

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

Departamento de Tecnologías de la Información y la Comunicación



TRABAJO FIN DE MÁSTER
MÁSTER UNIVERSITARIO EN INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

Uso de la Técnica de la Matriz Multimodal Equivalente para el Análisis de Circuitos de Microondas en Tecnología Microstrip

Alumno: Antonio Manuel Huéscar de la Cruz
Director: Alejandro Álvarez Melcón
Codirectora: Celia Gómez Molina

Agradecimientos

Después de unos meses de estudio, trabajo y dedicación por fin puedo mostrar el resultado del que es mi proyecto final de máster. Este trabajo ha sido posible gracias a Alejandro Álvarez Melcón y Celia Gómez Molina, quienes han dedicado parte de su tiempo en otorgarme su ayuda y supervisión, logrando así un resultado satisfactorio tanto a nivel personal como académico. Es por eso que mis principales agradecimientos son hacia vosotros: muchas gracias.

Por último me gustaría dar las gracias a mi familia y amigos por estar ahí a lo largo de estos años. Muchas gracias.

Índice general

1. Red Multimodo Equivalente	5
1.1. Desarrollo matemático de la Red Multimodo Equivalente	6
1.2. Obtención de los parámetros S a partir de la formulación MEN	11
1.3. Conclusiones	15
2. Extensión de la formulación MEN para excitación con puertos laterales	17
2.1. Desarrollo matemático de la extensión de Red Multimodo Equivalente	18
2.2. Obtención de los parámetros S a partir de la extensión de la Formulación MEN con puertos laterales	23
2.3. Impedancias complejas en los puertos mediante ondas de potencia generalizadas	25
2.4. Conclusiones	27
3. Resultados	29
3.1. Parámetros S de guías de onda con excitación modal	31
3.1.1. Parámetros S de una guía de onda con un parche metálico en un área interna de la interfaz	31
3.1.2. Parámetros S de una guía de onda con un parche metálico en $x = 0$ o en $x = a$	35
3.2. Parámetros S de guías de onda con puertos laterales de excitación	41
3.3. Parámetros S de una guía de onda con impedancias complejas en los puertos	46
4. Conclusiones y líneas de investigación futuras	51
4.1. Conclusiones	51
4.2. Líneas de investigación futuras	51
A. Funciones vector modales eléctricas y resolución de las integrales de acoplo	53
A.1. Funciones vector modales eléctricas de un parche metálico rectangular	54
A.2. Integrales de acoplo entre una guía de onda rectangular y un parche metálico	56
A.2.1. Parche metálico en una zona interna	56
A.2.2. Parche metálico en $x = 0$	60
A.2.3. Parche metálico en $x = a$	62

A.2.4. Puerto en $x = 0$	63
A.2.5. Puerto en $x = a$	64
B. Expansión de la Formulación de Red Multimodo Equivalente con varios puertos y parches metálicos	67
B.1. Desarrollo matemático de la extensión de Red Multimodo Equivalente .	68

Índice de figuras

1.1. Parche metálico en la interfaz de espesor nulo y con forma rectangular de dimensiones $(a_{obs} \times b_{obs})$ situado dentro de una guía de onda rectangular de dimensiones $(a \times b)$	5
1.2. Red Multimodo Equivalente (con matriz generalizada de admitancias) para el caso bajo estudio.	7
1.3. Guía de onda con parche metálico de espesor nulo en la intersección.	11
1.4. Red Multimodo Equivalente de la estructura de la Figura 1.3 donde el modo 1 del medio 1 es la excitación del problema.	12
1.5. Circuito simplificado de 2 puertos.	14
2.1. Guía de onda de dimensiones $(a \times b)$ con parche metálico en la interfaz de dimensiones $(a_{obs} \times b_{obs})$ y puerto lateral de dimensiones $(\Delta x \times \Delta y)$	17
2.2. Red Multimodo Equivalente de la estructura de la Figura 2.1.	21
2.3. Esquemático del circuito impreso microstrip excitado en la interfaz por dos conectores coaxiales.	23
2.4. Red Multimodo Equivalente del circuito mostrado en la Figura 2.3.	24
2.5. Circuito microstrip con las impedancias complejas que modelan los conectores coaxiales de los puertos de entrada y salida.	26
2.6. Circuitos equivalentes para modelar los parásitos que se producen en el cable coaxial.	26
3.1. Guía de onda comercial WR-90 con parche metálico interno centrado de dimensiones 18×7 mm.	32
3.2. Parámetros de convergencia de la estructura presentada en la Figura 3.1 a una frecuencia de 17,5 GHz. Resultados obtenidos con MATLAB.	32
3.3. Parámetros S de la estructura presentada Figura 3.1. Resultados de MATLAB y FEST3D.	33
3.4. Guía de onda comercial WR-75 con parche metálico interno de dimensiones $16 \times 7,5$ mm.	34
3.5. Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.4. Resultados de MATLAB y FEST3D.	34
3.6. Guía de onda comercial WR-90 con parche metálico situado en $x = 0$ y de dimensiones $10,16 \times 3$ mm.	35

3.7. Parámetros de convergencia de la estructura presentada en la Figura 3.6. Resultados obtenidos con MATLAB.	35
3.8. Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.6. Resultados de MATLAB y FEST3D.	36
3.9. Guía de onda comercial WR-75 con parche metálico situado en $x = 0$ y de dimensiones 10×3 mm.	37
3.10. Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.9. Resultados de MATLAB y FEST3D.	37
3.11. Guía de onda comercial WR-90 con parche metálico situado en $x = a$ y de dimensiones 8×3 mm.	38
3.12. Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.10. Resultados de MATLAB y FEST3D.	39
3.13. Guía de onda comercial WR-75 con parche metálico situado en $x = a$ y de dimensiones 10×3 mm.	39
3.14. Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.13. Resultados de MATLAB y FEST3D.	40
3.15. Guía de onda comercial WR-90 con dos puertos situados en $x = 0$	41
3.16. Parámetros de convergencia de la estructura presentada en la Figura 3.15. Resultados obtenidos con MATLAB.	42
3.17. Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.15. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.	42
3.18. Guía de onda comercial WR-75 con dos puertos situados en $x = 0$	43
3.19. Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.18. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.	44
3.20. Guía de onda rectangular de dimensiones $22,86 \times 11$ mm, con dos puertos en $x = 0$ y un resonador en el área interna.	44
3.21. Parámetros de convergencia de la estructura presentada en la Figura 3.20. Resultados obtenidos con MATLAB.	45
3.22. Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.20. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.	45
3.23. Filtro de microondas en tecnología microstrip con conectores coaxiales en los puertos de entrada y salida.	46
3.24. Parámetros S de la estructura de la Figura 3.23 tomando $Z_L = Z_g = 50 \Omega$. Resultado de MATLAB y ANSYS HFSS.	47
3.25. Circuito R-C serie con capacidad óptima. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.	48
3.26. Circuito R-C paralelo con capacidad óptima. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.	48
3.27. Circuito R-C serie con resistencia y capacidad óptimas. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.	49
A.1. Parche metálico en la intersección de una guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$. Las dimensiones del parche son $a_{obs} \times b_{obs}$	54

A.2. Parche metálico situado en la pared $x = 0$ de una guía de dimensiones $a \times b$. Las dimensiones del parche son $a_{obs} \times b_{obs}$. En este caso la pared que toca la caja es una pared eléctrica y las otras 3 son paredes magnéticas. 55

A.3. Parche metálico situado en la pared $x = a$ de una guía de dimensiones $a \times b$. Las dimensiones del parche son $a_{obs} \times b_{obs}$. En este caso la pared de la derecha ($x = a$) es una pared eléctrica y las otras 3 son paredes magnéticas. 56

A.4. Sección transversal de una guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$ con un puerto en $x = 0$. La zona en color gris hace referencia al parche metálico mientras que la zona en color negro hace referencia a la excitación del puerto. 63

A.5. Sección transversal de una guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$ con un puerto en $x = a$. La zona en color gris hace referencia al parche metálico mientras que la zona en color negro hace referencia a la excitación del puerto. 64

B.1. Guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$ con dos puertos laterales en $x = 0$ y un parche interno en la interfaz. 67

B.2. Red Multimodo Equivalente para la estructura de la Figura B.1. 71

Introducción

En la actualidad, existen técnicas de electromagnetismo computacional que son de gran interés en la industria de las microondas, debido a aspectos tan positivos como lo son el ahorro de tiempo de desarrollo y los costes de fabricación. Estas ventajas hacen posible una gran variedad de técnicas numéricas, estudiadas en numerosos artículos de la literatura técnica [1]. Además, estas técnicas numéricas están implementadas en softwares comerciales como ANSYS HFSS, CST Microwave Studio, FEST3D o ADS [2], [3], [4]. Las técnicas [2] y [3] son consideradas genéricas de modo que pueden realizar el análisis de estructuras arbitrarias a expensas de un gran coste computacional. Por otra parte, existen técnicas basadas en métodos modales o ecuación integral [4], donde la formulación se particulariza para un tipo de geometría determinado y se analiza de forma eficiente.

Para este trabajo, se va a utilizar la formulación de Red Multimodo Equivalente (MEN) [4]. Dicha formulación, presenta un análisis preciso y eficiente para los componentes en guía de onda. Esta técnica consiste en estudiar cada una de las discontinuidades presentes en la geometría de forma independiente. Se comienza imponiendo las condiciones de contorno en cada una de las discontinuidades para obtener la ecuación integral. Una vez que se resuelven las ecuaciones integrales, se procede al cálculo de la matriz de acoplamiento de impedancia o admitancia, que caracteriza de forma rigurosa la interacción entre los modos a ambos lados de la discontinuidad. Por último, las redes equivalentes correspondientes a cada discontinuidad se combinan para formar la red final que caracteriza todo el dispositivo bajo análisis [5].

Este proyecto se dividirá en dos fases. En primer lugar, se va a realizar el análisis de discontinuidades planares contenidas en el plano transversal de una guía de onda rectangular, haciendo uso de la formulación de Red Multimodo Equivalente. Los parches metálicos que se encuentran en la discontinuidad de la guía bajo estudio serán de espesor nulo, lo que representan metalizaciones impresas sobre sustratos dieléctricos. Además, los parches metálicos tendrán formas rectangulares por lo que las integrales de acoplo se resolverán de forma analítica. La resolución de las ecuaciones integrales se realizará con la técnica del Método de los Momentos (MoM) junto con el procedimiento de Galerking [4]. Una vez se resuelven las ecuaciones integrales, se podrá obtener la matriz de acoplamiento de admitancias y posteriormente los parámetros de dispersión (S). Esta formulación será validada usando el software FEST3D [8].

En la segunda fase del proyecto, se tratará de adaptar la formulación de Red Multimodo Equivalente al análisis de circuitos en tecnología microstrip [6]. Para ello, será necesario introducir puertos laterales de excitación en la formulación MEN [7]. En este caso habrá que tener en cuenta la contribución de los puertos laterales a lo largo de toda la formulación, de tal forma que en la matriz de acoplamiento de admitancias se pueda ver la interacción con los diferentes elementos de la discontinuidad. Por último, se calcularán los parámetros S de estructuras de este tipo para validar la formulación. En este caso habrá que hacer uso de softwares genéricos como ANSYS HFSS o CST, ya que FEST3D no ofrece la posibilidad de analizar estas estructuras con puertos laterales.

Por último, se planteará una técnica de calibración de puertos para mejorar las respuestas de transiciones de coaxial a microstrip. Esta técnica utilizará circuitos equivalentes para modelar las impedancias de los coaxiales como impedancias complejas. Una vez se tengan estas impedancias complejas, para tratar de simular los parásitos que se forma en los conectores coaxiales, se hará uso de las ondas de potencia generalizadas para obtener la respuesta del dispositivo y así poder caracterizar circuitos de microondas en tecnología microstrip de una forma más realista y sin perder las ventajas computacionales que ofrece la formulación MEN.

Estructura de la memoria

Capítulo 1. Red Multimodo Equivalente. En este capítulo, se muestra el desarrollo matemático de la formulación MEN para el análisis de discontinuidades planares en guía de onda. En este capítulo no se tendrán en cuenta puertos laterales en la discontinuidad, por lo que la excitación será un modo que se propaga en una de las secciones de la guía de onda. Los parches metálicos en la discontinuidad tendrán forma rectangular, de modo que las integrales de acoplo se resolverán de forma analítica. Posteriormente, se obtendrá la matriz de acoplamientos de admitancia y los parámetros S.

Capítulo 2. Extensión de la formulación MEN para excitación con puertos laterales. En el segundo capítulo, se busca adaptar la formulación MEN al análisis de circuitos de microondas en tecnología microstrip. Para ello, se añade a la formulación MEN la existencia de puertos laterales. La forma de las metalizaciones seguirá siendo rectangular. Una vez se resuelve la ecuación integral, se puede obtener la matriz de acoplamientos de admitancias, donde se podrá ver la interacción de los puertos laterales con el resto de elementos de la estructura. Posteriormente, se obtendrán los parámetros S con los que mostrar el comportamiento de las estructuras diseñadas. En el último apartado del capítulo, se mostrará una técnica de calibración de puertos mediante impedancias complejas y ondas de potencia generalizadas.

Capítulo 3. Resultados. Tras programar en MATLAB las formulaciones de los Capítulos 1 y 2 se procederá a validarlas. Para validar las formulaciones se utilizarán

herramientas software comerciales. En la validación de la formulación del Capítulo 1 se hará uso de FEST3D [8], ya que emplea una formulación similar basada en la misma técnica para el análisis en guía de onda, que la descrita en ese mismo capítulo [9]. Por otra parte, para validar la formulación del Capítulo 2 se hará uso del software comercial ANSYS HFSS con el que se podrán validar las guías de onda con puertos laterales en la discontinuidad y circuitos microstrip. Además, también se procederá a la validación de la calibración de los puertos mediante impedancias complejas. Esta validación también se llevará a cabo en ANSYS HFSS ya que es posible diseñar el conector coaxial comercial que nosotros deseemos a partir de la hoja de características del fabricante.

Capítulo 4. Conclusiones y líneas de investigación futuras. En este último capítulo se realizará una breve conclusión sobre el proyecto y se presentarán las líneas futuras de investigación.

Capítulo 1

Red Multimodo Equivalente

En este capítulo se presenta la formulación de Red Multimodo Equivalente, la cual se utiliza para el análisis de una discontinuidad como la que se muestra en la Figura 1.1. La discontinuidad que se va a estudiar consiste en un parche metálico de dimensiones $a_{obs} \times b_{obs}$ situada en la sección transversal de una guía rectangular de dimensiones $a \times b$. Este parche metálico tiene un espesor nulo. El desarrollo teórico se realizará imponiendo las condiciones de contorno sobre el campo eléctrico en dicha discontinuidad.

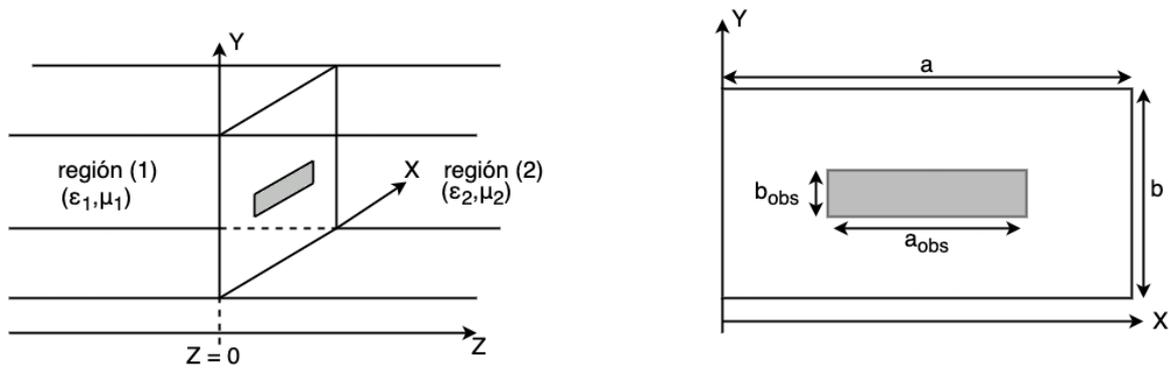


Figura 1.1: Parche metálico en la interfaz de espesor nulo y con forma rectangular de dimensiones $(a_{obs} \times b_{obs})$ situado dentro de una guía de onda rectangular de dimensiones $(a \times b)$.

Un aspecto a destacar, es que en este capítulo no se tendrán en cuenta pulsos de excitación en la discontinuidad como en [7]. Por consiguiente, tanto la formulación que veremos a continuación como los resultados de la misma, serán de estructuras con un parche metálico en la discontinuidad excitado por el primer modo que se propaga en la guía de onda rectangular, en lugar de una excitación externa como un puerto lateral.

1.1. Desarrollo matemático de la Red Multimodo Equivalente

En esta sección se desarrollará la formulación de Red Multimodo Equivalente (MEN) de la estructura ilustrada en la Figura 1.1. En primer lugar, se comienza imponiendo las condiciones de contorno sobre la componente tangencial del campo eléctrico $\mathbf{E}_t^{(\delta)}(s)$ en el parche metálico (situado en $z = 0$, como se puede apreciar en la Figura 1.1). Tras imponer la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico en el parche obtenemos,

$$\mathbf{E}_t^{(1)}(s) - \mathbf{E}_t^{(2)}(s) = 0 \quad (1.1)$$

donde $\delta = 1$ o $\delta = 2$ para $z \leq 0$ o $z \geq 0$ respectivamente, y s es un punto de la sección transversal de la Figura 1.1.

