica computacional y programación matemática no lineal. Se suele escoger la energía de deformación como función objetivo, la masa como restricción de igualdad y las coordenadas del modelo CAGD como variables (Ramm, Bletzinger y Reintiger, 1993).

### **2.3.4 Últimas tendencias**

En la última década han surgido diversas líneas de investigación en el ámbito del diseño

óptimo de láminas. Una de estas líneas se ha dirigido hacia las distintas *formulaciones de elementos finitos* existentes aplicadas a la optimización. Chappelle y Bathe (1998) reflexionan sobre el comportamiento dominante en estas estructuras, que puede ser de tipo membrana o de tipo placa. Al no existir una formulación independiente del espesor aplicable a las dos categorías, analizan las formulaciones existentes y su ámbito de aplicación. Rao, Lee, Sousa y Hinton (1999) comparan los resultados de la optimización según se emplee, en el análisis, formulaciones de elementos finitos o de bandas finitas. Bletzinger, Bischoff y Ramm (2000) y Camprubí, Bischoff y Bletzinger (2004) discuten cómo afectan las distintas formulaciones de elementos finitos a los resultados de la optimización, en especial en lo referido al fenómeno del bloqueo por cortante, por lo que proponen una formulación para evitarlo.

Ramm, Schwarz, Kemmler y Lipka (2000) adoptan una visión más amplia de la cuestión, pues insisten en la idoneidad de los modelos, no sólo del numérico sino también del mecánico, que subyacen al problema de diseño óptimo para conseguir resultados adecuados. Una profusa revisión bibliográfica del análisis de láminas por el MEF la realiza Mackerle (2002). Por último, Khosravi, Ganesan y Sedaghati (2007) y Khosravi, Sedaghati y Ganesan (2006 y 2007) desarrollan un nuevo elemento para emplearlo en el análisis no lineal geométrico bajo grandes deformaciones y en la optimización de forma bajo restricciones de desplazamiento y estabilidad.

Los cambios que se producen en la *malla de elementos finitos* durante el proceso de optimización de forma pueden afectar a la calidad de la respuesta estructural y a la convergencia del algoritmo. Esto ha provocado en los últimos años la proliferación de estrategias encaminadas a resolver el problema, a destacar las de mallado adaptativo (Bletzinger y Maute, 1997; Lindby y Santos, 1999; Schleupen, Maute y Ramm, 2000; Kegl, 2000; Kegl y Brank, 2006). En estos procedimientos la malla de elementos finitos se va adaptando a los cambios de forma durante el proceso de optimización, mientras se va controlando el error de discretización del modelo.

Existen algunas publicaciones que indagan en la *optimización multinivel*, como los trabajos de Salajegheh (1996), que utiliza un método de aproximación a dos niveles para la optimización de láminas con variables de propiedades (espesores) y geometría (radios de curvatura); o los de Farhat, Chen, Mandel y Roux (1998) que dividen el dominio del problema en subestructuras y reescriben el sistema de ecuaciones para resolverlo a dos niveles.

Otras investigaciones se encaminan a la *integración* de todos los tipos de variables de diseño (propiedades, geometría y topología) en un mismo proceso de optimización. Como el caso de Hinton, Sienz, Bulman, Lee y Ghasemi (1998), que desarrollan el programa FIDO-TK (fully integrated design optimization tool-kit), o el de Ansola, Canales, Tárrago y Rasmussen (2002 y 2002), que presentan un método para optimizar simultáneamente la forma y la topología de estructuras laminares, de modo que se obtengan diseños que maximicen su rigidez.

También el *análisis de sensibilidades* ha recibido atención por parte de los investigadores. Normalmente, las derivadas de la matriz de rigidez respecto a las variables de geometría se realiza mediante diferencias finitas, sin embargo Perezzan y Hernández (1999) emplean derivadas explícitas de la matriz de rigidez y del vector de cargas respecto a las variables de propiedades y de geometría. Navarrina, López-Fontán, Colominas, Bendito y Casteleiro (2000) y Navarrina, Colominas, Juanes, Bendito y Casteleiro (2001) mejoran una formulación previa para el análisis de sensibilidad de orden elevado que incluía expresiones analíticas explícitas para las derivadas (Navarrina, Bendito y Casteleiro, 1989). Para ello desarrollan un procedimiento unificado y compacto, independiente de las ecuaciones de estado del problema, que calcula derivadas de orden elevado de la función objetivo y de las restricciones. Por otra parte, Bletzinger, Firl y Daoud (2007) presentan una formulación, que es válida en cualquier elemento finito, para detectar y eliminar los errores existentes en un análisis de sensibilidades semianalítico al calcular las derivadas de la matriz de rigidez por diferencias finitas.

En relación con las líneas existentes para la *búsqueda de forma* de láminas comentadas en el apartado anterior, han aparecido varias investigaciones empleando métodos computacionales que simulan la analogía de la membrana y, por supuesto, que realizan procesos de optimización estructural. En el primer caso se emplean técnicas como la estrategia de actualización del estado de referencia (updated reference strategy) (Bletzinger, 1998), mediante la cual se añade rigidez en la superficie media de la lámina para relajar y facilitar el movimiento normal a la misma, efecto que va desapareciendo conforme el proceso va actualizando el estado tensional de referencia en su aproximación hacia la solución final. Además de esta técnica surge una variante híbrida que conjuga la analogía de la membrana con la optimización estructural (Ohmori y Yamamoto, 1998 y 1998). En ella se obtienen superficies de láminas para una determinada distribución tensional empleando una función objetivo expresada en términos de los momentos flectores, lo que implica conseguir láminas libres de flexión ante pequeños cambios en su forma. En los métodos que utilizan sólo optimización estructural se recurre a maximizar la rigidez o, su equivalente mecánico, minimizar la energía de deformación, escogiendo la masa como restricción de igualdad y las coordenadas del modelo CAGD como variables (Bletzinger, Maute y Ramm, 1996; Bletzinger y Maute, 1997; Ramm, Bletzinger y Maute, 1997; Bletzinger, 1999).

También se han realizado investigaciones en esta última década en los ámbitos del *análisis no lineal* y de los *fenómenos de inestabilidad*.

En el primer caso, Sze, Liu y Lo (2004) realizan una interesante síntesis de los problemas más significativos que plantea el análisis no lineal geométrico de láminas. Posteriormente, Coda y Paccola (2006) han presentado una nueva formulación de elementos finitos para realizar este tipo de análisis, mediante la cual consideran parámetros no convencionales en los nodos, como sus posiciones en vez de sus

desplazamientos, y las componentes de un vector generalizado que incluye simultáneamente los cosenos directores y la variación del espesor de la lámina. Yi, Choi, Kim y Botkin (2006) emplean métodos sin malla para optimizar láminas con comportamiento no lineal, aliviando de este modo los problemas de distorsión de malla que surgen durante el proceso. Shin, Park y Park (2007) desarrollan un método para optimizar estructuras con respuesta no lineal a base de generar, en el análisis lineal, un sistema de cargas equivalentes que provoquen, en la estructura, la misma respuesta que provocaría el análisis no lineal.

Respecto al ámbito relacionado con los fenómenos de inestabilidad, Lee y Hinton (2000) advierten del peligro de optimizar la forma y/o el espesor de láminas mediante análisis lineal sin estudiar, a continuación, el pandeo de las mismas mediante análisis no lineal geométrico. Detectan que la carga de pandeo no lineal puede ser menor en láminas optimizadas que en no optimizadas cuando se haya empleado, como variables de diseño, el espesor o los parámetros geométricos. No ocurre esto si se emplean ambos a la vez. Barski y Kruszelecki (2005) y Barski (2006) abordan el problema de diseño óptimo de láminas teniendo en cuenta el pandeo y solicitando a la lámina con todos los tipos de esfuerzos. Emplean el método SA (simulated annealing) en el proceso de optimización para buscar la forma de la superficie media y el espesor de la lámina que proporcionen la máxima carga crítica. Por otra parte, Lagaros y Papadopoulos (2006) proponen una interesante formulación para el diseño óptimo de láminas reales, es decir, inicialmente imperfectas, entendiendo como tales las que presentan imperfecciones geométricas, de material y de espesor aleatoriamente distribuidas por la superficie. Para ello emplean, además de las clásicas restricciones deterministas a las tensiones y desplazamientos, una restricción de naturaleza probabilista, la probabilidad global de fallo, alcanzándose éste para la carga de pandeo de la estructura.

Para finalizar, puede consultarse una referencia interesante (Ramm y Wall, 2002) donde se aporta una visión general sobre las características específicas de las estructuras laminares y los problemas computacionales más habituales que pueden surgir en la actualidad (análisis de carga última y de inestabilidad, optimización estructural, interacción fluido–estructura y el problema del condicionamiento cuando la lámina se vuelve extremadamente delgada).

## **2.4 ANÁLISIS Y DISEÑO ÓPTIMO DE PLACAS Y LÁMINAS DE HORMIGÓN**

### **2.4.1 Introducción**

En el campo de las láminas de hormigón se puede distinguir dos etapas, una primera constructiva que comprende las múltiples realizaciones emprendidas hasta los años 70, y la segunda dedicada al análisis, cuando se desarrollan los procesadores de cálculo y comienzan a imponerse los métodos de la mecánica computacional.



En primer lugar se realiza una breve revisión de la etapa constructiva, centrada en algunas obras de Félix Candela, célebre diseñador y constructor de este tipo de estructuras.

Se dedica un apartado al diseño de la armadura, desde las primeras publicaciones aplicadas al caso membrana hasta la extensión de la metodología al caso lámina.

También se tratan las investigaciones destinadas a la optimización del coste en placas y láminas, esto es, teniendo en cuenta no sólo el peso de los materiales, sino otros aspectos como el encofrado o el montaje.

De la misma manera que en el apartado anterior se ha revisado la literatura sobre las metodologías de búsqueda de forma de láminas en general, se realiza aquí la concerniente a láminas de hormigón, poniendo especial atención en el grupo de investigación del profesor Ekkehard Ramm, por ser quien ha desarrollado más profusamente esta línea en las última décadas.

Un aspecto importante a considerar en el proceso de diseño de una estructura laminar de hormigón es la pérdida de estabilidad. Se ha realizado una revisión histórica de los métodos más relevantes en la literatura que tengan en cuenta este fenómeno, aunque se deja su desarrollo práctico para un capítulo posterior.

Por último, se presentan las tendencias más recientes relacionadas con este campo del análisis y diseño óptimo de placas y láminas de hormigón.

#### **2.4.2 Etapa constructiva: breve repaso por la obra de Félix Candela**

La evolución de las láminas de hormigón hasta finales de los 70 abarca desde las históricas aproximaciones de prueba y error hasta esa época en que las técnicas industriales, los nuevos materiales y el análisis con la ayuda del ordenador revolucionaron el diseño. Este primer período lo describe Medwadowski (1978) bajo la óptica de la relación existente entre teoría y forma de láminas. Dos décadas después, el mismo autor elabora otra revisión en el marco del fin del siglo XX (Medwadowski, 1997).

En la historia de la construcción de láminas de hormigón ha habido grandes diseñadores, entre los que puede citarse, por orden de nacimiento, a Pier Luigi Nervi (Huxtable, 1960; Desideri, Nervi Jr y Positano, 1982; Malave, 1984; Billington y Garlock, 2004); Eduardo Torroja (Fernández y Navarro, 1999; García, 1999; Chías y Abad, 2005); Anton Tedesko (Billington, 1982; Schlaich y Saradshow, 1994; Billington y Garlock, 2004); Félix Candela (Faber, 1963; Billington, 1986; Seguí, 1994; Sanz, 1999; Billington y Garlock, 2004); Stefan J. Medwadowski (Abel, 2000) o Heinz Isler (Chilton, 2000; Billington y Garlock, 2004).

Si no el inventor, Félix Candela es considerado el maestro de las cubiertas o cascarones de hormigón armado. La complejidad matemática de estas estructuras laminares contrasta con la belleza y sencillez de sus formas, su economía, gran resistencia y ligereza con espesores muy reducidos. En su obra se pueden encontrar

todos los ejemplares de construcciones laminares (en forma cilíndrica, de cúpula, reglada y paraboloides hiperbólicos o hyper). Un análisis gráfico de su obra puede consultarse en Andrés y Fadón (2004).

Se va a realizar a continuación una breve revisión de sus estructuras más emblemáticas, especialmente de su obra póstuma por haberse utilizado en uno de los ejemplos de esta tesis.

Una de las primeras láminas se construyó en 1955 para la Bolsa de Valores de Ciudad de México. Durante su ejecución, Candela comenzó a intuir la posibilidad del borde libre, esto es, sin utilizar vigas o nervaduras de borde. Sería en la iglesia de San Antonio de las Huertas, en Tacuba, México (Figura 2.1), donde aprovecha los razonamientos meditados en la Bolsa de Valores y propone la eliminación de los refuerzos de borde. Sólo la forma parabólico-hiperbólica permitió alcanzar este resultado.



**Figura 2.1** Iglesia de San Antonio de las Huertas, Tacuba, México (Candela, 1956)

En un elemento de borde libre la tensión normal se anula por consideraciones de equilibrio; sin embargo, el tratamiento de la tensión tangencial varía en función de la rigidez del borde que se esté analizando. Sanz (1999) distingue dos casos:

- a) Si el borde es capaz de transmitir tensiones tangenciales, esto es, dispone de la suficiente rigidez como para resistir y transmitir los cortantes a los apoyos, descargando así al resto de la lámina, se denomina borde apoyado. Éste se convierte en un arco sometido a fuerzas en su directriz.
- b) Si la rigidez del borde es prácticamente nula, éste no es capaz de transmitir esfuerzos en la dirección tangencial, obligando al resto de la lámina a absorber el incremento de esfuerzos a través de sus generatrices.

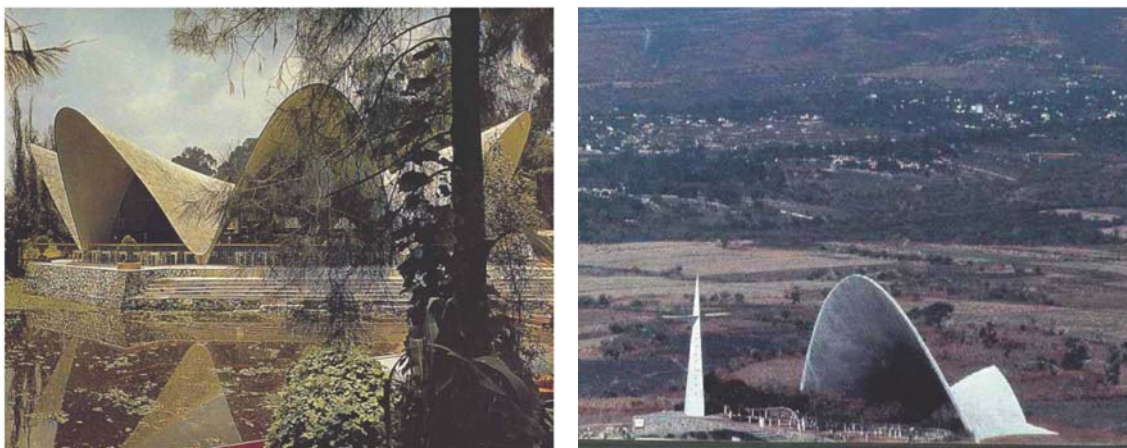
Torroja (1957) recomienda que el borde sea muy rígido longitudinalmente, aunque de poco peso para no alterar el estado de membrana. Aun así, reconoce que es inevitable la aparición de flexiones, las cuales adquieren importancia cuando las dimensiones son grandes.

A partir de estas primeras experiencias se construyeron muchas bóvedas, siempre con el borde libre, experimentando todo tipo de combinaciones (triangulares, cuadradas,

pentagonales, hexagonales, octogonales). Probablemente la más famosa de estas estructuras sea la lámina del restaurante Los Manantiales, en Xochimilco, México (Figura 2.2a). Esta estructura, en plena madurez de Candela, significa para muchos una fantasía constructiva de difícil superación. Billington (1986) la describe de la siguiente manera:

*“La cubierta está realizada a partir de ocho paraboloides hiperbólicos situados radialmente en una planta circular de 42 m de diámetro aproximadamente. Aparte de las paredes de cristal, retranqueadas de la línea de fachada hacia el interior, la cubierta, con su espesor de 4 cm, es la estructura entera. Estructura y forma son una, y la esbeltez es expresada tan poderosamente que resulta difícil creer que la construcción es de hormigón. No es una forma que se pueda encontrar en la naturaleza, sino que más bien al contrario, es intencionadamente artificial y el producto de una mente disciplinada”.*

Una exposición del análisis por el MEF y del estado de conservación de esta estructura puede consultarse en Burger y Billington (2006).



(a)

(b)

**Figura 2.2** (a) Restaurante Los Manantiales, Xochimilco, México (Candela, 1958). (b) Capilla de Lomas de Cuernavaca, Palmira, México (Candela, 1958)

Un caso singular fue el de la capilla abierta de Lomas de Cuernavaca, en Palmira, México (Figura 2.2b). Esta capilla se construyó con una simple hoja de hyper equilátero, abriéndose al frente con una luz de 30 m y una altura original de 24 m. El proyecto contaba con una serie de calados en la zona superior que formaban una imagen decorativa. Durante el descimbrado se produjo el derrumbe de esta parte de la estructura. Se decidió modificar el proyecto suprimiendo cualquier discontinuidad en la lámina, rebajando unos 6 m su altura e introduciendo un regueso rigidizante en la zona delantera que confiere al conjunto una mayor seguridad frente al pandeo y a la acción de viento. Basterra, Chamizo y Gutiérrez (2001) sostienen que el accidente tuvo que

deberse a un problema constructivo —excesiva juventud del hormigón, golpeo o descimbrado deficiente, defectos locales— puesto que los resultados de sus cálculos para las dimensiones originales arrojan valores asumibles.

Otro ejemplo destacable del cascarón delgado aplicado a grandes espacios diáfanos es la planta embotelladora de las destilerías Bacardí, en Cuautitlán, México (Figura 2.3a). La cubierta está compuesta por seis bóvedas, cada una de planta cuadrada de 30 m de lado, las mayores construidas por Cubiertas Ala (empresa fundada por Candela en 1950). Una detallada exposición del cálculo de esta estructura puede encontrarse en Tonda (1973).

Como último ejemplo de este tipo de estructuras, y más reciente, se tiene el restaurante submarino construido en L'Oceanogràfic (Parque Oceanográfico de Valencia) (Figura 2.3b) y el edificio de acceso al parque (Figura 2.4). Sus formas las diseñó Félix Candela poco antes de fallecer en 1997, convirtiéndose así en su obra póstuma.



(a)

(b)

**Figura 2.3** (a) Planta embotelladora Bacardí, Cuautitlán, México (Candela, 1960). (b) Restaurante submarino. L'Oceanogràfic, Valencia (Candela, 2000)

El restaurante está compuesto por ocho lóbulos radialmente simétricos, formando cada lóbulo parte de un hyper cuyo eje  $z$  es vertical, y los ejes  $x$  e  $y$  están contenidos en un plano horizontal y forman entre sí un ángulo de  $22,5^\circ$ . El borde libre de cada lóbulo está formado por la intersección del hyper y un plano inclinado  $60^\circ$  con respecto a la horizontal, alcanzando una altura máxima de 12,27 m. Los apoyos de la cubierta están situados en los vértices de un octágono regular, cuyas caras tienen una distancia de 13,44 m, y la distancia entre dos vértices opuestos es de 35,10 m. La cáscara se ha diseñado con un espesor básico de 0,06 m, que gradualmente aumenta en una zona central de 4 m de diámetro a un valor máximo de 0,225 m. El material empleado en su construcción ha sido hormigón HA-30 reforzado con una adición de  $40 \text{ kg/m}^3$  de fibras de acero, más una malla de armaduras dispuesta en el plano medio de la lámina de acero B 500 S (Domingo, Lázaro y Serna, 1999).

El edificio de acceso a L'Oceanogràfic constituye el modelo inicial de los

procesos de optimización de forma realizados en la tesis, por lo que se describe detalladamente en el capítulo 4. Tan sólo destacar la cimbra que sostiene al encofrado (Figura 2.4a), más concretamente la perpendicularidad de las barras que la constituyen. Si el hyper no fuese equilátero, estas barras formarían entre sí un ángulo distinto de  $90^\circ$  correspondiente al que formarían los ejes directores del paraboloides.



(a)

(b)

**Figura 2.4** Edificio de acceso. L'Oceanogràfic, Valencia (Candela, 2001). (a) Lámina en construcción. (b) Lámina en la actualidad

### 2.4.3 Diseño de la armadura

Las contribuciones dedicadas a la obtención del armado de placas suelen emplear métodos de diseño basados en la aplicación del teorema del límite inferior, mediante el cual, una solución es válida si satisface las condiciones de equilibrio sin violar el criterio de agotamiento (Park y Gamble, 2000).

Las primeras publicaciones se sitúan en los años 60 para el caso de placas sometidas a esfuerzos de membrana. Inicialmente, el armado era el mismo en dos direcciones ortogonales (Nielsen, 1964), para extenderlo después a armado distinto (Nielsen, 1971) e incluso generalizarlo para direcciones aleatorias (Braestrup, 1980). Estos resultados tuvieron posteriormente una correspondencia cualitativa con los ensayos realizados por Vecchio y Collins (1986). Gupta (1976) obtuvo las mismas expresiones empleando otro método, el principio de mínima resistencia, por el que se asume que el colapso ocurre en la dirección de las compresiones en el hormigón, según un ratio unitario entre los esfuerzos internos y las fuerzas aplicadas.

Posteriormente, la armadura de membrana en placas se extendió al caso de láminas (Gupta, 1981; Gupta y Akbar, 1984; Medwadowski 1989 y 1990). Fialkow (1983), además, tuvo en cuenta el efecto pasador de la armadura y su contribución frente al esfuerzo axial. La metodología extendida al caso lámina se realiza incorporando todos los esfuerzos involucrados en el problema. La idea básica consiste en alcanzar el equilibrio de fuerzas y momentos externos con los esfuerzos internos en la armadura y

en el hormigón. Esto hace que se generen sistemas de ecuaciones no lineales, cuya resolución se suele abordar mediante aproximaciones sucesivas más o menos complejas según dos caminos alternativos:

- a) Cada elemento del modelo es considerado una unidad de dimensionado de forma independiente, que tiene que resistir sus fuerzas nodales (Gupta, 1986; Lourenço, 1992; Lourenço y Figueiras 1993 y 1995; Tabatabai, 1996).
- b) El elemento se divide en varias capas que representan a los materiales (Marti, 1991; Kollegger 1991; Kim, Lee y Shin, 2002; García y Samartín 2002; Samartín, Díaz-Domínguez y García-Palacios, 2003).

El segundo modo de operar es el sugerido en el Código modelo MC-90 (CEB-FIP, 1995), que establece tres capas, resistiendo las exteriores los esfuerzos de membrana y la interior el cortante. El resto de los códigos más importantes en este ámbito de aplicación no proporcionan una metodología de diseño explícita. Por ejemplo, el código americano actual ACI 318-05 (ACI Committee 318, 2005) y el borrador del nuevo ACI 318-08 (ACI Committee 318, 2007), sólo mencionan que puede aplicarse cualquier procedimiento de diseño que asegure el equilibrio con suficiente resistencia, y verificando las condiciones de servicio. El Eurocódigo 2 (Technical Committee CEN/TC 250, 2004) no incluye ninguna recomendación para láminas, sólo para placas. Y la instrucción española EHE (Comisión Permanente del Hormigón, 1998) y el proyecto de instrucción EHE-07 (Comisión Permanente del Hormigón, 2007) se limitan a recoger una serie de recomendaciones constructivas.

#### **2.4.4 Optimización del coste**

En la revisión realizada por Cohn y Dinovitzer (1994) sobre la optimización estructural y sus aplicaciones, se subraya el gran hueco existente, en los campos de la ingeniería aeronáutica y civil, entre los trabajos teóricos y los trabajos aplicados, pues predominan las investigaciones dirigidas al estudio de algoritmos frente a la solución de problemas estructurales de interés. Además, la mayoría de las publicaciones se dedican a las estructuras de acero, mientras que al hormigón estructural sólo lo hacen el 4% de las mismas. Estas investigaciones suelen centrarse en la minimización del peso de la estructura, sin embargo, en el caso de las estructuras de hormigón, resulta más interesante tratar la minimización del coste, que debe ser el objetivo último para un uso óptimo de los recursos disponibles. Para ello es necesario incluir en la función objetivo, al menos, el coste de los materiales y el del encofrado.

En el caso de *placas de hormigón armado*, las primeras investigaciones se encaminaron hacia la minimización del coste de los materiales satisfaciendo las condiciones de diseño impuestas por distintos códigos. Brown (1975) presenta un método iterativo de obtención del espesor que minimice el coste en losas unidireccionales, simplemente apoyadas y con carga uniformemente repartida, llegando a alcanzar ahorros del 17%. Gunaratnam y Sivakumaran (1978) optimizan el coste en

placas bajo distribuciones de momentos flectores uniformes, triangulares y parabólicas. Presentan unas curvas función del espesor para obtener los parámetros del diseño óptimo, y advierten de la significativa influencia que ejerce la limitación de deformaciones en este tipo de problemas.

La mayor parte de las publicaciones se dedican a la optimización del coste de *placas de hormigón pretensado*, por tener mayor aplicación en la industria del prefabricado. Se citan algunas de ellas a continuación.

Naaman (1976) compara diseños de coste mínimo con diseños de peso mínimo en losas unidireccionales simplemente apoyadas, concluyendo que son similares si se cumple que el coste/m<sup>3</sup> de hormigón es mayor que 121×coste/kg de acero activo, caso no habitual en la práctica. MacRae y Cohn (1987) minimizan los aceros pasivo y activo en losas de dimensiones dadas, variando ciertos parámetros (canto, luz, cargas y disposición de cables). Obtienen el menor coste cuando agrupan los cables de acero activo en tendones. Paul, Das Gupta y Yu (1990) presentan el diseño óptimo de un forjado prefabricado apoyado sobre vigas de acero, empleando losa alveolar y losa maciza, e incluyendo muchos costes (hormigón, acero activo, encofrado, vigas de acero y montaje). Como resultado obtienen una menor fuerza de pretensado en losas macizas que en losas alveolares. Por último, Lounis y Cohn (1993) minimizan el coste de los materiales y maximizan la contraflecha en losas postesas; y Cohn y Lounis (1993) hacen lo propio en placas con pretensado parcial y con pretensado total, obteniendo reducciones cuando se incrementa la tensión admisible de tracción.

Si no son muy numerosas las publicaciones dedicadas a la optimización del coste de placas, mayor escasez aparece en las referidas a *láminas*, pues centran su tratamiento en elementos estructurales concretos, como tanques de agua o cubiertas. En el primer caso, Saxena, Sharma y Mohan (1987) presentan el diseño de coste mínimo de tanques de agua de hormigón armado, deduciendo un mayor porcentaje de ahorro conforme aumenta la capacidad del tanque. Tan, Thevendran, Das Gupta y Thambiratnam (1993) se dedican a estudiar geometrías cilíndricas con espesor variable decreciente desde la base en sentido longitudinal. Respecto a las cubiertas, puede destacarse el estudio de Lakshmy y Bhavikatti (1995), que minimizan el coste de los materiales en una serie de láminas consecutivas con forma de cilindro parabólico, encontrando los diseños más económicos para espesores entre 0,05 y 0,08 m, con una luz de hasta 21 m y un semiángulo central entre 36° y 40°.

Para finalizar, citar una interesante revisión de los estudios existentes en esta línea para distintas tipologías estructurales de hormigón (Sarma y Adeli, 1998).

#### **2.4.5 Búsqueda de forma**

Puede señalarse al ingeniero suizo Heinz Isler como precursor en la búsqueda de forma de láminas de hormigón. A partir de datos como la altura, luz del vano, carga y estado tensional deseado, Isler aplicaba métodos experimentales para encontrar la forma

natural que adopta la lámina (Isler, 1994). Estos procedimientos de generación de forma fueron simulados por Smith (1969) y Day (1978), mediante el análisis por el MEF con ordenador basado en la teoría no lineal geométrica de láminas y membranas.

Otros estudios encaminados a la generación de estructuras de membrana son los de Kollegger, Schulz y Mehlhorn (1987) y Kollegger y Mehlhorn (1990), que engendraron la forma de una burbuja mediante análisis elástico de grandes desplazamientos, para una lámina de hormigón bajo presión interna y con bordes fijos sobre planta rectangular. También Andrés (1989), Andrés y Ortega (1991) y Ortega y Arias (1998) reproducen formas resistentes bajo un estado de tensiones de membrana impuesto, empleando una técnica basada en el principio biológico de la homeostasis.

Mención especial conviene hacer al grupo de investigación del profesor Ramm, del Instituto de Mecánica Estructural de la Universidad de Stuttgart, que lleva casi dos décadas investigando en temas relacionados con la búsqueda de forma de láminas. En el apartado 2.3 se han citado numerosas referencias suyas, por lo que sólo se mencionan aquí las directamente relacionadas con las láminas de hormigón.

En las primeras publicaciones introduce el espesor variable y el concepto de búsqueda de forma en la optimización estructural (Bletzinger, Kimmich y Ramm, 1990; Ramm y Mehlhorn, 1991; Ramm, 1992; Bletzinger y Ramm, 1993; Ramm, Bletzinger y Reitinger, 1993). Se propone además funciones objetivo menos convencionales, como la energía de deformación y el nivel de tensiones de tracción, y se incluye, en los procesos de optimización, la sensibilidad a las imperfecciones de las láminas frente a los fenómenos de inestabilidad (Reitinger y Ramm, 1995). Posteriormente, los estudios del grupo se han dirigido hacia la exploración de diversos métodos de búsqueda de forma. Éstos se tratan en el apartado dedicado a últimas tendencias.

#### **2.4.6 Comprobación de estabilidad**

Un estado límite fundamental a considerar en el proceso de diseño de una estructura laminar de hormigón es la pérdida de estabilidad. Este fenómeno no suele tener gran importancia en el caso de láminas que presenten reducidos valores en la relación espesor/radio de curvatura principal, pues el colapso se produciría antes por fallo del material que por pandeo de la estructura. Sin embargo, existen algunos casos reales en los que esa situación se ha invertido (Csonka, 1958; Ballesteros, 1978; Medwadowski, 2004). Por tanto, es conveniente estudiar el fenómeno y establecer un coeficiente de seguridad adecuado, independientemente de que el estado de inestabilidad se alcance para cargas superiores a las del estado de agotamiento del material.

Se ha comentado en un apartado anterior el riesgo que existe al optimizar la forma y/o el espesor de láminas mediante análisis lineal, sin estudiar, a continuación, el pandeo de las mismas mediante análisis no lineal geométrico. En esta tesis se han realizado estudios de estabilidad de los diseños óptimos obtenidos, por lo que resulta oportuno revisar los métodos más relevantes en la literatura. Esto se realiza en este



apartado desde el punto de vista histórico, pues es en el capítulo 5 donde se han desarrollado algunos de ellos.

Existen dos grandes grupos de soluciones, las analíticas aproximadas y las numéricas obtenidas mediante análisis por el MEF.

Las *soluciones analíticas* se han venido desarrollando desde los años 60 y algunas de ellas se han incorporado en distintos códigos y recomendaciones, entre las que destacan:

- a) Método del código ACI 318.
- b) Método del comité ACI 344.
- c) Método del estado tensional de pandeo.
- d) Recomendaciones de la IASS (International Association for Shell and Spatial Structures).

En 1964, el comité del ACI (American Concrete Institute) para estructuras laminares de hormigón edita un documento (ACI Committee 334, 1964) conteniendo recomendaciones para el diseño y construcción de estas estructuras. En la parte práctica se dedica al análisis de estabilidad un simple párrafo:

*“Al investigar sobre la estabilidad de las láminas, se considerará la posible reducción en el valor de la carga de pandeo ocasionada por las grandes deformaciones, los efectos de la fluencia, y la desviación entre la superficie real de la lámina y la teórica.”*

Los comentarios son algo más extensos, pero la información que contienen refleja igualmente el estado del escaso conocimiento existente en la época sobre el fenómeno de la estabilidad. Este documento sirvió de base al primer capítulo sobre láminas que aparece en el código americano de hormigón armado ACI 318-71 (ACI Committee 318, 1971). Posteriormente, fue sometido a revisión en 1983 para reflejar las nuevas experiencias en los ámbitos del diseño, análisis y construcción, a las cuales se debe sumar la influencia de las recomendaciones de la IASS de 1979. Esta revisión fue incluida en el código ACI 318-83 (ACI Committee 318, 1983), cuyo texto se ha mantenido esencialmente en las posteriores ediciones hasta el actual ACI 318-05, e incluso en el borrador del nuevo ACI 318-08. Básicamente se limita a establecer una relación de los factores que afectan al estudio del pandeo, aportar una serie de medidas constructivas para mejorar el comportamiento de la lámina, y remitir al diseñador a las recomendaciones de la IASS para calcular la carga crítica de pandeo.

El método del comité ACI 344 (ACI Committee 344, 1970) contiene algunas indicaciones para asegurar la estabilidad de casquetes esféricos. En ellas se restringe el espesor mínimo de la lámina según la técnica constructiva, el radio de la esfera y las cargas aplicadas. No tiene en cuenta los efectos de las imperfecciones, la fisuración, las armaduras y la no linealidad del material. Ha habido posteriores versiones, pero conservan sustancialmente el mismo tratamiento.

El método del estado tensional de pandeo o BSS (buckling state of stress) se basa

en los resultados experimentales de Mungan (1974, 1976, 1979, 1983 y 1984) y Zerna y Mungan (1982), en los que se empleó modelos fabricados en plástico sometidos a diferentes combinaciones de cargas, con geometría axilsimétrica (cilindros y láminas hiperbólicas). En los ensayos se observó que, debido a pequeñas imperfecciones de los modelos, el pandeo siempre empezaba localmente en el punto más débil. Esta sensibilidad a las imperfecciones no sólo dependía de la geometría, sino del estado tensional inducido por las cargas en la región crítica. Se dedujo que el mismo tipo de respuesta podría suceder en las estructuras reales de hormigón, pues tienen más probabilidad de presentar mayores imperfecciones relativas, de geometría o espesor, que los modelos utilizados. Este método constituye una herramienta útil para predecir, de manera aproximada, la carga de pandeo elástica en láminas donde la inestabilidad se inicia localmente.

A finales de los 70 se elabora un documento de recomendaciones de la IASS para láminas de hormigón armado (IASS Working Group No. 5, 1979). En la sección que trata sobre el análisis de estabilidad se desarrolla un procedimiento basado en los resultados de algunas investigaciones previas, particularmente en los trabajos de Kollár y Dulácska (1975). El procedimiento incluye diversos coeficientes que afectan al valor de la carga de pandeo teórica, al tener en cuenta las imperfecciones geométricas, la fluencia y retracción del hormigón, la fisuración, el armado y la no linealidad del material. Scordelis (1981) y Medwadowski (1990) observaron que el método arroja resultados conservadores para el caso de cúpulas esféricas. Sin embargo, Kollár (1982) comparó las predicciones teóricas con los resultados experimentales y encontró gran similitud. La primera revisión de las recomendaciones fue elaborada por Kollár (1993). Años más tarde, Medwadowski (2004) vuelve a revisar las iniciales más la propuesta de Kollár, planteando algunas modificaciones y sugerencias.

Las soluciones analíticas presentadas tienen la ventaja de emplear ábacos y fórmulas sencillas para obtener la carga de pandeo de una lámina, pero presentan el inconveniente de predecir este tipo de comportamiento sólo para algunos casos teóricos, no pudiendo abordar estructuras complejas o con cargas y condiciones de contorno asimétricas.

Esto puede resolverse mediante el *análisis por el MEF*. El avance experimentado en las últimas décadas en este campo ha permitido aproximarse al fenómeno de la estabilidad en aquellas láminas cuya solución analítica no se encuentra disponible en la literatura. Este análisis permite tener en cuenta aspectos como la no linealidad geométrica y del material, la fisuración o los efectos de la armadura. El procedimiento más habitual en la modelización de la estructura ha sido el empleo del modelo de capas, representando las exteriores la armadura y las centrales el hormigón. Los trabajos iniciales se deben a Scordelis y sus colaboradores (Lin y Scordelis, 1975; Muller, Kabir y Scordelis, 1978; Scordelis, 1985), que obtuvieron soluciones para un paraboloide hiperbólico de hormigón armado, teniendo en cuenta la fisuración y los efectos diferidos

del material. Ramm (1987) desarrolló un modelo de orientación del material para el estudio de carga última y estabilidad de láminas de hormigón.

#### 2.4.7 Últimas tendencias

A partir de finales de los 90, existen diversas líneas de investigación en el campo del análisis y diseño óptimo de placas y láminas de hormigón. Una de ellas se dirige hacia nuevas *formulaciones de elementos finitos* en sus distintas ramificaciones. La mayoría de estas formulaciones se basan en la modificación de la teoría del campo de compresiones propuesta por el equipo de Collins (Vecchio y Collins, 1982; Vecchio y Collins, 1986; Bhide y Collins, 1987; Adeghe y Collins, 1986; Polak y Vecchio, 1993; Selby y Vecchio, 1997).

Hay estudios que abordan el caso de estructuras con importantes distribuciones de tensiones tangenciales, empleando elementos degenerados (Polak, 1998) o elementos isoparamétricos divididos en capas (Yamamoto y Vecchio, 2001). Otros desarrollan formulaciones para mejorar los resultados del análisis no lineal (Tokatlidis y Talaslidis, 2000; Voyiadjis y Woelke, 2006; Zhang, Bradford y Gilbert, 2007 y 2007). Hay quien elabora sofisticados modelos para reproducir el comportamiento del material sometido a altas temperaturas (Lim, Buchanan, Moss y Franssen, 2004; Bradford y Zhang, 2006). Se proponen también nuevos procedimientos de generación y refinamiento de malla (Lackner y Mang, 2000 y 2002).

Diferentes contribuciones se han dedicado al *diseño y comprobación de la armadura* de placas y láminas. Es interesante citar en primer lugar una comparación realizada por Burkan (1997) entre varios métodos de análisis y diseño de elementos membrana con armadura ortogonal, donde demuestra la aparición de pérdidas de precisión ante condiciones de carga fuertemente asimétricas, o ante grandes diferencias de armadura en una dirección respecto de la otra.

El desarrollo de modelos y métodos de obtención de armadura ha sido un campo de investigación activo. Por ejemplo, Kaufmann y Marti (1998) se basan en la teoría del campo de compresiones para desarrollar un modelo de membrana con fisuración, modelo que fue posteriormente implementado por Foster y Marti (2002) en un programa de análisis. Hay estudios que obtienen la armadura fundamentándose en consideraciones de equilibrio entre las fuerzas aplicadas y los esfuerzos internos (Min, 1999), mientras que otros emplean elementos por capas (Belletti, Bernardi, Cerioni y Iori, 2003; Preisinger, Popov y Kollegger, 2002 y 2003). Estos últimos obtienen mayor ahorro en la armadura adoptando comportamiento no lineal del material que si se utiliza comportamiento lineal. Para el caso más general de elementos sometidos al estado de membrana y de flexión, Samartín, Díaz-Domínguez y García-Palacios (2003) y Medwadowski y Samartín (2004) presentan una formulación unificada para el diseño y comprobación de la armadura orientada en cualquier dirección.

En relación a la *optimización del coste de estructuras de hormigón*, apenas existen

publicaciones dirigidas al caso de placas y láminas, pues la mayoría se centran en el diseño óptimo de elementos lineales o estructuras aporricadas mediante algoritmos genéticos (Coello, Christiansen y Santos, 1997; Rafiq y Southcombe, 1998; Lee y Ahn, 2003; Camp, Pezeshk y Hansson, 2003) o mediante otros métodos heurísticos (Payá, Yepes, González-Vidosa y Hospitaler, 2006; Perea, Yepes, Alcalá, Hospitaler y González-Vidosa, 2006; Carbonell, Martínez, Yepes, Hospitaler y González-Vidosa, 2007; Perea, Alcalá, Yepes, González-Vidosa y Hospitaler, 2007).

Entre las investigaciones dedicadas al *fenómeno de la estabilidad* puede destacarse algunos avances computacionales. Por ejemplo, el desarrollo de un modelo que incluye la fisuración (Lackner y Mang, 1998); la realización de un estudio sobre la influencia de la discretización del modelo en la carga de colapso (Lackner y Mang, 2000); y la formulación de un procedimiento numérico simplificado, alternativo al análisis no lineal, para obtener la carga de pandeo (Andres y Harte, 2006). También se han realizado algunos estudios experimentales, como los ensayos de Takayama, Ashida y Hayashi (1996, 1997, 1998 y 1999) sobre láminas de hormigón cuya forma se ha optimizado previamente. Mediante ellos se comprueba la influencia sobre el comportamiento a pandeo que ejerce la distribución de las cargas, la relación altura/luz, las condiciones de vinculación y el zuncho de borde.

Otro tipo de estudios que han proliferado en los últimos años se centran en la optimización de forma de láminas con *simetría de revolución*. Como el de Imam (1998), que estudia el caso de láminas de hormigón en masa con forma de paraguas, sometidas, predominantemente, a su peso propio. Sin embargo, la mayoría de contribuciones versan sobre el ámbito de las torres de enfriamiento de las centrales eléctricas. Se citan a continuación algunas de las revisiones realizadas al respecto. Mungan (1997) se centra en el estado de las investigaciones encaminadas al análisis; Krätzig, Eckstein y Harte (1997) plantean una reflexión sobre los retos futuros en el diseño y construcción; y Bamu y Zingoni (2005) repasan los desarrollos alcanzados en materia de daño, deterioro y respuesta estructural a largo plazo. Como contribuciones dedicadas a la optimización de este tipo de torres se puede encontrar a Ward, Thambiratnam y Nasir (1999), que desarrollan un software de diseño con peso mínimo variando el espesor, aunque sin tener en cuenta el pandeo, y a Harte y Krätzig (1999), que optimizan la geometría de las torres para desarrollar a continuación un modelo de análisis no lineal que predice el proceso de daño.

Normalmente la *optimización de forma* de láminas de hormigón se emplea para minimizar el peso o, su equivalente, el volumen. Hernández y Fontán (1999) combinan optimización de espesor y forma estableciendo un conjunto de geometrías predefinidas, siendo la solución óptima una combinación lineal de ellas. Hay otro tipo de investigaciones que emplean la optimización de forma para mejorar el comportamiento estructural de la lámina. Por ejemplo, Robles y Ortega (2001) definen como función objetivo el desplazamiento volumétrico (sumatorio, para cada nodo del modelo, del

producto del desplazamiento por el área en torno al nodo y por el espesor). Ogawa, Ohsaki, Miyamura y Kumagai (2005) minimizan la deformación de láminas sometidas a altas cargas de viento modificando su forma para reducir los coeficientes de presión.

Los estudios destinados a la *búsqueda de forma* se han dirigido últimamente hacia la exploración de diversas metodologías. El grupo del profesor Ramm (Ramm, Schwarz, Kemmler y Lipka, 2000) emplea las técnicas de optimización como método de diseño inverso respecto al tradicional, es decir, se predefine la respuesta estructural para después obtener topología y forma. Ramm, Kemmler y Schwarz (2000) establecen una distinción entre búsqueda de forma y optimización estructural. Ramm (2004) profundiza en este aspecto al realizar una revisión de los dos principales procesos de búsqueda de forma de cubiertas laminares de hormigón, los modelos físicos, como el principio del modelo colgante o la membrana sometida a presión, y la optimización estructural, de forma y espesor. Sugiere, desde un punto de vista práctico, emplear el principio de la membrana colgante a nivel de diseño conceptual, y posteriormente optimizar la forma para mejorar el comportamiento estructural. Los modelos colgantes pueden simularse experimentalmente, como ya se ha visto en los ensayos de Isler, numéricamente mediante análisis no lineal de membranas (Maurin y Motro, 2004; Brew y Lewis, 2007), o integrarse ambos en una técnica híbrida (Andrés, 2004).

## **2.5 PUBLICACIONES DEL DOCTORANDO REFERENTES AL TRABAJO DESARROLLADO EN ESTA TESIS**

Las primeras publicaciones se enmarcaron dentro de algunos congresos dedicados a la docencia de estructuras en las titulaciones técnicas, en particular destacar las *Primeras Jornadas de ACHE sobre la Enseñanza del Hormigón Estructural*. En estas jornadas, Martí, Tomás y Torrano (2001) presentaron un trabajo donde se propone aplicar las técnicas de optimización en la enseñanza del hormigón estructural. Esta propuesta se erige como complemento a la metodología habitual, en la que el estudiante, cuando se enfrenta a un determinado problema, en vez de estudiar diversas alternativas de solución, dedica la mayor parte del tiempo a analizar exhaustivamente una solución y a comprobar el cumplimiento de la normativa aplicable. Es ahí cuando las técnicas de optimización constituyen unas eficaces herramientas para obtener y visualizar diversos diseños alternativos que resuelvan el problema, cumpliendo con las condiciones de diseño de una forma “óptima”. Uno de los ejemplos presentados fue el de la optimización de forma de una lámina de hormigón.

En el *V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Tomás, Martí y Solano (2002) presentaron un trabajo en el que se optimizaba la forma de una estructura laminar de hormigón formada por la intersección de tres paraboloides hiperbólicos. Como funciones objetivo se emplearon la energía de deformación, el peso y la tensión de tracción. Las variables fueron los parámetros que gobiernan la geometría de la

estructura y los espesores de la lámina y los nervios. Las restricciones eran el espesor mínimo de la lámina, las tensiones en el hormigón y diversos parámetros de control geométrico. La conclusión principal que se transmitió fue que, con pequeños cambios en la forma de la lámina, puede mejorarse sensiblemente su comportamiento estructural.

Tomás y Martí (2002, 2003 y 2006) presentaron sendas comunicaciones al *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, al *Fifth World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* y a la *Eighth International Conference on Computational Structures Technology*, respectivamente. En ellas se expuso una formulación para el diseño de elementos placa y lámina de hormigón armado. La cantidad de armado se determina de forma óptima en cada elemento de la malla que modela la geometría del problema, a partir del equilibrio establecido entre las fuerzas aplicadas y los esfuerzos internos. Se utilizó el programa de elementos finitos ANSYS para analizar la estructura y obtener los esfuerzos en los elementos lámina, y se implementó dicha formulación mediante rutinas de usuario dentro del módulo de optimización del programa. Entre las conclusiones más relevantes, se observaron importantes diferencias entre la cuantía de armadura obtenida empleando técnicas de optimización y la obtenida mediante métodos tradicionales. Como resultado de la experiencia acumulada en estos congresos, Tomás y Martí (2007) remiten un artículo a la revista *Computers and Structures*, encontrándose actualmente pendiente de aceptación tras haberlo remitido nuevamente incluyendo las modificaciones solicitadas por el editor.

Por último, en los congresos *Euro-Concrete 2003 Conference, Second Conference on Scientific Advances on Civil and Industrial Engineering* y *Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Tomás y Martí (2003, 2003 y 2005) presentaron unos trabajos en los que se empleó las técnicas de optimización en la mejora del comportamiento mecánico de láminas de hormigón, en base a optimizar espesor y forma con pequeños cambios en la geometría y satisfaciendo las condiciones de diseño. Se obtuvieron algunas conclusiones interesantes, como por ejemplo, que puede alcanzarse, en su caso, el estado membrana de tensiones de compresión; que las deformaciones en las láminas se reducen considerablemente hacia valores inferiores a la mitad respecto de los obtenidos en el diseño inicial; y que el comportamiento de las láminas frente a estabilidad mejora sensiblemente, al aumentar la carga crítica de pandeo en torno al doble respecto al valor inicial. La comunicación presentada en el congreso *Euro-Concrete 2003 Conference* se publicó en el libro *Computational Modelling of Concrete Structures*, que está referenciada en el catálogo *ISI Proceedings*.

## *Búsqueda de forma de láminas de hormigón empleando técnicas de optimización. Motivación*

### **3.1 INTRODUCCIÓN**

La distribución triangular de tensiones en la sección transversal de un elemento estructural es siempre antieconómica, puesto que solamente las fibras extremas están solicitadas a la tensión máxima. Pero lo es aún más en materiales birresistentes, en los que la resistencia a tracción es sólo una pequeña fracción de la de compresión, y la capacidad de carga de la sección se agota tan pronto como se alcance ese valor mínimo.

Sin embargo, una de las ventajas del hormigón como material de construcción es su capacidad para moldearse a cualquier forma que el diseñador pueda establecer en el desarrollo de su creatividad. Algunas de las formas más espectaculares las adoptan las estructuras laminares en cualquiera de sus variantes geométricas. Su ligereza y esbeltez convencen desde un punto de vista estético, considerándolas algunos autores como el sinónimo de la elegancia estructural (Ramm, Kemmler y Schwarz, 2000), la *prima donna* de las estructuras (Ramm y Wall, 2002) o aquella estructura en la que uno descubre qué es resistir contemplando sólo su forma (Manterola, 2007).

El comportamiento de las estructuras laminares, comparado con el de otras tipologías, se caracteriza por su mayor eficiencia mecánica. Si se realizan diseños apropiados, pueden soportar elevadas cargas y cubrir luces importantes, empleando relativamente poco material resistente. En el proceso habitual de diseño, primero se establece la configuración de la lámina, realizando a continuación su análisis y dimensionado de tal modo que satisfaga unas determinadas condiciones constructivas y de normativa.

Puesto que estas estructuras trabajan fundamentalmente por forma, surge la inquietud de buscar formas adecuadas en función de las condiciones de contorno del problema. Entre los diversos procedimientos empleados en la búsqueda de forma de

láminas que se han revisado en el capítulo 2, las técnicas de optimización son unas herramientas muy útiles en el ámbito computacional para conseguir este propósito.

### 3.2 PROBLEMA DE BÚSQUEDA DE FORMA EN LÁMINAS DE HORMIGÓN EMPLEANDO TÉCNICAS DE OPTIMIZACIÓN

El objetivo del diseño óptimo de estructuras es obtener un conjunto de valores de las *variables de diseño* que haga mínima una *función objetivo*, y cumpla una serie de *restricciones* que dependen de las variables. Las *variables de diseño* de una estructura pueden ser de cuatro tipos:

- Propiedades de la sección transversal de las piezas (áreas, espesores, momentos de inercia, etc.);
- parámetros de geometría de la estructura (dimensiones, contornos);
- parámetros de topología de la estructura (densidades de los elementos en el rango de 0 a 1 (Bendsoe y Sigmund, 2003)), y
- propiedades del material que constituye las piezas.

El tipo de optimización a realizar dependerá del tipo de variables que se consideren. Tradicionalmente se ha buscado diseñar las estructuras de peso mínimo, lo que ha conducido a que la *función objetivo* más habitual sea el peso de la estructura. Sin embargo, en otras aplicaciones el peso no es el factor determinante y se recurre a otras funciones objetivo como el costo, la fiabilidad, la rigidez, etc. Las *restricciones* son las condiciones que debe cumplir el diseño para que pueda ser considerado válido. En términos matemáticos, el problema de diseño óptimo se puede formular como:

Encontrar el vector de variables de diseño  $\mathbf{x}$  que

$$\begin{array}{lll}
 \text{minimice} & f(\mathbf{x}) & \\
 \text{sujeto a} & h_j(\mathbf{x}) = 0 & j = 1, 2, \dots, m_i \\
 & g_k(\mathbf{x}) \geq 0 & k = 1, 2, \dots, m_d \\
 & x_i^I \leq x_i \leq x_i^S & i = 1, 2, \dots, n
 \end{array} \quad (3.1)$$

siendo

- $\mathbf{x}$  vector n-dimensional de variables de diseño;
- $f(\mathbf{x})$  función objetivo;
- $h_j(\mathbf{x})$  restricción de diseño de igualdad  $j$ ;
- $g_k(\mathbf{x})$  restricción de diseño de desigualdad  $k$ ;
- $m_i$  número de restricciones de igualdad;
- $m_d$  número de restricciones de desigualdad;
- $n$  número de variables, y
- $x_i^I(x_i^S)$  límite inferior (superior) de la variable  $i$ .

La realización de diseños encaminados a la obtención del estado membrana en una estructura laminar, puede verse dificultada por factores como la aplicación de cargas concentradas, la existencia de condiciones de contorno de borde libre o



incompatibilidades que surgieran entre una determinada forma de la lámina y su espesor. Puesto que estos factores tienen una fuerte relación de dependencia con la forma de la estructura, se hace esencial incorporar, en el proceso de diseño, procedimientos de optimización de forma que los tengan en cuenta. De este modo, el objetivo último en el diseño de una lámina se traduciría en encontrar una forma que satisficiera los siguientes criterios de diseño

- tensiones y desplazamientos acotados dentro de un intervalo establecido;
- obtención del estado de membrana o cercano a él;
- cumplimiento de las condiciones de contorno en todos los casos de carga;
- evitar el fenómeno de inestabilidad por pandeo;
- minimización de la sensibilidad de la respuesta estructural ante posibles variaciones en la geometría, y
- obtención de una estética agradable.

El desarrollo de las técnicas de optimización, utilizadas en un entorno de continuo avance en la potencia y las capacidades gráficas de los ordenadores, pueden ser unas herramientas muy eficaces que permitan obtener una serie de diseños geométricos alternativos que mejoren el comportamiento mecánico de las láminas de hormigón, cumpliendo las condiciones de diseño (restricciones tensionales, condiciones constructivas, etc.), de una forma “óptima” (peso mínimo, rigidez máxima, nivel tensional mínimo, etc.).

Las metodologías que se emplean habitualmente en la búsqueda de forma mediante optimización son tres, dependiendo del tipo de variables de diseño a considerar. La primera consiste en utilizar las *coordenadas de los nodos* de la malla de elementos finitos. De este modo, el proceso de optimización proporciona un diseño final con forma óptima. El inconveniente que puede plantearse es la aparición de salientes, entrantes u otras irregularidades geométricas en el diseño final de difícil materialización práctica. Este problema no se presenta al emplear las otras dos metodologías, esto es, definiendo un *modelo paramétrico* mediante algunas variables implícitas a la geometría, o estableciendo un conjunto de *geometrías predefinidas* de tal modo que la forma óptima sea una combinación lineal de las mismas, siendo los coeficientes de combinación las variables de diseño.

Existen diversas funciones objetivo de interés a utilizar en la búsqueda de forma de láminas empleando optimización (véase entre otros a Ramm y Mehlhorn, 1991; Bernadou, Palma y Rousselet, 1991; Bletzinger y Ramm, 1993; Ramm, Kemmler y Schwarz, 2000; Martí, Tomás y Torrano, 2001; Robles y Ortega, 2001; Tomás y Martí, 2003).

Por ejemplo, para encontrar un estado tensional de membrana o próximo a él, puede utilizarse como función objetivo la tensión de tracción máxima, o bien sustituir esta condición por una restricción que evite la aparición de tracciones en todos los puntos de la lámina.

Si lo que se pretende es mejorar el comportamiento de la estructura frente a fenómenos de inestabilidad, puede emplearse como función objetivo la carga crítica de pandeo. Puesto que la respuesta de las estructuras laminares es muy sensible respecto a las imperfecciones geométricas, es necesario tenerlas en cuenta incluyéndolas en los análisis del proceso de optimización. Para establecer una primera aproximación de la carga crítica de pandeo puede realizarse un estudio de estabilidad inicial mediante análisis lineal de autovalores, aunque para conseguir un valor más realista sería necesario recurrir a otros análisis más completos como el no lineal geométrico.

Con el propósito de minimizar los desplazamientos en toda la estructura, se puede definir la función desplazamiento volumétrico  $VD$  (Robles y Ortega, 2001) mediante la siguiente expresión

$$VD = \sum_{i=1}^n d_i S_i e_i \quad (3.2)$$

siendo

- $d_i$  módulo del vector desplazamiento en cada nodo  $i$ ;
- $S_i$  área de influencia en el nodo  $i$ ;
- $e_i$  espesor medio de la lámina en el área  $S_i$ ; y
- $n$  número de nodos del modelo.

En el caso de pretender reducir las flexiones en la lámina, es muy apropiado minimizar la energía de deformación  $ED$ , o lo que es lo mismo, maximizar la rigidez de la estructura

$$ED = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.3)$$

siendo  $\boldsymbol{\sigma}$  tensiones y  $\boldsymbol{\varepsilon}$  deformaciones en los puntos de la lámina. Además, al minimizar la energía de deformación, no sólo se está reduciendo las tensiones y las deformaciones, sino que implícitamente se alcanzan los objetivos anteriores, es decir, mejora el comportamiento de la estructura frente a inestabilidad al incrementar la carga crítica de pandeo, y se consigue un estado tensional relajado, próximo al estado membrana. Teniendo en cuenta que los criterios de diseño expuestos anteriormente pueden satisfacerse aumentando el peso de la lámina, es conveniente, en algunos casos, limitar el peso a un valor máximo o incluso introducirlo en el proceso como una restricción de igualdad.

Respecto a las restricciones de desigualdad  $g_k(\mathbf{x})$ , aunque suelen emplearse para limitar tensiones y desplazamientos, también pueden ser necesarias para limitar ciertos parámetros de forma, en el caso en que se produzcan distorsiones en la geometría de la estructura de tal modo que se alejara demasiado de la forma preconcebida, pudiendo no satisfacer el cometido estético para la que fue diseñada.

### 3.3 OPTIMIZACIÓN CON ANSYS

#### 3.3.1 Métodos de optimización

El programa de elementos finitos ANSYS dispone de dos métodos de optimización (ANSYS, 2004):

- a) El método de primer orden y
- b) el método de aproximación mediante subproblemas.

El método de *primer orden* emplea las primeras derivadas de la función objetivo y de las restricciones. El módulo de optimización de ANSYS utiliza métodos indirectos SUMT (secuential unconstrained minimization technique) para resolver el problema de optimización con restricciones, esto es, lo convierte en un problema sin restricciones añadiendo funciones de penalización a la función objetivo. En cada iteración se obtiene una primera dirección de búsqueda mediante un método de gradiente (steepest descent), obteniendo las primeras derivadas de la nueva función respecto a las variables de diseño, siguiendo la búsqueda a continuación mediante un método directo (direcciones conjugadas). El proceso se detiene al alcanzar la convergencia o cuando se supere el número de iteraciones máximo indicado.

El método de *aproximación mediante subproblemas* es un método de orden cero, que puede aplicarse a problemas que no requieran de gran exactitud. Sólo se necesita el valor de la función objetivo y de las restricciones, no siendo necesario el cálculo de sus derivadas. Se establece en primer lugar unas aproximaciones de la función objetivo y de las restricciones mediante mínimos cuadrados. A continuación se convierte el problema de optimización con restricciones en un problema sin restricciones empleando funciones de penalización. Por último, se realiza la minimización de la nueva función objetivo aproximada hasta alcanzar la convergencia del problema o hasta que se supere el número de iteraciones máximo indicado.

Además de estos dos métodos, ANSYS también dispone de una serie de herramientas que pueden utilizarse para mejorar la eficiencia del proceso. Por ejemplo, se puede ejecutar primero un número de iteraciones al azar, con objeto de emplear unos valores iniciales de las variables del modelo más próximos al diseño óptimo.

#### 3.3.2 Procedimiento operativo

Para poder realizar procesos de optimización de un problema con ayuda de ANSYS es necesario primero parametrizar el modelo de diseño. Se emplea el lenguaje de diseño paramétrico APDL (ANSYS parametric design language), que está ideado para reducir el tiempo y el esfuerzo empleados en un proceso de optimización, pues incluye abreviaturas, parámetros, macros, bucles, ramificaciones lógicas y funciones repetitivas. Por tanto, es preciso definir el modelo de la estructura de manera que la función objetivo, las variables de diseño y las restricciones sean parámetros, es decir, variables introducidas por el usuario que representen valores numéricos. Cuando ANSYS se

encuentra un parámetro en un campo de entrada, lo sustituye por su correspondiente valor numérico en ese instante.

Es necesario crear un fichero de entrada de datos (macro), con extensión .mac, y que está formado por una secuencia de comandos.

El procedimiento habitual en la creación de la macro conlleva los siguientes pasos:

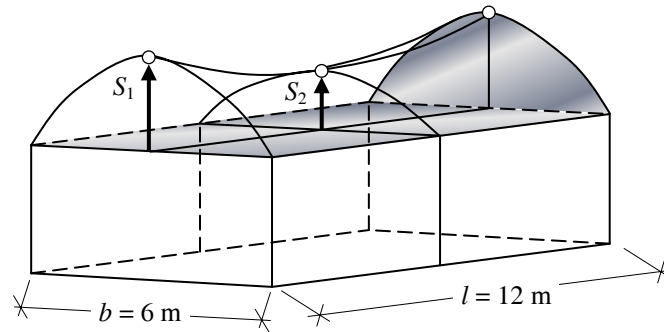
1. Definir el valor inicial de las variables de diseño.
2. Generar el modelo paramétrico en el preprocesador (PREP7):
  - a) Definir la geometría del modelo en función de las variables de diseño;
  - b) los tipos de elementos a utilizar en el modelo;
  - c) las constantes reales que necesiten los tipos de elementos a emplear;
  - d) las propiedades de los materiales y, por último,
  - e) mallar el modelo CAD elaborado, asignando a cada elemento sus propiedades.
3. Obtener la solución en el procesador (SOLUTION):
  - a) Definir las condiciones de contorno del modelo;
  - b) cargas exteriores aplicadas al modelo;
  - c) tipo de análisis, y
  - d) resolver el sistema de ecuaciones, obteniendo la solución.
4. Recuperar resultados y asignar éstos a los parámetros (función objetivo y restricciones) dentro del postprocesador (POST1/POST26).
5. Realizar varias operaciones en el procesador de optimización (OPT):
  - a) Asignar el fichero de análisis que contiene la información de cada iteración. Es un fichero con extensión .mac, en el que se relacionan los comandos contenidos en los pasos 2, 3 y 4;
  - b) definir las restricciones, con su valor mínimo, máximo y tolerancia;
  - c) variables de diseño, con su valor mínimo, máximo y tolerancia;
  - d) función objetivo, con su valor mínimo, máximo y tolerancia;
  - e) método de optimización a utilizar en el proceso;
  - f) número máximo de iteraciones a realizar, y
  - g) ejecutar la optimización.

Los diseños resultantes pueden revisarse en el procesador de optimización (OPT), y el procesado de resultados en el postprocesador (POST1/POST26).

### **3.4 EJEMPLO**

Se presenta el caso de la optimización de forma de una lámina de hormigón sometida a su peso propio y a una sobrecarga vertical, para distintos criterios de diseño. Este ejemplo lo emplean Bletzinger y Ramm (1993), sólo que en este caso se amplía el estudio para distintas condiciones de contorno.

La lámina tiene 0,05 m de espesor y cubre un ancho de 6 m y una longitud de 12 m. Puede estar simplemente apoyada en los bordes rectos, en los curvos o en todos. El módulo de elasticidad  $E$  del material es 30 GPa y el coeficiente de Poisson  $\nu$  es 0,2. La estructura se encuentra solicitada por una carga vertical uniformemente repartida de 5 kN/m<sup>2</sup>. Las variables de diseño son  $S_1$  y  $S_2$  (Fig. 3.1), adoptando el modelo inicial un valor de 3 m para ambas.



**Figura 3.1** Modelo de optimización (Bletzinger y Ramm, 1993)

Se ha realizado la optimización de un cuadrante de la estructura aplicando condiciones de simetría, bajo tres criterios distintos según la función objetivo empleada,

- a) peso,
- b) energía de deformación o
- c) nivel tensional.

En la función objetivo peso se han restringido las tracciones a 2 MPa y las compresiones a 20 MPa.

La segunda función objetivo es la suma de la energía de deformación de los elementos del modelo, definida en la Ec. (3.3). En este caso es irrelevante adoptar restricción alguna para las tensiones, pues el proceso tiende hacia valores inferiores a la resistencia del material.

El nivel tensional  $NT$  es una función definida por Bletzinger y Ramm (1993) y se define como

$$NT = \int (\sigma - \sigma_a)^2 dV \quad (3.4)$$

siendo  $\sigma$  la tensión normal en los puntos de la estructura y  $\sigma_a$  una tensión admisible predefinida. Definido de esta forma, el nivel tensional adopta unidades de fuerza al cuadrado dividida por longitud. Si se expresa de forma discreta para los elementos del modelo resulta

$$NT = \sum_{i,j} (\sigma_{ij} - \sigma_a)^2 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

siendo

$\sigma_{ij}$  valor medio de la tensión principal  $i$  en los nodos del elemento  $j$ ;

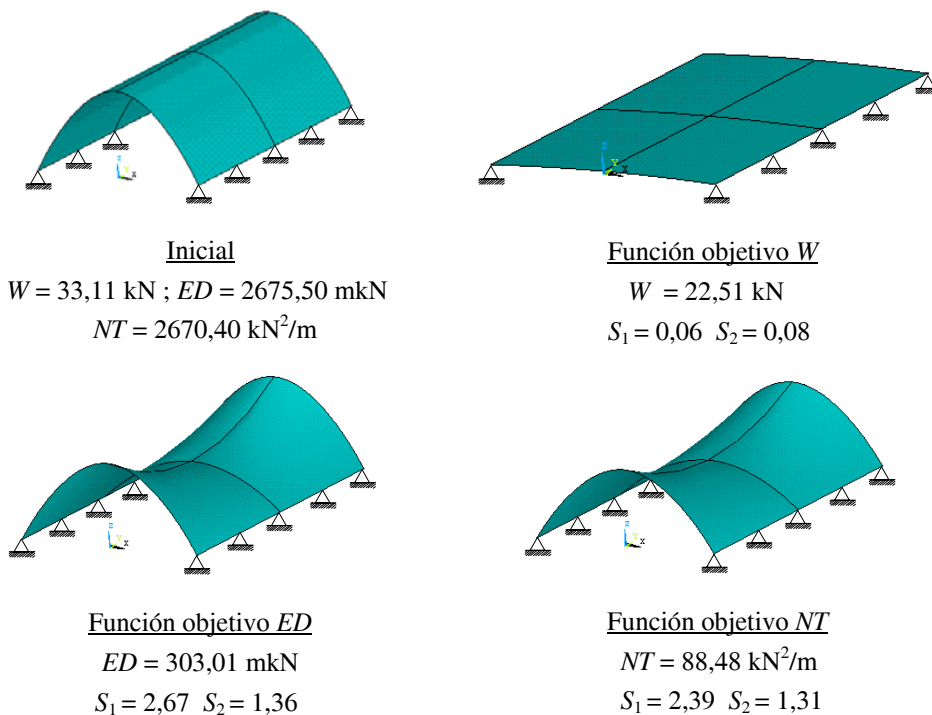
$n$  número de elementos de la malla del modelo, y

$\sigma_a = f_t$  (resistencia a tracción del material).

En este caso es igualmente irrelevante adoptar restricciones para las tensiones.

Los resultados de los procesos de optimización se muestran en las Figuras 3.2 a 3.4.

En la Figura 3.2 la lámina está apoyada en sus bordes rectos. Al minimizar el peso su geometría pasa de ser un cilindro parabólico a una forma casi plana, pues las variables  $S_1$  y  $S_2$  son prácticamente nulas, es decir, muestra una tendencia hacia el caso placa. El peso ha disminuido un 32,01% respecto a su valor inicial. En el caso de adoptar como función objetivo la energía de deformación o el nivel tensional, la geometría de la lámina adopta la forma de un paraboloides hiperbólico, pasando de simple curvatura a doble curvatura de signos opuestos, y obteniendo un significado descenso en los valores de la función objetivo (88,67 y 96,69%, respectivamente).

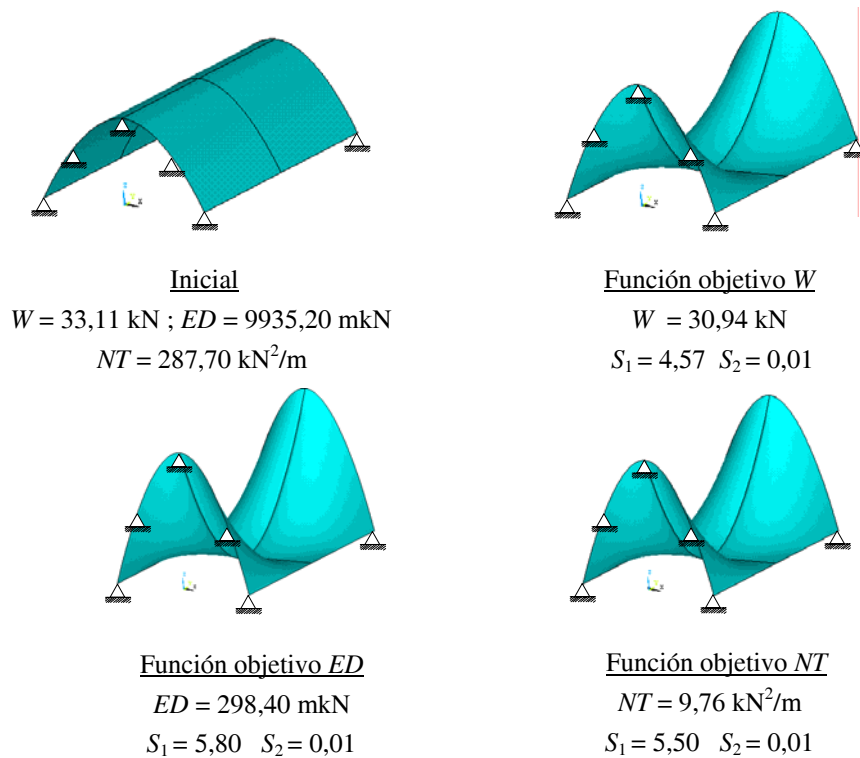


$W$  = peso;  $ED$  = energía de deformación;  $NT$  = nivel tensional

**Figura 3.2** Lámina apoyada en los bordes rectos. Resultados de los procesos de optimización.

En la Figura 3.3 se muestran los resultados para la lámina apoyada en sus bordes curvos. Al minimizar la energía de deformación y el nivel tensional su geometría vuelve a adoptar la forma de un paraboloides hiperbólico, pero esta vez de un modo más pronunciado, aumentando el radio  $S_1$  de los bordes de apoyo y haciéndose nulo el radio  $S_2$  de la generatriz central, lo que hace que la lámina se “cuelgue” de los bordes curvos

hasta tocar el plano horizontal en su zona central. El descenso en el valor de la energía de deformación vuelve a ser importante, mayor que en el caso anterior, un 97,00%, mientras que la reducción en el nivel tensional se mantiene muy similar, un 96,61%. Lo mismo sucede cuando la función objetivo escogida es el peso, la geometría de la lámina cambia hacia una forma parabólico-hiperbólica, aunque esta vez el descenso alcanzado en el valor del peso es menor que en el caso precedente, un 6,55%.

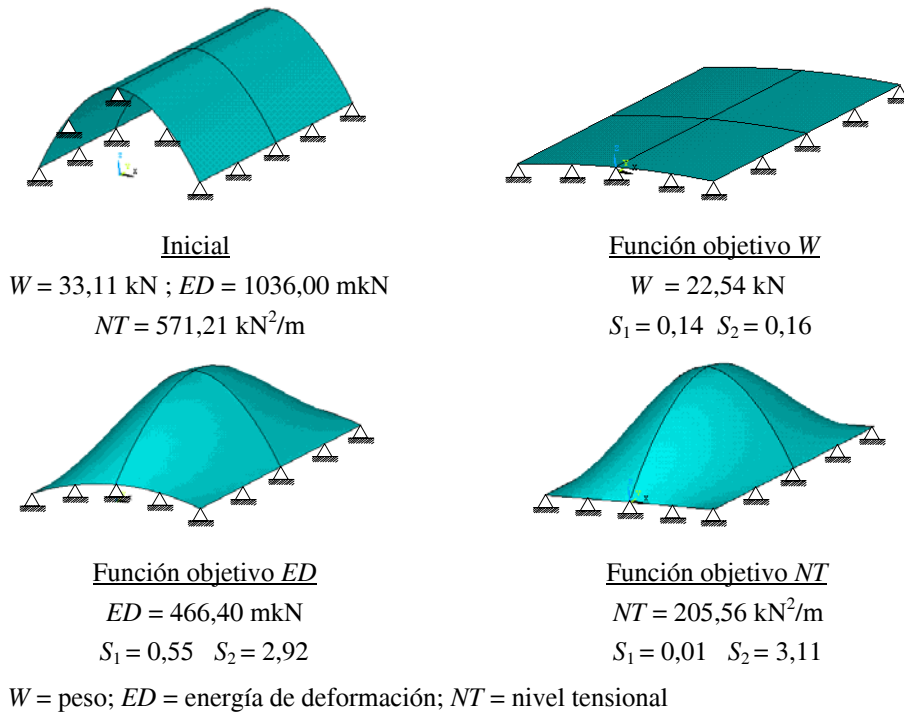


$W$  = peso;  $ED$  = energía de deformación;  $NT$  = nivel tensional

**Figura 3.3** Lámina apoyada en los bordes curvos. Resultados de los procesos de optimización

Por último, en la Figura 3.4 la lámina aparece apoyada en todos sus bordes. Al minimizar la energía de deformación y el nivel tensional, su geometría vuelve a pasar de simple curvatura a doble curvatura, pero esta vez de signos iguales, lo que provoca un “abombamiento” de la zona central. El descenso en el valor de la energía de deformación es de un 54,98% y en el nivel tensional de un 64,01%, los menores de los tres casos. Cuando se adopta como función objetivo el peso, la geometría de la lámina pasa, como ocurrió en el primer caso, de ser un cilindro parabólico a una forma casi plana. El peso ha disminuido en un 31,92% respecto a su valor inicial, valor muy similar al primer caso, como no podía ser de otra manera pues las geometrías finales son casi idénticas.

Una ventaja de esta forma de operar es que el diseñador, interactuando con el programa, puede ir modificando parámetros como la resistencia, la carga o las dimensiones en planta de la lámina, e ir obteniendo diseños óptimos para tales valores.



**Figura 3.4** Lámina apoyada en todos los bordes. Resultados de los procesos de optimización

### 3.5 MOTIVACIÓN

Se ha comprobado que al emplear como función objetivo la energía de deformación o el nivel tensional, la geometría de la lámina tiende a formas de doble curvatura, con un descenso notable en las tensiones. En el caso de la función objetivo peso, la geometría tiende a formas planas, tipo placa, habiéndose minimizado la superficie, pues el espesor se mantiene constante. Esta última función objetivo suele ser la más empleada en el campo de la optimización estructural, aunque, como se ha verificado, es interesante tener en cuenta también otras como la energía de deformación, pues es una forma racional de mejorar el comportamiento mecánico de una lámina al disminuir, simultáneamente, las tensiones y las deformaciones de la estructura.

Las láminas de doble curvatura presentan importantes ventajas de comportamiento mecánico frente a otras formas, como así comprueban, entre otros, Mungan (1976); Muller, Kabir y Scordelis (1978); Scordelis (1981); Candela (1985); Ortega y Arias (1998); Domingo, Lázaro y Serna (1999); Min (1999) y Basterra, Chamizo y Gutiérrez (2001). Dicha geometría goza de recursos mecánicos suficientes para trabajar muy eficientemente como estructura, incluso sin elementos de rigidización.

Sin embargo, son extremadamente sensibles a las imperfecciones. Considerando los procedimientos habituales de construcción en estructuras de hormigón, la probabilidad de que existan deficiencias locales de geometría o espesor, o de que se planteen otros problemas constructivos (incorrecta elección del tiempo de desencofrado, inadecuada ejecución al descimbrar, etc.), es relativamente alta. Se puede destacar



algunos ejemplos reales asociados a esta problemática, como el colapso parcial de la capilla de Lomas de Cuernavaca (Basterra, Chamizo y Gutiérrez, 2001), o la aparición de fisuras al descimbrar el edificio de acceso a L'Oceanogràfic de Valencia. En la literatura puede consultarse otros casos (Csonka, 1958; Ballesteros, 1978; Medwadowski, 2004).

Es evidente que el equilibrio de la membrana es más económico, en cuanto a las cantidades de material empleado, que el de la lámina; pero, rara vez es posible disponer la estructura de modo que aquél se alcance (Torroja, 1957). Puesto que el comportamiento estructural de las láminas se desarrolla básicamente debido a su forma, cabría preguntarse si es posible encontrar pequeñas modificaciones en su geometría que, sin alterar demasiado su configuración estética inicial, mejoren aún más ese comportamiento mecánico, a la vez que se cumplan las condiciones de diseño.

Podría intentarse, por ejemplo, alcanzar una distribución de tensiones en el espesor que fuera lo más uniforme posible, lo que implicaría disponer de láminas libres de flexión o con unos valores de flexión aceptables. Algo similar consiguen Ohmori y Yamamoto (1998) mediante un proceso de búsqueda de forma que proporcione una determinada distribución tensional previamente especificada, por ejemplo, una superficie libre de flexión. Este modo de actuar, mejorando el comportamiento estructural de las láminas mediante la optimización de su forma, es sugerido por Ramm (2004). Mediante su empleo se alcanza mayor calidad en el proceso de diseño, al actuar de coadyuvante en la consecución de estructuras de comportamiento cuasi-perfecto.

En el caso en que la optimización de forma produzca variaciones de geometría dirigidas hacia formas planas, se presenta entonces el problema inherente a las placas, la presencia de flexiones. La lámina no trabaja ya por forma, como lo hace en el caso de doble curvatura, sino por flexión, siendo necesario por tanto dotarla de una armadura en su interior que absorba las tracciones que aparecen. En este caso puede resultar interesante conocer cuál es la cantidad y disposición de armadura más idónea para soportar los esfuerzos, predominantemente de flexión, que someten a la placa, aunque podría generalizarse el caso añadiendo esfuerzos de membrana.