En segundo lugar, se pretende escribir el campo eléctrico transversal total en función de los infinitos modos que presenta la guía bajo estudio. Para realizar esto, se utiliza la expansión modal detallada en [4], la cual permite expandir el campo total como un sumatorio de los infinitos modos de la guía base,

$$\mathbf{E}_t^{(\delta)}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} V_m^{(\delta)} \mathbf{e}_m^{(\delta)}(s) \quad (1.2)$$

donde $V_m^{(\delta)}$ es la tensión total modal del modo m , $\mathbf{e}_m^{(\delta)}(s)$ es la función vectorial modal eléctrica del modo m en el medio (δ) , y donde m son los diferentes modos TE y TM que se propagan a través de la guía.

Siguiendo con este proceso, y utilizando la ecuación (1.2), podemos reescribir la condición de contorno de la ecuación (1.1) de la siguiente forma:

$$\sum_{m=1}^{\infty} V_m^{(1)} \mathbf{e}_m^{(1)}(s) - \sum_{m=1}^{\infty} V_m^{(2)} \mathbf{e}_m^{(2)}(s) = 0 \quad (1.3)$$

A continuación, se realiza la descomposición del sumatorio infinito de la ecuación (1.3) diferenciando los modos accesibles de los localizados. Es importante aclarar en este punto la diferencia entre modos accesibles y localizados. Los modos accesibles son aquellos que contribuyen al intercambio de energía entre discontinuidades cercanas y, por ello, quedarán representados en la red equivalente, pudiendo ser de gran interés para la concatenación con otras discontinuidades. Por otro lado, los modos localizados son aquellos que almacenan energía en la proximidad de la discontinuidad, quedando cargados con su impedancia modal característica (no intercambian energías con las discontinuidades cercanas). Aprovechando además, que el medio 1 ($\delta = 1$) y el medio 2 ($\delta = 2$) son iguales y la discontinuidad es de espesor nulo se puede asumir que:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_m^{(1)}(s) = \mathbf{e}_m^{(2)}(s) = \mathbf{e}_m(s) \\ V_m^{(1)} = V_m^{(2)} = V_m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Condición de simetría}$$

Por consiguiente, aplicando esta estrategia a la ecuación (1.3) se obtiene,

$$\sum_{n=1}^N V_n \mathbf{e}_n(s) = \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \bar{I}_m \mathbf{e}_m(s) \quad (1.4)$$

donde N es el número de modos accesibles en la red equivalente (el cual estamos considerando que es igual en cada región), \bar{I}_m es la corriente total modal en la interfaz, donde $\bar{I}_m = I_m^{(1)} - I_m^{(2)}$ siendo $I_m^{(1)}$ e $I_m^{(2)}$ la corriente modal del modo m en el medio 1 y medio 2 respectivamente, y Z_m^T es la impedancia total modal, donde $Z_m^T = Z_m^{(1)} || Z_m^{(2)}$ siendo $Z_m^{(1)}$ y $Z_m^{(2)}$ la impedancia modal del modo m en el medio 1 y 2 respectivamente.

La red equivalente equivalente, de acuerdo a la formulación desarrollada es la que se muestra en la Figura 1.2:

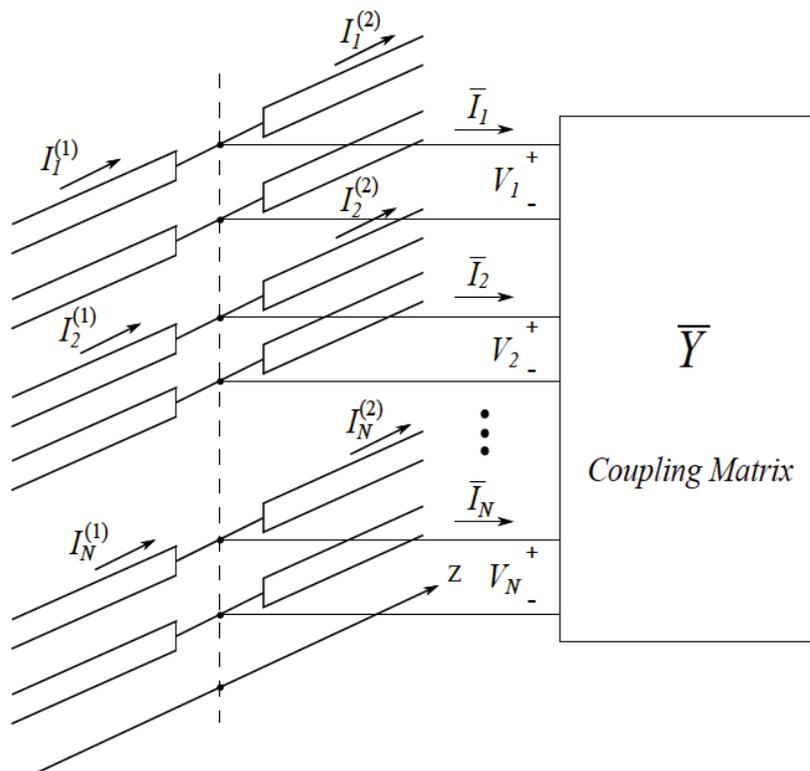


Figura 1.2: Red Multimodo Equivalente (con matriz generalizada de admitancias) para el caso bajo estudio.

Como se puede apreciar en la imagen, los modos accesibles quedan modelados usando su equivalente en líneas de transmisión (donde la impedancia característica de la línea y la constante de propagación se corresponde con la del modo en ese medio). A su vez, la discontinuidad planar situada entre las dos regiones queda caracterizada mediante una matriz de acoplamientos de admitancia $\bar{\mathbf{Y}}$.

Es conveniente resaltar, que en la Figura 1.2. solo se dibujan los modos accesibles que son los que se tendrán en cuenta para el cálculo de los parámetros de dispersión (parámetros S), mientras que los modos localizados se han cargado con su impedancia modal característica. Otro aspecto a destacar en esta imagen, es que no hay puertos en el plano transversal, ya que el primer modo será la excitación.

El siguiente paso para el desarrollo de esta formulación, es buscar una relación entre la corriente modal (\bar{I}_m) y el campo magnético en el parche metálico de la interfaz. Dicha relación es,

$$\bar{I}_m = \int_{obs} [z_0 \times (\mathbf{H}_t^{(1)}(s') - \mathbf{H}_t^{(2)}(s'))] \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (1.5)$$

siendo $\mathbf{H}_t^{(\delta)}$ el campo magnético en el parche metálico. Es importante mencionar, que la integral se extiende a lo largo del parche metálico, por lo que “obs” se refiere a la superficie de dicho parche de dimensiones $a_{obs} \times b_{obs}$ (ver Figura 1.1).

Como la corriente modal (\bar{I}_m) es aún desconocida, se sustituye la ecuación (1.5) en la ecuación (1.4), quedando así la siguiente expresión:

$$\sum_{n=1}^N V_n \mathbf{e}_n(s) = \int_{obs} (z_0 \times (\mathbf{H}_t^{(1)}(s') - \mathbf{H}_t^{(2)}(s'))) \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (1.6)$$

Debido a la linealidad del problema, el campo magnético desconocido en el obstáculo puede ser expandido en un sumatorio de las corrientes eléctricas parciales (\mathbf{N}_n) incluidas en el parche metálico.

$$[z_0 \times (\mathbf{H}_t^{(1)}(s') - \mathbf{H}_t^{(2)}(s'))] = \sum_{n=1}^N V_n \mathbf{N}_n(s') \quad (1.7)$$

En esta ecuación podemos ver un nuevo término (\mathbf{N}_n), que representa las corrientes eléctricas inducidas en el parche metálico.

A continuación, se procede a sustituir la ecuación (1.7) en la ecuación (1.6), para obtener la ecuación integral fundamental del problema:

$$\sum_{n=1}^N V_n \mathbf{e}_n(s) = \sum_{n=1}^N V_n \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (1.8)$$

De esta ecuación, se puede deducir, por identificación de términos la siguiente ecuación integral,

$$\mathbf{e}_n(s) = \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (1.9)$$

donde el kernel de la ecuación integral es:

$$\mathbf{K}(s, s') = \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') \quad (1.10)$$

En siguiente lugar, haciendo uso de las ecuaciones (1.5) y (1.7) se procede a completar la formulación escribiendo las corrientes modales en función de la tensión modal.

$$\bar{I}_m = \sum_{n=1}^N Y_{m,n} V_n \quad (1.11)$$

donde $Y_{m,n}$ son los elementos de la matriz de admitancias de acoplo que se buscan.

Continuando con el desarrollo de la ecuación (1.11), la expresión extendida de \bar{I}_m pasa a ser:

$$\bar{I}_m = \int_{obs} [z_0 \times (\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)})(s')] \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' = \sum_{n=1}^N V_n \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (1.12)$$

Por identificación de términos con la ecuación (1.11) se puede ver la expresión necesaria para construir la matriz de acoplamiento de admitancia ($\bar{\mathbf{Y}}$):

$$Y_{m,n} = \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (1.13)$$

Una vez calculados los elementos con ayuda de la ecuación (1.13), la matriz de acoplamiento de admitancia ($\bar{\mathbf{Y}}$) quedaría definida del siguiente modo:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & \dots & Y_{1,N} \\ \vdots & \cdot & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ Y_{M,1} & Y_{M,2} & \dots & Y_{M,N} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Para poder resolver esta matriz de acoplamientos de admitancia, aún se necesita conocer el valor de $\mathbf{N}_n(s')$, que se calcula aplicando el Método de los Momentos (MoM) junto con el procedimiento de Galerking [4]. Para ello, se expande la función $\mathbf{N}_n(s')$ como el siguiente sumatorio de funciones base,

$$\mathbf{N}_n(s') = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} \mathbf{e}_k^b(s') \quad (1.15)$$

donde N_b es el número de funciones base utilizadas en el procedimiento del MoM y $\alpha_{n,k}$ son los coeficientes todavía desconocidos. Hay que resaltar, que en este caso particular, las funciones de base son iguales a las funciones de test ($\mathbf{e}_k^b = \mathbf{e}_i^b$). Por otro lado, no hay que confundir estas funciones de test y base, con \mathbf{e}_m que son las funciones vectoriales eléctricas correspondientes a los modos de la guía rectangular.

Utilizando la expansión de la ecuación (1.15) en la ecuación (1.9), y posteriormente multiplicando por las funciones de test (\mathbf{e}_i) e integrando a ambos lados de la igualdad, se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \mathbf{e}_n(s) ds = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (1.16)$$

La ecuación (1.16) puede abreviarse del siguiente modo,

$$C_{i,n} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m} C_{i,m} \quad (1.17)$$

donde las integrales de acoplo son los siguientes términos:

$$C_{i,n} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \cdot \mathbf{e}_n(s) ds \quad (1.18)$$

$$C_{k,m} = \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (1.19)$$

$$C_{i,m} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds \quad (1.20)$$

En el caso de tener parches metálicos rectangulares en la discontinuidad, las funciones de test y base utilizadas en el MoM, serían las funciones vectoriales modales correspondientes a los modos de los parches rectangulares con paredes magnéticas. En el caso que se estudiará este proyecto, todos los parches metálicos tendrán forma rectangular (aunque las dimensiones si que serán arbitrarias), de modo que las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20) se podrán calcular de forma analítica. Esta resolución se encuentra detallada en el Apéndice A.

Resueltas las integrales de acoplo y la ecuación integral, ya es posible construir la matriz de acoplamientos de admitancia (\bar{Y}) a partir de la siguiente expresión,

$$Y_{m,n} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} C_{k,m} \quad (1.21)$$

donde $C_{k,m}$ es la integral definida en la ecuación (1.19).

1.2. Obtención de los parámetros S a partir de la formulación MEN

A continuación, se calcularán los parámetros S cuando el modo fundamental es la excitación y no tenemos ningún puerto que excite el parche metálico de la interfaz. Es decir, la excitación de la guía será el primer modo accesible. En la Figura 1.3 se presenta una guía de onda rectangular con un parche metálico en la intersección (rectangular también) y de espesor nulo. Este tipo de estructuras pero con dimensiones arbitrarias pero tanto de la guía de onda como del parche metálico de la interfaz será posible analizarlas gracias a la formulación previamente descrita.

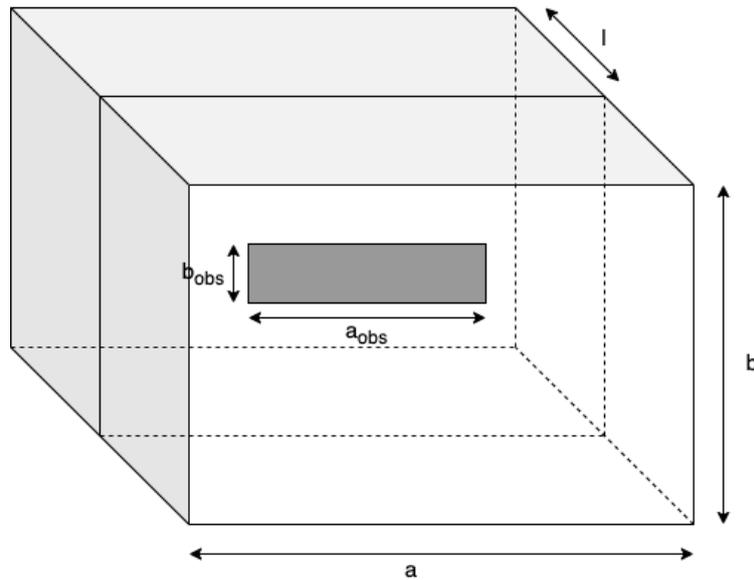


Figura 1.3: Guía de onda con parche metálico de espesor nulo en la intersección.

Como se ha comentado previamente, para analizar una estructura de este tipo (Figura 1.3) se utilizará la formulación de Red Multimodo Equivalente descrita en la sección 1.1. Una vez calculada la matriz de acoplamientos de admitancia, se planteará un sistema de ecuaciones en el que aparezcan los términos de tensiones y corrientes modales correspondientes a los modos accesibles de la guía. Con este sistema se podrá obtener

la admitancia de entrada, y posteriormente los parámetros de dispersión (S).

En la Figura 1.4 se puede observar la red equivalente de la estructura de la Figura 1.3 cuando el primer modo accesible es la excitación.

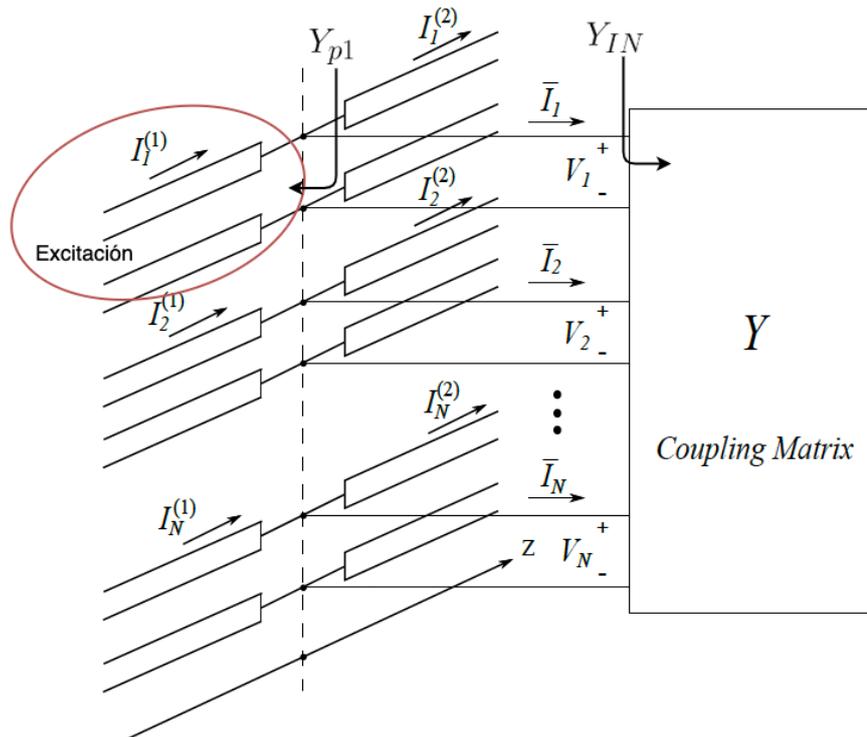


Figura 1.4: Red Multimodo Equivalente de la estructura de la Figura 1.3 donde el modo 1 del medio 1 es la excitación del problema.

En primer lugar, antes incluso de plantear el sistema de ecuaciones correspondiente al cálculo de los parámetros S, hay que hacer una aclaración. El primer modo accesible del medio 1 será la excitación (como se puede apreciar en la Figura 1.4), y por tanto, se corresponderá con el puerto 1. El puerto 2 será el primer modo accesible del medio 2.

Comenzaremos el cálculo de los parámetros S planteando un sistema de ecuaciones que relacionan las tensiones y corrientes modales totales, de forma que podamos obtener la impedancia de entrada y la transimpedancia.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{I}_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \dots + Y_{1N}V_N \\ \bar{I}_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \dots + Y_{2N}V_N \\ \vdots \\ \bar{I}_N = Y_{N1}V_1 + Y_{N2}V_2 + \dots + Y_{NN}V_N \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sistema de ecuaciones} \quad (1.22)$$

Dicho sistema se obtiene del desarrollo de la ecuación (1.11) y la matriz \bar{Y} de la ecuación (1.14). A continuación, aplicaremos unas relaciones al sistema que se obtienen de ver el sentido de las corrientes en la Figura 1.4 y de cargar los modos accesibles de cada medio con su admitancia característica (a excepción del modo 1). Las relaciones a aplicar son:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{I}_n = -V_n Y_{pn} \\ Y_{pn} = Y_n^{(1)} || Y_n^{(2)} = Y_n^{(1)} + Y_n^{(2)} \end{array} \right\} \quad (1.23)$$

Tras aplicar las relaciones de la ecuación (1.23) en el sistema planteado en (1.22), el resultado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{I}_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \dots + Y_{1N}V_N \\ 0 = Y_{21}V_1 + (Y_{22} + Y_{p2})V_2 + \dots + Y_{2N}V_N \\ \vdots \\ 0 = Y_{N1}V_1 + Y_{N2}V_2 + \dots + (Y_{NN} + Y_{pn})V_N \end{array} \right\} \quad (1.24)$$

Este sistema puede escribirse de forma matricial, separando las admitancias totales de los modos (Y_{pn}) y las admitancias de la matriz de acoplo. Esta forma de presentarlo es interesante ya que se puede apreciar en dos matrices diferenciadas los diferentes elementos que intervienen en este análisis, que son el número de modos accesibles y el parche metálico de la interfaz.

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y_{pN} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Utilizando \bar{I}_1 como excitación, el sistema puede escribirse de forma que el vector de incógnitas sean las tensiones modales entre la corriente \bar{I}_1 , donde este vector columna representa el vector de transimpedancias que es necesario para la obtención de los parámetros S.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Y_{pN} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{V_1}{I_1} \\ \frac{V_2}{I_1} \\ \vdots \\ \frac{V_N}{I_1} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

De la resolución de este sistema se tomará el primer valor del vector de incógnitas ($\frac{V_1}{I_1} = Z_{IN}$), el cual se necesitará a continuación. Por tanto, $Y_{IN} = \frac{1}{Z_{IN}}$.

Siguiendo con la resolución, una vez que ya se ha calculado la admitancia de entrada (Y_{IN}), el problema se simplifica a un circuito de dos puertos, en el cual se plantean las ondas de potencia ordinarias (ver Figura 1.5) para obtener los parámetros S de forma sencilla.

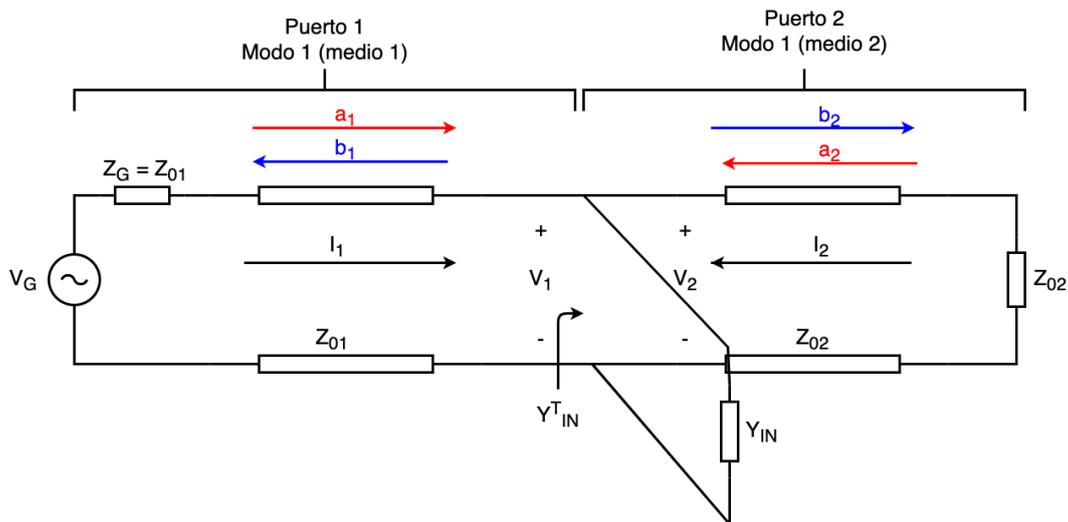


Figura 1.5: Circuito simplificado de 2 puertos.

En el circuito planteado en la Figura 1.5, la impedancia característica de la línea de transmisión 1 (Z_{01}) es la impedancia característica modal del modo 1 en el medio (1), y Z_{02} es la impedancia característica modal del modo 1 en el medio (2). También se observa que $V_1 = V_2$ en la Figura 1.5 y se corresponde con $V_1^{(1)} = V_1^{(2)}$ de la Figura 1.4. Además vemos que en este problema equivalente I_1 es igual a $I_1^{(1)}$ mientras que $I_2 = -I_2^{(2)}$.

En primer lugar, se obtiene el parámetro S_{11} del siguiente modo,

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{V_1 - Z_{01}I_1}{V_1 + Z_{01}I_1} = \frac{1 - Z_{01}Y_{IN}^T}{1 + Z_{01}Y_{IN}^T} \quad (1.27)$$

donde Y_{IN}^T se obtiene del paralelo de Z_{02} con Y_{IN} como se puede apreciar en el circuito de la Figura 1.5. Por tanto, la expresión queda:

$$Y_{IN}^T = Y_{IN} + Y_{02} \quad (1.28)$$

donde $Y_{02} = \frac{1}{Z_{02}}$.

En la ecuación (1.28), Y_{IN} es el valor calculado del sistema planteado en (1.26). En segundo lugar, se obtiene el parámetro S_{21} del siguiente modo:

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} |_{a_2=0} = \frac{V_2 - Z_{02}I_2}{V_1 + Z_{01}I_1} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \frac{I_2}{V_1} \frac{V_2 - Z_{02}}{1 + Z_{01}Y_{IN}^T} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = Y_{trans}^T \frac{-2Z_{02}}{1 + Z_{01}Y_{IN}^T} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad (1.29)$$

donde Y_{tran}^T se puede calcular en función de Y_{IN} de la siguiente forma:

$$Y_{tran} = \frac{I_2}{V_1} \quad (1.30)$$

donde $\frac{\bar{I}_1}{V_1} = \frac{I_1 + I_2}{V_1} = Y_{IN}^T + Y_{tran}^T$

$$Y_{tran}^T = Y_{IN} - Y_{IN}^T \quad (1.31)$$

1.3. Conclusiones

Como conclusión de este capítulo, para analizar la estructura planteada en la Figura 1.1 a través de sus parámetros S, el primer paso es obtener la Red Multimodo Equivalente de la forma que se ha descrito en la sección 1.1, de modo que el parche metálico rectangular de la discontinuidad quede caracterizado por la matriz de acoplamiento de admitancias. En siguiente lugar, habría que calcular los parámetros S como se ha visto en la sección 1.2.

Además, con el fin de validar el estudio teórico desarrollado a lo largo de este capítulo, se ha desarrollado en MATLAB el código correspondiente para analizar este tipo de estructuras descritas con dicha formulación. Cada uno de los ejemplos que se presentarán en el Capítulo 3, en el cual se han utilizado guías comerciales como una WR-90 y WR-75, han sido comparados con ANSYS HFSS y FEST3D [2], [8] para así poder validar la formulación y la programación realizada en MATLAB.

Capítulo 2

Extensión de la formulación MEN para excitación con puertos laterales

A lo largo de este capítulo se va a desarrollar la formulación de Red Multimodo Equivalente cuando se tiene una excitación en la interfaz metálica, la cual se utiliza para el análisis de una discontinuidad como la que se muestra en la Figura 2.1. La discontinuidad que se va a estudiar consiste en un parche metálico de dimensiones $a_{obs} \times b_{obs}$ y unas dimensiones de la excitación ($\Delta x \times \Delta y$) situada en la sección transversal de una guía rectangular ($a \times b$). Este parche metálico tiene un espesor nulo. El desarrollo teórico se realizará imponiendo las condiciones de contorno sobre el campo eléctrico en dicha discontinuidad. Esta formulación permitirá analizar circuitos microstrip [6]. En la sección 3.3 del Capítulo 3 se mostrará el análisis de un circuito microstrip a partir de de esta formulación.

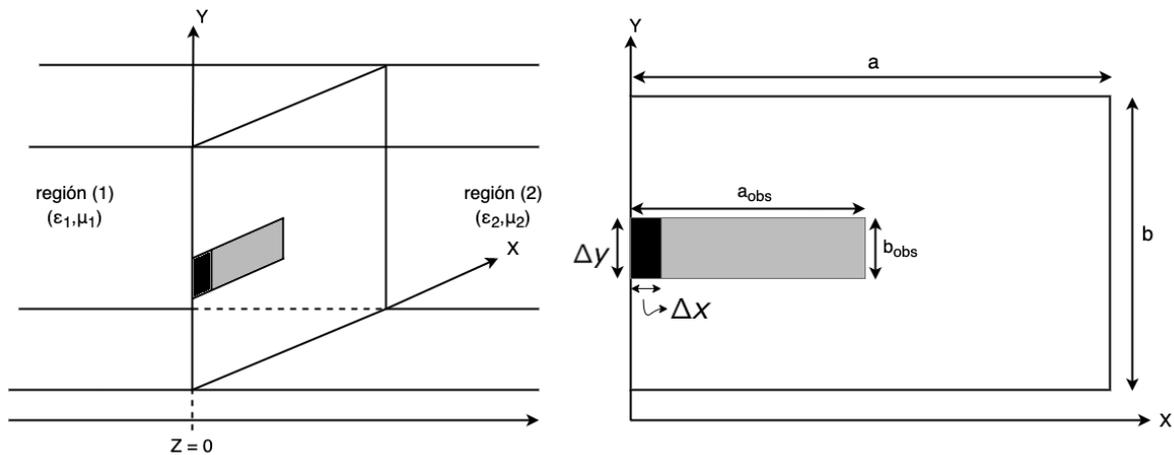


Figura 2.1: Guía de onda de dimensiones $(a \times b)$ con parche metálico en la interfaz de dimensiones $(a_{obs} \times b_{obs})$ y puerto lateral de dimensiones $(\Delta x \times \Delta y)$.

2.1. Desarrollo matemático de la extensión de Red Multimodo Equivalente

Antes de comenzar con el desarrollo destacar que por simplificación utilizaremos solo un puerto, aunque en el Apéndice B se entiende el procedimiento cuando hay más de uno.

En primer lugar, se define el campo eléctrico de excitación $\bar{\mathbf{E}}$ como un pulso de tensión constante V_0 y un ancho determinado. La expresión de dicho pulso es,

$$\mathbf{E}_{exc}(s) = V_0 \frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

donde (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del pulso, Δx y Δy son los anchos del pulso, $s = (x, y)$ indica un punto de la discontinuidad de la guía de onda y \mathbf{x}_0 es un vector unitario en la dirección del eje x que indica la dirección del campo eléctrico de excitación.

A continuación, se imponen las condiciones de contorno sobre la componente tangencial del campo eléctrico en la discontinuidad (donde hay que incluir la contribución del pulso) situada en $z = 0$, como se puede apreciar en la Figura 2.1. Una vez se impone la continuidad del eléctrico en el parche se obtiene,

$$\mathbf{E}_t(s) + \mathbf{E}_{exc}(s) = 0 \quad (2.2)$$

En tercer lugar, se pretende escribir el campo eléctrico transversal total en función de los infinitos modos que presenta la guía bajo estudio del mismo modo que se hizo en el Capítulo 1. Además, como la región (1) es igual a la región (2) y la discontinuidad es de espesor nulo, la ecuación (2.2) quedará del siguiente modo,

$$\sum_{m=1}^{\infty} V_m \mathbf{e}_m(s) + V_0 \frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 = 0 \quad (2.3)$$

donde \mathbf{e}_m es la función vector modal eléctrica, V_m es la tensión modal total en la interfaz y m se refiere a todos los modos TE y TM de la guía.

A continuación, se separan los modos localizados de los modos accesibles de la ecuación (2.3). El resultado de esta transformación es,

$$\sum_{n=1}^N V_n \mathbf{e}_n(s) + V_0 \frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 = \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \bar{I}_m \mathbf{e}_m(s) \quad (2.4)$$

donde N es el número de modos accesibles en la red equivalente, \bar{I}_m es la corriente total modal en la interfaz ($\bar{I}_m = I_m^{(1)} - I_m^{(2)}$) y Z_m^T es la impedancia total modal, donde $Z_m^T = Z_m^{(1)} || Z_m^{(2)}$. En la Figura (1.4) se pueden ver como están definidas las corrientes y tensiones modales.

Continuando con el desarrollo, ahora es necesario buscar la relación entre la corriente modal (\bar{I}_m) y el campo magnético en la interfaz. La relación entre ambos parámetros es,

$$\bar{I}_m = \int_{obs} [z_0 \times (\mathbf{H}_t^{(1)}(s') - \mathbf{H}_t^{(2)}(s'))] \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (2.5)$$

siendo $\mathbf{H}_t^{(\delta)}$ el campo magnético en el parche metálico. La integral se extiende a lo largo del parche metálico, por lo que *obs* se refiere a la superficie de dicho parche de dimensiones $a_{obs} \times b_{obs}$ (ver Figura 2.1).

Debido a la linealidad del problema, el campo magnético desconocido en el obstáculo puede ser expandido en un sumatorio de las corrientes eléctricas parciales (\mathbf{N}_n y \mathbf{N}_0),

$$[z_0 \times (\mathbf{H}_t^{(1)}(s') - \mathbf{H}_t^{(2)}(s'))] = \sum_{n=1}^N V_n \mathbf{N}_n(s') + V_0 \mathbf{N}_0(s') \quad (2.6)$$

donde \mathbf{N}_0 y \mathbf{N}_n son las funciones todavía desconocidas del problema y representan las corrientes eléctricas inducidas en el parche metálico.

Ahora, se introduce la ecuación (2.6) en (2.5) obteniendo la siguiente expresión de la corriente modal,

$$\bar{I}_m = \int_{obs} \left(\sum_{n=1}^N V_n \mathbf{N}_n(s') + V_0 \mathbf{N}_0(s') \right) \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (2.7)$$

Si además, introducimos la ecuación (2.7) en (2.4), se pueden obtener las ecuaciones integrales fundamentales del problema, siendo estas ecuaciones las que se muestran a continuación,

$$\mathbf{e}_n(s) = \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 = \int_{obs} \mathbf{N}_0(s') \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (2.9)$$

donde el kernel de las ecuaciones integrales es el termino expresado como un sumatorio de los infinitos modos.

$$\mathbf{K}(s, s') = \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (2.10)$$

Para completar la formulación se escriben las corrientes modales en función de la tensión modal.

$$I_0 = Y_{0,0}V_0 + \sum_{n=1}^N Y_{0,n}V_n \quad (2.11)$$

$$\bar{I}_m = Y_{m,0}V_0 + \sum_{n=1}^N Y_{m,n}V_n \quad (2.12)$$

De las ecuaciones (2.11) y (2.12) se pueden identificar los elementos de la matriz generalizada de acoplamiento de admitancia. Las expresiones de estos elementos son:

$$Y_{0,0} = \int_{obs} \mathbf{N}_0(s') \cdot \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x'-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y'-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 \right] ds' \quad (2.13)$$

$$Y_{0,n} = \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \cdot \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x'-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y'-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 \right] ds' \quad (2.14)$$

$$Y_{m,0} = \int_{obs} \mathbf{N}_0(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (2.15)$$

$$Y_{m,n} = \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (2.16)$$

Una vez se conocen los elementos, la matriz generalizada de acoplamiento de admitancias queda del siguiente modo:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} Y_{0,0} & Y_{0,1} & \dots & Y_{0,N} \\ Y_{1,0} & Y_{1,1} & \dots & Y_{1,N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Y_{M,0} & Y_{M,1} & \dots & Y_{M,N} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Destacar que la primera fila y la primera columna de la matriz hacen referencia a la interacción del pulso con los diferentes modos accesibles.

A continuación, en la Figura 2.2 se puede observar la red equivalente de una estructura como la que aparece en la Figura 2.1.

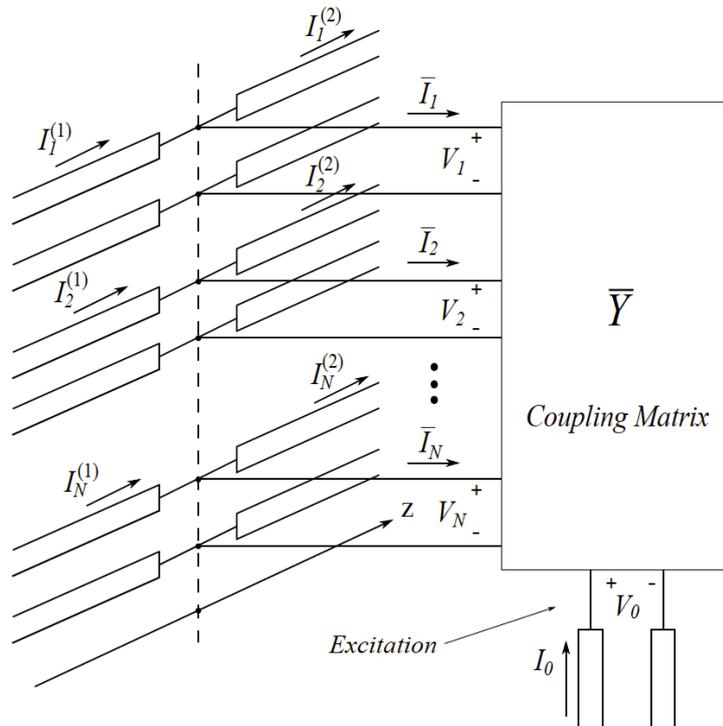


Figura 2.2: Red Multimodo Equivalente de la estructura de la Figura 2.1.

Para poder resolver la matriz de acoplamientos de admitancia de la ecuaciones (2.13) a (2.16) se necesita expandir las funciones no conocidas (\mathbf{N}_0 y \mathbf{N}_n) aplicando el Método de los Momentos (MoM) junto con el procedimiento de Galerkin [4]. Dichas funciones, se expanden en el siguiente sumatorio de funciones de base,

$$\mathbf{N}_0(s') = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k} \mathbf{e}_k^b(s') \quad (2.18)$$

$$\mathbf{N}_n(s') = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} \mathbf{e}_k^b(s') \quad (2.19)$$

donde N_b es el número de funciones de base utilizadas en el MoM y $\alpha_{n,k}$ y $\alpha_{0,k}$ son los coeficientes todavía desconocidos. Del mismo modo que en el Capítulo 1, las funciones de base son iguales a las funciones de test ($\mathbf{e}_k^b = \mathbf{e}_i^b$).