Por otra parte, los códigos de diseño no suelen desarrollar con detalle ninguna metodología para la obtención del armado de elementos estructurales planos de hormigón. En general, el diseño de esta armadura se obtiene mediante el planteamiento de un sistema indeterminado de ecuaciones de equilibrio a nivel seccional, por lo que existen infinitas soluciones al problema (Hernández, Gil y López, 2003; Hernández-Montes, Gil-Martín y Aschheim, 2005; Hernández, Gil-Martín, Pasadas y Aschheim, 2006). Sería entonces muy útil poder disponer de un método automático para el armado de este tipo de elementos, encontrando, además, la solución de mínimo material entre todas las posibles.

En los próximos capítulos se han realizado varios estudios empleando técnicas de optimización aplicadas sobre estos dos tipos de geometría.

Por un lado, se ha investigado el problema de diseño óptimo de espesor y geometría de una lámina real de doble curvatura empleando diversas funciones objetivo. Una de las condiciones ha sido que la forma de las soluciones obtenidas esté próxima a la de un diseño preconcebido, esto es, que las geometrías resultantes adopten una configuración estética similar al diseño inicial. Para obtener estos diseños óptimos se ha empleado análisis elástico y lineal en los procesos de optimización. Posteriormente se realizan análisis no lineales sobre los diseños resultantes para comprobar, de un modo más preciso, esas mejoras estructurales alcanzadas y el grado de influencia de las no linealidades presentes en el problema. Siguiendo las recomendaciones de Lee y Hinton (2000) para este tipo de procesos de optimización de forma con análisis lineal, se ha estudiado el comportamiento frente a pandeo de los diseños óptimos sometidos a estudios de estabilidad no lineal.

Por otro lado, se ha desarrollado un procedimiento numérico de resolución del problema de diseño óptimo del armado en elementos lámina de hormigón, aplicado al caso de elementos estructurales planos. Estos elementos se han dividido en dos grupos según su estado tensional, los sometidos a compresión simple y los sometidos a flexión simple/compuesta o compresión compuesta. Para los primeros se realiza un discusión sobre la necesidad de armadura estableciendo cuatro casos: (i) armadura necesaria en dos direcciones; (ii) armadura necesaria en dirección  $x$ ; (iii) armadura necesaria en dirección  $y$ ; (iv) armadura innecesaria. Para los elementos estructurales sometidos a flexión simple o compuesta se tiene otros cuatro casos: (v) armadura necesaria en dos capas; (vi) armadura necesaria en la capa inferior; (vii) armadura necesaria en la capa superior; (viii) armadura innecesaria.

# *Estudio del diseño óptimo de espesor y geometría de un paraboloides hiperbólico de hormigón empleando diversas funciones objetivo*

## **4.1 INTRODUCCIÓN**

Aunque las láminas pueden adoptar una forma cualquiera, son sin duda las láminas de doble curvatura las que más ventajas presentan. Su extraordinario comportamiento se debe al trabajo en unas direcciones como arcos y en otras como cables, en contraste con el trabajo en arco contenido en un único plano. Esto garantiza una transmisión óptima de la carga hacia los apoyos mediante esfuerzos mayoritariamente de membrana, sin apenas aparición de flexiones, permitiendo reducir al límite el espesor. Además, estas superficies disponen de una forma que es prácticamente inmutable si los esfuerzos que las someten son razonablemente reducidos, y se mantienen siempre en equilibrio con independencia de la distribución de cargas. Esto supone que las estructuras laminares diseñadas para actuar como membranas son, en sí mismas, estructuras óptimas.

Por contra, y como ocurre en los sistemas óptimos, esta alta eficiencia mecánica se traduce en un comportamiento estructural extremadamente sensible antes pequeños cambios en ciertos parámetros de geometría. El ejemplo clásico es la reducción que sufre la carga de pandeo de una lámina ante la aparición de pequeñas imperfecciones geométricas.

En este capítulo se ha investigado el problema de diseño óptimo de espesor y geometría de una lámina en paraboloides hiperbólico empleando diversas funciones objetivo. Se trata del edificio de acceso al Parque Oceanográfico Universal de Valencia, lámina diseñada por Félix Candela y que se ha constituido en su obra póstuma (Figura 2.4). Una de las condiciones ha sido que la forma de las soluciones obtenidas esté próxima al diseño preconcebido por el autor, esto es, que las geometrías resultantes

adopten una configuración estética similar al diseño inicial.

Las funciones objetivo utilizadas son

- a) la suma de la energía de deformación de los elementos del modelo;
- b) el peso de la estructura, y
- c) la mayor tensión principal de tracción de los nodos del modelo.

Para cada una se han realizado dos procesos de optimización, según el valor mínimo que puede adoptar el espesor de la lámina, 0,06 ó 0,08 m. Las variables de diseño son algunos de los parámetros que gobiernan la geometría de la estructura y los espesores definidos en la lámina. Las restricciones se refieren a las tensiones en el hormigón, al espesor mínimo de la lámina y a diversos parámetros de control geométrico para conseguir el objetivo estético en el resultado final.

## 4.2 DESCRIPCIÓN Y MODELIZACIÓN DE LA ESTRUCTURA

### 4.2.1 Introducción

En este apartado se definen las expresiones necesarias para determinar las coordenadas del conjunto de puntos que conforman la superficie media de la lámina, así como las ecuaciones de los planos, curvas y superficies que seccionan en el espacio al paraboloides y lo acotan de modo finito. Posteriormente se han descrito las fases empleadas en la modelización la estructura con el programa de elementos finitos ANSYS, esto es, el modelo de diseño, el modelo CAD y el modelo de análisis.

### 4.2.2 El paraboloides hiperbólico (hypar)

La estructura laminar de hormigón objeto del estudio está compuesta por la intersección de tres paraboloides hiperbólicos o hyper (Figura 4.1). Estos paraboloides contienen dos sistemas de generatrices rectas, siendo cada uno de estos sistemas paralelo a un plano director. La intersección de ambos planos directores define el eje  $z$ , formando entre sí un ángulo  $\omega$ . Si este ángulo es recto la expresión matemática en coordenadas cartesianas que define la superficie media de la lámina viene dada por

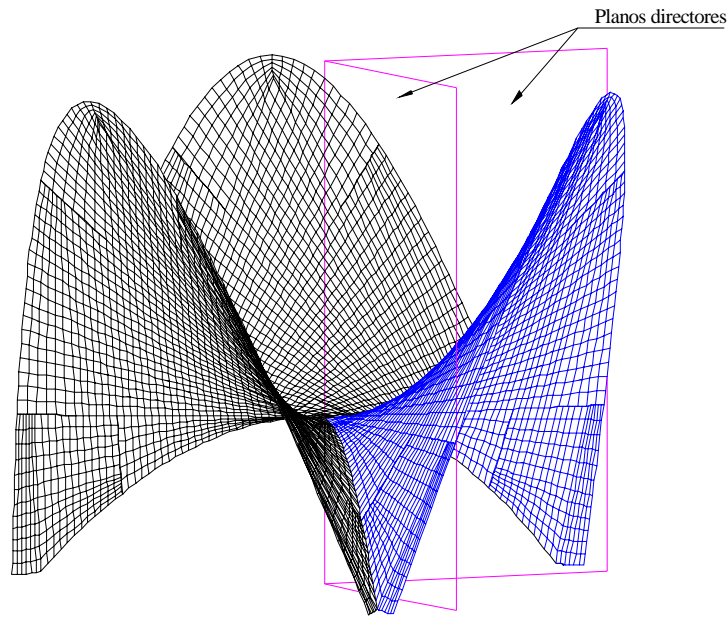
$$z = Kxy \quad (4.1)$$

que expresada en coordenadas cilíndricas es

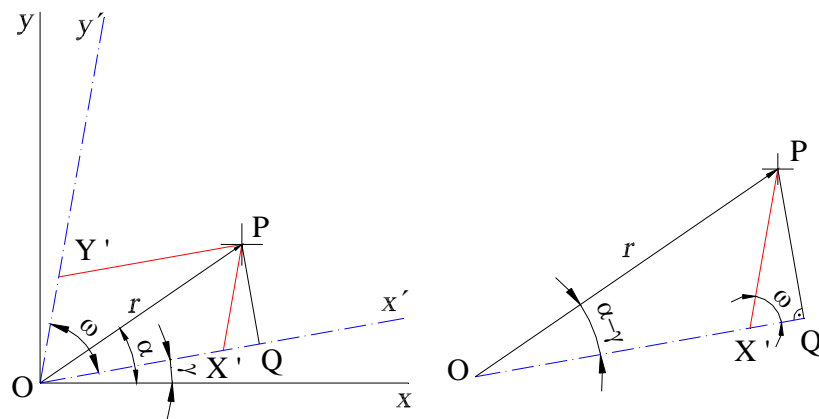
$$z = Kr^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha) \quad (4.2)$$

donde  $K$  es una constante denominada *constante de la superficie*.

A continuación se determina la expresión genérica en coordenadas cilíndricas que define la superficie de la lámina cuando el ángulo formado por los ejes directores  $x'$  e  $y'$  tiene un valor  $\omega$  distinto de  $90^\circ$  (Figura 4.2).



**Figura 4.1** Estructura laminar. Perspectiva



**Figura 4.2** Sistemas de coordenadas utilizados en la definición del hypar

Para ello es necesario primero obtener el valor del segmento  $OX'$  y  $OY'$ . Se procede de la siguiente forma

$$\begin{aligned} OQ &= r \cos(\alpha - \gamma) \\ PQ &= r \sin(\alpha - \gamma) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Conociendo el valor del segmento  $PQ$  en función de los ángulos  $\alpha$  y  $\gamma$ , se puede determinar  $X'Q$  en función de  $PQ$  como

$$X'Q = \frac{PQ}{\tan(\omega)} = \frac{r \sin(\alpha - \gamma)}{\tan(\omega)} \quad (4.4)$$

y restando el segmento  $OQ$  a  $X'Q$  se tiene el valor buscado  $OX'$

$$OX' = OQ - X'Q = r \cos(\alpha - \gamma) - \frac{r \sin(\alpha - \gamma)}{\tan(\omega)} \quad (4.5)$$

Como  $\gamma$  está relacionada con  $\omega$  mediante la relación

$$\gamma = \frac{90 - \omega}{2} \quad (4.6)$$

si se sustituye la Ec. (4.6) en la (4.5) resulta

$$OX' = r \left[ \cos\left(\alpha - \frac{90 - \omega}{2}\right) - \frac{\sin\left(\alpha - \frac{90 - \omega}{2}\right)}{\tan(\omega)} \right] \quad (4.7)$$

y, operando de un modo similar, se puede llegar a una expresión análoga para el segmento  $OY'$

$$OY' = r \left[ \cos\left(\frac{90 + \omega}{2} - \alpha\right) - \frac{\sin\left(\frac{90 + \omega}{2} - \alpha\right)}{\tan(\omega)} \right] \quad (4.8)$$

Finalmente, sustituyendo estas expresiones en la ecuación de la superficie reglada definida en coordenadas cilíndricas se obtiene

$$z = Kr^2 \left[ \cos\left(\frac{90 + \omega}{2} - \alpha\right) - \frac{\sin\left(\frac{90 + \omega}{2} - \alpha\right)}{\tan(\omega)} \right] \cdot \left[ \cos\left(\alpha - \frac{90 - \omega}{2}\right) - \frac{\sin\left(\alpha - \frac{90 - \omega}{2}\right)}{\tan(\omega)} \right] \quad (4.9)$$

expresión que se define en función de  $K$  y  $\omega$ .

Para el caso en que  $\omega = 90^\circ$ , la ecuación queda de la forma

$$z = Kr^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (4.10)$$

como ya se ha definido anteriormente.

En lo sucesivo, y con el fin de simplificar la Ec. (4.9), se denomina

$$g(\alpha, \omega) = \left[ \cos\left(\frac{90 + \omega}{2} - \alpha\right) - \frac{\sin\left(\frac{90 + \omega}{2} - \alpha\right)}{\tan(\omega)} \right] \quad (4.11)$$

$$f(\alpha, \omega) = \left[ \cos\left(\alpha - \frac{90 - \omega}{2}\right) - \frac{\sin\left(\alpha - \frac{90 - \omega}{2}\right)}{\tan(\omega)} \right]$$



$$\begin{aligned}\alpha &= -15^\circ \\ z &= \frac{-K}{4}r^2\end{aligned}\quad (4.13)$$

La parábola que une los puntos O y R1' es

$$\begin{aligned}\alpha &= 105^\circ \\ z &= \frac{-K}{4}r^2\end{aligned}\quad (4.14)$$

en el caso en que el hyper sea equilátero.

Los puntos R1, R2, R1' y R2' están contenidos en un plano horizontal y definen los extremos de las parábolas sobre las que apoya la estructura. Este plano horizontal, denominado *plano de cimentación*, está ubicado a una distancia  $c$  por debajo del origen de coordenadas (punto de intersección de los tres hyper), siendo su expresión

$$z = -c \quad (4.15)$$

La intersección de este plano con la superficie determina una parábola que define los apoyos de la estructura

$$\begin{aligned}z &= -c \\ r &= \sqrt{\frac{-c}{Kg(\alpha, \omega)f(\alpha, \omega)}}\end{aligned}\quad (4.16)$$

Estos apoyos hay que acotarlos. El apoyo R1R2 abarca el dominio resultante del intervalo  $\alpha \in [-15^\circ, -\delta]$ , donde  $\delta$  es el ángulo formado entre el eje  $x$  y el punto donde termina el apoyo (Figura 4.3b). El punto extremo interior (el de menor coordenada  $r$ ), viene dado por el valor de la Ec. (4.16) cuando  $\alpha = -15^\circ$ , es decir, las coordenadas cilíndricas del punto R1 son

$$\begin{aligned}\alpha &= -15^\circ \\ r &= \sqrt{\frac{-c}{Kg(-15^\circ, \omega)f(-15^\circ, \omega)}} \\ z &= -c\end{aligned}\quad (4.17)$$

mientras que para el extremo externo, punto R2, hay que sustituir el valor de  $\alpha$  por  $\delta$ , con lo que resulta

$$\begin{aligned}\alpha &= -\delta \\ r &= \sqrt{\frac{-c}{Kg(\delta, \omega)f(\delta, \omega)}} \\ z &= -c\end{aligned}\quad (4.18)$$

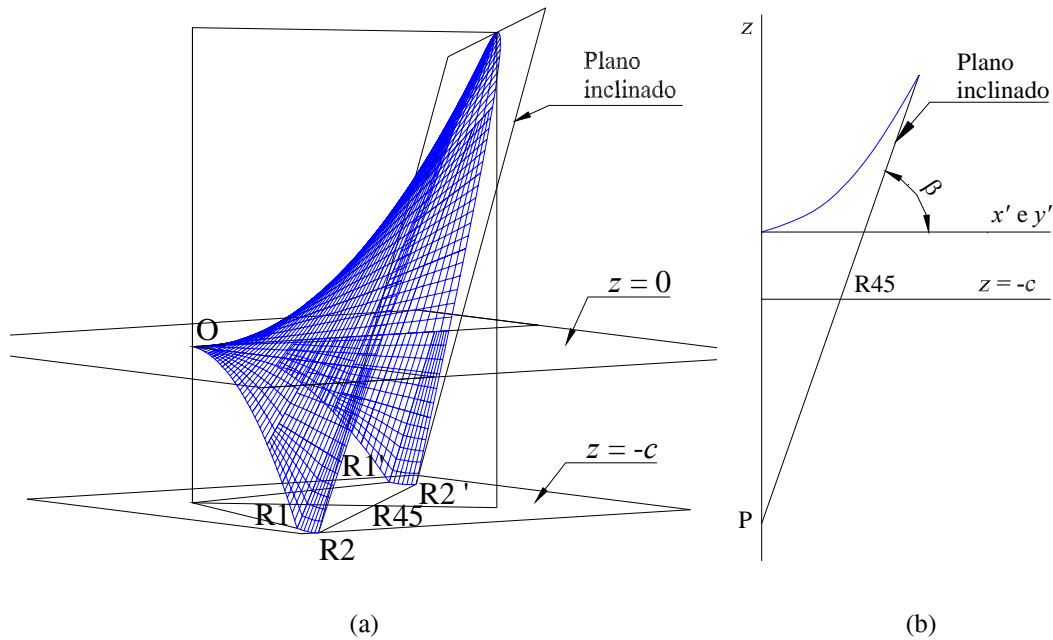
El otro apoyo es el simétrico de éste.

Por último, sólo queda definir el borde libre curvo del lóbulo. Éste viene determinado por un plano inclinado que contiene a la línea que une los puntos R2 y R2'



y forma un ángulo  $\beta$  con el plano  $x'oy'$  (Figura 4.4).

La expresión matemática de este plano se ha determinado mediante las coordenadas de tres puntos respecto al sistema  $x', y'$  y  $z$ .



**Figura 4.4** Definición del plano inclinado. (a) Perspectiva. (b) Perfil

Como se ha mencionado anteriormente, dos de los puntos por los que pasa dicho plano son R2 y R2', cuyas coordenadas son

$$\begin{aligned}
 x'(R2) &= r2 \frac{\cos(\gamma - \delta)}{\sin(\omega)} & x'(R2') &= r2 \frac{\cos(\gamma + \delta + 90)}{\sin(\omega)} \\
 y'(R2) &= r2 \frac{-\sin(\gamma + \delta)}{\sin(\omega)} & y'(R2') &= r2 \frac{-\sin(\gamma - \delta - 90)}{\sin(\omega)} \\
 z'(R2) &= -c & z'(R2') &= -c
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

donde  $r2$  es la distancia en proyección sobre el plano de cimentación entre los puntos O y R2 (Figura 4.4a).

El tercer punto se halla de la intersección del plano con el eje  $z$  en función del ángulo  $\beta$ . Para ello se determina la distancia del punto R45 al eje  $z$ . Como puede observarse en la Figura 4.4b, esta distancia es

$$r45 = r2 \cos(\delta + 45) \tag{4.20}$$

con lo que la intersección del plano con el eje  $z$  se produce para un valor

$$z'(P) = -(c + r45 \tan(\beta)) \tag{4.21}$$

Sustituyendo estos puntos en la ecuación general de un plano

$$Ax' + By' + Dz' = E \tag{4.22}$$

se obtiene los valores que adoptan los parámetros

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{-r45 \tan(\beta) \sin(\omega)}{r2(\cos(\gamma - \delta) - \sin(\gamma - \delta))} \\
 B &= A \\
 D &= 1 \\
 E &= -(c + r45 \tan(\beta))
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Transformando la Ec. (4.22) a coordenadas cilíndricas, y con la expresión de la superficie reglada, se llega a una ecuación de segundo grado que permite determinar las coordenadas de los puntos que forman el borde curvo libre. Estas expresiones se han introducido en un fichero macro de ANSYS para la determinación geométrica del modelo.

#### 4.2.3 Modelo de diseño

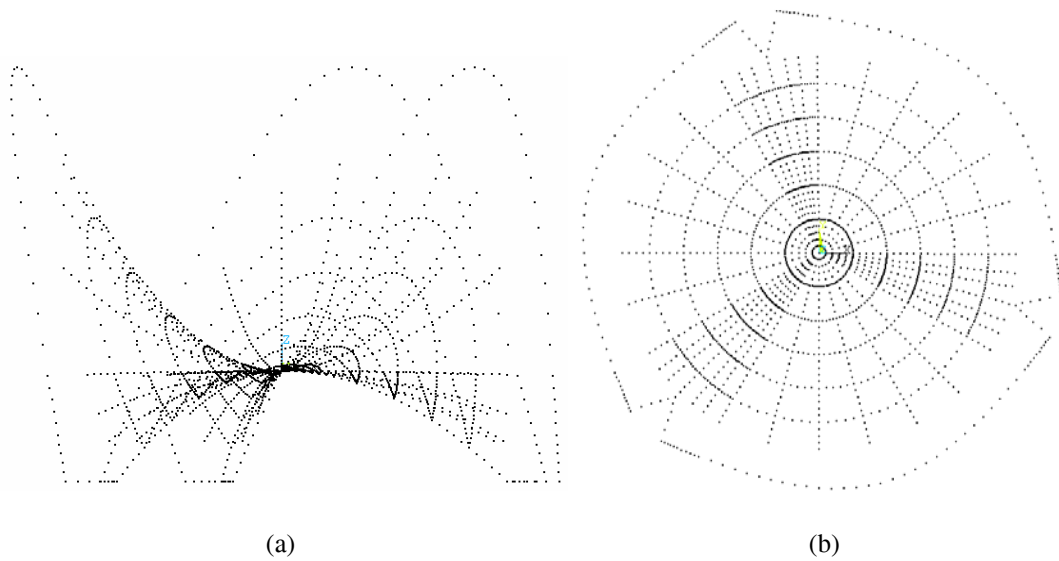
Dado el pequeño espesor de la estructura en comparación con el resto de dimensiones, el problema se ha abordado aplicando la teoría de láminas, eligiendo para el análisis mediante elementos finitos un tipo de elemento lámina curvo, concretamente el elemento *shell93* de ANSYS. Aunque en realidad la estructura es un sólido tridimensional, se ha representado utilizando elementos de superficie en vez de elementos sólidos, a los cuales se les asocia un determinado espesor. Operando de este modo, se reduce significativamente el número de ecuaciones que es preciso resolver en los distintos análisis.

#### 4.2.4 Modelo CAD

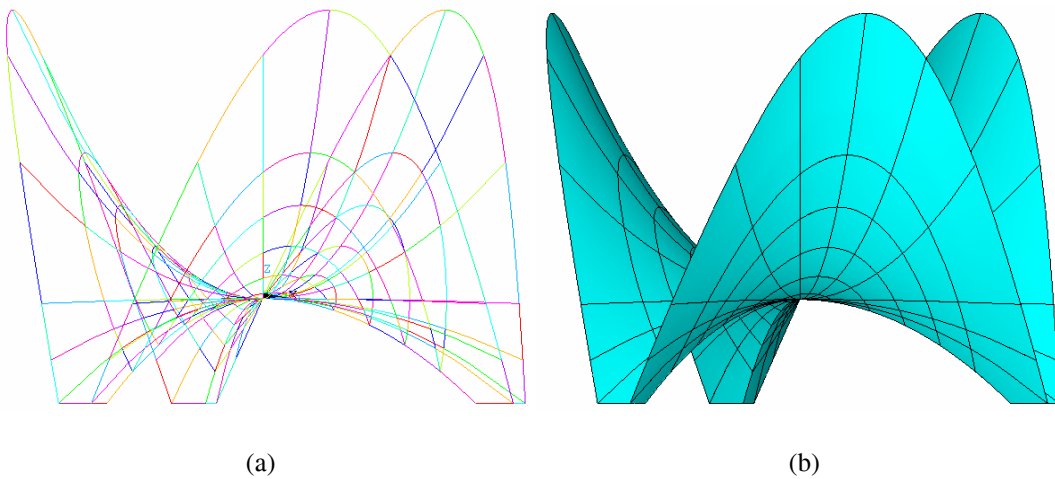
Este modelo se ha creado en ANSYS mediante puntos, líneas y áreas. Se ha empleado un sistema de coordenadas cilíndrico y global con origen en el punto de intersección de los tres paraboloides.

Primeramente se define una serie de puntos (keypoints) pertenecientes a la superficie media de la lámina. Después se unen entre sí mediante líneas curvas (splines). Finalmente estas curvas constituyen las aristas de las superficies regladas o áreas, sobre las que se realiza el mallado para obtener el modelo de elementos finitos.

Los puntos se crean introduciendo sus coordenadas de manera automática, programando las subrutinas necesarias dentro de la macro. Los puntos se definen a partir de la intersección de un cilindro de radio  $r$ , un plano perpendicular al plano  $xoy$  girado un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje  $x$ , y la ecuación que define la superficie media de la lámina. Dando valores a los parámetros  $r$  y  $\alpha$  se generan 1945 keypoints (Figura 4.5), unidos de 6 en 6 para formar 432 splines (Figura 4.6a), que componen las 216 áreas que conforman el modelo (Figura 4.6b).



**Figura 4.5** Modelo CAD. Keypoints. (a) Perfil. (b) Planta



**Figura 4.6** Modelo CAD. (a) Líneas. (b) Áreas

#### 4.2.4.1 Parámetros geométricos

El modelo CAD está definido en la macro de forma paramétrica. De esta manera se puede modificar la forma de la estructura variando el valor de dichos parámetros, a la vez que permite ejecutar los procesos de optimización en función de los mismos. Los parámetros de geometría definidos en este modelo han sido:

- $K$  Constante de la ecuación de la superficie media del hypar. Establece la pendiente de las parábolas (cuanto mayor sea su valor más agudas serán las parábolas y, en consecuencia, mayor será la altura máxima de la estructura).
- $\beta$  Ángulo de inclinación del plano que define el borde libre del hypar con respecto a la horizontal. Define el borde curvo libre (al disminuir su valor el borde libre sobresale más y aumenta la altura total del hypar).

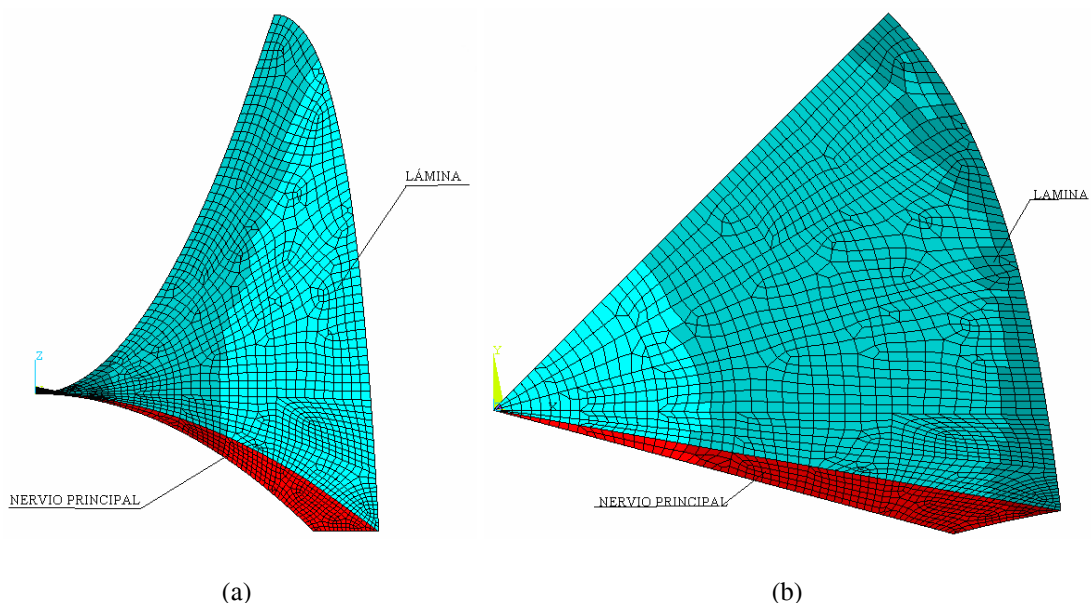
- $C$  Distancia del punto intersección de los tres paraboloides hiperbólicos al plano que contiene los tres apoyos, es decir, la altura del hypar en su centro;
- $\omega$  Ángulo formado por los ejes directores del hypar. Una pequeña variación de este ángulo provoca una importante alteración de la altura total del hypar (al disminuir su valor las parábolas contenidas en los cuadrantes agudos son más planas que las contenidas en los cuadrantes obtusos y, en consecuencia, la altura total es menor).
- $\delta$  Ángulo que forma el comienzo del apoyo con respecto al eje  $x$ .

#### 4.2.5 Modelo de análisis

Una vez formado el modelo CAD, se genera la malla de elementos finitos, se le asigna propiedades y se establecen las condiciones de contorno y las cargas aplicadas sobre la estructura.

##### 4.2.5.1 Malla de elementos finitos

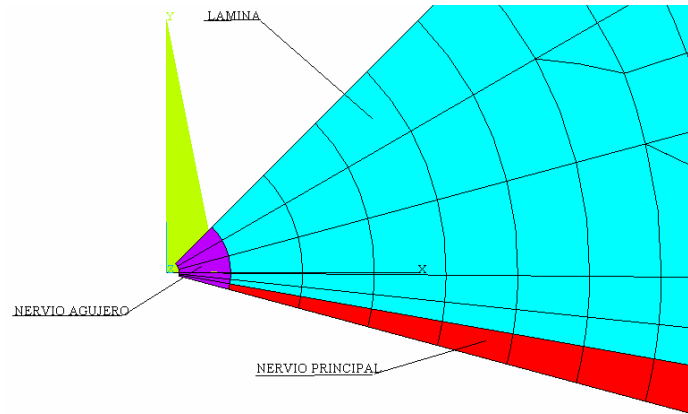
En el proceso de mallado se definen el tipo de elemento, espesor y material. Este proceso es fundamental, pues de su correcta ejecución depende la obtención de resultados satisfactorios. Un mallado muy fino proporciona resultados muy próximos al exacto, pero el tiempo de cálculo resulta excesivo en comparación con la mejora obtenida. Un mallado muy basto proporciona resultados alejados de la realidad, pues elementos distorsionados o mal conectados dan lugar a falsos concentradores de tensiones o a errores fatales que impiden la resolución del sistema de ecuaciones.



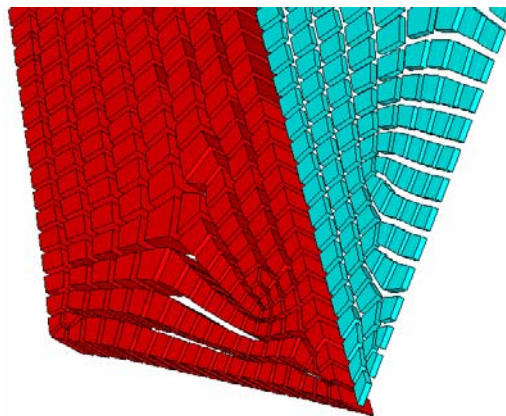
**Figura 4.7** Malla de elementos finitos de un lóbulo. (a) Perfil. (b) Planta

Se modeliza un sextante de la estructura (Figura 4.7), en el que se define un orificio circular de 0,10 m de diámetro centrado en el punto de intersección de los tres

paraboloides hiperbólicos (Figura 4.8). De esta forma se eliminan los problemas de mallado provocados en esta zona, motivados por la distorsión que tienen los elementos creados en las áreas cercanas al centro, al poseer ángulos muy agudos. La lámina se ha reforzado mediante dos nervios, uno es el nervio del agujero (Figura 4.8), que circunda al orificio central y abarca una anchura de 0,20 m, y otro es el nervio principal, discurriendo desde cada apoyo al centro de la estructura (Figuras 4.7 y 4.9).



**Figura 4.8** Zona del orificio central. Detalle de la malla de elementos finitos



**Figura 4.9** Encuentro de la lámina con el nervio principal. Detalle

#### 4.2.5.2 Material

El material es hormigón, armado con una malla de acero corrugado en la superficie media con el único fin de controlar la fisuración debida a la retracción, por lo que no se considera en los cálculos. Sus propiedades se han determinado según la instrucción EHE. Se detalla a continuación los valores de las mismas.

##### *Resistencia característica*

Se ha empleado un hormigón de resistencia característica de compresión a 28 días  $f_{ck} = 30$  MPa, compatible con los requisitos de durabilidad propios de un ambiente IIIa marino aéreo.

La resistencia característica inferior a tracción viene dada en función de la resistencia característica a compresión mediante la expresión

$$f_{ct,k} = 0,21\sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,21\sqrt[3]{30^2} = 2,03 \text{ MPa} \quad (4.24)$$

#### *Resistencia de cálculo*

Se considera como resistencia de cálculo del hormigón el valor de la resistencia característica correspondiente dividida por un coeficiente parcial de seguridad  $\gamma_c = 1,5$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ MPa} \quad (4.25)$$

$$f_{ct,d} = \frac{f_{ct,k}}{\gamma_c} = \frac{2,03}{1,5} = 1,35 \text{ MPa} \quad (4.26)$$

Estos valores se utilizan para acotar las tensiones principales máximas y mínimas que se producen en la estructura para un estado de cargas determinado. Como límite superior se ha establecido el valor de la resistencia de cálculo a tracción del hormigón  $f_{ct,d}$ , y como límite inferior  $0,85f_{cd}$ .

#### *Módulo de deformación longitudinal*

Se emplea el módulo de deformación longitudinal secante

$$E_j = 8500\sqrt[3]{f_{cm,j}} \quad (4.27)$$

donde  $f_{cm,j}$  es la resistencia media a compresión del hormigón, que para una edad de 28 días puede estimarse a partir de la resistencia característica de compresión mediante

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 = 38 \text{ MPa} \quad (4.28)$$

Por tanto, el valor del módulo de deformación longitudinal secante a la edad de 28 días  $E_c$  vale

$$E_c = 8500\sqrt[3]{f_{cm}} = 8500\sqrt[3]{38} = 28576 \text{ MPa} \quad (4.29)$$

siendo dicha expresión válida siempre que las condiciones de servicio no sobrepasen el valor de  $0,45f_{cj}$ , con  $f_{cj}$  el valor de la resistencia característica a compresión del hormigón a  $j$  días de edad. Por tanto, se ha de imponer la siguiente restricción a las tensiones principales en condiciones de servicio

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \leq 0,45f_{cj} = 0,45 \cdot 30 = 13,5 \text{ MPa} \quad (4.30)$$

#### *Coefficiente de Poisson*

Se adopta el valor 0,2.

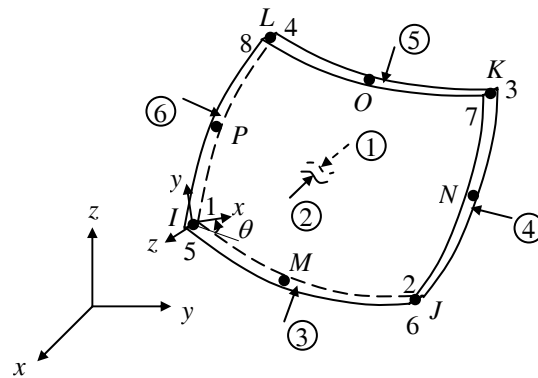
En la tabla 4.1 se resumen las propiedades del material.

**Tabla 4.1** Propiedades del material HA-30 (unidades en MPa)

$f_{ck}$	$f_{ct,k}$	$f_{cd}$	$f_{ct,d}$	$E_c$	$\nu$
30,00	2,03	20,00	1,35	28576,00	0,20

#### 4.2.5.3 Tipo de elemento

Se ha utilizado el elemento *Shell93* de ANSYS (Figura 4.10), desarrollado principalmente para modelizar láminas curvas. Tiene seis grados de libertad por nodo, tres traslaciones en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y tres rotaciones del nodo sobre dichos ejes. Admite deformaciones cuadráticas en ambas direcciones  $x$  e  $y$ . Tiene capacidad para soportar plasticidad, grandes deformaciones y grandes desplazamientos. Está constituido por ocho nodos, cuatro espesores y las propiedades ortotrópicas del material.

**Figura 4.10** Elemento finito *Shell93* (ANSYS, 2004)

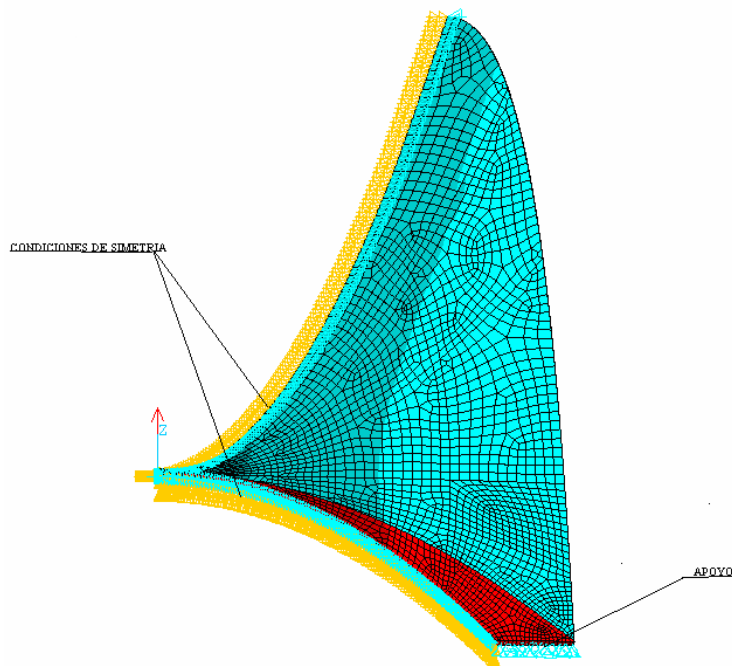
La localización geométrica de los nodos centrales es automáticamente calculada en el caso de que dicha localización no sea proporcionada por el usuario. Las propiedades ortotrópicas del material corresponden a las direcciones del sistema de coordenadas del elemento, en el que los ejes  $x$  e  $y$  están contenidos en el plano del elemento, pudiendo ser el eje  $x$  rotado un ángulo  $\theta$  hacia el eje  $y$ .

El elemento puede tener espesor variable a través de su área, definido mediante los espesores de los cuatro nodos situados en las esquinas. En el caso en el que el espesor utilizado para todo el elemento sea constante sólo es necesario introducir el espesor del nodo  $I$ . No se permiten elementos de área cero ni espesor nulo. Además este tipo de elemento incluye desviación por cortante. La tensión normal a través del espesor varía linealmente, mientras que la tensión cortante se asume constante.

#### 4.2.5.4 Condiciones de contorno

La estructura está formada por tres lóbulos simétricos axialmente respecto al eje  $z$ , definiendo cada uno un sector de  $120^\circ$  y siendo, a su vez, simétrico respecto al plano que contiene al eje  $z$  y que divide al lóbulo en dos partes iguales. Del mismo modo, las cargas son simétricas axialmente respecto a este eje.

Se considera solamente un sextante de la estructura, aplicando condiciones de simetría en los nodos contenidos en los planos que definen dicha simetría (Figura 4.11). Por tanto, se analiza un lóbulo con una amplitud de sesenta grados, y a la línea que define el apoyo del lóbulo se le aplican las condiciones de contorno impidiendo los desplazamientos  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y permitiendo los giros.



**Figura 4.11** Condiciones de contorno de un sextante de la lámina

#### 4.2.5.5 Acciones

Para la determinación de las acciones se ha empleado el Código Técnico de la Edificación CTE (IETcc, 2006).

##### *Peso propio*

Se adopta un peso específico del material de  $25 \text{ kN/m}^3$ .

##### *Sobrecarga de uso*

Se escoge el valor habitual de la sobrecarga debida a procesos de mantenimiento y conservación de  $1 \text{ kN/m}^2$ .

##### *Sobrecarga de nieve*

Según el CTE, a la ciudad de Valencia le corresponde una sobrecarga debida al peso de nieve de  $0,20 \text{ kN/m}^2$ . Como esta acción es inferior a la sobrecarga de conservación, y es muy improbable que ambas acciones actúen simultáneamente, se escoge sólo aquella para incluirla en las hipótesis de combinación de acciones.

##### *Viento*

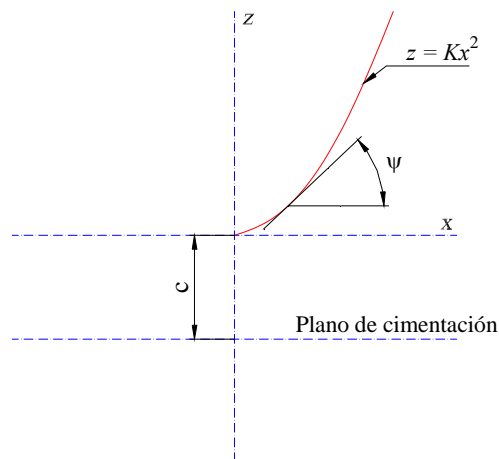
Es fácil imaginar la dificultad existente en la obtención de la incidencia del viento sobre esta estructura, donde la pendiente es variable anisotrópicamente, además de la



compleja interacción aerodinámica provocada por la cercanía existente entre los lóbulos. Por tanto, se ha decidido estimar la acción del viento mediante una simplificación conservadora, y compararla con el resto de acciones para determinar su influencia relativa en el análisis.

En primer lugar se determina el ángulo  $\psi$  que forma cada punto de la bisectriz de un lóbulo con la horizontal, para el caso más sencillo de hyper equilátero, esto es, formando un ángulo  $\omega = 90^\circ$  entre los planos directores (Figura 4.12). Se emplea la expresión de la superficie media para este caso definida en la Ec. (4.1), y dado que en la bisectriz  $x = y$  se tiene

$$z = Kx^2 \quad (4.31)$$



**Figura 4.12** Sección por la bisectriz de un lóbulo ( $\omega = 90^\circ$ )

Derivando la expresión anterior respecto de  $x$  se puede obtener el valor de la tangente de  $\psi$  en cada punto de la parábola

$$\tan(\psi) = \frac{dz}{dx} = 2Kx \quad (4.32)$$

y sustituyendo  $K = 0,14$ , se pueden obtener valores de  $\psi$  para una serie de abscisas como los relacionados en la tabla 4.2.

Se observa que el ángulo  $\psi$  varía desde  $0^\circ$  a  $70,35^\circ$ , creciendo rápidamente y siendo superior a  $60^\circ$  a partir de 6 m en la dirección del eje  $x$ . Es razonable entender que en estas zonas superiores de los lóbulos, y separadas del centro del hyper, la influencia del viento es mayor que en las zonas inferiores, de menor inclinación y con un cierto resguardo provocado por los lóbulos adyacentes.

Si se considera a un lóbulo, de modo conservador y simplificado, como cubierta a un agua, el viento actúa sobre ella con un coeficiente eólico  $c_p$  dependiendo de su pendiente  $\alpha$ , de la zona (F, G o H) y de la dirección de incidencia  $\theta$  (IETcc, 2006).

**Tabla 4.2** Ángulo de la bisectriz de un lóbulo con la horizontal ( $K = 0,14$ ;  $\omega = 90^\circ$ )

$x$ (m)	$\tan(\psi)$	$\psi$
0	0,00	0,00°
1	0,28	15,64°
2	0,56	29,25°
3	0,84	40,03°
4	1,12	48,24°
5	1,40	54,46°
6	1,68	59,24°
7	1,96	62,97°
8	2,24	65,94°
9	2,52	68,36°
10	2,80	70,35°

Los valores del coeficiente eólico  $c_p$  para inclinaciones de la cubierta  $\alpha \geq 60^\circ$  y para la zona H, que es la zona ubicada en la lámina para estas inclinaciones además de ser la de mayor superficie, pueden consultarse en la tabla 4.3, correspondiendo los valores positivos a presión y negativos a succión.

**Tabla 4.3.** Coeficientes eólicos de presión  $c_p$ 

$\alpha$	$c_p$ a barlovento ( $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ )	$c_p$ a sotavento ( $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$ )
60°	+0,7	-0,5
75°	+0,8	-0,5

Se ha tomado pues, un valor  $c_p = +0,75$  en presión y  $c_p = -0,5$  en succión.

La presión dinámica del viento  $q_b$  adopta, para el emplazamiento geográfico de la estructura, el valor  $0,42 \text{ kN/m}^2$ , y el coeficiente medio de exposición  $c_e$  vale 2,23 para un grado IV de aspereza del entorno y una altura entre 15 y 24 m (IETcc, 2006). El valor de la sobrecarga de viento se obtiene de la fórmula

$$q_e = q_b c_e c_p \quad (4.33)$$

resultando

$$q_{e,pres} = +0,70 \text{ kN/m}^2 \quad (4.34)$$

$$q_{e,succ} = -0,47 \text{ kN/m}^2 \quad (4.35)$$

#### *Acción sísmica*

Si complicada era la determinación de la acción del viento sobre la lámina, aún más sucede con la acción sísmica. La compleja geometría de la estructura hace inaplicable cualquier método simplificado de obtención de acciones equivalentes,

debiendo por tanto analizar la estructura mediante espectros de respuesta o realizar un estudio dinámico por integración de registros de aceleración.

Con el objeto de comparar la acción sísmica vertical con la acción permanente, se puede aplicar una sencilla simplificación para obtener el valor máximo de aquélla. Para ello se considera la estructura sin ductilidad, y se emplea el valor 2,5 del espectro normalizado de respuesta elástica adoptado en la normativa sismorresistente NCSE-02 (Comisión Permanente de Normas Sismorresistentes, 2002). La aceleración sísmica básica de la localidad donde se sitúa la lámina es 0,06g, siendo por tanto el coeficiente de la acción horizontal  $2,5 \times 0,06 = 0,15$ . Según la norma NCSE-02, al considerar movimientos verticales, se adopta un espectro de respuesta elástica cuyas ordenadas espectrales son el 70% de los valores correspondientes a las del espectro para movimientos horizontales. Por tanto, el coeficiente de la acción sísmica vertical se obtiene como  $0,70 \times 0,15 = 0,105$ , el cual, al multiplicarlo por el peso propio de la lámina, resulta un valor de la acción sísmica vertical de  $0,105 \times 1,50 = 0,16 \text{ kN/m}^2$ , lo que supone, en el caso más conservador, en torno a un 10% de la carga permanente.

Si se considera que

- i) la localidad donde se sitúa la lámina es de baja sismicidad básica (0,06g);
- ii) los espesores que se manejan son reducidos, por lo que la masa de la estructura no es significativa y provoca valores de la acción sísmica vertical inferiores a la décima parte del peso propio; y
- iii) el objeto del cálculo sismorresistente es verificar la seguridad de la construcción ante las acciones sísmicas que puedan actuar sobre ella durante su período de vida útil;

se ha optado por no tener en cuenta la acción sísmica en los procesos de optimización. Su determinación sería necesaria realizarla en un nivel posterior dentro del proceso de diseño, en el que se efectuara la comprobación de la seguridad de la estructura que se haya escogido entre los diseños resultantes.

#### 4.2.5.6 Hipótesis de combinación de acciones

Se ha empleado la situación permanente o transitoria definida en la instrucción EHE, donde la combinación de acciones viene determinada por la expresión

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \sum_{j \geq 1} \gamma_{G^*,j} G_{k,j}^* + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i} \quad (4.36)$$

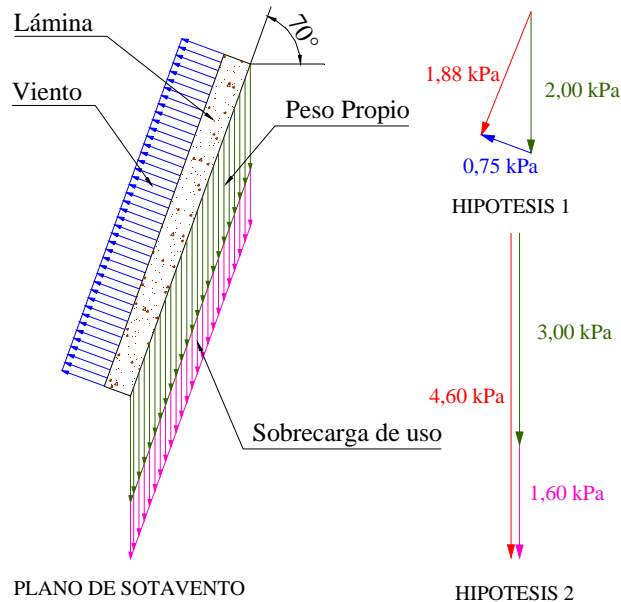
siendo

- |                |   |
|----------------|---|
| $G_{k,j}$      | valor característico de las acciones permanentes;                       |
| $G_{k,j}^*$    | valor característico de las acciones permanentes de valor no constante; |
| $Q_{k,1}$      | valor característico de la acción variable determinante;                |
| $Q_{k,i}$      | valor característico de la acción variable concomitante;                |
| $\gamma_{G,j}$ | coeficiente parcial de seguridad para las acciones permanentes;         |

- $\gamma_{G^*j}$  coeficiente parcial de seguridad para las acciones permanentes de valor no constante;
- $\gamma_{Q,1}$  coeficiente parcial de seguridad para la acción variable determinante;
- $\psi_{0,i}$  coeficiente de combinación, y
- $\psi_{0,i}Q_{k,i}$  valor representativo de combinación de las acciones variables concomitantes.

A continuación se ha estudiado una porción de lámina formada por un metro cuadrado y que contiene a la bisectriz de uno de los lóbulos. Se han expresado las distintas combinaciones de cargas con el objeto de visualizar la más desfavorable.

**Hipótesis 1.** Plano de sotavento, acciones desfavorables hacia arriba y acción determinante el viento (Figura 4.13).



**Figura 4.13** Combinación de acciones en el plano de sotavento

El valor del peso propio de la lámina es

$$G = \text{Densidad} \times \text{espesor} = 25 \cdot 0,08 = 2,00 \text{ kPa} \quad (4.37)$$

Aunque para este tipo de construcción se suele aplicar control de ejecución intenso, de un modo conservador se han empleado los coeficientes habituales 1,5 para acciones permanentes y 1,6 para las variables. Según la Ec. (4.36) la combinación es

$$\mathbf{R} = 1,0\mathbf{G} + 1,6\mathbf{V} + 0,0\mathbf{U} \quad (4.38)$$

siendo

- R** vector resultante de la combinación de acciones;
- G** vector del peso propio;
- V** vector de la acción de viento, y
- U** vector de la sobrecarga de uso.

Sustituyendo los valores de las acciones correspondientes se tiene

$$\mathbf{R} = 1,0 \cdot \vec{2},00 + 1,6 \cdot \vec{0},47 + 0,0 \cdot \vec{1},00 \quad (4.39)$$

adoptando la resultante de estas acciones el valor 1,88 kPa.

**Hipótesis 2.** Plano de sotavento, acciones desfavorables hacia abajo y acción determinante la sobrecarga de uso (Figura 4.13).

En este caso se tiene

$$\mathbf{R} = 1,5\mathbf{G} + 1,6\mathbf{U} + 0,0\mathbf{V} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{R} = 1,5 \cdot \vec{2},00 + 1,6 \cdot \vec{1},00 + 0,0 \cdot \vec{0},47 \quad (4.41)$$

La fuerza resultante obtenida adopta un valor de 4,60 kPa y dirección vertical.

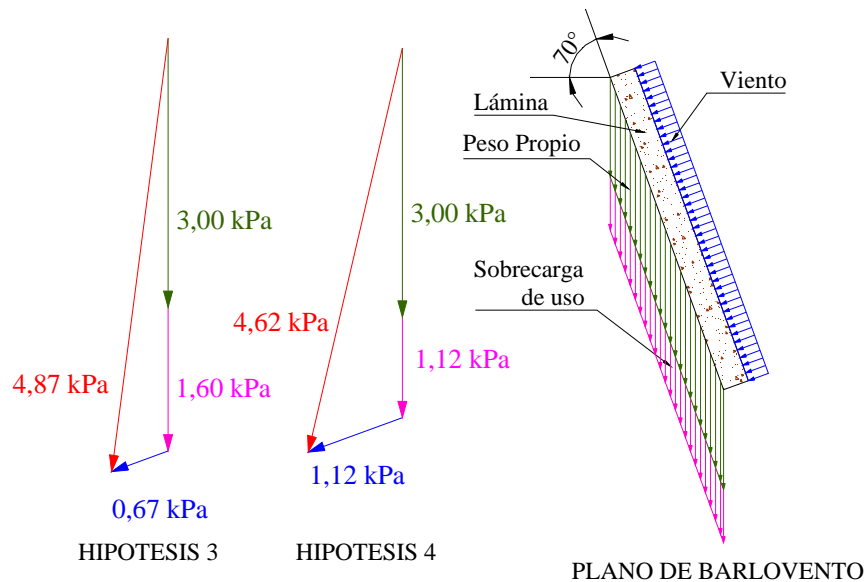
**Hipótesis 3.** Plano de barlovento, acción determinante la sobrecarga (Figura 4.14).

El valor representativo de las acciones variables concomitantes viene afectado por el coeficiente  $\psi_{0,i}$ , que para el viento tiene un valor de 0,6

$$\mathbf{R} = 1,5\mathbf{G} + 1,6\mathbf{U} + 1,6 \cdot 0,6\mathbf{V} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{R} = 1,5 \cdot \vec{2},0 + 1,6 \cdot \vec{1},0 + 1,6 \cdot 0,6 \cdot \vec{0},7 \quad (4.43)$$

La resultante de estas acciones vale 4,87 kPa.



**Figura 4.14** Combinación de acciones en el plano de barlovento

**Hipótesis 4.** Plano de barlovento, acción determinante el viento (Figura 4.14).

Ahora el valor representativo de las acciones variables concomitantes viene afectado por el coeficiente  $\psi_{0,i}$ , que para la sobrecarga de uso tiene un valor de 0,7

$$\mathbf{R} = 1,5\mathbf{G} + 1,6\mathbf{V} + 1,6 \cdot 0,7\mathbf{U} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{R} = 1,5 \cdot \bar{2},0 + 1,6 \cdot \bar{0},7 + 1,6 \cdot 0,7 \cdot \bar{1},0 \quad (4.45)$$

La resultante obtenida vale 4,62 kPa.

De las hipótesis anteriores, la más desfavorable es la hipótesis 3 en el plano de barlovento, en la que la acción resultante tiene un valor de 4,87 kPa y se desvía 7,42° respecto a la vertical. Esto supone un incremento de la componente vertical con respecto a la hipótesis 2 en el plano de sotavento de 0,27 kPa, lo que significa sólo un 5,87%. Teniendo en cuenta que la acción del viento se ha determinado mediante una simplificación conservadora y que su influencia respecto al resto de acciones es escasa, se ha optado por despreciar su efecto, analizando la estructura sometida a las acciones mayoradas producidas por el peso propio y la sobrecarga de uso (hipótesis 2).

Esta reducida influencia que ejerce la acción de viento está en consonancia con los resultados obtenidos por Imam (1998), que concluye el predominio de la acción gravitatoria sobre la de viento, no afectando esta última a la forma final obtenida en el proceso de optimización, tan sólo al valor de las tensiones calculadas, lo que puede implicar, llegado el caso, un mayor requerimiento en la resistencia del material.

### 4.3 ANÁLISIS DEL MODELO INICIAL

La estructura laminar está compuesta por la intersección de tres paraboloides hiperbólicos equiláteros cuyos parámetros se resumen a continuación:

- $K$  constante de la superficie definida en la Ec. (4.1);
- $\omega$  ángulo formado por los planos directores según las Figuras 4.1 y 4.2. Adopta un valor de 90° al ser diseñados los hypar inicialmente equiláteros;
- $C$  distancia del plano de cimentación al punto de intersección de los tres hypar, es decir, la altura de la estructura en su punto central;
- $\beta$  ángulo formado por el plano de cimentación y el plano inclinado que determina el borde curvo libre del hypar (Figura 4.4);
- $\delta$  ángulo que forma con el eje  $x$  el inicio del apoyo de un lóbulo (Figura 4.3);
- $e_1$  espesor de la lámina;
- $e_2$  espesor del nervio que circunda el orificio central (Figura 4.8); y
- $e_3$  espesor del nervio principal (Figuras 4.7 y 4.9).

La asignación de los valores definidos por Félix Candela en su diseño se recoge en la tabla 4.4.

Los espesores se expresan en centímetros para una mayor facilidad en el manejo e interpretación de resultados.

**Tabla 4.4** Parámetros del modelo inicial

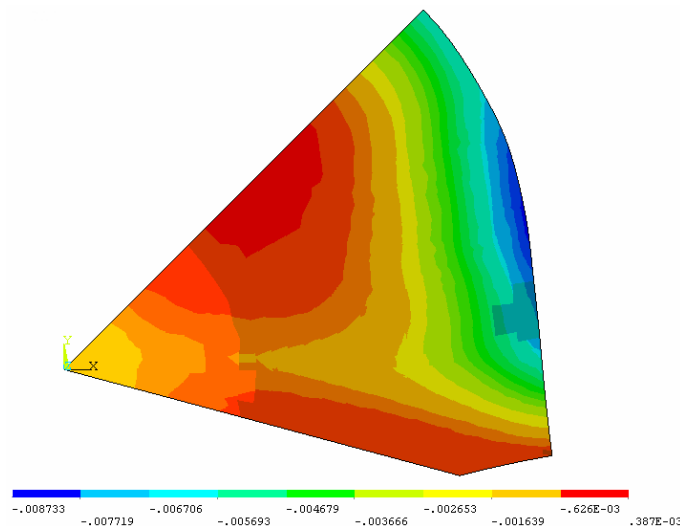
$K$ (m <sup>-1</sup> )	$\omega$ (°)	$C$ (m)	$\beta$ (°)	$\delta$ (°)	$e_1$ (cm)	$e_2$ (cm)	$e_3$ (cm)
0,14	90	6,50	75	10	6	8	35

A partir de estos valores se pueden obtener otros dos parámetros geométricos del modelo que se emplean en posteriores comparaciones (tabla 4.5), como son la altura del borde libre de uno de los paraboloides y el radio o distancia en planta desde el centro de la estructura hasta un apoyo.

**Tabla 4.5** Altura y radio del modelo inicial

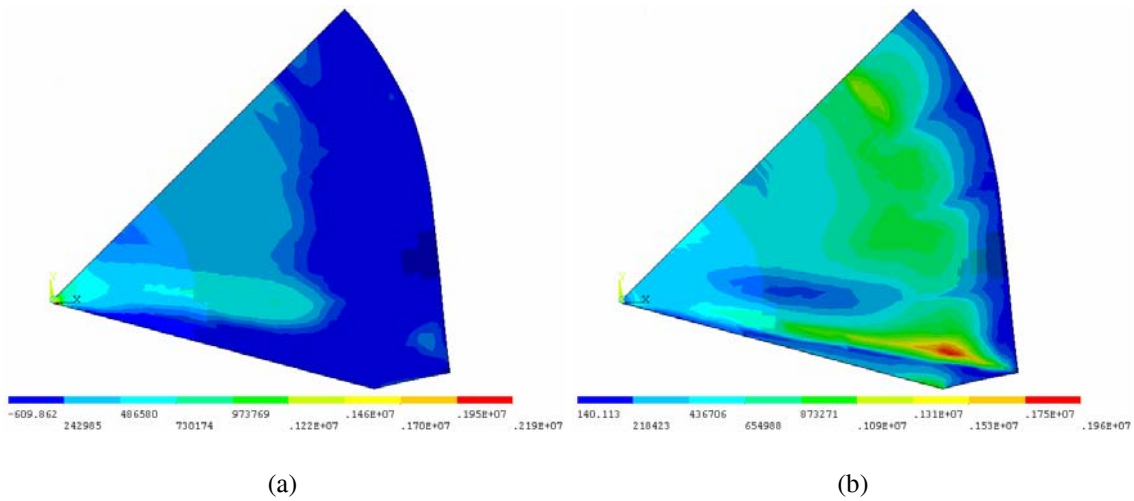
Altura (m)	Radio (m)
24,39	13,63

En la Figura 4.15 se presenta la distribución de los desplazamientos en la dirección del eje  $z$ . El desplazamiento máximo se produce en el borde libre y adopta un valor de 0,0087 m. La sección de la lámina contenida en el plano que divide al lóbulo en dos partes iguales se desplaza un máximo de  $3,8 \cdot 10^{-4}$  m, lo que supone una relación aproximada de  $L/59000$ , siendo  $L$  la luz o longitud desde el centro de la estructura hasta la clave del borde libre.



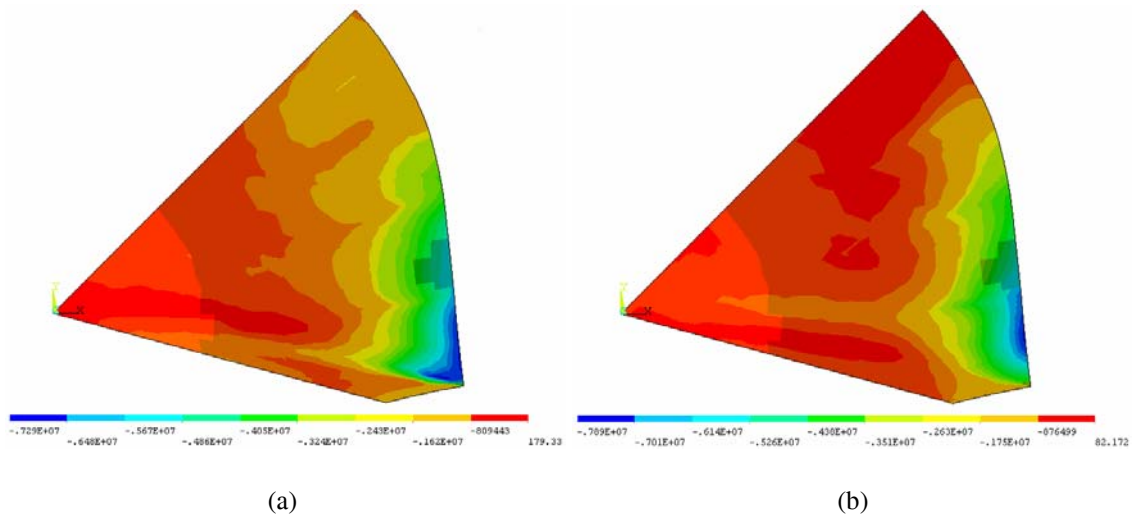
**Figura 4.15** Desplazamientos  $u_z$  [m] del modelo inicial. Planta

En la Figura 4.16 se muestra el mapa de tensiones principales  $\sigma_1$  en las dos caras de la lámina. La máxima tensión de tracción se produce en la cara inferior, en un punto localizado en el nervio del orificio, de valor 2,19 MPa, superior a la resistencia de cálculo a tracción del hormigón de 1,35 MPa, determinada en la expresión (4.26). Esta situación provocaría la aparición de fisuras con su correspondiente redistribución local de tensiones. En la cara superior, el máximo valor de  $\sigma_1$  se produce en el interior de la lámina, en la zona cercana al nervio principal y al apoyo. Se trata de un área pequeña y en la que se alcanza un valor máximo de 1,96 MPa, también superior al valor 1,35 MPa de la resistencia a tracción.



**Figura 4.16** Tensiones principales  $\sigma_1$  [Pa] del modelo inicial. (a) Cara inferior. (b) Cara superior

En la Figura 4.17 se han representado los mapas de tensiones principales  $\sigma_3$ . Existe una distribución similar en ambas caras, trabajando la lámina predominantemente en un estado de tensiones de membrana a compresión. El valor máximo es 7,89 MPa, y se produce en la cara superior de la lámina junto al borde curvo libre y cerca del apoyo. El valor máximo de estas tensiones es aproximadamente cuatro veces superior al de las de tracción, aspecto importante cuando se trabaja con un material birresistente en el que la resistencia a tracción supone aproximadamente una décima parte de la resistencia a compresión.



**Figura 4.17** Tensiones principales  $\sigma_3$  [Pa] del modelo inicial. (a) Cara inferior. (b) Cara superior

Los mapas de tensiones principales  $\sigma_2$  no se muestran pues su valor se mantiene siempre entre las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$ , no aportando información relevante.

En la tabla 4.6 se indican los nodos en los que se producen las tensiones máximas



y sus coordenadas geométricas. El signo positivo indica tracción y el negativo compresión.

**Tabla 4.6** Localización y valor de las tensiones principales máximas (modelo inicial)

Cara	Nodo	Coordenadas (m)			Tensiones (MPa)	
		$x$	$y$	$z$	$\sigma_1$	$\sigma_3$
Inferior	1643	0,25	-0,04	-0,001	2,19	-0,10
	2111	15,43	-2,59	-5,630	0,00	-7,29
Superior	2099	13,47	-2,12	-4,01	1,96	-1,68
	718	16,05	-1,47	-3,30	0,00	-7,89

## 4.4 PROCESOS DE OPTIMIZACIÓN

### 4.4.1 Función objetivo, variables de diseño y restricciones

En adelante se expresan los valores de los espesores en centímetros y el de los desplazamientos en milímetros, para una mayor facilidad en el manejo e interpretación de resultados.

Las funciones objetivo utilizadas son:

- La suma de la energía de deformación de los elementos del modelo;
- el peso de la estructura, y
- la mayor tensión principal de tracción de los nodos del modelo.

Para cada una se han realizado dos procesos de optimización, según el valor mínimo que puede adoptar el espesor de la lámina, 6 u 8 cm.

Las variables de diseño son:

- $K$  Se parte del valor inicial  $0,14 \text{ m}^{-1}$ , con un límite inferior de  $0,13 \text{ m}^{-1}$  y un límite superior de  $0,17 \text{ m}^{-1}$ .
- $\omega$  El valor inicial es  $90^\circ$  (paraboloides equiláteros), con un mínimo de  $84^\circ$  y un máximo de  $91^\circ$ .
- $\beta$  El valor inicial es  $75^\circ$  y se ha establecido un intervalo de variación entre  $74^\circ$  y  $75^\circ$ , pues el diseño es muy sensible a esta variable. Con este intervalo se consigue que la altura de la estructura esté en torno a 20 m.
- $e_1$  El límite inferior viene impuesto por condiciones constructivas o de normativa. Por ejemplo, la instrucción EHE permite láminas de doble curvatura de 5 cm de espesor. Se ha empleado dos valores mínimos para el espesor según el proceso de optimización, 6 y 8 cm. El valor 6 cm fue el utilizado por Félix Candela en su diseño.
- $e_2$  Se han establecido los mismos valores mínimos que para  $e_1$ .
- $e_3$  Se adopta igualmente un mínimo de 6 u 8 cm, y un máximo de 40 cm en cualquier caso.

A estas variables de diseño se les ha asignado una tolerancia de una diezmilésima de su valor en cada iteración.

Se han restringido las tensiones máximas de tracción ( $\sigma_1$ ) y compresión ( $\sigma_3$ ) en función de la resistencia del material

$$\sigma_1 \leq f_{ct,d} = 1,35 \text{ MPa} \quad (4.46)$$

$$\sigma_3 \leq 0,85 f_{cd} = 17,00 \text{ MPa} \quad (4.47)$$

También se ha restringido la altura del hyper, por la tendencia que muestra a disminuir en el proceso de optimización, y el radio o distancia del eje z al apoyo

$$19,0 \leq \text{Altura} \leq 25,0 \text{ m} \quad (4.48)$$

$$11,5 \leq \text{Radio} \leq 14,0 \text{ m} \quad (4.49)$$

#### 4.4.2 Proceso 1. Función objetivo energía de deformación (ED) con espesor mínimo 6 cm

En la tabla 4.7 se muestran los valores que presenta la función objetivo en los diseños inicial y final. Con la tolerancia escogida (una milésima de su valor en cada instante), el proceso ha convergido tras 45 iteraciones. La energía de deformación en el modelo optimizado ha resultado el 33,79% del valor obtenido en el modelo inicial.

**Tabla 4.7** Función objetivo ED con  $e_{min} = 6$  cm en los diseños inicial y final

Diseño	ED (mN)
Inicial	881,77
Óptimo	297,94

En la tabla 4.8 aparecen los valores que adoptan las variables de diseño. El espesor de la lámina aumenta mínimamente hasta los 6,12 cm mientras que el espesor del nervio del orificio desciende al valor mínimo de 6 cm, por lo que deja de ser tal nervio para fundirse con el resto de la lámina. También aumenta significativamente la constante de la superficie, pero el ángulo  $\omega$  disminuye, por lo que la altura se mantiene dentro de los límites admisibles.

**Tabla 4.8** Variables de diseño (F.Obj. ED con  $e_{min} = 6$  cm)

Condición	$e_1$ (cm)	$e_2$ (cm)	$e_3$ (cm)	$K$ (m <sup>-1</sup> )	$\omega$ (°)	$\beta$ (°)
Mínimo	6,00	6,00	6,00	0,130	84,000	74
D. Inicial	6,00	8,00	35,00	0,140	90,000	75
D. Óptimo	6,12	6,00	36,21	0,158	85,424	75
Máximo	40,00	40,00	40,00	0,170	91,000	75

En la tabla 4.9 se muestra el cumplimiento de las restricciones de diseño. La altura

y el radio disminuyen hacia los valores mínimos. La tensión de compresión máxima disminuye un 37,14%, adoptando un valor final de 4,96 MPa, lo que supone menos de la tercera parte (el 29,18%) de la resistencia a compresión del hormigón. En algunas zonas del diseño inicial podría aparecer fisuración al superar la tensión de tracción el límite de la resistencia, sin embargo, en el diseño óptimo, este valor de la tensión es inferior, situándose en 1,33 MPa, lo que ha supuesto una disminución del 39,27%.

**Tabla 4.9** Cumplimiento de las restricciones (F.Obj.  $ED$  con  $e_{min} = 6$  cm)

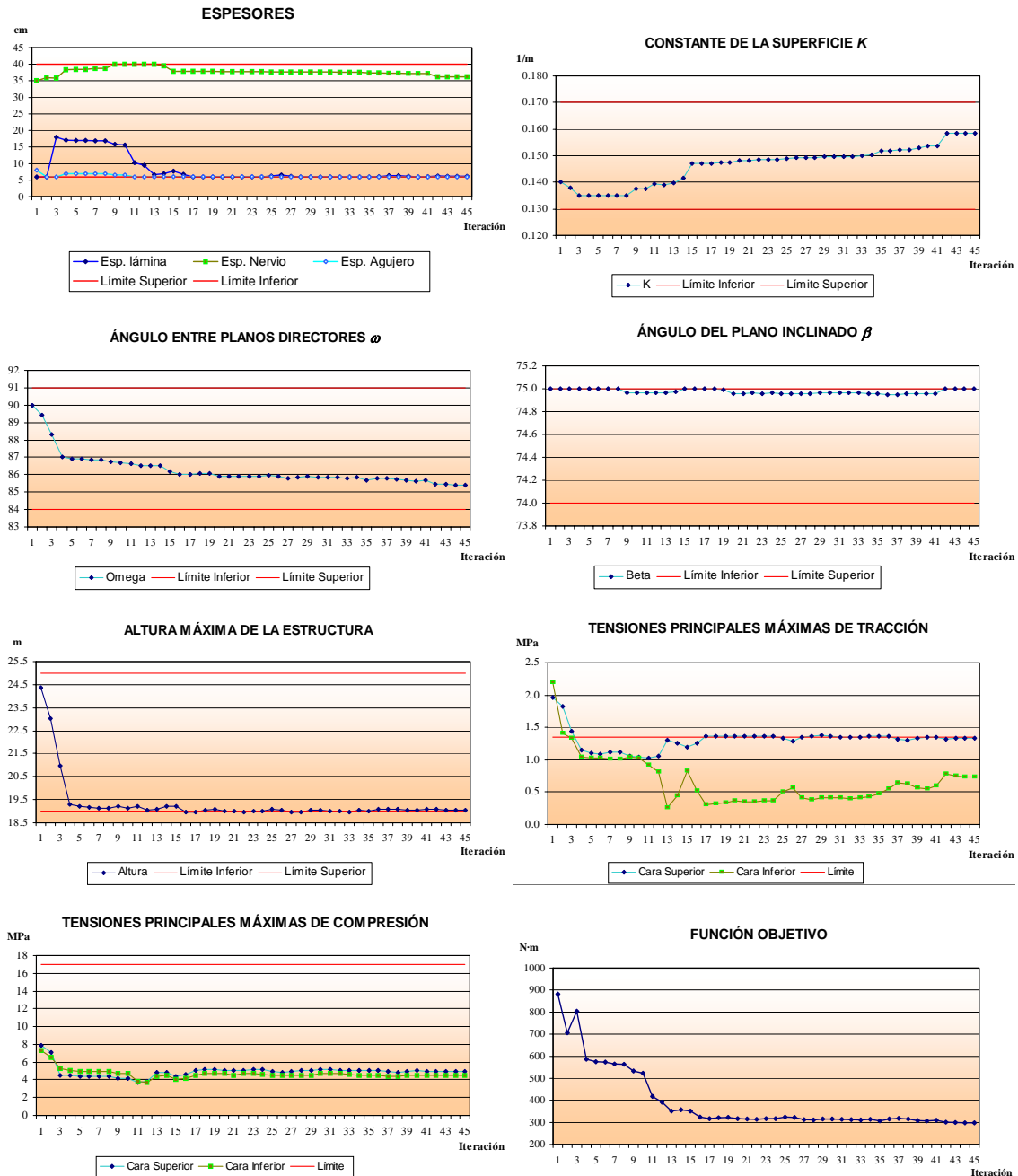
Condición	Altura (m)	Radio (m)	Compresión (MPa)	Tracción (MPa)
Mínimo	19,00	11,50	–	–
D. Inicial	24,39	13,63	7,89	2,19
D. Óptimo	19,04	11,87	4,96	1,33
Máximo	25,00	14,00	17,00	1,35

En la Figura 4.18 se presentan las gráficas de evolución de los parámetros involucrados en el proceso de optimización. Tras varias iteraciones iniciales en las que aumenta el espesor de la lámina y del nervio principal, cambia la tendencia para ir disminuyendo después hasta alcanzar la convergencia. El ángulo  $\omega$  desciende continuamente hasta alcanzar  $85,42^\circ$  en el óptimo, mientras que el ángulo  $\beta$  no varía prácticamente durante el proceso. La altura tiende rápidamente al valor mínimo, descenso que se debe a la disminución de  $\omega$ . Lo mismo le sucedería a la altura si no fuera por el aumento de la constante  $K$  de la superficie, manteniéndose de este modo en torno al límite inferior de 19 m. Las tracciones disminuyen considerablemente al aumentar el espesor de la lámina (iteraciones 3 a 13), sin embargo las compresiones se estabilizan rápidamente alrededor de los 5 MPa. Por último, la energía de deformación disminuye rápidamente en las primeras iteraciones, estabilizándose a partir de la 16, por lo que se plantea un coste computacional añadido hasta la convergencia en la iteración 45 debido a la tolerancia escogida.

Los mapas de desplazamientos y tensiones aparecen en las Figuras 4.19 a 4.21. En la Figura 4.19a se ha representado el diseño inicial en color azul claro y el diseño óptimo en color violeta. Al ser superior el valor de la constante de la superficie  $K$  en el diseño óptimo, las parábolas que definen la geometría son más agudas y, en consecuencia, sobrepasan a las parábolas del diseño inicial. El desplazamiento máximo desciende algo más de la mitad (el 55,17%), desde el valor inicial de 8,7 mm hasta 3,9 mm (Figura 4.19b).

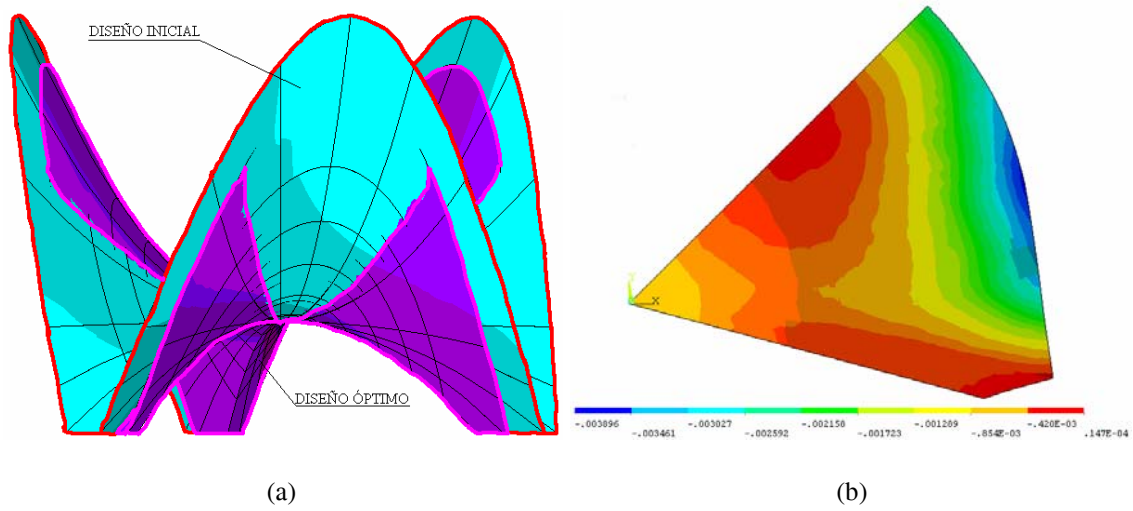
En el mapa de tensiones principales  $\sigma_1$  (Figura 4.20), existe un punto de la cara inferior en las proximidades del orificio central donde se alcanza el valor máximo de 0,74 MPa. A destacar el mapa de tensiones de la cara superior (Figura 4.20b), ya que indica las zonas más solicitadas a tracción. En este caso es la unión de la lámina con el

nervio principal, valiendo la tensión 1,33 MPa. En el supuesto de no poder alcanzar tracciones inferiores a la resistencia del material, este mapa sería de utilidad para diseñar los refuerzos de armadura.