Introduciendo las ecuaciones (2.18) y (2.19) en las ecuaciones (2.9) y (2.8) respectivamente, se pueden reescribir las ecuaciones integrales fundamentales del problema del siguiente modo,

$$C_{i,n} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m} C_{i,m} \quad (2.20)$$

$$C_{i,0} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m} C_{i,m} \quad (2.21)$$

donde las integrales de acoplo son los siguientes términos:

$$C_{k,m} = \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (2.22)$$

$$C_{i,m} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds \quad (2.23)$$

$$C_{i,n} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \cdot \mathbf{e}_n(s) ds \quad (2.24)$$

$$C_{i,0} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \cdot \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] \quad (2.25)$$

Los términos de las ecuaciones (2.22) y (2.23) hacen referencia al acoplamiento entre los modos localizados de la región (1) y (2) y los modos del obstáculo utilizados como funciones de test y de base. La ecuación (2.24) hace referencia al acoplamiento entre los modos accesibles de las regiones (1) y (2) y los modos del obstáculo utilizados como funciones de test. Por último, la ecuación (2.25) representa el acoplamiento entre las funciones de test y la excitación del pulso.

Finalmente, los elementos de la matriz generalizada de acoplamientos de admitancia ($\bar{\mathbf{Y}}$) pueden ser calculados como:

$$Y_{0,0} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k} C_{k,0} \quad (2.26)$$

$$Y_{0,n} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} C_{k,0} \quad (2.27)$$

$$Y_{m,0} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k} C_{k,m} \quad (2.28)$$

$$Y_{m,n} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k} C_{k,m} \quad (2.29)$$

2.2. Obtención de los parámetros S a partir de la extensión de la Formulación MEN con puertos laterales

Como el objetivo de este proyecto es aplicar esta formulación a circuitos microstrips de bajas pérdidas, se comenzará planteando como será dicha estructura. El tipo de estructura a analizar es el que se muestra en la Figura 2.3.

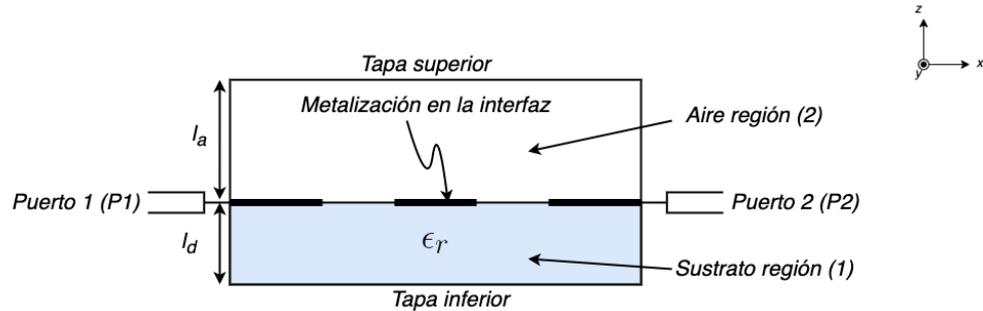


Figura 2.3: Esquemático del circuito impreso microstrip excitado en la interfaz por dos conectores coaxiales.

Como se puede ver en la Figura 2.3 el circuito de la interfaz metálica (en el caso de este proyecto serán filtros cuyas tiras tendrán formas rectangulares de tamaño arbitrario) está encapsulado en una estructura metálica. Este aspecto es de gran importancia, ya que para modelar los modos de la guía (tanto accesibles como localizados) habrá que tener en cuenta estas paredes metálicas. En la Figura 2.4 se puede apreciar el equivalente en líneas de transmisión de la estructura mostrada en la Figura 2.3, y se puede apreciar como los modos accesibles (que son los únicos que se representan en este esquema por simplicidad a la hora de calcular los parámetros S) acaban en cortocircuito, que es la forma de modelar esas paredes metálicas (superior e inferior) de la estructura. Por otro lado, solo tendremos en cuenta un modo accesible ya que al no existir más discontinuidades y al estar los modos localizados cargados con su impedancia en cortocircuito, no es necesario considerar más modos.

A partir del esquemático mostrado en la Figura 2.4 se procede al cálculo de los parámetros S. En primer lugar, se plantean las ecuaciones de tensión y corriente modales totales, para obtener así, la impedancia de entrada y la transimpedancia.

$$\left. \begin{aligned} I_{p1} &= Y_{p1,p1}V_{p1} + Y_{p1,p2}V_{p2} + Y_{p1,1}V_1 \\ I_{p2} &= Y_{p2,p1}V_{p1} + Y_{p2,p2}V_{p2} + Y_{p2,1}V_1 \\ I_1 &= Y_{1,p1}V_{p1} + Y_{1,p2}V_{p2} + Y_{1,1}V_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Sistema de ecuaciones} \quad (2.30)$$

Del mismo circuito de la Figura 2.4 se pueden obtener las siguientes relaciones circuitales:

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_n &= -V_n Y_n \\ Y_n &= Y_n^{(1)} || Y_n^{(2)} = Y_n^{(1)} + Y_n^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

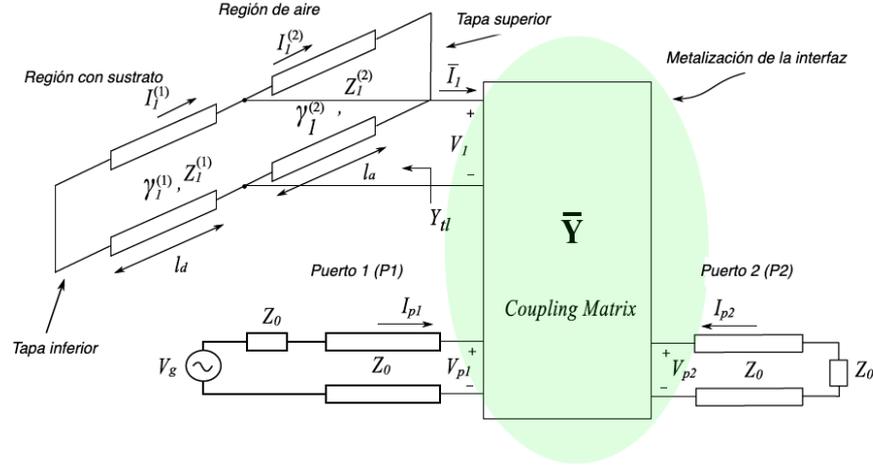


Figura 2.4: Red Multimodo Equivalente del circuito mostrado en la Figura 2.3.

A continuación, se aplican las relaciones de la ecuación (2.31) en el sistema planteado en (2.30),

$$\left. \begin{aligned} I_{p1} &= Y_{p1,p1} V_{p1} + Y_{p1,p2} V_{p2} + Y_{p1,1} V_1 \\ 0 &= Y_{p2,p1} V_{p1} + (Y_{p2,p2} + Y_0) V_{p2} + Y_{p2,1} V_1 \\ 0 &= Y_{1,p1} V_{p1} + Y_{1,p2} V_{p2} + (Y_{1,1} + Y_1) V_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

donde las relaciones de I_{p2} e \bar{I}_1 con la tensión son las siguientes:

$$I_{p2} = -V_{p2} Y_0 \quad (2.33)$$

$$\bar{I}_n = -V_1 Y_1 \quad (2.34)$$

Expresando este sistema en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_{p1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_{p1,p1} & Y_{p1,p2} & Y_{p1,1} \\ Y_{p2,p1} & Y_{p2,p2} & Y_{p2,1} \\ Y_{1,p1} & Y_{1,p2} & Y_{1,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_{p1} \\ V_{p2} \\ V_1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Utilizando la corriente del puerto 1 como excitación, el sistema de (2.35) podrá reescribirse de forma que el último vector columna represente el vector de transimpedancias, que es necesario para la obtención de los parámetros S.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_{p1,p1} & Y_{p1,p2} & Y_{p1,1} \\ Y_{p2,p1} & Y_{p2,p2} & Y_{p2,1} \\ Y_{1,p1} & Y_{1,p2} & Y_{1,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{V_{p1}}{I_{p1}} \\ \frac{V_{p2}}{I_{p1}} \\ \frac{V_1}{I_{p1}} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Una vez resuelto este sistema el primer valor del vector de incógnitas es la impedancia de entrada ($Z_{IN} = \frac{V_{p1}}{I_{p1}}$), y el segundo valor es la transimpedancia ($Z_{trans} = \frac{V_{p2}}{I_{p1}}$). Por último, se pueden calcular los parámetros S del siguiente modo:

$$S_{11} = \frac{Z_{IN} - Z_0}{Z_{IN} + Z_0} \quad (2.37)$$

$$S_{21} = \frac{2Z_{trans}}{Z_{IN} + Z_0} \quad (2.38)$$

2.3. Impedancias complejas en los puertos mediante ondas de potencia generalizadas

En esta sección, se mostrará una técnica de calibración de puertos mediante impedancias complejas y ondas de potencia generalizadas. El objetivo de esta técnica es modelar los parásitos que se forman en conectores coaxiales reales cuando excitan circuitos microstrip. De esta forma, se podrá obtener una caracterización del dispositivo completo (circuito microstrip más los conectores coaxiales utilizados para excitarlo) más exacta.

Para obtener la respuesta del dispositivo bajo estudio es necesario trabajar con ondas de potencia generalizadas, ya que nos permiten tratar impedancias complejas conectadas a los puertos. Este tipo de ondas de potencia se definen: una entrante al circuito que se pretende caracterizar y la otra saliente. La expresión matemática de estas ondas de potencias es,

$$a_k = \frac{V_k + Z_k I_k}{\sqrt{8R_k}} \quad (2.39)$$

$$b_k = \frac{V_k - Z_k^* I_k}{\sqrt{8R_k}} \quad (2.40)$$

donde V_k es la tensión del puerto k , I_k la corriente en el puerto k , Z_k la impedancia del puerto k y R_k es la parte real de la impedancia Z_k .

A continuación, se muestra en la Figura 2.5 una estructura de ejemplo que servirá para presentar cómo se lleva a cabo este proceso de modelar los parásitos que se producen en los conectores coaxiales cuando se conectan a líneas microstrip. Este modelo incluirá impedancias complejas que se obtendrán de haber modelado previamente el conector coaxial como un circuito que incluye una parte resistiva y una parte inductiva

o capacitiva. Es esta parte la que encargará de modelar los parásitos que producen los conectores.

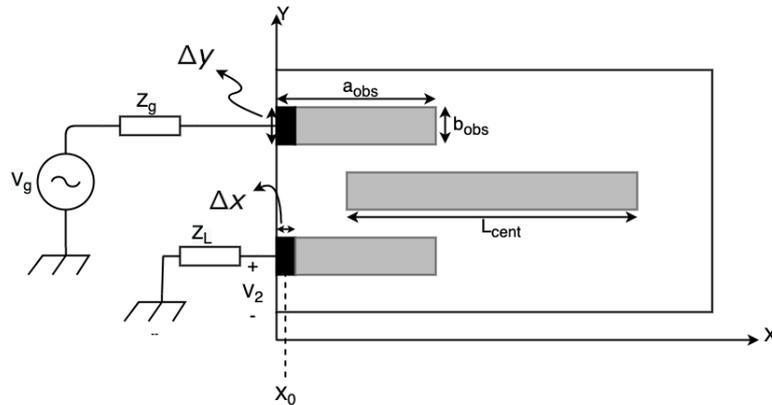


Figura 2.5: Circuito microstrip con las impedancias complejas que modelan los conectores coaxiales de los puertos de entrada y salida.

Como se puede apreciar en la Figura 2.5, la impedancia de entrada y la de salida ahora son complejas ($Z_g = R_g + jX_g$ y $Z_L = R_L + jX_L$). Estas impedancias complejas serán iguales ya que el conector coaxial del puerto de entrada será igual al del puerto de salida. Otro aspecto importante, es que esa impedancia compleja será fruto de modelar los parásitos del conector coaxial como uno de los circuitos que se muestran en la Figura 2.6.

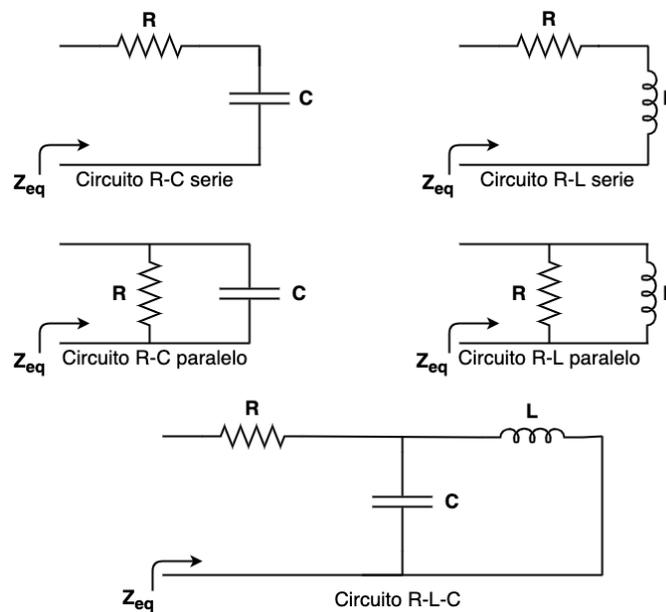


Figura 2.6: Circuitos equivalentes para modelar los parásitos que se producen en el cable coaxial.

En la sección 3.3 del Capítulo 3, se muestra cuál de estos circuitos equivalentes modela mejor los parásitos del conector coaxial utilizado, que para este proyecto ha sido el conector comercial PE4128 de PASTERNAK.

En siguiente lugar, se presentan los cambios que hay en esta nueva situación para obtener la respuesta del circuito, ya que el cálculo es diferente al presentado en la sección 2.2 del Capítulo 2. La primera consideración a tener en cuenta es que la impedancia del generador (Z_g) será igual a la impedancia de carga (Z_L), ya que el conector coaxial utilizado para el puerto de entrada será el mismo que en el puerto de salida. Una vez hechas estas aclaraciones pasamos a la obtención de los parámetros necesarios para obtener la respuesta del circuito bajo estudio. El circuito bajo estudio es igual al mostrado en la Figura 1.5, con la diferencia de que $Z_g = Z_L$, y además, son impedancias complejas.

El primer paso es obtener el coeficiente de reflexión en potencia del siguiente modo,

$$\rho_{P1} = \frac{Z_{IN} - Z_g^*}{Z_{IN} + Z_g} \quad (2.41)$$

donde Z_{IN} es la impedancia de entrada obtenida del sistema (2.36). Una vez obtenido el coeficiente de reflexión en potencia del puerto de entrada, podemos definir las pérdidas de retorno del siguiente modo:

$$RL = |\rho_{P1}|^2 \quad (2.42)$$

En segundo lugar, se obtiene la ganancia de transferencia G_T del siguiente modo,

$$G_T = \left| \frac{b_2}{a_1} \right|^2 = \left| \frac{V_2 - I_2 Z_L^*}{\sqrt{8R_L}} \frac{\sqrt{8R_g}}{V_1 + I_1 Z_g} \right|^2 = \left| \frac{V_2}{I_2} \left(\frac{1 - \frac{I_2}{V_2} Z_L^*}{\frac{V_1}{I_1} + Z_g} \right) \sqrt{\frac{R_g}{R_L}} \right|^2 = \left| Z_{trans} \left(\frac{1 + Y_L Z_L^*}{Z_{IN} + Z_g} \right) \left(\sqrt{\frac{R_g}{R_L}} \right) \right|^2 \quad (2.43)$$

donde Z_{trans} se obtiene del sistema (2.36), y a_1 y b_2 están definidas en las ecuaciones (2.39) y (2.40).

2.4. Conclusiones

Como conclusión de este capítulo, para analizar estructuras como la mostrada en la Figura 2.1, o incluso otras más complejas, como la mostrada en la Figura B.1 del Apéndice B, se necesita obtener la matriz de acoplamientos de admitancia haciendo uso de la formulación de Red Multimodo Equivalente descrita en la sección 2.1. En la sección 2.2 se ha descrito cómo obtener los parámetros S, y en la sección 2.3 se ha realizado un estudio para calibrar los puertos mediante impedancias complejas, de forma que el análisis sea más realista.

Las inclusión de puertos laterales en la formulación de este capítulo es para adaptar la formulación del Capítulo 1 al análisis de circuitos de microondas en tecnología

microstrip. Esta formulación se ha programado en MATLAB y los resultados de la misma quedan presentados en el Capítulo 3. Además, se ha utilizado el software comercial ANSYS HFSS [2] con el fin de validar tanto la formulación como la programación desarrollada en MATLAB.

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo se presentarán los resultados de las formulaciones desarrolladas en los Capítulos 1 y 2. El primer paso para poder realizar esta tarea, es programar dichas formulaciones en MATLAB (además de hacerlo de una forma eficiente para que el análisis sea lo más rápido posible), y posteriormente validarlas con programas comerciales como ANSYS HFSS, CST y FEST3D [2], [3], [8]. Uno de los objetivos es poder validar la formulación y adquirir un conocimiento amplio de la técnica desarrollada, mientras que otro objetivo muy importante es extender esta formulación al análisis de circuitos de microondas en tecnología microstrip.

El capítulo se dividirá en tres secciones. En la primera sección se presentarán los resultados de la formulación desarrollada en el Capítulo 1, en la cual no existen puertos de excitación en la interfaz metálica. Además, esta sección se dividirá en dos subsecciones. En la primera de ellas, se presentarán los resultados de las guías comerciales WR-90 y WR-75 con un parche metálico en una zona interna de la intersección, así como un análisis de convergencia para determinar el valor óptimo de términos en el kernel y poder conseguir una buena convergencia en el análisis de dichas guías. En la segunda subsección, se presentarán los resultados de las guías WR-90 y WR-75 pero esta vez el parche metálico estará situado en la pared $x = 0$ o $x = a$. Además, del mismo modo que en la primera subsección, el número de términos en el kernel vendrá determinado por un análisis de convergencia. Es importante destacar, que para estos casos las funciones vectoriales modales eléctricas de las funciones de base ($\mathbf{e}_k^b(s)$) y test ($\mathbf{e}_i^b(s)$) son diferentes. Esta diferencia dependerá de si algún lado del parche toca alguna pared de la caja o no, ya que si esto sucede tendríamos una condición de pared eléctrica, en lugar de una pared magnética. El uso en cada caso viene detallado en el Apéndice A. Por otra parte, todos estos ejemplos serán validados con FEST3D, ya que emplea una formulación similar basada en la misma técnica, y por tanto, es el programa comercial más adecuado para esta tarea.

En la segunda sección, se presentarán los resultados de la formulación desarrollada en el Capítulo 2, en la cual se introducen puertos de excitación en la interfaz metálica. En

esta sección, se presentarán los ejemplos de una guía WR-90 y WR-75 con dos puertos laterales situados en $x = 0$ y los de una guía con dimensiones arbitrarias la cual presenta dos puertos en $x = 0$ y un resonador interno de geometría rectangular. Los ejemplos de esta sección serán validados con la ayuda de ANSYS HFSS, ya que FEST3D no tiene la opción de simular estructuras con puertos de excitación en el plano transversal. Además, se podrá ver la diferencia de tiempos tan notable entre la formulación desarrollada en MATLAB y la estructura simulada en ANSYS HFSS.

Por último, en la tercera sección se presentará los resultados de una estructura más realista como la presentada en la Figura 2.5. Este análisis consiste en caracterizar mediante impedancias complejas los parásitos de los conectores coaxiales cuando se conectan a las líneas microstrip. En la Figura 2.6 se pueden apreciar diferentes circuitos equivalentes para modelar los parásitos de los conectores, además de que en la sección 3.3 de este mismo capítulo, se verá cual de ellos caracteriza de una forma más aproximada el conector coaxial utilizado. Por otra parte, se medirán los tiempos de cómputo, tanto del análisis de ANSYS HFSS como de MATLAB, ya que un objetivo importante de este proyecto es analizar este tipo de circuitos de forma rápida y eficiente.

3.1. Parámetros S de guías de onda con excitación modal

A continuación, se mostrará la validación de guías de onda comerciales en las cuales no existen puertos de excitación lateral en los parches metálicos de la discontinuidad, sino que la excitación será uno de los modos que se propaga en una de las secciones de la guía de onda. Para ello se mostrará en la subsección 3.1.1 los resultados cuando el parche metálico, de espesor despreciable, se encuentra en una zona interna, y en la subsección 3.1.2 se mostrarán los resultados cuando el parche metálico toca una de las paredes laterales.

3.1.1. Parámetros S de una guía de onda con un parche metálico en un área interna de la interfaz

Como se ha comentado en la presentación de este capítulo, se mostrarán los resultados tanto del proceso de convergencia (para obtener los valores óptimos de los diferentes parámetros numéricos) como del análisis de una guía WR-90 y una guía WR-75. Éstas son guías que pertenecen a la banda SHF (*Super High Frequency*) con un rango de frecuencias de 3-30 GHz. En primer lugar, se mostrarán los resultados del análisis de convergencia de una guía WR-90 que posee en el interior de la discontinuidad un parche metálico de espesor despreciable como el que se muestra en la Figura 3.1, el cual nos permitirá determinar el valor óptimo de términos en el kernel, ahorrando así, tiempo de cómputo en el análisis de la guía. El análisis de convergencia se realizará observando la evolución de los valores de la matriz de acoplamientos de admitancia para diferentes valores del número de modos considerados en el kernel. El valor de los parámetros de convergencia dependerá del tamaño del parche metálico ($a_{obs} \times b_{obs}$) en relación con el tamaño de la caja ($a \times b$). Como en esta simulación el número de modos accesibles es 10, y no es práctico mostrar 100 gráficas con la evolución de cada valor de la matriz de acoplamientos de admitancias, se mostrará el primer y último elemento de la diagonal. Es decir, se mostrarán los parámetros $Y_{1,1}$ (que es el que presenta menores variaciones) y el parámetro $Y_{10,10}$ (que es el que presenta mayores variaciones). En la Figura 3.2 se puede ver la evolución del valor de $Y_{1,1}$ e $Y_{10,10}$ cuando el número de modos en el kernel varía.

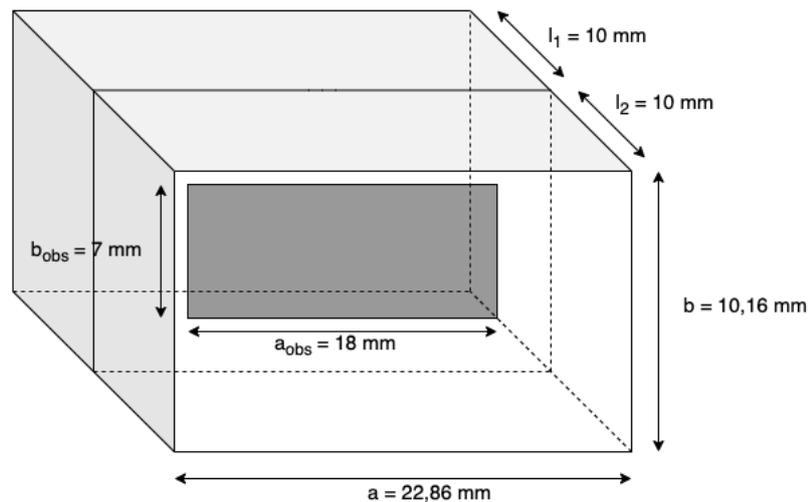


Figura 3.1: Guía de onda comercial WR-90 con parche metálico interno centrado de dimensiones 18×7 mm.

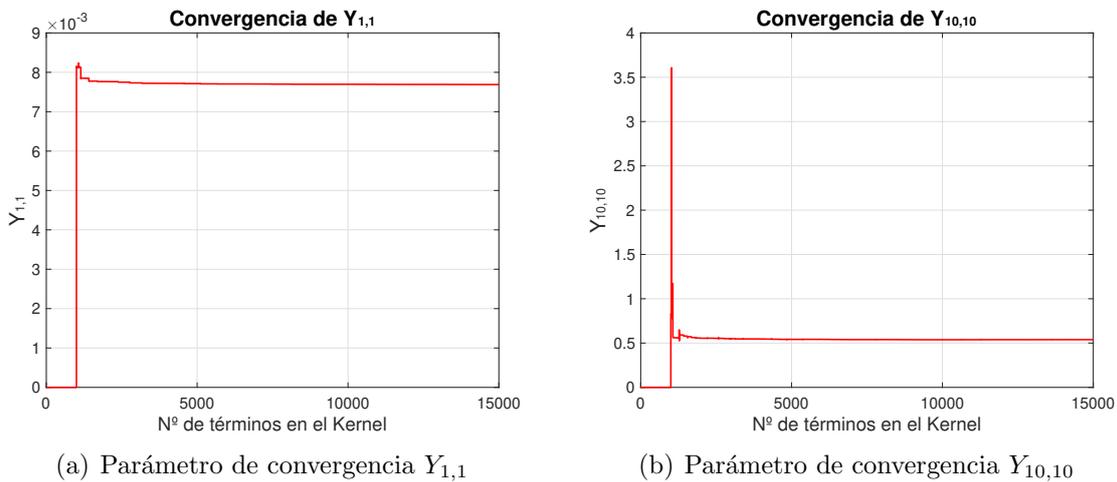


Figura 3.2: Parámetros de convergencia de la estructura presentada en la Figura 3.1 a una frecuencia de 17,5 GHz. Resultados obtenidos con MATLAB.

Una vez realizado el análisis de convergencia, se puede apreciar que el valor óptimo de términos en el kernel es 1000. Posteriormente, se representan los parámetros S de una guía WR-90 (con dimensiones $22,86 \times 10,16$ mm), donde las dimensiones del parche metálico son 18×7 mm, y donde hay que recordar que el primer modo accesible es la excitación. En la Figura 3.3 se pueden ver los parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.1.

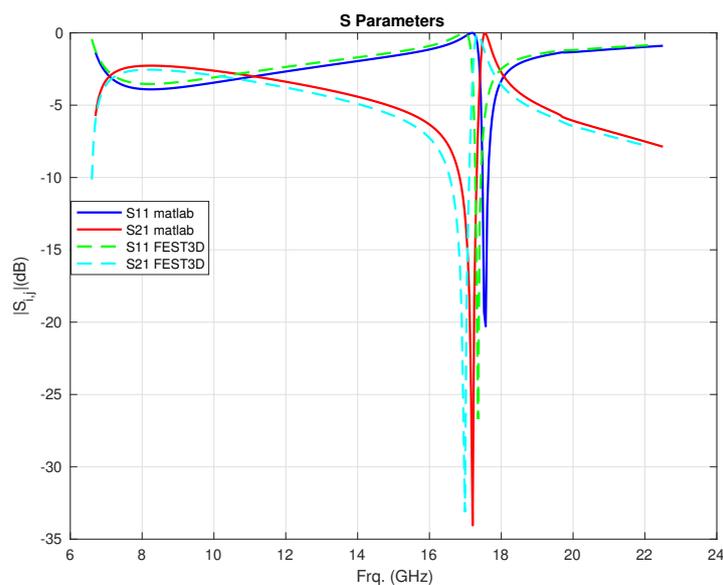


Figura 3.3: Parámetros S de la estructura presentada Figura 3.1. Resultados de MATLAB y FEST3D.

Como se puede apreciar en la Figura 3.3, los resultados ofrecidos por MATLAB son muy parecidos a los obtenidos con FEST3D. El valor de los parámetros de convergencia es el siguiente:

- Número de modos accesibles \Rightarrow 10
- Número de funciones de base \Rightarrow 200
- Número de términos en el kernel \Rightarrow 1000
- Número de puntos en frecuencia \Rightarrow 300

Con el fin de validar esta formulación, se presentarán los resultados de otro ejemplo. En este caso, será una guía WR-75, que presenta unas dimensiones de $19,05 \times 9,525$ mm como la que se muestra en la Figura 3.4. El tamaño del parche metálico interno es de $16 \times 7,5$ mm. Del mismo modo que en el ejemplo anterior, tras un análisis de convergencia, se calculan los parámetros S con un valor de los parámetros de convergencia óptimos. En la Figura 3.5 se pueden ver los parámetros S.

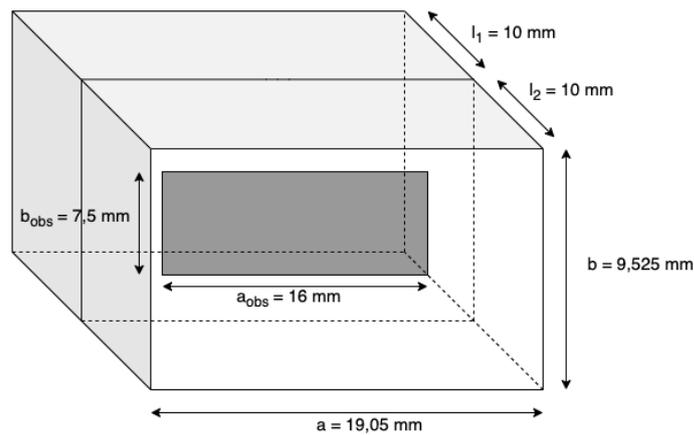


Figura 3.4: Guía de onda comercial WR-75 con parche metálico interno de dimensiones $16 \times 7,5$ mm.

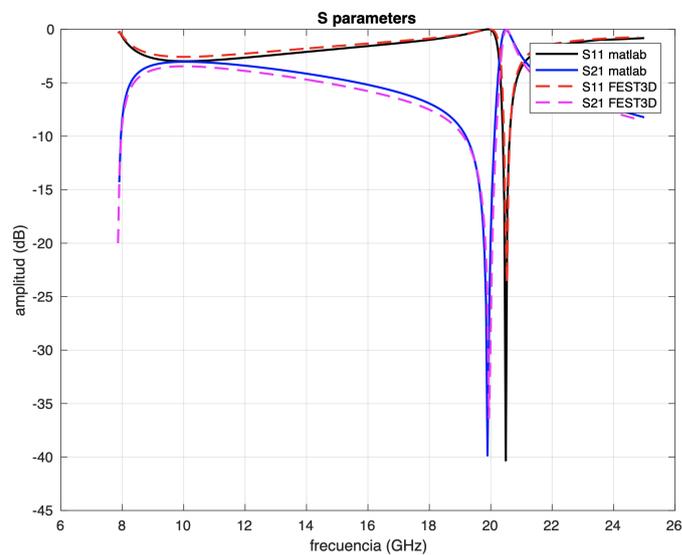


Figura 3.5: Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.4. Resultados de MATLAB y FEST3D.

Como se puede apreciar en la Figura 3.5, los resultados obtenidos con MATLAB presentan un gran parecido a los de FEST3D. Además, podemos ver como esta guía de onda tiene un comportamiento resonante alrededor de los 20 GHz.

El valor de los parámetros de convergencia utilizados para validar la estructura de la Figura 3.4 es:

- Número de modos accesibles $\Rightarrow 10$
- Número de funciones de base $\Rightarrow 100$
- Número de términos en el kernel $\Rightarrow 200$
- Número de puntos en frecuencia $\Rightarrow 250$

3.1.2. Parámetros S de una guía de onda con un parche metálico en $x = 0$ o en $x = a$

En esta subsección se validarán estructuras teóricas como las de la subsección anterior, pero en este caso el parche metálico estará situado en la pared $x = 0$ o $x = a$. En primer lugar, se validará la estructura comercial WR-90 con un parche metálico situado en $x = 0$ de dimensiones $10,16 \times 3$ mm (ver Figura 3.6). En segundo lugar, se realiza un análisis de convergencia para mostrar el valor óptimo de términos en el kernel que se debe utilizar para minimizar el tiempo de análisis. Este resultado se muestra en la Figura 3.7.

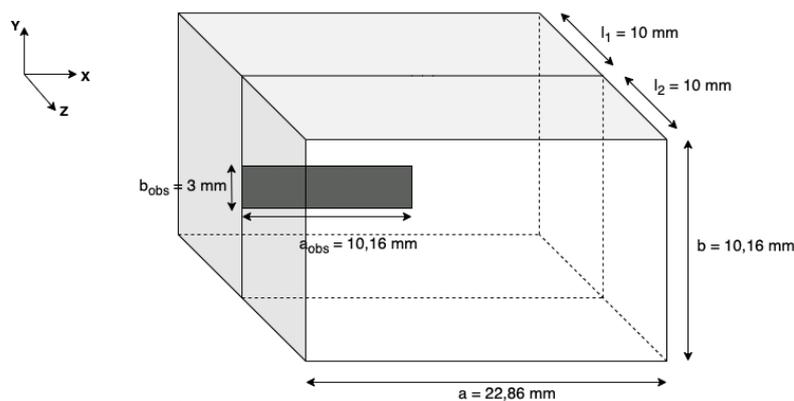


Figura 3.6: Guía de onda comercial WR-90 con parche metálico situado en $x = 0$ y de dimensiones $10,16 \times 3$ mm.

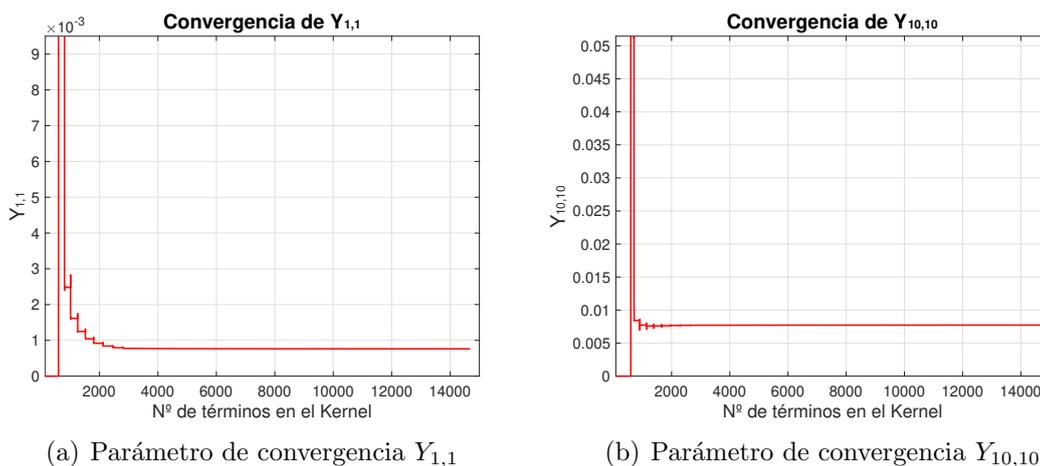


Figura 3.7: Parámetros de convergencia de la estructura presentada en la Figura 3.6. Resultados obtenidos con MATLAB.

Tras realizar el análisis de convergencia de los elementos con mayor y menor variación ($Y_{1,1}$ e $Y_{10,10}$), se puede apreciar que el valor óptimo de número de modos en el kernel es 2000. A continuación, se muestran los parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.6 y con el kernel óptimo.

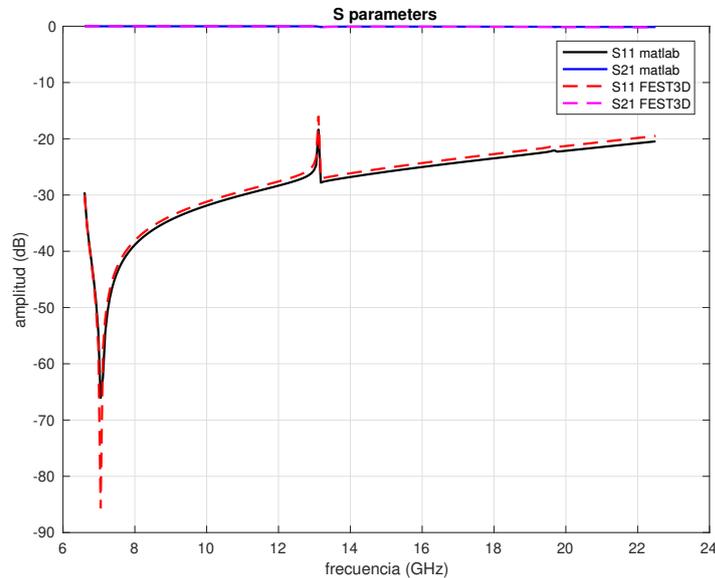


Figura 3.8: Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.6. Resultados de MATLAB y FEST3D.