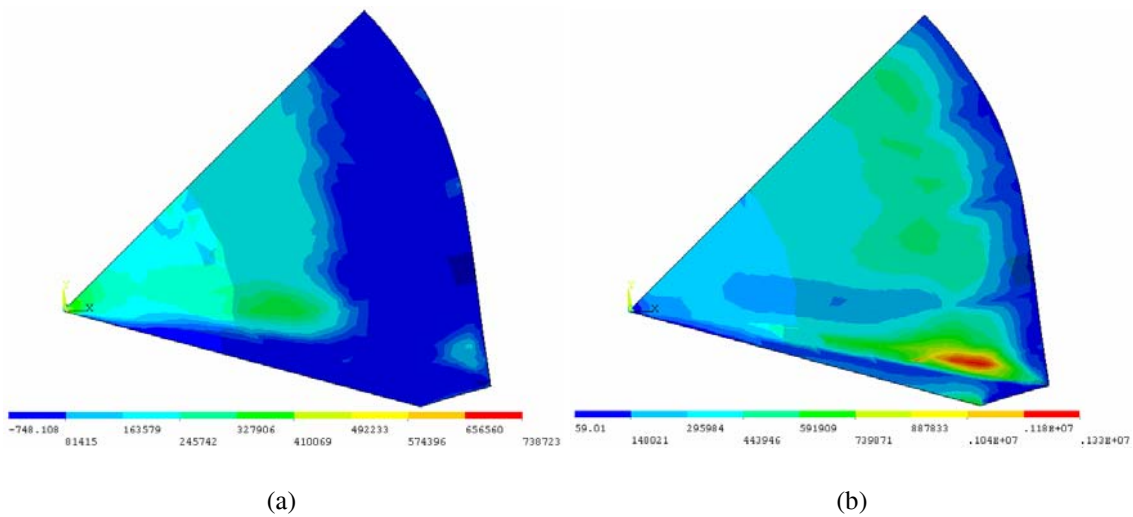


**Figura 4.18** Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj. ED con  $e_{min} = 6$  cm)

En la Figura 4.21 se reflejan los mapas de compresiones o tensiones principales  $\sigma_3$ . Al igual que en el modelo inicial, la lámina trabaja básicamente en un estado tensional de membrana de compresión. La tensión máxima se produce en la zona del borde libre cercana al apoyo, de valor 4,97 MPa.



**Figura 4.19** Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 6$  cm).  
 (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos  $u_z$  [m]



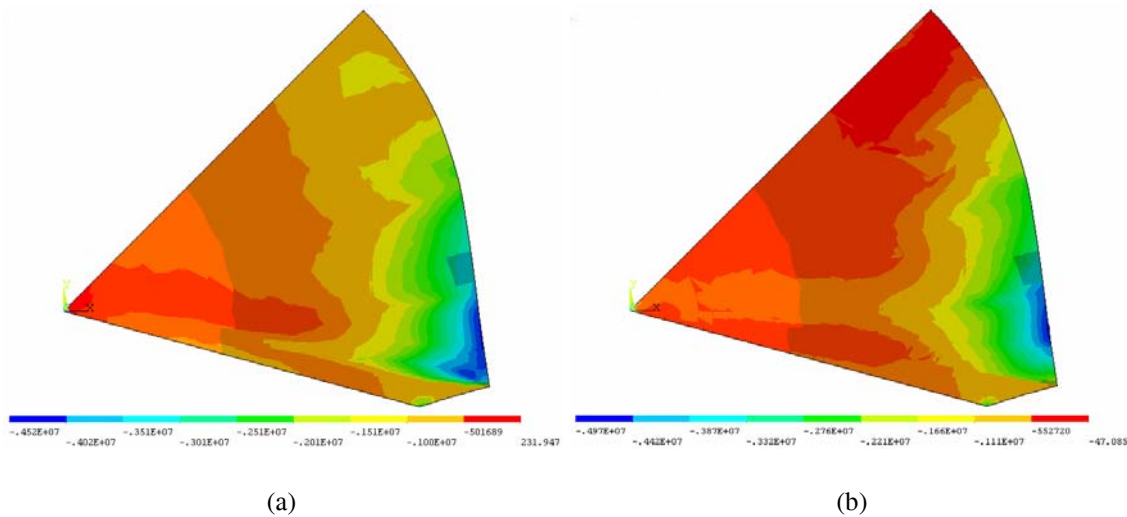
**Figura 4.20** Tensiones principales  $\sigma_1$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 6$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

Descartando las compresiones, que suelen estar muy por debajo del límite, es la tensión de tracción la que se convierte en uno de los aspectos críticos del diseño.

**Tabla 4.10** Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj. ED con  $e_{min} = 6$  cm)

Cara	Nodo	Coordenadas (m)			Tensiones (MPa)	
		$x$	$y$	$z$	$\sigma_1$	$\sigma_3$
Inferior	1143	15,43	-2,59	-5,63	0,74	0,00
	421	0,25	-0,04	-0,001	0,00	-4,51
Superior	1534	15,43	-2,59	-5,63	1,33	-1,68
	425	0,25	-0,04	-0,001	0,00	-4,95

En la tabla 4.10 se indican los nodos en los que se producen las máximas tensiones principales y el valor de éstas. El signo positivo indica tracción y el negativo compresión.



**Figura 4.21** Tensiones principales  $\sigma_3$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 6$  cm).  
(a) Cara inferior. (b) Cara superior

#### 4.4.3 Proceso 2. Función objetivo energía de deformación (ED) con espesor mínimo 8 cm

En el segundo proceso de optimización también se ha utilizado la suma de la energía de deformación de los elementos como función objetivo, pero en este caso el espesor mínimo de la lámina se ha restringido a 8 cm. La tolerancia escogida es de una milésima de su valor en cada instante. El proceso ha requerido 34 iteraciones para converger, siendo en la iteración 31 donde la función objetivo adopta un valor menor.

En la tabla 4.11 se muestran los valores que presenta la función objetivo en los diseños inicial y final. La energía de deformación en el modelo optimizado es el 32,01% del valor obtenido en el modelo inicial, y prácticamente igual al obtenido en el proceso anterior donde se restringió el espesor a 6 cm.

**Tabla 4.11** Función objetivo ED con  $e_{min} = 8$  cm en los diseños inicial y final

Diseño	ED (mN)
Inicial	939,25
Final	300,66

En la tabla 4.12 aparecen los valores que adoptan las variables de diseño. El espesor de la lámina se mantiene en el mínimo. El espesor del nervio principal aumenta de espesor hasta el valor máximo de 40 cm. También aumenta significativamente la constante de la superficie, pero el ángulo  $\omega$  disminuye, por lo que la altura se mantiene dentro de los límites admisibles.

**Tabla 4.12** Variables de diseño (F.Obj. ED con  $e_{min} = 8$  cm)

Condición	$e_1$ (cm)	$e_2$ (cm)	$e_3$ (cm)	$K$ (m <sup>-1</sup> )	$\omega$ (°)	$\beta$ (°)
Mínimo	8,00	8,00	8,00	0,130	84,00	74
D. Inicial	8,00	10,00	35,00	0,140	90,00	75
D. Óptimo	8,00	9,54	40,00	0,165	84,98°	75
Máximo	40,00	40,00	40,00	0,170	91,00	75

En la tabla 4.13 se muestra el cumplimiento de las restricciones de diseño. La altura y el radio disminuyen a los valores mínimos. La tensión máxima de compresión se reduce un 35,57%, de 6,55 MPa en el modelo inicial a 4,22 MPa en el óptimo. En algunas zonas del diseño inicial podría aparecer fisuración al superar la tensión de tracción el límite de la resistencia, sin embargo, en el diseño óptimo, este valor de la tensión es inferior, situándose en 1,29 MPa, lo que supone una disminución del 46,69%.

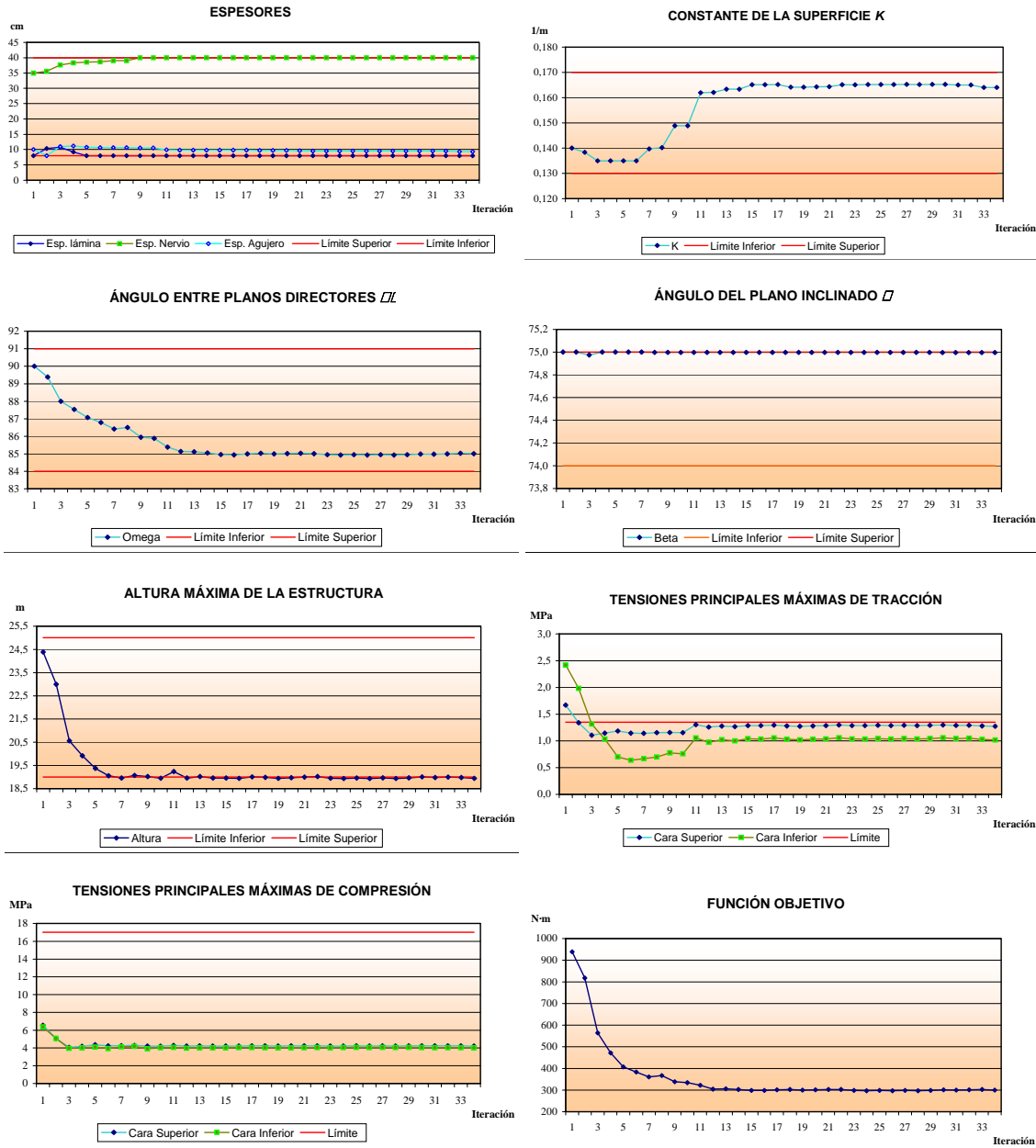
**Tabla 4.13** Cumplimiento de las restricciones (F.Obj. ED con  $e_{min} = 8$  cm)

Condición	Altura (m)	Radio (m)	Compresión (MPa)	Tracción (MPa)
Mínimo	19,00	11,50	–	–
D. Inicial	24,39	13,63	6,55	2,42
D. Óptimo	19,00	11,54	4,22	1,29
Máximo	25,00	14,00	17,00	1,35

En la Figura 4.22 se presentan las gráficas de evolución de los parámetros involucrados en el proceso de optimización. Tras las primeras iteraciones en las que el espesor de la lámina aumenta y el del nervio del orificio disminuye, se invierte la situación hasta conseguir una estabilización en torno a los valores óptimos. El espesor del nervio principal adquiere una tendencia ascendente alcanzando el valor máximo en la novena iteración. La constante de la superficie  $K$  desciende inicialmente para invertir la tendencia en la sexta iteración, estabilizándose a partir de la número 11. El ángulo  $\omega$  desciende continuamente, aunque sin alcanzar el valor mínimo. La altura se mantiene prácticamente invariable en los 19 m debido a los efectos compensados existentes al ascender  $K$  y descender  $\omega$ . Hay algunas iteraciones en las que el diseño no es válido por rebasar el límite inferior de 19 m, lo que apunta la inclinación del proceso en esa dirección.

Las máximas tensiones principales de tracción superan inicialmente a la resistencia del hormigón en ambas caras, pero a partir de la tercera iteración se mantienen siempre por debajo de este valor. Las tensiones máximas de compresión disminuyen notablemente en las tres primeras iteraciones y permanecen a partir de entonces en los 4 MPa. Por último, la energía de deformación muestra un acusado descenso en las primeras iteraciones, estabilizándose a partir de la número 12. Este

descenso es consecuencia, entre otros factores, de la disminución de la altura total de la estructura.

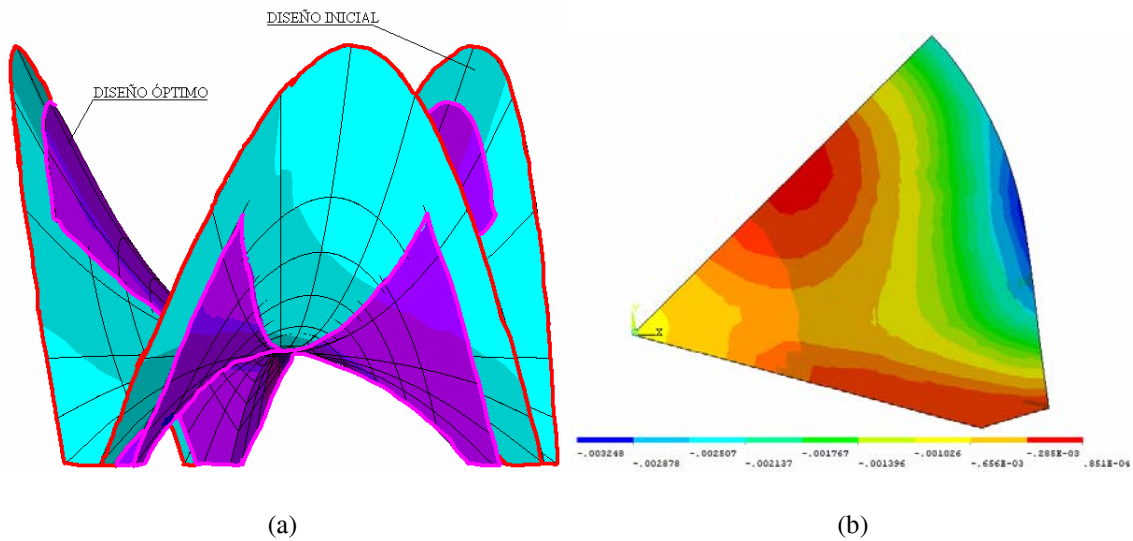


**Figura 4.22** Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj. *ED* con  $e_{min} = 8$  cm)

Los mapas de desplazamientos y tensiones se presentan en las Figuras 4.23 a 4.25. En la Figura 4.23a se ha representado el diseño inicial en color azul claro y el diseño óptimo en color violeta. Al ser superior el valor de la constante de la superficie *K* en el diseño óptimo, las parábolas que definen la geometría son más agudas y, en consecuencia, sobrepasan a las parábolas del diseño inicial. El máximo desplazamiento vertical se produce en el borde libre, en el punto medio entre el apoyo y el vértice

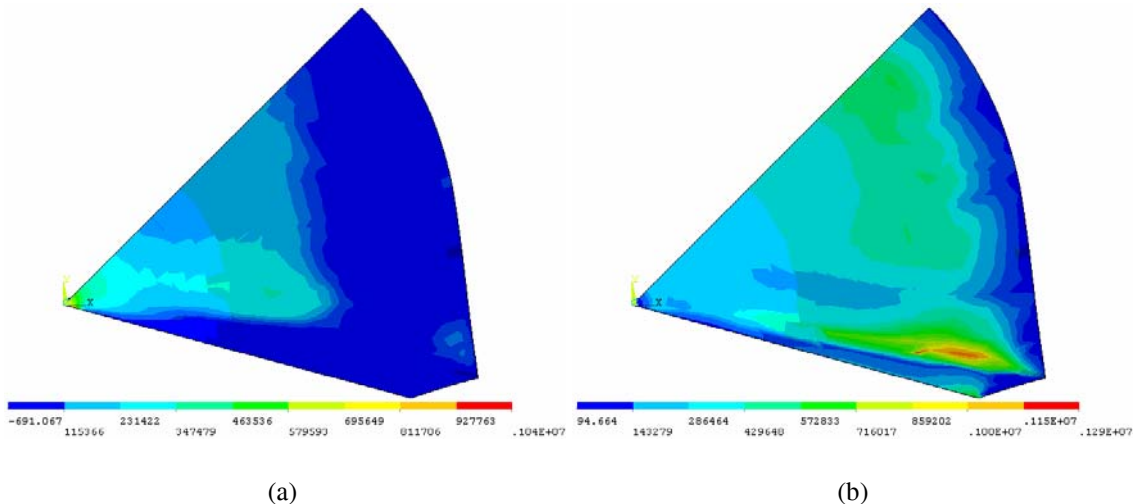


superior, adoptando un valor máximo de 3,25 mm (Figura 4.23b).



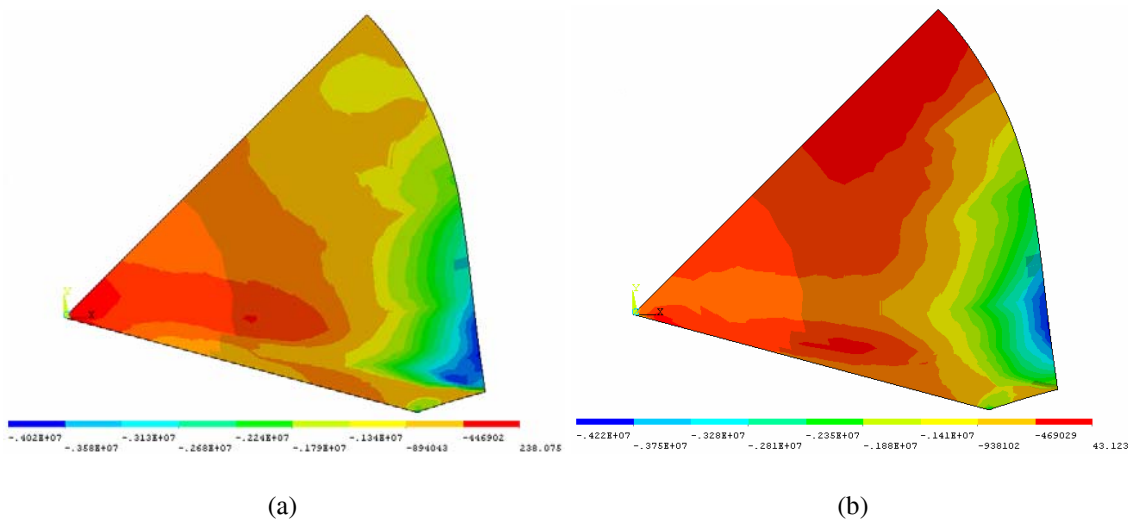
**Figura 4.23** Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 8$  cm).  
 (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos  $u_z$  [m]

En el mapa de tensiones principales  $\sigma_1$  (Figura 4.24), existe un punto de la cara inferior en las proximidades del orificio central donde se alcanza el valor máximo de 1,04 MPa. Prácticamente en la totalidad de la lámina el valor de la tensión  $\sigma_1$  es inferior a 0,5 MPa. En la cara superior, el valor máximo de 1,29 MPa se produce en la unión de la lámina con el nervio principal que une el apoyo con el centro del conjunto estructural.



**Figura 4.24** Tensiones principales  $\sigma_1$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 8$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

En la Figura 4.25 se reflejan los mapas de compresiones o tensiones principales  $\sigma_3$ . Al igual que en el modelo inicial, la lámina trabaja básicamente en un estado tensional de membrana de compresión. La tensión máxima se produce en la zona del borde libre cercana al apoyo, de valor 4,22 MPa.



**Figura 4.25** Tensiones principales  $\sigma_3$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 8$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

En la tabla 4.14 se indican los nodos con sus coordenadas en los que se producen las máximas tensiones principales, así como el valor de éstas.

**Tabla 4.14** Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj. ED con  $e_{min} = 8$  cm)

Cara	Nodo	Coordenadas (m)			Tensiones (MPa)	
		x	y	z	$\sigma_1$	$\sigma_3$
Inferior	1094	0,035	0,035	0,00	1,04	0,00
	466	13,16	-1,38	-4,30	0,00	-4,02
Superior	1284	9,16	-1,57	-2,97	1,28	-1,68
	470	13,10	-0,96	-3,35	0,00	-4,22

#### 4.4.4 Proceso 3. Función objetivo peso ( $W$ ) con espesor mínimo 6 cm

En el tercer proceso de optimización se ha empleado como función objetivo el peso de un sextante de la estructura. Se ha escogido una tolerancia de una milésima de su valor en cada instante, habiendo requerido el proceso 23 iteraciones para converger.

En la tabla 4.15 se muestran los valores de la función objetivo en los diseños inicial y final. La disminución del peso es importante, concretamente un 41,35%.

**Tabla 4.15** Función objetivo  $W$  con  $e_{min} = 6$  cm en los diseños inicial y final

Diseño	$W$ (kN)
Inicial	527,79
Final	309,54

En la tabla 4.16 aparecen los valores que adoptan las variables de diseño. Los tres espesores disminuyen, lo cual es lógico a la vista de la función objetivo escogida. La

constante de la superficie  $K$  se mantiene en el valor inicial y el ángulo  $\omega$  disminuye.

**Tabla 4.16** Variables de diseño (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 6$  cm)

Condición	$e_1$ (cm)	$e_2$ (cm)	$e_3$ (cm)	$K$ (m <sup>-1</sup> )	$\omega$ (°)	$\beta$ (°)
Mínimo	6,00	6,00	6,00	0,130	84,00	74
D. Inicial	9,00	9,00	35,00	0,150	88,00	75
D. Óptimo	6,00	7,19	26,43	0,150	85,87	75
Máximo	40,00	40,00	40,00	0,170	91,00	75

En la tabla 4.17 se muestra el cumplimiento de las restricciones de diseño. La altura desciende hasta el valor mínimo. La tensión máxima de compresión disminuye muy poco, sólo un 2% respecto al valor inicial, mientras que la tensión máxima de tracción lo hace sustancialmente en un 47,93%, pasando de un valor inadmisibles a otro admisible.

**Tabla 4.17** Cumplimiento de las restricciones (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 6$  cm)

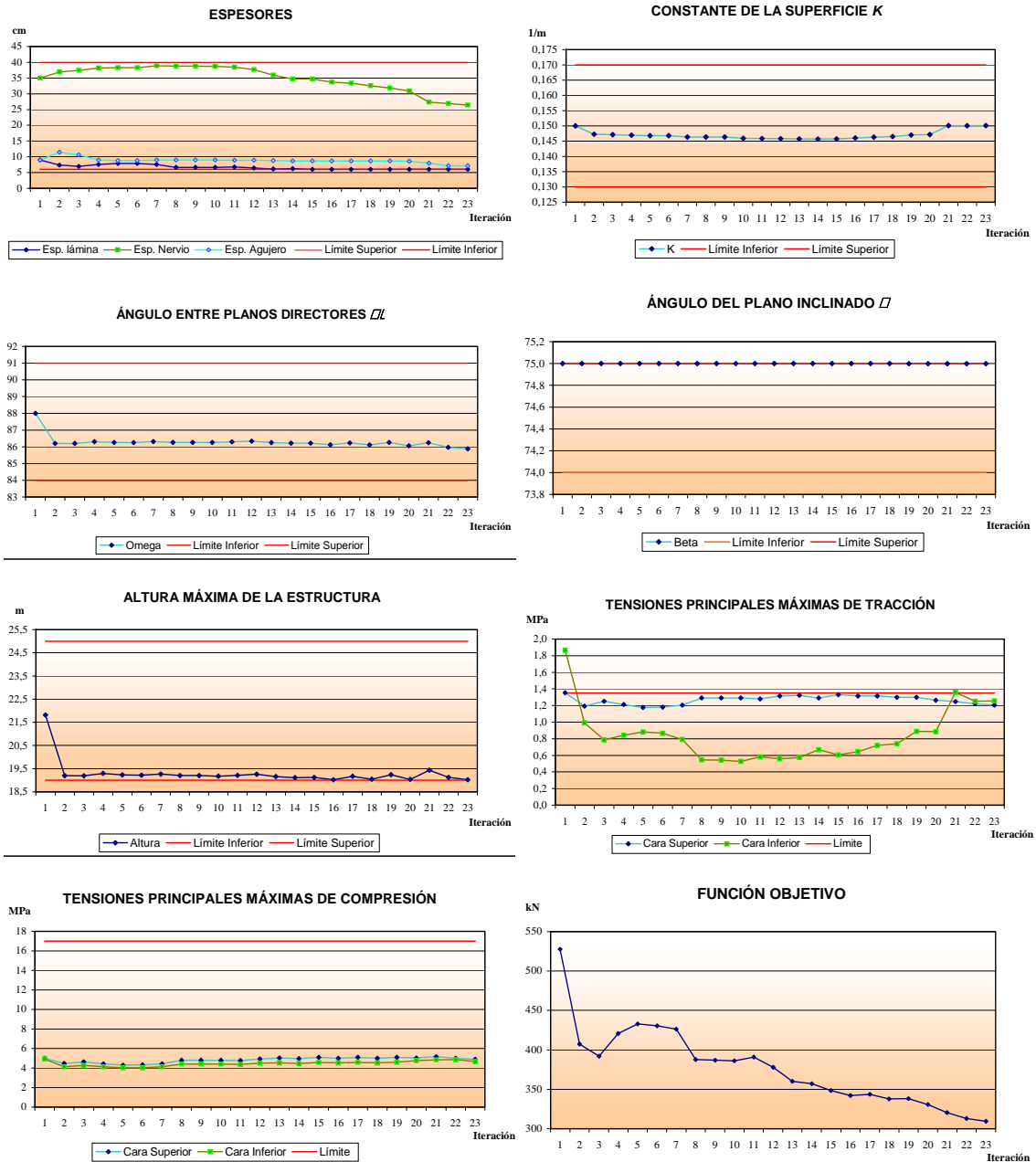
Condición	Altura (m)	Radio (m)	Compresión (MPa)	Tracción (MPa)
Mínimo	19,00	11,50	–	–
D. Inicial	21,82	12,72	4,99	2,42
D. Óptimo	19,02	12,27	4,89	1,26
Máximo	25,00	14,00	17,00	1,35

Se presenta en la Figura 4.26 las gráficas de evolución de los distintos parámetros involucrados en el proceso. El espesor de la lámina disminuye paulatinamente hasta alcanzar el mínimo de 6 cm. Igualmente lo hace el espesor del nervio del orificio. El espesor del nervio principal aumenta inicialmente, lo que es lógico para conferir mayor rigidez a la estructura que compense el descenso del espesor de la lámina, pero termina en las últimas iteraciones disminuyendo, lo que coincide con el aumento de  $K$  y la mayor agudización de las parábolas.

Aunque el valor inicial y final de  $K$  es el mismo, lo cuál puede hacer pensar que esta variable no cambia en el proceso, no es así pues tiende a disminuir al principio y cambia la tendencia para aumentar al final. El ángulo  $\omega$  desciende bruscamente en la segunda iteración para mantenerse con pequeñas variaciones en el resto del proceso. Como la altura depende, entre otros factores, del ángulo  $\omega$ , disminuye significativamente en la primera iteración para mantenerse en torno a 19 m en el resto del proceso.

La máxima tensión de tracción desciende en la primera iteración a valores admisibles, siguiendo esa tendencia descendente hasta alcanzar valores mínimos a mitad del proceso, para cambiar después la tendencia e ir incrementando su valor hasta el

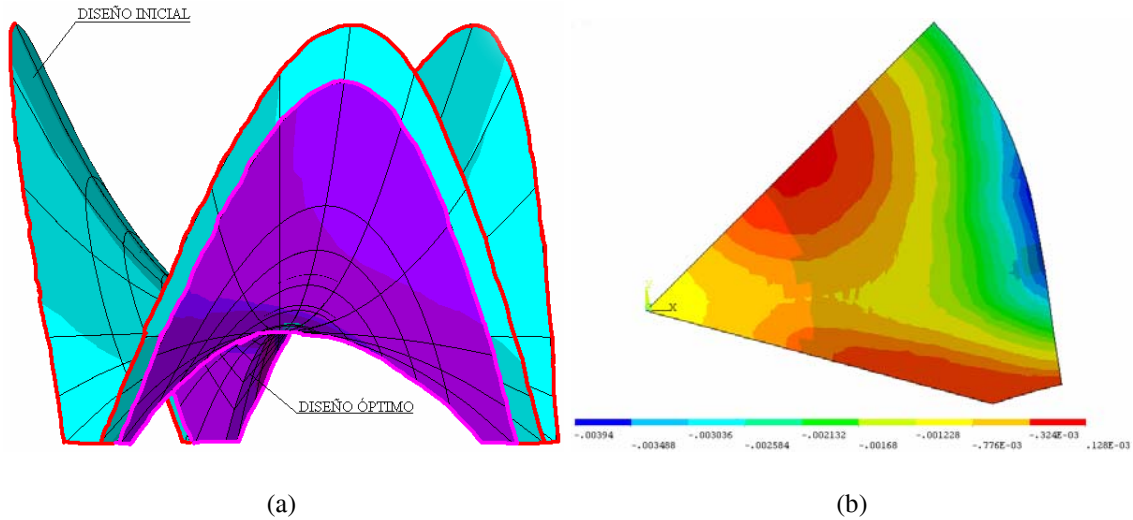
final, buscando la asíntota del límite superior. Las tensiones de compresión varían muy poco a lo largo del proceso. Por último, la función objetivo sufre un importante descenso de aproximadamente el 50% de su recorrido en la primera iteración, alcanzando el otro 50% en el resto de iteraciones hasta el final.



**Figura 4.26** Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 6$  cm)

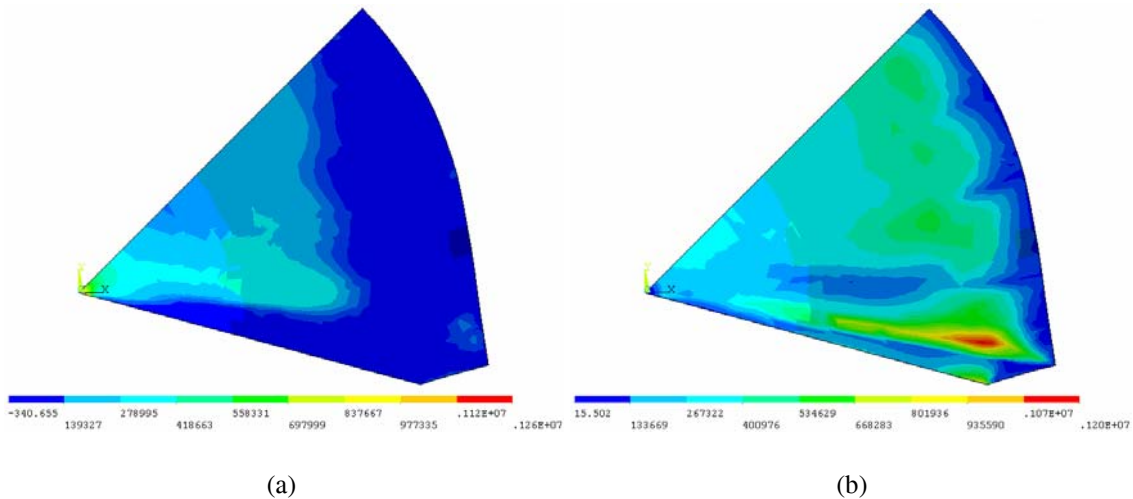
Los mapas de tensiones y desplazamientos se presentan en las Figuras 4.27 a 4.29. El máximo desplazamiento vertical se produce en el borde libre, en el punto medio entre el apoyo y el vértice superior, adoptando un valor máximo de 3,94 mm. El modelo óptimo, aunque está siempre por debajo del modelo inicial, es un modelo muy similar

en apariencia al modelo inicial, con curvaturas semejantes al no intersectarse ambos en ninguna zona (Figura 4.27a).



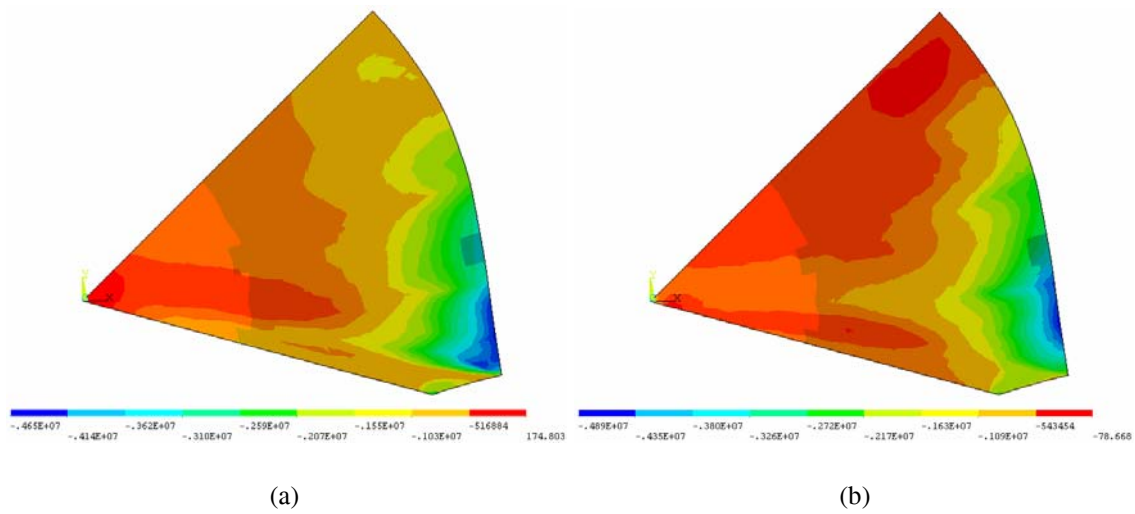
**Figura 4.27** Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 6$  cm).  
 (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos  $u_z$  [m]

En el mapa de tensiones principales  $\sigma_1$  (Figura 4.28), se presenta el valor máximo de 1,26 MPa en un punto de la cara inferior localizado en torno al orificio del centro. En la cara superior, el valor máximo de 1,20 MPa se produce en la unión de la lámina con el nervio principal que une el apoyo con el centro del conjunto estructural.



**Figura 4.28** Tensiones principales  $\sigma_1$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 6$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

En la Figura 4.29 se reflejan los mapas de compresiones o tensiones principales  $\sigma_3$ . En la cara inferior la tensión máxima se produce en la lámina, próximo al apoyo, adoptando un valor máximo de 4,65 MPa, mientras que en la zona superior el valor máximo es mayor, exactamente 4,89 MPa que se producen en la misma zona que se alcanzaba el valor máximo en la cara inferior.



**Figura 4.29** Tensiones principales  $\sigma_3$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 6$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

En la tabla 4.18 se indican los nodos en los que se producen las máximas tensiones principales y el valor de éstas.

**Tabla 4.18** Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 6$  cm)

Cara	Nodo	Coordenadas (m)			Tensiones (MPa)	
		$x$	$y$	$z$	$\sigma_1$	$\sigma_3$
Inferior	1200	0,035	0,035	0,00	1,26	0,00
	433	14,05	-1,48	-4,21	0,00	-4,65
Superior	1615	11,62	-1,57	-3,81	1,20	-1,68
	435	14,01	-1,25	-3,72	0,00	-4,89

**4.4.5 Proceso 4. Función objetivo peso ( $W$ ) con espesor mínimo 8 cm**

En este proceso de optimización también se ha utilizado el peso como función objetivo, pero ahora el espesor mínimo de la lámina se ha restringido a 8 cm. La tolerancia escogida es de una diezmilésima de su valor en cada instante. Esta optimización ha requerido de 29 iteraciones para converger, alcanzándose el mejor diseño en la número 19.

En la tabla 4.19 se muestran los valores que presenta la función objetivo en los diseños inicial y final. Lógicamente el descenso del peso en este proceso de optimización es menor que en el caso anterior, puesto que el espesor mínimo se ha restringido a 8 cm. No obstante, se ha conseguido reducir un 27,52%.

En la tabla 4.20 aparecen los valores que adoptan las variables de diseño y los límites superior e inferior. De nuevo los tres espesores disminuyen, al igual que el ángulo  $\omega$ , manteniéndose prácticamente en el valor inicial la constante de la superficie

$K$  y variando muy poco el ángulo  $\beta$ .

**Tabla 4.19** Función objetivo  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm en los diseños inicial y final

Diseño	$W$ (kN)
Inicial	595,12
Final	431,37

**Tabla 4.20** Variables de diseño (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm)

Condición	$e_1$ (cm)	$e_2$ (cm)	$e_3$ (cm)	$K$ ( $m^{-1}$ )	$\omega$ ( $^\circ$ )	$\beta$ ( $^\circ$ )
Mínimo	8,00	8,00	8,00	0,130	84,00	74
D. Inicial	8,00	10,00	38,00	0,140	90,00	75
D. Óptimo	8,00	8,10	33,31	0,141	86,45	75
Máximo	40,00	40,00	40,00	0,170	91,00	75

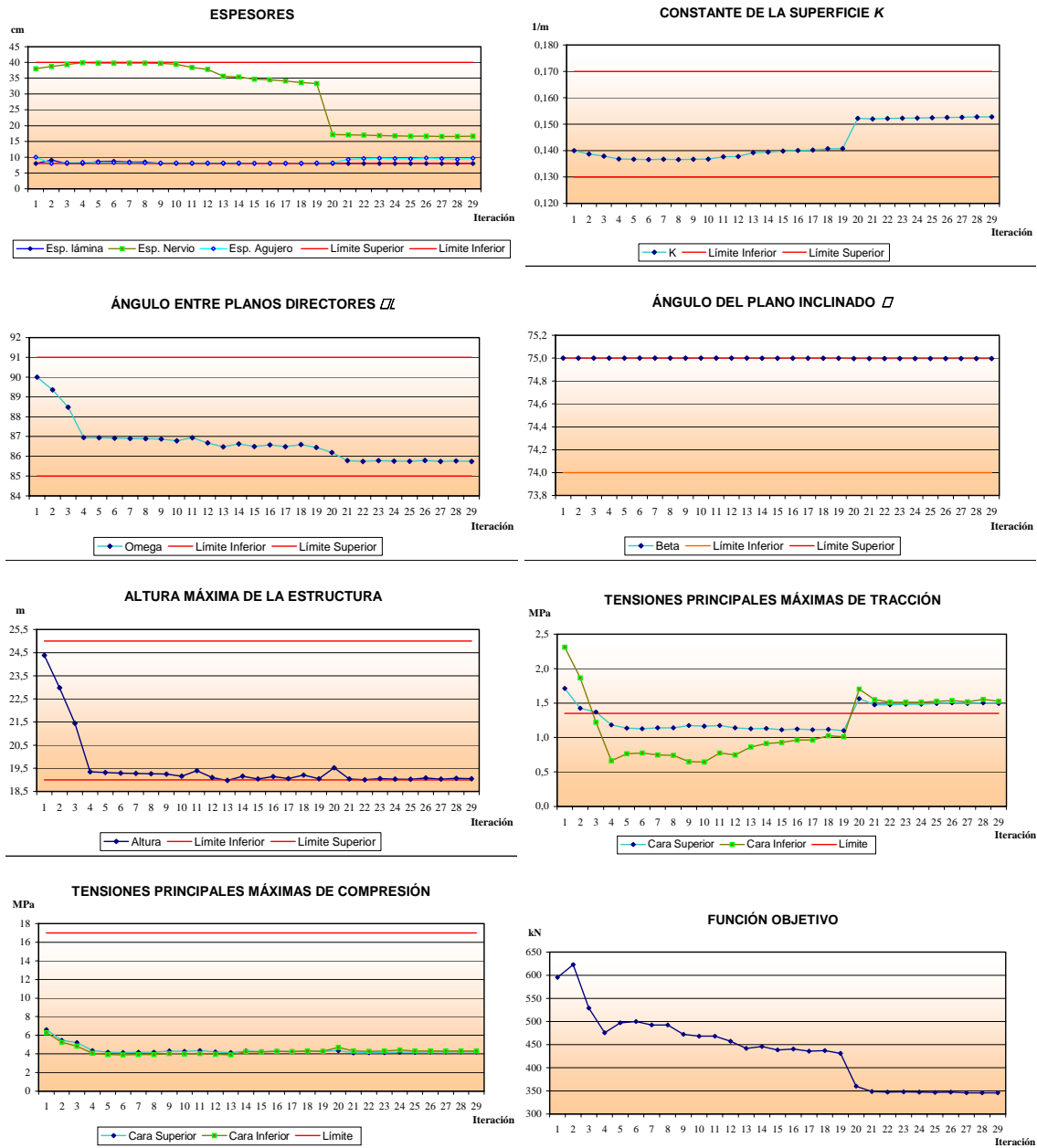
En la tabla 4.21 se muestra el cumplimiento de las restricciones de diseño. La altura desciende prácticamente hasta el valor mínimo. La tensión máxima de compresión disminuye más que en el proceso anterior, un 35,20% respecto al valor inicial. La tensión máxima de tracción lo hace en un 52,38%, pasando de un valor inadmisibles a otro admisible.

**Tabla 4.21** Cumplimiento de restricciones (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm)

Condición	Altura (m)	Radio (m)	Compresión (MPa)	Tracción (MPa)
Mínimo	19,00	11,50	–	–
D. Inicial	24,39	13,63	6,59	2,31
D. Óptimo	19,05	12,79	4,27	1,10
Máximo	25,00	14,00	17,00	1,35

Se muestra en la Figura 4.30 las gráficas de evolución de los parámetros involucrados en el proceso de optimización. Mientras que los espesores de la lámina y del nervio del orificio no sufren grandes variaciones, destaca el importante descenso del espesor del nervio principal en la iteración número 20, coincidiendo con un brusco aumento de  $K$ . Esta disminución provoca un importante aumento de la tensión máxima de tracción, hasta hacer que el diseño no sea válido pues se supera el límite de resistencia, por lo que a partir de esa iteración los valores obtenidos no son representativos. La constante de la superficie  $K$  disminuye inicialmente para recuperarse después y alcanzar un valor similar al inicial en la iteración 19 donde se alcanza el mejor diseño. El ángulo  $\omega$  muestra una tendencia descendente continua, mientras que  $\beta$  se queda estancado en el valor máximo como ha ocurrido en los procesos anteriores. La altura alcanza en las tres primeras iteraciones un valor cercano al mínimo, al igual

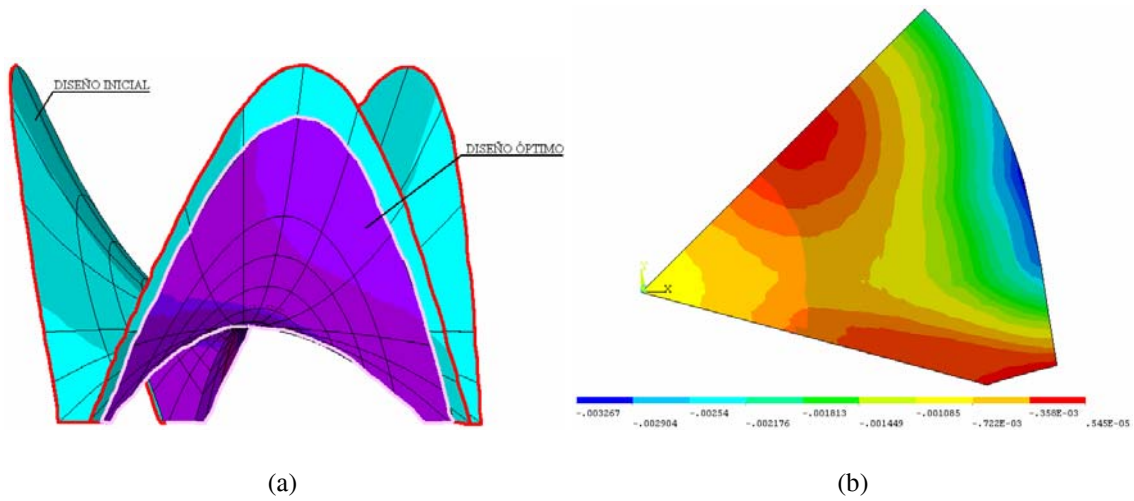
que sucede con la tensión máxima de compresión y con la función objetivo.



**Figura 4.30** Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm)

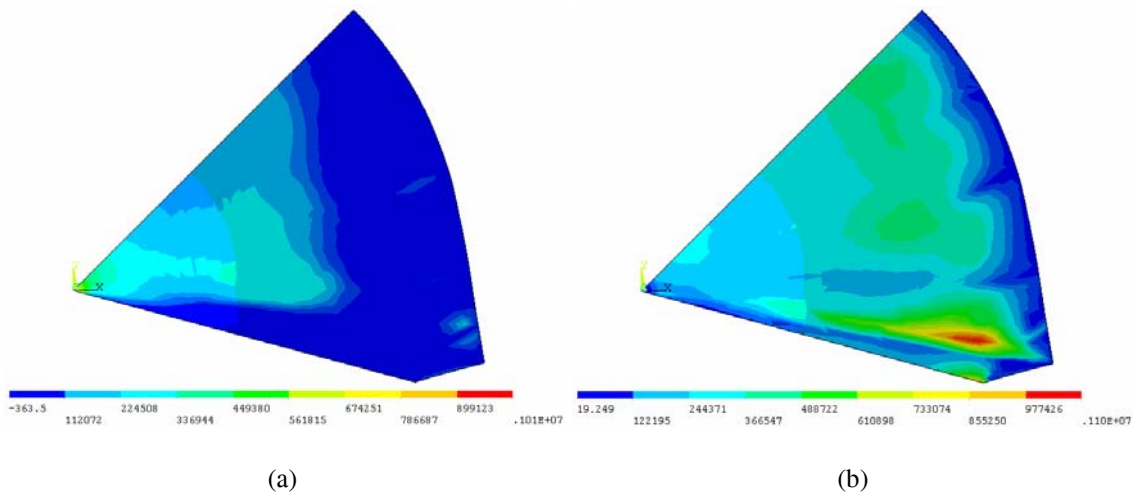
En las Figuras 4.31 a 4.33 se presentan los mapas de tensiones y desplazamientos obtenidos para el diseño óptimo. El desplazamiento máximo de la estructura se produce en el borde curvo libre y alcanza un valor de 3,26 mm. Al igual que en el proceso anterior, se observa que el modelo óptimo, aunque está siempre por debajo del modelo inicial, es un modelo muy similar en apariencia al modelo inicial, con curvaturas semejantes al no intersectarse ambos en ninguna zona (Figura 4.31a).





**Figura 4.31** Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm).  
 (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos  $u_z$  [m]

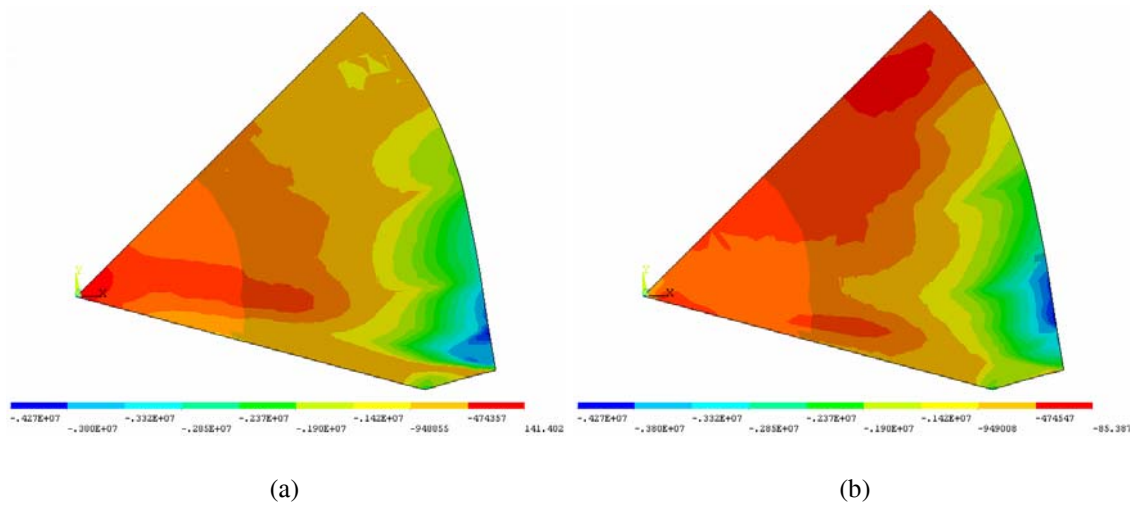
En el mapa de tensiones principales  $\sigma_1$  (Figura 4.32), la tensión máxima en la cara inferior de la lámina aparece, como en procesos anteriores, en una pequeña zona delimitada del nervio del orificio, siendo su valor 1,01 MPa. En la mayor parte de la lámina no se superan los 0,33 MPa. En la cara superior, de nuevo la máxima tensión se alcanza junto al nervio principal de valor 1,10 MPa.



**Figura 4.32** Tensiones principales  $\sigma_1$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

La Figura 4.33 refleja los mapas de tensiones principales  $\sigma_3$ . En ellos se observa un gran parecido entre ambas caras, circunstancia que muestra el estado tensional predominante de compresión. La tensión máxima de la cara inferior y superior coinciden, adoptando un valor 4,27 MPa.

En la tabla 4.22 aparecen los nodos en los que se alcanzan los valores máximos de las tensiones principales.



**Figura 4.33** Tensiones principales  $\sigma_3$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

**Tabla 4.22** Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm)

Cara	Nodo	Coordenadas (m)			Tensiones (MPa)	
		$x$	$y$	$z$	$\sigma_1$	$\sigma_3$
Inferior	1282	0,05	0,005	0,00	1,01	0,00
	539	14,67	-1,54	-4,15	0,00	-4,27
Superior	1712	12,13	-1,83	-3,78	1,10	-1,68
	541	14,63	-1,31	-3,65	0,00	-4,27

#### 4.4.6 Proceso 5. Función objetivo mayor tensión principal $\sigma_1$ ( $\sigma_t$ ) con espesor mínimo 6 cm

En este último proceso de optimización se ha empleado como función objetivo la tensión principal máxima de tracción. El espesor de las distintas partes que forman el conjunto estructural se ha limitado a 6 cm. La tolerancia escogida es de una milésima del valor de la función objetivo en cada instante. El proceso ha requerido 28 iteraciones para converger, siendo el diseño óptimo el obtenido en la iteración 27.

En la tabla 4.23 se muestran los valores que presenta la función objetivo, disminuyendo su valor un 56,61% hasta 1,05 MPa.

**Tabla 4.23** Función objetivo  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm en los diseños inicial y final

Diseño	$\sigma_t$ (MPa)
Inicial	2,42
Final	1,05

En la tabla 4.24 se representan los valores de las variables de diseño, tanto en el

modelo inicial como en el modelo óptimo, y los límites superior e inferior de las mismas. Lo que más destaca es el significativo aumento del espesor de la lámina  $e_1$  hasta casi 16 cm, sobrepasando al espesor  $e_2$  del nervio del orificio. Del resto de variables, sólo el ángulo  $\omega$  sufre una variación apreciable.

**Tabla 4.24** Variables de diseño (F.Obj.  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm)

Condición	$e_1$ (cm)	$e_2$ (cm)	$e_3$ (cm)	$K$ (m <sup>-1</sup> )	$\omega$ (°)	$\beta$ (°)
Mínimo	8,00	8,00	8,00	0,1300	84,00	74
D. Inicial	8,00	10,00	35,00	0,1400	90,00	75
D. Óptimo	15,94	8,09	38,46	0,1387	86,53	75
Máximo	40,00	40,00	40,00	0,1700	91,00	75

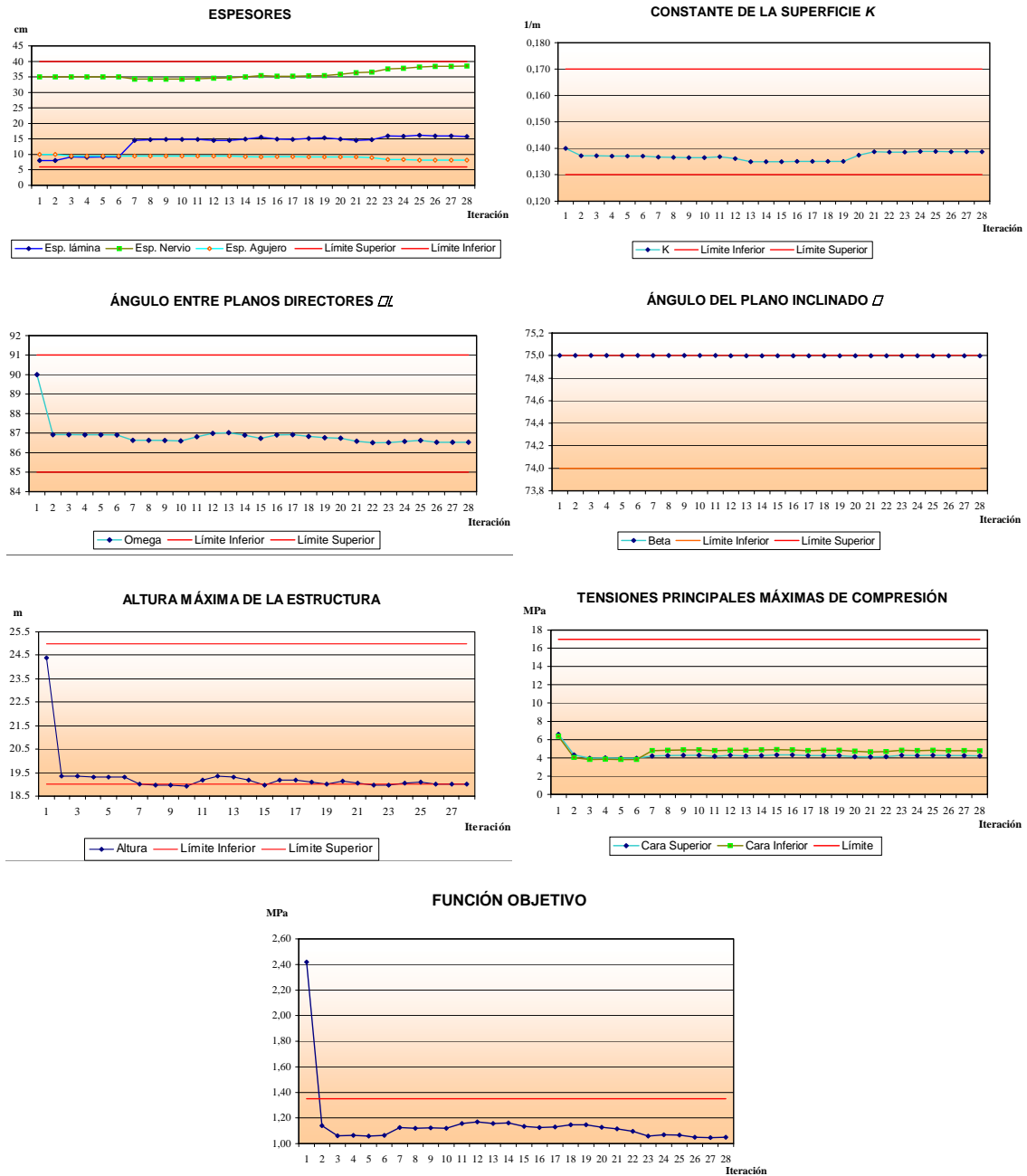
En la tabla 4.25 se ha recogido el cumplimiento de las restricciones de diseño, en la que se aprecia la disminución de la altura, como en procesos anteriores, al valor mínimo. La tensión de compresión máxima disminuye un 27,48%, pero la disminución más significativa, como no podía ser de otra manera, se produce en la tensión de tracción al ser ésta la función objetivo empleada.

**Tabla 4.25** Cumplimiento de restricciones (F.Obj.  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm)

Condición	Altura (m)	Radio (m)	Compresión (MPa)	Tracción (MPa)
Mínimo	19,00	11,50	–	–
D. Inicial	24,39	13,63	6,55	2,42
D. Óptimo	19,01	12,91	4,75	1,05
Máximo	25,00	14,00	17,00	1,35

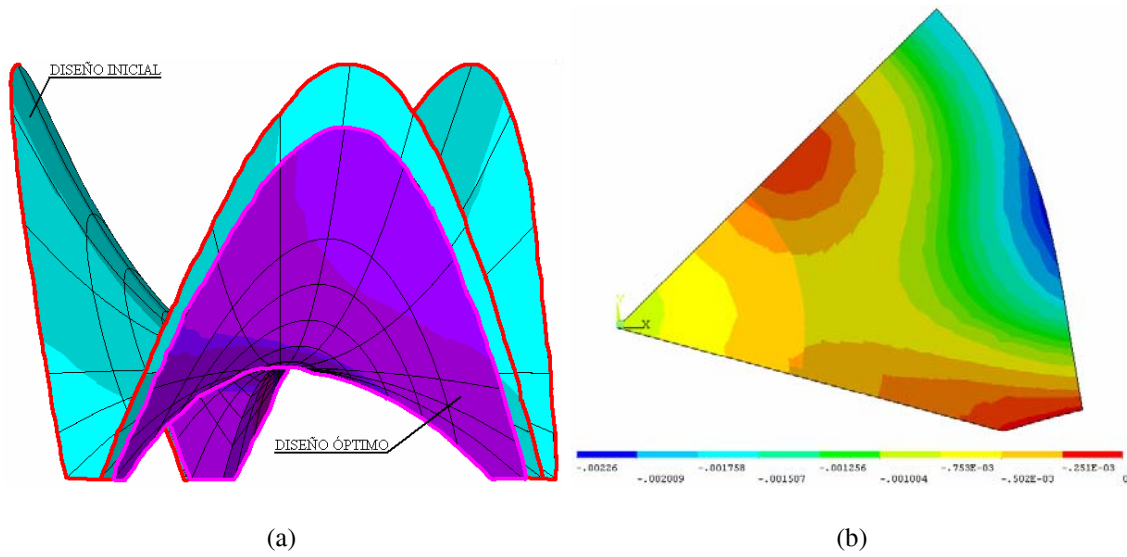
En la Figura 4.34 se muestra la evolución de los parámetros involucrados en el proceso. A diferencia de los procesos anteriores, el espesor de la lámina aumenta de manera importante hasta alcanzar el valor de 15,94 cm en el óptimo. Del resto de parámetros, resaltar el descenso brusco del ángulo  $\omega$  en la primera iteración y, por consiguiente, de la altura máxima de la estructura, manteniéndose en los 19 m e incluso no siendo válidos algunos diseños intermedios por rebasar el límite inferior.

Por último, la función objetivo acusa un descenso importante en la primera iteración desde 2,42 MPa hasta 1,14 MPa, lo que supone el 93,43% de todo su recorrido hasta el óptimo, que se alcanza en la iteración 27 con un valor de 1,05 MPa. Además, en la segunda iteración adopta ya un valor de 1,06 MPa, es decir, el 99,27% de su recorrido, con un espesor en la lámina de 9,18 cm, mientras que en el óptimo el espesor es de 15,94 cm. Esto indica el alto coste que supone reducir la tensión de tracción a partir de un cierto límite, es decir, forzar al diseño a que tienda hacia el completo estado tensional de membrana de compresión.



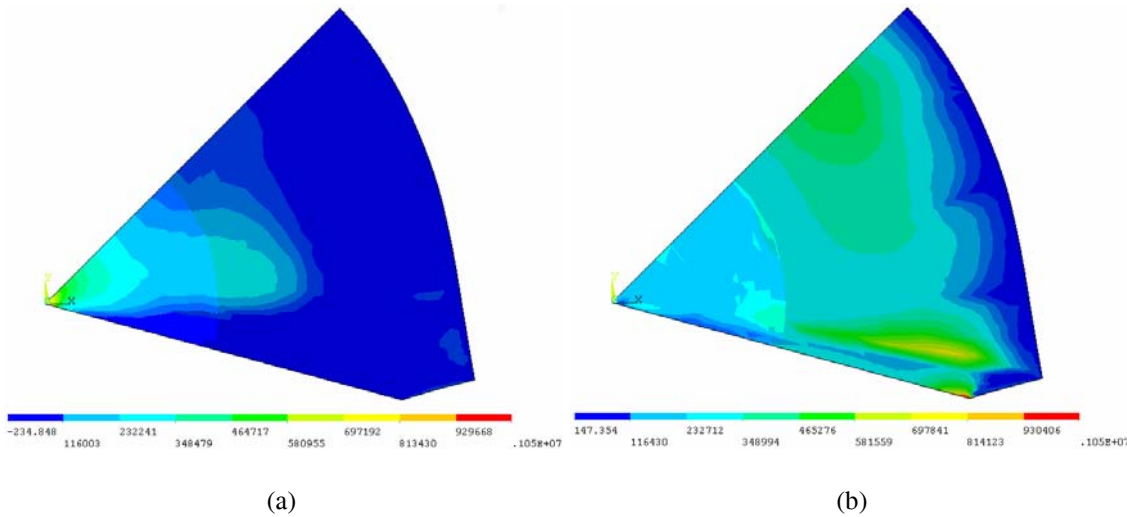
**Figura 4.34** Evolución de los parámetros en el proceso de optimización (F.Obj.  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm)

En las Figuras 4.35 a 4.37 se muestran los mapas de tensiones y desplazamientos obtenidos para el diseño óptimo. El desplazamiento máximo de la estructura se produce en el borde curvo libre y alcanza un valor de 2,26 mm. Al igual que en los dos procesos anteriores, el diseño óptimo posee un tamaño inferior (Figura 4.35a), quedando su superficie media por debajo de la del diseño inicial, aunque es cierto que son geometrías muy similares en apariencia y con curvaturas semejantes, lo que hace que no se intersequen ambas en ninguna zona.



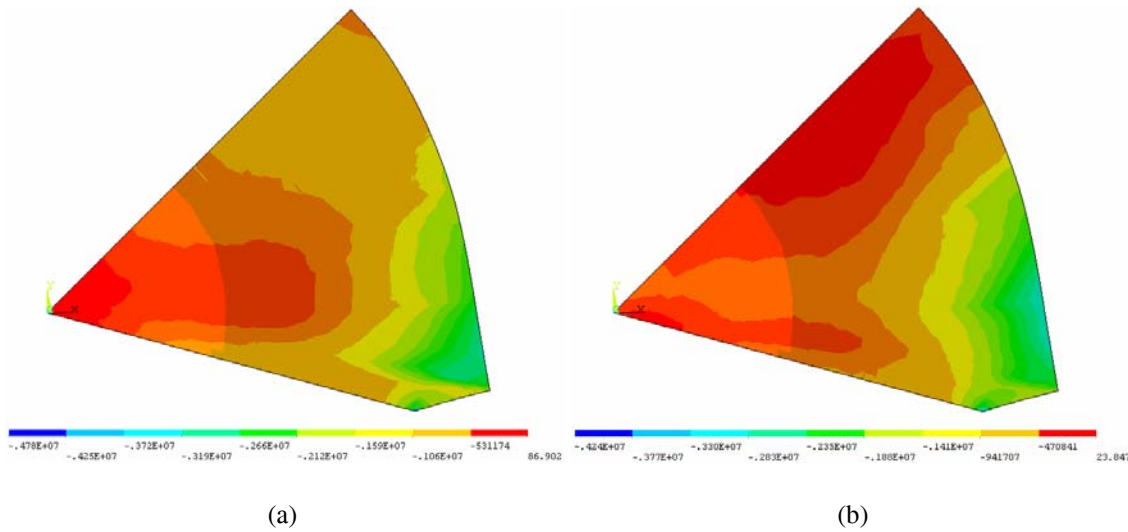
**Figura 4.35** Geometría y desplazamientos del diseño óptimo (F.Obj.  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm).  
 (a) Superposición de diseños inicial-óptimo. (b) Desplazamientos  $u_z$  [m]

En la Figura 4.36 se representa el mapa de tensiones principales  $\sigma_1$ . En la cara inferior de la lámina aparece el máximo de 1,05 MPa en el nervio del orificio central. En la cara superior se tiene la tracción máxima en el nervio principal, en la zona del vértice interior del apoyo. Esta zona es de pequeño tamaño, y a unos pocos centímetros de separación, la tensión pasa a ser inferior a la mitad del valor máximo.



**Figura 4.36** Tensiones principales  $\sigma_1$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj.  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

En la Figura 4.37 se reflejan los mapas de tensiones principales  $\sigma_3$ . La máxima tensión de compresión se produce en el mismo punto en ambas caras, siendo 4,78 MPa en la cara inferior y 4,24 MPa en la superior. En este proceso, la zona donde se produce la máxima compresión es diferente a la del resto de optimizaciones, y en ella se produce también la máxima tracción en la cara superior.



**Figura 4.37** Tensiones principales  $\sigma_3$  [Pa] del diseño óptimo (F.Obj.  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm).  
 (a) Cara inferior. (b) Cara superior

En la tabla 4.26 aparecen los nodos en los que se alcanzan los valores máximos de las tensiones principales.

**Tabla 4.26** Localización y valor de las tensiones principales máximas (F.Obj.  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm)

Cara	Nodo	Coordenadas (m)			Tensiones (MPa)	
		$x$	$y$	$z$	$\sigma_1$	$\sigma_3$
Inferior	1298	0,048	0,013	0,000	1,05	0,00
	1748	12,468	-3,341	-6,500	0,00	-4,78
Superior	1748	12,468	-3,341	-6,500	1,05	-4,89

No se expone a continuación un sexto proceso de optimización, en el que se debería emplear como función objetivo la máxima tensión de tracción y el espesor mínimo restringirse a 8 cm, pues los resultados obtenidos son los mismos aunque se adopte valores iniciales distintos.

#### 4.5 RESUMEN DE RESULTADOS

Primeramente se ha realizado el análisis del modelo que propuso Félix Candela para el edificio de acceso al Parque Oceanográfico, el cual ha sido adoptado como modelo inicial. Este análisis ha permitido conocer información relevante, como el valor de las tensiones y desplazamientos de la estructura. A continuación se han ejecutado diversos procesos de optimización con el fin de mejorar su comportamiento estructural empleando una hipótesis pésima de combinación de acciones. Los procesos de optimización del modelo inicial se han clasificado en dos grupos:

- Según la función objetivo empleada (energía de deformación, peso, o tensión de tracción), y
- según el espesor mínimo permitido a la lámina (6 u 8 cm).

Para cada función objetivo se han realizado dos procesos de optimización en función del espesor mínimo permitido.

En la tabla 4.27 se exponen los valores finales de las variables de geometría en los distintos procesos. También se muestran los valores finales de dos parámetros geométricos, la altura del borde libre del paraboloides y el radio o distancia en planta desde el centro de la estructura hasta uno de sus apoyos. Estos parámetros, al compararlos en los distintos procesos, aportan mayor claridad en la visualización de los cambios producidos en la geometría del modelo inicial.

El ángulo  $\omega$  disminuye en todos los procesos, por lo que el hyperparaboloide deja de ser equilátero. Del mismo modo, la altura del modelo inicial también disminuye siempre, tendiendo al valor mínimo de 19 m. Del espesor de la lámina, destaca su disminución al mínimo cuando se optimiza la energía de deformación y el peso, mientras que aumenta hasta casi 16 cm al optimizar la máxima tensión de tracción. Esto indica el alto coste que supone encontrar formas con comportamiento de membrana bajo restricciones geométricas.

**Tabla 4.27** Procesos de optimización. Valores finales de las variables de geometría

Proceso	$e_1$ (cm)	$e_2$ (cm)	$e_3$ (cm)	$K$ (m <sup>-1</sup> )	$\omega$ (°)	Radio (m)	Altura (m)
Modelo inicial	6,00	8,00	35,00	0,140	90,00	13,63	24,39
$ED$ ( $e_{min} = 6$ cm)	6,12	6,00	36,21	0,158	85,42	11,87	19,04
$ED$ ( $e_{min} = 8$ cm)	8,00	9,54	40,00	0,165	84,98	11,54	19,00
$W$ ( $e_{min} = 6$ cm)	6,00	7,19	26,43	0,150	85,87	12,27	19,02
$W$ ( $e_{min} = 8$ cm)	8,00	8,10	33,31	0,141	86,45	12,79	19,05
$\sigma_t$ ( $e_{min} = 6$ cm)	15,94	8,09	38,46	0,139	86,53	12,91	19,01

$ED$  = energía de deformación;  $W$  = peso;  $\sigma_t$  = tensión de tracción máxima;  $e_{min}$  = espesor mínimo

En la tabla 4.28 se muestran los valores finales de las funciones objetivo, además de tres parámetros útiles para establecer comparaciones, el espesor de la lámina  $e_1$ , la máxima tensión de compresión  $\sigma_{c,máx}$  y el máximo desplazamiento vertical  $u_{z,máx}$ .

En todos los procesos las tensiones máximas de compresión se mantienen por debajo de 5 MPa. Las tensiones máximas de tracción adoptan un valor inferior a la resistencia de cálculo a tracción del hormigón. En el caso de adoptar esta tracción como función objetivo, el peso duplica, aproximadamente, a los obtenidos en el resto de procesos, sin embargo no se consigue una apreciable disminución de la tensión de tracción, lo que ratifica ese alto coste en la búsqueda del estado membrana. El máximo desplazamiento vertical es inferior a 4 mm, que está en consonancia con los resultados obtenidos por Ortega y Arias (1998) para este tipo de estructuras, esto es,

desplazamientos verticales por debajo del 10% del espesor de la lámina.

**Tabla 4.28** Procesos de optimización. Valores finales de las funciones objetivo, espesor de la lámina ( $e_1$ ), tensión de compresión máxima ( $\sigma_c$ ) y desplazamiento vertical máximo ( $u_{z,max}$ )

Proceso	Funciones objetivo			$e_1$ (cm)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)
	$ED$ (mN)	$W$ (kN)	$\sigma_t$ (MPa)			
Modelo inicial	881,77	473,83	2,19	6,00	7,89	8,73
$ED$ ( $e_{min} = 6$ cm)	297,94	330,17	1,33	6,12	4,96	3,90
$ED$ ( $e_{min} = 8$ cm)	300,66	443,28	1,29	8,00	4,22	3,25
$W$ ( $e_{min} = 6$ cm)	318,29	309,54	1,26	6,00	4,89	3,94
$W$ ( $e_{min} = 8$ cm)	367,20	431,37	1,10	8,00	4,27	3,27
$\sigma_t$ ( $e_{min} = 6$ cm)	514,36	767,87	1,05	15,94	4,75	2,26

$ED$  = energía de deformación;  $W$  = peso;  $\sigma_t$  = tensión de tracción máxima;  $e_{min}$  = espesor mínimo



## *Análisis no lineal y de estabilidad de láminas de hormigón*

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En el análisis lineal de estructuras, las ecuaciones de equilibrio se basan en la hipótesis de indeformabilidad (geometría constante) durante la aplicación de las cargas. Esto es suficientemente correcto para muchos casos prácticos. Sin embargo, hay otros casos, como el de las piezas esbeltas, que tienen grandes desplazamientos y/o deformaciones, siendo necesario considerar, en el equilibrio, la configuración real deformada de la estructura. Esto requiere un análisis no lineal, que se resuelve mediante procedimientos iterativos o incrementales, comenzando a partir de unos valores de desplazamiento iniciales, y finalizando al satisfacerse, suficientemente, las ecuaciones de equilibrio en los nodos en su posición desplazada. Además, en el análisis lineal el comportamiento del material se reproduce mediante una trayectoria tensión–deformación lineal, y esto no siempre es así para todos los materiales.

Uno de los estados límites a considerar durante el diseño de láminas de hormigón es la pérdida de estabilidad. Es necesario establecer un adecuado coeficiente de seguridad frente al fenómeno del pandeo, lo que puede plantear cierta dificultad por dos razones fundamentales. Por una parte, la solución analítica es difícil de obtener debido a las complejas geometrías manejadas en este tipo de estructuras. Por otra, el hormigón no es un material homogéneo ni isótropo, presentando un comportamiento no lineal, por ejemplo, debido a la presencia de fisuración cuando se le somete a tracción.

Se expone en los siguientes apartados las bases y métodos de análisis no lineal y de estabilidad de láminas de hormigón, así como las herramientas disponibles en el programa de elementos finitos ANSYS relacionadas con la materia, incluyendo algunos comentarios sobre los comandos más interesantes y sobre la implementación de los diferentes análisis realizados.

A continuación se ha efectuado un análisis de no linealidad de los diseños inicial y óptimos del hyper, estudiando las mejoras obtenidas en la respuesta de la estructura y la

sensibilidad existente en el diseño inicial frente a los cambios de forma. Por último, se ha realizado un estudio de estabilidad de los diseños mediante métodos numéricos (estudio de estabilidad inicial y análisis no lineal) y mediante un método semiempírico basado en las recomendaciones de la IASS.

## 5.2 ANÁLISIS NO LINEAL

### 5.2.1 Introducción

Se ha comentado que el comportamiento estructural no lineal aparece básicamente por dos causas, los grandes desplazamientos/rotaciones y/o deformaciones (no linealidad geométrica) y el comportamiento tenso-deformacional no lineal (no linealidad del material). Exceptuando las estructuras simples, es necesario recurrir al ordenador para realizar análisis no lineal, debido al proceso iterativo o incremental de resolución. El empleo del ordenador puede servir de ayuda a la comprensión del comportamiento no lineal de la estructura, pues permite introducir las cargas por escalones, cambiar el número de iteraciones u obtener las fuerzas residuales al final de cada iteración.

En este apartado se presenta la formulación de un elemento finito membrana aplicada al cálculo no lineal. Posteriormente se presentan los métodos incremental e iterativo, como métodos habituales en la realización de análisis no lineales de estructuras. Por último, se exponen las leyes de comportamiento del hormigón generalmente aceptadas por los diferentes códigos, centrando la atención en el comportamiento elástico-plástico no lineal.

### 5.2.2 No linealidad geométrica. Matriz de rigidez tangente

Cuando las cargas sobre una estructura con comportamiento no lineal geométrico se aplican en pequeños incrementos, las fuerzas y los desplazamientos están relacionados mediante la ecuación siguiente

$$\mathbf{S}\Delta\mathbf{D} = \Delta\mathbf{F} \quad (5.1)$$

donde  $\Delta\mathbf{F}$  y  $\Delta\mathbf{D}$  son los vectores incremento de fuerzas e incremento de desplazamientos definidos en un determinado sistema de coordenadas. La matriz de rigidez  $\mathbf{S}$  se modifica con los cambios en la geometría. Además, en estructuras de barras, la matriz  $\mathbf{S}$  depende sólo de las fuerzas axiales en las piezas. Cuando  $\Delta\mathbf{F}$  tiende a  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{S}$  tiende a  $\mathbf{S}_t$ , conocida como *matriz de rigidez tangente* y que se puede expresar, en la formulación de elementos finitos, como la suma de dos matrices

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_g \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{S}_e$  es la *matriz de rigidez elástica lineal* (o *inicial*) convencional, basada en la geometría inicial de la estructura al empezar el incremento de carga, y  $\mathbf{S}_g$  es la *matriz de rigidez geométrica*, que depende de la geometría deformada de la estructura y de las



siendo

- $h$  espesor constante del elemento,
- $\Omega$  área del elemento triangular,
- $\mathbf{B}$  matriz que relaciona el vector deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  con el vector desplazamientos nodales  $\mathbf{D}^*$

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

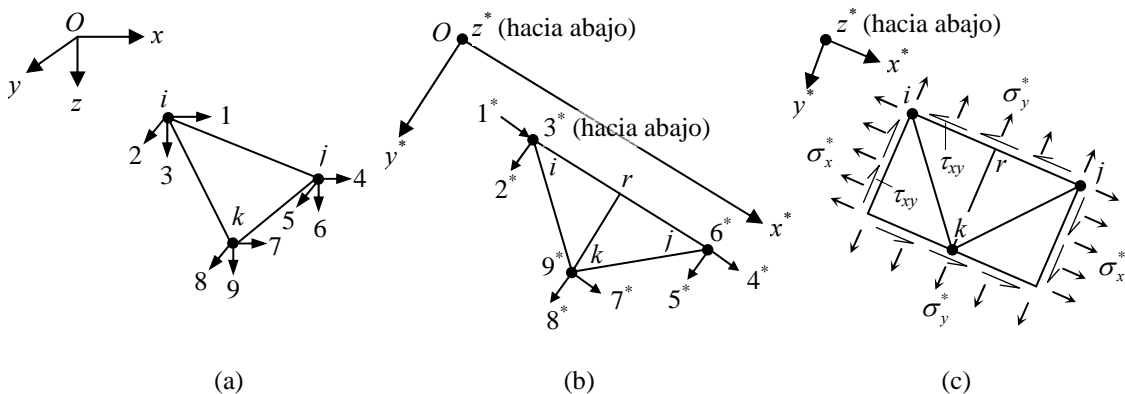
$\boldsymbol{\sigma}_u$  tensiones debidas a los desplazamientos nodales unitarios

$$\boldsymbol{\sigma}_u = \frac{1}{2\Omega} \begin{bmatrix} d_{11}b_i & d_{21}c_i & d_{11}b_j & d_{21}c_j & d_{11}b_k & d_{21}c_k \\ d_{21}b_i & d_{22}c_i & d_{21}b_j & d_{22}c_j & d_{21}b_k & d_{22}c_k \\ d_{33}c_i & d_{33}b_i & d_{33}c_j & d_{33}b_j & d_{33}c_k & d_{33}b_k \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$d_{ij}$  elementos de la matriz de elasticidad  $\mathbf{d}$  para un estado de tensión plana o para un estado de deformación plana, según el caso que se analice.

Se observa que todos los elementos de  $\mathbf{B}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_u$  son constantes, lo que indica deformación y tensión constantes.