Como se puede ver en la Figura 3.8, la mayor parte de la potencia se refleja y una cantidad muy pequeña de potencia es la que se transmite.

El valor de los parámetros de convergencia para esta estructura es:

- Número de modos accesibles \Rightarrow 10
- Número de funciones de base \Rightarrow 400
- Número de términos en el kernel \Rightarrow 2000
- Número de puntos en frecuencia \Rightarrow 350

El siguiente ejemplo a validar, será la guía de onda comercial WR-75 con un parche metálico de dimensiones 10×3 mm y situado en $x = 0$ (ver Figura 3.9). Del mismo modo que en el ejemplo anterior, tras un análisis de convergencia para obtener el valor óptimo del kernel, se procede al análisis de la estructura y su correspondiente obtención de los parámetros S.

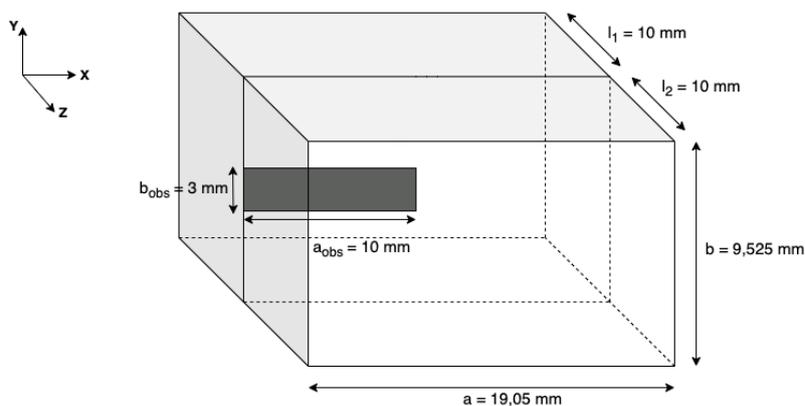


Figura 3.9: Guía de onda comercial WR-75 con parche metálico situado en $x = 0$ y de dimensiones 10×3 mm.

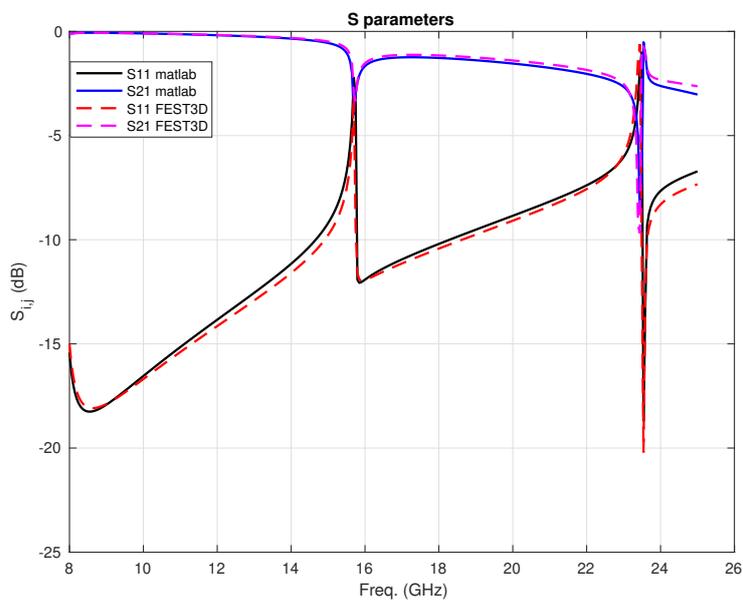


Figura 3.10: Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.9. Resultados de MATLAB y FEST3D.

En la Figura 3.10, se puede comprobar que los parámetros S tanto de MATLAB como de FEST3D son muy parecidos. Otro aspecto a destacar, es el comportamiento

resonante de esta estructura, presentado resonancias entorno a los 15,9 GHz y a los 23,6 GHz.

El valor de los parámetros de convergencia utilizados en la validación de este ejemplo es:

- Número de modos accesibles $\Rightarrow 10$
- Número de funciones de base $\Rightarrow 400$
- Número de términos en el kernel $\Rightarrow 2000$
- Número de puntos en frecuencia $\Rightarrow 350$

A continuación, se procederá a la validación de las guías comerciales con un parche metálico en $x = a$. En primer lugar, se presentará la guía WR-90 con un parche metálico de dimensiones 8×3 mm (ver Figura 3.11). Tras el análisis de convergencia, se procede al análisis de la estructura, obteniendo los parámetros S ilustrados en la Figura 3.12.

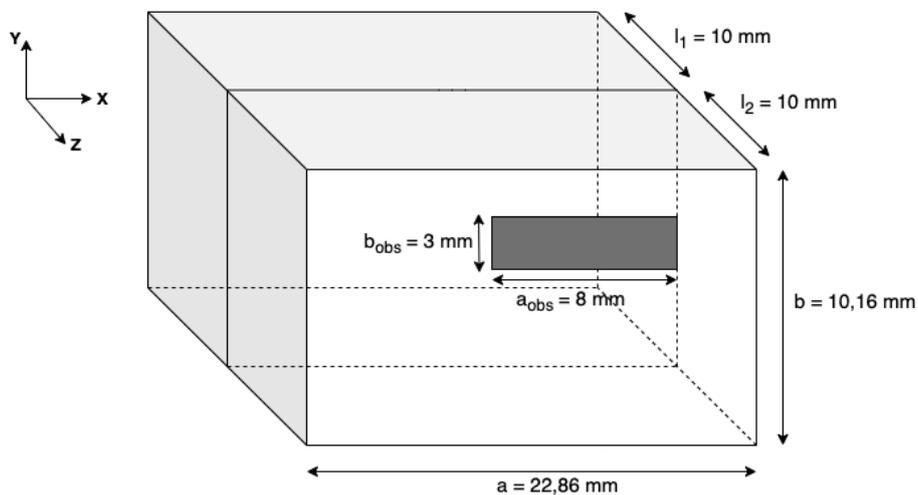


Figura 3.11: Guía de onda comercial WR-90 con parche metálico situado en $x = a$ y de dimensiones 8×3 mm.

Los valores de los parámetros de convergencia utilizados para el análisis son:

- Número de modos accesibles $\Rightarrow 10$
- Número de funciones de base $\Rightarrow 400$
- Número de términos en el kernel $\Rightarrow 2000$
- Número de puntos en frecuencia $\Rightarrow 350$

En la Figura 3.12, podemos apreciar que casi toda la potencia se está transmitiendo, y apenas un pequeña cantidad está siendo reflejada.

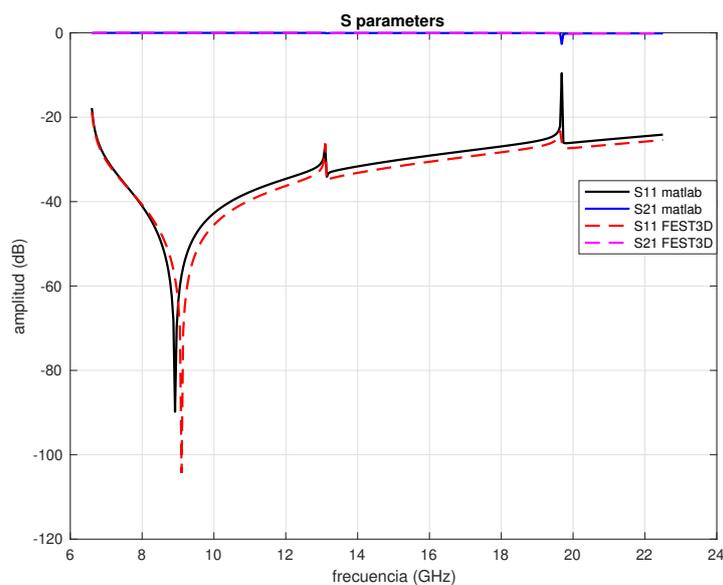


Figura 3.12: Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.10. Resultados de MATLAB y FEST3D.

En este segundo ejemplo de un parche metálico en $x = a$, se analizará una guía comercial WR-75 con un parche metálico de dimensiones 10×3 mm como el de la Figura 3.13. Del mismo modo, que en el resto de ejemplos se obtienen los parámetros S de la estructura bajo estudio (ver Figura 3.14).

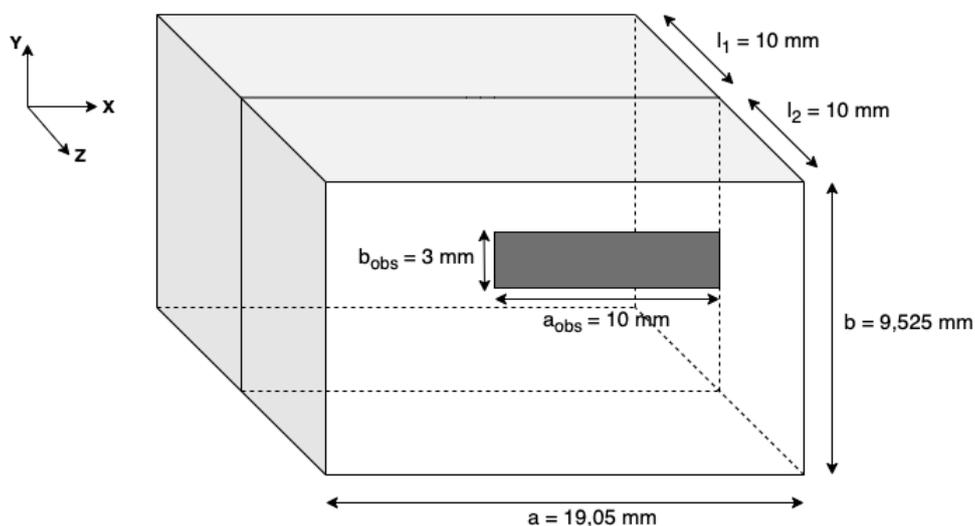


Figura 3.13: Guía de onda comercial WR-75 con parche metálico situado en $x = a$ y de dimensiones 10×3 mm.

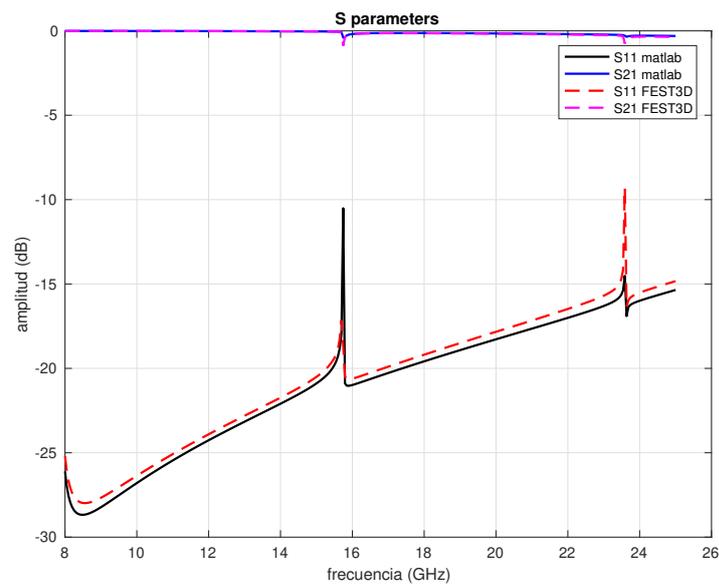


Figura 3.14: Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.13. Resultados de MATLAB y FEST3D.

En la Figura 3.14 se puede apreciar que prácticamente toda la potencia es transmitida, y una parte muy pequeña es reflejada.

El valor de los parámetros de convergencia es:

- Número de términos en el kernel \Rightarrow 10
- Número de funciones de base \Rightarrow 500
- Número de términos en el kernel \Rightarrow 4000
- Número de puntos en frecuencia \Rightarrow 350

3.2. Parámetros S de guías de onda con puertos laterales de excitación

En esta sección se mostrarán ejemplos de guías de onda que incluyen puertos laterales, con el fin de validar la formulación presentada en el Capítulo 2. En esta sección, como ya se ha comentado en la presentación del capítulo, se validarán los ejemplos con ayuda del programa comercial ANSYS HFSS, ya que en FEM3D no existe de la posibilidad de analizar estructuras con puertos laterales de excitación. En esta sección es de gran importancia medir los tiempos de cómputo, ya que un objetivo de este proyecto es poder analizar estructuras complejas y realistas (en las que se incluyen puertos, resonadores y materiales dieléctricos) de una forma rápida y eficiente.

En primer lugar, se muestra el ejemplo de una guía comercial WR-90 con dos puertos en $x = 0$ como la que se muestra en la Figura 3.15. Del mismo modo que en los ejemplos de la sección anterior, se realizará un análisis de convergencia para obtener el valor óptimo del kernel que se debe utilizar (ver Figura 3.16).

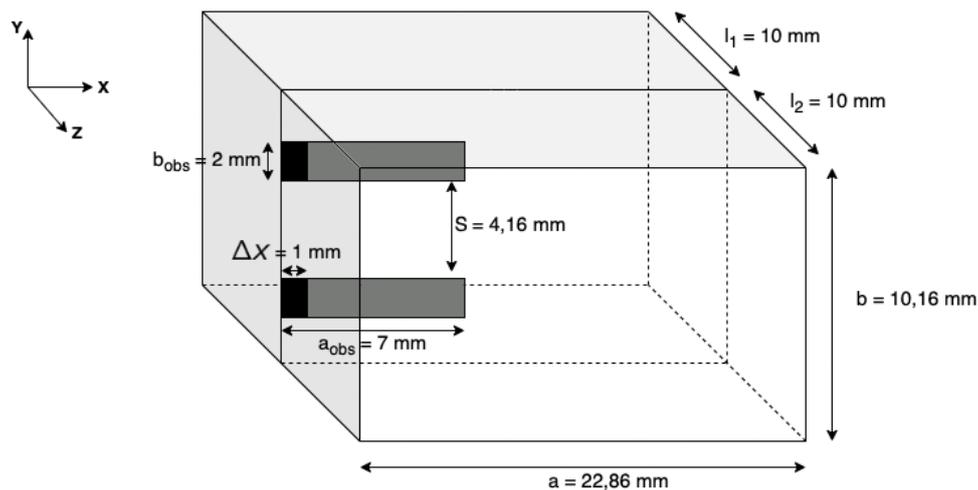


Figura 3.15: Guía de onda comercial WR-90 con dos puertos situados en $x = 0$.

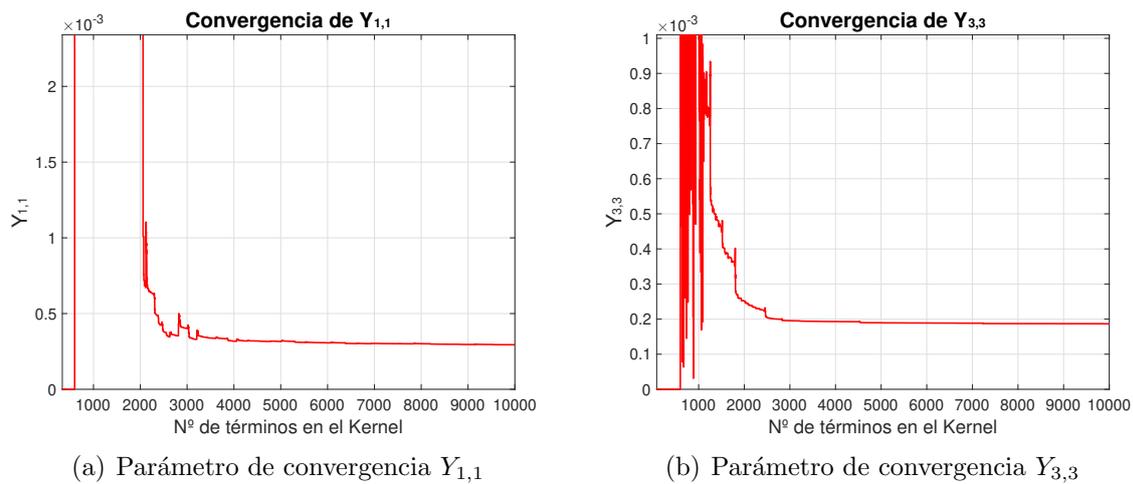


Figura 3.16: Parámetros de convergencia de la estructura presentada en la Figura 3.15. Resultados obtenidos con MATLAB.

Como se puede ver en la Figura 3.16, los modos que se necesitan en el kernel para lograr convergencia son 3200. Una vez que se obtiene el valor óptimo del kernel, se procede al análisis de la estructura completa con la finalidad de obtener sus parámetros S y compararlos con los que proporciona el software comercial ANSYS HFSS. En la Figura 3.17 se puede ver el resultado.

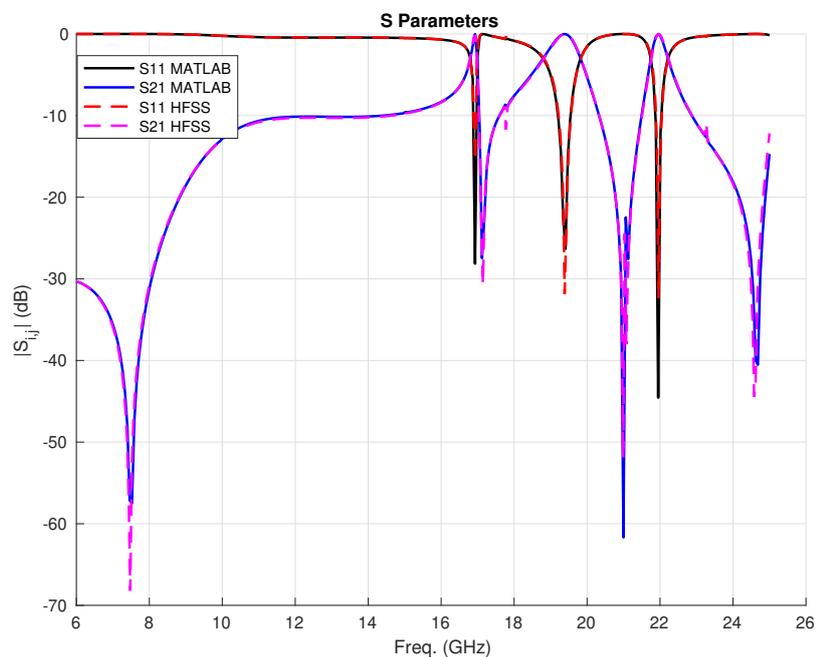


Figura 3.17: Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.15. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.

El valor de los parámetros de convergencia en este análisis ha sido:

- Número de modos accesibles $\Rightarrow 1$
- Número de funciones de base $\Rightarrow 200$
- Número de términos en el kernel $\Rightarrow 3200$
- Número de puntos en frecuencia $\Rightarrow 451$

El tiempo de cómputo del programa desarrollado en MATLAB es de 28,15 segundos frente a los 12 minutos que tarda en realizar el mismo análisis el programa comercial ANSYS HFSS. Además, se puede apreciar en la Figura 3.17 que los resultados son muy parecidos, lo que valida la formulación.

En segundo lugar, se muestra el ejemplo de una guía comercial WR-75 con dos puertos en $x = 0$ como el que se muestra en la Figura 3.18. Tras realizar un análisis de convergencia (que en este caso no se muestra ya que se realiza del mismo modo que el presentado en el ejemplo anterior) se calculan los parámetros S. En la Figura 3.19 se pueden ver los parámetros S de este ejemplo y cómo quedan perfectamente verificados al compararlos con los obtenidos en ANSYS HFSS.

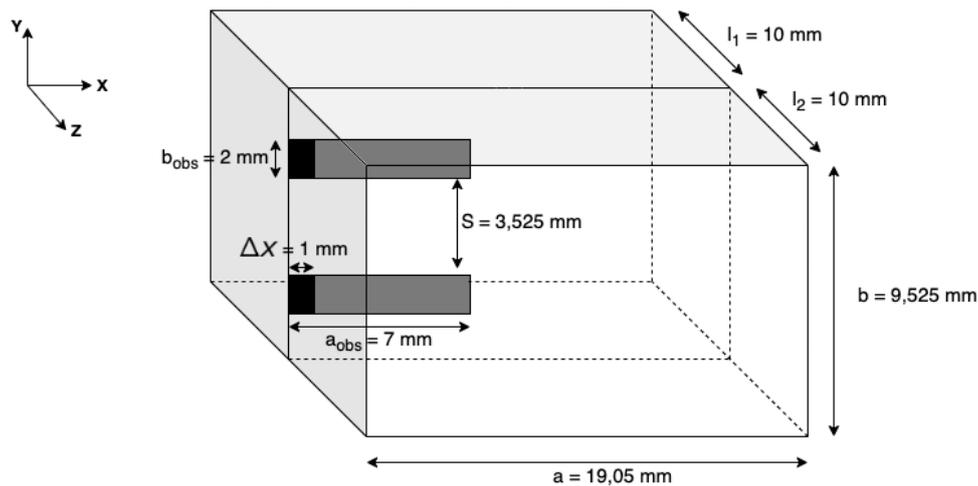


Figura 3.18: Guía de onda comercial WR-75 con dos puertos situados en $x = 0$.

El valor de los parámetros de convergencia para este ejemplo es:

- Número de modos accesibles $\Rightarrow 1$
- Número de funciones de base $\Rightarrow 200$
- Número de términos en el kernel $\Rightarrow 3000$
- Número de puntos en frecuencia $\Rightarrow 451$

El tiempo de cómputo tanto en MATLAB como en HFSS es muy similar al del ejemplo anterior, siendo aquí de 27,64 segundos en MATLAB y de 11 minutos en ANSYS HFSS.

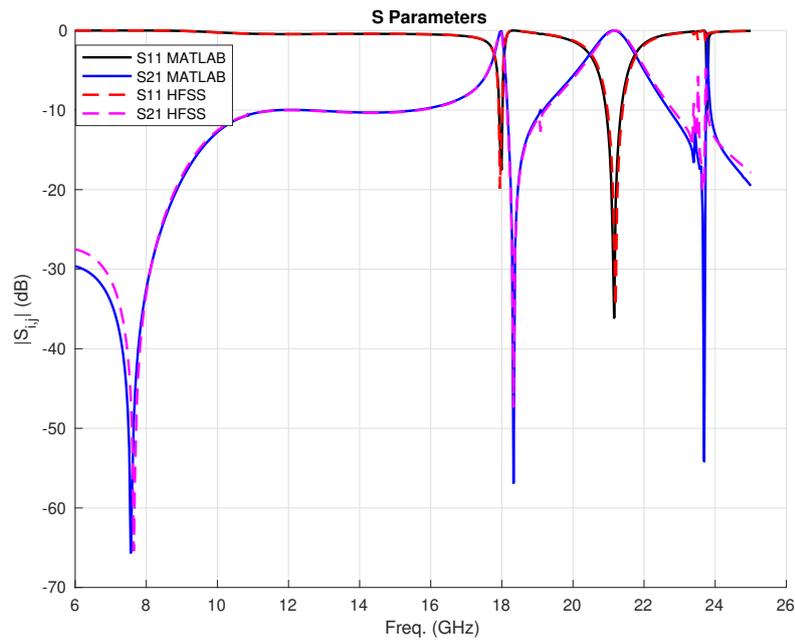


Figura 3.19: Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.18. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.

El último ejemplo de validación de esta formulación se realizará con una estructura más realista, en el cual se tiene una guía de onda de dimensiones $22,86 \times 11$ mm, dos puertos en $x = 0$ y un resonador interno (ver Figura 3.20). En la Figura 3.21 se muestra el análisis de convergencia para obtener el valor óptimo del número de modos en el kernel.

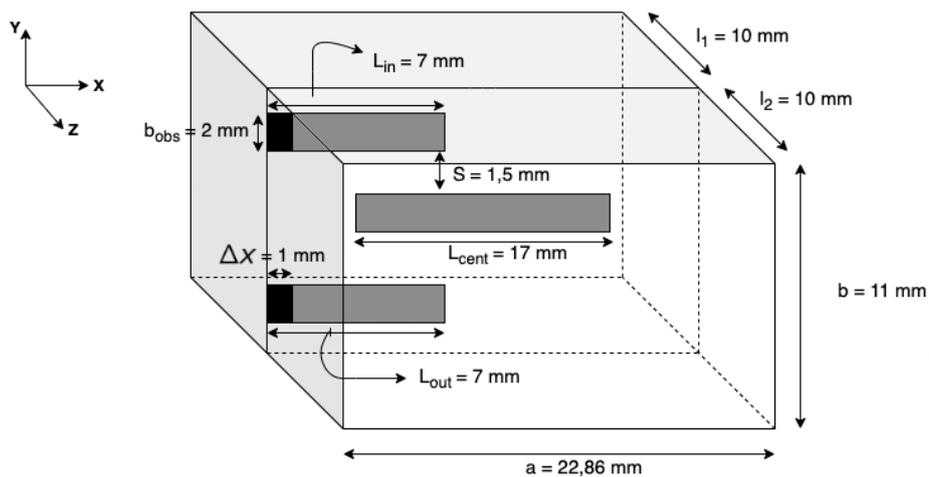


Figura 3.20: Guía de onda rectangular de dimensiones $22,86 \times 11$ mm, con dos puertos en $x = 0$ y un resonador en el área interna.

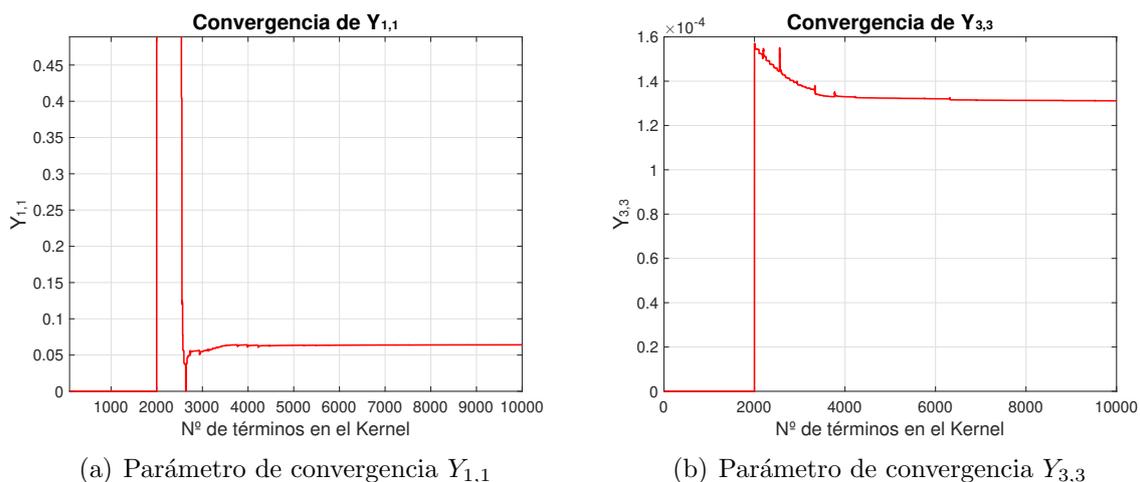


Figura 3.21: Parámetros de convergencia de la estructura presentada en la Figura 3.20. Resultados obtenidos con MATLAB.

En la Figura 3.21 se puede apreciar que el valor óptimo de número de modos en el kernel es 4000. A continuación, se muestran los parámetros S de la estructura junto con los de HFSS para poder validar la formulación descrita en el Capítulo 2.

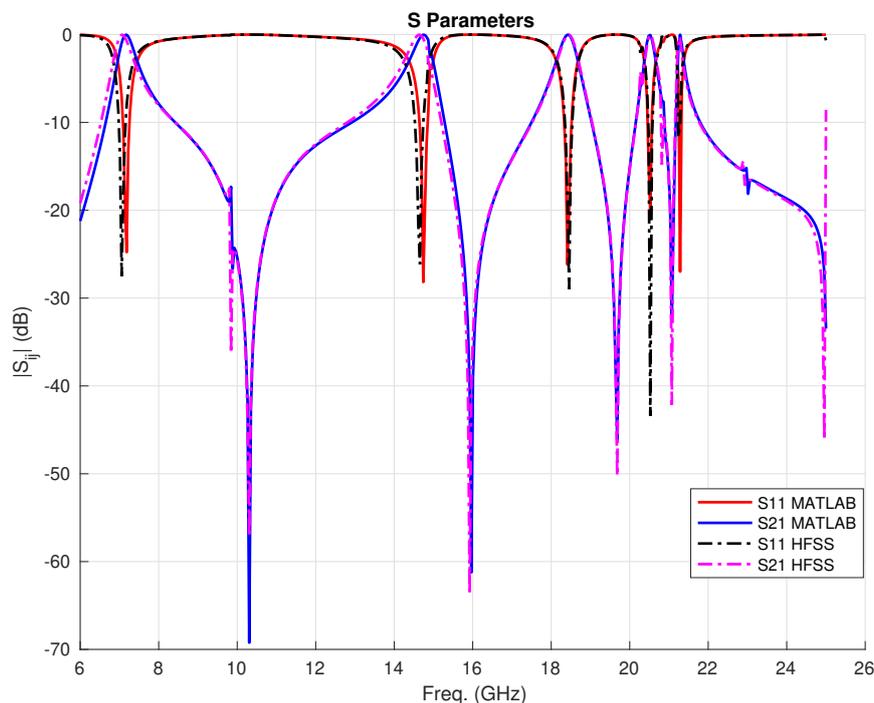


Figura 3.22: Parámetros S de la estructura presentada en la Figura 3.20. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.

El valor de los parámetros de convergencia para este ejemplo es:

- Número de modos accesibles $\Rightarrow 1$
- Número de funciones de base $\Rightarrow 500$
- Número de términos en el kernel $\Rightarrow 4000$
- Número de puntos en frecuencia $\Rightarrow 451$

El tiempo de cómputo tanto en MATLAB como en HFSS es de 38,16 segundos en MATLAB y de 22 minutos en ANSYS HFSS.

3.3. Parámetros S de una guía de onda con impedancias complejas en los puertos

En esta sección se presentarán los resultados del circuito de la Figura 3.23, el cual es un circuito de microondas en tecnología microstrip compuesto por dos puertos laterales en $x = 0$ y un resonador interno, donde uno de los medios es teflón (que presenta una permitividad relativa $\epsilon_r = 2,1$) y el otro medio es aire. Los conectores coaxiales utilizados en la alimentación de este circuito son los PE4128 de PASTERNAK, cuyas dimensiones son $R_1 = 2,1$ mm y $r_1 = 0,65$ mm. Además, la permitividad del dieléctrico es $\epsilon_r = 2,1$. Para caracterizar de una forma más aproximada el comportamiento de estos conectores, se utilizarán los circuitos equivalentes mostrados en la Figura 2.6, los cuales nos permitirán modelar la impedancia de carga (Z_L) y la impedancia del generador (Z_g) como una impedancia compleja que modele los parásitos del conector cuando se conecta a una línea microstrip. Antes de presentar los parámetros S de esta estructura aplicando cualquiera de los circuitos equivalentes de la Figura 2.6, es necesario mostrar el resultado teórico, en el cual la impedancia de carga (Z_L) y la impedancia del generador (Z_g) es la teórica indicada por el fabricante, en este caso de 50Ω (ver Figura 3.24).

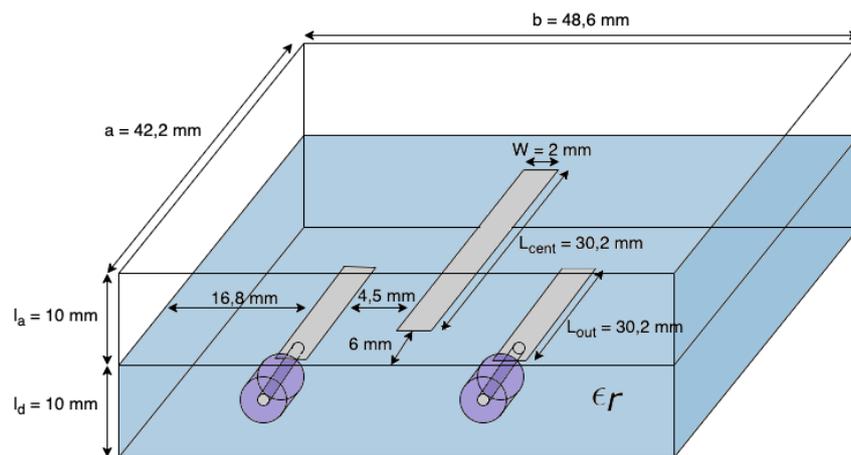


Figura 3.23: Filtro de microondas en tecnología microstrip con conectores coaxiales en los puertos de entrada y salida.

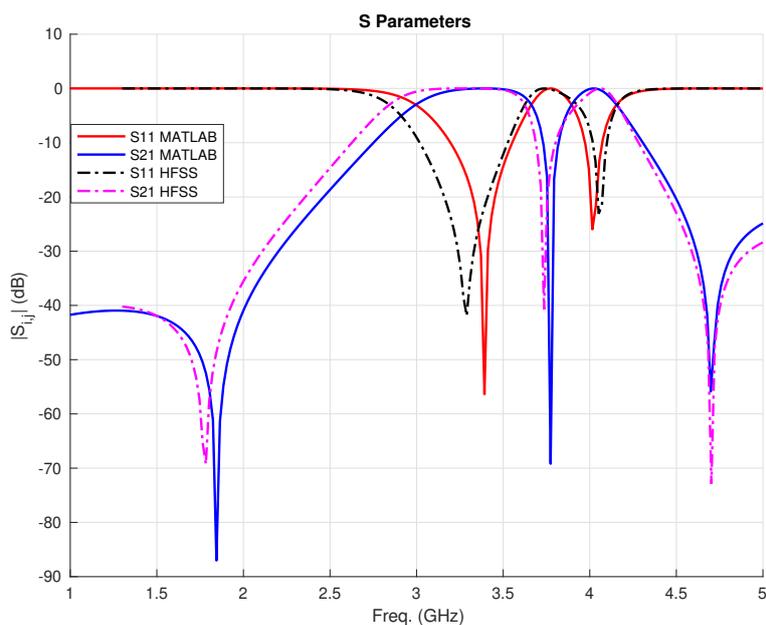


Figura 3.24: Parámetros S de la estructura de la Figura 3.23 tomando $Z_L = Z_g = 50 \Omega$. Resultado de MATLAB y ANSYS HFSS.

A continuación, para obtener la impedancia compleja que más se ajuste al comportamiento real de estos conectores, se realizarán dos pasos. En el primer paso se tomarán los diferentes circuitos mostrados en la Figura 2.6 y se realizará un análisis paramétrico en el que varíe el valor de la inductancia o de la capacidad (dependiendo el tipo de circuito equivalente) manteniendo la parte real fija con un valor de 50Ω (que es el valor de impedancia característica teórico del conector utilizado). En la Figura 3.25 y 3.26 se muestran los resultados con los valores óptimos de los circuitos candidatos a modelar la impedancia del conector coaxial. En este caso los circuitos que mejor caracterizan esta impedancia compleja son los circuitos R-C serie y R-C paralelo, con una capacidad en el condensador de 5 pF y $0,2 \text{ pF}$ respectivamente.