Se expone ahora la matriz de rigidez geométrica del elemento para el análisis no lineal. Sus nodos de esquina  $i, j,$  y  $k$  están definidos por sus coordenadas  $x, y,$  y  $z$  con respecto al sistema de ejes ortogonales global (Figura 5.2a). El sistema de ejes ortogonales local del elemento  $x^*, y^*$  y  $z^*$  tienen el mismo origen  $O$  que los ejes globales, y el plano  $x^*-y^*$  es paralelo al plano del elemento (Figura 5.2b). Además, el eje local  $x^*$  es paralelo al vector que conecta el nodo  $i$  con el  $j$ , y el eje local  $y^*$  es perpendicular a  $x^*$  apuntando hacia el nodo  $k$ .



**Figura 5.2** Sistemas de coordenadas y tensiones en el planteamiento de la matriz de rigidez geométrica de un elemento membrana triangular. (a) Sistema de coordenadas global. (b) Plano del elemento y sistema de coordenadas local. (c) Tensiones en los bordes del elemento

Se plantea la matriz de rigidez con respecto a las coordenadas  $1^*, 2^*, \dots, 9^*$  definidas en el sistema de ejes locales. La matriz de rigidez inicial para el triángulo de

deformación constante se definió en la Ec. (5.4). Para extender a tres dimensiones esta matriz se pueden introducir tres filas y tres columnas, compuestas por ceros, correspondientes a las coordenadas 3\*, 6\* y 9\*. Esto se debe a que el elemento membrana no tiene rigidez fuera de su plano.

La matriz de rigidez geométrica para un elemento triangular membrana con respecto a las coordenadas locales en el espacio es (Ghali, Neville y Brown, 2003)

$$\mathbf{S}_g = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & -\frac{h_{xy}^*}{2} & \frac{h\sigma_x}{2} & 0 & \frac{h\tau_{xy}^*}{2} & -\frac{h\sigma_x}{2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{h\sigma_y^*}{2} & \frac{h\tau_{xy}^*}{2} & 0 & \frac{h\sigma_y^*}{2} & -\frac{h\tau_{xy}^*}{2} & 0 \\
 0 & 0 & F_2^*\theta_{ix}^* - F_1^*\theta_{iy}^* & 0 & 0 & F_2^*\theta_{jx}^* - F_1^*\theta_{jy}^* & 0 & 0 & F_2^*\theta_{kx}^* \\
 \hline
 \frac{h\tau_{xy}^*}{2} & -\frac{h\sigma_x^*}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h\tau_{xy}^*}{2} & \frac{h\sigma_x^*}{2} & 0 \\
 \frac{h\sigma_y^*}{2} & \frac{h\tau_{xy}^*}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h\sigma_y^*}{2} & \frac{h\tau_{xy}^*}{2} & 0 \\
 0 & 0 & F_5^*\theta_{ix}^* - F_4^*\theta_{iy}^* & 0 & 0 & F_5^*\theta_{jx}^* - F_4^*\theta_{jy}^* & 0 & 0 & F_5^*\theta_{kx}^* \\
 \hline
 -\frac{h\tau_{xy}^*}{2} & \frac{h\sigma_x^*}{2} & 0 & \frac{h\tau_{xy}^*}{2} & -\frac{h\sigma_x^*}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{h\sigma_y^*}{2} & \frac{h\tau_{xy}^*}{2} & 0 & \frac{h\sigma_y^*}{2} & \frac{h\tau_{xy}^*}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & F_8^*\theta_{ix}^* - F_7^*\theta_{iy}^* & 0 & 0 & F_8^*\theta_{jx}^* - F_7^*\theta_{jy}^* & 0 & 0 & F_8^*\theta_{kx}^*
 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

donde  $\theta_{ix}^*$  y  $\theta_{iy}^*$  son las rotaciones del nodo  $i$  con respecto a los ejes locales  $x^*$  e  $y^*$ . De manera análoga se definen el resto de rotaciones ( $\theta_{jx}^*$ ,  $\theta_{jy}^*$ ,  $\theta_{kx}^*$  y  $\theta_{ky}^*$ ). Se puede verificar la validez de las siguientes relaciones geométricas

$$\begin{aligned}
 \theta_{ix}^* &= -\left(\frac{x_j^* - x_k^*}{x_j^* - x_i^*}\right)\left(\frac{1}{y_k^* - y_j^*}\right); & \theta_{iy}^* &= \frac{1}{x_j^* - x_i^*} \\
 \theta_{jx}^* &= -\left(\frac{x_k^* - x_i^*}{x_j^* - x_i^*}\right)\left(\frac{1}{y_k^* - y_j^*}\right); & \theta_{jy}^* &= -\frac{1}{x_j^* - x_i^*} \\
 \theta_{kx}^* &= -\frac{1}{y_k^* - y_j^*}; & \theta_{ky}^* &= 0
 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Resaltar que, en este caso, la matriz  $\mathbf{S}_g$  no es simétrica.

Se puede emplear el método iterativo de Newton–Raphson para determinar los desplazamientos nodales, los cuales definen la geometría del elemento triangular resultante después de la deformación. La línea  $r$ - $k$  de la Figura 5.2b es paralela al eje  $y^*$  pasando por el nodo  $k$  antes y después de su desplazamiento. Las deformaciones del elemento pueden calcularse mediante los cambios de longitud (Figura 5.2b)

$$\delta_{ij} = l_{ij} - l_{ij,in}; \quad \delta_{rk} = l_{rk} - l_{rk,in}; \quad \delta_{ir} = l_{ir} - l_{ir,in} \quad (5.9)$$

donde el subíndice  $in$  se refiere a la longitud inicial. Según los ejes  $x^*$ ,  $y^*$  y  $z^*$  (Figuras

5.2b y c), la deformación con respecto al estado inicial viene dada por

$$\varepsilon_x^* = \frac{\delta_{ij}}{l_{ij,in}} ; \varepsilon_y^* = \frac{\delta_{rk}}{l_{rk,in}} ; \gamma_{xy}^* = \frac{1}{l_{rk,in}} [\delta_{ir} - \varepsilon_x^* l_{ir,in}] \quad (5.10)$$

siendo  $\delta_{ir}$  el efecto combinado de  $\varepsilon_x^*$  y  $\tau_{xy}^*$  en la traslación en la dirección del eje  $x^*$  del nodo  $k$  con respecto al nodo  $i$ , y  $\varepsilon_x^* l_{ir,in}$  la componente de la traslación función de  $\varepsilon_x^*$ .

Las tensiones, dependientes de la deformación (Figura 5.2c), vienen dadas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \mathbf{d} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{x,in}^* & l_{rk,in}/l_{rk} \\ \sigma_{y,in}^* & l_{ij,in}/l_{ij} \\ \tau_{xy,in}^* & \Omega_{in}/\Omega \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

donde

- $\mathbf{d}$  matriz de elasticidad del material,
- $\sigma_{x,in}^*$   $\sigma_{y,in}^*$   $\sigma_{z,in}^*$  tensiones en el estado inicial,
- $\Omega_{in}$  área del elemento en el estado inicial y,
- $\Omega$  área del elemento en el estado deformado.

El último término de la Ec. (5.11) representa el ajuste de tensiones respecto de las tensiones iniciales  $\sigma_{x,in}^*$   $\sigma_{y,in}^*$   $\tau_{xy,in}^*$ . Considerando el elemento rectangular de la Figura 5.2c, se observa que las resultantes del estado inicial y del estado ajustado de tensiones normales a cualquier lado son las mismas. También se observa que el estado inicial y el ajustado de tensiones tangenciales, en cada par de lados opuestos, proporcionan las mismas resultantes ( $\tau_{xy}$   $l_{ij}$   $l_{rk}$ ).

### 5.2.3 No linealidad del material

Se expone a continuación los métodos existentes en la realización de análisis con material no lineal.

#### 5.2.3.1 Método incremental

En este método, las cargas aplicadas  $\mathbf{Q}$  se dividen en incrementos  $\beta_i \mathbf{Q}$ , que se van aplicando sucesivamente, realizándose en cada uno de ellos un análisis lineal de la estructura. Para el incremento de carga  $i$ -ésimo, el sistema de ecuaciones de equilibrio que hay que resolver es

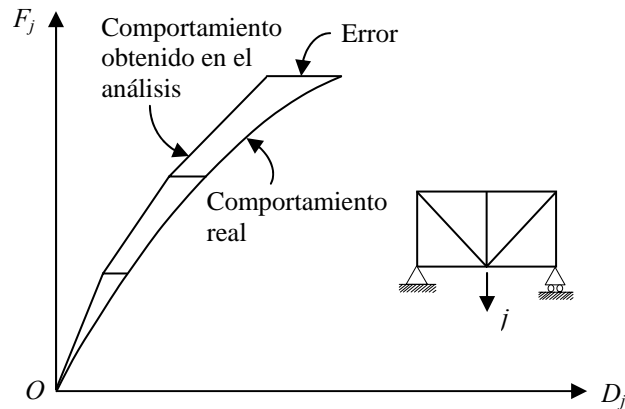
$$\mathbf{S}_i \Delta \mathbf{D}_i = \Delta \mathbf{F}_i = \beta_i \mathbf{Q} \quad (5.12)$$

donde la matriz de rigidez  $\mathbf{S}_i$  depende del nivel de tensiones correspondiente al incremento precedente. El módulo de elasticidad a utilizar es la pendiente de la curva tensión–deformación correspondiente al estado de carga del incremento ( $i-1$ ). Los desplazamientos obtenidos por la Ec. (5.12) para cada incremento de carga se suman a los obtenidos anteriormente para obtener el desplazamiento total de la estructura

$$\mathbf{D} = \sum \Delta \mathbf{D}_i \quad (5.13)$$

Del mismo modo, la tensión total será la suma de todas las tensiones obtenidas en los incrementos considerados.

En la Figura 5.3 aparece la gráfica del desplazamiento de un nodo respecto a su correspondiente fuerza nodal. La trayectoria se compone de tramos rectos, resultando al final un error, que será más reducido cuantos más pequeños sean los incrementos de carga, aunque ello suponga un mayor número de análisis.



**Figura 5.3** Método de análisis incremental. Curva tipo carga–desplazamiento en un nodo  $j$

La ventaja del método es su simplicidad. Puede emplearse también para un análisis no lineal geométrico, en el que la matriz de rigidez  $S_i$  se basa en la geometría de la estructura y en las fuerzas nodales obtenidas en el incremento precedente ( $i-1$ ).

### 5.2.3.2 Métodos iterativos

#### Método de Newton–Raphson

En este caso se introduce toda la carga de una vez y se calcula una solución aproximada, que se va corrigiendo de forma iterativa (Figura 5.4a). En cada iteración se realiza un análisis lineal utilizando la matriz de rigidez aproximada, obteniendo desplazamientos aproximados y, de ahí, la deformación en cada barra (o en cada elemento finito). Mediante la relación tenso–deformacional del material se determina la tensión correspondiente y, a partir de ésta, mediante la Ec. (5.15), se obtiene las fuerzas en los extremos de la barra (en las coordenadas locales del elemento). Estas fuerzas se “ensamblan” para determinar el vector de fuerzas nodales  $\bar{\mathbf{F}}$  en la configuración deformada correspondiente en cada iteración. Existe una diferencia entre este vector de fuerzas nodales  $\bar{\mathbf{F}}$  y el vector de cargas externas en nudos  $\mathbf{Q}$ , es el vector de fuerzas residuales o residuo  $\mathbf{g}$ , que se reduce iteración tras iteración

$$\mathbf{g} = \mathbf{Q} - \bar{\mathbf{F}} \quad (5.14)$$

En cada iteración, se utiliza una matriz de rigidez nueva, correspondiente al estado tensional de cada barra o elemento al final de la iteración precedente. En la Figura 5.4a las pendientes de  $OA$  y  $BC$  son diferentes, lo que indica diferentes matrices de rigidez en

iteraciones consecutivas.

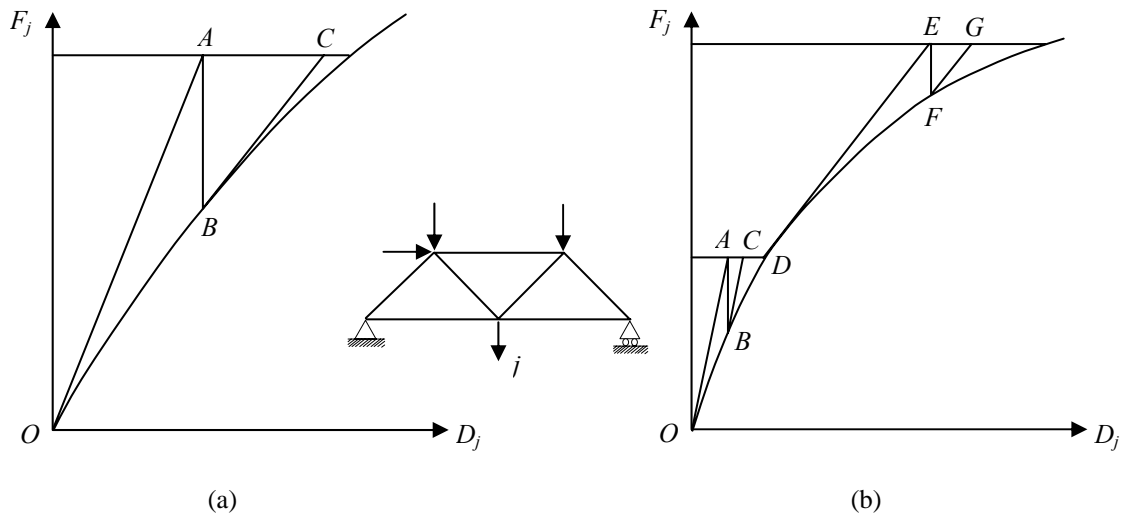
*Método de Newton–Raphson modificado*

Es un método mixto incremental-iterativo, en el que las cargas se introducen por escalones, y en cada escalón se realizan varias iteraciones para determinar los desplazamientos nodales y reducir el residuo. En vez de generar una matriz de rigidez nueva en cada iteración, se genera sólo una al principio de cada escalón de carga y se va empleando en las sucesivas iteraciones hasta alcanzar la convergencia, procediendo entonces al siguiente escalón de carga. Esto se representa esquemáticamente en la Figura 5.4b, donde las pendientes de *OA* y *BC* son las mismas, lo que indica la misma matriz de rigidez en las dos iteraciones del primer escalón de carga. Igualmente sucede con las pendientes de *DE* y *FG* para el segundo escalón.

En ambos métodos iterativos se determinan las fuerzas nodales para un elemento del que se conocen las tensiones  $\sigma$  mediante la ecuación

$$\bar{\mathbf{F}}_{elem} = \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv \tag{5.15}$$

donde  $\mathbf{B}$  es una matriz que relaciona la deformación en cualquier punto del elemento con los desplazamientos en sus nodos, y  $\boldsymbol{\sigma}$  es la última tensión determinada en ese punto.



**Figura 5.4** Curva carga–desplazamiento para dos iteraciones consecutivas. (a) Aplicación de la carga de una vez y obtención de una nueva matriz de rigidez en cada iteración (método de Newton–Raphson). (b) Aplicación de la carga por escalones y obtención de una nueva matriz de rigidez sólo en la primera iteración de cada escalón (método de Newton–Raphson modificado)

**5.2.4 Leyes de comportamiento del hormigón**

Las leyes de comportamiento generalmente aceptadas por los diferentes códigos para el hormigón corresponden a un comportamiento rígido-plástico ideal, elástico-plástico ideal o elástico-plástico no lineal. En los apartados del 5.2.4.1 al 5.2.4.4 se detallan estos comportamientos.



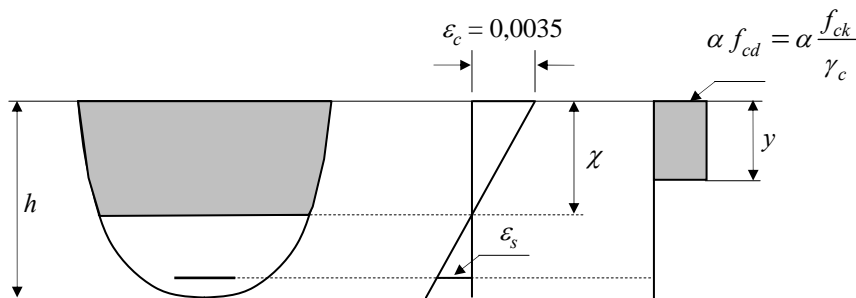
**5.2.4.1 Comportamiento rígido-plástico ideal (diagrama rectangular)**

El diagrama rectangular (Figura 5.5) está formado por un rectángulo cuya altura es función de la profundidad del eje neutro  $\chi$ . La ecuación de este modelo de comportamiento es

$$\sigma_c = \alpha f_{cd}; \quad y = \begin{cases} 0,8 \chi & \text{si } \chi \leq 1,25 h \\ h & \text{si } \chi > 1,25 h \end{cases} \quad (5.16)$$

siendo

- $f_{ck}$  resistencia característica del hormigón a compresión,
- $f_{cd}$  resistencia de cálculo del hormigón a compresión,
- $\chi$  profundidad del eje neutro,
- $y$  profundidad del diagrama rectangular de tensiones,
- $\alpha$  factor de reducción para las compresiones permanentes (generalmente adopta el valor 0,85),
- $\epsilon_c$  deformación relativa del hormigón,
- $\epsilon_s$  deformación relativa del acero, y
- $\gamma_c$  coeficiente de seguridad o minoración de la resistencia del hormigón.

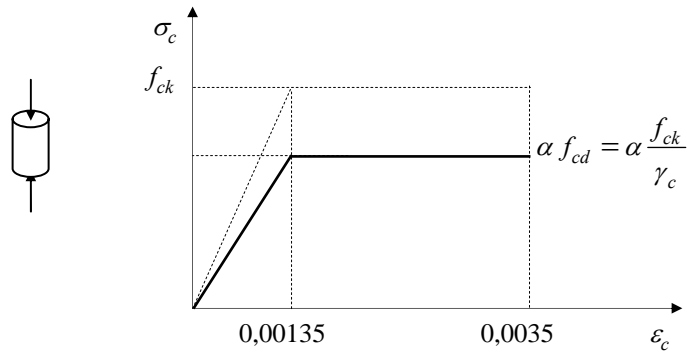


**Figura 5.5** Comportamiento rígido-plástico ideal del hormigón (diagrama rectangular)

**5.2.4.2 Comportamiento elástico-plástico ideal (diagrama bilineal)**

La ley de comportamiento del hormigón según este modelo (Figura 5.6) tiene por ecuación

$$\sigma_c = \begin{cases} \frac{\alpha f_{cd}}{0,00135} \epsilon_c & \text{si } 0 < \epsilon_c < 0,00135 \\ \alpha f_{cd} & \text{si } \epsilon_c \geq 0,00135 \end{cases} \quad (5.17)$$

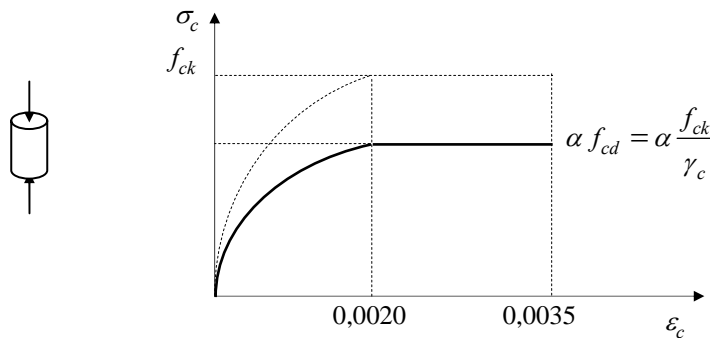


**Figura 5.6** Comportamiento elástico-plástico ideal del hormigón (diagrama bilineal)

**5.2.4.3 Comportamiento elástico-plástico no lineal (diagrama parábola-rectángulo)**

La ley de comportamiento del hormigón según este modelo (Figura 5.7) tiene por ecuación

$$\sigma_c = \begin{cases} \alpha f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{0,0020} \right)^2 \right] & \text{si } 0 < \varepsilon_c < 0,0020 \\ \alpha f_{cd} & \text{si } \varepsilon_c \geq 0,0020 \end{cases} \quad (5.18)$$



**Figura 5.7** Comportamiento elástico-plástico no lineal del hormigón (diagrama parábola rectángulo)

**5.2.4.4 Comportamiento elástico-plástico no lineal (diagrama de Sargin)**

La ley de comportamiento del hormigón según este modelo (Figura 5.8) tiene por ecuación

$$\sigma_c = \begin{cases} \frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \varepsilon_c - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm} & \text{si } |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,\text{lim}}| \\ - \left[ \left( \frac{\xi}{\frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} - \frac{2}{\left(\frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}}\right)^2} \right) \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2 + \left( \frac{4}{\frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} - \xi} \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right] f_{cm} & \text{si } |\varepsilon_c| > |\varepsilon_{c,\text{lim}}| \end{cases} \quad (5.19)$$

donde

$$\frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.20)$$

y

$$\xi = \frac{4 \left[ \left( \frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} \right)^2 \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) + 2 \frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} - \frac{E_{ci}}{E_{c1}} \right]}{\left[ \frac{\varepsilon_{c,\text{lim}}}{\varepsilon_{c1}} \left( \frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2 \right) + 1 \right]^2} \quad (5.21)$$

$$E_{ci} = E_{co} \left[ \frac{(f_{ck} + \Delta f)}{f_{cmo}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.22)$$

siendo

$E_{c1}$   $f_{cm}/0,0022$ , módulo secante desde el origen a la tensión máxima de compresión  $f_{cm}$ ,

$E_{ci}$  módulo de elasticidad tangente en el origen de acuerdo con la Ec. (5.22),

$E_{co}$   $2,15 \cdot 10^4$  MPa,

$f_{cmo}$  10 MPa,

$f_{cm}$  resistencia media del hormigón a compresión,

$\varepsilon_{c1}$  -0,0022,

$\varepsilon_{c,\text{lim}}$  deformación unitaria límite para validez de la Ec. (5.19), y

$\sigma_{c,\text{lim}}$  tensión de compresión correspondiente a la deformación límite  $\varepsilon_{c,\text{lim}}$ .

Si no se conoce el valor real de  $f_{cm}$  se adopta

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f \quad (5.23)$$

con  $\Delta f = 8$  MPa.

El diagrama de Sargin está asumido por el Código modelo MC-90, y es el primer

tramo del mismo, para valores  $|\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,lim}|$ , el que se ha empleado en el análisis no lineal.

A modo de curiosidad, advertir que la Instrucción EHE propone, como módulo de elasticidad tangente en el origen, la expresión

$$E_{ci} = 10000\sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad (5.24)$$

pero sustituyendo valores numéricos en la Ec. (5.22) se obtiene

$$E_{ci} = 9979\sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad (5.25)$$

El Código modelo establece además que, al realizar un análisis lineal de la estructura, debe utilizarse un valor reducido del módulo de elasticidad, pudiendo adoptar el módulo secante  $E_c$  cuya expresión es

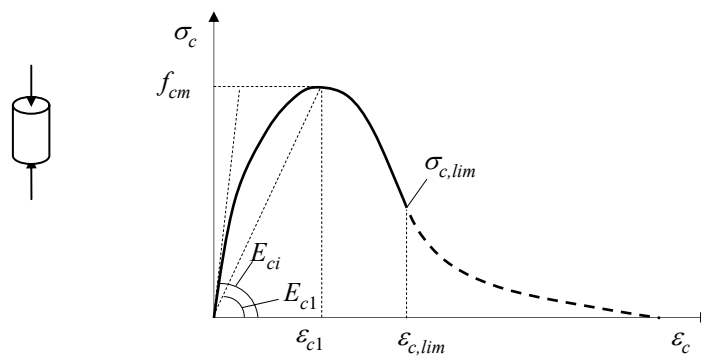
$$E_c = 0,85E_{ci} \quad (5.26)$$

que es equivalente a la utilizada por la EHE

$$E_c = 8500\sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad (5.27)$$

ya que al sustituir valores numéricos en la Ec. (5.26) se obtiene

$$E_c = 8482\sqrt[3]{f_{ck} + 8} \quad (5.28)$$



**Figura 5.8** Comportamiento elástico-plástico no lineal del hormigón (diagrama de Sargin)

## 5.3 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

### 5.3.1 Introducción

En el capítulo dos se ha expuesto algunos procedimientos existentes en la literatura que contemplan el fenómeno de la inestabilidad en láminas de hormigón. En este apartado se centra la atención en dos de ellos, el método del comité ACI 344 (1970) para casquetes esféricos y, más profusamente, el método de las recomendaciones de la IASS (IASS Working Group No. 5, 1979), por ser éste el que se ha empleado en las

comprobaciones de estabilidad.

### 5.3.2 El fenómeno de la inestabilidad en láminas de hormigón

La deformada de una estructura al alcanzar el pandeo puede tener configuraciones diversas, dependiendo del valor de ciertos parámetros del problema. Un ejemplo muy conocido es el de una columna sometida a una carga axial, que puede experimentar desplazamientos transversales o se puede producir el pandeo por torsión, dependiendo de las dimensiones y la forma de la sección.

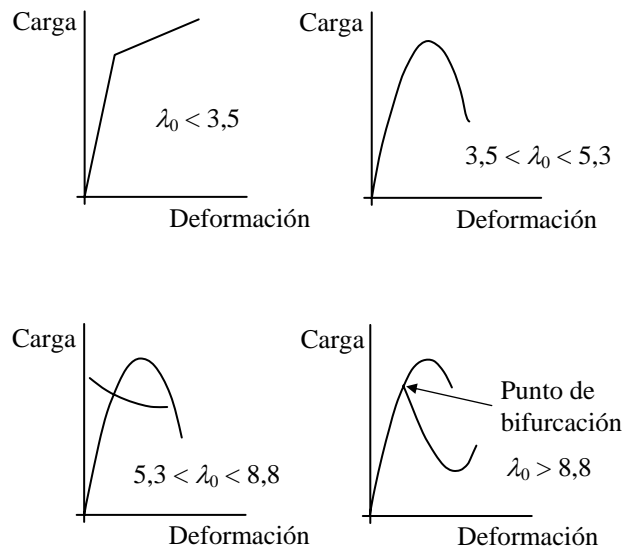
En el caso de una lámina de forma esférica sujeta a una presión uniforme, el pandeo varía significativamente dependiendo del valor del parámetro  $\lambda_0$  que, en el caso de láminas de hormigón, puede establecerse como

$$\lambda_0 = 1,85 \sqrt{\frac{e}{R}} \quad (5.29)$$

donde

- $R$  radio del casquete esférico, y
- $e$  espesor de la lámina.

En la Figura 5.9 se visualizan las trayectorias de inestabilidad para diversos valores de  $\lambda_0$  (Gioncu, 1979).



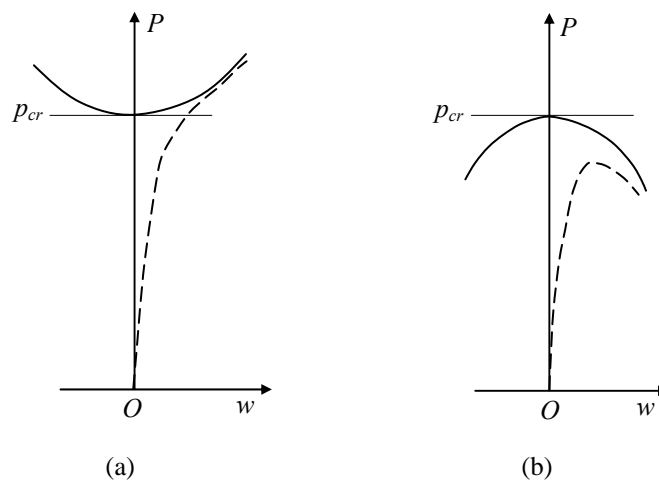
**Figura 5.9** Trayectorias de inestabilidad en esferas

La mayoría de las láminas reales están en el rango  $\lambda_0 > 8,8$ . Las trayectorias de equilibrio tienen un cierto punto crítico en el que las deformaciones se vuelven excesivamente grandes, considerándose entonces el inicio del pandeo. Este punto crítico puede ser límite, si está situado en el extremo de la trayectoria, o bifurcacional, si aparece un quiebro brusco en la misma.

Una lámina, dependiendo de su geometría, apoyos, material y configuración de las

acciones, puede o no experimentar una reducción en la carga de pandeo. Si esto sucede se dice que la lámina es sensible a las imperfecciones. Por ejemplo, un cilindro circular es sensible a las imperfecciones cuando se le somete a carga axial, e insensible cuando la carga es de torsión. Las imperfecciones son particularmente importantes en el caso en que la respuesta de la estructura sea de tipo límite en vez de bifurcacional, pues esta situación provoca una significativa reducción en la carga de pandeo.

El cálculo de la carga de pandeo asociada al punto límite suele ser dificultoso. Es por lo que se emplea el punto de bifurcación para conocer si una lámina es sensible a imperfecciones y qué coeficiente de seguridad debe aplicarse en caso de serlo. No existen métodos generales para determinar este comportamiento a priori, cada lámina debe tratarse de forma individual examinando su respuesta después del pandeo (Figura 5.10). Las estructuras que tienen un comportamiento como el de la Figura 5.10a se dice que son insensibles a las imperfecciones. En este caso, es razonablemente seguro adoptar como carga de pandeo la carga de pandeo lineal  $p_{cr}$  (punto de bifurcación). En otros casos (Figura 5.10b) la obtención de la carga de pandeo requiere un análisis más refinado, pues se trata de estructuras sensibles a las imperfecciones, presentando un fallo por pandeo más violento y un colapso de modo súbito (Gould, 1999). Las imperfecciones geométricas ( $w$ ) son la causa principal de la reducción en la carga de pandeo, siendo ésta más pronunciada cuanto mayor sea la magnitud de aquéllas.



**Figura 5.10** Comportamiento post-pandeo. (a) Creciente (lámina insensible a imperfecciones).  
(b) Decreciente (lámina sensible a imperfecciones)

### 5.3.3 Método del comité ACI 344

Este método consta de una serie de indicaciones para asegurar la estabilidad de casquetes esféricos. El espesor mínimo de la lámina no debe ser menor que 3 pulgadas (0,076 m) para hormigón in situ o 2,5 pulgadas (0,064 m) para hormigón proyectado. Además, el espesor  $e$  no debe ser menor que

$$e = R \sqrt{\frac{\gamma(g+q)}{kE_c}} \quad (5.30)$$

donde

- $R$  radio de la esfera,
- $g$  carga permanente,
- $q$  carga variable ( $g$  y  $q$  son fuerzas por unidad de área),
- $E_c$  módulo de elasticidad del hormigón,
- $k = 0,25$  para  $R/e < 800$  y valores de la altura comprendidos entre  $1/6$  y  $1/10$  de la luz, y
- $\gamma$  coeficiente de seguridad, que incluye el efecto de la fluencia, y cuyo valor no debe ser menor que 4 para cubiertas de almacén y considerablemente mayor para cubiertas de edificios públicos.

Sustituyendo el valor de  $k$  en la Ec. (5.30) se tiene la expresión estándar

$$q_d = 0,25E_c \left( \frac{e}{R} \right)^2 \quad (5.31)$$

con  $q_d = \gamma(g+q)$ .

El análisis del ACI 344 no tiene en cuenta los efectos de las imperfecciones, la fisuración, las armaduras y la no linealidad del material. Posteriores versiones han mantenido esencialmente el mismo texto.

### 5.3.4 Método basado en las recomendaciones de la IASS

#### 5.3.4.1 Introducción

En 1979, el grupo de trabajo número 5 de la IASS elabora un documento de recomendaciones para láminas de hormigón armado. La sección 3.5 de las recomendaciones trata sobre el análisis de estabilidad, en la que se desarrolla un procedimiento basado en los resultados de algunas investigaciones previas, particularmente en los trabajos de Kollár y Dulácska (1975). Este procedimiento fue el primero en incluir diversos coeficientes afectando al valor de la carga de pandeo teórica, que tuvieran en cuenta las imperfecciones geométricas, la fluencia y retracción del hormigón, la fisuración, el armado y la no linealidad del material.

El procedimiento fue posteriormente discutido por los miembros del grupo de trabajo y otros externos a él. Scordelis (1981) y Medwadowski (1990) advirtieron que, para el caso de cúpulas esféricas, el procedimiento arroja resultados conservadores. Sin embargo Kollár (1982) comparó las predicciones del método con los resultados experimentales para el caso de casquetes esféricos y encontró gran similitud.

El primer borrador de la revisión de las recomendaciones lo propuso Kollár (1993), pero la falta de acuerdo general hizo que el asunto se estancara. Medwadowski

(2004) realiza una revisión de las recomendaciones y de la propuesta de Kollár, planteando algunas modificaciones y sugerencias.

#### 5.3.4.2 Fórmula básica

El procedimiento de la IASS establece una aproximación de la carga de pandeo mediante la aplicación de unos coeficientes de reducción a la carga crítica bifurcacional, también denominada carga de pandeo lineal, para una lámina geoméricamente perfecta, homogénea y de material elástico lineal.

Por ejemplo, la carga de pandeo bifurcacional  $p_{cr}$  para una esfera sometida a compresión normal (Zoelly, 1915) es

$$p_{cr} = \frac{2E_c}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left( \frac{e}{R} \right)^2 \quad (5.32)$$

siendo

- $E_c$  módulo de deformación longitudinal,
- $\nu$  coeficiente de Poisson,
- $e$  espesor de la esfera, y
- $R$  radio de la esfera.

En el caso del hormigón, si se adopta un valor del coeficiente de Poisson de 0,2 resulta

$$p_{cr} = 1,18E_c \left( \frac{e}{R} \right)^2 \quad (5.33)$$

La carga de pandeo de cálculo  $p_d$  se obtiene aplicando cuatro coeficientes de reducción a la carga bifurcacional

$$\gamma p_d = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 p_{cr} \quad (5.34)$$

donde

- $\gamma$  coeficiente de seguridad,
- $p_{cr}$  carga de pandeo lineal o bifurcacional,
- $\alpha_1$  coeficiente de sensibilidad a las imperfecciones,
- $\alpha_2$  coeficiente de fluencia,
- $\alpha_3$  coeficiente de armado y fisuración, y
- $\alpha_4$  coeficiente de no linealidad del material.

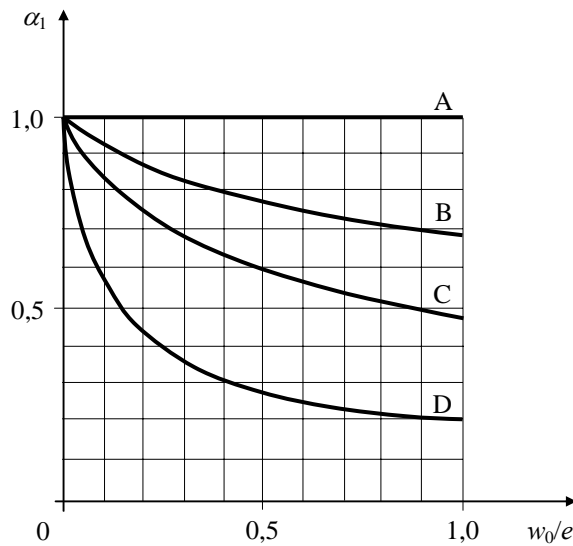
La carga de pandeo lineal  $p_{cr}$  debe calcularse de forma precisa, preferiblemente realizando un análisis elástico lineal por elementos finitos de la lámina perfecta y homogénea. En el modelo debe representarse correctamente las cargas, material, geometría, condiciones de contorno y, en su caso, los elementos estructurales que estén conectados directamente a la lámina.



**5.3.4.3 Coeficiente de sensibilidad a las imperfecciones**

Este coeficiente vale la unidad si la lámina no es sensible a las imperfecciones, y es menor que uno en caso contrario. La determinación de  $\alpha_1$  no suele ser tarea fácil, aunque en algunos casos puede encontrarse en la literatura. La Figura 5.11 muestra la variación del coeficiente de reducción  $\alpha_1$  en relación a  $w_0/e$ , siendo  $w_0$  una medida de las imperfecciones y  $e$  el espesor de la lámina.

Las curvas A, B y C corresponden a cilindros largos ( $L^2/(Re) = 10000$ ), medianos ( $L^2/(Re) = 1000$ ) y cortos ( $L^2/(Re) = 100$ ), respectivamente, comprimidos anularmente, siendo  $L$  su longitud y  $R$  el radio; la curva D es para esferas sometidas a presión radial y para cilindros comprimidos axialmente.



**Figura 5.11** Coeficiente de sensibilidad a las imperfecciones  $\alpha_1$  (Recomendaciones de la IASS, 1979)

Las recomendaciones de la IASS proporcionan la siguiente definición para  $w_0$

$$w_0 = w' + w'' \tag{5.35}$$

modificada posteriormente en la propuesta de Kollár

$$w_0 = \sqrt{((w')^2 + 1,4w'w'' + (w'')^2)} \tag{5.36}$$

donde

- $w'$  flecha de la lámina, y
- $w''$  imperfección (amplitud de la desviación de forma).

La forma que tiene la Ec. (5.36) apunta a la escasa probabilidad de que los mayores valores de  $w'$  y  $w''$  ocurran en el mismo punto de la lámina.

El procedimiento de la IASS adopta para la imperfección el valor

$$w'' = e \tag{5.37}$$

mientras que la propuesta de Kollár propone la siguiente ecuación empírica

$$w'' = 0,05e + \frac{ea}{2(1 + \beta^{-2})} \quad (5.38)$$

donde

$a$  coeficiente que depende del tipo del encofrado, siendo  $a = 1$  para encofrado rígido y  $a = 6$  para encofrado deslizante, y

$\beta = 0,001(R/e)$ .

Por ejemplo, en una lámina hormigonada con encofrado rígido ( $a = 1$ ) y una relación  $R/e = 400$  se tiene que  $w'' = 0,12e$ ; si se adopta un espesor de 8 cm resulta un valor aproximado  $w'' = 1$  cm.

Por un lado, la Ec. (5.37) devuelve un valor de  $w''$  muy conservador para láminas construidas con encofrado rígido, por otro, la Ec. (5.38) proporciona pequeños valores de imperfecciones para láminas muy delgadas. Además, estas ecuaciones no tienen en cuenta el valor de  $R$  para láminas de doble curvatura, sino sólo para esferas. Es por lo que Medwadowski (2004) propone la siguiente modificación para  $w''$

$$w'' = 0,1e \left[ 1 + \frac{5a}{(1 + \beta^{-2})} \right] \quad (5.39)$$

donde

$$\beta = 0,001 \left[ \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{e} \right], \text{ y}$$

$R_1, R_2$  radios medios principales de curvatura de la lámina.

Para láminas construidas mediante encofrados a base de aire a presión, se debe utilizar un valor de  $a$  muy alto, como  $a = 12$ . Para otros casos de encofrados, se puede interpolar entre los tres valores de  $a$  (1, 6 y 12).

Para la misma lámina empleada en el ejemplo anterior, con encofrado rígido y  $R/e = 400$ , resulta ahora  $w'' = 0,17e$ .

El coeficiente  $\alpha_1$  incluye los efectos de las imperfecciones de la superficie, pero no las del material (aunque en la propuesta de Kollár aparecen algunas recomendaciones) o las del espesor. Esto último no tiene gran influencia, pues aunque existen casos de estructuras de pequeño espesor, la probabilidad de que se construyan láminas muy delgadas en toda su superficie es escasa.

Resumiendo, el coeficiente  $\alpha_1$  puede obtenerse de la Figura 5.11 escogiendo, conservadoramente, la curva D; o bien de otra información similar que esté disponible para la geometría específica de la lámina analizada. La magnitud de la relación de imperfección  $w_0/e$  puede calcularse mediante las Ecs. (5.35) ó (5.36) y (5.39).

#### 5.3.4.4 Coeficiente de fluencia

Este coeficiente se estima a partir del módulo de elasticidad de fluencia  $E_{cr}$

$$E_{cr} = \frac{E_c}{(1 + C_u)} \quad (5.40)$$

siendo

$E_c$  módulo de elasticidad del hormigón,

$C_u = 4 - 2\log(f_c)$ , y

$f_c$  resistencia del hormigón en el instante de aplicar la carga, en MPa.

El coeficiente de fluencia  $\alpha_2$  se define como la relación entre el módulo de elasticidad de fluencia y el módulo de elasticidad del hormigón

$$\alpha_2 = \frac{E_{cr}}{E_c} = \frac{1}{[5 - 2\log(f_c)]} \quad (5.41)$$

Esta forma de estimar la fluencia se ha venido empleando en cualquier estructura de hormigón, según estableció, en una publicación especial, el Comité Americano para la Fluencia y la Retracción en el Hormigón (ACI 209, 1970).

#### 5.3.4.5 Coeficiente de armado y fisuración

Mediante este coeficiente se intenta incorporar el efecto de la fisuración del hormigón, que reduce la rigidez de la lámina e incrementa su deformación, y el efecto simultáneo de la presencia de armadura, que hace incrementar la rigidez de la misma.

En primer lugar se establece la relación entre el módulo de elasticidad del acero de la armadura  $E_s$  y el módulo de elasticidad de fluencia  $E_{cr}$

$$n = \frac{E_s}{E_{cr}} \quad (5.42)$$

A continuación, puede calcularse la relación de armado  $\mu$  como

$$\mu = \frac{A_s}{A_c} \quad (5.43)$$

siendo

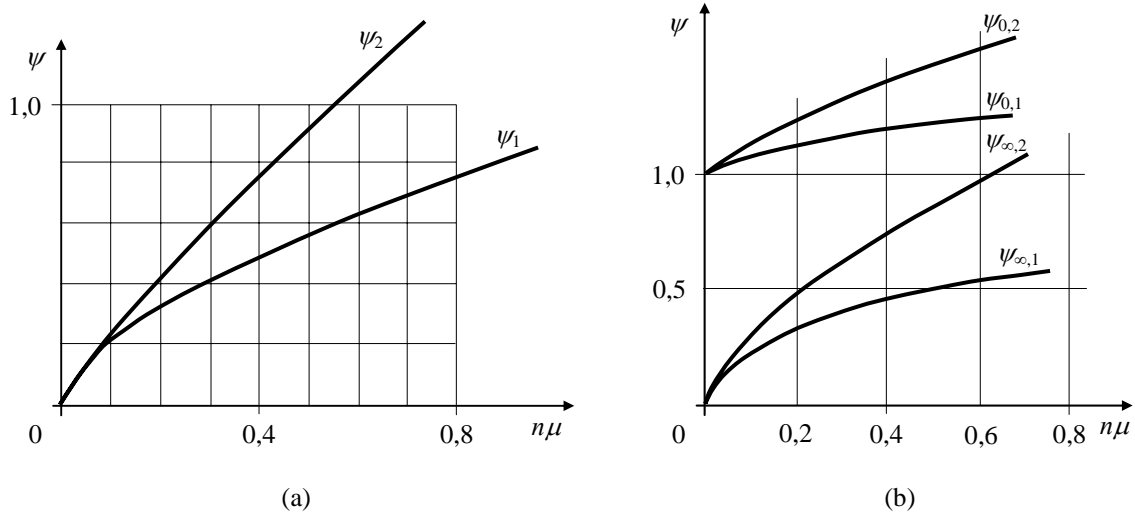
$A_s$  área total de armadura en una dirección (en una o dos capas), y

$A_c$  área de hormigón en la misma dirección, ambas, medidas por unidad de longitud de la sección de la lámina.

De la Figura 5.12a se puede obtener el coeficiente intermedio  $\psi$  a partir del valor del parámetro  $n\mu$  y de una de las curvas escogidas según el caso:  $\psi = 1,0$  para láminas sin armadura y no fisuradas;  $\psi_1$  para láminas fisuradas con una capa de armadura en su superficie media; y  $\psi_2$  para láminas fisuradas con dos capas de armaduras.

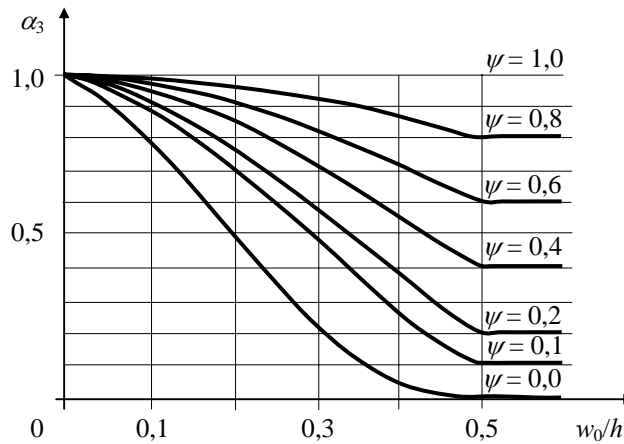
La propuesta de Kollár modifica el procedimiento anterior reemplazando la Figura 5.12a por la 5.12b, al incluir curvas de  $\psi$  para láminas no fisuradas con armadura:  $\psi_{0,1}$  para láminas no fisuradas con una capa de armadura;  $\psi_{\infty,1}$  para láminas fisuradas con una capa de armadura;  $\psi_{0,2}$  para láminas no fisuradas con dos capas de armadura; y  $\psi_{\infty,2}$

para láminas fisuradas con dos capas de armadura.



**Figura 5.12** Coeficiente intermedio de armado y fisuración  $\psi$ . (a) Recomendaciones de la IASS, 1979. (b) Propuesta de Kollár, 1993

A partir del valor  $\psi$  y de la imperfección  $w_0/e$  previamente calculada, se puede obtener el valor del coeficiente  $\alpha_3$  en la Figura 5.13.



**Figura 5.13** Coeficiente de armado y fisuración  $\alpha_3$  (Recomendaciones de la IASS, 1979)

Estos procedimientos de obtención de  $\alpha_3$  pueden no estar en consonancia con el comportamiento físico de la lámina antes del pandeo y en el inicio de éste. Es claro que, al menos, una dirección debe asociarse con las compresiones, no apareciendo fisuración en esa dirección. En la otra dirección estarán las tracciones, si existen, que harán decrecer el riesgo de aparición del fenómeno del pandeo. De este modo, parece que la manera más conservadora de incluir estos efectos es considerar la lámina como no fisurada y sin armadura, es decir, tomando  $\psi = 1$ , y siendo entonces  $\alpha_3 = 1$ . La validez de estas consideraciones las confirman los resultados experimentales obtenidos por Vandepitte, Rathe y Weymeis (1979).

Por tanto, es recomendable utilizar el coeficiente  $\alpha_3 = 1$  correspondiente a láminas no fisuradas y sin armadura. Si, a juicio del diseñador, la lámina a analizar requiere un estudio más detallado de los efectos de la posible fisuración y de las armaduras, se puede seguir el procedimiento que propone la IASS empleando las Figuras 5.12b y 5.13.

#### 5.3.4.6 Coeficiente de no linealidad del material

En las recomendaciones de la IASS se emplea la fórmula de interacción semi-cuadrática de Dunkerley para calcular la carga de pandeo no lineal reducida  $p_{nl}$

$$\left(\frac{p_{nl}}{p_{ult}}\right)^2 + \left(\frac{p_{nl}}{p_0}\right) = 1 \quad (5.44)$$

donde

$p_{ult}$  carga última o de rotura de la lámina, con el pandeo desacoplado, en el instante de plastificación del hormigón y del acero, actuando las fuerzas de compresión contenidas en su plano con una excentricidad  $w'$ , y

$p_0$  carga de pandeo lineal reducida, calculada en los apartados anteriores ( $p_0 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 p_{cr}$ ).

Es decir, que el coeficiente de no linealidad del material  $\alpha_4$  es

$$\alpha_4 = \frac{p_{nl}}{p_0} \quad (5.45)$$

Sustituyendo la Ec. (5.45) en la (5.44) y reorganizando términos se tiene la siguiente ecuación de segundo grado

$$\alpha_4^2 \left(\frac{p_0}{p_{ult}}\right)^2 + \alpha_4 - 1 = 0 \quad (5.46)$$

que una vez resuelta se tiene

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{p_{ult}}{p_0}\right)^2 \left[ -1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{p_0}{p_{ult}}\right)^2} \right] \quad (5.47)$$

En la propuesta de Kollár se empleó la fórmula de interacción cuadrática completa

$$\left(\frac{p_{nl}}{p_{ult}}\right)^2 + \left(\frac{p_{nl}}{p_0}\right)^2 = 1 \quad (5.48)$$

y siguiendo un razonamiento similar al anterior se puede obtener

$$\alpha_4 = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{p_0}{p_{ult}}\right)^2}} \quad (5.49)$$

Los valores de  $\alpha_4$  calculados mediante ambas expresiones difieren muy poco, siendo la propuesta de Kollár algo menos conservadora. La dificultad del método estriba en la obtención de  $p_{ult}$  para aquellas láminas cuyas geometrías compliquen la obtención de un estado tensional en el que la relación entre la flexión y la compresión sea  $w'$ .

#### 5.3.4.7 Coeficiente de seguridad

Las recomendaciones de la IASS sugieren emplear un coeficiente de seguridad 1,75 para láminas no sensibles a imperfecciones, y 3,50 para las sensibles o para las que no se pueda obtener información acerca de su sensibilidad a imperfecciones.

La propuesta de Kollár intenta establecer una base más racional para la determinación del coeficiente de seguridad, variando éste entre 1,5 y 3,0, en base a dos parámetros:

- 1) La pendiente de la curva en cada punto del coeficiente de imperfecciones  $\alpha_1$ , según el valor de  $w_0/e$ , y
- 2) la relación  $p'_{ult}/p_{cr}$ , siendo  $p'_{ult}$  la carga última o de rotura de la lámina bajo compresión centrada, sin considerar el pandeo.

Se recomienda incrementar el coeficiente de seguridad en el caso de emplear una teoría aproximada para obtener la carga de pandeo; de diferir el modelo analítico de la estructura real; o de no ser suficientemente precisos los datos del material.

Posteriormente, Dulácska y Kollár (1995) propusieron emplear sólo el segundo parámetro de los anteriores para establecer el coeficiente de seguridad (tabla 5.1). Si  $p'_{ult}/p_{cr} = 0$ , predomina el fallo por agotamiento plástico del material, y el coeficiente de seguridad ha de ser 1,5, es decir, igual al empleado en cualquier estructura de hormigón sin riesgo de inestabilidad por pandeo. En el otro extremo, si  $p'_{ult}/p_{cr} = \infty$ , el dominio ahora es el fallo por pandeo, debiéndose incrementar el coeficiente de seguridad, al menos, hasta 3,0 (3,5 según Medwadowski (2004)).

**Tabla 5.1** Valores mínimos del coeficiente de seguridad (Dulácska y Kollár, 1995)

$p'_{ult}/p_{cr}$	$\gamma$
0,0	1,50
0,5	1,90
1,0	2,35
2,0	2,75
$\infty$	3,00

Habitualmente se acepta que el punto que separa los dos modos de fallo es aquél en el que la carga de pandeo iguala a la carga última. No obstante, como es la carga de cálculo la que interesa en el diseño, se puede establecer que el modo de fallo por pandeo domina en el proceso si, para láminas sensibles a las imperfecciones, ocurre

$$\frac{\alpha_1 p_{cr}}{\gamma_b} < \frac{p_{ult}}{\gamma_m} \Rightarrow \alpha_1 p_{cr} < \frac{\gamma_b}{\gamma_m} p_{ult} \quad (5.50)$$

siendo  $\gamma_b$  y  $\gamma_m$  los coeficientes de seguridad en el caso de fallo por pandeo o por plastificación del material, respectivamente. Conservadoramente se pueden adoptar los valores extremos de 3,0 para  $\gamma_b$  y 1,5 para  $\gamma_m$ , siendo la relación  $\gamma_b/\gamma_m = 2$ .

Para tener en cuenta la pendiente de la curva en cada punto del coeficiente  $\alpha_1$ , el coeficiente de seguridad puede corregirse mediante la siguiente expresión

$$\gamma = 2,5 + e^{\left(-1,5 \frac{w_0}{e}\right)} \quad (5.51)$$

que varía, para los valores habituales de  $w_0/e$ , desde 2,75 hasta 3,50 aproximadamente, no siendo nunca inferior a 2,5.

En resumen, se puede adoptar los siguientes valores para el coeficiente de seguridad:

- Para láminas no sensibles a imperfecciones

$$\gamma = 1,50 \quad (5.52a)$$

- Para el resto de láminas,

si  $\alpha_1 p_{cr} > 2 p_{ult}$

$$\gamma = 1,50 \quad (5.52b)$$

si  $\alpha_1 p_{cr} < 2 p_{ult}$

$$\gamma = 2,5 + e^{\left(-1,5 \frac{w_0}{e}\right)} \quad (5.53)$$

## 5.4 ANÁLISIS NO LINEAL Y DE ESTABILIDAD EN ANSYS

### 5.4.1 Introducción

Se expone en este apartado las capacidades y aspectos más destacados que dispone el programa de elementos finitos ANSYS (ANSYS, 2004) para realizar análisis no lineal y de estabilidad de estructuras, comentando algunos de los comandos que se han empleado en los diferentes tipos de análisis efectuados.

### 5.4.2 Análisis no lineal en ANSYS

#### 5.4.2.1 Generalidades

El programa ANSYS emplea el método de Newton–Raphson modificado para resolver un análisis no lineal, aplicando la carga por escalones y utilizando una nueva matriz de rigidez sólo en la primera iteración de cada escalón (Figura 5.4b).

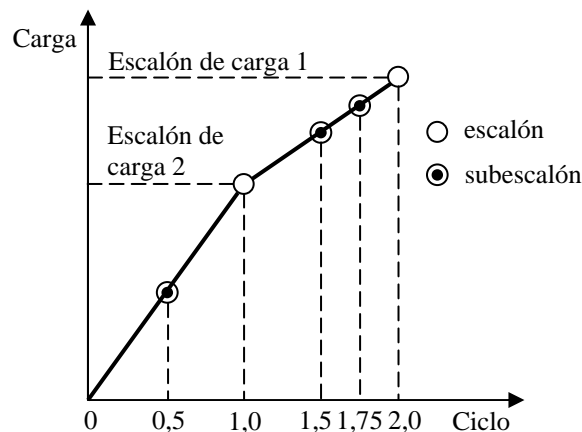
El programa dispone de herramientas de ayuda al problema de la convergencia,

como el escalonamiento automático de ciclo o carga (*automatic time stepping*), que detecta la aparición del problema y ajusta el tamaño de los incrementos de carga.

Aunque en este trabajo no ha sucedido, puede ocurrir que al utilizar el método de Newton–Raphson sólo, la matriz de rigidez se transforme singular, causando graves problemas de convergencia. Algo similar puede pasar en el análisis no lineal de pandeo, cuando la estructura colapsa o cambia su geometría a otra más estable. Para estas situaciones se puede activar el método longitud del arco o *arc-length* como procedimiento de iteración complementario, por el cual las iteraciones de equilibrio del método de Newton–Raphson convergen a lo largo de un arco que corta a la curva carga–desplazamiento para cada escalón, evitando la divergencia cuando la pendiente de esta curva se haga cero o negativa.

Un análisis no lineal en ANSYS se puede organizar en tres niveles (Figura 5.14):

- Nivel superior, donde se definen los escalones de carga para cada ciclo.
- Nivel intermedio, en el que se definen los subescalones de carga (o escalones de ciclo) con el fin de aplicar la carga gradualmente con variación lineal.
- Nivel inferior, en el que se realiza un determinado número de análisis iterativos en cada subescalón hasta alcanzar la convergencia.



**Figura 5.14** Esquema operativo de un análisis no lineal en ANSYS

El criterio de convergencia se puede basar en fuerzas (o momentos), en desplazamientos (o rotaciones), o en una combinación de ellos, mediante el establecimiento de una tolerancia para cada parámetro.

Si se utilizan múltiples subescalones se puede incrementar mucho el tiempo de cálculo, por lo que se debe llegar a un compromiso entre precisión y coste computacional. ANSYS dispone de un procedimiento denominado bisección (*bisection*), por el cual, la función escalonamiento automático de ciclo va ajustando el tamaño de los subescalones, dividiéndolos sucesivamente por dos hasta alcanzar la convergencia o el tamaño mínimo definido para el subescalón.

Por último, indicar que las cargas superficiales se mantendrán normales al



elemento a lo largo del proceso de análisis, siguiendo a la deformada de la estructura.

#### 5.4.2.2 *No linealidad geométrica y del material*

La no linealidad geométrica se activa mediante el comando NLGEOM. El procedimiento requiere mantener los incrementos de deformación dentro de un margen razonable, por lo que la carga total debe ser aplicada en escalones de carga pequeños. Se puede incluir el efecto de los grandes desplazamientos o de las grandes deformaciones, según el tipo de elemento.

La no linealidad del material se ha de definir mediante el empleo de tablas de datos, que se generan utilizando la familia de comandos TB. Los tipos de comportamiento no lineal que permite ANSYS son los siguientes:

- *Plasticidad*. Relación tenso-deformacional lineal hasta el límite de proporcionalidad, y no lineal a partir de él. El comportamiento plástico se caracteriza por una deformación no recuperable que tiene lugar cuando la tensión supera el límite elástico. Ambos puntos, límite de proporcionalidad y límite elástico, suelen estar muy próximos, por lo que el programa adopta el mismo punto para los dos.
- *Elasticidad multilínea*. Se trata de una respuesta de tipo conservativo, esto es, independiente de la trayectoria, la descarga se mueve por la misma curva tensión-deformación que la carga. En modelos que incorporen esta no linealidad del material puede ser interesante emplear escalones de carga relativamente largos.
- *Hiperelasticidad*. Se emplea para materiales que presenten grandes deformaciones y desplazamientos, pero con pequeños cambios de volumen, es decir, materiales que sean incompresibles o muy poco compresibles.
- *Fluencia*. Deformación continua sin aumentar la carga. Si se impone un desplazamiento, la fuerza de reacción, y por tanto la tensión, disminuirá con el tiempo. Se emplea, además de en el hormigón, en materiales sometidos a altas temperaturas, como por ejemplo, en reactores nucleares.
- *Viscoplasticidad*. Es un fenómeno de plasticidad dependiente del tiempo, donde el desarrollo de la deformación plástica depende de una proporción de la carga. Las principales aplicaciones se dan en procesos de metales sometidos a altas temperaturas, como el laminado en caliente, lo que involucra grandes deformaciones plásticas con escasa deformación elástica.
- *Viscoelasticidad*. Es similar a la fluencia, pero parte de la deformación se recupera una vez retirada la carga. El cristal y algunos plásticos son ejemplos muy comunes de material viscoelástico.

#### 5.4.2.3 *Planteamiento del análisis no lineal de la lámina en hypar*

Partiendo de los diseños de la lámina obtenidos en los procesos de optimización, se ha

reproducido el comportamiento elasto-plástico no lineal del hormigón como si se tratase de un material con elasticidad multilínea, es decir, suponiendo un comportamiento conservativo, mediante el comando `TB,MELAS`. El primer tramo del diagrama de Sargin, Ec. (5.19), se ha discretizado en 20 subtramos rectos, empleando el comando `TBPT`, que permite definir puntos de la curva tensión-deformación mediante incrementos en la deformación. Estos incrementos adoptan el valor  $1,85 \cdot 10^{-4}$  m, y el límite es el correspondiente a la resistencia característica del hormigón de 30 MPa, esto es,  $3,70 \cdot 10^{-3}$  m (Figura 5.15).

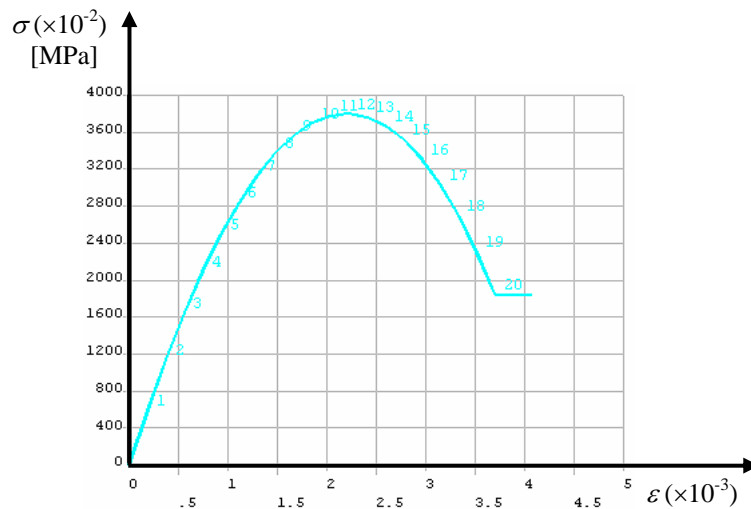


Figura 5.15 Curva tensión-deformación discretizada del hormigón

A continuación se describe parte del código en lenguaje ANSYS (basado en FORTRAN) para implementar esta curva tensión-deformación

```

1   EPCM=3.7E-3                               !Definición de parámetros
2   ECO=2.15E4
3   FCMO=10
4   EPC1=0.0022
5   EC1=FCM/0.0022
6   ECI=ECO*(FCM/FCMO)**(1/3)
7   EPC=1.85E-4
8   SIGMAC=FCM*((ECI/EC1)*(EPC/EPC1)-(EPC/EPC1)**2)/(1+(((ECI/EC1)-
9   2)*EPC/EPC1))
10  E=(SIGMAC/EPC)*10E5
11  MP,EX,1,E                                  !Módulo de elasticidad
12  MP,EY,1,E
13  MP,EZ,1,E
14  TB,MELAS,1                                  !Activa tabla datos material elástico multilínea
15  *DO,EPC,0,EPCM,1.85E-4                    !Bucle de discretización diagrama de Sargin
16    SIGMAC=FCM*((ECI/EC1)*(EPC/EPC1)-(EPC/EPC1)**2)/(1+(((ECI/EC1)-
17    2)*EPC/EPC1))*10E5
18  TBPT,DEFI,EPC,SIGMAC
19  *ENDDO
20  TBLIST,MELAS                                !Crea listado de tabla de datos del material
21  TBPLOT,MELAS                                !Muestra la tabla de datos del material
22  MP,NUXY,1,POISSON                          !Coeficiente de Poisson
23  MP,DENS,1,CARGA1                            !Densidad del hormigón

```

Una vez introducida la no linealidad del material, la secuencia consiste en definir

el tipo de análisis con sus opciones, aplicar las cargas, especificando los escalones de carga con sus opciones, y resolver.

Entre las opciones de los escalones de carga se tiene el número de ciclos y el tamaño y número de subescalones. El comando NSUBST define el número de subescalones a adoptar en cada escalón de carga. Se ha definido 10 subescalones, y para la opción en la que se utiliza el escalonamiento automático, un máximo de 1000 y un mínimo de 1.

Respecto al criterio de convergencia, por defecto ANSYS emplea una tolerancia para las fuerzas de un 0,5%, lo que resulta apropiado en la mayoría de casos. Se compara la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las fuerzas residuales ( $SRSS$ ) con el valor  $0,005SRSS$ . Además del chequeo de la convergencia de fuerzas se puede añadir un chequeo de desplazamientos. Una tolerancia muy pequeña supone mejores resultados, pero implica un coste computacional alto, por lo que hay que ajustarla a un valor de compromiso. Para la lámina se han fijados dos criterios de convergencia, uno para las fuerzas y otro para los desplazamientos, con una tolerancia ambos de un 0,1%.

Por último, hay que establecer un número máximo de análisis o iteraciones de equilibrio. ANSYS automáticamente asigna entre 15 y 26, dependiendo de la física del problema. La idea es utilizar pequeños escalones de ciclo con el menor número análisis posible. Si no se alcanza el criterio de convergencia después de ese número de iteraciones, y el escalonamiento automático de ciclo está activado, el programa realizará una bisección. Si no es posible realizarla, el análisis finalizará o pasará al siguiente escalón de carga, según se halla establecido. En los análisis realizados para los diseños se ha fijado un número máximo de iteraciones de equilibrio de 15.

A continuación se describe parte del código escrito en esta secuencia

```

1  !PARÁMETROS DEL ANÁLISIS NO LINEAL
2  AUTINCR=1          !¿Incrementos automáticos de carga [1=si/ 0=no]?
3  N_INIC=10         !Nº inicial subescalones (si se activa incrementos
                    !automáticos: tamaño del primer subescalón)
4  N_MAX=1000        !Si se activa incrementos automáticos: nº max
                    !subescalones o min tamaño de incremento
5  N_MIN=1           !Si se activa incrementos automáticos: nº min
                    !subescalones o max tamaño de incremento
6  TOL_F=0.001      !Tolerancia para las fuerzas
7  TOL_D=0.001      !Tolerancia para los desplazamientos
8  NUMITER=15       !Nº max iteraciones equilibrio en cada subescalón

...
1  /SOLUTION          !Procesador solución
2  ANTYPE,STATIC     !Análisis estático
3  NLGEOM,ON         !Activa grandes desplazamientos
4  *IF,AUTINCR,EQ,1,THEN
5      AUTOTS,ON      !Incrementos de carga automáticos
6      NSUBST,N_INIC,N_MAX,N_MIN !Nº subescalones: inicial, max y min
7  *ELSEIF,AUTINCR,EQ,0
8      AUTOTS,OFF     !Incrementos de carga predefinidos
9      NSUBST,N_INIC,N_INIC,N_INIC !Nº subescalones: inicial, max y min
10 *ENDIF
11 KBC,0             !Variación lineal de carga dentro de un escalón
12 NCVN,2            !Si no converge, fin análisis pero no fin programa
13 NEQIT,NUMITER     !Nº max iteraciones equilibrio en un subescalón

```

```

14 CNVTOL,F,,TOL_F      !Tolerancia de convergencia para fuerzas residuales
15 CNVTOL,U,,TOL_D      !Tolerancia de convergencia para desplazamientos

```

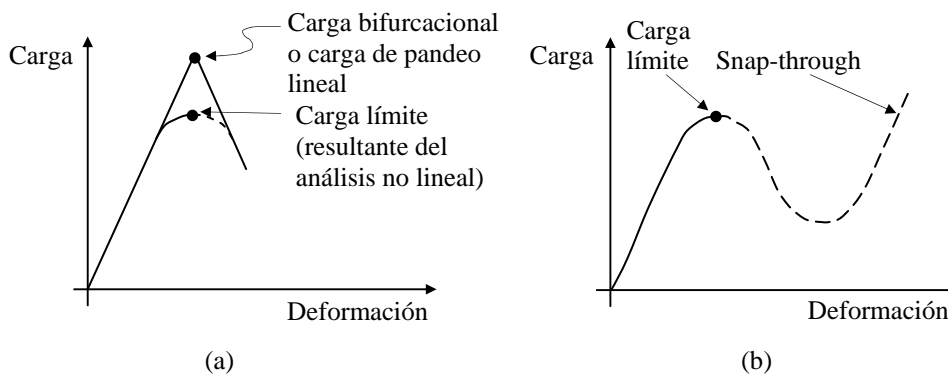
### 5.4.3 Análisis de estabilidad en ANSYS

#### 5.4.3.1 Generalidades

El programa dispone de dos técnicas para obtener la carga de pandeo y los modos de pandeo de la estructura, el análisis de estabilidad inicial o análisis de autovalores y el análisis no lineal de pandeo.

El análisis de estabilidad inicial predice una carga de pandeo teórica, correspondiente al punto de bifurcación de una estructura ideal con comportamiento elástico y lineal (Figura 5.16a). Puede servir para establecer un orden de magnitud de la carga de pandeo, pero produce resultados poco conservadores, por lo que no debe emplearse para otro fin.

El análisis de estabilidad no lineal proporciona resultados más cercanos a la realidad. Se incrementa gradualmente la carga hasta alcanzar el nivel en el que la estructura se vuelve inestable (Figura 5.16b). Al emplear análisis no lineal, el modelo puede incluir imperfecciones iniciales, comportamiento plástico, fisuración y grandes desplazamientos. Además, mediante el proceso controlado de carga, puede estudiarse el comportamiento post-pandeo, lo que puede ser de utilidad en el caso en que la estructura recupere su estabilidad e incremente su resistencia (comportamiento “snap-through”), como puede ocurrir por ejemplo en una cúpula rebajada.



**Figura 5.16** Curvas de pandeo. (a) Análisis de estabilidad inicial o de autovalores. (b) Análisis no lineal

#### 5.4.3.2 Análisis de estabilidad inicial

La estructura se modeliza especificando material lineal y teniendo en cuenta una serie de consideraciones:

- Es necesario activar el comando PSTRES para que se realice el cálculo de la matriz de rigidez de tensiones.
- Es recomendable definir un estado de cargas unitarias, pues los autovalores

calculados representan un factor de la carga de pandeo, por lo que se obtendrían las cargas de pandeo reales.

- Como los autovalores son factores para todas las cargas, si se tiene cargas constantes y variables, hay que asegurarse que la matriz de rigidez de tensiones para las constantes no está factorizada por la solución de autovalores.

Para realizar el análisis de autovalores de la lámina se ha aplicado una carga igual a su peso propio, de forma que los autovalores que se obtengan representen la carga de pandeo expresada como múltiplo del peso propio de la estructura.

La extracción de los autovalores se realiza mediante el método matricial de iteración subespacial de ANSYS. El programa por defecto proporciona un único autovalor, que suele ser suficiente para los problemas habituales de pandeo, pero se pueden extraer más. Los valores negativos de los autovalores indican que el pandeo ocurre cuando las cargas son aplicadas en sentido contrario.

Para revisar la forma de los modos de pandeo hay que desplegar la solución, que consiste simplemente en escribir los modos de pandeo en un fichero de resultados. Para ello se utilizan los comandos EXPASS y MXPAND.

Para visualizar los modos de pandeo se plotea la deformada de la estructura, o la deformada y la no deformada juntas, mediante el comando PLDISP.

La secuencia de comandos empleada es

```

1  /SOLU                                     !Procesador solución
2  ANTYPE, BUCK                             !Análisis de autovalores
3  BUCOPT, SUBSP, NMODOS                    !Método de extracción de autovalores
4  SOLVE
5  FINISH
6  /SOLU
7  EXPASS, ON                               !Visualización de modos
8  MXPAND, , , , YES                        !Despliega y escribe todos los modos de pandeo
9  OUTRES, ALL, ALL                          !Escribe todo al fichero de salida de resultados
10 SOLVE
11 FINISH
12 SAVE
13 /POST1                                   !Postprocesador de resultados
14 /DSCALE, 1, 50                           !Escala de desplazamientos
15 /WIN, 1, LTOP                             !Creación de ventanas
16 /WIN, 2, RTOP
17 /WIN, 3, LBOT
18 /WIN, 4, RBOT
19 /WINDOW, ALL, OFF
20 *DO, I, 1, 4                               !Bucle de ploteado de modos de pandeo
21   /WINDOW, I, ON
22   /TRIAD, OFF
23   /PLOPTS, INFO, 0
24   /VIEW, I, 0, 0, 1
25   /ANGLE, I, 0
26   /ANGLE, I, -45, XS, 1
27   /ANGLE, I, -10, ZS, 1
28   SET, 1, I
29   PLDISP, 0, 1
30   /NOERASE
31   /WINDOW, I, OFF
32 *ENDDO

```

### **5.4.3.3 Análisis de estabilidad no lineal**

En este tipo de análisis se debe utilizar unos incrementos de carga lo suficientemente pequeños para que la solución se acerque todo lo posible a la carga de pandeo real. Para ello es útil activar la función de incrementos de carga automáticos y la bisección (AUTOTS ,ON).

Con el fin de poder comparar este análisis con el análisis de autovalores, se ha modelizado la estructura de forma que los resultados que se obtengan vengan expresados en función del peso propio de la misma. Se establece como carga límite la obtenida en el análisis de autovalores, carga hacia la que intenta converger el programa, aunque el proceso de bisección y resolución continúa hasta obtener el mínimo incremento establecido para un subescalón.

Podría suceder que la solución no converja por una inestabilidad numérica. En este caso es conveniente seguir el historial carga–desplazamiento de la estructura, para comprobar si un escalón de carga que no converge representa el pandeo de la estructura o ha surgido algún otro problema. Puede ser de utilidad activar el procedimiento de iteración complementario de longitud del arco mediante el comando ARCLLEN, aunque en este caso hay que desactivar la función de incrementos de carga automáticos (AUTOTS ,OFF). A continuación se compara los valores obtenidos mediante los métodos de la bisección y de la longitud del arco para determinar si la estructura ha alcanzado su carga máxima.

Conviene tener presente que si la carga sobre la estructura está perfectamente centrada en un plano, el desplazamiento fuera de éste, necesario para que se inicie el pandeo, no se desarrollará, por lo que se requiere, por ejemplo, aplicar pequeñas cargas perturbadoras. En este trabajo se va incrementando gradualmente la carga hasta hacer colapsar a la estructura, partiendo de la configuración deformada, según el primer modo de pandeo, escalada de tal forma que el máximo desplazamiento sea igual a la medida de la imperfección  $w_0$  calculada en la Ec. (5.36).

También conviene recordar que las fuerzas y desplazamientos mantendrán constante su orientación a lo largo del proceso, pero las cargas superficiales irán cambiando según se deforme la estructura.

La secuencia de comandos es similar a la expuesta para el análisis no lineal, sólo que añadiendo en este caso la carga perturbadora.

## **5.5 EJEMPLOS**

Se han realizado dos estudios sobre los diseños inicial y óptimos de la lámina empleada en el capítulo 4, uno de no linealidad, distinguiendo la no linealidad geométrica de la no linealidad del material y combinando ambas, y otro de estabilidad, empleando análisis de estabilidad inicial, análisis no lineal y un método basado en las recomendaciones de la IASS.

## 5.5.1 Estudio de no linealidad de los diseños del hypar

### 5.5.1.1 Tipos de análisis empleados

El estudio del comportamiento no lineal de cada diseño, inicial y óptimos, se ha abordado mediante distintos tipos de análisis, comparando resultados entre ellos y con el análisis lineal, lo que ha permitido verificar el grado de aplicabilidad de cada uno y comprobar la seguridad de las hipótesis de linealidad. Los tipos de análisis han sido:

- Lineal (L),
- no lineal geométrico (NLG),
- no lineal del material (NLM), y
- no lineal geométrico y del material (NLGM).

El análisis NLG tiene en cuenta los cambios de geometría que sufre la estructura cuando se la somete a un determinado estado de cargas, desapareciendo así la hipótesis de pequeñas deformaciones utilizada en el análisis lineal. Sin embargo, se mantiene la hipótesis de linealidad del material.

En el caso del análisis NLM, se utiliza el primer tramo de la curva tensión–deformación del diagrama de Sargin (Ec. 5.19), implementada en ANSYS mediante una discretización multilineal de 20 subtramos (Figura 5.15). Ya no se emplea un módulo de elasticidad longitudinal constante, sino variable en función del estado de carga a que esté sometido el material.

Por último, se ha combinado los dos anteriores para realizar el análisis NLGM, ajustándose más al comportamiento real de la estructura, aunque faltaría, en el marco de un método general, tener en cuenta los efectos estructurales de las deformaciones diferidas en el hormigón.

En los casos de análisis lineal y NLG se emplea como módulo de elasticidad un valor reducido del módulo tangente en el origen, pudiendo adoptar, según establece el Código modelo MC-90, el módulo secante  $E_c$ , cuyo valor se ha obtenido en la Ec. (4.29).

### 5.5.1.2 Diseño inicial

Los valores de los parámetros que definen la geometría del diseño inicial vienen recogidos en la tabla 4.4. A partir de éstos se puede obtener la altura del borde libre del paraboloide y el radio o distancia en planta desde el centro de la estructura hasta uno de sus apoyos (tabla 4.5). Tras la definición del modelo se ha realizado los tipos de análisis especificados, estableciendo las comparaciones correspondientes entre resultados.

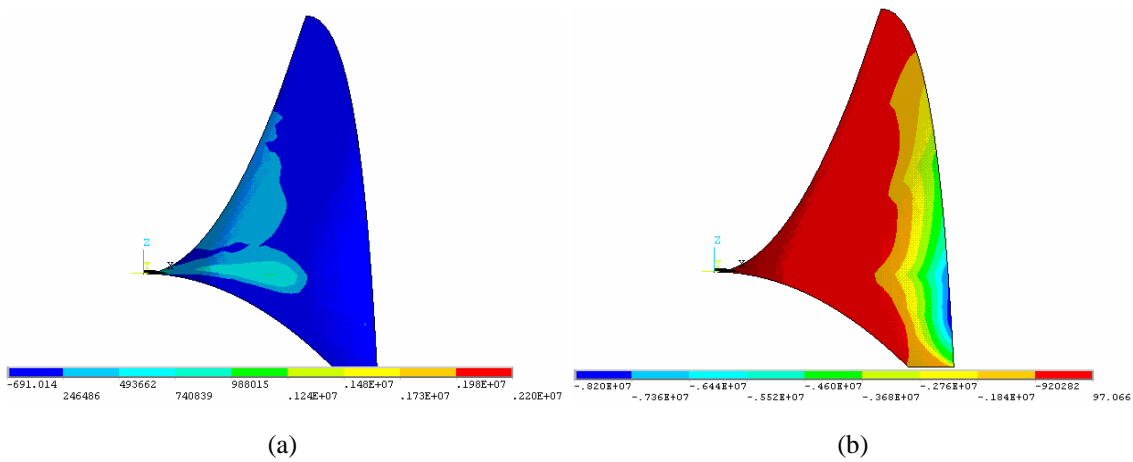
#### *Análisis lineal vs. análisis NLG*

Mediante el contraste de estos dos análisis se puede comprobar el efecto que tiene la inclusión de las grandes deformaciones en el análisis de la estructura. Han sido necesarias 19 iteraciones para llegar a la solución. En la tabla 5.2 aparecen las tensiones

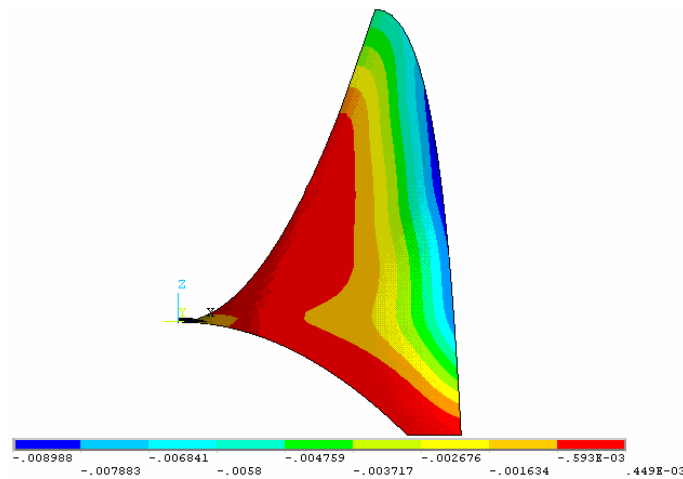
máximas de tracción ( $\sigma_t$ ) y de compresión ( $\sigma_c$ ), el máximo desplazamiento vertical ( $u_{z,max}$ ) y la energía de deformación ( $ED$ ) de la estructura. Los mapas de tensiones de tracción y compresión y los desplazamientos verticales se representan en la Figuras 5.17 y 5.18 respectivamente.

**Tabla 5.2** Diseño inicial. Análisis lineal vs. análisis NLG. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	$ED$ (mN)
L	2,19	7,89	8,73	881,77
NLG	2,20	8,20	8,99	895,90



**Figura 5.17** Análisis NLG del diseño inicial. Tensiones máximas [Pa]. (a) Tracciones en la cara inferior. (b) Compresiones en la cara superior



**Figura 5.18** Análisis NLG del diseño inicial. Desplazamientos  $u_z$  [m]

El nivel de tensiones alcanzado en el análisis NLG es escasamente superior al obtenido en el lineal, un 0,46% para la máxima tracción y un 3,93% para la máxima compresión. Igualmente sucede para el máximo desplazamiento vertical, con una



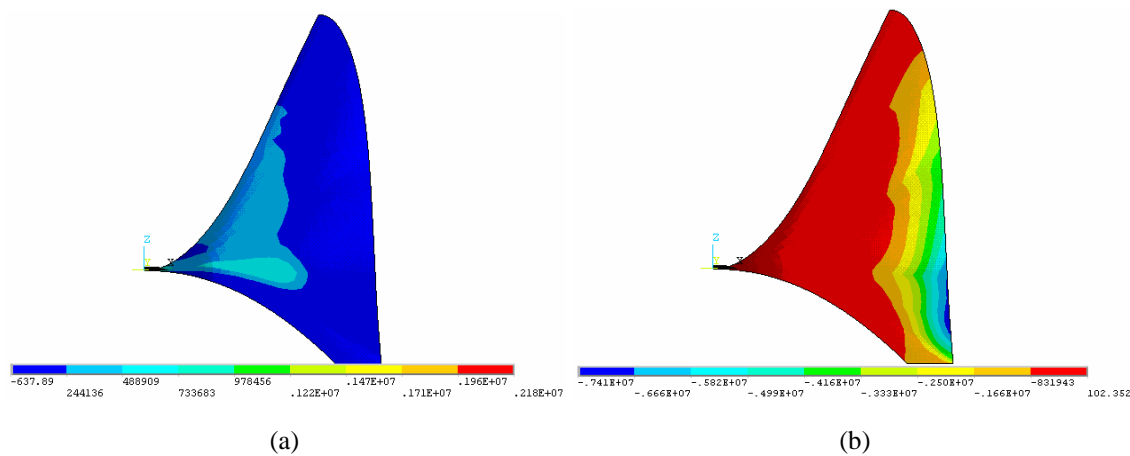
diferencia del 2,98%. En base a esto, parece lógico que la energía de deformación también incremente su valor, como así resulta en un 1,60%. Las diferencias son reducidas, por lo que no tiene gran influencia incluir en el análisis las grandes deformaciones, al menos en este caso, en el que los desplazamientos son pequeños.

*Análisis lineal vs. análisis NLM*

Se comprueba ahora el efecto del comportamiento del material en el análisis de la estructura. Han sido necesarias 16 iteraciones para llegar a la solución. En la tabla 5.3 aparecen los valores máximos de las tensiones y del desplazamiento vertical, así como la energía de deformación. Los mapas de tensiones de tracción y compresión y los desplazamientos verticales se representan en la Figuras 5.19 y 5.20 respectivamente.

**Tabla 5.3** Diseño inicial. Análisis lineal vs. análisis NLM. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
L	2,19	7,89	8,73	881,77
NLM	2,18	7,41	7,73	779,64



**Figura 5.19** Análisis NLM del diseño inicial. Tensiones máximas [Pa]. (a) Tracciones en la cara inferior. (b) Compresiones en la cara superior

Comparando los resultados de ambos análisis, la máxima tensión de tracción es prácticamente la misma, sólo un 0,46% de diferencia, sin embargo, la máxima compresión obtenida en el análisis NLM es menor a la obtenida en el análisis lineal, un 6,08%. Las mayores diferencias se aprecian en términos de desplazamientos, un 11,45% menos para el análisis no lineal.

Esto es lógico si se tiene en cuenta que en el análisis lineal se emplea una relación tenso-deformacional constante correspondiente al módulo de elasticidad secante, que se sitúa por la parte inferior de la curva tensión-deformación empleada en el análisis NLM. Por tanto, para una misma tensión  $\sigma$ , la deformación  $\varepsilon$  es mayor en el caso lineal ( $\varepsilon_l$ ), según puede apreciarse en la Figura 5.21. Esto confirma la recomendación propuesta en

los códigos de diseño, en particular en el Código modelo MC-90 y en la instrucción EHE, de emplear el módulo de elasticidad secante en el análisis lineal.

El que la energía de deformación sea también menor, un 11,58%, es consecuencia directa de lo anterior.

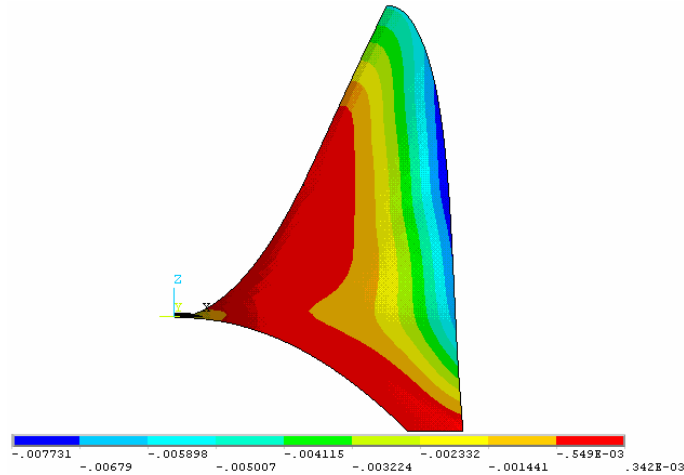


Figura 5.20 Análisis NLM del diseño inicial. Desplazamientos  $u_z$  [m]

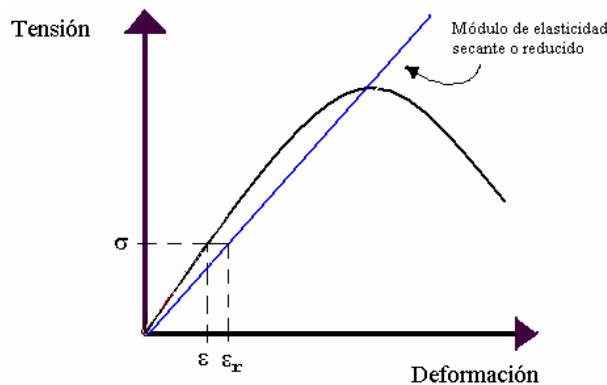


Figura 5.21 Diagrama tensión-deformación no lineal vs. lineal adoptando el módulo de elasticidad secante

### Análisis lineal vs. análisis NLGM

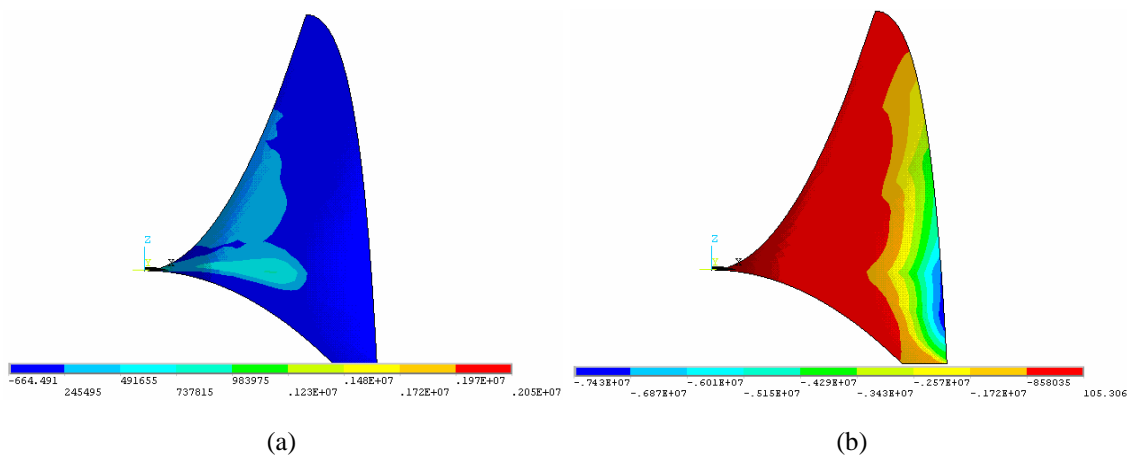
Se combina en este caso los efectos de las grandes deformaciones y de la no linealidad del material. Han sido necesarias 20 iteraciones para llegar a la solución. Se muestra la tabla 5.4 con los valores máximos de las tensiones y del desplazamiento vertical, así como la energía de deformación. Los mapas de tensiones de tracción y compresión y los desplazamientos verticales se representan en la Figuras 5.22 y 5.23 respectivamente.

La tensión máxima de tracción adopta el mismo valor en ambos análisis, mientras que la de compresión es un 3,17% menor para el caso no lineal. De nuevo, las mayores diferencias se aprecian en términos de desplazamientos, un 9,16% menos en el análisis

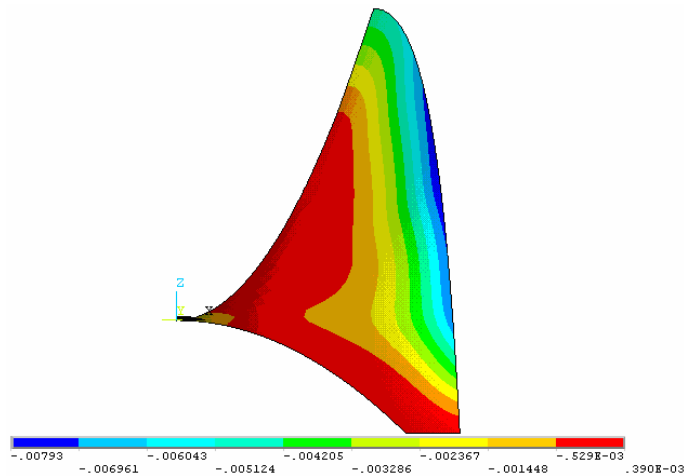
no lineal, al igual que la energía de deformación, un 10,35% menos. La justificación es análoga a la expuesta en el caso anterior, sólo que aquí, al incluir el efecto de las grandes deformaciones, el desplazamiento obtenido es algo mayor y, por tanto, la energía de deformación.

**Tabla 5.4** Diseño inicial. Análisis lineal vs. análisis NLGM. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
L	2,19	7,89	8,73	881,77
NLGM	2,19	7,64	7,93	790,52



**Figura 5.22** Análisis NLGM del diseño inicial. Tensiones máximas [Pa]. (a) Tracciones en la cara inferior. (b) Compresiones en la cara superior



**Figura 5.23** Análisis NLGM del diseño inicial. Desplazamientos  $u_z$  [m]

Se observa que los resultados del análisis lineal son conservadores, es decir, predicen unas deformaciones y desplazamientos superiores a las del análisis no lineal. Esto es razonable si se tiene en cuenta el rango de tensiones resultante, tan alejado de

los límites permitidos en las restricciones, así como el pequeño valor de los desplazamientos. De hecho, al realizar análisis lineal empleando el módulo de elasticidad secante, la instrucción EHE proporciona un límite de validez para las tensiones de servicio del 45% de la resistencia característica a compresión del hormigón a  $j$  días de edad. En este caso, ese límite es de 13,5 MPa ( $E_c$  4.30), valor que se encuentra muy alejado de las tensiones obtenidas, las cuales, además, son tensiones de cálculo.

#### *Análisis NLM vs. análisis NLGM*

Todos los valores de los parámetros del análisis NLGM son mayores que los del NLM (tabla 5.5), aunque las diferencias sean reducidas debido a la escasa influencia de las grandes deformaciones en este caso. Las tensiones difieren entre un 0,46 y un 3,10%, el desplazamiento un 2,59% y la energía de deformación un 1,40%.

**Tabla 5.5** Diseño inicial. Análisis NLM vs. análisis NLGM. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
NLM	2,18	7,41	7,73	779,64
NLGM	2,19	7,64	7,93	790,52

#### *Análisis NLG vs. análisis NLGM*

En la tabla 5.6 se observa que todos los valores del análisis NLG son mayores que los del NLGM. La compresión difiere un 7,33%, el desplazamiento un 13,37% y la energía de deformación un 13,33%. Estas diferencias son más acusadas que en el caso anterior, excepto para la tensión de tracción, debido a que la no linealidad del material sólo se ha incluido en uno de los análisis.

**Tabla 5.6** Diseño inicial. Análisis NLG vs. análisis NLGM. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
NLG	2,20	8,20	8,99	895,90
NLGM	2,19	7,64	7,93	790,52

#### *Resumen de resultados*

Para resumir, en la tabla 5.7 se expone una comparativa entre los resultados de todos los análisis realizados al modelo inicial. Las filas están ordenadas de menor a mayor valor.

Una consecuencia inmediata que se extrae de la visualización de esta tabla, al margen de los comentarios realizados previamente, es que el análisis NLG arroja

resultados conservadores si se emplea de forma aislada sin completarlo con la no linealidad del material, más incluso que los del análisis lineal para este rango de tensiones. Estos resultados pueden cuantificarse en más del 10% para el desplazamiento máximo y para la energía de deformación respecto del análisis NLGM.

**Tabla 5.7** Diseño inicial. Resumen de resultados. Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
NLM	2,18	7,41	7,73	779,64
NLGM	2,19	7,64	7,93	790,52
L	2,19	7,89	8,73	881,77
NLG	2,20	8,20	8,99	895,90

### 5.5.1.3 Diseños óptimos

Se ha procedido a realizar diferentes análisis no lineales de los diseños óptimos de la lámina obtenidos en el capítulo 4. Las conclusiones que se obtienen son similares a las del diseño inicial, por lo que sólo se muestran los resultados y se realiza un breve comentario de los mismos. Más adelante se exponen unas figuras que permiten visualizar los resultados y compararlos gráficamente.

#### Proceso 1. Función objetivo energía de deformación (ED) con espesor mínimo 6 cm

Las variables de diseño empleadas en el modelo de la lámina analizada son las obtenidas tras el correspondiente proceso de optimización (tabla 4.8). En la tabla 5.8 se exponen los resultados de los cuatro tipos de análisis.

**Tabla 5.8** Diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 6$  cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
NLM	1,32	4,96	3,41	263,43
NLGM	1,32	5,03	3,46	264,83
L	1,33	4,96	3,90	297,94
NLG	1,33	5,04	3,92	299,76

Adoptando valores medios para cada parámetro, se observa la notable mejora conseguida en el comportamiento mecánico de la lámina tras la optimización, pues se ha alcanzado reducciones importantes en estos parámetros de respuesta. Ordenados de menor a mayor se tiene un 35,81% en la máxima tensión de compresión, 39,50% en la de tracción, 55,99% en el máximo desplazamiento vertical y 66,37% en la energía de deformación.

Se mantienen las diferencias superiores al 10% entre el análisis NLG y el NLGM

para el desplazamiento y la energía de deformación, si bien ahora, al estar optimizado el comportamiento estructural de la lámina, las tensiones están más ajustadas entre los distintos tipos de análisis.

*Proceso 2. Función objetivo energía de deformación (ED) con espesor mínimo 8 cm*

Las variables de diseño empleadas en el modelo son las de la tabla 4.12. Los resultados de los cuatro tipos de análisis se exponen en la tabla 5.9.

**Tabla 5.9** Diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 8$  cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
NLM	1,31	4,22	2,88	265,83
NLGM	1,34	4,26	2,91	266,83
L	1,29	4,22	3,25	300,66
NLG	1,32	4,26	3,29	301,94

Adoptando de nuevo valores medios para los parámetros, en este diseño los resultados de la tensión de tracción y de la energía de deformación son muy parecidos al diseño óptimo anterior. Sin embargo, se consigue reducir bastante la tensión de compresión, un 15,16%, y el desplazamiento vertical, un 16,07%, respecto a él. Esto implica que al permitir mayor espesor de la lámina, se consigue mejorar aún más su comportamiento mecánico.

Entre los distintos tipos de análisis se observan las mismas diferencias que en los anteriores diseños, si bien ahora ha resultado una tensión de tracción mayor en el análisis NLGM que se acerca al máximo de 1,35 MPa. En base a esto, podría darse el caso de optimizar un diseño mediante análisis lineal y, al comprobarlo mediante análisis no lineal, se violara alguna restricción.

*Proceso 3. Función objetivo peso (W) con espesor mínimo 6 cm*

Las variables de diseño empleadas en el modelo son las de la tabla 4.16. Los resultados de los cuatro tipos de análisis se exponen en la tabla 5.10.

**Tabla 5.10** Diseño óptimo (F.Obj. W con  $e_{min} = 6$  cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
NLM	1,26	4,89	3,48	281,42
NLGM	1,28	4,93	3,54	283,06
L	1,26	4,89	3,94	318,29
NLG	1,29	4,93	4,01	320,40

Al comparar este diseño óptimo con el inicial, se observan mejoras muy similares

a las alcanzadas en la optimización de la energía de deformación con espesor 6 cm. Respecto a este último diseño, la única diferencia a resaltar es una reducción de la tensión de tracción del 3,96% a costa de un incremento en la energía del 6,86%.

Las diferencias entre los distintos tipos de análisis son semejantes a los casos anteriores.

*Proceso 4. Función objetivo peso ( $W$ ) con espesor mínimo 8 cm*

Las variables de diseño empleadas en el modelo son las de la tabla 4.20. Los resultados de los cuatro tipos de análisis se exponen en la tabla 5.11.

**Tabla 5.11** Diseño óptimo (F.Obj.  $W$  con  $e_{min} = 8$  cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
NLM	1,10	4,27	2,89	324,67
NLGM	1,11	4,31	2,93	325,86
L	1,10	4,27	3,27	367,20
NLG	1,12	4,31	3,31	368,71

Se observa diferencias importantes con el diseño anterior en el que se optimizó el peso con espesor mínimo 6 cm, al disminuir las tensiones en torno al 13% y el desplazamiento un 17,17%, a costa de aumentar la energía de deformación un 15,23%. Es decir, de nuevo un aumento en el espesor de la lámina permite reducir tensiones y deformaciones máximas.

*Proceso 5. Función objetivo mayor tensión principal  $\sigma_1$  ( $\sigma_t$ ) con espesor mínimo 6 cm*

Las variables de diseño empleadas en el modelo son las de la tabla 4.24. Los resultados de los cuatro tipos de análisis se exponen en la tabla 5.12.

**Tabla 5.12** Diseño óptimo (F.Obj.  $\sigma_t$  con  $e_{min} = 6$  cm). Tensiones máximas, desplazamiento máximo y energía de deformación para diversos análisis

Análisis	$\sigma_t$ (MPa)	$\sigma_c$ (MPa)	$u_{z,max}$ (mm)	ED (mN)
NLM	1,05	4,75	2,00	455,67
NLGM	1,04	4,73	2,01	456,23
L	1,05	4,75	2,26	514,36
NLG	1,04	4,73	2,28	516,08

Al emplear como función objetivo la tensión de tracción, se ha alcanzado el valor más pequeño en este parámetro de todos los procesos de optimización, en el entorno de 1 MPa, al igual que sucede con el máximo desplazamiento vertical, en torno a 2 mm. Ahora bien, el coste de esto es un mayor peso, pues el espesor de la lámina llega hasta casi 16 cm, y la mayor energía de deformación de todos los procesos.

La diferencia en tensiones entre los distintos tipos de análisis es inapreciable aunque se mantienen las diferencias en términos de desplazamientos y energía.

A la vista de las tablas 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 y 5.12 el análisis lineal es el que más se ajusta por exceso al NLGM en términos de desplazamientos. En términos de tensiones suele ser el NLG. El NLM adopta, en la mayoría de casos, valores muy cercanos, pero por defecto, por lo que su utilización podría no ser segura.

#### **5.5.1.4 Resumen de resultados**

Se ha establecido, de un modo gráfico, una comparación entre los valores de los cuatro parámetros mostrados en las tablas de los apartados anteriores, para el diseño inicial y los diseños óptimos, y según el tipo de análisis realizado, imponiendo un espesor mínimo en la lámina de 6 cm (Figura 5.24).

La máxima tensión de tracción adopta valores muy similares entre los distintos tipos de análisis (Figura 5.24a). Efectivamente, estas variaciones no pueden ser muy significativas debido a la fuerte restricción tensional (recordar que no se permite superar la resistencia a la tracción del material de valor 1,35 MPa en ningún punto de la lámina). En la variación de este parámetro de un diseño a otro se observa una disminución progresiva según sea la función objetivo la energía de deformación, el peso o, por supuesto, la máxima tensión de tracción.

En el caso de la máxima tensión de compresión (Figura 5.24b), las diferencias de valor entre los distintos análisis, así como su valor en términos absolutos, se va reduciendo según sea la función objetivo empleada. Estas diferencias se acusan más en el diseño inicial, desde el valor mayor en el análisis NLG hasta el menor en el análisis NLM, con una diferencia porcentual en torno al 10. En los diseños óptimos existe muy poca variación.

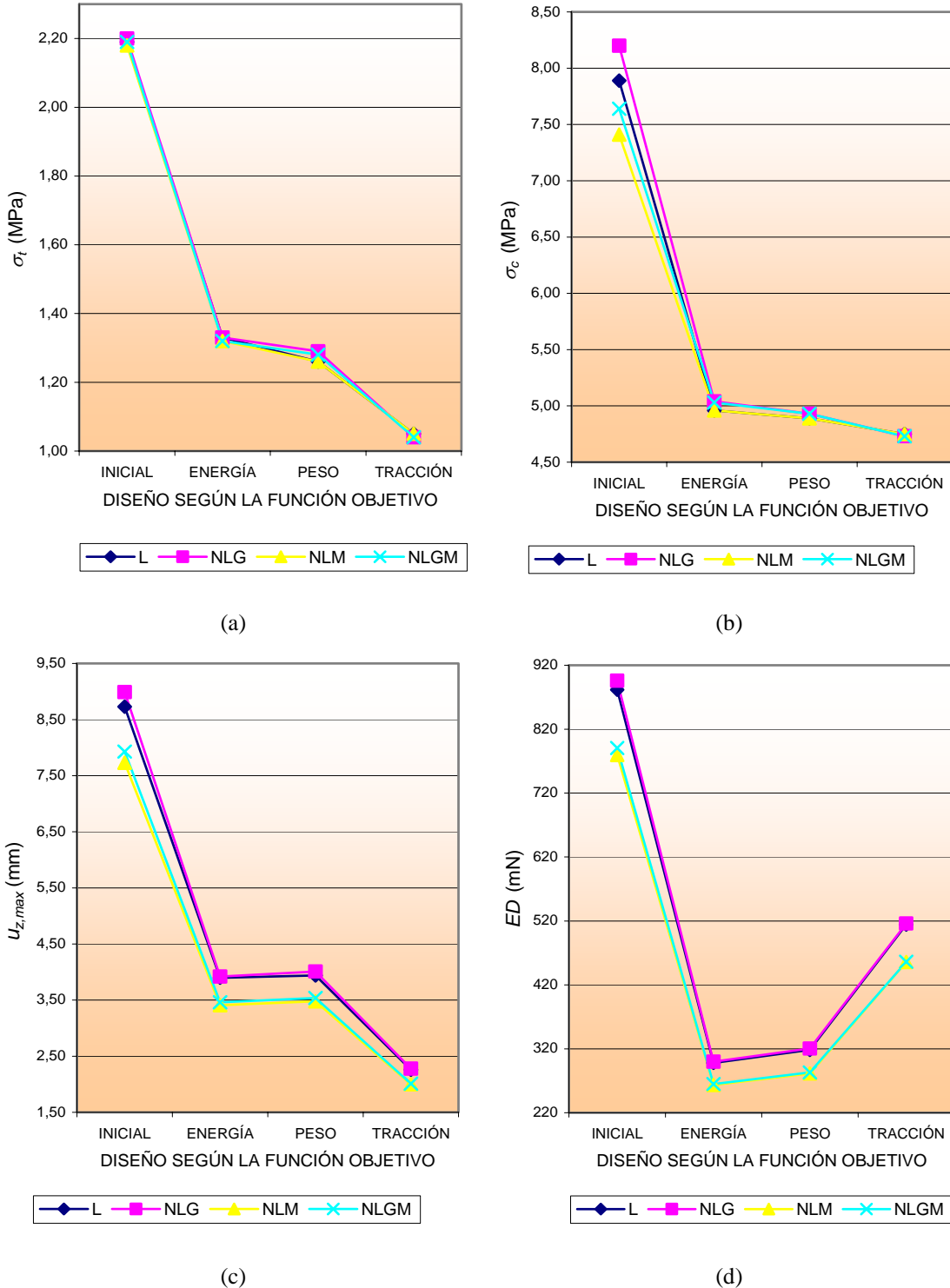
De nuevo se presenta un nivel tensional reducido, muy alejado del límite de resistencia a la compresión cifrado en 17,5 MPa, lo que supone menos de la tercera parte en el caso de los diseños óptimos.

Respecto al máximo desplazamiento vertical, se aprecia un agrupamiento de su valor por pares de análisis. Por un lado el lineal con el NLG, que se sitúa por encima, y, por otro, el NLM con el NLGM, que se sitúa por debajo. La diferencia en valor entre ellos comienza siendo más acusada en el diseño inicial, para ir reduciéndose según la función objetivo utilizada hasta la de máxima tensión de tracción. Sin embargo, en términos relativos se mantienen sobre el 13%. La mejora como resultado de la optimización es clara, pues el desplazamiento en los diseños óptimos con respecto al diseño inicial disminuye por debajo de la mitad, pasando de un valor en torno a 8 mm hasta otro por debajo de 4 mm. No obstante, los desplazamientos obtenidos en términos absolutos son muy bajos, producto de la gran rigidez que posee este tipo de estructuras.

En el caso de la energía de deformación, se observa de nuevo el mismo



agrupamiento por pares de análisis que con el máximo desplazamiento, así como también se mantiene la misma diferencia entre ellos según el diseño, en torno al 13%.



**Figura 5.24** Comparación de algunos parámetros de la optimización según el diseño y el tipo de análisis. (a) Máxima tensión de tracción. (b) Máxima tensión de compresión. (c) Máximo desplazamiento vertical. (d) Energía de deformación

Se desprende de esto que la inclusión de la no linealidad del material en el análisis

ocasiona un descenso en el máximo desplazamiento y en la energía de deformación de la lámina. Al someter a la estructura a un proceso de optimización, la energía disminuye, pasando de valores superiores a 800 mN a valores por debajo de 300 mN en el caso de adoptarla como función objetivo. En el último diseño óptimo, la energía se incrementa hasta valores próximos a 500 mN, lo que se debe a un mayor nivel tensional y deformacional en los elementos del modelo, aunque los valores máximos sean menores que en otros procesos.

## 5.5.2 Estudio de estabilidad de los diseños del hypar

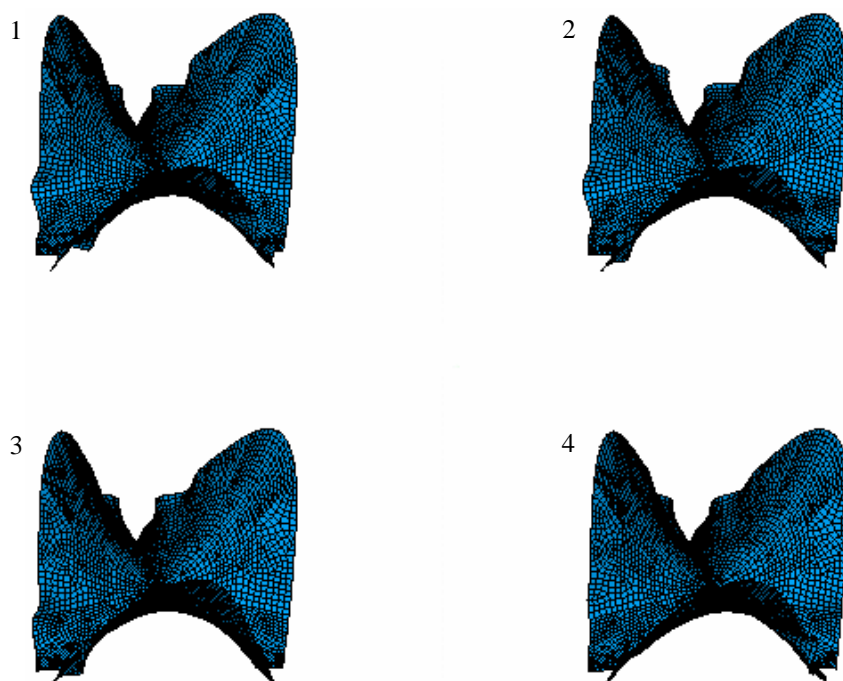
### 5.5.2.1 Análisis de estabilidad inicial

Es conveniente realizar un análisis de estabilidad inicial, también denominado de autovalores o lineal de pandeo, previo al análisis no lineal de pandeo, puesto que se obtiene una estimación de la carga de pandeo que se emplea posteriormente como cota superior de la carga aplicada.

Se ha solicitado a la lámina mediante una carga igual a su peso, de forma que los autovalores representen la carga de pandeo expresada como múltiplo del mismo.

#### *Diseño inicial*

Se ha obtenido la carga de pandeo para los cuatro primeros modos (tabla 5.13). El autovalor del primer modo indica una carga de pandeo teórica de 8,65 veces el peso propio de la lámina. En la Figura 5.25 se representa la configuración de la lámina en estos cuatro primeros modos de pandeo.



**Figura 5.25** Cuatro primeros modos de pandeo del diseño inicial

**Tabla 5.13** Autovalores del diseño inicial

Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
8,649	8,736	8,741	8,741

*Diseño óptimo con función objetivo energía de deformación (ED) y espesor mínimo 6 cm*

El autovalor del primer modo de pandeo para este diseño óptimo indica una carga de pandeo teórica de 17,37 veces el peso propio de la lámina (tabla 5.14). Al haber optimizado la energía de deformación de la lámina se ha conseguido mejorar su comportamiento frente al pandeo, al duplicar el valor de la carga de pandeo teórica.

**Tabla 5.14** Autovalores del diseño óptimo (F.Obj. ED con  $e_{min} = 6$  cm)

Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
17,374	17,447	17,447	17,558

*Resto de diseños óptimos*

Se ha esquematizado los resultados obtenidos para el primer modo de pandeo en todos los diseños óptimos (tabla 5.15). Se indica también el espesor que adopta la lámina en cada uno de ellos.

**Tabla 5.15** Carga de pandeo lineal

Parámetro	Diseño inicial	Diseños óptimos				
		ED	ED	W	W	$\sigma_t$
		( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)
Espesor (cm)	6,00	6,12	8,00	6,00	8,00	15,94
Carga de pandeo	8,65	17,37	25,60	15,82	22,38	53,39

La carga de pandeo está expresada como múltiplo del peso de la lámina

Es normal que los valores más altos de la carga de pandeo se obtengan en aquellos diseños en los que el espesor de la lámina es mayor. Para espesores en torno a 6 cm la carga de pandeo se sitúa alrededor de 16 veces el peso propio, para espesores de 8 cm es superior a 22 veces y para el espesor de 15,94 cm es 53 veces aproximadamente.

### 5.5.2.2 Análisis de estabilidad no lineal

Los resultados del análisis de autovalores son una predicción teórica de las cargas de pandeo, y constituyen una cota superior, por lo que se emplean para limitar la carga aplicada a la estructura. En el análisis no lineal se va incrementando gradualmente la carga hasta hacer colapsar a la estructura, partiendo de la configuración deformada, según el primer modo de pandeo, escalada de tal forma que el máximo desplazamiento

sea igual a la medida de la imperfección  $w_0$  calculada en la Ec. (5.36) y cuyos valores se muestran en la tabla 5.18. Se han realizado dos tipos de análisis de estabilidad no lineal, el análisis NLG y el NLGM.

Los resultados del análisis NLG se muestran en la tabla 5.16. En el caso del diseño inicial, se define una carga máxima de 8,65 veces el peso propio, la cual se va aplicando incrementalmente desde cero hasta que, para un factor del 0,623 de la misma, la estructura colapsa. De la misma forma se procede para el resto de diseños. En este análisis se observa unos valores de la carga de pandeo para los diseños óptimos en torno al 27% inferior a los calculados en el estudio de estabilidad inicial.

**Tabla 5.16** Análisis de estabilidad NLG

Parámetro	Diseño inicial	Diseños óptimos				
		<i>ED</i>	<i>ED</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	$\sigma_t$
		( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)
Espesor (cm)	6,00	6,12	8,00	6,00	8,00	15,94
Carga máx. aplicada	8,65	17,37	25,60	15,82	22,38	53,39
Factor de reducción	0,623	0,709	0,757	0,716	0,738	0,732
Carga de pandeo	5,39	12,32	19,39	11,33	16,51	39,07

La carga de pandeo está expresada como múltiplo del peso de la lámina

Los resultados del análisis NLGM se muestran en la tabla 5.17. La carga de pandeo resulta ser inferior a la obtenida en el análisis NLG. Según los diseños, la diferencia es muy dispar y dependiente del espesor. En el diseño inicial se cifra en un 3,53%. En los diseños óptimos con espesor final próximo a 6 cm está entre el 1,06 y el 2,82%. En los que tienen un espesor de 8 cm se sitúa entre el 10,54 y el 16,97%. Y, por último, en el diseño con 15,94 cm de espesor se tiene la mayor diferencia, un 43,13%.

**Tabla 5.17** Análisis de estabilidad NLGM

Parámetro	Diseño inicial	Diseños óptimos				
		<i>ED</i>	<i>ED</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	$\sigma_t$
		( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)
Espesor (cm)	6,00	6,12	8,00	6,00	8,00	15,94
Carga máx. aplicada	8,65	17,37	25,60	15,82	22,38	53,39
Factor de reducción	0,601	0,702	0,629	0,696	0,660	0,416
Carga de pandeo	5,20	12,19	16,10	11,01	14,77	22,22

La carga de pandeo está expresada como múltiplo del peso de la lámina

### 5.5.2.3 Método basado en las recomendaciones de la IASS

Este método requiere conocer la carga de pandeo lineal, que ya se ha calculado en el estudio de estabilidad inicial. A este valor se le aplica una serie de coeficientes de

reducción, resultando así el valor de la carga de pandeo no lineal reducida o carga de pandeo “real”.

El primero es el coeficiente de sensibilidad a las imperfecciones  $\alpha_1$ . Para ello se emplean las Ecs. (5.36) y (5.39) con la notación allí indicada. El radio medio principal de curvatura de la lámina se obtiene, de forma equivalente, como la inversa de la constante de la superficie  $K$ . Se considera encofrado rígido ( $a = 1$ ). En la Figura 5.11 se han adoptado, para obtener  $\alpha_1$ , las curvas D (esferas,  $\alpha_{1,esfera}$ ), C (cilindros cortos,  $\alpha_{1,cil.corto}$ ) y B (cilindros medianos,  $\alpha_{1,cil.mediano}$ ). La curva A no se considera al tratarse de cilindros largos sin sensibilidad a las imperfecciones. La IASS recomienda, a falta de una información más precisa para este tipo de geometrías, la curva D. En la tabla 5.18 aparecen reflejados los valores de los parámetros para cada diseño, así como el valor final del coeficiente  $\alpha_1$  en cada caso.

La recomendación de adoptar la curva D (esferas) para el cálculo de  $\alpha_1$  implica la obtención de valores excesivamente conservadores de éste. Para emplear valores más realistas sería necesario estudiar, detalladamente, la influencia que tiene la sensibilidad a las imperfecciones de este tipo de geometrías en la carga de pandeo.

**Tabla 5.18** Coeficiente de sensibilidad a imperfecciones  $\alpha_1$ . Parámetros de determinación

Parámetro	Diseño inicial	Diseños óptimos				
		<i>ED</i>	<i>ED</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	$\sigma_t$
		( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)
$e$ (cm)	6,00	6,12	8,00	6,00	8,00	15,94
$\beta$	0,1190	0,1034	0,0760	0,1110	0,0887	0,0450
$w'$ (cm)	1,4602	0,5730	0,4734	0,5983	0,4645	0,3010
$w''$ (cm)	0,642	0,632	0,823	0,637	0,831	1,610
$w_0$ (cm)	1,964	1,110	1,202	1,140	1,202	1,833
$w_0/e$	0,327	0,181	0,150	0,190	0,150	0,115
$\alpha_{1,esfera}$	0,34	0,46	0,49	0,45	0,49	0,55
$\alpha_{1,cil.corto}$	0,67	0,76	0,79	0,75	0,79	0,82
$\alpha_{1,cil.mediano}$	0,81	0,88	0,89	0,87	0,89	0,91

Se observa que a medida que aumenta el espesor de la lámina, el valor de  $\alpha_1$  se incrementa, siendo entonces la sensibilidad a imperfecciones menor. El diseño inicial es más sensible a las imperfecciones que los diseños óptimos, con un porcentaje medio de diferencia entre aquél y éstos en torno al 30% (esferas), 14% (cilindros cortos) y 9% (cilindros medianos). Por tanto, otra consecuencia, producto de la optimización del diseño inicial, es la reducción de este fenómeno.

El segundo coeficiente es el de fluencia  $\alpha_2$ , que depende de la resistencia del hormigón (Ec. (5.41)). Para una resistencia de 30 MPa se tiene un valor de  $\alpha_2$  igual a 0,49. La fluencia tiene un efecto muy restrictivo que implica dividir la carga de pandeo

lineal a la mitad.

Respecto al coeficiente de armado y fisuración  $\alpha_3$ , se comentó en el apartado 5.3.4.5 que la manera más conservadora de incluir estos efectos es considerar la lámina como no fisurada y sin armadura, es decir, tomando  $\alpha_3$  con valor 1.

Por último, la obtención del coeficiente de no linealidad del material  $\alpha_4$  según el método propuesto por las recomendaciones de la IASS alberga la dificultad expuesta en el apartado 5.3.4.6. Este coeficiente tiene en cuenta el comportamiento no lineal del material, por lo que se propone una forma alternativa de obtenerlo mediante la relación entre la carga de pandeo resultante del análisis NLGM ( $p_{cr}^{NLGM}$ ) y la del NLG ( $p_{cr}^{NLG}$ ), siendo entonces

$$\alpha_4 = \frac{p_{cr}^{NLGM}}{p_{cr}^{NLG}} \quad (5.54)$$

**Tabla 5.19** Coeficiente de no linealidad del material  $\alpha_4$

Parámetro	Diseño inicial	Diseños óptimos				
		<i>ED</i>	<i>ED</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	$\sigma_t$
		( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)
Espesor (cm)	6,00	6,12	8,00	6,00	8,00	15,94
$\alpha_4$	0,96	0,99	0,83	0,97	0,89	0,57

**Tabla 5.20** Carga de pandeo según el método basado en las recomendaciones de la IASS

Parámetro	Diseño inicial	Diseños óptimos				
		<i>ED</i>	<i>ED</i>	<i>W</i>	<i>W</i>	$\sigma_t$
		( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)	( $e_{min}$ 8 cm)	( $e_{min}$ 6 cm)
Espesor (cm)	6,00	6,12	8,00	6,00	8,00	15,94
$\alpha_{total, esfera}$	0,1599	0,2231	0,1993	0,2139	0,2137	0,1536
$\alpha_{total, cil. corto}$	0,3152	0,3687	0,3213	0,3565	0,3445	0,2290
$\alpha_{total, cil. mediano}$	0,3810	0,4269	0,3620	0,4135	0,3881	0,2542
Carga de pandeo lineal	8,65	17,37	25,60	15,82	22,38	53,39
Carga de pandeo IASS (esfera)	1,38	3,88	5,10	3,38	4,78	8,20
Carga de pandeo IASS (cilindro corto)	2,73	6,40	8,23	5,64	7,71	12,23
Carga de pandeo IASS (cilindro mediano)	3,30	7,42	9,27	6,54	8,69	13,57

La carga de pandeo está expresada como múltiplo del peso de la lámina

Procediendo de este modo, y teniendo en cuenta los resultados de las tablas 5.16 y 5.17, se obtienen los valores de  $\alpha_4$  que aparecen en la tabla 5.19. Por la forma de obtener el coeficiente  $\alpha_4$ , las diferencias observadas entre sus valores en los distintos

diseños se analiza de manera análoga a como se ha hecho en el apartado 5.5.2.2.

Los valores de la carga de pandeo obtenida para cada diseño y para cada geometría asimilada (esfera, cilindro corto o cilindro mediano) se reflejan en la tabla 5.20, siendo  $\alpha_{total}$  el producto de todos los coeficientes de reducción.

A la vista de estos resultados, los valores de la carga de pandeo obtenidos son muy inferiores respecto de los que se obtuvieron por medio del análisis NLGM, aproximadamente un valor medio del 68% asimilando la sensibilidad a las imperfecciones al caso de una esfera, un 48% asimilándola al de un cilindro corto y un 40% al de un cilindro mediano. Esto indica la tremenda importancia de tener en cuenta la fluencia del material, pues supone, sólo este fenómeno, una reducción del 51% en la carga de pandeo lineal.

#### 5.5.2.4 Resumen de resultados

A continuación se exponen los resultados del estudio de estabilidad global obtenidos para todos los diseños, por cada uno de los métodos empleados. En la tabla 5.21 aparecen reflejadas las cargas de pandeo obtenidas en cada caso.

**Tabla 5.21** Carga de pandeo. Resumen de resultados

	Diseño inicial	Diseños óptimos				
		$ED$ ( $e_{min}$ 6 cm)	$ED$ ( $e_{min}$ 8 cm)	$W$ ( $e_{min}$ 6 cm)	$W$ ( $e_{min}$ 8 cm)	$\sigma_t$ ( $e_{min}$ 6 cm)
Espesor (cm)	6,00	6,12	8,00	6,00	8,00	15,94
L	8,65	17,37	25,60	15,82	22,38	53,39
NLG	5,39	12,32	19,39	11,33	16,51	39,07
NLGM	5,20	12,19	16,10	11,01	14,77	22,22
NLGM ( $\alpha_2$ )	2,55	5,97	7,89	5,39	7,24	10,89
IASS (esfera)	1,38	3,88	5,10	3,38	4,78	8,20
IASS (cilindro corto)	2,73	6,40	8,23	5,64	7,71	12,23
IASS (cilindro mediano)	3,30	7,42	9,27	6,54	8,69	13,57

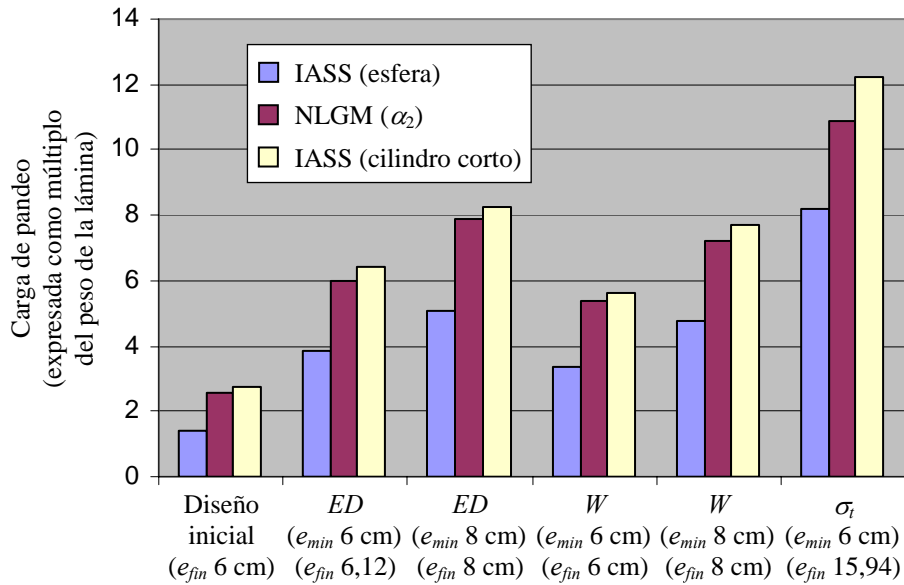
La carga de pandeo está expresada como múltiplo del peso de la lámina. L = análisis lineal o de autovalores; NLG = análisis no lineal geométrico; NLGM = análisis no lineal geométrico y del material; NLGM ( $\alpha_2$ ) = análisis NLGM afectado por el coeficiente de fluencia  $\alpha_2$ ; IASS = método basado en las recomendaciones de la IASS asimilando la sensibilidad a las imperfecciones de la lámina al caso de una esfera, un cilindro corto o un cilindro mediano.

Del estudio de estabilidad destacan algunas conclusiones interesantes. La primera de ellas es que, tanto el diseño inicial como los diseños óptimos tienen valores elevados de la carga de pandeo, producto de la gran rigidez que presenta este tipo de estructuras, que confirma su excelente comportamiento frente a fenómenos de inestabilidad. La influencia del espesor es determinante, pues su aumento implica una disminución de la

esbeltez de la lámina, incrementándose con ello la carga de pandeo.

Subrayar la gran importancia de incluir en el estudio los factores que afecten a la estabilidad de la lámina, en especial, los efectos estructurales de las deformaciones diferidas en el hormigón y la sensibilidad a las imperfecciones, pues la carga de pandeo obtenida mediante el análisis NLGM afectado del coeficiente de fluencia  $\alpha_2$  arroja valores comprendidos entre un 66 y un 80% menos que la carga de pandeo prevista en el estudio de estabilidad inicial.

En la Figura 5.26 se muestra un diagrama de barras para las cargas de pandeo de los diseños inicial y óptimos, obtenidas mediante el análisis NLGM afectado por el coeficiente de fluencia  $\alpha_2$ , y mediante las recomendaciones de la IASS para esferas y cilindros cortos.



**Figura 5.26** Carga de pandeo de los diseños inicial y óptimos. Comparación entre valores obtenidos por distintos métodos

Acentuar el considerable incremento en la carga de pandeo, más del doble, que se produce en los diseños óptimos con respecto al diseño inicial, a igual espesor, lo que aporta un valor añadido a la hora de diseñar este tipo de láminas utilizando técnicas de optimización.

Finalmente, se confirma que asimilar, como sugiere las recomendaciones de la IASS a falta de más información, la sensibilidad a las imperfecciones de una esfera para el caso de la lámina en estudio, es una opción conservadora, estando el comportamiento de ésta más próximo, por defecto, al caso del cilindro corto.



# *Planteamiento y resolución del problema de diseño óptimo del armado de elementos de hormigón tipo lámina*

## **6.1 INTRODUCCIÓN**

En la normativa actual, la metodología propuesta para el armado de elementos estructurales planos de hormigón no está desarrollada en profundidad, pues normalmente se limita a realizar un tratamiento general sobre los distintos tipos de análisis que pueden aplicarse al problema de obtención del armado. Por ejemplo, el Código modelo MC-90 plantea la posibilidad de utilizar un modelo de capas, mediante el cual las dos capas exteriores soportan las fuerzas de membrana y la interior transfiere el cortante, y menciona la utilización de un método iterativo para el cálculo, sin entrar en más detalle.

En este capítulo se presenta un método alternativo sustentado en el teorema del límite inferior de la teoría de la plasticidad. La idea fundamental consiste en plantear una distribución de tensiones, representada a través de sus esfuerzos resultantes, que cumpla las condiciones de equilibrio y no viole los criterios establecidos para el agotamiento del material. Satisfaciendo esas dos premisas, las fuerzas exteriores aplicadas son cota inferior de las fuerzas que producen el agotamiento. Del planteamiento del método se deriva un sistema de ecuaciones de equilibrio indeterminado, por lo que hay múltiples soluciones válidas para las que el elemento resiste las acciones actuantes. De entre todas estas soluciones hay una, la óptima, que proporciona una menor cantidad de material (acero de armar).

El procedimiento propuesto es una variante del método iterativo empleado por Lourenço y Figueiras (1993 y 1995) para el armado de placas de hormigón. Debido al desarrollo experimentado en el campo computacional en los últimos años, por el que se han disminuido sustancialmente los tiempos de cálculo, se está en disposición de implementar este procedimiento con la ayuda de los módulos de optimización existentes

en la actualidad.

El principal objetivo del capítulo es, pues, proponer un método para el armado automático de placas de hormigón empleando técnicas de optimización, tratando de conseguir además una programación robusta en la resolución del problema. En la modelización, análisis y posterior optimización se ha utilizado el programa de elementos finitos ANSYS.

Se presentan cuatro ejemplos de aplicación. Los dos primeros, una placa cuadrada y una viga de gran canto con aberturas interiores, se caracterizan por estar sometidos al estado tensional de membrana de compresión. El tercero consta de una placa simplemente apoyada en los cuatro bordes sometida a carga de flexión y a distintas cargas de compresión. Por último, el cuarto ejemplo es una placa rectangular sometida a carga de flexión con un borde libre y empotrados los otros tres.

## 6.2 COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES

La resistencia del hormigón es un parámetro clave en la formulación del método propuesto. Se ha considerado el hormigón como un material de comportamiento rígido-plástico, caracterizado únicamente por su resistencia. Esta simplificación está aceptada en los códigos de diseño, y los resultados obtenidos gozan de una precisión suficiente para el propósito establecido.

Al tratar con soluciones basadas en el análisis plástico es necesario adoptar una serie de precauciones, como realizar comprobaciones relacionadas con los estados límite de servicio o permitir una cierta redistribución de momentos en la estructura. Para esto último es necesario que las secciones presenten cierta ductilidad, lo que se puede conseguir mediante una adecuada cuantía de armado y/o minorando la resistencia del hormigón. Esta minoración es necesaria, además, para tener en cuenta el fenómeno de cansancio o relajación del material bajo tensión aplicada durante largos períodos de tiempo. La resistencia también puede verse afectada por la progresiva redistribución de tensiones según aumenta el mapa de fisuras, hasta alcanzar estados próximos al colapso.

Así pues, para la resistencia del hormigón se ha adoptado las expresiones propuestas en el Código modelo MC-90, que distingue dos zonas:

Zonas no fisuradas

$$f_{cd1} = 0,85 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (6.1)$$

Zonas fisuradas

$$f_{cd2} = 0,60 \left[ 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right] f_{cd} \quad (6.2)$$

siendo

$f_{ck}$  resistencia característica del hormigón y  
 $f_{cd}$  resistencia de cálculo, expresadas ambas en MPa.

En el caso de compresión biaxial la resistencia del hormigón es mayor, llegando a alcanzar un incremento del 16% bajo un estado tensional con valores similares en dos direcciones perpendiculares (Hofstetter y Mang, 1995). La resistencia debida al efecto confinamiento se puede obtener de acuerdo a la expresión

$$Kf_{cd1} \tag{6.3}$$

donde el coeficiente  $K$  viene dado por

$$K = \frac{1 + 3,65\alpha}{(1 + \alpha)^2} \tag{6.4}$$

con  $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$ , siendo  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las tensiones principales.

La resistencia a tracción del hormigón no se ha tenido en cuenta.

Respecto al comportamiento del acero, también se ha considerado de tipo rígido-plástico, con una tensión máxima igual a la resistencia característica  $f_{yk}$ . Las armaduras sólo son capaces de soportar acciones uniaxiales, por lo que no se ha considerado el efecto pasador de las mismas. Por último, se ha despreciado las fuerzas de compresión sobre el acero, debido a que su contribución normalmente es pequeña en comparación con la del hormigón adyacente.

### 6.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO

#### 6.3.1 Elementos sometidos al estado membrana

##### 6.3.1.1 Introducción

El estado de fuerzas de membrana actuando sobre el elemento es el estado más simple, por lo que se ha estudiado en primer lugar.

En la Figura 6.1a se muestra un elemento lámina de espesor  $h$ , sometido a unas fuerzas de membrana por unidad de longitud  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$ . En la Figura 6.1b aparece la armadura en el elemento, siendo  $A_{sx}$  y  $A_{sy}$  las secciones de acero necesarias para soportar las fuerzas  $N_{sx}$  y  $N_{sy}$  que actúan sobre las barras, dispuestas ortogonalmente según los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente. Por último, la Figura 6.1c representa la biela comprimida en el hormigón, formando un ángulo  $\theta$  respecto al eje vertical, y soportando una fuerza  $N_c$  que no debe superar al producto de la resistencia  $f_c$  por el espesor  $h$ .

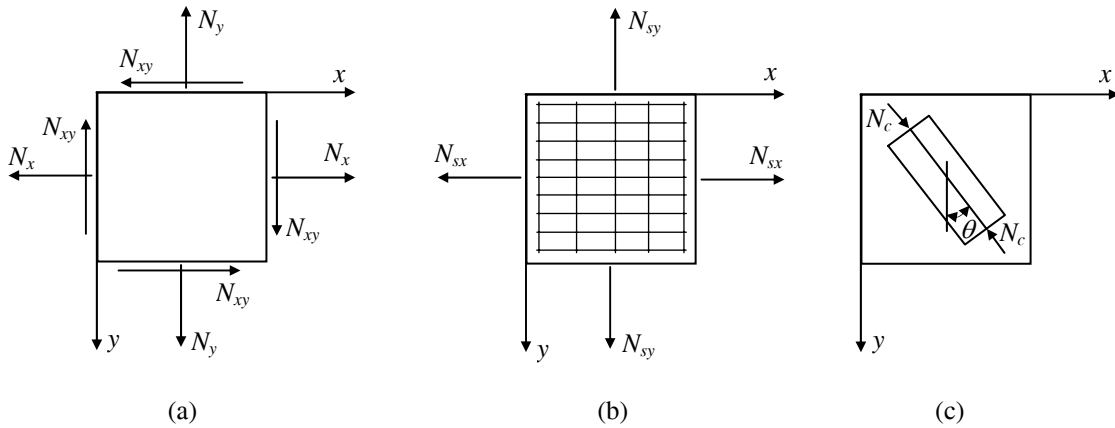
El método propuesto se basa en el análisis límite, y por tanto en el cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio. Debe existir equilibrio entre las acciones exteriores (Figura 6.1a) y las fuerzas internas desarrolladas en el acero y el hormigón (Figuras 6.1b y 6.1c). Debe cumplirse por tanto

$$N_x = N_{sx} + N_c \sin^2 \theta \tag{6.5}$$

$$N_y = N_{sy} + N_c \cos^2 \theta \quad (6.6)$$

$$N_{xy} = -N_c \sin \theta \cos \theta \quad (6.7)$$

$$N_c \geq -hf_c \quad (6.8)$$



**Figura 6.1** Estado de membrana en un elemento lámina de hormigón armado. (a) Fuerzas exteriores. (b) Contribución de la armadura. (c) Contribución del hormigón

El término de la izquierda de las Ecs. (6.5) a (6.7) representa las acciones externas actuando sobre el elemento, mientras que el de la derecha recoge la contribución del hormigón y la del acero. El sistema formado por estas tres ecuaciones es indeterminado, pues tiene cuatro incógnitas ( $N_{sx}$ ,  $N_{sy}$ ,  $N_c$  y  $\theta$ ). Utilizando el ángulo  $\theta$  como variable, se puede despejar las otras tres incógnitas

$$N_{sx} = N_x + N_{xy} \tan \theta \quad (6.9)$$

$$N_{sy} = N_y + N_{xy} \cot \theta \quad (6.10)$$

$$N_c = -\frac{N_{xy}}{\sin \theta \cos \theta} \quad (6.11)$$

Existen infinitas soluciones posibles para el armado, según sea el ángulo  $\theta$  que se adopte. El objetivo es elegir, de entre todas las soluciones, la óptima. Para determinar el valor del ángulo  $\theta$  que conduce a esta solución, se obtiene primero la cantidad total de acero necesaria en el elemento o, su equivalente, la suma de fuerzas en las armaduras

$$N_{sx} + N_{sy} = N_x + N_y + N_{xy} (\tan \theta + \cot \theta) \quad (6.12)$$

En la expresión (6.12), los ángulos  $\theta = \pm\pi/4$  son los que proporcionan menor valor en la suma  $N_{sx} + N_{sy}$ . Para determinar el signo del ángulo  $\theta$  se tiene en cuenta que las armaduras se diseñan trabajando sólo a tracción, por lo que sus fuerzas deben ser iguales o mayores que cero, esto es

$$N_{sx}, N_{sy} \geq 0 \quad (6.13)$$

Por tanto

$$N_{sx} + N_{sy} \geq 0 \quad (6.14)$$

debiendo entonces tener el ángulo  $\theta$  el mismo signo que  $N_{xy}$ , para que así el último sumando de la Ec. (6.12) contribuya a hacer la Ec. (6.14) positiva.

Además, para satisfacer las condiciones (6.13) deben cumplirse otras condiciones adicionales. Si el ángulo  $\theta$  óptimo adopta los valores  $\pm\pi/4$ , las funciones trigonométricas  $\tan\theta$  y  $\cot\theta$  valen 1 ó  $-1$ . Como se ha establecido que el signo de  $\theta$  sea igual al de  $N_{xy}$ , el resultado es que los términos  $N_{xy}\tan\theta$  y  $N_{xy}\cot\theta$  son iguales a  $|N_{xy}|$ .

Las Ecs. (6.9) y (6.10) pueden reescribirse ahora de la siguiente forma

$$N_{sx} = N_x + |N_{xy}| \quad (6.15)$$

$$N_{sy} = N_y + |N_{xy}| \quad (6.16)$$

de donde se deduce las condiciones para satisfacer la Ec. (6.13)

$$N_{sx} \geq 0 \Rightarrow N_x + |N_{xy}| \geq 0 \Rightarrow N_x \geq -|N_{xy}| \quad (6.17)$$

$$N_{sy} \geq 0 \Rightarrow N_y + |N_{xy}| \geq 0 \Rightarrow N_y \geq -|N_{xy}| \quad (6.18)$$

El incumplimiento de la condición (6.17) implica que el elemento no necesita armadura en la dirección  $x$ . Del mismo modo, si no se cumple la condición (6.18), no la necesita en la dirección  $y$ . En base a esto, se puede distinguir cuatro casos diferentes:

- 1) Armaduras  $A_{sx}$  y  $A_{sy}$  necesarias;
- 2) sólo armadura  $A_{sx}$  necesaria;
- 3) sólo armadura  $A_{sy}$  necesaria, y
- 4) armadura innecesaria.

Las condiciones (6.17) y (6.18) se utilizan para determinar la pertenencia de un elemento a uno de los casos. Se desarrolla a continuación cada caso con obtención de los valores para cada incógnita.

### 6.3.1.2 Armaduras $A_{sx}$ y $A_{sy}$ necesarias

Si ambas armaduras son necesarias debe cumplirse las condiciones

$$N_x \geq -|N_{xy}| \quad (6.19)$$

$$N_y \geq -|N_{xy}| \quad (6.20)$$

siendo entonces la resolución del sistema directa

$$N_{sx} = N_x + |N_{xy}| \quad (6.21)$$

$$N_{sy} = N_y + |N_{xy}| \quad (6.22)$$

$$N_c = -2|N_{xy}| \quad (6.23)$$

### 6.3.1.3 Sólo armadura $A_{sx}$ necesaria

Al no ser necesaria armadura en la dirección y debe suceder

$$N_y \leq -|N_{xy}| \Rightarrow N_{sy} = 0 \quad (6.24)$$

La Ec. (6.24) sustituida en la Ec. (6.10) ocasiona que

$$\tan \theta = -\frac{N_{xy}}{N_y} \quad (6.25)$$

Por otro lado, sustituyendo la Ec. (6.25) en la Ec. (6.9) se llega a

$$N_{sx} = N_x - \frac{N_{xy}^2}{N_y} \quad (6.26)$$

pero como  $N_{sx}$  deber ser mayor o igual que cero, debe cumplirse la condición

$$N_x \geq \frac{N_{xy}^2}{N_y} \quad (6.27)$$

Por último, empleando la Ec. (6.11) se despeja la incógnita que falta

$$N_c = N_y + \frac{N_{xy}^2}{N_y} \quad (6.28)$$

Organizando expresiones de modo resumido, se tienen que cumplir las dos condiciones siguientes para que el elemento pertenezca a este segundo caso

$$N_y \leq -|N_{xy}| \quad (6.29)$$

$$N_x \geq \frac{N_{xy}^2}{N_y} \quad (6.30)$$

siendo la solución del problema

$$N_{sy} = 0 \quad (6.31)$$

$$N_{sx} = N_x - \frac{N_{xy}^2}{N_y} \quad (6.32)$$

$$N_c = N_y + \frac{N_{xy}^2}{N_y} \quad (6.33)$$

**6.3.1.4 Sólo armadura  $A_{sy}$  necesaria**

En este caso se razona de manera análoga al anterior, sólo que ahora la armadura en dirección y es la necesaria, y por tanto los índices aparecen intercambiados.

Las dos condiciones de pertenencia a este caso son

$$N_x \leq -|N_{xy}| \tag{6.34}$$

$$N_y \geq \frac{N_{xy}^2}{N_x} \tag{6.35}$$

siendo la solución del problema

$$N_{sx} = 0 \tag{6.36}$$

$$N_{sy} = N_y - \frac{N_{xy}^2}{N_x} \tag{6.37}$$

$$N_c = N_x + \frac{N_{xy}^2}{N_x} \tag{6.38}$$

**6.3.1.5 Armadura innecesaria**

Pertenecen a este cuarto caso aquellos elementos cuyos esfuerzos actuantes son tales que se incumple la segunda de las condiciones de los casos dos y tres, es decir, las Ecs. (6.30) y (6.35) respectivamente. Por ejemplo, en el caso dos, la primera condición (6.29) implica que  $N_{sy} = 0$ , y la segunda condición (6.30) implica que  $N_{sx} \geq 0$ . Si se incumple esta segunda condición, significaría que la armadura  $A_{sx}$  es negativa, soportando fuerzas de compresión, lo cual es incompatible con el planteamiento inicial, por lo que debe ser  $N_{sx} = 0$ .

Por tanto, las dos situaciones posibles para pertenecer a este cuarto caso son

$$N_y \leq -|N_{xy}| \tag{6.39}$$

$$N_x < \frac{N_{xy}^2}{N_y} \tag{6.40}$$

y

$$N_x \leq -|N_{xy}| \tag{6.41}$$

$$N_y < \frac{N_{xy}^2}{N_x} \tag{6.42}$$

En ambas situaciones se tiene

$$N_{sx} = 0 \tag{6.43}$$

$$N_{sy} = 0 \tag{6.44}$$

pudiendo calcularse también las tensiones principales (fuerzas por unidad de longitud según este planteamiento)

$$N_{c1} = \frac{N_x + N_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} ; N_{c2} = \frac{N_x + N_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_x - N_y}{2}\right)^2 + N_{xy}^2} \tag{6.45}$$

Hay que verificar además que el hormigón resiste las tensiones que le solicitan. Para los tres primeros casos debe cumplirse

$$f_c \leq f_{cd2} \tag{6.46}$$

y para el cuatro caso

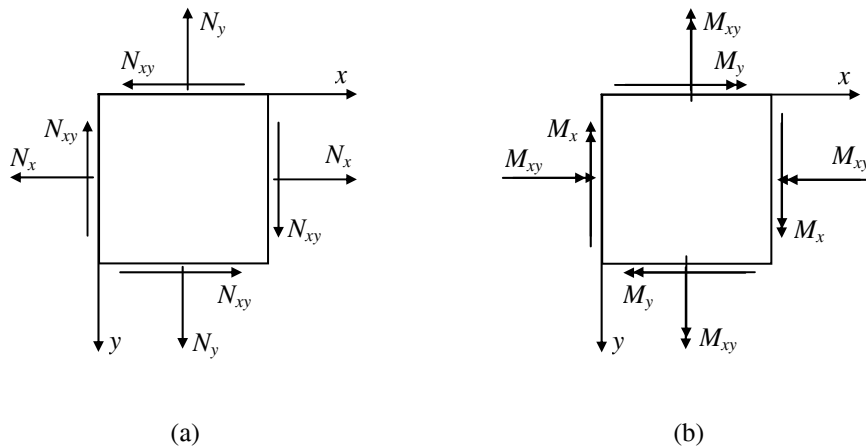
$$f_c \leq Kf_{cd1} \tag{6.47}$$

por hallarse sometido este último a compresión biaxial.

### 6.3.2 Elementos sometidos al estado de flexión y membrana

#### 6.3.2.1 Introducción

En el caso en que actúen además fuerzas de flexión, la situación se generaliza y el procedimiento de resolución se dificulta. En la Figura 6.2 se representan las acciones externas por unidad de longitud sobre un elemento lámina.



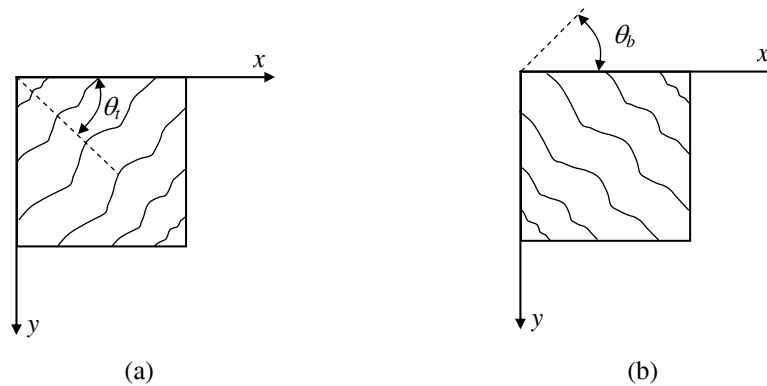
**Figura 6.2** Sollicitaciones exteriores sobre un elemento lámina sometido al estado de membrana y flexión. (a) Fuerzas. (b) Momentos

En adelante se utilizan los subíndices *t* y *b* para hacer referencia a las capas superior (top) e inferior (bottom) respectivamente, y los subíndices *x* e *y* para referirse a las direcciones de los correspondientes ejes. Así por ejemplo,  $N_{sxt}$  hace referencia a la fuerza por unidad de longitud actuante en la armadura de dirección *x* situada en la capa



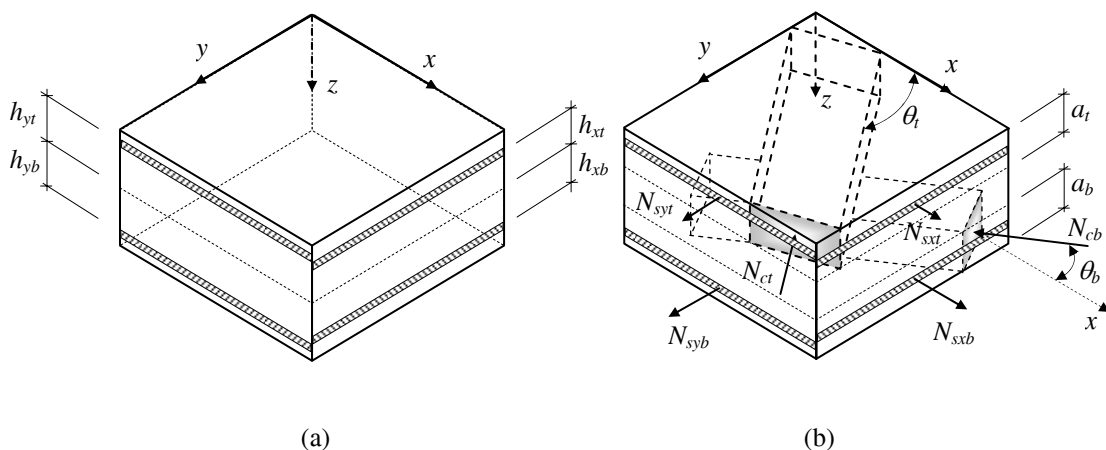
superior.

En vez de haber un único ángulo  $\theta$  como en el caso anterior, hay dos ángulos,  $\theta_t$  y  $\theta_b$ , según la dirección de la biela comprimida respecto a los ejes coordenados en la capa superior e inferior, respectivamente. Las fisuras que aparecen en el hormigón siguen la dirección de estos planos (Figura 6.3).



**Figura 6.3** Dirección de la fisuración en un elemento lámina de hormigón. (a) Capa superior. (b) Capa inferior

Otras variables a introducir en el planteamiento son  $a_t$  y  $a_b$ , espesores de las capas de hormigón comprimido superior e inferior, respectivamente. Se supone además una distribución uniforme de tensiones dentro de esas capas. También se tiene  $h_{xt}$ ,  $h_{xb}$ ,  $h_{yt}$  y  $h_{yb}$  que representan los brazos mecánicos de las armaduras, es decir, la distancia desde la superficie media del elemento hasta el centro de gravedad de las barras, con los subíndices siguiendo la misma nomenclatura definida. En la Figura 6.4 se muestran estas variables gráficamente.



**Figura 6.4** Modelo de un elemento lámina de hormigón armado. (a) Brazos mecánicos de las armaduras. (b) Fuerzas internas (esfuerzos) en el hormigón y en las armaduras

Se pueden distinguir también cuatro casos:

- 1) Armadura necesaria en ambas capas (caso BOTH);
- 2) armadura necesaria sólo en la capa inferior (caso BOTTOM);

- 3) armadura necesaria sólo en la capa superior (caso TOP), y
- 4) armadura innecesaria (caso FULLCOMP).

### 6.3.2.2 Armadura necesaria en ambas capas (caso BOTH)

La fuerzas en el acero en direcciones  $x$  e  $y$ , y los momentos respecto de la fibra media asociados a esas fuerzas son

$$N_{sx} = N_{sxt} + N_{sxb} ; N_{sy} = N_{syt} + N_{syb} \quad (6.48)$$

$$M_{sx} = -N_{sxt} h_{xt} + N_{sxb} h_{xb} ; M_{sy} = -N_{syt} h_{yt} + N_{syb} h_{yb} \quad (6.49)$$

Las fuerzas y momentos en el hormigón son

$$N_{ct} = -a_t f_{cd2} ; N_{cb} = -a_b f_{cd2} \quad (6.50)$$

$$M_{ct} = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{ct} ; M_{cb} = \frac{1}{2}(h - a_b)N_{cb} \quad (6.51)$$

Las Ecs. (6.48) a (6.51) expresan las fuerzas y momentos internos en función de las variables definidas y deben estar en equilibrio con las fuerzas y momentos aplicados, debiendo cumplirse el siguiente sistema de ecuaciones

$$N_x = N_{sx} + N_{ct} \sin^2 \theta_t + N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.52)$$

$$N_y = N_{sy} + N_{ct} \cos^2 \theta_t + N_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.53)$$

$$N_{xy} = -N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - N_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (6.54)$$

$$M_x = M_{sx} + M_{ct} \sin^2 \theta_t + M_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.55)$$

$$M_y = M_{sy} + M_{ct} \cos^2 \theta_t + M_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.56)$$

$$M_{xy} = -M_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - M_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (6.57)$$

Sustituyendo las Ecs. (6.48) a (6.51) en las Ecs. (6.52) a (6.57) se tiene un sistema de seis ecuaciones con ocho incógnitas ( $N_{sxt}$ ,  $N_{sxb}$ ,  $N_{syt}$ ,  $N_{syb}$ ,  $a_t$ ,  $a_b$ ,  $\theta_t$  y  $\theta_b$ ). Se puede asignar valores a dos incógnitas cualquiera de las ocho, estando ya el resto condicionadas. Aplicando un algoritmo de optimización se pueden obtener los valores de dos incógnitas, por ejemplo los ángulos  $\theta_t$  y  $\theta_b$ , que minimicen la cantidad total de armadura.

### 6.3.2.3 Armadura necesaria sólo en la capa inferior (caso BOTTOM)

En este caso la capa superior se encuentra comprimida biaxialmente, mientras que la capa inferior requiere armadura. En base a esto, las expresiones de las fuerzas internas son

$$N_{sx} = N_{sxb} ; N_{sy} = N_{syb} \quad (6.58)$$

$$M_{sx} = N_{sxb} h_{xb} ; M_{sy} = N_{syb} h_{yb} \quad (6.59)$$

$$N_{cb} = -a_b f_{cd2} ; M_{cb} = \frac{1}{2}(h - a_b) N_{cb} \quad (6.60)$$

y las ecuaciones de equilibrio son

$$N_x = N_{sx} + N_{cxt} + N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.61)$$

$$N_y = N_{sy} + N_{cyt} + N_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.62)$$

$$N_{xy} = N_{cxyt} - N_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (6.63)$$

$$M_x = M_{sx} + M_{cxt} + M_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.64)$$

$$M_y = M_{sy} + M_{cyt} + M_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.65)$$

$$M_{xy} = M_{cxyt} - M_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (6.66)$$

siendo

$$M_{cxt} = -\frac{1}{2}(h - a_t) N_{cxt} ; M_{cyt} = -\frac{1}{2}(h - a_t) N_{cyt} ; M_{cxyt} = -\frac{1}{2}(h - a_t) N_{cxyt} \quad (6.67)$$

con

$N_{cxt}, N_{cyt}$  fuerzas en el hormigón de la capa superior, según las direcciones  $x$  e  $y$   
 $N_{cxyt}$  esfuerzo cortante.

El espesor de la capa comprimida superior viene dado por

$$a_t = \frac{N_{ct,max}}{K f_{cd1}} \quad (6.68)$$

donde  $N_{ct,max}$  es la fuerza máxima en el hormigón de la capa superior y  $K$  se calcula según la expresión (6.4), para lo que es necesario conocer las tensiones principales o, en este caso, las fuerzas por unidad de longitud

$$\left. \begin{aligned} N_{c1t} &= \frac{N_{cxt} + N_{cyt}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{cxt} - N_{cyt}}{2}\right)^2 + N_{cxyt}^2} \\ N_{c2t} &= \frac{N_{cxt} + N_{cyt}}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_{cxt} - N_{cyt}}{2}\right)^2 + N_{cxyt}^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.69)$$

Combinando las Ecs. (6.58) a (6.66), (6.68) y (6.69) se llega a un sistema de seis ecuaciones con siete incógnitas ( $N_{sxb}, N_{syb}, a_b, \theta_b, N_{cxt}, N_{cyt}$  y  $N_{cxyt}$ ). Es posible trabajar también con un sistema de siete ecuaciones y ocho incógnitas si se incluye  $a_t$  como

incógnita, aunque el sistema sería igualmente indeterminado de grado uno. Es necesario asignar valor a una de las variables para resolver el sistema. Otra forma de operar es escoger, por ejemplo, el ángulo  $\theta_b$  como variable de un proceso de optimización para obtener la armadura total mínima.

#### 6.3.2.4 Armadura necesaria sólo en la capa superior (caso TOP)

Este caso es el simétrico del caso BOTTOM. El sistema de ecuaciones es similar al anterior, sólo que intercambiando adecuadamente los subíndices,  $t$  por  $b$  y viceversa.

#### 6.3.2.5 Armadura innecesaria (caso FULLCOMP)

Ahora las dos capas se encuentran a compresión biaxial y no es necesaria armadura en ninguna de ellas. Las incógnitas son las fuerzas en el hormigón en ambas capas, siendo  $N_{cxt}$ ,  $N_{cxt}$  y  $N_{cxyt}$  para la capa superior, y  $N_{cxb}$ ,  $N_{cxb}$  y  $N_{cxyb}$  para la capa inferior.

Las ecuaciones de equilibrio son

$$N_x = N_{cxt} + N_{cxb} \quad (6.70)$$

$$N_y = N_{cxt} + N_{cxb} \quad (6.71)$$

$$N_{xy} = N_{cxyt} + N_{cxyb} \quad (6.72)$$

$$M_x = M_{cxt} + M_{cxb} \quad (6.73)$$

$$M_y = M_{cxt} + M_{cxb} \quad (6.74)$$

$$M_{xy} = M_{cxyt} + M_{cxyb} \quad (6.75)$$

con

$$M_{cxt} = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{cxt} ; M_{cxb} = \frac{1}{2}(h - a_b)N_{cxb} \quad (6.76)$$

$$M_{cxt} = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{cxt} ; M_{cxb} = \frac{1}{2}(h - a_b)N_{cxb} \quad (6.77)$$

$$M_{cxyt} = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{cxyt} ; M_{cxyb} = \frac{1}{2}(h - a_b)N_{cxyb} \quad (6.78)$$

Además, los espesores de las capas de hormigón comprimido tienen que cumplir las siguientes condiciones

$$\left. \begin{aligned} N_{ct} &= \frac{N_{cxt} + N_{c yt}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{cxt} - N_{c yt}}{2}\right)^2 + N_{cxyt}^2} \\ N_{c2t} &= \frac{N_{cxt} + N_{c yt}}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_{cxt} - N_{c yt}}{2}\right)^2 + N_{cxyt}^2} \end{aligned} \right| \quad (6.79)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{cb} &= \frac{N_{cxb} + N_{c yb}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{cxb} - N_{c yb}}{2}\right)^2 + N_{cxyb}^2} \\ N_{c2b} &= \frac{N_{cxb} + N_{c yb}}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_{cxb} - N_{c yb}}{2}\right)^2 + N_{cxyb}^2} \end{aligned} \right| \quad (6.80)$$

$$\alpha_t = \frac{N_{c2t}}{N_{ct}} ; \alpha_b = \frac{N_{c2b}}{N_{cb}} \quad (6.81)$$

$$K_t = \frac{1+3,65\alpha_t}{(1+\alpha_t)^2} ; K_b = \frac{1+3,65\alpha_b}{(1+\alpha_b)^2} \quad (6.82)$$

$$a_t = \frac{N_{ct,max}}{K_t f_{cd1}} ; a_b = \frac{N_{cb,max}}{K_b f_{cd1}} \quad (6.83)$$

Combinando las Ecs. (6.79) a (6.83) se obtienen dos ecuaciones más, que junto con las ecuaciones de equilibrio (6.70) a (6.75) aparece un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas. Al ser un sistema determinado, la solución es única, no existiendo ahora variables de diseño. Sólo hay que comprobar la pertenencia del elemento a este caso. Para ello se obtienen las tensiones principales en ambas capas, y si una de las tensiones fuera de tracción, implicaría que el elemento no pertenece al caso. Hay que comprobar también la condición

$$a_t + a_b \leq h \quad (6.84)$$

pues de lo contrario la placa fallaría por aplastamiento a compresión al no disponer de espesor suficiente para asegurar la resistencia.

### 6.3.2.6 *Discusión sobre las necesidades de armadura en cada elemento*

Según la formulación planteada del problema de diseño óptimo, es necesario determinar el caso en que se encuadra cada elemento de la malla del modelo. Conocer a priori esta información, disponiendo sólo de las acciones externas que sometan al elemento, puede ser una cuestión que albergue cierta complejidad. A veces es inmediato, por ejemplo, un elemento sometido sólo a fuerzas de compresión pertenece al caso FULLCOMP. Sin embargo, no es ésta la regla general cuando existe una combinación cualquiera de fuerzas. Es más sencillo discriminar los casos a los que no pertenece, detectando resultados incoherentes al resolver el correspondiente sistema de ecuaciones, como

valores negativos en las armaduras o en los espesores de las capas.

La mayor dificultad estriba en los valores que adoptan las variables de diseño. Puede suceder que, para ciertos valores, se obtengan resultados ilógicos en las incógnitas del sistema, lo que hace inservible alguno de los sistemas de clasificación de casos que se han intentado implementar.

Una forma sencilla, a priori, de detectar el caso al que pertenece un elemento es la asignación de valores cualesquiera a las variables de diseño  $\theta_t$  y  $\theta_b$ , comprobando de este modo en qué caso se obtienen resultados coherentes. Pero este método no es del todo eficaz, pues queda la duda de si con otros valores en las variables se obtendrían también resultados lógicos dentro de otro caso.

Otro procedimiento similar al anterior que se ha intentado implementar es efectuar un barrido. El programa ANSYS dispone de una herramienta mediante la que se adoptan valores de muestreo de las variables uniformemente repartidos en el espacio de diseño. Resolviendo a continuación el sistema de ecuaciones para esos valores, se dispone de una mayor información, puesto que cada caso se evalúa en un conjunto representativo de puntos del espacio de diseño. El problema que aparece es similar al anterior, pues por muy exhaustivo que sea el barrido, las pruebas se realizan en un conjunto discreto de puntos, no teniendo la certeza de que un caso se pueda descartar totalmente para un cierto elemento.

Al final se concluye que la única forma eficaz de clasificar un elemento es realizar un proceso de optimización para cada caso y comprobar en cuál se obtiene un resultado coherente. No obstante, queda abierta la posibilidad de que un mismo elemento, con unas determinadas acciones exteriores, se encuentre en una zona frontera y proporcione diseños coherentes para distintos casos. Un ejemplo con el que se está más familiarizado es el armado de vigas, en el que según la disposición y cantidad de acero que se coloque puede ocurrir que sea necesaria armadura en una cara o en las dos. Aunque se ha detectado algunas situaciones de este tipo, no es lo habitual. Para resolver esta cuestión, el procedimiento implementado escoge aquel caso que proporcione menor armadura.

Esta discusión afecta únicamente a los casos BOTH, BOTTOM Y TOP, pues el FULLCOMP es de comprobación directa. Es por lo que éste se comprueba en primer lugar, así, si el elemento se encuentra en él, se evita tener que comprobar los demás y se ahorra tiempo de cálculo.

## **6.4 RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO ÓPTIMO**

### **6.4.1 Introducción**

Se han establecido cuatro casos posibles para el elemento según las necesidades de armadura. Excepto en el caso FULLCOMP, el correspondiente sistema de ecuaciones que hay que resolver es indeterminado, pudiéndose asignar valores a algunas de las incógnitas, estando ya el resto condicionadas. Si la elección de esos valores arbitrarios

se realiza adecuadamente se puede obtener una cantidad de armadura total mínima. En los siguientes apartados se exponen distintos métodos de resolución de este problema de diseño óptimo, realizando una discusión sobre sus características principales y sobre la viabilidad práctica en el marco del estado actual de los procesadores.

**6.4.2 Métodos analíticos**

**6.4.2.1 Resolución directa**

Primeramente se ha intentado resolver el problema de modo analítico. Para ello se expresa la función objetivo en función de las variables, es decir, el sumatorio de las fuerzas en la armadura por unidad de longitud, que es equivalente al área total de armadura por unidad de longitud, al estar ambos conceptos relacionados mediante la resistencia del material. En adelante se hace referencia indistintamente a uno u otro concepto.

Se ha visto que, según el caso, existe uno o dos grados de libertad. Entre todos los parámetros se ha optado por usar como variables de diseño las siguientes:

- Caso BOTH                     $\theta_t$  y  $\theta_b$
- Caso BOTTOM                 $\theta_t$
- Caso TOP                     $\theta_b$

El objetivo es obtener una expresión para la función objetivo del tipo

$$N_s(\theta_t, \theta_b) = N_{sxt}(\theta_t, \theta_b) + N_{sxb}(\theta_t, \theta_b) + N_{syt}(\theta_t, \theta_b) + N_{syb}(\theta_t, \theta_b) \quad (6.85)$$

El área total de armadura depende de cuatro incógnitas del sistema de ecuaciones ( $N_{sxt}$ ,  $N_{sxb}$ ,  $N_{syt}$ , y  $N_{syb}$ ) y éstas a su vez dependen de las variables de diseño ( $\theta_t$  y  $\theta_b$ ), por lo que se puede llegar a la expresión  $N_s(\theta_t, \theta_b)$ .

Si se dispusiera de esta expresión, sería posible acometer la resolución analítica del problema, pues bastaría con plantear las derivadas parciales de la función objetivo respecto de las variables de las que depende e igualar a cero.

Para despejar las incógnitas de los sistemas de ecuaciones planteados en el apartado 6.3, que son no lineales con inclusión de funciones trigonométricas, se ha empleado el programa de cálculo simbólico MAPLE 9. Primeramente se ha empleado el caso BOTH, introduciendo el sistema de ecuaciones y ejecutando el programa. El tiempo de cálculo es considerable y, de hecho, en varias ocasiones el programa se bloquea en su intento por resolver el sistema. Finalmente se ha obtenido una solución aparente del mismo, que ocupa varias decenas de páginas. A continuación se ha intentado derivar esas expresiones respecto de las variables de diseño, y así poder culminar el proceso de optimización analítica, sin embargo resultó inviable pues el programa no fue capaz de realizarlo.

**6.4.2.2 Resolución por etapas**

Puesto que la solución directa del sistema de ecuaciones no es posible, se ha tratado de

realizar una resolución por etapas para que el sistema introducido en MAPLE fuera más manejable. Se trata igualmente de expresar las incógnitas en función de los ángulos  $\theta_t$  y  $\theta_b$  para el caso BOTH. Para los casos BOTTOM o TOP se emplearía sólo uno de los ángulos y se razonaría de forma similar.

Para ello se sustituyen la Ec. (6.51) en la (6.57), resultando una expresión que, junto con la (6.54), proporciona un sistema de dos ecuaciones. Al resolver dicho sistema adoptando como incógnitas  $N_{ct}$  y  $N_{cb}$ , resulta

$$-N_{ct} = \frac{(h - a_b)N_{xy} - 2M_{xy}}{h_c \sin(2\theta_t)} ; -N_{cb} = \frac{(h - a_t)N_{xy} + 2M_{xy}}{h_c \sin(2\theta_b)} \quad (6.86)$$

siendo

$$h_c = h - \frac{(a_t + a_b)}{2} \quad (6.87)$$

Sustituyendo la Ec. (6.50) en la (6.86) se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $N_{ct}$  y  $N_{cb}$ ), donde todo lo demás es conocido a excepción de  $\theta_t$  y  $\theta_b$ , que son los grados de libertad. La resolución de este nuevo sistema de ecuaciones es fundamental, ya que con esas variables intermedias  $N_{ct}$  y  $N_{cb}$  es muy fácil despejar el resto de incógnitas  $N_{sxt}$ ,  $N_{sxb}$ ,  $N_{syt}$ ,  $N_{syb}$ ,  $a_t$  y  $a_b$ .

Efectivamente, de las ecuaciones de equilibrio (6.52), (6.53), (6.55) y (6.56) se despejan otras variables intermedias,  $N_{sx}$ ,  $N_{sy}$ ,  $M_{sx}$  y  $M_{sy}$ . Como la parte izquierda de estas ecuaciones es conocida, se puede formar dos nuevos sistemas de ecuaciones a partir de las Ecs. (6.48) y (6.49), obteniendo las incógnitas finales  $N_{sxt}$ ,  $N_{syt}$ ,  $N_{sxb}$  y  $N_{syb}$ . Las dos incógnitas restantes,  $a_t$  y  $a_b$ , se despejan trivialmente de la Ec. (6.50). Como puede comprobarse en este planteamiento, el despeje es muy sencillo

$$-N_{ct} = \frac{(h - a_b)N_{xy} - 2M_{xy}}{h_c \sin(2\theta_t)} ; -N_{cb} = \frac{(h - a_t)N_{xy} + 2M_{xy}}{h_c \sin(2\theta_b)} \quad (6.88)$$

No obstante, el sistema sigue siendo todavía muy complejo, aunque es bastante más manejable que el primitivo de seis ecuaciones. El programa MAPLE ha conseguido despejarlo, pero con dificultad. La complejidad de la solución obtenida, al igual que sucedió en el método anterior, hace inviable la culminación del proceso de optimización de forma analítica. La solución vuelve a ocupar varias páginas, lo que imposibilita la derivación de las expresiones.

### 6.4.3 Métodos semianalíticos

Se ha denominado métodos semianalíticos a los que parten de un despeje analítico de la función objetivo pero se realiza la optimización de forma iterativa. Para ello se ha empleado el módulo de optimización de ANSYS, del que se ha expuesto sus principales características en el capítulo 3.



### 6.4.3.1 Problema general con ocho variables de diseño

Empleando directamente las ocho variables del modelo no sería necesario despejar los sistemas de ecuaciones. Para ello se podría adoptar estas ecuaciones como restricciones de igualdad, y si se satisfacen, el diseño se admitiría como solución válida. Hay que añadir además las restricciones que garanticen valores positivos para las áreas de acero y los espesores de las capas comprimidas. El planteamiento quedaría de la siguiente forma:

Minimizar la función objetivo

$$N_s = N_{sxt} + N_{syt} + N_{sxb} + N_{syb} \quad (6.89)$$

sujeta a las restricciones

$$N_x = N_{sx} + N_{ct} \sin^2 \theta_t + N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.90)$$

$$N_y = N_{sy} + N_{ct} \cos^2 \theta_t + N_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.91)$$

$$N_{xy} = -N_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - N_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (6.92)$$

$$M_x = M_{sx} + M_{ct} \sin^2 \theta_t + M_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.93)$$

$$M_y = M_{sy} + M_{ct} \cos^2 \theta_t + M_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.94)$$

$$M_{xy} = -M_{ct} \sin \theta_t \cos \theta_t - M_{cb} \sin \theta_b \cos \theta_b \quad (6.95)$$

$$N_{sxt}, N_{syt}, N_{sxb}, N_{syb} \geq 0 \quad (6.96)$$

$$a_t, a_b \geq 0 \quad (6.97)$$

siendo las variables de diseño  $N_{sxt}, N_{sxb}, N_{syt}, N_{syb}, a_t, a_b, \theta_t$ , y  $\theta_b$ .

Este planteamiento concierne al caso BOTH. Para los casos BOTTOM y TOP hay que emplear las correspondientes ecuaciones de equilibrio y sustituir en ellas las Ecs. (6.48) a (6.51).

El grado de exigencia al proceso de optimización es extremadamente elevado, lo que provoca serios problemas de convergencia. Uno de los inconvenientes aparece al asignar valores iniciales a las variables de diseño. Conocer, a priori, una estimación de las armaduras en un determinado elemento, o el espesor de las capas comprimidas, resulta complicado. Otro impedimento surge por el hecho de manejar seis restricciones de igualdad, cada una involucrando muchas variables y siendo expresiones no lineales con funciones trigonométricas. Para suavizar estas restricciones de igualdad se las trata como restricciones de desigualdad, acotando el valor de igualdad y permitiendo un intervalo de maniobra a las variables de diseño. Se muestra, a modo de ejemplo, la implementación de una de estas restricciones

```

1 ECUAC1=NSX+(NCXT-1E5)+NCB*(SIN(ANGB)*SIN(ANGB))-NX
2 ECUAC1_1=ECUAC1
3 ECUAC1_2=ECUAC1
4 OPVAR, ECUAC1_1, SV, -TOL, , TOLVEST
5 OPVAR, ECUAC1_2, SV, , TOL, TOLVEST

```

En este caso particular, una determinada expresión debe valer cero, condición que se ha impuesto a través de dos restricciones de desigualdad, acotando su valor entre  $[-TOL, TOL]$ . Cuanto menor sea la tolerancia  $TOL$  mayor aproximación hacia la restricción de igualdad, pero puede que el algoritmo no converja en el propósito de optimizar la función objetivo cumpliendo con las restricciones. Si, por el contrario, la tolerancia es muy amplia, los resultados obtenidos son erróneos al no cumplirse las ecuaciones de equilibrio, debido a la alta sensibilidad que muestra la solución ante la violación de las restricciones de igualdad, aunque sea por un margen reducido.

Es necesario asignar valores iniciales a las variables de diseño muy cercanos a los valores en el óptimo. Es decir, para poder solucionar el problema hay que conocer a priori la solución con un margen de error muy pequeño, por lo que el método no resulta útil. Aún así, se ha realizado un último intento utilizando la herramienta de barrido de soluciones, pues si el barrido es lo suficientemente denso, se puede obtener un conjunto de valores de las variables de diseño que proporcione un valor de la función objetivo próximo al óptimo. Surge el inconveniente que, al trabajar con ocho variables de diseño, un barrido lo suficientemente denso dispara de modo inaceptable el coste computacional.

#### 6.4.3.2 Problema simplificado con dos variables de diseño

Un método semianalítico más sencillo se consigue empleando sólo dos variables de diseño. Para ello se recupera la solución despejada del sistema de ecuaciones proporcionada por MAPLE, introduciendo en ANSYS la función objetivo que dependa únicamente de las variables  $\theta_t$  y/o  $\theta_b$ . De este modo, sólo hay que incluir las restricciones de áreas de acero y espesores de placa comprimidos de valor positivo.

El planteamiento es minimizar la función objetivo

$$N_s(\theta_t, \theta_b) \quad (6.98)$$

sujeta a las restricciones

$$N_{sxt}, N_{syt}, N_{sxb}, N_{syb} \geq 0 \quad (6.99)$$

$$a_t, a_b \geq 0 \quad (6.100)$$

siendo las variables de diseño  $\theta_t$  y  $\theta_b$ .

Este método también ha resultado inviable, pues las expresiones obtenidas en el despeje con MAPLE son demasiado complejas para ser manejadas por el programa de elementos finitos. La capacidad de cálculo de los procesadores a nivel usuario no está suficientemente desarrollada en la actualidad para operar con este tipo de expresiones.

### 6.4.3.3 Resolución por etapas

Este método retoma algunas de los planteamientos propuestos en el subapartado 6.4.2.2. Se ha observado que en la Ec. (6.86) las únicas incógnitas que aparecen para poder calcular  $N_{ct}$  y  $N_{cb}$ , aparte de los ángulos, son  $a_t$  y  $a_b$ . Por tanto, una vez obtenidas  $N_{ct}$  y  $N_{cb}$  es fácil despejar el resto de incógnitas.

Entre las seis incógnitas despejadas con MAPLE, precisamente  $a_t$  y  $a_b$  son las que presentan una expresión más “simplificada” (cada una supone completar casi una página). La idea es rescatar las expresiones  $a_t(\theta_t, \theta_b)$  y  $a_b(\theta_t, \theta_b)$ , calcular los parámetros intermedios  $N_{ct}$  y  $N_{cb}$  a partir de las expresiones (6.95) y (6.96) y, con ellas, obtener el resto de incógnitas, siguiendo el sencillo procedimiento descrito en el subapartado 6.4.2.2. De este modo se obtienen las fuerzas en la armadura en función de  $\theta_t$  y  $\theta_b$ , siendo ya más fácil programar el proceso de optimización en ANSYS.

El problema que surge es que este programa dispone de un límite al número de operaciones anidadas que es capaz de computar, concretamente cuatro niveles de paréntesis, siendo el número máximo de operaciones por paréntesis de nueve. Esto hace que las expresiones  $a_t(\theta_t, \theta_b)$  y  $a_b(\theta_t, \theta_b)$  tengan que descomponerse en variables intermedias para poder introducirlas en las operaciones. A continuación se muestra la descomposición de  $a_b(\theta_t, \theta_b)$  a modo de ejemplo

```

1   d1=sin(tetab)**4*sin(tetat)
2   d2=-sin(tetab)**4*sin(tetat)**3
3   d3=-sin(tetab)**2*sin(tetat)
4   d4=sin(tetab)**2*sin(tetat)**3
5   d5=-2*sin(tetat)**5
6   d6=sin(tetat)**7
7   d7=sin(tetat)**3

8   d=d1+d2+d3+d4+d5+d6+d7

9   g1=-NXY**2*sin(tetat)**4
10  g2=fcd2*sin(tetab)**5*cos(tetab)*H*NXY*sin(tetat)**2
11  g3=-4*MXY*fcd2*sin(tetab)**6*cos(tetat)*sin(tetat)
12  g4=-1*fcd2*sin(tetab)**3*cos(tetab)*H*NXY*sin(tetat)**2
13  g5=4*MXY*fcd2*sin(tetab)**3*sin(tetat)**4*cos(tetab)
14  g6=sin(tetat)**10*NXY**2
15  g7=-3*sin(tetat)**8*NXY**2
16  g8=3*sin(tetat)**6*NXY**2
17  g9=sin(tetat)**6*sin(tetab)**2*cos(tetab)**2*NXY**2
18  g10=-2*sin(tetat)**4*sin(tetab)**2*cos(tetab)**2*NXY**2
19  g11=sin(tetat)**2*sin(tetab)**2*cos(tetab)**2*NXY**2
20  g12=2*NXY**2*sin(tetat)**5*cos(tetat)*sin(tetab)*cos(tetab)
21  g13=-1*sin(tetat)**7*sin(tetab)*cos(tetab)*NXY**2*cos(tetat)
22  g14=-2*cos(tetat)*MXY*fcd2*sin(tetab)**2*sin(tetat)**3
23  g15=-1*NXY**2*sin(tetat)**2*sin(tetab)**4
24  g16=-2*NXY**2*sin(tetat)**4*sin(tetab)**2
25  g17=NXY**2*sin(tetat)**2*sin(tetab)**2
26  g18=2*sin(tetab)**8*sin(tetat)*MXY*fcd2*cos(tetat)
27  g19=sin(tetab)**5*sin(tetat)*cos(tetab)*NXY**2*cos(tetat)
28  g20=-6*MXY*fcd2*sin(tetab)*cos(tetab)*sin(tetat)**6
29  g21=-1*cos(tetab)*NXY**2*sin(tetab)*cos(tetat)*sin(tetat)**3
30  g22=-1*cos(tetat)*fcd2*sin(tetab)**2*H*NXY*sin(tetat)**3
31  g23=-4*sin(tetab)**5*sin(tetat)**4*MXY*fcd2*cos(tetab)
32  g24=-2*sin(tetab)**5*sin(tetat)**4*fcd2*H*NXY*cos(tetab)

```

```

33 g25=sin(tetab)**8*sin(tetat)*fcd2*H*NXY*cos(tetat)
34 g26=2*sin(tetab)**5*sin(tetat)**2*MXY*fcd2*cos(tetab)
35 g27=-2*sin(tetab)**8*sin(tetat)**3*MXY*fcd2*cos(tetat)
36 g28=2*sin(tetab)**6*sin(tetat)**3*fcd2*H*NXY*cos(tetat)
37 g29=-1*sin(tetab)**5*sin(tetat)**3*cos(tetab)*NXY**2*cos(tetat)
38 g30=4*sin(tetab)**6*sin(tetat)**3*MXY*fcd2*cos(tetat)
39 g31=2*sin(tetab)**5*sin(tetat)**6*MXY*fcd2*cos(tetab)
40 g32=-2*MXY*fcd2*sin(tetab)**3*cos(tetab)*sin(tetat)**2
41 g33=2*fcd2*sin(tetab)**3*H*NXY*sin(tetat)**4*cos(tetab)
42 g34=fcd2*sin(tetat)**4*sin(tetab)*cos(tetab)*H*NXY
43 g35=-2*fcd2*sin(tetab)**6*H*NXY*cos(tetat)*sin(tetat)
44 g36=fcd2*sin(tetab)**4*H*NXY*cos(tetat)*sin(tetat)
45 g37=-1*cos(tetab)*NXY**2*sin(tetab)**3*cos(tetat)*sin(tetat)
46 g38=2*MXY*fcd2*sin(tetab)**4*cos(tetat)*sin(tetat)
47 g39=2*MXY*fcd2*sin(tetab)*sin(tetat)**4*cos(tetab)
48 g40=sin(tetab)**5*sin(tetat)**6*fcd2*H*NXY*cos(tetab)
49 g41=-1*sin(tetab)**8*sin(tetat)**3*fcd2*H*NXY*cos(tetat)
50 g42=2*sin(tetat)**5*fcd2*sin(tetab)**2*H*NXY*cos(tetat)
51 g43=4*sin(tetat)**5*MXY*fcd2*sin(tetab)**2*cos(tetat)
52 g44=-3*sin(tetat)**6*fcd2*sin(tetab)*cos(tetab)*H*NXY
53 g45=6*sin(tetat)**8*MXY*fcd2*sin(tetab)*cos(tetab)
54 g46=3*sin(tetat)**8*fcd2*sin(tetab)*H*NXY*cos(tetab)
55 g47=-2*sin(tetat)**5*fcd2*sin(tetab)**4*H*NXY*cos(tetat)
56 g48=2*sin(tetat)**7*MXY*fcd2*sin(tetab)**4*cos(tetat)
57 g49=-1*sin(tetat)**7*fcd2*sin(tetab)**2*H*NXY*cos(tetat)
58 g50=sin(tetab)**3*sin(tetat)**3*cos(tetab)*NXY**2*cos(tetat)
59 g51=-2*sin(tetab)**3*sin(tetat)**6*MXY*fcd2*cos(tetab)
60 g52=-1*sin(tetab)**3*sin(tetat)**6*fcd2*H*NXY*cos(tetab)
61 g53=-4*sin(tetat)**5*MXY*fcd2*sin(tetab)**4*cos(tetat)
62 g54=-2*sin(tetat)**7*MXY*fcd2*sin(tetab)**2*cos(tetat)
63 g55=-2*sin(tetat)**10*MXY*fcd2*sin(tetab)*cos(tetab)
64 g56=-1*sin(tetat)**10*fcd2*sin(tetab)*H*NXY*cos(tetab)
65 g57=sin(tetat)**7*fcd2*sin(tetab)**4*H*NXY*cos(tetat)
66 g58=-2*NXY**2*sin(tetat)**6*cos(tetat)**2
67 g59=NXY**2*sin(tetat)**4*cos(tetat)**2
68 g60=2*sin(tetab)**4*sin(tetat)**4*Nxy**2
69 g61=NXY**2*sin(tetat)**8*cos(tetat)**2
70 g61=sin(tetab)**2*sin(tetat)**6*Nxy**2
71 g62=-1*sin(tetab)**4*sin(tetat)**6*Nxy**2

72 gg1=g1+g2+g3+g4+g5+g6+g7+g8+g9+g10
73 gg2=g11+g12+g13+g14+g15+g16+g17+g18+g19+g20
74 gg3=g21+g22+g23+g24+g25+g26+g27+g28+g29+g30
75 gg4=g31+g32+g33+g34+g35+g36+g37+g38+g39+g40
76 gg5=g41+g42+g43+g44+g45+g46+g47+g48+g49+g50
77 gg6=g51+g52+g53+g54+g55+g56+g57+g58+g59+g60
78 gg7=g61+g62

79 g=gg1+gg2+gg3+gg4+gg5+gg6+gg7

80 e1=0.5
81 e2=2*NXY*sin(tetat)**2*cos(tetat)
82 e3=2*sin(tetat)**3*sin(tetab)*cos(tetab)*NXY
83 e4=-2*sin(tetat)*sin(tetab)*cos(tetab)*NXY
84 e5=-2*NXY*sin(tetat)**4*cos(tetat)
85 e6=2*g**(1/2)

86 e=e1*(e2+e3+e4+e5+e6)

87 f=sin(tetat)*cos(tetat)

88 ab=(1/(fcd2*sin(tetab)*cos(tetat)))*(NXY-((1/d)*e*f))

```

Se puede constatar la elevada complejidad de las expresiones. Además, al aparecer en los denominadores funciones trigonométricas elevadas a potencias altas, el

riesgo de existir errores de redondeo que afecten al resultado final es relativamente alto.

Las expresiones se han introducido en ANSYS, tolerándolas al estar así descompuestas, pero los resultados numéricos obtenidos para las acciones externas, resistencias del hormigón y demás parámetros de validación del método no concuerdan. Puede pensarse que esto es debido a errores de redondeo, pero se han introducido los valores numéricos en MAPLE y se ha comprobado que los resultados que se obtienen tampoco coinciden con los de validación. Ha sido imposible demostrar si el error proviene de la propia expresión analítica de la solución del sistema, que no es correcta, o de errores numéricos arrastrados por los programas en el proceso de cálculo.

De una u otra forma, intrínsecamente siempre subyace la complejidad del sistema de ecuaciones, lo que ha propiciado descartar posibilidad alguna de resolverlo de forma analítica bajo cualquiera de sus variantes.

#### 6.4.4 Método numérico

##### 6.4.4.1 Desarrollo del método

La resolución semianalítica por etapas ha abierto una vía que puede ser aprovechada para abordar el problema mediante un método numérico. Puesto que es inviable trabajar con las expresiones analíticas de  $a_t$  y  $a_b$ , puede asignarse valores arbitrarios a estos dos parámetros, despejar el resto de incógnitas, obtener nuevos valores de  $a_t$  y  $a_b$ , y así sucesivamente hasta que la diferencia sea mínima. El método se detalla a continuación para el caso BOTH:

- 1) Se inicia el proceso con las dos ecuaciones siguientes

$$-N_{ct} = \frac{(h - a_b)N_{xy} - 2M_{xy}}{h_c \sin(2\theta_t)} ; -N_{cb} = \frac{(h - a_t)N_{xy} + 2M_{xy}}{h_c \sin(2\theta_b)} \quad (6.101)$$

- 2) Se asignan valores a  $a_t$  y  $a_b$ , elegidos con cierto criterio (deben ser positivos y no pueden exceder el espesor  $h$  del elemento).
- 3) Estos valores se sustituyen en la Ec. (6.86) y se obtienen los parámetros  $N_{ct}$  y  $N_{cb}$ .
- 4) Con las ecuaciones de equilibrio (6.52), (6.53), (6.55) y (6.56) se despejan las fuerzas y momentos totales en la armadura

$$N_{sx} = N_x - N_{ct} \sin^2 \theta_t + N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.102)$$

$$N_{sy} = N_y - N_{ct} \cos^2 \theta_t + N_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.103)$$

$$M_{sx} = M_x - M_{ct} \sin^2 \theta_t + M_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.104)$$

$$M_{sy} = M_y - M_{ct} \cos^2 \theta_t + M_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.105)$$

- 5) De las Ecs. (6.48) y (6.49) se obtienen las incógnitas finales  $N_{sxb}(\theta_t, \theta_b)$ ,

$N_{syt}(\theta_t, \theta_b)$  y  $N_{syb}(\theta_t, \theta_b)$  mediante dos sistemas de ecuaciones

Sistema 1

$$N_{sx} = N_{sxt} + N_{sxb} \quad (6.106)$$

$$M_{sx} = -N_{sxt}h_{xt} + N_{sxb}h_{xb} \quad (6.107)$$

Sistema 2

$$N_{sy} = N_{syt} + N_{syb} \quad (6.108)$$

$$M_{sy} = -N_{syt}h_{yt} + N_{syb}h_{yb} \quad (6.109)$$

La solución de los mismos es

$$N_{sxt} = \frac{N_{sx}h_{xb} - M_{sx}}{h_{xt} + h_{xb}} ; N_{sxb} = N_{sx} - N_{sxt} \quad (6.110)$$

$$N_{syt} = \frac{N_{sy}h_{yb} - M_{sy}}{h_{yt} + h_{yb}} ; N_{syb} = N_{sy} - N_{syt} \quad (6.111)$$

6) Se obtienen los nuevos valores de  $a_t$  y  $a_b$  (Ec. (6.50))

$$a_t = -\frac{N_{ct}}{f_{cd2}} ; a_b = -\frac{N_{cb}}{f_{cd2}} \quad (6.112)$$

7) Se vuelve al paso 3 y se repite el ciclo hasta que la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que una tolerancia fijada.

Para los casos BOTTOM y TOP el sistema de ecuaciones es distinto y por tanto la forma de despejarlo es también distinta, aunque la idea fundamental se mantiene. Se detalla a continuación los pasos para el caso BOTTOM:

- 1) Se asigna valores para  $a_t$  y  $a_b$  siguiendo el mismo criterio anterior
- 2) Cálculo del parámetro

$$N_{cb} = \frac{2M_{xy} + N_{xy}(h - a_t)}{(a_t + a_b - 2h)\sin\theta_b \cos\theta_b} \quad (6.113)$$

3) Obtención de la incógnita  $N_{cxyt}$  mediante la Ec. (6.63)

$$N_{cxyt} = N_{xy} + N_{cb} \sin\theta_b \cos\theta_b \quad (6.114)$$

4) Sustitución de las ecuaciones

$$M_{sx} = N_{sxb}h_{xb} ; M_{sy} = N_{syb}h_{yb} \quad (6.115)$$

$$M_{cxt} = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{cxt} ; M_{cyt} = -\frac{1}{2}(h - a_t)N_{cyt} \quad (6.116)$$

en las ecuaciones

$$N_x = N_{sx} + N_{cxt} + N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.117)$$

$$N_y = N_{sy} + N_{cyt} + N_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.118)$$

$$M_x = M_{sx} + M_{cxt} + M_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.119)$$

$$M_y = M_{sy} + M_{cyt} + M_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.120)$$

para obtener un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas cuya solución es

$$N_{cxt} = \frac{N_x h_{xb} - N_{cb} h_{xb} \sin^2 \theta_b + M_{cb} \sin^2 \theta_b - M_x}{h_{xb} + \frac{h - a_t}{2}} \quad (6.121)$$

$$N_{cyt} = \frac{N_y h_{yb} - N_{cb} h_{yb} \cos^2 \theta_b + M_{cb} \cos^2 \theta_b - M_y}{h_{yb} + \frac{h - a_t}{2}} \quad (6.122)$$

$$N_{sxb} = N_x - N_{cxt} - N_{cb} \sin^2 \theta_b \quad (6.123)$$

$$N_{syb} = N_y - N_{cyt} - N_{cb} \cos^2 \theta_b \quad (6.124)$$

5) Obtención de los parámetros para calcular la resistencia del hormigón

$$\left. \begin{aligned} N_{c1t} &= \frac{N_{cxt} + N_{cyt}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{cxt} - N_{cyt}}{2}\right)^2 + N_{cxyt}^2} \\ N_{c2t} &= \frac{N_{cxt} + N_{cyt}}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_{cxt} - N_{cyt}}{2}\right)^2 + N_{cxyt}^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.125)$$

$$K = \frac{1 + 3,65\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad (6.126)$$

con  $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ .

6) Nuevos valores  $a_t$  y  $a_b$

$$a_t = -\frac{N_{ct}}{Kf_{cd1}} ; a_b = -\frac{N_{cb}}{f_{cd2}} \quad (6.127)$$

7) Vuelta al paso 3 y repetir el ciclo hasta que la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que una tolerancia.

Para el caso TOP el procedimiento es similar al caso BOTTOM, sustituyendo las correspondientes variables en las ecuaciones mediante el intercambio de subíndices  $t$

por  $b$  y viceversa.

A continuación se muestra parte del código implementado en los ficheros de análisis para los casos BOTH, BOTTOM y TOP, respectivamente:

### Caso BOTH

```

1  *CREATE,OPTIMIZABOTH
2  HC=H-(AT+AB)/2
3  NCT=(2*MX-Y-NXY*(H-AB))/HC/SIN(2*ANGT)
4  NCB=-(2*MX+Y+NXY*(H-AT))/HC/SIN(2*ANGB)
5  MCT=-NCT*(H-AT)/2
6  MCB=NCB*(H-AB)/2
7  NSX=NX-NCT*SIN(ANGT)**2-NCB*SIN(ANGB)**2
8  MSX=MX-MCT*SIN(ANGT)**2-MCB*SIN(ANGB)**2
9  NSY=NY-NCT*COS(ANGT)**2-NCB*COS(ANGB)**2
10 MSY=MY-MCT*COS(ANGT)**2-MCB*COS(ANGB)**2
11 NSXT=(NSX*HXB-MSX)/(HXT+HXB)
12 NSXB=NSX-NSXT
13 NSYT=(NSY*HYB-MSY)/(HYT+HYB)
14 NSYB=NSY-NSYT

15 OLDAT=AT
16 OLDAB=AB
17 AT=-NCT/FCD2
18 AB=-NCB/FCD2
19 DIFAT=ABS(AT-OLDAT)
20 DIFAB=ABS(AB-OLDAB)

21 !Función objetivo
22 NTOT=NSXB+NSYB+NSXT+NSYT

23 !Transformación del ángulo a grados, y entre -90° y 90°
24 ANGRADT=(ANGT-2*PI)*(180/PI)
25 ANGRADB=(ANGB-2*PI)*(180/PI)

26 *END

```

### Caso BOTTOM

```

1  *CREATE,OPTIMIZABOTTOM
2  !Obtención de capacidades mecánicas de las armaduras y esfuerzos en el
   hormigón
3  NCB=(2*MX+Y+NXY*(H-AT))/((AT+AB-2*H)*SIN(ANGB)*COS(ANGB))
4  NCXYT=NXY+NCB*SIN(ANGB)*COS(ANGB)
5  MCB=NCB*(H-AB)/2
6  NCXT=(NX*HXB-NCB*HXB*SIN(ANGB)**2+MCB*SIN(ANGB)**2-MX)/(HXB+(H-AT)/2)
7  NSXB=NX-NCXT-NCB*SIN(ANGB)**2
8  NCYT=(NY*HYB-NCB*HYB*COS(ANGB)**2+MCB*COS(ANGB)**2-MY)/(HYB+(H-AT)/2)
9  NSYB=NY-NCYT-NCB*COS(ANGB)**2

10 !Obtención del coeficiente K de mayoración de FCD1 debido al estado
   biaxial de compresión
11 NCT1=(NCXT+NCYT)/2+SQRT(((NCXT-NCYT)/2)**2+NCXYT**2)
12 NCT=(NCXT+NCYT)/2-SQRT(((NCXT-NCYT)/2)**2+NCXYT**2)
13 ALFA=NCT1/NCT
14 K=(1+3.65*ALFA)/(1+ALFA)**2

15 !Nuevos valores AT y AB, obtención de las variables de estado
   (restricciones) 'DIFAT' Y 'DIFAB'
16 OLDAT=AT
17 OLDAB=AB

```



```

18 AT=-NCT/FCD1/K
19 AB=-NCB/FCD2
20 DIFAT=ABS(AT-OLDAT)
21 DIFAB=ABS(AB-OLDAB)

22 !Obtención de la función objetivo
23 NTOT=NSXB+NSYB

24 !Transformación del ángulo a grados, y entre -90° y 90°
25 ANGRADB=(ANGB-2*PI)*(180/PI)

26 *END

```

### Caso TOP

```

1 *CREATE,OPTIMIZATOP

2 !HC y NCT iniciales
3 HC=H-(AT+AB)/2
4 NCT=- (NXY*(H-AB)-2*MXY)/HC/SIN(2*ANGT)

5 !Obtención inicial del armado en dos capas
6 MCT=-NCT*(H-AT)/2
7 A1=NX-NCT*SIN(ANGT)**2
8 B1=MX-MCT*SIN(ANGT)**2
9 A2=NY-NCT*COS(ANGT)**2
10 B2=MY-MCT*COS(ANGT)**2
11 NSXT=(A1*0.5*(H-AB)-B1)/(HXT+0.5*(H-AB))
12 NSYT=(A2*0.5*(H-AB)-B2)/(HYT+0.5*(H-AB))

13 !Obtención de valores de compresión en el hormigón
14 NCXYB=NXY+NCT*SIN(ANGT)*COS(ANGT)
15 NCXB=A1-NSXT
16 NCYB=A2-NSYT
17 NCB=(NCXB+NCYB)/2-SQRT(((NCXB-NCYB)/2)**2+NCXYB**2)

18 !Obtención del coeficiente K de mayoración de FCD1 debido al estado
    biaxial de compresión
19 NCB1=(NCXB+NCYB)/2+SQRT(((NCXB-NCYB)/2)**2+NCXYB**2)
20 ALFA=NCB1/NCB
21 K=(1+3.65*ALFA)/(1+ALFA)**2

22 !Nuevos valores AT y AB, obtención de las variables de estado
    (restricciones) 'DIFAT' Y 'DIFAB'
23 OLDAT=AT
24 OLDAB=AB
25 AT=-NCT/FCD2
26 AB=-NCB/FCD1/K
27 DIFAT=ABS(AT-OLDAT)
28 DIFAB=ABS(AB-OLDAB)

29 !Obtención de la función objetivo
30 NTOT=NSXT+NSYT

31 !Transformación del ángulo a grados, y entre -90° y 90°
32 ANGRADT=(ANGT-2*PI)*(180/PI)
33 *END

```

#### 6.4.4.2 Caso particular de armadura innecesaria

Los casos BOTH, BOTTOM y TOP disponen de grados de libertad, pudiendo emplear unas determinadas variables de diseño en el proceso de optimización. Sin embargo, el caso FULLCOMP proporciona un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas

$(N_{cxt}, N_{cyl}, N_{cxyt}, N_{cxb}, N_{cyb}, N_{cxyb}, a_t \text{ y } a_b)$ , por lo que tiene solución única. Sólo hay que comprobar si el elemento se encuentra en este caso.

El sistema proviene de combinar las Ecs. (6.79) a (6.83) y de utilizar las ecuaciones de equilibrio (6.70) a (6.75). Estas ecuaciones son trigonométricas no lineales y se han obtenido como resultado de múltiples despejes, por lo que la resolución del sistema planteado alberga cierta dificultad.

Es posible encontrar una formulación en la que, conocidos  $a_t$  y  $a_b$ , se pueda despejar el resto de incógnitas. El método se plantea de forma similar al de los otros tres casos:

- 1) Asignación de valores a  $a_t$  y  $a_b$
- 2) Cálculo del resto de incógnitas

$$h_c = h - \frac{a_t + a_b}{2} \quad (6.128)$$

$$N_{cxyb} = \frac{M_{xy} + \frac{N_{xy}(h - a_t)}{2}}{h_c} ; N_{cxyt} = N_{xy} - N_{cxyb} \quad (6.129)$$

$$N_{cxb} = \frac{M_x + \frac{N_x(h - a_t)}{2}}{h_c} ; N_{cxt} = N_x - N_{cxb} \quad (6.130)$$

$$N_{cyb} = \frac{M_y + \frac{N_y(h - a_t)}{2}}{h_c} ; N_{cyl} = N_y - N_{cyb} \quad (6.131)$$

- 3) Obtención de los parámetros para calcular la resistencia del hormigón

$$\left. \begin{aligned} N_{c1t} &= \frac{N_{cxt} + N_{cyl}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{cxt} - N_{cyl}}{2}\right)^2 + N_{cxyt}^2} \\ N_{c2t} &= \frac{N_{cxt} + N_{cyl}}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_{cxt} - N_{cyl}}{2}\right)^2 + N_{cxyt}^2} \end{aligned} \right| \quad (6.132)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{c1b} &= \frac{N_{cxb} + N_{cyb}}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_{cxb} - N_{cyb}}{2}\right)^2 + N_{cxyb}^2} \\ N_{c2b} &= \frac{N_{cxb} + N_{cyb}}{2} - \sqrt{\left(\frac{N_{cxb} - N_{cyb}}{2}\right)^2 + N_{cxyb}^2} \end{aligned} \right| \quad (6.133)$$

$$\alpha_t = \frac{N_{c2t}}{N_{c1t}} ; \alpha_b = \frac{N_{c2b}}{N_{c1b}} \quad (6.134)$$

$$K_t = \frac{1 + 3,65\alpha_t}{(1 + \alpha_t)^2} ; K_b = \frac{1 + 3,65\alpha_b}{(1 + \alpha_b)^2} \quad (6.135)$$

4) Cálculo de los nuevos valores  $a_t$  y  $a_b$

$$a_t = \frac{N_{ct,max}}{K_t f_{cd1}} ; a_b = \frac{N_{cb,max}}{K_b f_{cd1}} \quad (6.136)$$

5) Vuelta al paso 2 y repetición del ciclo hasta que la diferencia entre dos iteraciones consecutivas sea menor que una tolerancia.

Alcanzada la convergencia y obtenidos los valores de las incógnitas, se comprueba la pertenencia del elemento al caso. Esto sucede si los espesores  $a_t$  y  $a_b$  son positivos, y si las tensiones principales, fuerzas por unidad de longitud ( $N_{c1t}$ ,  $N_{c2t}$ ,  $N_{c1b}$  y  $N_{c2b}$ ), son negativas, lo que implica compresión en ambas capas.

#### 6.4.4.3 Resolución mediante técnicas de optimización

La resolución del esquema de optimización planteado en el subapartado 6.4.3.2 no se pudo alcanzar por la limitación del programa ANSYS para manejar las complejas expresiones despejadas analíticamente. Sin embargo, este planteamiento se puede retomar empleando métodos numéricos de resolución.

Para ello es necesario introducir las variables *DIFAT* y *DIFAB* (diferencia entre  $a_t$  y  $a_b$ ) para comprobar la convergencia. Los valores de  $a_t$  y  $a_b$  al comienzo de la iteración se almacenan en los parámetros *OLDAT* y *OLDAB* (antiguos  $a_t$  y  $a_b$ ). Se calcula a continuación sus nuevos valores con las expresiones que correspondan, según el caso. Por último, se obtienen las diferencias *DIFAT* y *DIFAB* entre ambos. Cuando estas diferencias se encuentren por debajo de una tolerancia predefinida, el proceso numérico ha convergido y la solución del sistema puede aceptarse. Se reproduce un fragmento de código para el caso BOTH

```

1   OLDAT=AT
2   OLDAB=AB
3   AT=-NCT/FCD2
4   AB=-NCB/FCD2
5   DIFAT=ABS(AT-OLDAT)
6   DIFAB=ABS(AB-OLDAB)

```

El problema de optimización queda ahora como sigue:

Minimizar la función objetivo

$$N_s(\theta_t, \theta_b) \quad (6.137)$$

sujeta a las restricciones

$$N_{sxt}, N_{syt}, N_{sxb}, N_{syb} \geq 0 \quad (6.138)$$

$$a_t, a_b \geq 0 \quad (6.139)$$

$$DIFAT, DIFAB \geq 0 \quad (6.140)$$

siendo las variables de diseño  $\theta_i$  y  $\theta_b$ .

A continuación se muestra parte del código correspondiente al caso BOTH en el que se han introducido las instrucciones de optimización

```

1  /OPT
2  OPANL, OPTIMIZABOTH
3  OPVAR, ANGT, DV, MINANGT, MAXANGT, TOLVDIS
4  OPVAR, ANGB, DV, MINANGB, MAXANGB, TOLVDIS
5  OPVAR, NSXT, SV, 0, 100000, TOLVEST
6  OPVAR, NSYT, SV, 0, 100000, TOLVEST
7  OPVAR, NSXB, SV, 0, 100000, TOLVEST
8  OPVAR, NSYB, SV, 0, 100000, TOLVEST
9  OPVAR, DIFAT, SV, 0, TOLDIFA, TOLVEST
10 OPVAR, DIFAB, SV, 0, TOLDIFA, TOLVEST
11 OPVAR, AB, SV, 1E-5, , TOLVEST
12 OPVAR, AT, SV, 1E-5, , TOLVEST

13 OPVAR, NTOT, OBJ, , , TOLFOBJ

14 OPTYPE, FIRST
15 OPFRST, ITER
16 OPKEEP, ON

17 OPEXE
18 FINISH

```

A las variables *DIFAT* y *DIFAB* se las trata como restricciones o *state variables*, estando comprendidas entre cero y una tolerancia (*TOLDIFA*). De esta forma, el propio algoritmo de optimización es el que garantiza la convergencia del proceso, haciendo que estos parámetros adopten valores próximos a cero.

Los casos *BOTTOM* y *TOP* se implementan de forma similar.

Se muestra parte del código correspondiente al caso *FULLCOMP*, pues presenta algunas diferencias

```

1  *DO, N, 1, ITERACIONES, 1

2  HC=H-(AT+AB)/2
3  NCXYB=(MXY+NXY*(H-AT)/2)/HC
4  NCXYT=NXY-NCXYB
5  NCXB=(MX+NX*(H-AT)/2)/HC
6  NCXT=NX-NCXB
7  NCYB=(MY+NY*(H-AT)/2)/HC
8  NCYT=NY-NCYB

9  NCB=(NCXB+NCYB)/2-SQRT(((NCXB-NCYB)/2)**2+NCXYB**2)
10 NCT=(NCXT+NCYT)/2-SQRT(((NCXT-NCYT)/2)**2+NCXYT**2)
11 NCB1=(NCXB+NCYB)/2+SQRT(((NCXB-NCYB)/2)**2+NCXYB**2)
12 NCT1=(NCXT+NCYT)/2+SQRT(((NCXT-NCYT)/2)**2+NCXYT**2)
13 ALFA=NCB1/NCB
14 KB=(1+3.65*ALFA)/(1+ALFA)**2
15 ALFA=NCT1/NCT
16 KT=(1+3.65*ALFA)/(1+ALFA)**2

17 OLDAT=AT
18 OLDAB=AB
19 AB=-NCB/FCD1/KB
20 AT=-NCT/FCD1/KT

```

```

21      DIFAT=ABS(AT-OLDAT)
22      DIFAB=ABS(AB-OLDAB)

23      !Chequeo de la convergencia
24      *IF,DIFAT,LE,TOLDIFA,THEN
25          *IF,DIFAB,LE,TOLDIFA,THEN
26              *EXIT
27          *ENDIF
28      *ENDIF

29      *ENDDO

```

Este caso no requiere el empleo de instrucciones de optimización al tratarse de un sistema de ecuaciones determinado, tan solo un bucle iterativo en el que se va comprobando la convergencia por comparación de *DIFAT* y *DIFAB* con *TOLDIFA*. Cuando ésta se ha alcanzado, el bucle *\*DO* se detiene y se comprueba la pertenencia del elemento al caso.

Es conveniente advertir sobre la elección de una tolerancia adecuada. Si se establece demasiado amplia, se alcanza el óptimo pero arriesgando el cumplimiento del sistema de ecuaciones de equilibrio. Si se establece demasiado reducida, son necesarias más iteraciones para alcanzar la solución o el método puede no converger. El valor de *TOLDIFA* que ha dado buenos resultados es  $10^{-5}h$ , siendo *h* el espesor del elemento.

#### 6.4.4.4 Cuestiones relacionadas con el carácter numérico del método

El método utilizado es una herramienta numérica de resolución de un sistema de ecuaciones de equilibrio. Se ha comprobado que los resultados obtenidos son válidos en general. No obstante, existen algunos elementos en los que el proceso de optimización agota el número de iteraciones fijado sin alcanzar el mínimo. Estos casos han aparecido de forma aislada y no son la norma general, pero provocan ciertas reflexiones al respecto.

Una *primera hipótesis* se relaciona con la propia *complejidad de la función objetivo*. El sistema de ecuaciones no se ha podido resolver con procedimientos analíticos, debido a las extensas expresiones despejadas en las que aparecen funciones trigonométricas con potencias de orden elevado. El algoritmo de optimización del programa ANSYS se basa en la evaluación de los gradientes, buscando direcciones de minimización. Puede suceder que, debido a la complejidad de las expresiones, el proceso encuentre un *mínimo local* y no sea capaz de salir de él para avanzar en la búsqueda del mínimo global. De hecho se ha observado que la función objetivo varía muy poco en cada iteración, descubriéndose ciertas irregularidades en las secciones de armado.

Una *segunda hipótesis* se refiere a los *requisitos del punto inicial* para que el método converja. La mayoría de métodos numéricos convergen si el punto inicial se encuentra lo suficientemente próximo a la solución buscada. Es habitual que, para asegurar la obtención de la solución, se disponga de un teorema que indique las

condiciones a cumplir por el punto inicial. En este caso, el método numérico empleado no corresponde a ninguno de los convencionales divulgados en la literatura, sino que surge tras el descarte de otras opciones de resolución analítica. Se ha desarrollado para resolver los sistemas de ecuaciones de un tipo específico de problema, por lo que no dispone de las condiciones que debe cumplir el punto inicial para asegurar la convergencia. Esas condiciones podrían determinarse, pero se trata de un problema puramente matemático que se sale del alcance de esta tesis. Los valores iniciales de  $a_t$  y  $a_b$  se eligen arbitrariamente, aunque con cierta lógica, teniendo la precaución de que la suma de ambos no exceda el espesor  $h$  del elemento. Se ha adoptado un valor de  $0,2h$  y, en general, todos los elementos convergen de un modo normal. Ocasionalmente surge algún elemento que no converge, pero al probar con otros valores iniciales se ha logrado la convergencia. Se puede afirmar que el empleo de espesores de  $a_t$  y  $a_b$  desde  $0,05h$  hasta  $0,35h$  ha resultado satisfactorio.

Una *tercera hipótesis* puede vincularse a la propia *forma de operar en el proceso de minimización*. Se han tenido que definir los parámetros *DIFAT* y *DIFAB* para comprobar la convergencia del método, introduciéndolos como restricciones de igualdad convertidas a restricciones de desigualdad con una tolerancia reducida. Al algoritmo de optimización se le está exigiendo una tarea que entraña cierta complicación, pudiendo ocasionalmente ralentizar el proceso. Por un lado se deben cumplir las restricciones de *DIFAT* y *DIFAB*, pero por otro lado, la modificación de las variables  $\theta_t$  y  $\theta_b$  en busca del mínimo afecta a los valores de *DIFAT* y *DIFAB* en la siguiente iteración.

De las tres hipótesis, la segunda es la más habitual en la práctica, al detectarse casos de elementos que convergen cuando se modifican los valores iniciales de  $a_t$  y  $a_b$ . No obstante, aún existen algunos pocos elementos que no convergen, incluso modificando esos valores iniciales, lo que hace considerar también las hipótesis primera y tercera.

En general, el método de resolución propuesto arroja resultados satisfactorios en la práctica, aunque la aparición de las dificultades numéricas comentadas provoca que no se haya podido alcanzar una total robustez en el mismo. En cualquier caso, el estado actual de los procesadores de cálculo a nivel usuario hace inabordable plantear enfoques analíticos más generales, convirtiéndose este método en una vía de resolución del problema.

## 6.5 APLICACIONES EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES PLANOS

### 6.5.1 Introducción

Se han desarrollado cuatro ejemplos de aplicación del procedimiento de diseño óptimo planteado. Los dos primeros son una placa cuadrada y una viga de gran canto con dos aberturas interiores, caracterizados ambos por estar sometidos al estado tensional de

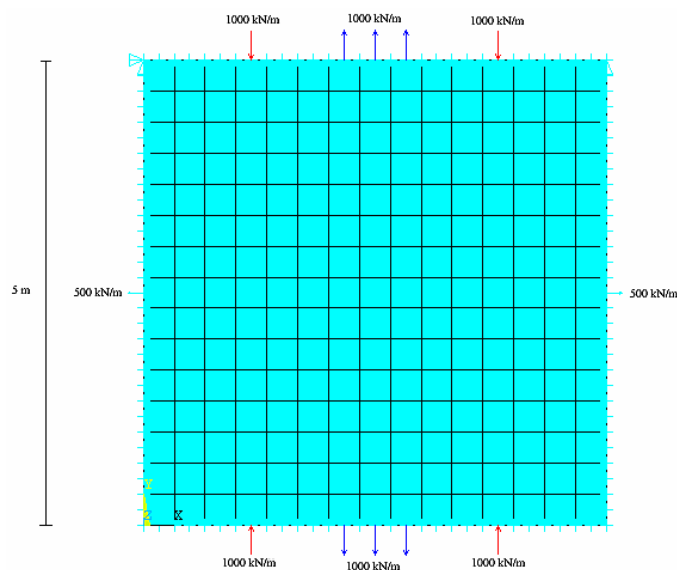
membrana de compresión. Se han obtenido los esfuerzos en los elementos de la malla que modeliza cada ejemplo y se ha resuelto el sistema de ecuaciones de equilibrio para hallar las densidades de armado.

El tercer ejemplo consta de una placa rectangular simplemente apoyada sometida a carga de flexión y a distintas cargas de compresión. Se resuelve la casuística planteada según la necesidad de armadura y se presentan resultados para los casos de flexión simple y flexión compuesta con una carga de compresión intermedia, y un resumen de la armadura obtenida para todos los casos de cargas de compresión analizados.

Por último, se presenta un cuarto ejemplo de placa rectangular sometida a carga de flexión con un borde libre y los otros tres empotrados. Se muestran mapas y superficies de densidad de armado y se establecen comparaciones entre las armaduras necesarias en algunas secciones de la estructura.

## 6.5.2 Elementos sometidos a compresión simple

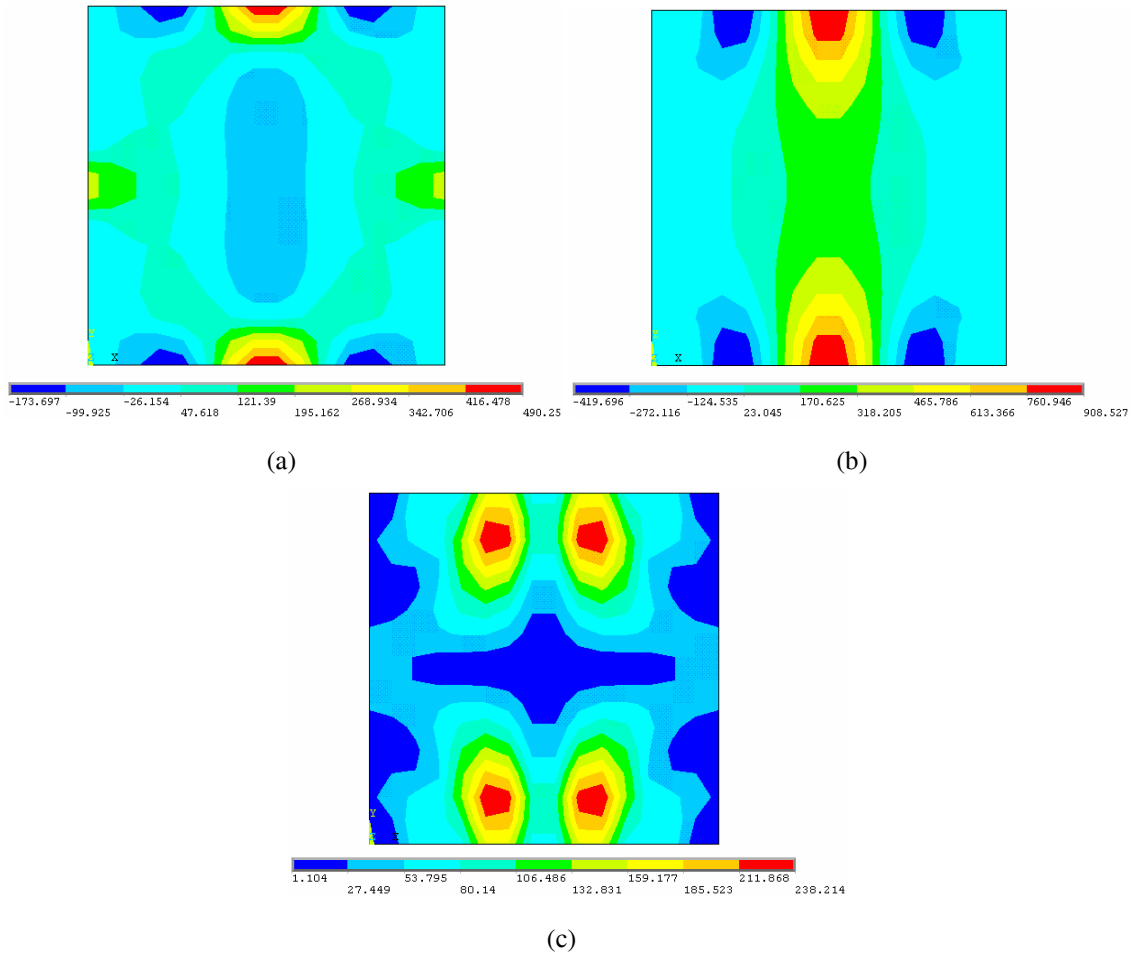
### 6.5.2.1 Placa cuadrada



**Figura 6.5** Placa cuadrada. Modelo de elementos finitos y cargas

Este ejemplo consiste en una placa cuadrada de hormigón de resistencia característica 20 MPa (Figura 6.5). La placa tiene 5 m de lado y un espesor de 0,15 m. Las cargas que la someten están contenidas en su plano para provocar el estado de membrana. La malla empleada en el análisis consta de  $15 \times 15$  elementos, siendo de un tamaño adecuado de acuerdo a las pruebas realizadas, pues mallas más finas no proporcionan cambios sustanciales en los resultados.

Se propone el armado de la placa utilizando barras de acero de 400 MPa de resistencia característica dispuestas según las direcciones ortogonales  $x$  e  $y$ . En la Figura 6.6 se muestra la representación suavizada de los esfuerzos internos.



**Figura 6.6** Placa cuadrada. Esfuerzos de membrana [kN/m]. (a)  $N_x$ . (b)  $N_y$ . (c)  $N_{xy}$

Estos esfuerzos son los datos iniciales para aplicar el método de equilibrio y obtener el armado en cada elemento. En la Figura 6.7 se presenta la distribución de densidades de armado en direcciones  $x$  e  $y$ .

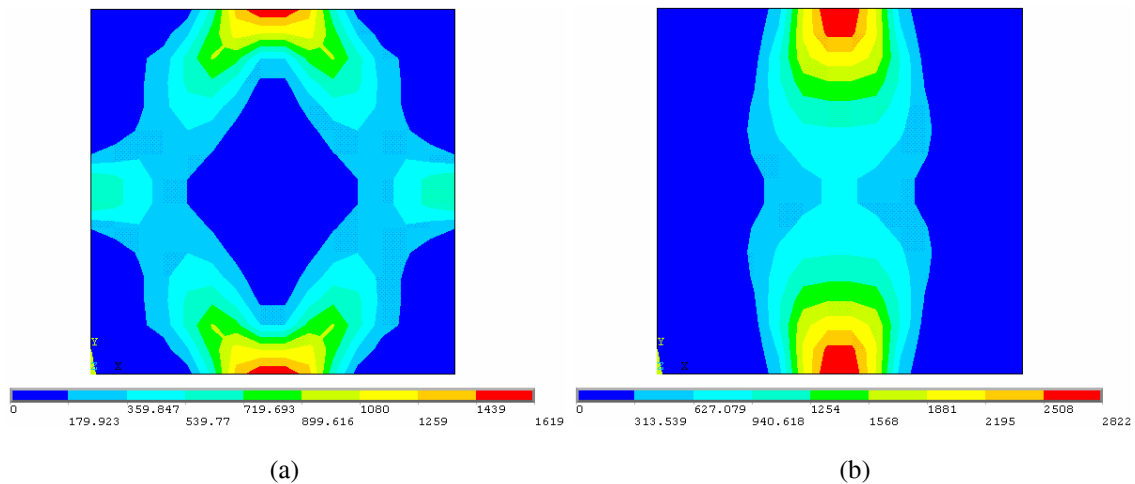
Es necesario comprobar el cumplimiento de las condiciones de resistencia en el hormigón. En el acero ya están garantizadas por la propia forma en que se realiza el proceso de obtención del armado. La resistencia del hormigón es distinta dependiendo de si la zona está o no fisurada y del estado tensional uniaxial o biaxial (apartado 6.2). Si está fisurada se traduce, según el planteamiento establecido (apartado 6.3.1), en la necesidad de armadura. En los elementos que necesitan armadura en dirección  $x$  e/o  $y$  se tiene que  $f_c \leq f_{cd2}$ , y en elementos que no necesitan armadura (estado biaxial de compresión) se tiene que  $f_c \leq Kf_{cd1}$ . En base a esto se ha implementado un fragmento de código que genera una serie de valores para el coeficiente de seguridad  $\gamma$  según la siguiente expresión

$$\gamma = \frac{\text{Resistencia}}{\sigma_c} \tag{6.141}$$

donde la *Resistencia* adopta el valor  $f_{cd2}$  o  $Kf_{cd1}$  según el caso. La tensión en el hormigón



$\sigma_c$  se halla multiplicando el esfuerzo por unidad de longitud en el hormigón  $N_c$ , obtenido de la resolución analítica del caso correspondiente, por el espesor de la placa  $h$ . En el caso de elementos sometidos a compresión biaxial se emplea la mayor de las tensiones principales. Si en alguno de los elementos  $\gamma$  es inferior a uno, el hormigón no es capaz de resistir las acciones exteriores. En este caso, el valor mínimo obtenido es de 1,94, localizado en uno de los elementos próximos a los puntos de aplicación de las cargas. Por tanto, en el punto más crítico, el hormigón se encuentra solicitado casi a la mitad de su resistencia.



**Figura 6.7** Placa cuadrada. Densidades de armado [mm<sup>2</sup>/m]. (a)  $A_{xx}$ . (b)  $A_{sy}$

Mediante las tablas y gráficos de densidad de armado, se pueden escoger las áreas de armadura a disponer, al margen de cumplir la distancia mínima entre barras, solapamientos y demás disposiciones constructivas. Al materializar el armado de forma práctica se emplea más cantidad de material que el estrictamente necesario, pero esto es habitual en estructuras de hormigón.

Aunque el objeto de este estudio no es hallar la armadura constructiva de forma detallada, se ha obtenido la armadura estricta en direcciones  $x$  e  $y$  en cada elemento, multiplicando el valor de la densidad de armado por la longitud en la dirección correspondiente. Esto es equivalente a una integración por escalones de las curvas interpoladoras de densidad de armado.

La armadura mínima para losas, con acero de 400 MPa de resistencia, es del 2‰ de la sección total de hormigón en cada dirección según la instrucción EHE, debiendo repartirse en las dos caras. Para el espesor de 0,15 m resulta

$$A_{s,\min} = 0,002A_c = 0,002 \cdot 150 \cdot 1000 = 300 \text{ mm}^2/\text{m}$$

y como la placa tiene 5 m de lado con 15 elementos por fila, cada elemento es cuadrado con un lado de longitud 1/3 m, siendo la armadura mínima en dirección  $x$  o  $y$  para un elemento

$$A_{s,\min} = 300 \cdot 1/3 = 100 \text{ mm}^2$$

**Tabla 6.1** Placa cuadrada. Armadura  $A_{sx}$  estricta en cada elemento del modelo

0.00	0.00	0.00	0.00	62.85	328.89	554.60	524.97	554.60	328.89	62.85	0.00	0.00	0.00	0.00
7.75	33.67	56.68	84.31	310.21	365.67	283.80	67.37	283.80	365.67	310.21	84.31	56.68	33.67	7.75
9.71	40.19	63.56	134.87	280.22	265.43	131.78	0.00	131.78	265.43	280.22	134.87	63.56	40.19	9.71
6.32	29.35	60.47	158.85	204.22	166.65	54.45	0.00	54.45	166.65	204.22	158.85	60.47	29.35	6.32
3.89	25.71	79.22	131.15	139.59	97.00	14.26	0.00	14.26	97.00	139.59	131.15	79.22	25.71	3.89
10.25	61.92	104.74	111.63	94.27	51.27	0.00	0.00	0.00	51.27	94.27	111.63	104.74	61.92	10.25
113.31	167.49	128.07	94.64	58.85	17.29	0.00	0.00	0.00	17.29	58.85	94.64	128.07	167.49	113.31
347.13	174.01	108.26	62.44	21.95	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	21.95	62.44	108.26	174.01	347.13
113.31	167.49	128.07	94.64	58.85	17.29	0.00	0.00	0.00	17.29	58.85	94.64	128.07	167.49	113.31
10.25	61.92	104.74	111.63	94.27	51.27	0.00	0.00	0.00	51.27	94.27	111.63	104.74	61.92	10.25
3.89	25.71	79.22	131.15	139.59	97.00	14.26	0.00	14.26	97.00	139.59	131.15	79.22	25.71	3.89
6.32	29.35	60.47	158.85	204.22	166.65	54.45	0.00	54.45	166.65	204.22	158.85	60.47	29.35	6.32
9.71	40.19	63.56	134.87	280.22	265.43	131.78	0.00	131.78	265.43	280.22	134.87	63.56	40.19	9.71
7.75	33.67	56.68	84.31	310.21	365.67	283.80	67.37	283.80	365.67	310.21	84.31	56.68	33.67	7.75
0.00	0.00	0.00	0.00	62.85	328.89	554.60	524.97	554.60	328.89	62.85	0.00	0.00	0.00	0.00

En amarillo  $A_{sx} \leq A_{s,\min} = 100 \text{ mm}^2$ ; en naranja  $100 < A_{sx} \leq 300 \text{ mm}^2$ ; en rojo  $A_{sx} > 300 \text{ mm}^2$

**Tabla 6.2** Placa cuadrada. Armadura  $A_{sy}$  estricta en cada elemento del modelo

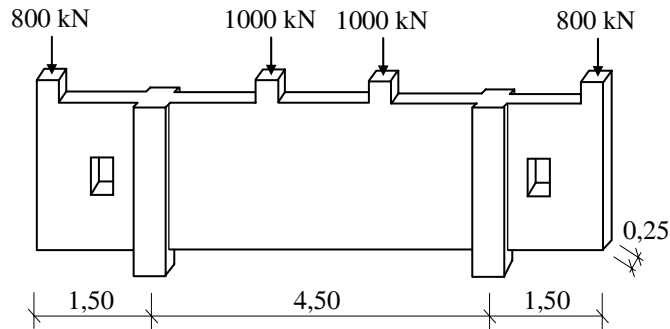
0.00	0.00	0.00	0.00	46.63	277.22	961.80	919.43	961.80	277.22	46.63	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	89.07	508.07	808.57	770.33	808.57	508.07	89.07	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	168.97	457.20	623.30	564.97	623.30	457.20	168.97	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	21.92	195.97	374.57	466.27	416.83	466.27	374.57	195.97	21.92	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	73.69	190.05	300.47	353.53	319.93	353.53	300.47	190.05	73.69	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	27.24	86.23	166.09	240.29	270.69	259.92	270.69	240.29	166.09	86.23	27.24	0.00	0.00
9.56	10.51	19.10	66.27	130.87	191.79	217.32	227.18	217.32	191.79	130.87	66.27	19.10	10.51	9.56
0.00	0.00	0.00	26.47	91.13	153.55	199.66	216.74	199.66	153.55	91.13	26.47	0.00	0.00	0.00
9.56	10.51	19.10	66.27	130.87	191.79	217.32	227.18	217.32	191.79	130.87	66.27	19.10	10.51	9.56
0.00	0.00	27.24	86.23	166.09	240.29	270.69	259.92	270.69	240.29	166.09	86.23	27.24	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	73.69	190.05	300.47	353.53	319.93	353.53	300.47	190.05	73.69	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	21.92	195.97	374.57	466.27	416.83	466.27	374.57	195.97	21.92	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	168.97	457.20	623.30	564.97	623.30	457.20	168.97	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	89.07	508.07	808.57	770.33	808.57	508.07	89.07	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	46.63	277.22	961.80	919.43	961.80	277.22	46.63	0.00	0.00	0.00	0.00

En amarillo  $A_{sx} \leq A_{s,\min} = 100 \text{ mm}^2$ ; en naranja  $100 < A_{sx} \leq 300 \text{ mm}^2$ ; en rojo  $A_{sx} > 300 \text{ mm}^2$

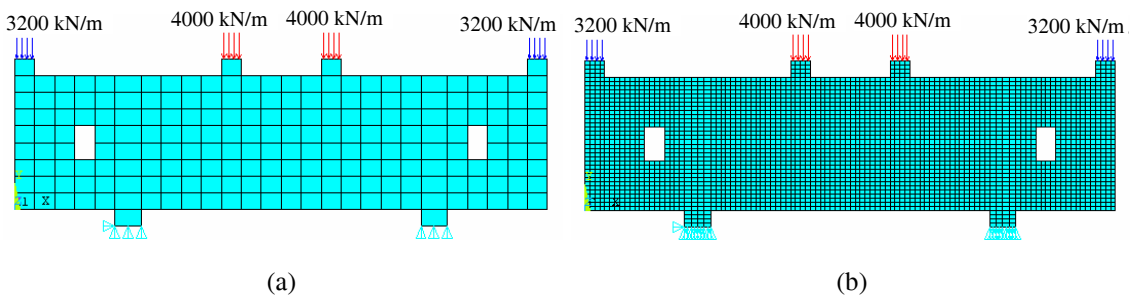
En las tablas 6.1 y 6.2 se representa simbólicamente la armadura necesaria en cada elemento en direcciones  $x$  e  $y$ . Los resultados aparecen localizados en las tablas coincidiendo con la misma posición en planta de los elementos de la placa. En color amarillo se tiene la armadura inferior a la mínima, en color anaranjado la que excede la mínima pero está por debajo de  $300 \text{ mm}^2$ , y en color rojo la superior a  $300 \text{ mm}^2$ . Mediante este tipo de representación puede visualizarse mejor las zonas críticas de armado.

### 6.5.2.2 Viga de gran canto

Este ejemplo consiste en una viga de gran canto con tres vanos, el central biapoyado y los dos extremos en voladizo (Lourenço y Figueiras, 1995). Presenta sendas aberturas en los tramos volados. La viga soporta unas cargas verticales transmitidas por cuatro pilares de  $0,30 \times 0,25$  m de sección, y apoya sobre dos columnas de  $0,4 \times 0,4$  m. El esquema de la geometría y de las cargas de la viga se muestra en la Figura 6.8. El hormigón empleado tiene una resistencia característica de 20 MPa.



**Figura 6.8** Viga de gran canto. Esquema de geometría y cargas



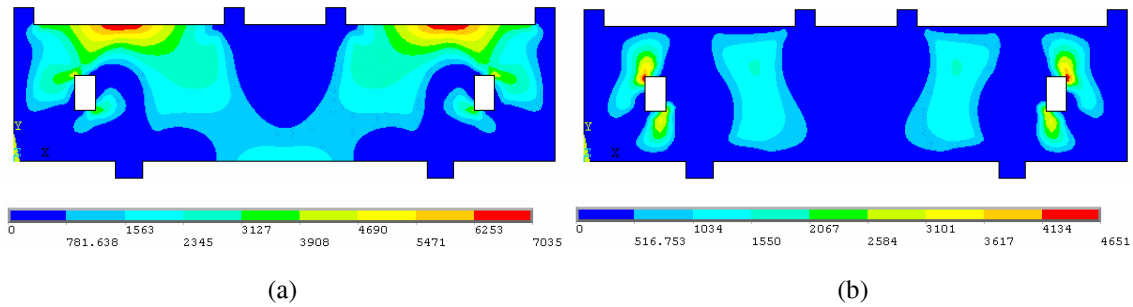
**Figura 6.9** Viga de gran canto. Modelo de elementos finitos. (a) Malla de 210 elementos.  
(b) Malla de 3360 elementos

Los elementos lámina tipo *shell93* de ANSYS sólo admiten cargas superficiales en las caras superior e inferior y cargas lineales en las caras de borde. Por ello, se han transformado las cargas puntuales a cargas por unidad de longitud dividiéndolas entre el espesor de la placa. Esta forma de aplicar las cargas es más realista si se considera que el pilar las transmite uniformemente en toda su sección y no puntualmente. Los apoyos se han modelizado como apoyos simples en los nodos de los elementos que constituyen los soportes inferiores. Ambos aspectos pueden observarse en la Figura 6.9.

Inicialmente se ha empleado un mallado constituido por 210 elementos (Figura 6.9a). Posteriores análisis con mallados más finos han mostrado que no se alcanzaba suficiente precisión, pues hay diferencias significativas en la armadura próxima a las aberturas y en la zona de apoyos, esto es, donde aparecen discontinuidades geométricas y estáticas. Se ha optado por utilizar una malla más fina formada por 3360 elementos (Figura 6.9b).

Los mapas de densidad de armado resultantes se presentan en la Figura 6.10. La

densidad de armado dispone de una configuración lógica, especialmente aquella de dirección  $x$  en las zonas de máximos momentos, y la que rodea a las aberturas donde se produce grandes concentraciones de tensiones. En Lourenço y Figueiras (1995) sólo se incluyen los mapas de densidades de armado, por lo que no ha sido posible realizar una comparación exhaustiva de los resultados. En cualquier caso, la comparación entre mapas de densidades muestra resultados similares.



**Figura 6.10** Viga de gran canto. Densidades de armado [ $\text{mm}^2/\text{m}$ ]. (a)  $A_{xx}$ . (b)  $A_{yy}$

Este tipo de problemas donde se presentan discontinuidades suele resolverse mediante un modelo de bielas y tirantes. El planteamiento de estos modelos no siempre es sencillo. En la bibliografía existen reglas prácticas para su elaboración y modelos resueltos para los casos más comunes. Puede citarse, entre otros, a Reineck (2002); Comisión 1–Grupo de trabajo 1/3 (2003); Mitchell, Collins, Bhide y Rabbat (2004) y Miguel, Fernández, Bonet, Martí, Navarro y Castro (2006). No obstante, la tarea suele ser compleja y la solución no es única, pudiendo plantearse distintos modelos según el nivel de detalle o aproximación que se requiera.

La Figura 6.10 podría ser de ayuda para formular uno de estos modelos de bielas y tirantes, si bien esta aplicación tendría un carácter más pedagógico que práctico. El método de equilibrio empleado evita tener que recurrir al planteamiento de este tipo de modelos, pues no sólo se ha conseguido resolver el armado de un elemento estructural complejo de un modo automático, sino que se ha alcanzado la solución de armadura óptima.

Por último, se ha realizado la comprobación de agotamiento del material mediante la obtención, para cada elemento, del coeficiente de seguridad  $\gamma$  de acuerdo a la Ec. (6.141). En algunos elementos situados en las zonas de mayor esfuerzo han aparecido valores inferiores a uno, lo que supone el incumplimiento del criterio de resistencia exigido. Este fallo no se refleja en los trabajos de Lourenço y Figueiras (1995).

Es preciso considerar que en el desarrollo del método para elementos sometidos al estado membrana, el sistema de ecuaciones de equilibrio no incluye la resistencia del hormigón (esto no sucede cuando hay flexión), siendo entonces la solución de armado independiente de ésta. La comprobación del hormigón hay que realizarla una vez obtenida la armadura de la placa. En este caso, para cumplir con la condición de agotamiento del material hay que aumentar la resistencia del hormigón. Se han

efectuado varias pruebas con distintos valores hasta encontrar que la resistencia mínima necesaria es de 40 MPa, adoptando el coeficiente  $\gamma$  más pequeño el valor 1,05.

### 6.5.3 Elementos sometidos a flexión simple, flexión compuesta o compresión compuesta

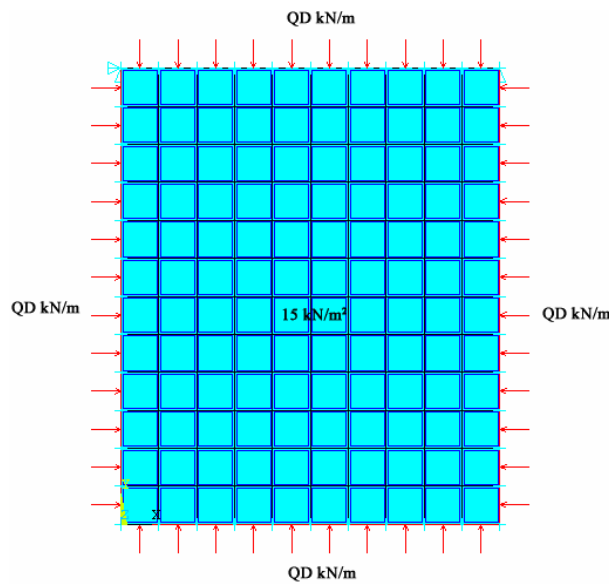
#### 6.5.3.1 Placa rectangular simplemente apoyada

##### *Planteamiento del problema*

Se aborda a continuación el caso de una placa rectangular de 5×6 m y 0,15 m de espesor (Lourenço y Figueiras, 1993). La placa está simplemente apoyada en sus cuatro bordes y sometida a las siguientes acciones:

- carga superficial de flexión aplicada en la cara superior, de valor 15 kN/m<sup>2</sup>, y
- carga hidrostática de compresión actuando en las cuatro caras laterales, de valor  $QD$  kN/m.

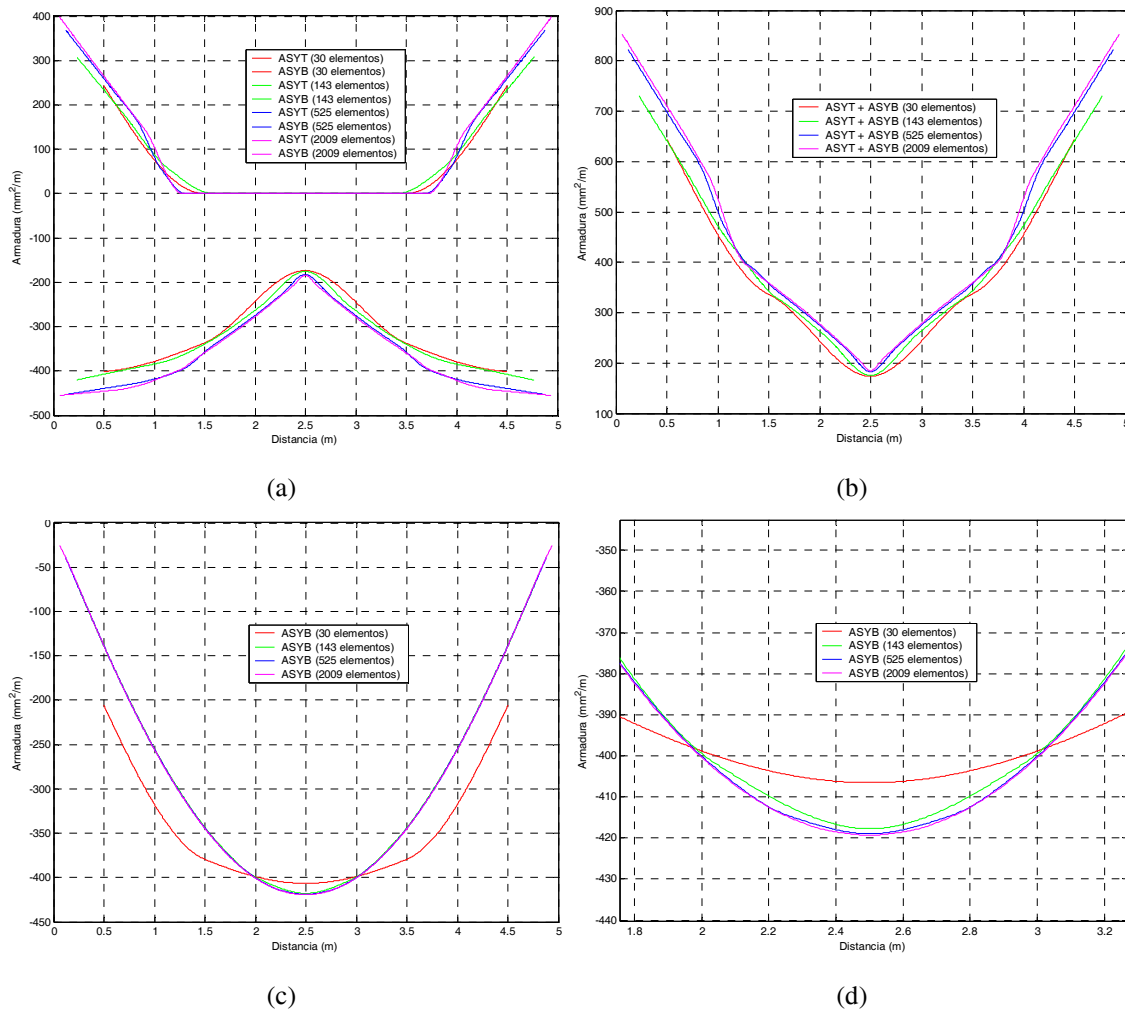
La geometría de la placa y las cargas que la someten aparecen en la Figura 6.11.



**Figura 6.11** Placa rectangular simplemente apoyada. Modelo de elementos finitos y cargas

El parámetro  $QD$  se define para modificar la carga hidrostática desde 0 hasta 250 kN/m a intervalos de 50 kN/m. El hormigón tiene una resistencia característica de 20 MPa y el acero de 400 MPa. Entre los valores que se asignan a la carga hidrostática, se ha escogido el caso de carga nula (estado de flexión) y el de carga 150 kN/m (estado de flexión y membrana) para presentar los resultados de una forma más completa, incluyendo gráficas de esfuerzos, mapas y superficies de densidad de armado y tablas de áreas de armadura estricta en cada elemento. Además, en todos los casos se incluyen gráficas de armadura  $A_{sy}$  en la sección de apoyo y en la sección de centro de vano, para poder compararlas con las mostradas en Lourenço y Figueiras (1993).

##### *Elección de la malla de elementos finitos*



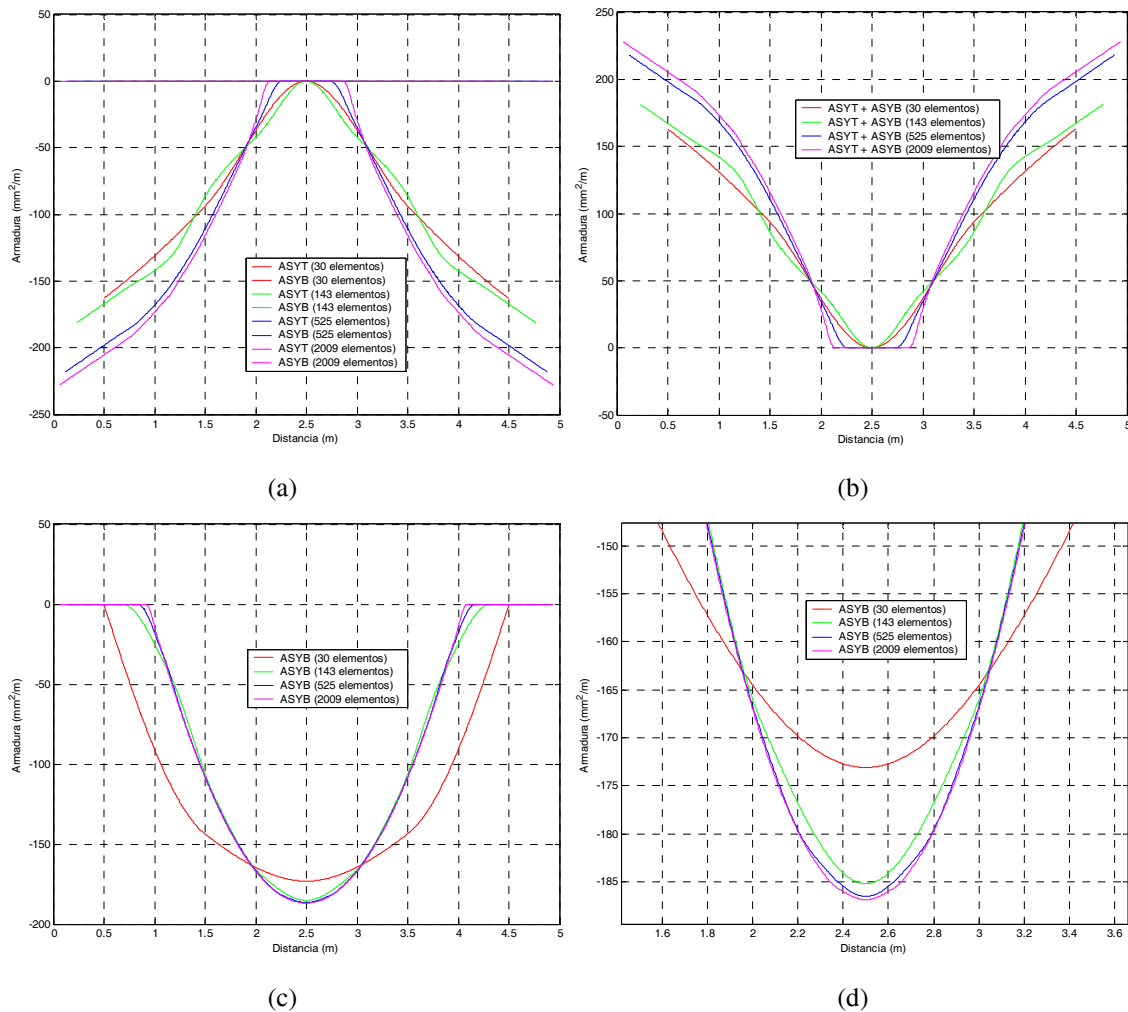
**Figura 6.12** Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura según el tamaño de malla ( $QD = 0$  kN/m). (a)  $A_{syt}$  y  $A_{syb}$  en sección de apoyo. (b)  $A_{syt} + A_{syb}$  en sección de apoyo. (c)  $A_{syb}$  en sección centro de vano. (d) Detalle de  $A_{syb}$  en sección centro de vano

Inicialmente se ha seleccionado una malla formada por elementos de gran tamaño con el objetivo de comprobar el correcto funcionamiento del método de optimización. La malla dispone de  $5 \times 6$  elementos, lo que supone elementos cuadrados de 1 m de lado. Posteriormente se han utilizado mallas más finas a base de duplicar aproximadamente el número de elementos contenidos en cada lado de la placa, lo que supone cuadruplicar el número de elementos finitos. Estas mallas son

- $5 \times 6$  (30) elementos,
- $11 \times 13$  (143) elementos,
- $21 \times 25$  (525) elementos, y
- $41 \times 49$  (2009) elementos.

El aumento en el número de elementos de la malla no se corresponde con una duplicación exacta. Esto se debe a la conveniencia de contar con un número de elementos impar en cada lado de la placa. Si el número de elementos fuera par se perdería información sobre la sección central, que es donde se alcanzan los valores

extremos de la armadura, al interpolar entre dos elementos adyacentes al eje de simetría.



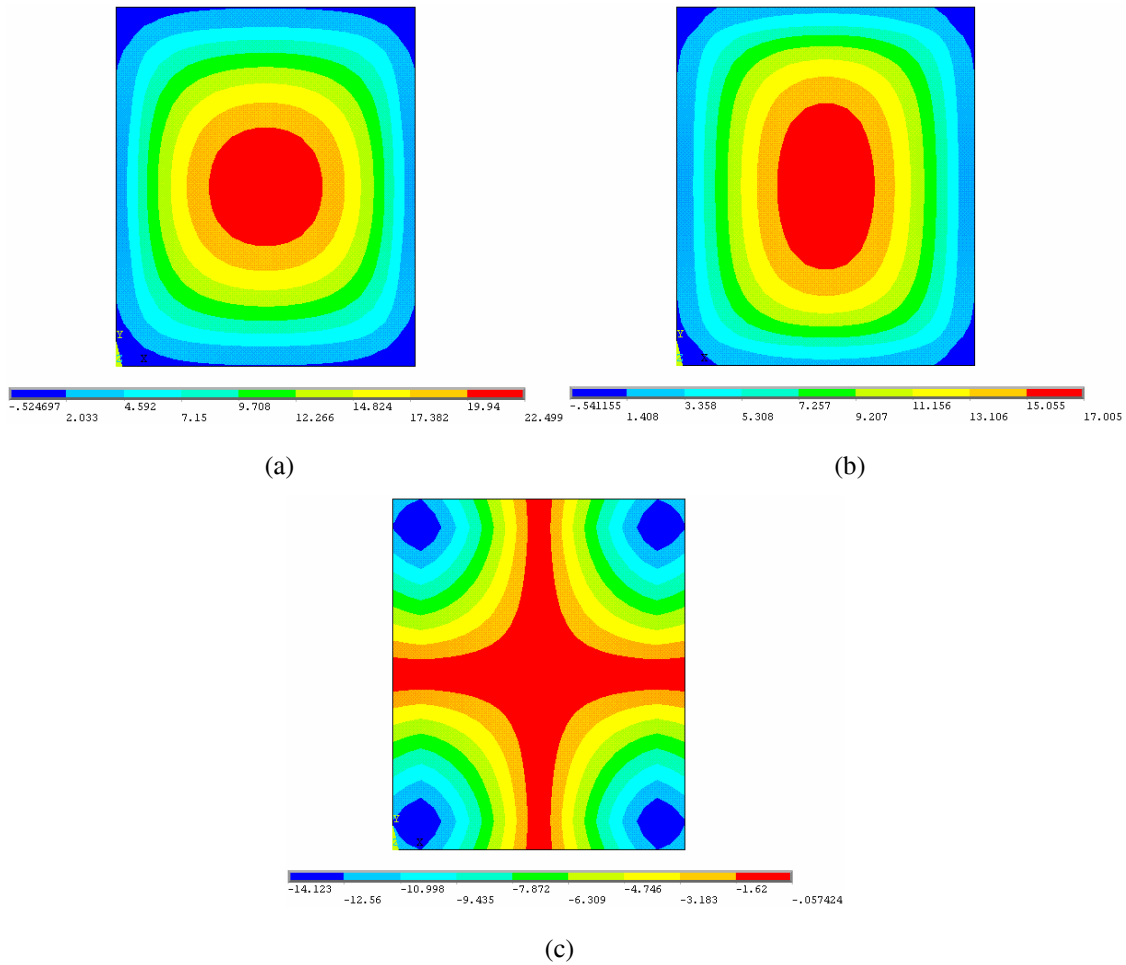
**Figura 6.13** Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura según el tamaño de malla ( $QD = 150 \text{ kN/m}$ ). (a)  $A_{syt}$  y  $A_{syb}$  en sección de apoyo. (b)  $A_{syt} + A_{syb}$  en sección de apoyo. (c)  $A_{syb}$  en sección centro de vano. (d) Detalle de  $A_{syb}$  en sección centro de vano

En las Figuras 6.12 y 6.13 se establece una comparativa de resultados empleando distintos tamaños de malla. La primera de las comparativas se realiza sin aplicación de carga hidrostática y la segunda con una carga hidrostática de  $150 \text{ kN/m}$ . De este modo se comprueba si esta carga influye en el tamaño de malla a adoptar, y si la variación de resultados entre mallas sigue el mismo patrón para distintas cargas hidrostáticas.

La malla de 30 elementos proporciona resultados que se alejan demasiado de los obtenidos para el resto de mallas, por lo que queda descartada. La malla de 143 elementos presenta una mejora significativa. En las secciones de centro de vano se ajusta bien a los resultados obtenidos con mallas más finas, sin embargo, en la sección de apoyo los resultados distan aún bastante. Comparando la malla de 525 y la de 2009 elementos se aprecia que, en la sección centro de vano, las dos gráficas prácticamente se superponen. Sólo al hacer una ampliación de esta zona aparece una mínima diferencia.

En las secciones de apoyo las diferencias son ligeramente mayores, aunque siguen siendo reducidas. Por tanto, se ha decidido emplear la malla de 21×25 (525) elementos al ser la que requiere un menor coste computacional manteniendo la suficiente precisión en los resultados.

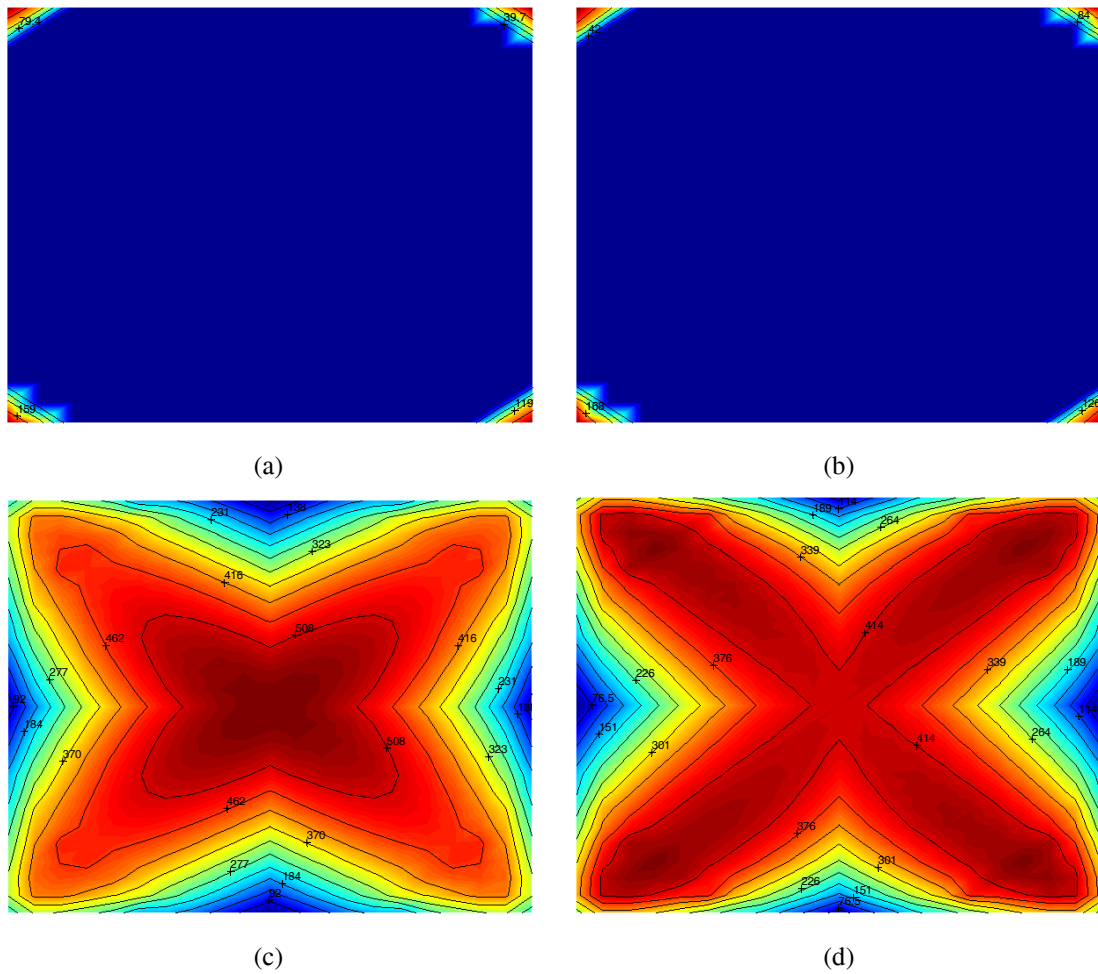
*Carga hidrostática  $QD = 0 \text{ kN/m}$*



**Figura 6.14** Placa rectangular simplemente apoyada. Esfuerzos de flexión [mkN/m] ( $QD = 0 \text{ kN/m}$ ). (a)  $M_x$ . (b)  $M_y$ . (c)  $M_{xy}$

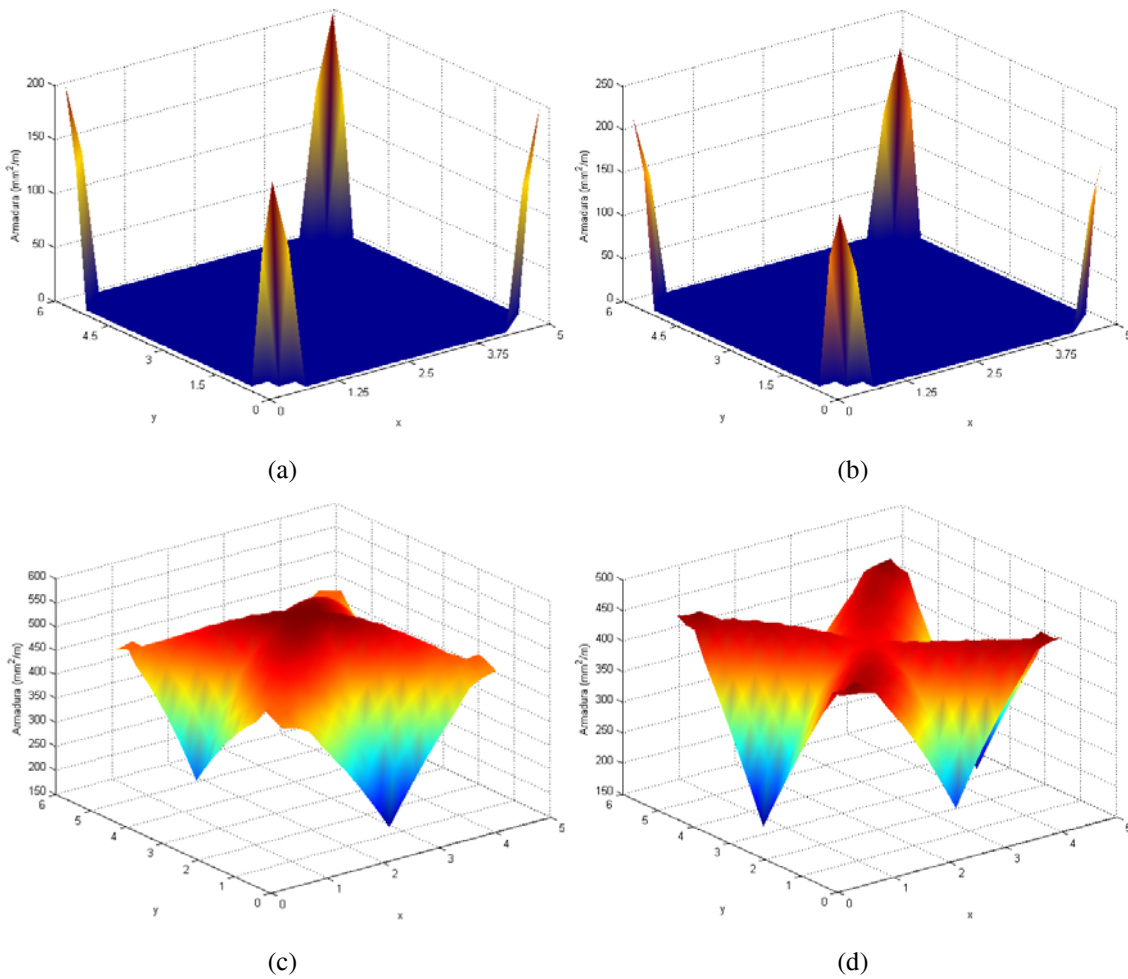
Se estudia primeramente el caso de flexión simple, sin carga hidrostática. Los esfuerzos que aparecen en la placa se reflejan en la Figura 6.14. Sólo se han incluido los flectores  $M_x$  y  $M_y$  y el torsor  $M_{xy}$ , ya que los esfuerzos  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  son nulos. Se observa que los momentos flectores adoptan valores máximos en el centro de la placa y van disminuyendo hacia los bordes. El torsor  $M_{xy}$  sin embargo va aumentando hacia las esquinas.





**Figura 6.15** Placa rectangular simplemente apoyada. Mapas de densidad de armado [ $\text{mm}^2/\text{m}$ ] ( $QD = 0 \text{ kN/m}$ ). (a)  $A_{xx}$ . (b)  $A_{yy}$ . (c)  $A_{sxb}$ . (d)  $A_{syb}$

En la Figura 6.15 se muestran los mapas de densidad de armado tras realizar un suavizado en las gráficas. Como resultado de interpolar los resultados entre elementos, se han confeccionado las superficies de armado (Figura 6.16). Estas superficies son una representación en relieve de los mapas de densidad de armado de la Figura 6.15, pudiendo visualizarse mejor la distribución de la armadura en las distintas zonas de la placa. La mayor cantidad de armadura aparece en la zona central de la placa en la capa inferior, como consecuencia de los máximos momentos flectores existentes en esta zona. En las diagonales, y hacia las esquinas, también se necesita más armadura debido al incremento del torsor  $M_{xy}$  en esa dirección. De hecho, es en las esquinas donde aparece la máxima armadura. En la capa superior no es necesaria armadura, excepto en las esquinas, por la misma causa relacionada con el momento torsor  $M_{xy}$ .



**Figura 6.16** Placa rectangular simplemente apoyada. Superficies de densidad de armado ( $QD = 0 \text{ kN/m}$ ). (a)  $A_{sx}$ . (b)  $A_{sy}$ . (c)  $A_{sxb}$ . (d)  $A_{syb}$ .

Se ha calculado el área total de armadura necesaria en cada elemento para las direcciones  $x$  e  $y$ . La armadura mínima a disponer en la placa es de  $300 \text{ mm}^2/\text{m}$ , tanto para la armadura longitudinal como para la transversal, a repartir entre las capas superior e inferior, resultando pues  $150 \text{ mm}^2/\text{m}$  por cada capa y dirección. Para calcular la armadura mínima que corresponde a cada elemento hay que conocer sus dimensiones. Sabiendo que la placa es de  $5 \times 6 \text{ m}$ , con un mallado de  $21 \times 25$  elementos, resulta un elemento de  $0,24 \text{ m}$  en dirección  $x$  por  $0,2381 \text{ m}$  en dirección  $y$ . Por tanto, la armadura mínima para cada elemento es

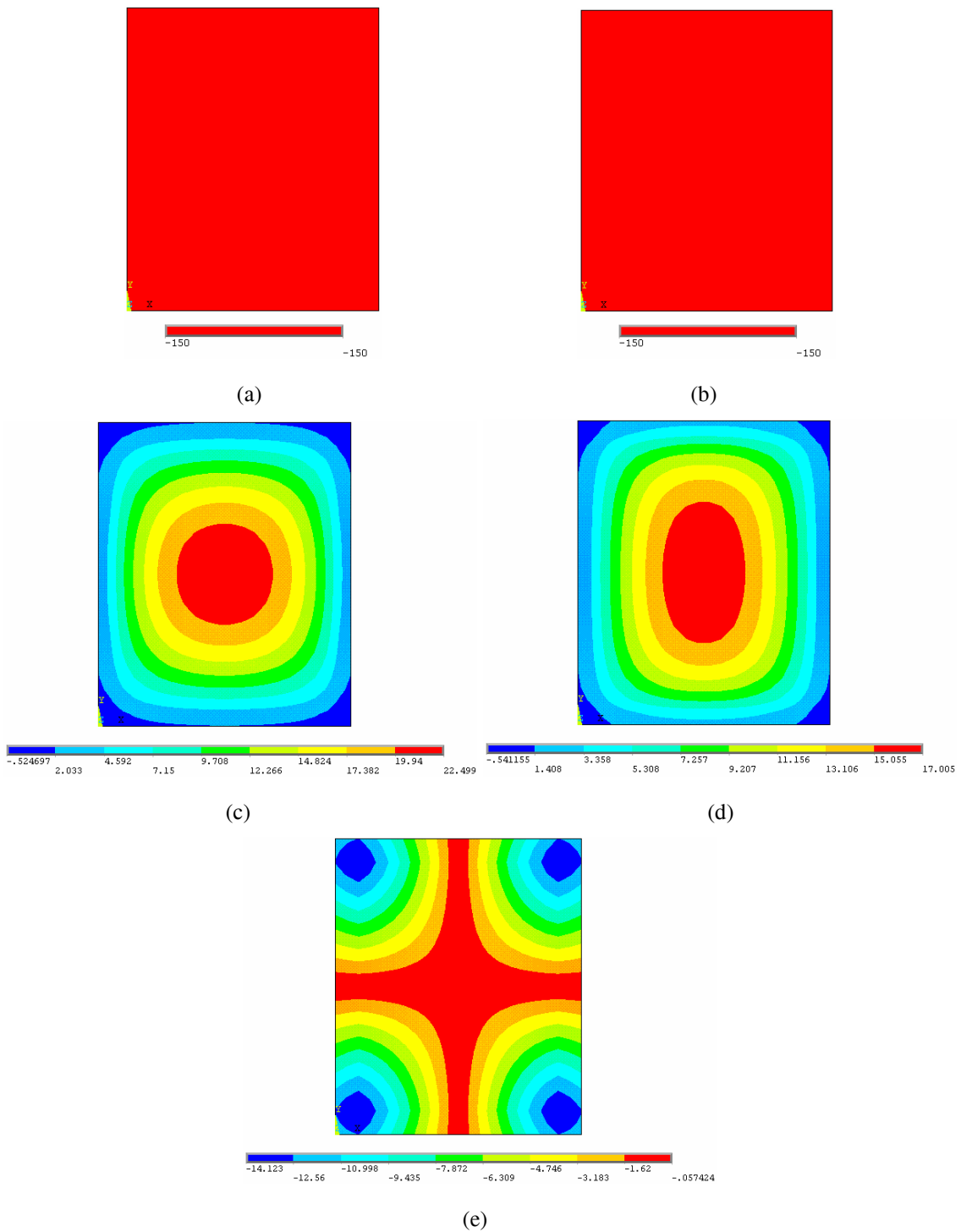
$$A_{sx,\min} = 150 \cdot 0,24 = 36,00 \text{ mm}^2$$

$$A_{sy,\min} = 150 \cdot 0,2381 = 35,71 \text{ mm}^2$$

En las tablas 6.3 a 6.6 se muestran los valores del armado calculados para cada elemento. La disposición de estos valores en la tabla coincide con la disposición en planta de los correspondientes elementos en la placa. Se ha utilizado una gradación de colores para presentar los resultados. En amarillo los elementos de armadura inferior a



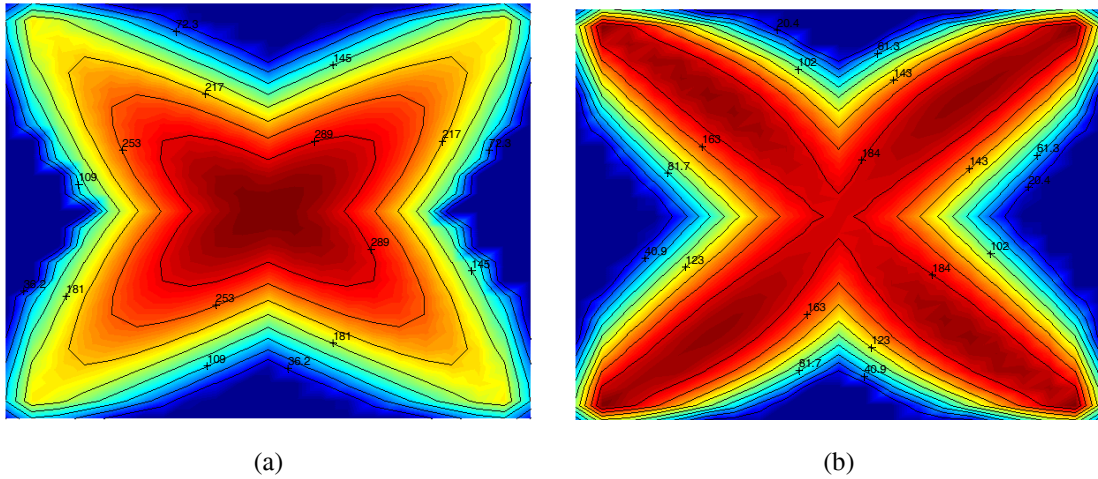




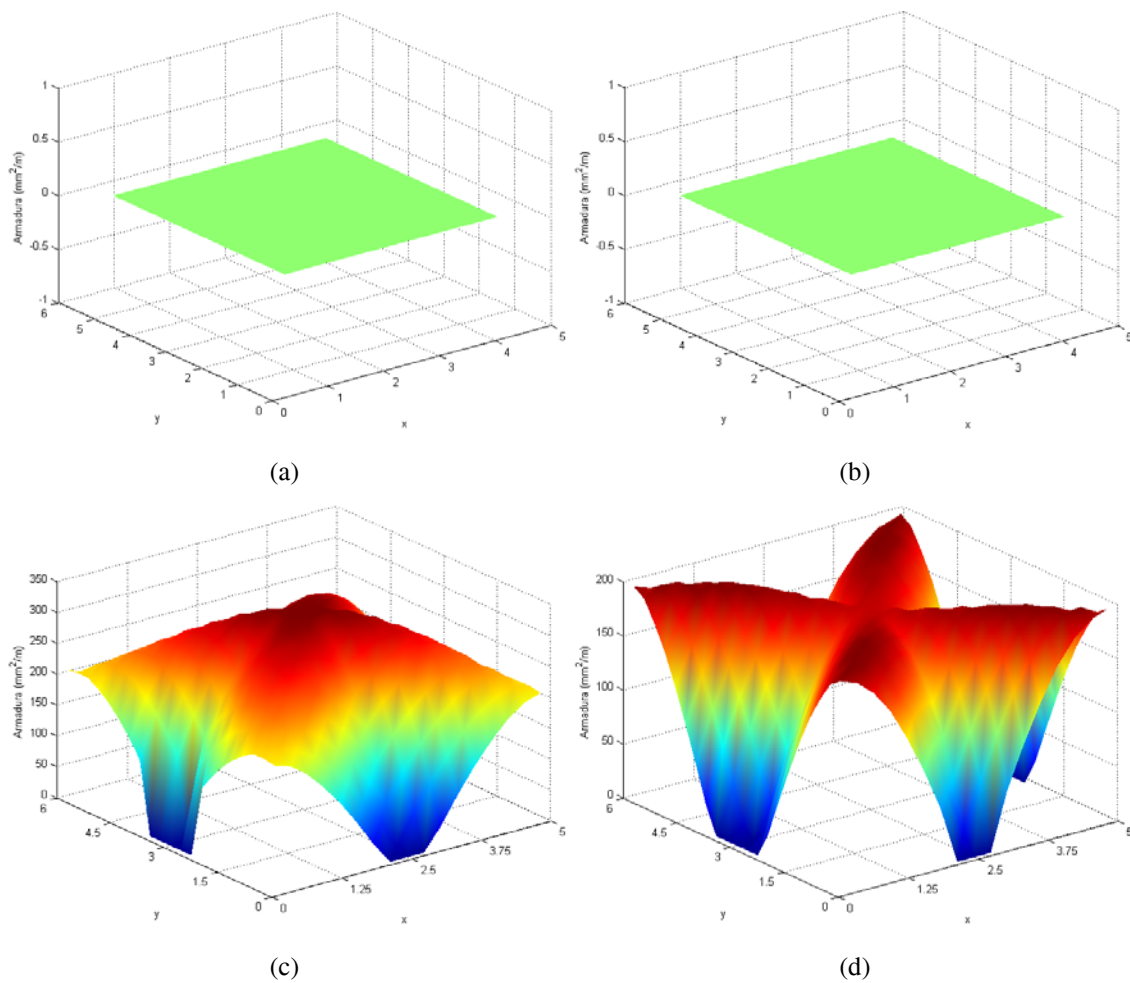
**Figura 6.17** Placa rectangular simplemente apoyada. Esfuerzos de membrana [kN/m] y de flexión [mkn/m] ( $QD = 150$  kN/m). (a)  $N_x$ . (b)  $N_y$ . (c)  $M_x$ . (d)  $M_y$ . (e)  $M_{xy}$

Estos esfuerzos suponen los datos de entrada en el proceso de optimización. Los resultados de armado se representan en la Figura 6.18. La carga hidrostática de compresión tiende a hacer que la armadura sea menor, pues sus efectos contrarrestan la

tracción que provocan los flectores en la capa inferior de la placa. De hecho, para una carga hidrostática de 150 kN/m ya no se requiere armadura superior.



**Figura 6.18** Placa rectangular simplemente apoyada. Mapas de densidades de armado [mm<sup>2</sup>/m] ( $QD = 150$  kN/m). (a)  $A_{sxb}$ . (b)  $A_{syb}$



**Figura 6.19** Placa rectangular simplemente apoyada. Superficies de densidad de armado ( $QD = 150$  kN/m). (a)  $A_{sxt}$ . (b)  $A_{syt}$ . (c)  $A_{sxb}$ . (d)  $A_{syb}$

En la Figura 6.19 se representan las superficies de armado, pudiendo apreciarse la no necesidad de armadura en la capa superior (Figuras 6.19a y 6.19b). Se ha elaborado las tablas de armado (tablas 6.7 y 6.8), no incluyendo ahora las correspondientes a las capas superiores al ser nula la armadura. La gradación de colores utilizada en la presentación de los resultados es la misma que en los casos anteriores. Las necesidades de armado son menores debido a la carga hidrostática aplicada, de hecho ningún elemento supera los 80 mm<sup>2</sup> de armadura. En el caso de 200 kN/m de carga hidrostática se ha realizado un cálculo similar, siendo suficiente la cuantía mínima para armar la placa, pues ningún elemento necesita mayor armadura por cuestiones resistentes.

**Tabla 6.7** Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura  $A_{sxb}$  estricta en cada elemento del modelo ( $QD = 150$  kN/m)

8.35	26.02	22.09	14.72	6.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.50	14.72	22.09	26.02	8.35
25.85	49.62	45.30	38.88	31.09	22.43	12.71	2.28	0.00	0.00	0.00	0.00	2.28	12.71	22.43	31.09	38.88	45.30	49.62	25.85	
23.74	47.92	49.66	47.53	42.70	35.82	27.89	18.55	8.32	0.00	0.00	0.00	8.32	18.55	27.89	35.82	42.70	47.53	49.66	47.92	23.74
18.28	44.38	50.49	51.85	49.90	46.02	39.78	31.91	23.18	13.30	2.50	13.30	23.18	31.91	39.78	46.02	49.90	51.85	50.49	44.38	18.28
12.22	40.21	50.22	54.83	55.87	54.05	49.91	43.65	36.32	27.50	17.69	27.50	36.32	43.65	49.91	54.05	55.87	54.83	50.22	40.21	12.22
6.12	34.70	47.74	55.29	59.03	59.64	57.64	53.53	47.47	40.00	31.45	40.00	47.47	53.53	57.64	59.64	59.03	55.29	47.74	34.70	6.12
0.00	28.76	44.27	54.40	60.59	63.47	63.46	61.18	56.90	50.89	43.59	50.89	56.90	61.18	63.46	63.47	60.59	54.40	44.27	28.76	0.00
0.00	22.19	39.71	52.05	60.33	65.35	67.46	67.04	64.40	59.99	54.01	59.99	64.40	67.04	67.46	65.35	60.44	52.05	39.71	22.19	0.00
0.00	0.00	34.20	48.32	58.67	65.64	69.63	70.94	70.09	67.20	62.62	67.20	70.09	70.94	69.63	65.64	58.67	48.32	34.20	0.00	0.00
0.00	0.00	27.77	43.57	55.60	64.30	70.05	73.10	73.90	72.56	69.37	72.56	73.90	73.10	70.05	64.30	55.60	43.57	27.77	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	37.77	51.15	61.39	68.73	73.45	75.78	76.01	74.23	76.01	75.78	73.45	68.73	61.39	51.15	37.77	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	30.97	45.59	57.12	65.81	71.99	75.85	77.51	77.15	77.54	75.85	71.99	65.81	57.12	45.59	30.97	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	38.87	51.45	61.37	68.84	74.05	77.11	78.13	77.11	74.05	68.84	61.37	51.45	38.87	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	30.97	45.59	57.12	65.81	71.99	75.85	77.51	77.15	75.85	71.99	65.81	57.12	45.59	30.97	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	37.77	51.15	61.39	68.73	73.45	75.78	76.01	74.23	75.78	73.45	68.73	61.39	51.15	37.77	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	27.77	43.57	55.60	64.30	70.05	73.10	73.90	72.56	69.37	72.56	73.90	73.10	70.05	64.30	55.60	43.57	27.77	0.00	0.00
0.00	0.00	34.20	48.32	58.67	65.64	69.63	70.94	70.09	67.20	62.62	67.20	70.09	70.94	69.63	65.64	58.67	48.42	34.20	0.00	0.00
0.00	22.19	39.71	52.05	60.33	65.35	67.46	67.04	64.40	59.99	54.01	59.99	64.40	67.04	67.46	65.35	60.33	52.05	39.71	22.19	0.00
0.00	28.76	44.27	54.40	60.59	63.47	63.46	61.18	56.90	50.89	43.59	50.89	56.90	61.18	63.46	63.47	60.59	54.40	44.27	28.76	0.00
6.12	34.70	47.74	55.29	59.03	59.64	57.64	53.40	47.47	40.00	31.45	40.00	47.47	53.40	57.64	59.64	59.03	55.29	47.74	34.70	6.12
12.22	40.21	50.22	54.83	55.76	54.05	49.91	43.65	36.32	27.50	17.69	27.50	36.32	43.65	49.91	54.05	55.76	54.83	50.22	40.21	12.22
18.28	44.38	50.49	51.85	49.90	46.02	39.78	31.91	23.18	13.30	2.50	13.30	23.18	31.91	39.78	46.02	49.90	51.85	50.49	44.38	18.28
23.74	47.92	49.66	47.53	42.70	35.82	27.89	18.55	8.32	0.00	0.00	0.00	8.32	18.55	27.89	35.82	42.70	47.53	49.66	48.08	23.74
25.85	49.62	45.30	38.88	31.09	22.43	12.71	2.28	0.00	0.00	0.00	0.00	2.28	12.71	22.43	31.09	38.88	45.30	49.62	25.85	
8.35	26.02	22.09	14.72	6.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.50	14.72	22.09	26.02	8.35

En amarillo  $A_{sxb} \leq A_{s,min} = 36$  mm<sup>2</sup>; en naranja  $36 < A_{sxb} \leq 80$  mm<sup>2</sup>

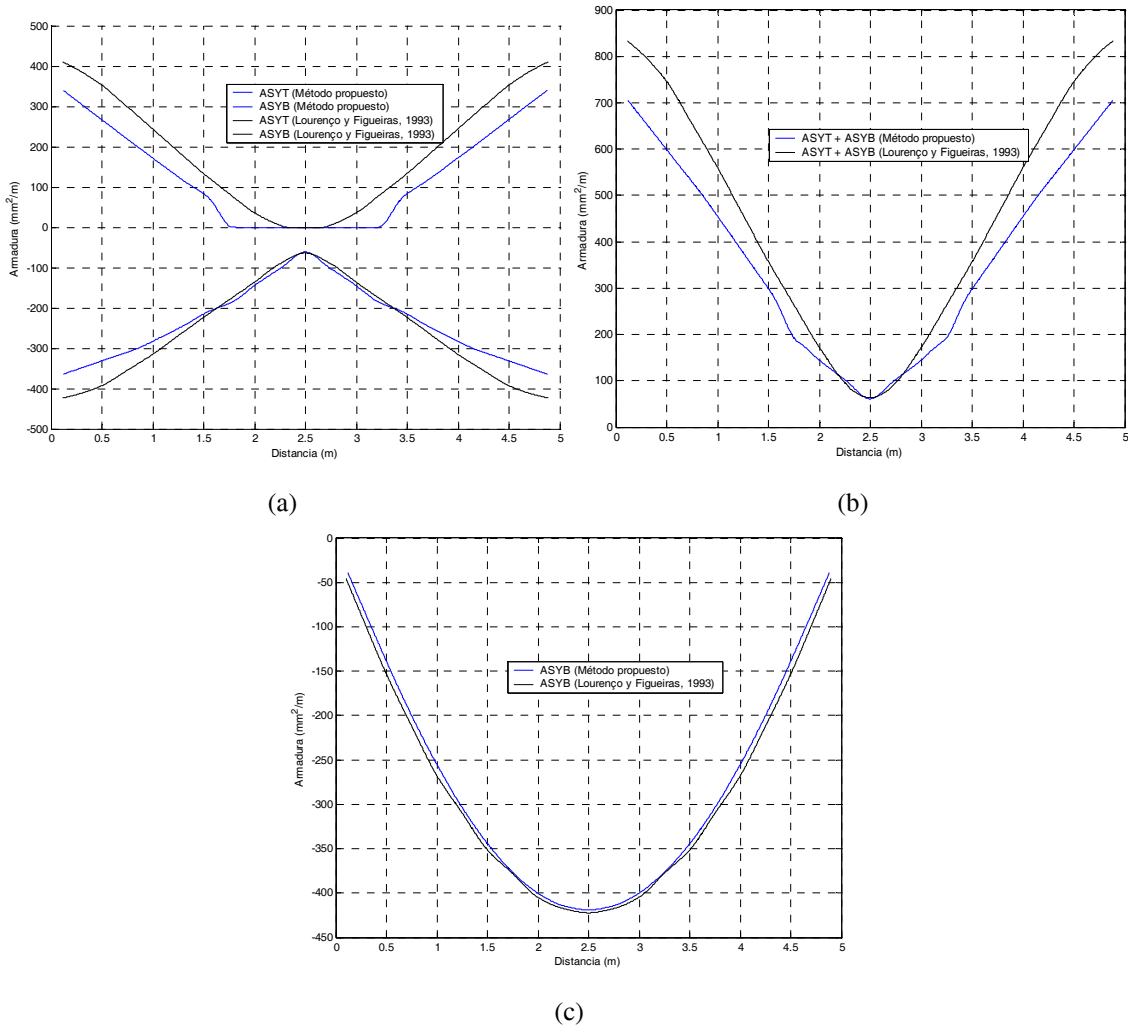
**Tabla 6.8** Placa rectangular simplemente apoyada. Armadura  $A_{syb}$  estricta en cada elemento del modelo ( $QD = 150$  kN/m)

8.18	25.31	22.20	15.83	8.71	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	8.71	15.83	22.20	25.31	8.18
25.62	48.65	45.16	39.90	33.56	25.81	17.19	7.65	0.00	0.00	0.00	0.00	7.65	17.19	25.81	33.56	39.90	45.16	48.65	25.62	
22.04	44.54	46.65	45.31	42.07	37.11	30.12	22.02	12.74	0.00	0.00	0.00	12.74	22.02	30.12	37.11	42.07	45.31	46.65	44.54	22.04
15.61	38.70	44.93	47.00	46.66	43.55	38.86	32.51	24.27	14.87	4.51	14.87	24.27	32.51	38.86	43.55	46.66	47.00	44.93	38.70	15.61
8.79	31.77	40.48	45.20	47.15	46.64	43.91	39.40	32.64	24.51	14.99	24.51	32.64	39.40	43.91	46.64	47.15	45.20	40.48	31.77	8.79
1.34	24.66	35.26	42.08	46.11	47.60	46.72	43.61	38.66	31.82	23.33	31.82	38.66	43.61	46.72	47.60	46.11	42.08	35.26	24.66	1.34
0.00	16.73	28.72	37.26	43.11	46.42	47.41	46.02	42.50	37.07	29.83	37.07	42.50	46.02	47.41	46.42	43.11	37.26	28.72	16.73	0.00
0.00	8.45	21.47	31.41	38.92	43.87	46.42	46.66	44.77	40.73	34.81	40.73	44.77	46.66	46.42	43.87	38.92	31.41	21.47	8.45	0.00
0.00	0.00	13.71	24.90	33.66	40.08	44.19	46.08	45.66	43.15	38.54	43.15	45.66	46.08	44.19	40.08	33.66	24.90	13.71	0.00	0.00
0.00	0.00	5.69	17.73	27.67	35.45	41.00	44.38	45.47	44.43	41.23	44.43	45.47	44.38	41.00	35.45	27.67	17.73	5.69	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	10.18	21.23	30.21	37.10	41.84	44.45	44.81	43.03	44.81	44.45	41.84	37.10	30.21	21.23	10.18	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	2.38	14.29	24.38	32.56	38.65	42.61	44.44	44.07	44.41	42.61	38.65	32.56	24.38	14.29	2.38	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	7.04	18.13	27.42	34.78	40.11	43.33	44.41	43.33	40.11	34.78	27.42	18.13	7.04	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	2.38	14.29	24.38	32.56	38.65	42.61	44.44	44.07	44.41	42.61	38.65	32.56	24.38	14.29	2.38	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	10.18	21.23	30.21	37.10	41.84	44.45	44.81	43.03	44.81	44.45	41.84	37.10	30.21	21.23	10.18	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	5.69	17.73	27.67	35.45	41.00	44.38	45.47	44.43	41.23	44.43	45.47	44.38	41.00	35.45	27.67	17.73	5.69	0.00	0.00
0.00	0.00	13.72	24.90	33.66	40.08	44.19	46.08	45.66	43.15	38.54	43.15	45.66	46.08	44.19	40.08	33.66	24.91	13.71	0.00	0.00
0.00	8.45	21.47	31.41	38.92	43.87	46.42	46.66	44.77	40.74	34.81	40.74	44.77	46.66	46.42	43.87	38.92	31.41	21.47	8.45	0.00
0.00	16.73	28.72	37.26	43.11	46.42	47.41	46.02	42.50	37.07	29.83	37.07	42.50	46.02	47.41	46.42	43.11	37.26	28.72	16.73	0.00
1.34	24.66	35.26	42.08	46.11	47.60	46.72	43.74	38.66	31.82	23.33	31.82	38.66	43.74	46.72	47.60	46.11	42.08	35.26	24.66	1.34
8.79	31.77	40.48	45.20	47.25	46.64	43.91	39.40	32.64	24.51	14.99	24.51	32.64	39.40	43.91	46.64	47.25	45.20	40.48	31.77	8.79
15.61	38.70	44.93	47.00	46.66	43.55	38.86	32.51	24.27	14.87	4.51	14.87	24.27	32.51	38.86	43.55	46.66	47.00	44.93	38.70	15.61
22.04	44.54	46.65	45.31	42.07	37.11	30.12	22.02	12.74	0.00	0.00	0.00	12.74	22.02	30.12	37.11	42.07	45.31	46.65	44.38	22.04
25.62	48.65	45.16	39.90	33.56	25.81	17.19	7.65	0.00	0.00	0.00	0.00	7.65	17.19	25.81	33.56	39.90	45.16	48.65	25.62	
8.18	25.31	22.20	15.83	8.71	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	8.71	15.83	22.20	25.31	8.18

En amarillo  $A_{syb} \leq A_{s,min} = 35,71$  mm<sup>2</sup>; en naranja  $35,71 < A_{syb} \leq 80,00$  mm<sup>2</sup>

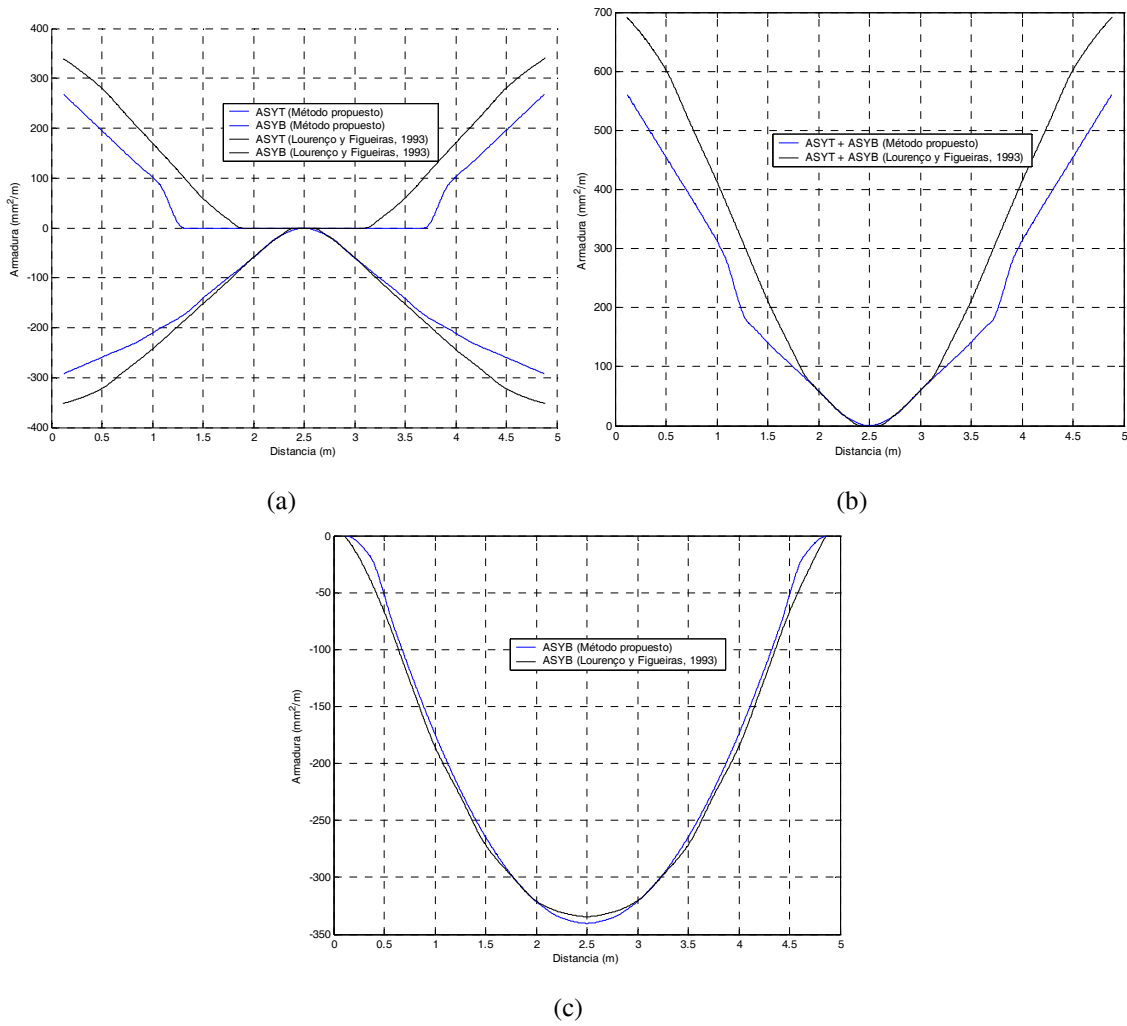
Resumen de resultados para todos los casos de carga hidrostática

En las Figuras 6.20 a 6.25 se muestran las gráficas de armadura necesaria en las secciones de apoyo y de centro de vano para distintas cargas hidrostáticas, apareciendo los resultados obtenidos mediante el método propuesto y mediante el método iterativo empleado en Lourenço y Figueiras (1993).

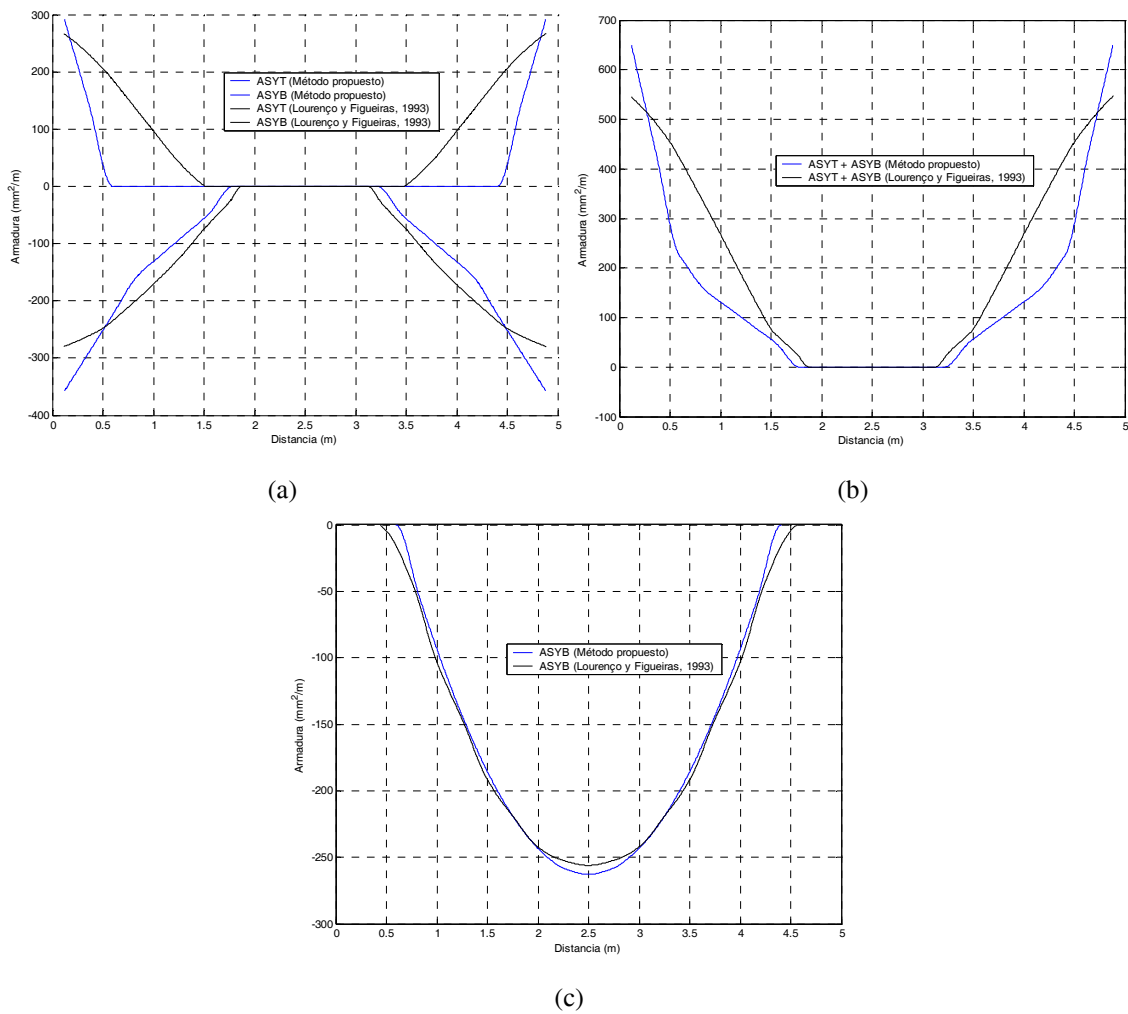


**Figura 6.20** Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 0$  kN/m).  
 (a)  $A_{syt}$  y  $A_{syb}$  en la sección de apoyo. (b)  $A_{syt}+A_{syb}$  en la sección de apoyo. (c)  $A_{syb}$  en la sección centro de vano

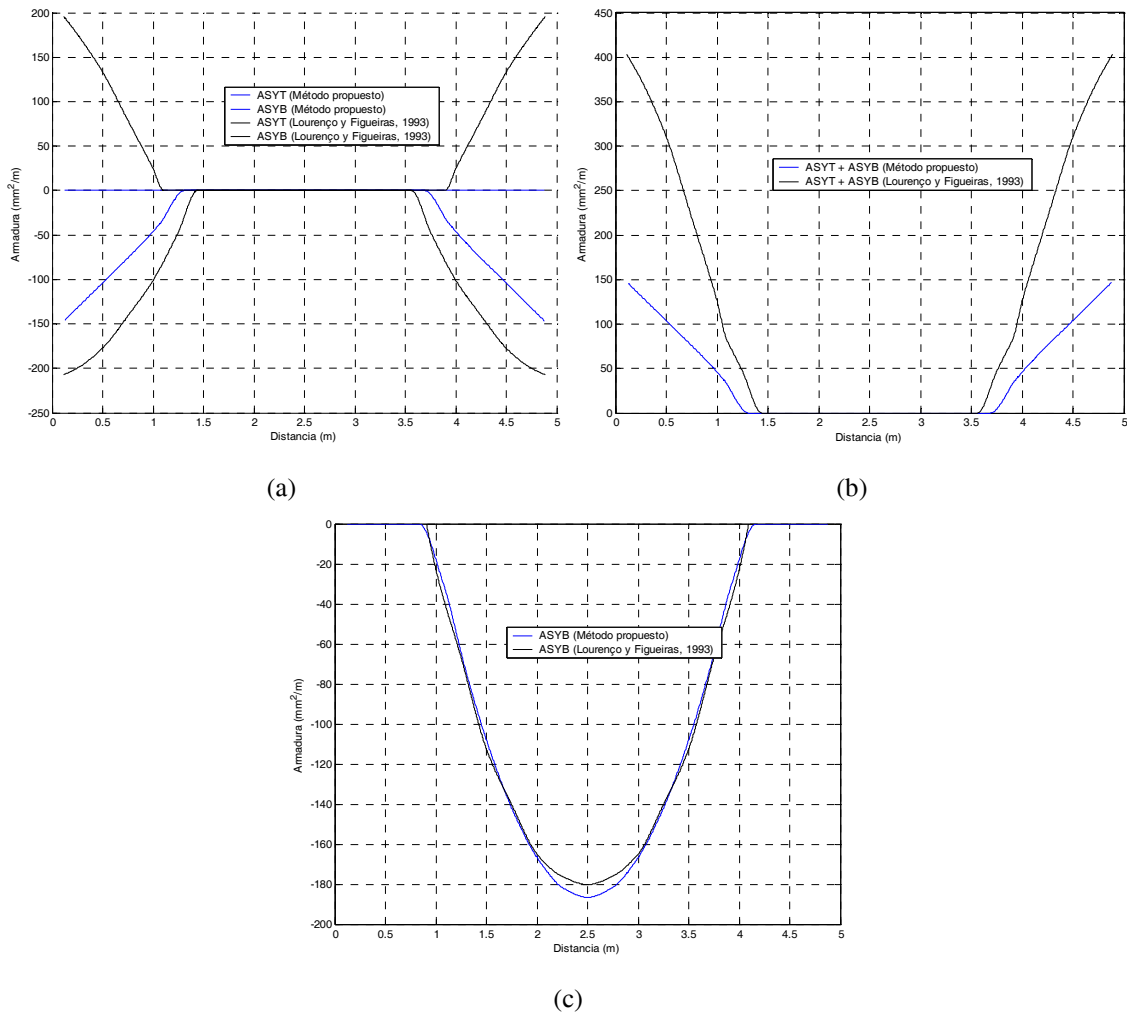




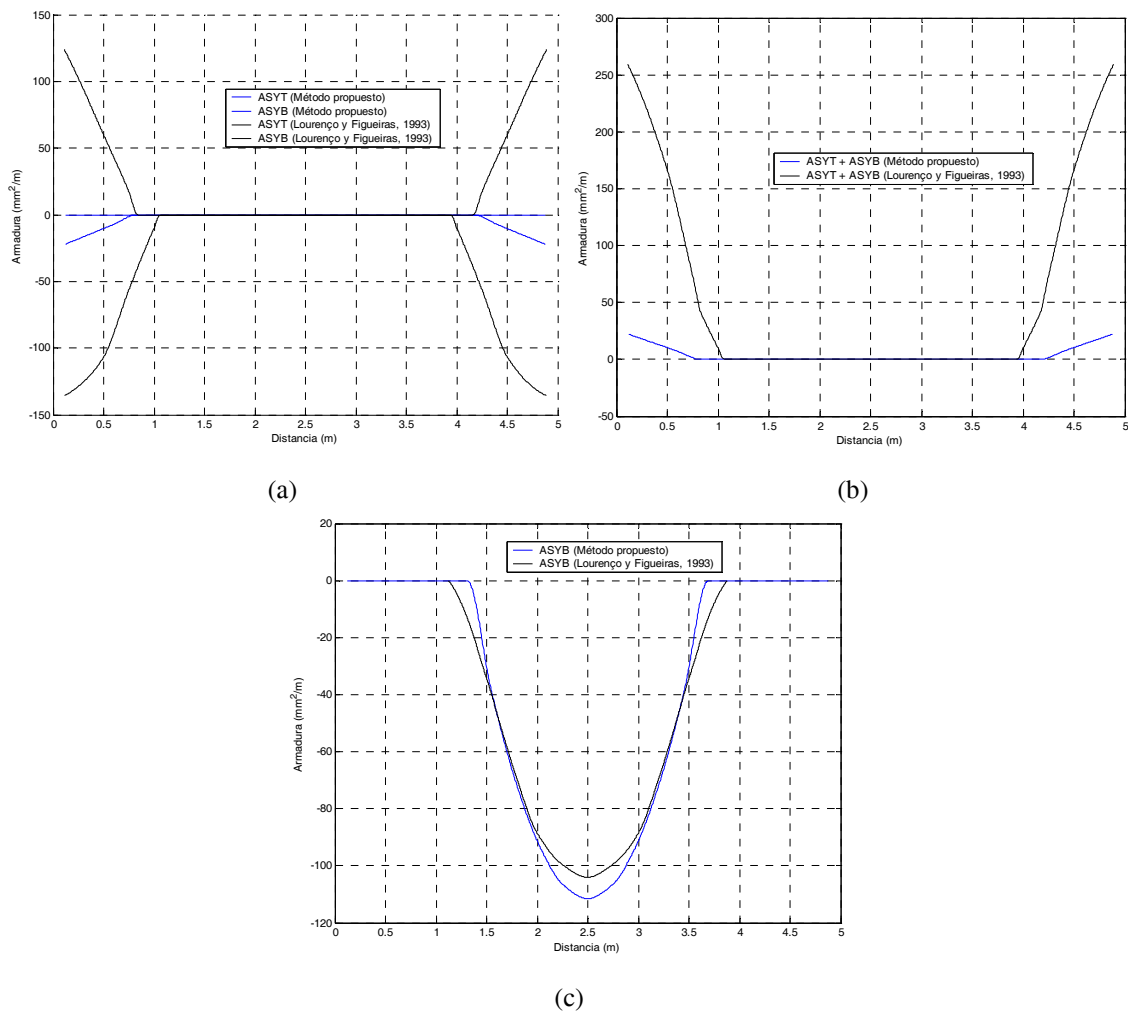
**Figura 6.21** Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 50 \text{ kN/m}$ ).  
 (a)  $A_{syt}$  y  $A_{syb}$  en la sección de apoyo. (b)  $A_{syt} + A_{syb}$  en la sección de apoyo. (c)  $A_{syb}$  en la sección centro de vano



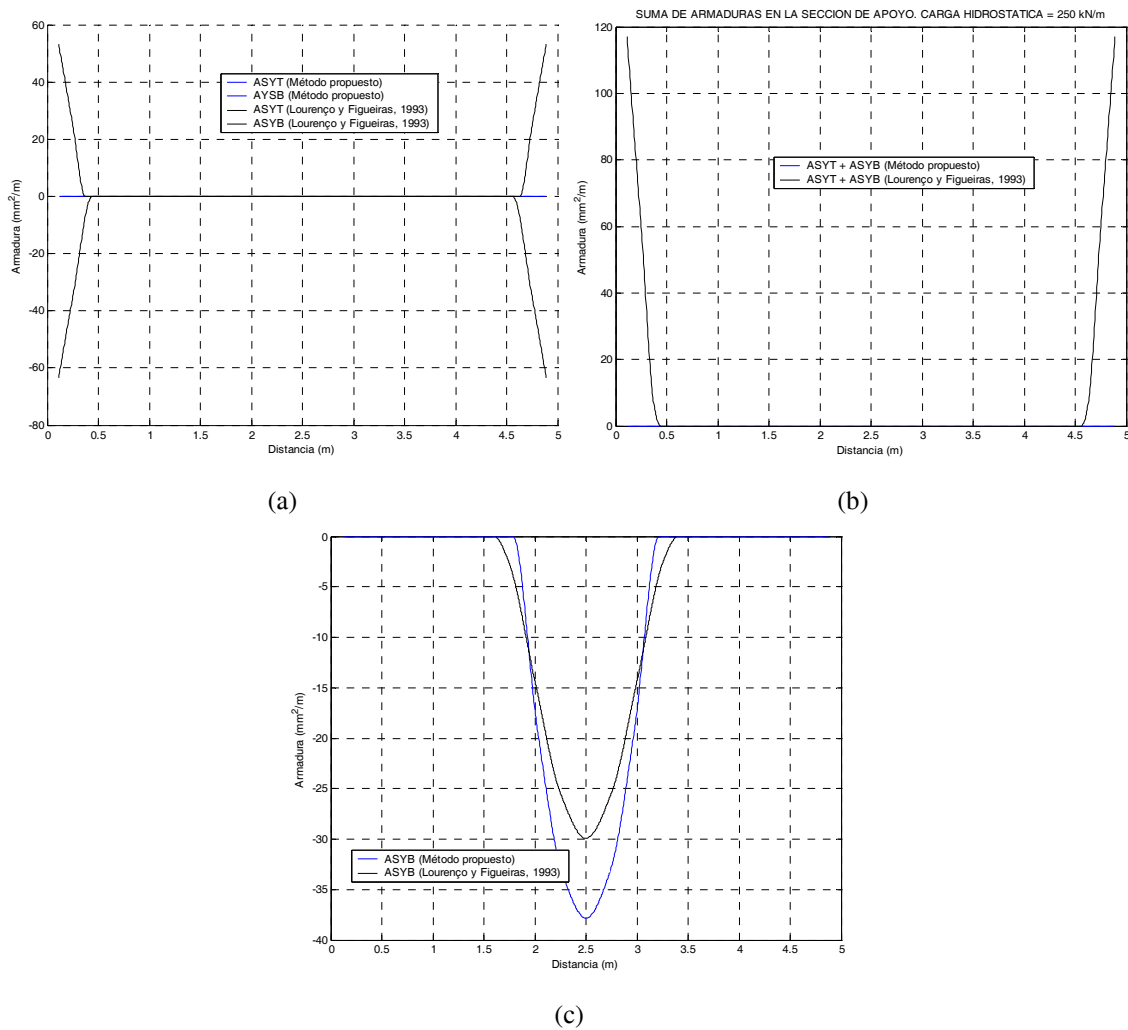
**Figura 6.22** Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 100 \text{ kN/m}$ ).  
 (a)  $A_{syt}$  y  $A_{syb}$  en la sección de apoyo. (b)  $A_{syt} + A_{syb}$  en la sección de apoyo. (c)  $A_{syb}$  en la sección centro de vano



**Figura 6.23** Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 150 \text{ kN/m}$ ).  
 (a)  $A_{syt}$  y  $A_{syb}$  en la sección de apoyo. (b)  $A_{syt} + A_{syb}$  en la sección de apoyo. (c)  $A_{syb}$  en la sección centro de vano



**Figura 6.24** Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 200 \text{ kN/m}$ ).  
 (a)  $A_{syt}$  y  $A_{syb}$  en la sección de apoyo. (b)  $A_{syt} + A_{syb}$  en la sección de apoyo. (c)  $A_{syb}$  en la sección centro de vano



**Figura 6.25** Placa rectangular simplemente apoyada. Resultados de armado ( $QD = 250 \text{ kN/m}$ ).  
 (a)  $A_{syt}$  y  $A_{syb}$  en la sección de apoyo. (b)  $A_{syt} + A_{syb}$  en la sección de apoyo. (c)  $A_{syb}$  en la sección centro de vano

Los resultados obtenidos en el armado mediante ambos métodos son semejantes cualitativamente, aunque en la sección de apoyo se desvían un poco más que en la sección de centro de vano. Es ahí donde se obtienen ahorros significativos al aplicar el método propuesto. Es preciso tener en cuenta que los valores mostrados son áreas de armadura por unidad de longitud, por lo que es necesario integrar las curvas para obtener valores de armadura total en la sección y poder realizar una comparación adecuada. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 6.9.

En la sección de centro de vano las diferencias entre ambos métodos son muy pequeñas, rondando valores del 2% de ganancia o pérdida. Sólo para la carga de 250 kN/m ese porcentaje se aleja más de estos valores, pero hay que considerar que ahí la armadura necesaria en la placa es casi nula, y cualquier pequeña diferencia en los resultados se traduce en un porcentaje mayor.

En la sección de apoyo existen grandes ahorros de armadura. El porcentaje de

ahorro va aumentando cuanto mayor es la carga hidrostática aplicada. Así, varía desde un 17,86% para el caso de flexión simple, hasta un 100% de ahorro (no es necesaria armadura con el método propuesto) para la carga hidrostática de 250 kN/m.

**Tabla 6.9** Placa rectangular simplemente apoyada. Comparación de resultados para la armadura  $A_{yy}$

$QD$ (kN/m)	Sección	Lourenço y Figueiras (1993) (mm <sup>2</sup> )	Método propuesto (mm <sup>2</sup> )	Ahorro (mm <sup>2</sup> )	Ahorro (%)
0	Apoyo	2098,71	1723,96	374,75	17,86
	Centro de vano	1401,44	1363,79	37,64	2,69
50	Apoyo	1472,79	1111,61	361,17	24,52
	Centro de vano	1011,00	985,06	25,93	2,57
100	Apoyo	953,43	663,36	290,07	30,42
	Centro de vano	668,35	655,90	12,45	1,86
150	Apoyo	544,82	186,60	358,23	65,75
	Centro de vano	387,45	387,98	-0,53	-0,14
200	Apoyo	245,66	16,12	229,55	93,44
	Centro de vano	121,41	121,93	-0,52	-0,43
250	Apoyo	331,99	0,00	331,99	100,00
	Centro de vano	28,73	34,11	-5,37	-18,70

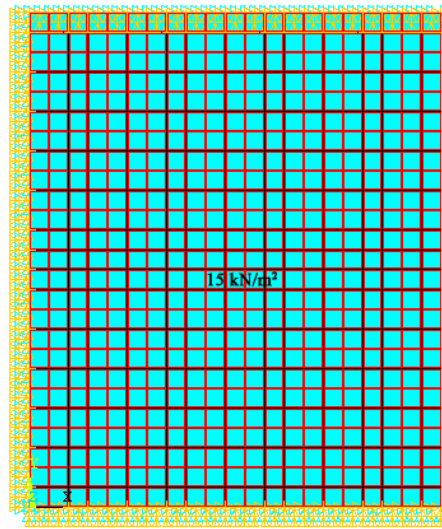
En general, se observan mayores ahorros de armadura cuanto mayor es la carga hidrostática, pues el método prueba en primer lugar si un elemento se encuentra a compresión biaxial, siendo entonces innecesaria la armadura. De este modo, a mayor carga hidrostática mayor presencia de este tipo de elementos, y por tanto menor necesidad de armadura total.

### 6.5.3.2 Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados

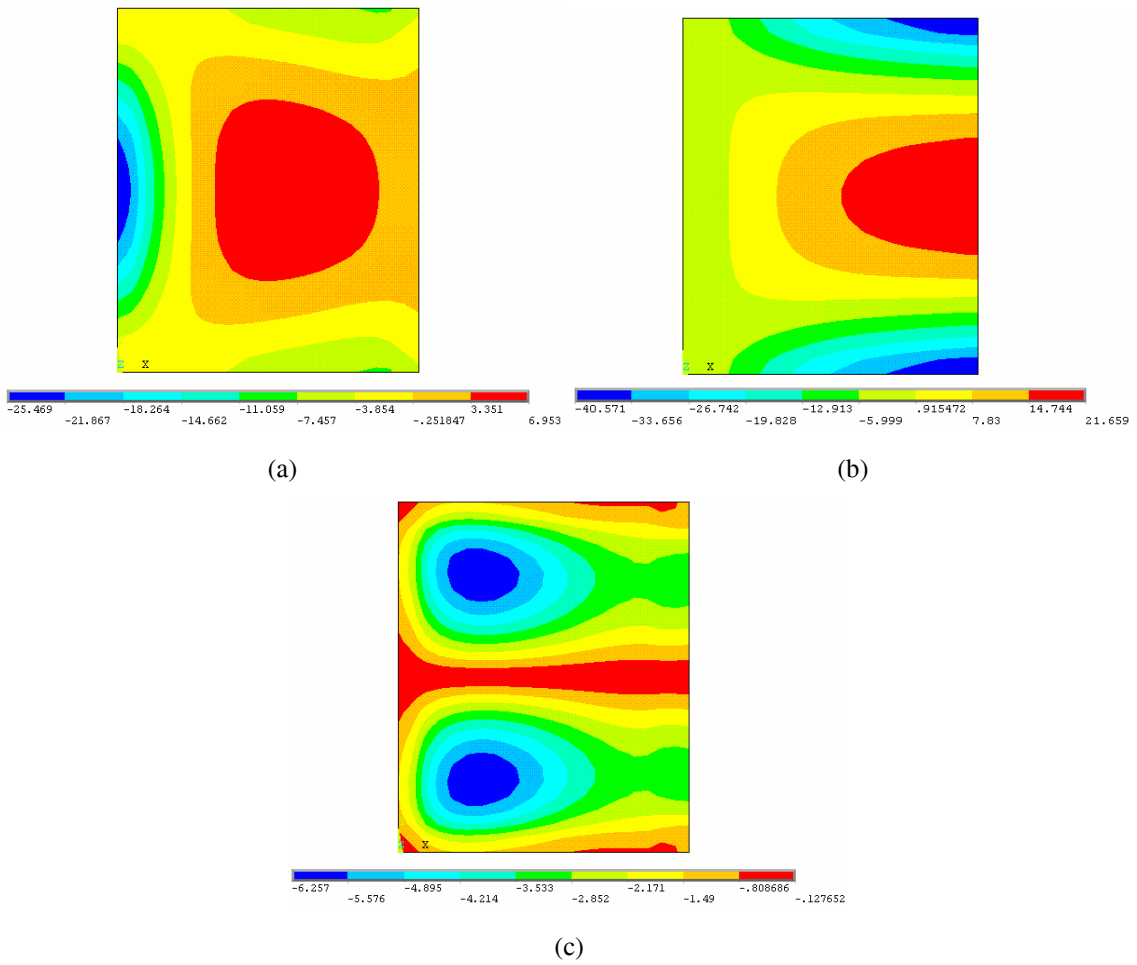
#### *Planteamiento del problema*

Se aborda en este caso la resolución de una placa rectangular de 5×6 m y 0,15 m de espesor, con un borde libre y tres empotrados. La placa se encuentra sometida a una carga de flexión de 15 kN/m<sup>2</sup> en la cara superior. El hormigón tiene una resistencia característica de 20 MPa y el acero de 400 MPa.

En la Figura 6.26 se presenta la geometría, las condiciones de apoyo, la carga aplicada y el mallado empleado en el análisis. Este mallado consta de 21×25 (525) elementos. Coincide con el elegido para resolver la placa simplemente apoyada, pues se ha comprobado que los resultados son lo suficientemente precisos con un coste computacional aceptable. Este ejemplo está tratado en Lourenço y Figueiras (1995).



**Figura 6.26** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Modelo de elementos finitos y carga



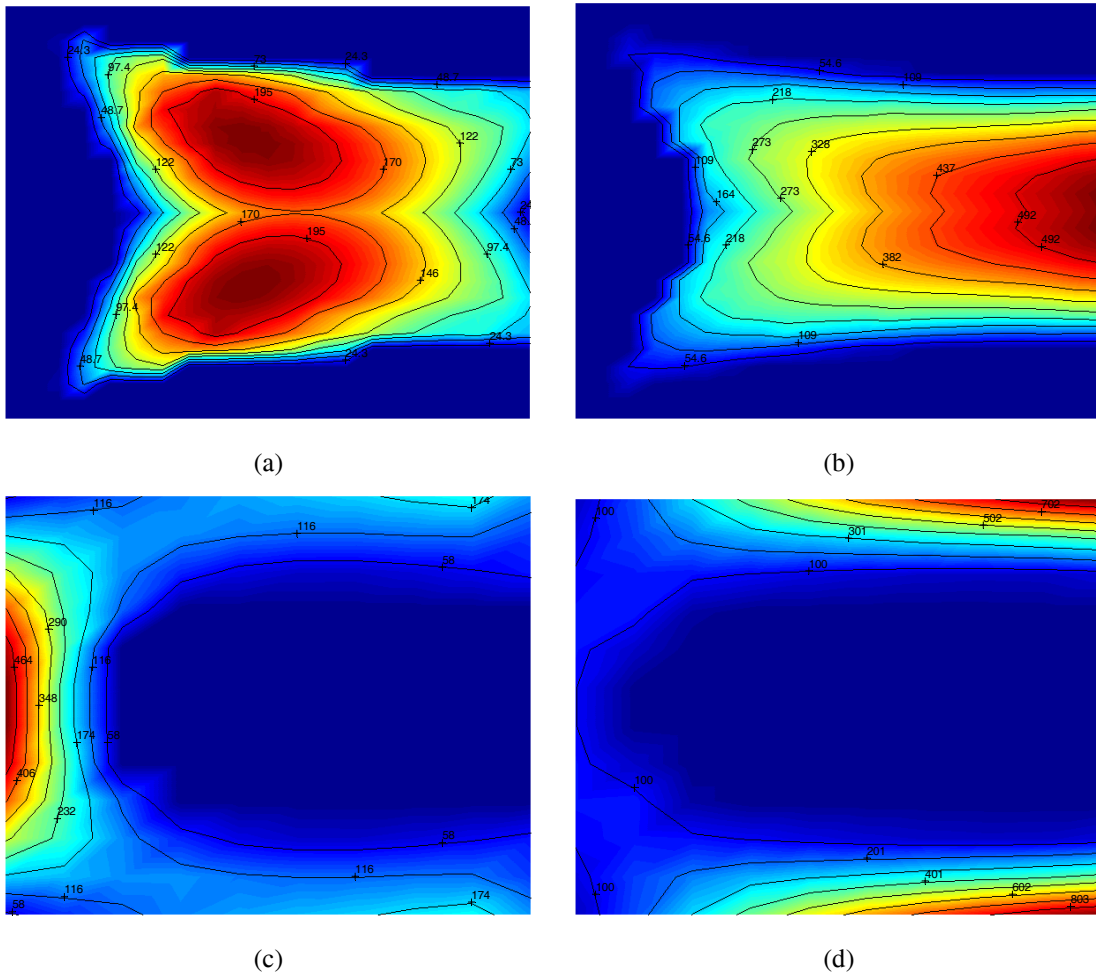
**Figura 6.27** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Esfuerzos de flexión [mkN/m]. (a)  $M_x$ . (b)  $M_y$ . (c)  $M_{xy}$

### Resultados de armado

Primeramente se ha realizado el análisis de la placa, obteniendo los esfuerzos que se muestran en la Figura 6.27.

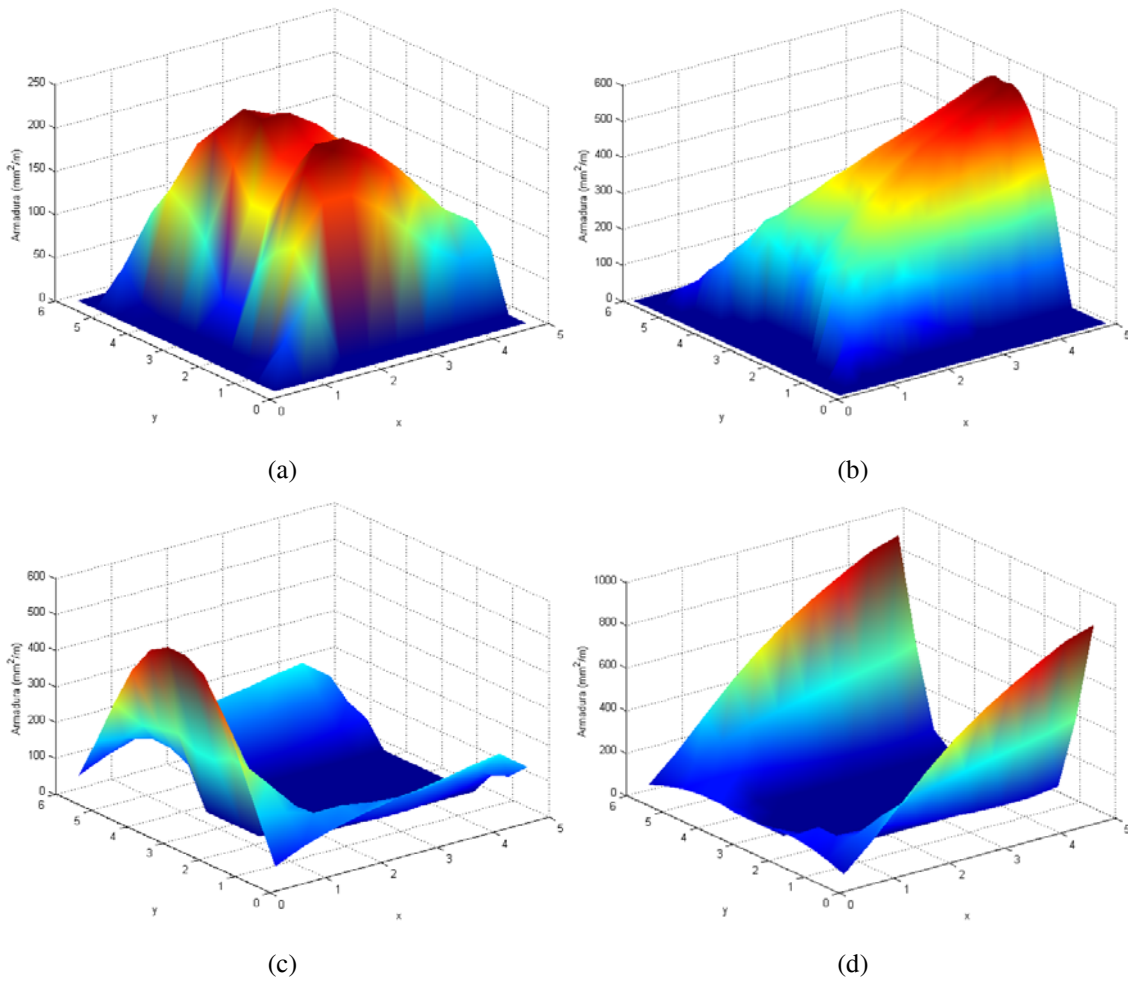
Sólo han sido incluidos los esfuerzos  $M_x$  y  $M_y$  y el torsor  $M_{xy}$ , ya que al no haber carga hidrostática los esfuerzos  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  son nulos. Las distribuciones de los esfuerzos son lógicas de acuerdo a las condiciones de contorno de la placa. Así, el momento  $M_x$  adopta valores negativos en el borde vertical empotrado, alcanza su máximo valor positivo hacia la zona central de la placa, y disminuye hasta valer cero en el borde libre. El momento  $M_y$  adopta valores negativos en los bordes empotrados opuestos, y el máximo positivo en la sección de centro de vano.

Al aplicar el método de optimización de armado se obtienen los mapas de densidad de armado (Figura 6.28) y las superficies de densidad de armado (Figura 6.29), que son una representación en tres dimensiones de los mapas de densidad de armado.

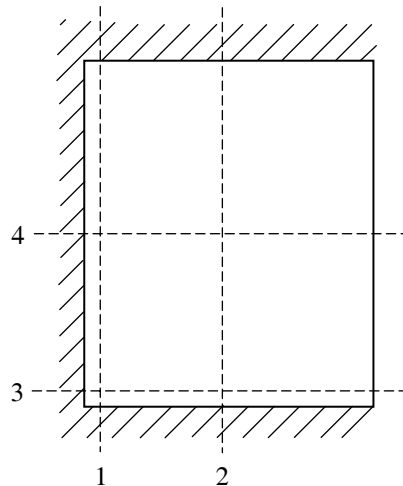


**Figura 6.28** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Mapas de densidades de armado [ $\text{mm}^2/\text{m}$ ]. (a)  $A_{sxb}$ . (b)  $A_{syb}$ . (c)  $A_{sxt}$ . (d)  $A_{syt}$





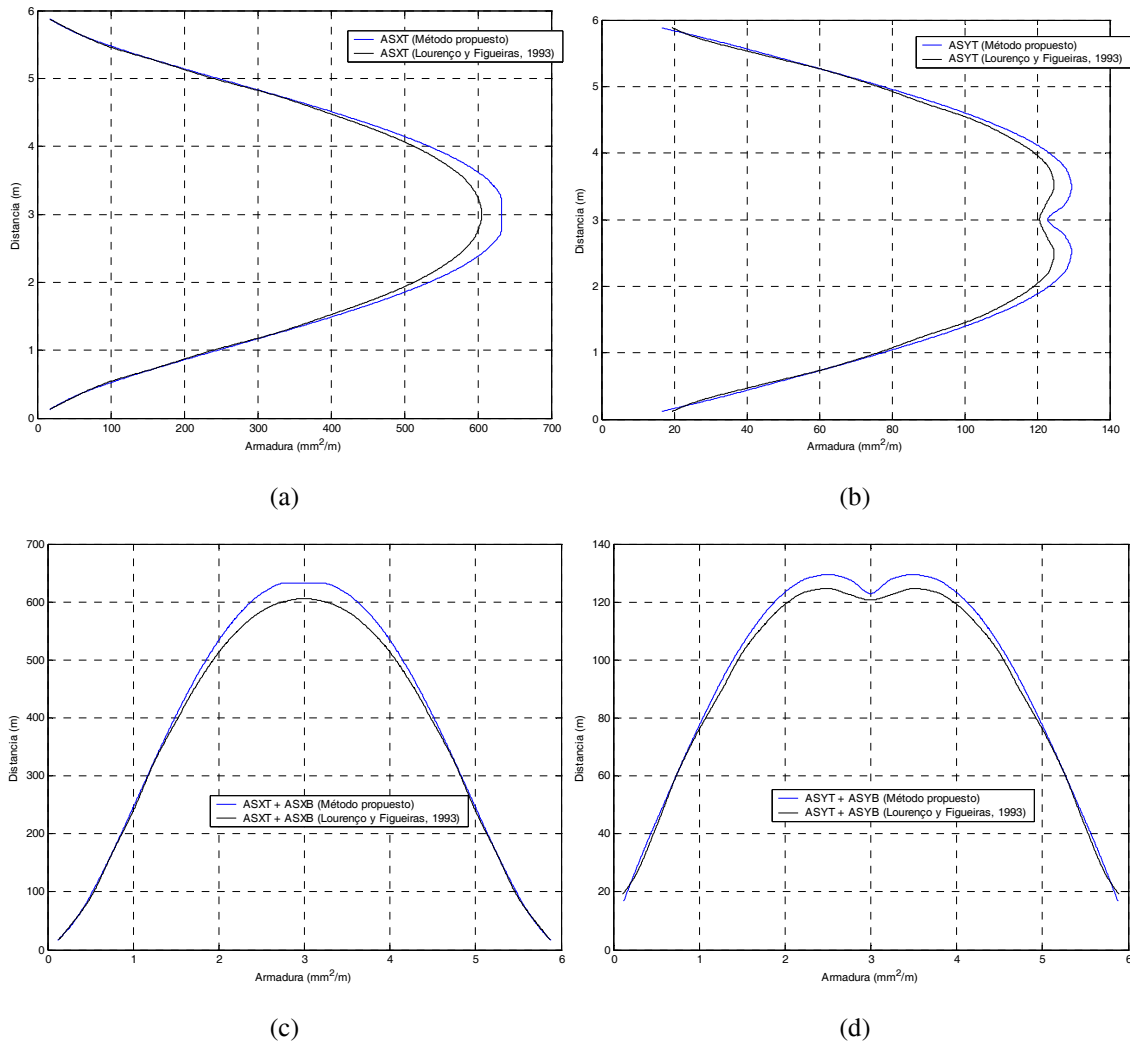
**Figura 6.29** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Superficies de densidad de armado. (a)  $A_{sxb}$ . (b)  $A_{syb}$ . (c)  $A_{sxt}$ . (d)  $A_{syt}$



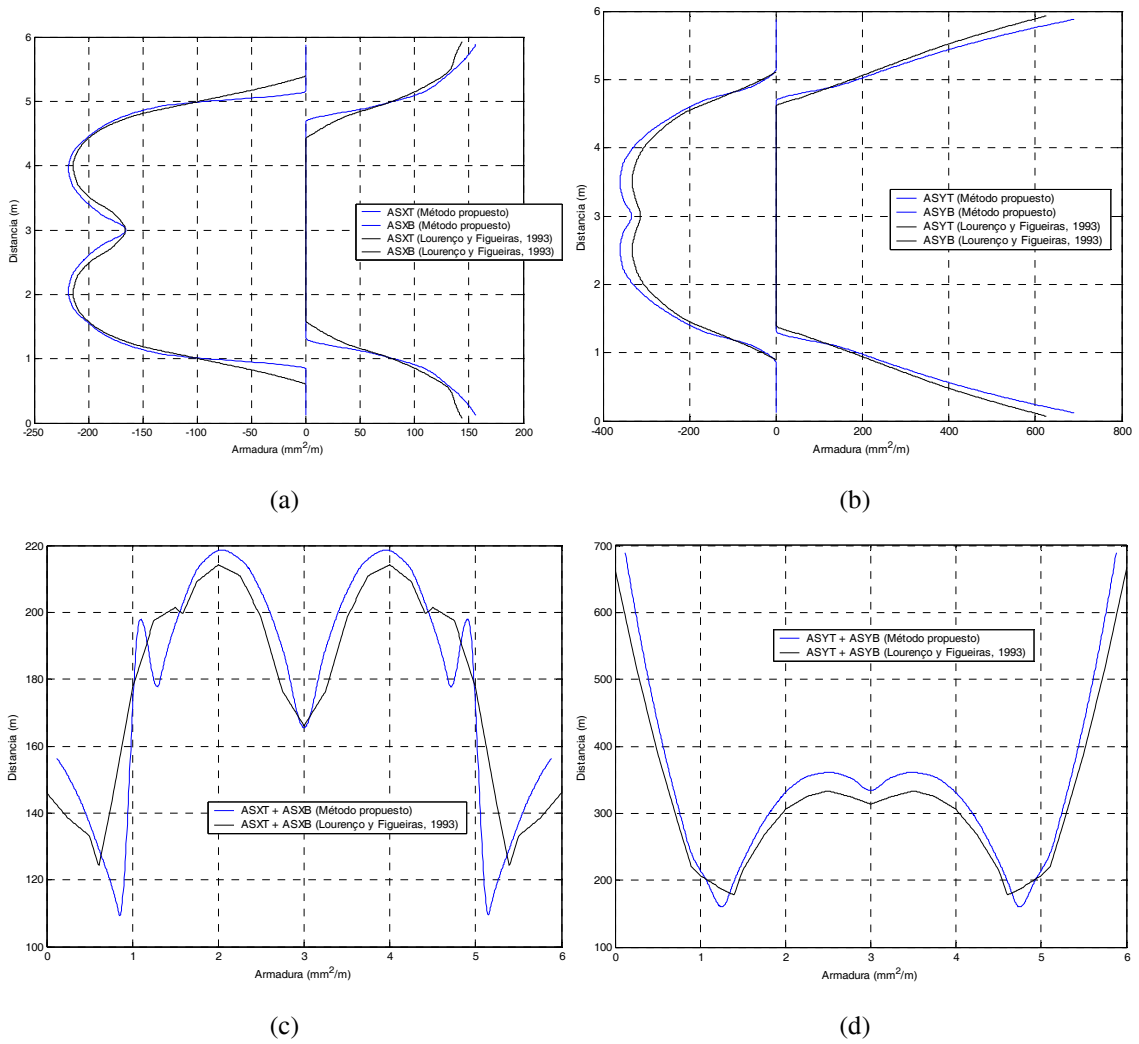
**Figura 6.30** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Definición de las secciones en estudio

Se observa una distribución coherente en la densidad de armado en relación a los esfuerzos obtenidos. La mayor parte de la armadura en la capa superior aparece cercana

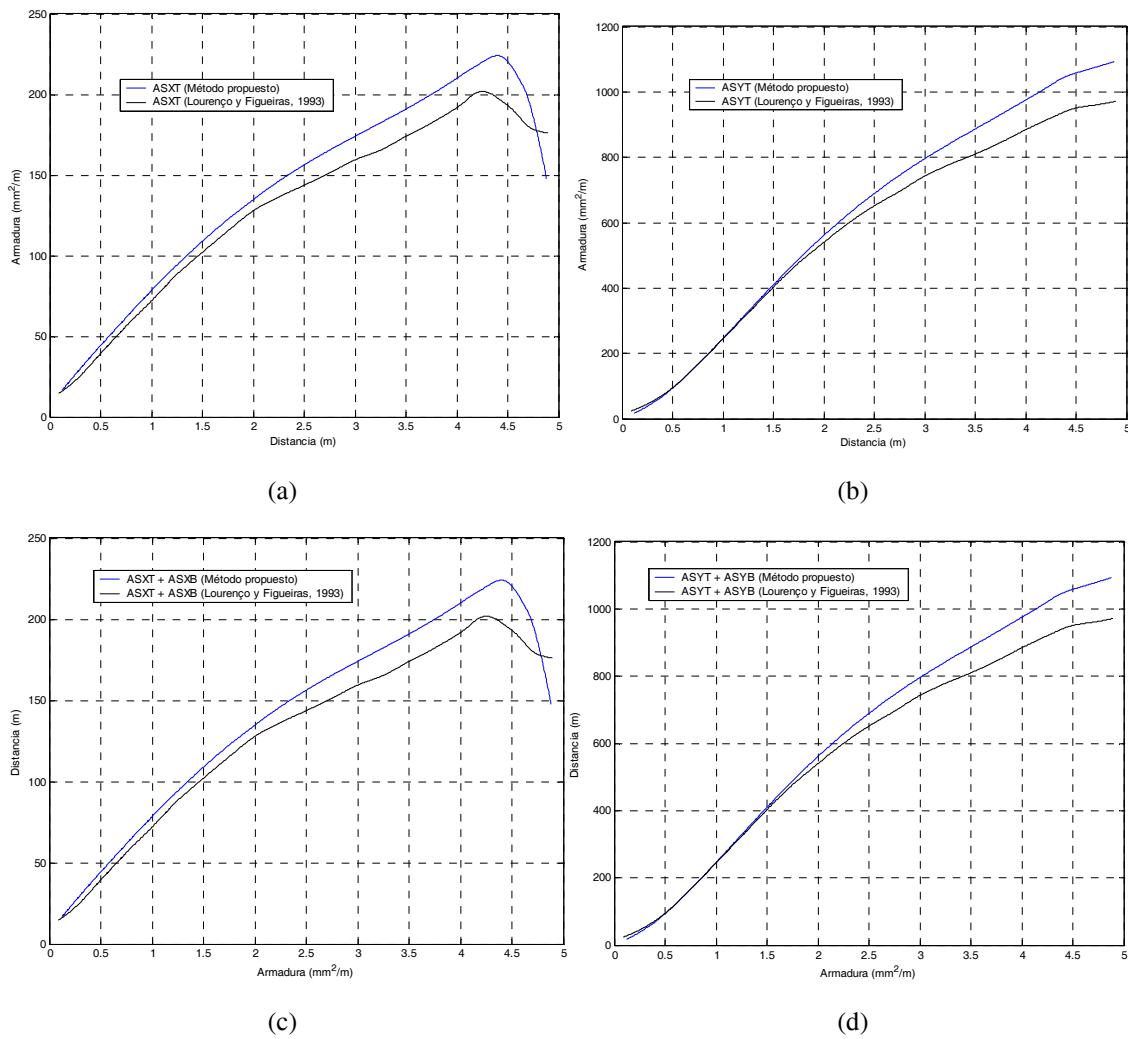
a los bordes empotrados para soportar los momentos negativos. En la capa inferior la armadura se concentra en la zona de momentos positivos y de mayores torsores. Estos mapas son similares a los obtenidos por Lourenço y Figueiras (1993). Se ha definido cuatro secciones donde establecer comparaciones entre las armaduras necesarias. Estas secciones se muestran en la Figura 6.30 y la comparativa entre armaduras en las Figuras 6.31 a 6.34.



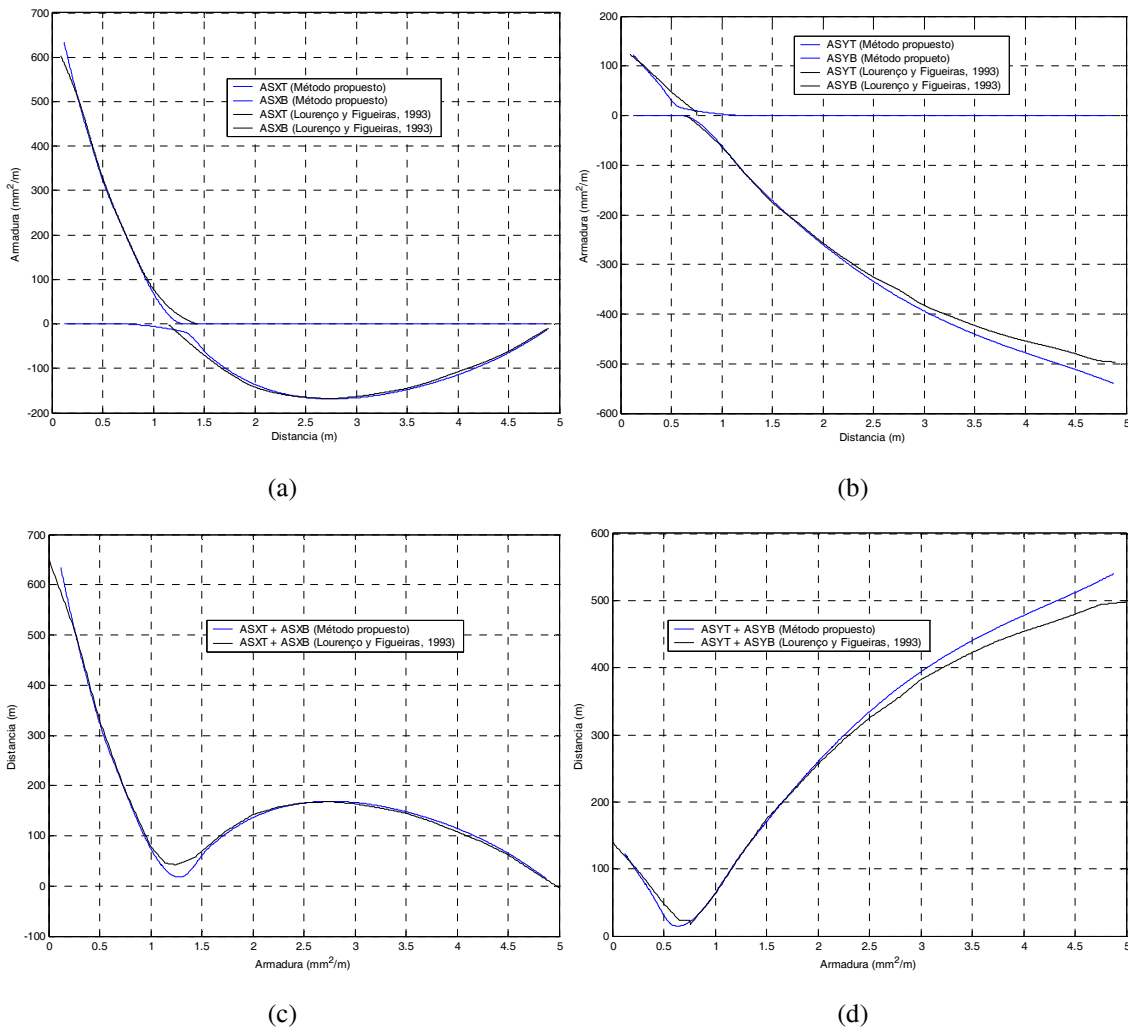
**Figura 6.31** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Resultados de armado.  
Sección 1. (a)  $A_{sx}$ . (b)  $A_{sy}$ . (c)  $A_{sxt}+A_{sxb}$ . (d)  $A_{syt}+A_{syb}$



**Figura 6.32** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Resultados de armado.  
 Sección 2. (a)  $A_{sx}$  (b)  $A_{sy}$ . (c)  $A_{sxt} + A_{sxb}$ . (d)  $A_{syt} + A_{syb}$



**Figura 6.33** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Resultados de armado. Sección 3. (a)  $A_{sx}$ . (b)  $A_{sy}$ . (c)  $A_{sxt} + A_{sxb}$ . (d)  $A_{syt} + A_{syb}$



**Figura 6.34** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Resultados de armado. Sección 4. (a)  $A_{sx}$ . (b)  $A_{sy}$ . (c)  $A_{sxt}+A_{sxb}$ . (d)  $A_{syt}+A_{syb}$

**Tabla 6.10** Placa rectangular con un borde libre y tres empotrados. Comparación de resultados para las armaduras

Sección	Armadura	Lourenço y Figueiras (1993) (mm <sup>2</sup> )	Método propuesto (mm <sup>2</sup> )	Ahorro (mm <sup>2</sup> )	Ahorro (%)
1	$A_{sx}$	2141,23	2220,98	-79,75	-3,72
	$A_{sy}$	531,44	548,35	-16,91	-3,18
2	$A_{sx}$	1042,75	1042,75	0,00	0,00
	$A_{sy}$	1773,45	1920,99	-147,54	-8,32
3	$A_{sx}$	631,45	685,86	-54,42	-8,62
	$A_{sy}$	2805,05	3017,80	-212,75	-7,58
4	$A_{sx}$	722,83	717,76	5,08	0,70
	$A_{sy}$	1388,39	1437,63	-49,24	-3,55

Se ha realizado una integración de las curvas de estas gráficas para obtener valores de armadura total en cada sección (tabla 6.10). En este caso, no existen grandes diferencias entre los valores según el método de optimización propuesto y según el procedimiento iterativo empleado por Lourenço y Figueiras (1995). Se observan pequeñas pérdidas en torno a un valor medio del 4%. Esto puede deberse a posibles diferencias en la forma de proceder (mallados diferentes, tipos de elemento finito distintos, etc.) o incluso a las imprecisiones cometidas al reproducir las curvas extraídas de los artículos de referencia.

# *Conclusiones*

## **7.1 INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se hace un resumen del trabajo de investigación realizado y descrito en esta tesis, se exponen las conclusiones del mismo y se proponen trabajos futuros como continuación de la línea de investigación seguida.

## **7.2 TRABAJOS REALIZADOS**

Durante el desarrollo de esta tesis se han realizado los siguientes trabajos:

- Revisión bibliográfica de artículos de revistas, libros y congresos relacionados con el diseño óptimo de láminas, en general, y de láminas de hormigón, en particular, y con el análisis y armado de elementos estructurales planos. La revisión se ha centrado, fundamentalmente, en los últimos 10 años.
- Se ha revisado y planteado el problema de búsqueda de forma de láminas de hormigón empleando técnicas de optimización con diversas funciones objetivo. Se ha estudiado la incidencia de algunas de estas funciones en el diseño óptimo de una lámina con distintas condiciones de vinculación. De este estudio surge la motivación de la tesis: optimizar propiedades y geometría en láminas y optimizar la armadura en elementos estructurales planos.
- Se ha realizado el estudio del diseño óptimo de espesor y forma de una lámina existente de hormigón empleando diversas funciones objetivo (energía de deformación, peso y mayor tensión principal de tracción) con dos valores mínimos para el espesor (0,06 y 0,08 m) y empleando diversas restricciones tensionales y de control geométrico. Para modelizar la geometría de la lámina ha sido necesario desarrollar las ecuaciones de las superficies (paraboloides hiperbólicos) y planos que la definen.
- Se han revisado las bases del análisis no lineal de láminas de hormigón, presentando la formulación de elementos finitos, los métodos incremental e

iterativo para el análisis con material no lineal y las leyes de comportamiento del hormigón, centrando la atención en el comportamiento elástico-plástico no lineal.

- Se han revisado los procedimientos que contemplan el fenómeno de la inestabilidad en láminas de hormigón, especialmente dos de ellos, el método del comité ACI 344 para casquetes esféricos y el método de las recomendaciones de la IASS.
- Se han realizado dos estudios sobre los diseños inicial y óptimos de la lámina empleada en los procesos de optimización, uno de no linealidad, distinguiendo la no linealidad geométrica de la no linealidad del material y combinando ambas, y otro de estabilidad, empleando análisis de estabilidad inicial, análisis no lineal y un método basado en las recomendaciones de la IASS.
- Se ha desarrollado un procedimiento numérico, basado en el teorema del límite inferior de la teoría de la plasticidad, para resolver el problema de diseño óptimo del armado de elementos de hormigón tipo lámina, aplicado al caso de elementos estructurales planos.
- Se ha establecido la casuística existente en función del estado tensional del elemento (compresión simple, flexión simple, flexión compuesta o compresión compuesta) y de las necesidades de armadura (necesaria en dos direcciones o en dos capas, necesaria sólo en una dirección o en una capa, o innecesaria).
- Se han resuelto varios ejemplos para validar y comparar el método propuesto con algunos métodos existentes. Estos ejemplos se han dividido en dos grupos según su estado tensional, los sometidos a compresión simple y los sometidos a flexión simple/compuesta o compresión compuesta.
- Todas las implementaciones se han realizado mediante rutinas de usuario desarrolladas en lenguaje de diseño paramétrico en el programa de elementos finitos ANSYS, aprovechando sus capacidades a nivel gráfico, de análisis y empleando el módulo de optimización de que dispone.

### **7.3 CONCLUSIONES**

Del trabajo desarrollado en esta tesis se extraen las siguientes conclusiones:

- La aplicación de procesos de optimización de forma en láminas de hormigón conlleva mejoras considerables en su comportamiento mecánico. Pequeños cambios en la forma suelen ser suficientes para lograr estas mejoras.
- Las deformaciones de las láminas se reducen considerablemente. En los ejemplos estudiados, los valores finales se sitúan por debajo de la mitad de los iniciales.
- La obtención del estado membrana de tensiones de compresión en una lámina bajo restricciones geométricas implica un alto coste (aumento considerable del espesor).



- En las láminas de hormigón existe un claro predominio de la acción gravitatoria sobre la de viento, no afectando esta última a la forma final obtenida en el proceso de optimización, sólo al valor de las tensiones calculadas, lo que puede implicar, llegado el caso, un mayor requerimiento en la resistencia del material.
- En los bajos estados tensionales presentes en estas estructuras optimizadas, el análisis lineal empleando un módulo de deformación longitudinal reducido, como el módulo secante, resulta ser conservador, pues arroja tensiones y deformaciones superiores a las obtenidas mediante el análisis no lineal geométrico y del material.
- Las estructuras laminares estudiadas presentan un excelente comportamiento frente a fenómenos de inestabilidad. Para aumentar la carga de pandeo se puede actuar sobre la geometría aumentando las curvaturas, emplear hormigones de mayor resistencia y aumentar el espesor de la lámina.
- El comportamiento de las láminas frente a estabilidad mejora sensiblemente al someterlas a procesos de optimización. En los ejemplos estudiados se duplica la carga de pandeo y se reduce sobre un 28% la sensibilidad a las imperfecciones.
- La carga de pandeo resultante del análisis NLGM, afectado del coeficiente de fluencia según el método basado en las recomendaciones de la IASS, está comprendida entre una tercera y una quinta parte de la obtenida en el estudio de estabilidad inicial. Esto sucede al incluir diversos factores que afectan a la estabilidad, en especial, los efectos estructurales de las deformaciones diferidas del hormigón y la sensibilidad a las imperfecciones.
- Asimilar, como sugieren las recomendaciones de la IASS a falta de información mayor, la sensibilidad a las imperfecciones de una esfera para láminas con otras geometrías (caso de la lámina en estudio), es una opción conservadora, estando el comportamiento de ésta más próximo, por defecto, al caso del cilindro corto.
- A pesar de la complejidad del sistema de ecuaciones de equilibrio resultante para el diseño del armado de elementos estructurales planos, se ha obtenido un método de optimización suficientemente robusto para las aplicaciones consideradas.
- Las diferencias observadas en las cantidades de armadura obtenidas mediante el método propuesto y mediante otros métodos tradicionales pueden ser considerables, sobre todo al aumentar los esfuerzos de compresión en el elemento.
- El método propuesto evita tener que recurrir al planteamiento de modelos de bielas y tirantes para abordar las regiones D (de discontinuidad), pues resuelve el problema del armado de elementos estructurales complejos de un modo automático, alcanzando además la solución de armadura óptima. No obstante, si se desea, el método puede ser de utilidad en la elaboración de estos modelos.
- El hecho de utilizar un procesador de análisis compatible con el de optimización hace que mejore la eficiencia y fiabilidad del proceso de diseño, pudiendo centrar los esfuerzos en aspectos más interesantes que en programar un módulo convencional de análisis de estructuras o un algoritmo conocido de optimización.

## 7.4 TRABAJOS FUTUROS

Como continuación del trabajo desarrollado en esta tesis, se proponen las siguientes líneas de trabajos futuros.

Respecto al diseño óptimo de propiedades y geometría de estructuras laminares:

- Considerar otros tipos de restricciones (desplazamiento, estabilidad global, etc.).
- Considerar acciones distintas a las gravitatorias y múltiples estados de cargas.
- Incluir en el análisis no lineal los efectos estructurales de las deformaciones diferidas del hormigón y la fisuración.
- Estudiar la influencia de la sensibilidad a las imperfecciones en la carga de pandeo para el caso de láminas con geometrías diferentes a la cilíndrica o esférica (geometrías analizadas en las recomendaciones de la IASS).
- Integrar el diseño óptimo de forma con el diseño óptimo de armado.

En relación al problema de diseño óptimo de armado:

- Analizar en profundidad la estructura matemática del problema para encontrar bases matemáticas que justifiquen y aumenten la robustez del método de optimización propuesto.
- Abordar la resolución analítica o semianalítica del problema.
- Introducir restricciones constructivas y de normativa.
- Materializar los resultados de densidad de armado en distribuciones prácticas de barras.
- Ampliar la aplicación del procedimiento a elementos tridimensionales.
- Implementar otros métodos de diseño de armadura que incluyan la compatibilidad de deformaciones en el proceso de optimización.

## *Referencias bibliográficas*

- Abel JF. Structures by Stefan J. Medwadowski. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2000; **41**(134): 137-146.
- ACI Committee 209. Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures. *ACI Special Publication* 1970; SP 27: 51-93.
- ACI Committee 318. *ACI 318-71 Building code requirements for reinforced concrete*. American Concrete Institute: Farmington Hills, 1971.
- ACI Committee 318. *ACI 318-83 Building code requirements for reinforced concrete*. American Concrete Institute: Farmington Hills, 1983.
- ACI Committee 318. *ACI 318-05 Building code requirements for structural concrete*. American Concrete Institute: Farmington Hills, 2005.
- ACI Committee 318. *Proposed revisions of ACI 318-05 to ACI 318-08 building code requirements for structural concrete*. American Concrete Institute: Farmington Hills, 2007.
- ACI Committee 334. *Concrete shell structures - practice and commentary*. American Concrete Institute: Farmington Hills, 1964.
- ACI Committee 344. Design and construction of circular prestressed concrete structures. *ACI Journal Proceedings* 1970; **67**: 657-672.
- Adeghe LN, Collins MP. *A finite element model for studying reinforced concrete detailing problems*. Publication 86-12, Department of Civil Engineering, University of Toronto: Toronto, 1986.

- Alpa G, Bozza E, Corsanego A, Del Grosso A. Shape determination for shells structures on pointlike supports. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1978; **67**.
- Andrés FR, Fadón F. Análisis gráfico de obras emblemáticas de Félix Candela. *Actas del XVI Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica* 2004.
- Andres M, Harte R. Buckling of concrete shells: a simplified numerical approach. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2006; **47**(152): 279-290.
- Andrés OA, Ortega NF. Experimental design of free form shell roofs. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium* 1991.
- Andrés OA. Comment on: Shape finding of concrete shell roofs. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2004; **45**(146): 145-146.
- Andrés OA. Homeostatic models for shell roof design. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Congress* 1989.
- Ansola R, Canales J, Tárrago JA, Rasmussen J. An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures. *Computers and Structures* 2002; **80**(5-6): 449-458.
- Ansola R, Canales J, Tarrago JA, Rasmussen J. On simultaneous shape and material layout optimization of shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2002; **24**(3): 175-184.
- ANSYS. *Advanced analysis techniques guide*. ANSYS Inc.: Canonsburg, 2004.
- Arora JS, Haug EJ. Methods of design sensitivity analysis in structural optimization. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 1979; **17**: 823-832.
- Ballesteros P. Nonlinear dynamic buckling of an imperfect spherical concrete shell. *Proceedings of the IASS Symposium on Nonlinear Behavior of Reinforced Concrete Spatial Structures* 1978; **1**: 205-218.
- Bamu PC, Zingoni A. Damage, deterioration and the long-term structural performance of cooling-tower shells: a survey of developments over the past 50 years. *Engineering structures* 2005; **27**(12): 1794-1800.
- Basterra A, Chamizo A, Gutiérrez E. Félix Candela y el borde libre, el caso de la capilla de Palmira en Cuernavaca. *Bitácora Arquitectura* 2001; **5**: 38-47.
- Barnes M. Form and stress engineering of tension structures. *Structural Engineering Review* 1994; **6**: 175-202.
- Barski M, Kruzelecki J. Optimal design of shells against buckling under overall bending and external pressure. *Thin-Walled Structures* 2005; **43**(11): 1677-1698.

- Barski M. Optimal design of shells against buckling subjected to combined loadings. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2006; **31**(3): 211-222.
- Belegundu AD, Rajan SD. Shape optimization approach based on natural design variables and shape functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1988; **66**(1): 87-106.
- Belletti B, Bernardi P, Cerioni R, Iori I. Nonlinear local analysis of reinforced concrete plates. *Computational Modelling of Concrete Structures* 2003: 635-644.
- Bendsoe MP, Sigmund O. *Topology optimization: theory, methods and applications*. Springer-Verlag: Berlin, 2003.
- Bernadou M, Palma FJ, Rousselet B. Shape optimization of an elastic thin shell under various criteria. *Structural optimization* 1991; **3**(1): 7-21.
- Bhinde SB, Collins MP. *Reinforced concrete elements in shear and tension*. Publication 87-02, Department of Civil Engineering, University of Toronto: Toronto, 1987.
- Billington DP, Garlock MM. Thin shell concrete structures: the master builders. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2004; **45**(146): 147-155.
- Billington DP. Anton Tedesko: thin shells and esthetics. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1982; **108**(11): 2539-2554.
- Billington DP. Felix Candela and structural art. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1986; **26-2**(88): 5-10.
- Bletzinger KU, Bischoff M, Ramm E. A unified approach for shear-locking free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers and Structures* 2000; **75**(3): 321-34.
- Bletzinger KU, Firl M, Daoud F. Approximation of derivatives in semi-analytical structural optimization. *Computers and Structures* 2007; in press, doi:10.1016/j.compstruc.2007.04.014.
- Bletzinger KU, Kimmich S, Ramm E. Interactive shape optimization of shells. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications* 1990; **1**: 464-473.
- Bletzinger KU, Maute K, Ramm E. Structural concepts by optimization. *Proceedings of the International Symposium on Conceptual Design of Structures* 1996; 169-177.
- Bletzinger KU, Maute K. Towards generalized shape and topology optimization. *Engineering Optimization* 1997; **29**(1-4): 201-216.
- Bletzinger KU, Ramm E. Form finding of shells by structural optimization. *Engineering with Computers* 1993; **9**(1): 27-35.

- Bletzinger KU. *Form finding and optimization of membranes and minimal surfaces*. Communication 3/98. Institute of Structural Mechanics, University of Karlsruhe: Karlsruhe, 1998.
- Bletzinger KU. Optimal shapes of lightweight structures. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* 1999.
- Botkin ME. Shape optimization of plate and shell structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 1982; **20**(2): 268-273.
- Botkin M. Shape optimization using fully-automatic 3-D mesh generation. *Proceedings of the 32<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* 1991.
- Bradford MA, Zhang YX. A rectangular layered plate-shell element for nonlinear analysis of reinforced concrete slabs at elevated temperature. *Innovation in Computational Structures Technology* 2006; 501-516.
- Braestrup MW. Dome effect in RC slabs: rigid-plastic analysis. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1980; **106**(6): 1237-1253.
- Braibant V, Fleury C. Shape optimal design - a CAD-oriented formulation. *Engineering with Computers* 1986; **1**(4): 193-204.
- Braibant V, Fleury C. Shape optimal design using B-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1984; **44**(3): 247-267.
- Brew JS, Lewis WJ. Free hanging membrane model for shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2007; **71**(13): 1513-1533.
- Brown RH. Minimum cost selection of one-way slab thickness. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1975; **101**(12): 2585-2590.
- Burger N, Billington DP. Felix Candela, elegance and endurance: an examination of the Xochimilco shell. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2006; **47**(152): 271-278.
- Burkan O. *Analysis and design of reinforced concrete shell elements*. MEn. Thesis. University of Carleton: Ottawa, 1997.
- Camp CV, Pezeshk S, Hansson H. Flexural design reinforced concrete frames using a genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering-ASCE* 2003; **129**(1): 105-115.
- Camprubí N, Bischoff M, Bletzinger KU. Shape optimization of shells and locking. *Computers and Structures* 2004; **82**(29-30): 2551-2561.
- Canales J, Tárrago JA, Hernández A. An adaptive mesh refinement procedure for shape optimal design. *Advances in Engineering Software* 1994; **18**(2): 131-145.

- Canals I, Molina J. Análisis de esfuerzos en el paraboloide hiperbólico considerado como superficie de traslación. *Revista de Obras Públicas* 1961; **2949**: 16-28.
- Canals I, Palomar M. La velaria, su análisis y diseño. *Revista de Obras Públicas* 1962; **2970**: 649-653.
- Candela F. *En defensa del formalismo y otros escritos*. Xarait Eds.: Bilbao, 1985.
- Carbonell A, Martínez F, Yepes V, Hospitaler A, González-Vidoso F. Threshold accepting optimization of road vaults and rectangular hollow bridge piers. *Proceedings of the Tenth International Conference on Computer Aided Design in Engineering* 2007; 91: 141-150.
- CEB-FIP. *Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos: Madrid, 1995.
- Chan ECY. *Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced concrete shells with edge beams*. Final report. Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, California University: Berkeley, 1982.
- Chapelle D, Bathe KJ. Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures. *Computers and Structures* 1998; **66**(1): 19-36.
- Chen GD, Zhang DX, Gu YX. Structural shape optimization and intelligent modelling. *Proceedings of the Asian Pacific Conference on Computational Mechanics* 1991; 323-328.
- Chías P, Abad T. *Eduardo Torroja: obras y proyectos*. Instituto Eduardo Torroja: Madrid, 2005.
- Chilton J. *The engineer's contribution to contemporary architecture: Heinz Isler*. Thomas Telford: London, 2000.
- Coda HB, Paccola RP. Geometrical non-linear analysis of shells: a new positional finite element method. *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology* 2006; 22 pp., paper 162.pdf.
- Coello CA, Christiansen AD, Santos F. A simple genetic algorithm for the design of reinforced concrete beams. *Engineering with Computers* 1997; **13**(4): 185-196.
- Cohn MZ, Dinovitzer AS. Application of structural optimization. *Journal of Structural Engineering-ASCE* 1994; **120**(2): 617-649.
- Cohn MZ, Lounis Z. Optimum limit design of continuous prestressed concrete beams. *Journal of Structural Engineering* 1993; **119**(12): 3551-3570.
- Comisión 1 – Grupo de trabajo 1/3. *Monografía M-6. Método de bielas y tirantes*. Asociación Científico-técnica del Hormigón Estructural: Madrid, 2003.

- Comisión Permanente del Hormigón. *Instrucción de hormigón estructural: EHE*. Ministerio de Fomento: Madrid, 1998.
- Comisión Permanente del Hormigón. *Proyecto de instrucción de hormigón estructural (EHE-07)*. Ministerio de Fomento: Madrid, 2007.
- Comisión Permanente de Normas Sismorresistentes. *Norma de construcción sismorresistente: parte general y edificación (NCSE-02)*. Ministerio de Fomento: Madrid, 2002.
- Csonka P. Deformation and subsequent strengthening of a domical shell in Hungary (en alemán). *Die Bautechnik* 1958; **35**: 69.
- Csonka P. Point-supported shells with free boundary. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* 1973; **75**: 121-136.
- Day A. A general computer technique for form finding for tension structures. *Proceedings of IASS Symposium on Development of Form* 1978.
- Dems K. Multiparameter shape optimization of elastic bars in torsion. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1980; **15**(10): 1517-1539.
- Desideri P, Nervi Jr PL, Positano G. *Pier Luigi Nervi*. Gustavo Gili: Barcelona, 1982.
- Ding Y. Shape optimization of structures: a literature survey. *Computers and Structures* 1986; **24**(6): 985-1004.
- Domingo A, Lázaro C, Serna P. Design of a thin shell fibre reinforced concrete hyper roof. *Proceedings of the 40<sup>th</sup> Anniversary Congress of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1999; Vol I: A171-A179.
- Dulácska E, Kollár L. Design procedure for the buckling analysis of reinforced concrete shells. *Thin-Walled Structures* 1995; **23**(1-4): 313-321.
- Faber C. *Candela: the shell builder*. Rheinhold: New York, 1963.
- Farhat C, Chen PS, Mandel J, Roux FX. Two-level FETI method - part II: extension to shell problems, parallel implementation and performance results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1998; **155**(1-2): 153-179.
- Felippa CA. Database management in scientific computing I - general description. *Computers and Structures* 1979; **10**(1): 53-61.
- Fernández JA, Navarro JR. *Eduardo Torroja Miret, Ingeniero*. Ed. Pronaos: Madrid, 1999.
- Fialkow MN. Strength design of shell membrane reinforcement. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1983; **109**(4): 891-908.



- Foster SJ, Marti P. FE modelling of RC membranes using the CMM formulation. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics* 2002.
- Foulkes J. The minimum-weight design of structural frames. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 1954; **223**(1155): 482-494.
- Francavilla A, Ramakrishnan CV, Zienkiewicz OC. Optimization of shape to minimize stress concentration. *Journal of Strain Analysis* 1975; **10**(2): 63-70.
- García C. La geometría en la obra de Eduardo Torroja. *Revista de Obras Públicas* 1999; **3393**: 15-31.
- García J, Samartín A. Un método unificado de verificación de las armaduras en estructuras bidimensionales de hormigón armado. *Informes de la Construcción* 2002.
- Gellatly RA, Berke L. *Optimum structural design: theory and applications*. Gallager and Zienkiewicz Eds.: New York, 1973.
- Gellatly RA, Gallagher RH, Lubracki WA. Development of a procedure for automated synthesis of minimum weight structures. *Bell Aerosystems Company Report* 1964; FDL-TDR-64-141: 1-101.
- Gates AA, Accorsi ML. Automatic shape optimization of three-dimensional shell structures with large shape changes. *Computers and Structures* 1993; **49**(1): 167-178.
- Ghali A, Neville AM, Brown TG. *Structural analysis*. Spon Press: London, 2003.
- Gioncu V. *Thin reinforced concrete shells*. John Wiley & Sons: Chichester, 1979.
- Gotsis, PK. Structural optimization of shell structures. *Computers and Structures* 1994; **50**(4): 499-507.
- Gould PL. *Analysis of plates and shells*. Prentice Hall: Upper Saddle River, 1999.
- Gunaratnam DJ, Sivakumaran NS. Optimum design of reinforced concrete slabs. *The Structural Engineer* 1978; **56B**(3): 61-67.
- Gupta AK, Akbar H. Cracking in reinforced concrete analysis. *Journal of Structural Engineering* 1984; **110**(8): 1735-1746.
- Gupta AK. Combined membrane and flexural reinforcement in plates and shells. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1986; **112**(3): 550-557.
- Gupta AK. Discussion on proposed addition to proposed ACI standard: code requirements for nuclear safety related concrete structures. *ACI Journal* 1976; **37**(7): 431-432.

- Gupta AK. Membrane reinforcement in shells. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1981; **107**(1): 41-56.
- Haftka RT, Grandhi RV. Structural shape optimization - a survey. *Proceedings of the 26<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* 1985; **1**: 617-628.
- Harte R, Krätzig WB. Non linear analyses of reinforced concrete shells as a preventive measure against damages. *Proceedings of the 40<sup>th</sup> Anniversary Congress of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1999; Vol I: A29-A40.
- Haug E, Powell GH. Finite element analysis of nonlinear membrane structures. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Pacific Symposium* 1972: 165-175.
- Hernández-Montes E, Gil-Martín LM, Aschheim M. Design of concrete members subjected to uniaxial bending and compression using reinforcement sizing diagrams. *ACI Structural Journal* 2005; **102**(1): 150-159.
- Hernández E, Gil LM, López JA. Diagramas de dimensionamiento en flexión para secciones de hormigón. *Hormigón y Acero* 2003; 227: 67-74.
- Hernández E, Gil-Martín LM, Pasadas M, Aschheim M. El armado a flexión: del teorema de Ehlers a los diagramas de armado a flexión -DAF-. *Hormigón y Acero* 2006; 241: 95-105.
- Hernández S, Fontán AN. Shape and size optimization of three dimensional shells. *Proceedings of the 40<sup>th</sup> Anniversary Congress of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1999; Vol I: A41-A57.
- Heyman J. Plastic design of beams and plane frames for minimum material consumption. *Quarterly Applied Mathematics* 1951; **8**(4): 373-380.
- Hinton E, Rao NVR, Sienz J. Finite element structural shape and thickness optimization of axisymmetric shells. *Engineering Computations* 1992; **9**(5): 499-527.
- Hinton E, Sienz J, Bulman S, Lee SJ, Ghasemi MR. Integrating structural topology, shape and sizing optimization methods. *Proceedings of the 4<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics* 1998.
- Hofstetter G, Mang HA. *Computational mechanics of reinforced concrete structures*. Vieweg: Braunschweig-Wiesbaden, 1995.
- Hou JW, Chen JL. Shape optimization of elastic hollow bars. *Proceedings of the Design Engineering Technology Conference* 1984.
- Huxtable AL. *Pier Luigi Nervi*. Mayflower: London, 1960.

- IASS Working Group No. 5. *Recommendations for reinforced concrete shells and folded plates*. International Association for Shell and Spatial Structures: Madrid, 1979.
- IETcc. *Código técnico de la edificación*. Ministerio de Vivienda: Madrid, 2006.
- Imam MH, Mustahsan M. Shape optimization of insulator sheds. *Engineering Optimization* 1995; **25**(2): 99.
- Imam MH. Shape optimization of umbrella-shaped concrete shells subjected to self-weight as the dominant load. *Computers and Structures* 1998; **69**(4): 513-524.
- Imam MH. Three-dimensional shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1982; **18**: 661-673.
- Isler H. Concrete shells derived from experimental shapes. *Structural Engineering International* 1994; **3**(94): 142-147.
- Isler H. Generating shell shapes by experiments. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1993; **34**(1): 53-63.
- Isler H. New shapes for shells. *International Colloquium on Construction Processes of Shell Structures* 1959.
- Kaufmann W, Marti P. Structural concrete: cracked membrane model. *Journal of Structural Engineering* 1998; **124**(12): 1467-1475.
- Kegl M, Brank B. Shape optimization of truss-stiffened shell structures with variable thickness. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2006; **195**(19-22): 2611-2634.
- Kegl M. Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2000; **49**(12): 1571-1588.
- Khosravi P, Ganesan R, Sedaghati R. Corotational non-linear analysis of thin plates and shells using a new shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2007; **69**(4): 859-885.
- Khosravi P, Sedaghati R, Ganesan R. Optimization of geometrically nonlinear thin shells subject to displacement and stability constraints. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 2007; **45**(3): 684-692.
- Khosravi P, Sedaghati R, Ganesan R. Shape optimization of thin-walled structures based on a new shell element and uniform strain energy density criterion. *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology* 2006; 11 pp., paper 216.pdf.

- Kim TH, Lee KM, Shin HM. Nonlinear analysis of reinforced concrete shells using layered elements with drilling degree of freedom. *ACI Structural Journal* 2002; **99**(4): 418-426.
- Kiusalaas J, Reddy GB. *DESAP1-a structural design program with stress and displacement constraints*. NASA CR-2794-2796, 1977.
- Kiusalaas J, Reddy GB. *DESAP2-a structural program with stress and buckling constraints*. NASA CR-2797-2799, 1977.
- Klein B. Direct use of external principles in solving certain optimization problems involving inequalities. *Operations Research Society of America Journal* 1955; **3**(1): 168-175.
- Kollár L, Dulácska E. *Buckling of shells* (en alemán). Akademiai Kiado: Budapest, 1975.
- Kollár L. Buckling of complete spherical shells and spherical caps. *Buckling of shells*. Springer-Verlag: Berlin, 1982.
- Kollár L. *Modified proposal for the text of the recommendations*. Personal communication to S. J. Medwadowski, 1993.
- Kollegger J, Mehlhorn G. Analysis of a free-formed reinforced concrete model shell. *Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, 1990; 353-364.
- Kollegger J, Schulz JU, Mehlhorn G. Material model for the analysis of reinforced concrete shells. *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering* 1987; **2**: C20/1.
- Kollegger J. Computer programmes for consistent design of surface structures. *International Association for Bridge and Structural Engineering Colloquium Report* 1991; **62**: 507-512.
- Korda J. Ribless membrane shells with point supports at the corners. *Proceedings of International Symposium on Shells Structures on Engineering Practice* 1965; **1**: 179-190.
- Krätzig W, Eckstein U, Harte R. Future challenges in the design and construction of natural draught cooling towers. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Colloquium* 1997: 37-49.
- Lackner R, Mang HA. Adaptive F.E. ultimate load analysis of reinforced concrete plates and shells. *Proceedings of the 1<sup>st</sup> Structural Engineers World Congress* 1998.

- Lackner R, Mang HA. Mesh generation and mesh refinement procedures for the analysis of concrete shells. *Advances in Engineering Software* 2002; **33**(7-10): 389-402.
- Lackner R, Mang HA. Mesh generation and mesh refinement procedures in the analysis of concrete shells. *Computational concrete structures technology* 2000: 9-22.
- Lackner R, Mang HA. On the influence of the discretization on the collapse mode in ultimate load analysis of RC shells. *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Colloquium on Computation of Shells and Spatial Structures* 2000.
- Lagaros ND, Papadopoulos V. Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections. *International Journal of Solids and Structures* 2006; **43**(22-23): 6948–6964.
- Lakshmy TK, Bhavikatti SS. Optimum design of multiple barrel shells. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1995; **36**(117): 53-63.
- Lee C, Ahn J. Flexural design reinforced concrete frames by genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering-ASCE* 2003; **129**(6): 762-774.
- Lee SJ, Hinton E. Dangers inherited in shells optimized with linear assumptions. *Computers and Structures* 2000; **78**(1-3): 473-486.
- Lim L, Buchanan A, Moss P, Franssen JM. Numerical modelling of two-way reinforced concrete slabs in fire. *Engineering structures* 2004; **26**(8): 1081–1091.
- Lin CS, Scordelis AC. Nonlinear analysis of RC shells of general form. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1975; **101**(3): 523-538.
- Lindby T, Santos JLT. Shape optimization of three-dimensional shell structures with the shape parametrization of a CAD system. *Structural Optimization* 1999; **18**(2-3): 126-133.
- Linkwitz K, Schek HJ. Einige bemerkungen zur berechnung von vorgespannten seilnetzkonstruktionen (Some remarks concerning the analysis of prestressed cable-structures). *Ingenieur-Archiv* 1971; **40**: 145-158.
- Livesley RK. The application of an electronic digital computer to some problems of structural analysis. *The Structural Engineer* 1956; **34**(1).
- Lounis Z, Cohn MZ. Multiobjective optimization of prestressed concrete structures. *Journal of Structural Engineering* 1993; **119**(3): 794-808.
- Lourenço PB, Figueiras JA. Automatic design of reinforcement in concrete plates and shells. *Engineering Computations* 1993; **10**(6): 519-541.
- Lourenço PB, Figueiras JA. Solution for the design of reinforced concrete plates and shells. *Journal of Structural Engineering* 1995; **121**(5): 815-823.

- Lourenço PB. *Novas metodologias para o dimensionamento de estruturas de betão armado*. Department of Civil Engineering, University of Minho, Portugal: Minho, 1992.
- Mackerle J. Finite- and boundary-element linear and nonlinear analyses of shells and shell-like structures: A bibliography (1999–2001). *Finite Elements in Analysis and Design* 2002; **38**(8): 765-782.
- MacRae AJ, Cohn MZ. Optimization of prestressed concrete flat plates. *Journal of Structural Engineering* 1987; **113**(5): 943-957.
- Malave FZL. *Work and life of Pier Luigi Nervi*. Vance: Monticello, 1984.
- Manterola J. Relación entre la estructura resistente y la forma. *Revista de Obras Públicas* 2007; **3476**: 23-40.
- Marti P. Dimensioning and detailing. *International Association for Bridge and Structural Engineering Colloquium on Structural Concrete*, IABSE Reports 1991; **62**: 411-443.
- Martí P, Company PP, Sanchís M. Acoplamiento elementos finitos-técnicas de optimización en el sistema DISSENY. *Actas del II Simposium sobre Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería* 1986; A133-A147.
- Martí P, Company PP, Sanchís M. DISSENY. Un sistema interactivo para el diseño de estructuras basado en técnicas de optimización. *Anales de Ingeniería Mecánica* 1985; **3**(1): 285-290.
- Martí P, Company P. *Análisis interactivo de estructuras por elementos finitos*. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Murcia: Murcia, 1993.
- Maurin B, Motro R. Concrete shells form-finding with surface stress density method. *Journal of Structural Engineering-ASCE* 2004; **130**(6): 961-968.
- Medwadowski SJ, Samartín A. Design of reinforcement in concrete shells: a unified approach. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2004; **45**(144): 41-50.
- Medwadowski SJ. Buckling of concrete shells: an overview. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2004; **45**(144): 51-63.
- Medwadowski SJ. Concrete thin shell roofs at the turn of the millenium. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Colloquium* 1997: 9-22.
- Medwadowski SJ. Multidirectional membrane reinforcement. *ACI Structural Journal* 1989; **86**(5): 563-569.

- Medwadowski SJ. Survey of buckling of concrete shells. *Proceedings of the International Symposium on Sports Architecture* 1990.
- Medwadowski SJ. Interrelation between the theory and the form of shells. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1978; **20-2**(70): 41-61.
- Medwadowski SJ. Variation in the strength of membranes with the direction of the reinforcement. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1990; **31**(1-2): 93-97.
- Michell AGM. The limits of economy of materials in frame structures. *Philosophy Magazine and Journal of Science* 1904; **8**: 589-597.
- Miguel PF, Fernández MA, Bonet JL, Martí JR, Navarro J, Castro MC. *Proyecto de estructuras de hormigón mediante el método de las bielas y tirantes*. Ediciones VJ: Valencia, 2006.
- Min CHS. Design and ultimate behavior of reinforced concrete hyperbolic paraboloid saddle shell. *Proceedings of the 40<sup>th</sup> Anniversary Congress of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1999; Vol I: A89-A98.
- Mitchell D, Collins M, Bhide S, Rabbat B. *AASHTO LRFD Strut-and-tie model design examples*. Portland Cement Association: Skokie, 2004.
- Muller G, Kabir AF, Scordelis AC. Nonlinear analysis of reinforced concrete hyperbolic paraboloid shells. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium* 1978; 191-203.
- Mungan I. Buckling stress states of cylindrical shells. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1974; **100**(11): 2289-2306.
- Mungan I. Buckling stress states of hyperboloidal shells. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1976; **102**(10): 2005-2020.
- Mungan I. Buckling stress states of shells of revolution. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Congress* 1979; 1.49:1.65.
- Mungan I. Recent researches in the field of natural draught cooling towers. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Colloquium* 1997: 23-36.
- Mungan I. Some ideas on buckling of shell roofs. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Congress* 1984; 1.3: 26-39.
- Mungan I. Some observations on shell buckling. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1983; **24**(81): 3-11.

- Naaman AE. Minimum cost versus minimum weight of prestressed slabs. *Journal of the Structural Division-ASCE* 1976; **102**(7): 1493-1505.
- Navarrina F, Bendito E, Casteleiro M. High order sensitivity analysis in shape optimization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1989; **75**(1-3): 267-281.
- Navarrina F, Casteleiro M. General methodological analysis for optimum design. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1991; **31**(1): 85-111.
- Navarrina F, Colominas I, Juanes R, Bendito E, Casteleiro M. A unified approach for high order sensitivity analysis. *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Computer Aided Optimum Design of Structures* 2001; **10**: 327-336.
- Navarrina F, López-Fontán S, Colominas I, Bendito E, Casteleiro M. High order shape design sensitivity: a unified approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2000; **188**(4): 681-696.
- Nielsen MP. *On the strength of reinforced concrete disks*. Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series, Report 70: Copenhagen, 1971.
- Nielsen MP. Yield conditions for reinforced concrete shells in the membrane state. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium on Non-classical Shells Problems* 1964; 1030-1040.
- Ogawa T, Ohsaki M, Miyamura T, Kumagai T. Shape optimization of shell roofs subjected to strong wind by using a variable complexity model. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2005; **45**(148): 108-115.
- Ohmori H, Yamamoto K. Shape optimization of shell and spatial structures for specified stress distribution - part 1: shell analysis. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1998; **39**(126): 3-13.
- Ohmori H, Yamamoto K. Shape optimization of shell and spatial structures for specified stress distribution. *Memoirs of the School of Engineering, Nagoya University* 1998; **50**(1): 1-32.
- Ortega NF, Arias JV. Comparison of mechanical efficiency between an hyperbolic paraboloid and an experimental model. *Proceedings of the 4<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics* 1998.
- Otto F, Rasch B. *Finding form: towards an architecture of the minimalis*. Axel Menges: Stuttgart, 1995.
- Park R, Gamble WL. *Reinforced concrete slabs*. John Wiley & Sons: New York, 2000.



- Paul H, Das Gupta NC, Yu CH. A geometric programming method for cost-optimal design of a modular floor system. *Engineering Optimization* 1990; **16**(3): 205-220.
- Payá I, Yepes V, González-Vidosa F, Hospitaler A. Multiobjective simulated annealing optimization of concrete building frames. *Proceedings of the IABSE symposium on responding to tomorrow's challenges in structural engineering* 2006.
- Pearson CW. Structural design by high speed computing machines. *Proceedings of the 1<sup>st</sup> Conference on Electronic Computation* 1958; 417-436.
- Perea C, Yepes V, Alcalá J, Hospitaler A, González-Vidosa F. Heuristic optimization of reinforced concrete road bridge frames. *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology* 2006; 9 pp., paper 208.pdf.
- Perea C, Alcalá J, Yepes V, González-Vidosa F, Hospitaler A. Design of reinforced concrete bridge frames by heuristic optimization. *Advances in Engineering Software* 2007; in press, doi:10.1016/j.advengsoft.2007.07.007.
- Perezan JC, Hernández S. Size and shape optimization of flexural structures with explicit sensitivity analysis. *Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* 1999; **3**: 1605-1611.
- Polak MA. Shear analysis of reinforced concrete shells using degenerate elements. *Computers and Structures* 1998; **68**(1-3): 17-29.
- Polak MA, Vecchio FJ. Nonlinear analysis of reinforced concrete shells. *Journal of Structural Engineering* 1993; **119**(12): 3439-3462.
- Polynkine AA, Van Keulen F, Toropov VV. Optimization of geometrically nonlinear thin-walled structures using the multipoint approximation method. *Structural Optimization* 1995; **9**(2): 105-116.
- Prager W. *Linear programming and structural design, II: limit design*. RAND Corporation, Santa Monica, California: Santa Monica, 1957.
- Preisinger C, Popov R, Kollegger J. Nonlinear design procedures for reinforced concrete plates and shells. *Computational Modelling of Concrete Structures* 2003: 777-782.
- Preisinger C, Popov R, Kollegger J. Optimization of reinforcement plate and shell structures with the aid of non-linear finite element analysis. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics* 2002.
- Pucher A. Über den spannungszustand in doppelt gekrümmten flächen (Estado tensional en superficies de doble curvatura). *Beton und Eisen* 1934; **33**: 298-304.

- Rafiq MY, Southcombe C. Genetic algorithms in optimal design and detailing of reinforced concrete columns supported by a declarative approach for capacity checking. *Computers and Structures* 1998; **69**(4): 443-457.
- Rajan SD, Bhatti MA. SADDLE: a computer-aided structural analysis and dynamic design language, part II. Database management system. *Computers and Structures* 1986; **22**(2): 205-212.
- Ramm E, Bletzinger KU, Maute K. Structural optimization. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Colloquium* 1997: 201-216.
- Ramm E, Bletzinger KU, Reitinger R. Shape optimization of shell structures. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1993; **34**(112): 103-121.
- Ramm E, Kemmler R, Schwarz S. Formfinding and optimization of shell structures. *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures* 2000.
- Ramm E, Mehlhorn G. On shape finding methods and ultimate load analyses of reinforced concrete shells. *Engineering structures* 1991; **13**(2): 178-198.
- Ramm E, Schwarz S, Kemmler R, Lipka A. Structural optimization – the interaction of form and mechanics. *Proceedings of the 18<sup>th</sup> CAD-FEM User's Meeting* 2000 and *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Engineering Mechanics Symposium* 2000.
- Ramm E, Wall WA. Shells in advanced computational environment. *Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Congress on Computational Mechanics* 2002.
- Ramm E. Shape finding methods of shells. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1992; **33**(109): 89-99.
- Ramm E. Shape finding methods of shells. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium* 1991: 59-67.
- Ramm E. Shape finding of concrete shell roofs. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2004; **45**(144): 29-39.
- Ramm E. Ultimate load and stability analysis of reinforced concrete shells. *Proceedings of the Colloquium on Computational Mechanics of Concrete Structures*, 1987.
- Rao NVR, Lee SJ, Sousa JB, Hinton E. Analysis and optimization of prismatic shell structures using finite element and finite strip formulations. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* 1999.
- Reineck K-H. *Examples for the design of structural concrete with strut-and-tie models*. American Concrete Institute: Farmington Hills, 2002.

- Reitinger R, Ramm E. Buckling and imperfection sensitivity in the optimization of shell structures. *Thin-Walled Structures* 1995; **23**(1-4): 159-177.
- Ringertz UT. Numerical methods for optimization of nonlinear shell structures. *Structural optimization* 1992; **4**(3-4): 193-198.
- Robles SI, Ortega NF. Study of volumetric displacements of shells. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 2001; **42**(137): 139-147.
- Roca P, Marí AR. Nonlinear geometric and material analysis of prestressed concrete general shell structures. *Computers and Structures* 1993; **46**(5): 917-929.
- Salajegheh, E. Discrete variable optimization of plate structures using dual methods. *Computers and Structures* 1996; **58**(6): 1131-1138.
- Samartín A, Díaz-Domínguez P, García-Palacios J. A unified approach to verify the reinforcement in two-dimensional reinforced concrete membrane and shell structures. *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Civil & Structural Engineering Computing* 2003.
- Sanz LJ. El borde libre y Félix Candela. *Revista de Obras Públicas* 1999; **3383**: 17-28.
- Sarma KC, Adeli H. Cost optimization of concrete structures. *Journal of Structural Engineering* 1998; **124**(5): 570-578.
- Saxena M, Sharma SP, Mohan C. Cost optimization of Intze tanks on shafts using nonlinear programming. *Engineering Optimization* 1987; **10**(4): 279-288.
- Schlaich J, Saradshow P. Anton Tedesko and the early history of concrete shells. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1994; **35**(116): 139-154.
- Schleupen A, Maute K, Ramm E. Adaptive FE-procedures in shape optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2000; **19**(4): 282-302.
- Schmit LA. Structural design by systematic synthesis. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Conference on Electronic Computation* 1960; 105-122.
- Schramm U, Pilkey WD. Coupling of geometric descriptions and finite elements using NURBs - a study in shape optimization. *Finite Elements in Analysis and Design* 1993; **15**(1): 11-34.
- Scordelis AC. Analysis of thin shell roofs. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1985; **29**(87): 5-19.
- Scordelis AC. Computer analysis of reinforced concrete shells. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1986; **27-1**(90): 47-53.

- Scordelis AC. Stability of reinforced concrete domes and hyperbolic paraboloidal shells. In *Concrete Shell Buckling*. ACI Special Publication, SP-67, ACI: Farmington Hills, 1981.
- Seguí M. *Félix Candela, arquitecto*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente: Madrid, 1994.
- Selby RG, Vecchio FJ. A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids. *Canadian Journal of Civil Engineering* 1997; **24**(3): 460-470.
- Shin MK, Park KJ, Park GJ. Optimization of structures with nonlinear behaviour using equivalent loads. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2007; **196**(4-6): 1154-1167.
- Shyy YK, Fleury C, Izadpanah K. Shape optimal design using high-order elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1988; **71**(1): 99-116.
- Smith PG. *Membrane shapes for shell structures*. Ph.D. Thesis. University of California: Berkeley, 1969.
- Suzuki T, Hangai Y. Shape analysis of minimal surface by the finite element method. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium* 1991: 103-110.
- Sze KY, Liu XH, Lo SH. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design* 2004; **40**(11): 1551-1569.
- Tabatabai SMR. *Finite element-based elasto-plastic optimum reinforcement dimensioning of spatial concrete panel structures*. Ph.D. Thesis. Institute of Structural Engineering, Swiss Federal Institute of Technology: Zurich, 1996.
- Takayama M, Ashida MEY, Hayashi N. The effect of loading mode on failure characteristics and elasto-plastic behaviour of free-formed reinforced concrete shells. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Symposium* 1997; Vol II: 801-809.
- Takayama M, Ashida MEY, Hayashi N. The effect of loading mode on failure characteristics of free-formed reinforced concrete shells. *Proceedings of the International Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1996; Vol II: 1128-1135.
- Takayama M, Ashida MEY, Hayashi N. The effect of support condition on mechanical behavior of free-formed reinforced concrete shells. *Proceedings of the International Conference of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1998; Vol I: 316-321.

- Takayama M, Ashida MEY, Hayashi N. The effect of tie-beam stiffness on failure behavior of free-formed reinforced concrete shells. *Proceedings of the 40<sup>th</sup> Anniversary Congress of the International Association for Shell and Spatial Structures* 1999; Vol I: A149-A157.
- Tan GH, Thevendran V, Das Gupta NC, Thambiratnam DP. Design of reinforced concrete cylindrical water tanks for minimum material cost. *Computers and Structures* 1993; **48**(5): 803-810.
- Tárrago JA, Canales J, Arias A. CODISYS: an integrated system for optimal structural design. *Computers and Structures* 1994; **52**(6): 1221-1241.
- Technical Committee CEN/TC250. *Eurocode 2: design of concrete structures - part 1-1: general rules and rules for buildings*. European Committee for Standardization CEN: Bruselas, 2004.
- Tocher JL, Karnes RN. Impact of automated structural optimization on actual design. *Proceedings of the 12<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference* 1971.
- Tokatlidis ACH, Talaslidis DG. A finite element formulation for the nonlinear analysis of RC shells. *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* 2000.
- Tonda JA. Bóvedas de cascarón para la planta de Bacardí en México. *IMCYC* 1973; **60**.
- Torroja E. *Razón y ser de los tipos estructurales*. CSIC: Madrid, 2004 (1<sup>a</sup> ed. 1957).
- Vandepitte D, Rathe J, Weymeis G. Experimental investigation into the buckling and creep buckling of shallow spherical caps subjected to uniform radial pressure. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures Congress* 1979; 1.1-1.16.
- Vecchio FJ, Collins MP. The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. *ACI Journal* 1986; **83**(2): 219-231.
- Vecchio FJ, Collins MP. *The response of reinforced concrete to in-plane shear and normal stresses*. Publication 82-03, Department of Civil Engineering, University of Toronto: Toronto, 1982.
- Venkayya VP. Structural optimization: a review and some recommendations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1972; **13**: 203-228.
- Voyiadjis GZ, Woelke P. General non-linear finite element analysis of thick plates and shells. *International Journal of Solids and Structures* 2006; **43**(7-8): 2209-2242.

- Ward J, Thambiratnam D, Nasir A. Modelling, analysis, design and optimization of shell structures. *Optimization and Control in Civil and Structural Engineering* 1999; 107-117.
- Wilkinson K, Markowitz J, Batill SM, George D, Lener E. FASTOP: a flutter and strength optimization program for lifting-surface structures. *Journal of Aircraft* 1977; **14**(6): 581-587.
- Yamamoto T, Vecchio FJ. Analysis of reinforced concrete shells for transverse shear and torsion. *ACI Structural Journal* 2001; **98**(2): 191-200.
- Yang RJ, Choi KK. Accuracy of finite element based shape design sensitivity analysis. *Journal of Structural Mechanics* 1985; **13**(2): 223-239.
- Yi K, Choi KK, Kim NH, Botkin ME. Continuum-based design sensitivity analysis and optimization of nonlinear shell structures using meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2006; **68**(2): 231-266.
- Yoo YM, Haug EJ, Choi KK. Shape optimal design of an engine connecting rod. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design* 1984; **106**(3): 415-419.
- Zerna W, Mungan I. Buckling stresses of shells having negative gaussian curvature. *Buckling of shells*. Springer-Verlag: Berlin, 1982.
- Zhang WH, Beckers P, Duysinx P, Fleury C. Parametric design based approach to structural shape optimization. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Computer Aided Optimum Design of Structures* 1993; 461-476.
- Zhang YX, Bradford MA, Gilbert RI. A layered cylindrical quadrilateral shell element for nonlinear analysis of RC plate structures. *Advances in Engineering Software* 2007; **38**(7): 488-500.
- Zhang YX, Bradford MA, Gilbert RI. A layered shear-flexural plate/shell element using Timoshenko beam functions for nonlinear analysis of reinforced concrete plates. *Finite Elements in Analysis and Design* 2007; **43**(11-12): 888-900.
- Zienkiewicz OC, Campbell JS. Shape optimization and sequential linear programming. In *Optimum Structural Design*. John Wiley: New York, 1973.
- Zoelly R. *On the problem of buckling of the spherical shell* (en alemán). Dissertation. Zurich, 1915.
- Zumwalt KW, El-Sayed MEM. Totally integrated approach for structural shape optimization and model preparation. *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Computer Aided Optimum Design of Structures* 1993.

## *Referencias bibliográficas del doctorando relacionadas con esta tesis*

- Martí P, Tomás A, Torrano MS. Aplicación de las técnicas de optimización en la enseñanza del hormigón estructural. *Actas de las I Jornadas de ACHE sobre la Enseñanza del Hormigón Estructural* 2001; 203-209.
- Tomás A, Martí P, Solano MA. Empleo de técnicas de optimización en la mejora del comportamiento de láminas de hormigón de configuración preestablecida. *Actas del Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería* 2005; 15 pp., fichero A435.pdf.
- Tomás A, Martí P, Solano MA. Optimización de forma de un paraboloides hiperbólico de hormigón. *Actas del V Congreso de Métodos Numéricos en la Ingeniería* 2002; 13 pp., fichero 234.pdf.
- Tomás A, Martí P. Design of reinforcement for concrete shell elements using optimisation techniques. *Computers and Structures*; artículo remitido en noviembre de 2006; artículo revisado remitido en septiembre de 2007. Pendiente de aceptación.
- Tomás A, Martí P. Finite element-based optimum reinforcement dimensioning of concrete plates and shells. *Proceedings of the Fifth World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* 2003; 6 pp., paper A096.pdf.
- Tomás A, Martí P. Improvement of structural behaviour in concrete shells using optimisation techniques. *Computational Modelling of Concrete Structures* 2003; 839-845.

Tomás A, Martí P. Optimización del comportamiento mecánico de estructuras laminadas de hormigón. *Proceedings of the Second Conference on Scientific Advances on Civil and Industrial Engineering* 2003; 46-53.

Tomás A, Martí P. Optimum design of reinforcement in concrete plates and shells. *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics* 2002; 10 pp., paper FP80943.pdf.

Tomás A, Martí P. Reinforcement design in concrete plates and shells using optimization techniques. *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology* 2006; 13 pp., paper 224.pdf.