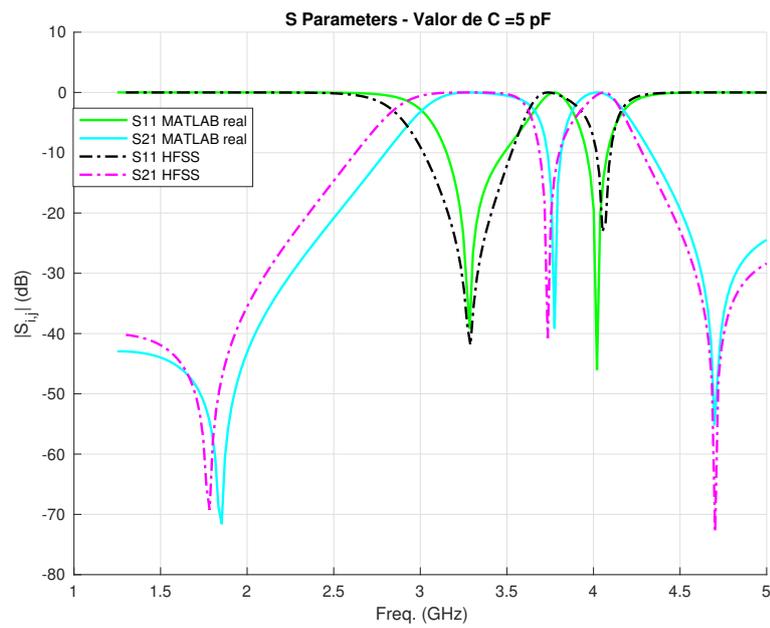


Figura 3.25: Circuito R-C serie con capacidad óptima. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.

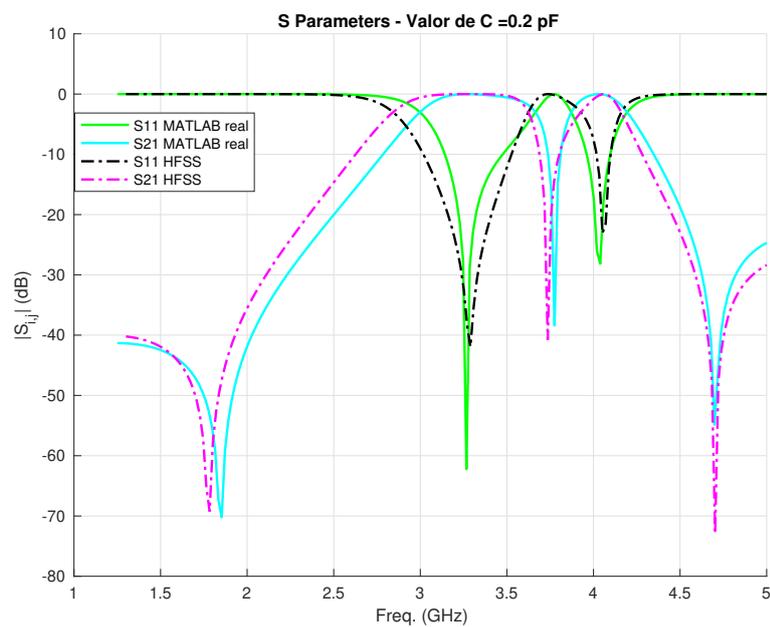


Figura 3.26: Circuito R-C paralelo con capacidad óptima. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.

En segundo lugar, se toman estos circuitos candidatos y realizamos un análisis paramétrico, pero esta vez, con el valor de la resistencia (dejando fijo el valor de la capacidad óptima ya obtenida). En este análisis se probarán valores cercanos a 50Ω , ya que el objetivo es conseguir un ajuste más fino y que el resultado que proporcione MATLAB con estos conectores, sea lo más parecido posible al que proporciona ANSYS HFSS. En este segundo paso, el único circuito que presenta una mejora al introducir una variación de su resistencia, es el circuito R-C serie, donde con un valor de resistencia de 52Ω se consigue un mayor grado de similitud. En la Figura 3.27 se puede apreciar este resultado.

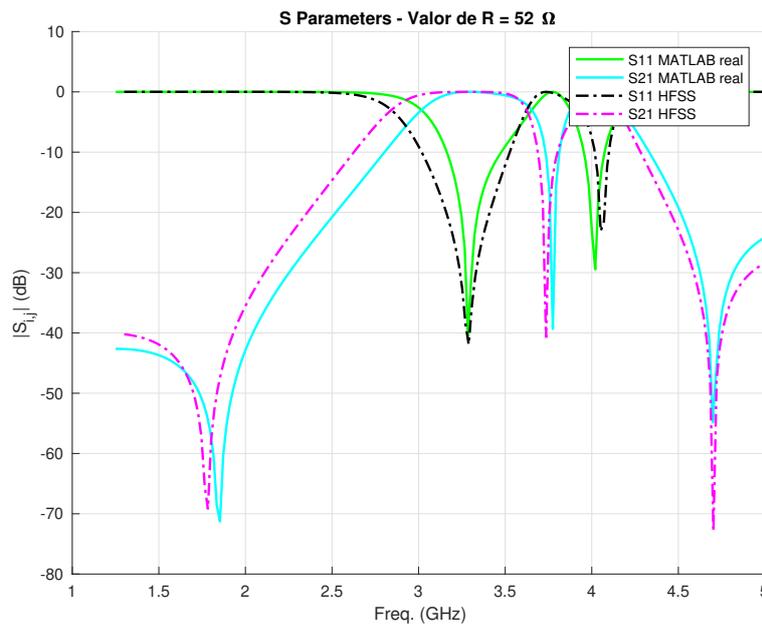


Figura 3.27: Circuito R-C serie con resistencia y capacidad óptimas. Resultados de MATLAB y ANSYS HFSS.

Un aspecto importante, comentado a lo largo de todo este capítulo es el tiempo de cómputo. Anteriormente, se ha comentado que analizar este tipo de circuitos de forma rápida y eficiente es un objetivo importante. Por esta razón, se han medido los tiempos de cómputo de esta estructura tanto en ANSYS HFSS como en MATLAB. El tiempo de cómputo en ANSYS HFSS ha sido aproximadamente de 1 hora y 15 minutos, mientras que en MATLAB ha sido de 43,2 segundos. Además, los parámetros de convergencia utilizados en este análisis son:

- Número de modos accesibles: 1
- Número de funciones de base: 200
- Número de términos en el kernel: 15000
- Número de puntos en frecuencia: 200

Capítulo 4

Conclusiones y líneas de investigación futuras

4.1. Conclusiones

En este proyecto se ha realizado un estudio de la formulación de Red Multimodo Equivalente (MEN) aplicada al análisis de guías de onda con discontinuidades de espesor nulo. También se ha realizado una adaptación de la formulación al análisis de circuitos microstrip. Una vez se tenía cada una de las formulaciones se han obtenido los parámetros S, que junto con softwares comerciales como FEST3D y ANSYS HFSS, han permitido la validación de la formulación desarrollada. Por último, destacar el estudio de técnicas de calibración de puertos, para mejorar las transiciones coaxial a microstrip, mediante impedancias complejas y ondas de potencia generalizadas, así como su correspondiente validación. Esta formulación implementada en MATLAB nos permite analizar circuitos de microondas en tecnología microstrip en un tiempo mucho menor que ANSYS HFSS.

4.2. Líneas de investigación futuras

En esta sección se proponen unas posibles líneas de investigación futuras cuya base teórica es la desarrollada en los capítulos anteriores. Como se ha visto en el Capítulo 2, una vez desarrollada completamente la formulación MEN para dispositivos de microondas en tecnología microstrip, se procederá al desarrollo de una formulación que permita la concatenación de varias discontinuidades con varios dieléctricos dando lugar a dispositivos planares multicapa como en [10]. Además, también se pueden realizar mediciones de filtros reales para comprobar la precisión del análisis de circuitos de microondas en tecnología microstrip cuando los puertos se han calibrado haciendo uso de impedancias complejas.

Otra línea interesante es el estudio de circuitos como los presentados en el Capítulo 2,

pero esta vez dando espesor a los parches metálicos. Este estudio es bastante interesante, ya que el espesor de los parches metálicos nos permitiría trabajar con frecuencias más altas. Del mismo modo, también se podría desarrollar la formulación MEN cuando en la discontinuidad existan aperturas con un espesor “no nulo”.

Apéndice A

Funciones vector modales eléctricas y resolución de las integrales de acoplo

En este apéndice se muestran las funciones vector modales eléctricas empleadas en la resolución de la formulación, y sus correspondientes integrales de acoplo. El cálculo de estas integrales sirve para resolver las ecuaciones (1.18)-(1.20) y (2.22)-(2.25) de los Capítulos 1 y 2, respectivamente. Además, estas ecuaciones serán resueltas en este apéndice de forma analítica, ya que la forma de los parches metálicos situados en la interfaz de las guías siempre tendrán formas rectangulares. Destacar que, en este apéndice, se detallarán cómo quedan las funciones vectoriales eléctricas y la resolución de sus integrales de acoplo para las diferentes posiciones en las que pueda estar colocado el parche metálico en la interfaz ($x = 0$, $x = x_1$ o $x = a$). Además, también se resolverán las integrales de acoplo para el caso en el que existan puertos en $x = 0$ o $x = a$, y de este modo poder resolver la formulación del Capítulo 2. En las Figuras A.1-A.5 se puede ver cómo están situados los parches metálicos mencionados anteriormente.

A continuación, se presentan las funciones vector modales eléctricas de una guía de onda rectangular:

	$TE_{m,n}$	$TM_{m,n}$
e_x	$-A_{m,n} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right)$	$-A_{m,n} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right)$
e_y	$A_{m,n} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right)$	$-A_{m,n} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right)$
e_z	0	$A_{m,n} \frac{k_{c,n,m}^2}{k} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right)$

Tabla A.1: Funciones vector modal eléctricas de los modos TE y TM de una guía de onda rectangular.

A.1. Funciones vector modales eléctricas de un parche metálico rectangular

En primer lugar se presentan las funciones vector modales eléctricas de un parche metálico rectangular situado en un lugar arbitrario de la interfaz a excepción de los laterales, que ahí las condiciones de contorno son diferentes y por tanto las expresiones de las funciones vector modales eléctricas también lo son. Por tanto, las funciones vector modales eléctricas de un parche interno, como el que se muestra en la Figura A.1, son las presentadas en la Tabla A.2.

Destacar que para este caso, los índices m y n para los modos TE son $m = n = 1, 2, 3, \dots$ y para los modos TM son $m = n = 0, 1, 2, 3, \dots$ siempre y cuando m y n no sean cero al mismo tiempo.

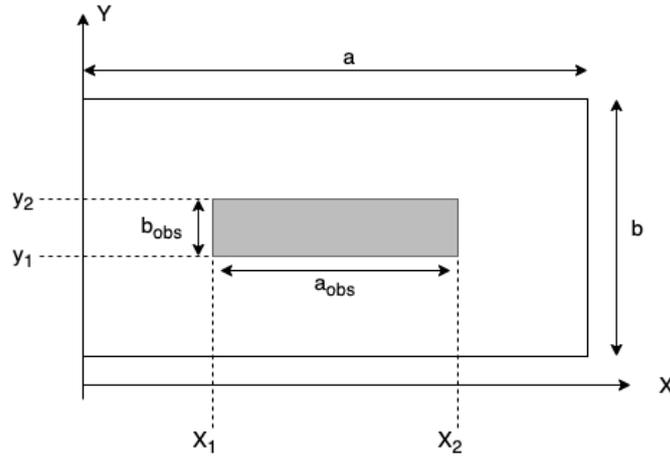


Figura A.1: Parche metálico en la intersección de una guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$. Las dimensiones del parche son $a_{obs} \times b_{obs}$.

	$TE_{m,n}$	$TM_{m,n}$
e_x	$-A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$	$A_{m,n} \frac{m\pi}{a_{obs}} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$
e_y	$A_{m,n} \frac{m\pi}{a_{obs}} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$	$A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$

Tabla A.2: Funciones vector modal eléctrica de los modos TE y TM de un parche metálico interno.

En la Tabla A.2 la constante $A_{m,n}$ queda definida como,

$$A_{m,n} = \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{\pi} \sqrt{\frac{a_{obs} b_{obs}}{(mb_{obs})^2 + (na_{obs})^2}} \quad (A.1)$$

A continuación, se presentan en la Tabla A.3 las funciones vector modales eléctricas para un parche metálico situado en $x = 0$ (pegado a la pared izquierda de la guía de onda) como el de la Figura (A.2).

En este caso los índices m y n para los modos TE son $m = 1, 3, 5, \dots$ y $n = 1, 2, 3, \dots$ y para los modos TM, los índices son $m = 1, 3, 5, \dots$ y $n = 0, 1, 2, \dots$

En este caso, la constante $A_{m,n}$ queda definida como,

$$A_{m,n} = \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_n}}{\pi} \sqrt{\frac{4a_{obs} b_{obs}}{(mb_{obs})^2 + (na_{obs})^2}} \quad (A.2)$$

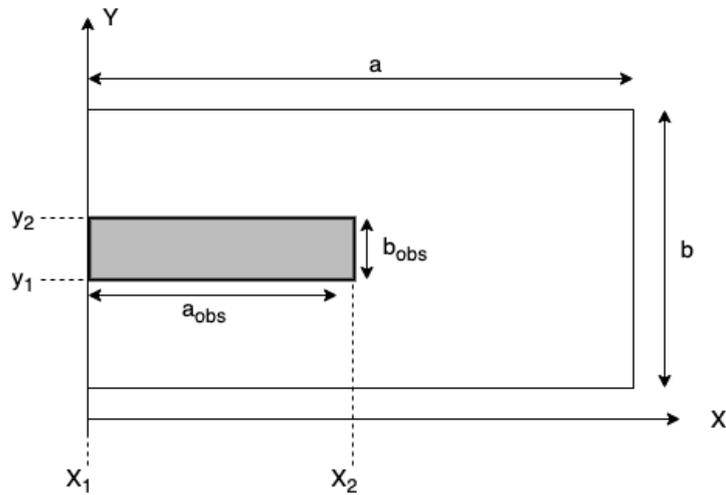


Figura A.2: Parche metálico situado en la pared $x = 0$ de una guía de dimensiones $a \times b$. Las dimensiones del parche son $a_{obs} \times b_{obs}$. En este caso la pared que toca la caja es una pared eléctrica y las otras 3 son paredes magnéticas.

	$TE_{m,n}$	$TM_{m,n}$
e_x	$-A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$	$-A_{m,n} \frac{m\pi}{2a_{obs}} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$
e_y	$-A_{m,n} \frac{m\pi}{2a_{obs}} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$	$A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$

Tabla A.3: Funciones vector modal eléctricas de los modos TE y TM de un parche metálico en $x = 0$.

En tercer lugar, tenemos el caso de tener un parche interno en $x = a$ como se muestra en la Figura A.3, donde de nuevo las funciones vector modales eléctricas son ligeramente diferentes. Para este caso las funciones vector modales eléctricas se muestran en la Tabla A.4. En este caso, los índices m y n para los modos TE y TM son los mismos que en el

caso en el que el parche metálico está situado en $x = 0$, y la constante $A_{m,n}$ es la misma que la mostrada en la ecuación A.2.

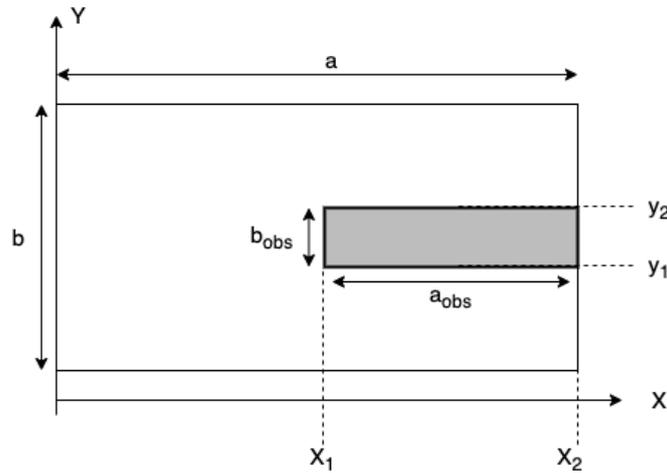


Figura A.3: Parche metálico situado en la pared $x = a$ de una guía de dimensiones $a \times b$. Las dimensiones del parche son $a_{obs} \times b_{obs}$. En este caso la pared de la derecha ($x = a$) es una pared eléctrica y las otras 3 son paredes magnéticas.

	$TE_{m,n}$	$TM_{m,n}$
e_x	$-A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$	$A_{m,n} \frac{m\pi}{2a_{obs}} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$
e_y	$A_{m,n} \frac{m\pi}{2a_{obs}} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$	$A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right)$

Tabla A.4: Funciones vector modal eléctricas de los modos TE y TM de un parche metálico en $x = a$.

A.2. Integrales de acoplo entre una guía de onda rectangular y un parche metálico

En esta subsección, se mostrará en detalle la resolución de las integrales de acoplo cuando el parche metálico está situado en una zona interna arbitraria de la interfaz, cuando está en la pared $x = 0$ y cuando está en la pared $x = a$. Además, también se resolverán las integrales de acoplo entre un parche metálico rectangular (situado en $x=0$ o $x = a$) y la excitación de un pulso.

A.2.1. Parche metálico en una zona interna

En esta subsección, tomamos como referencia la Figura A.1, donde se encuentra un parche metálico rectangular dentro de una guía rectangular. La ecuación a resolver en

este apartado y los próximos es,

$$C_{k,m} = \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds \quad (\text{A.3})$$

donde las funciones vector modales eléctricas del parche metálico vienen caracterizadas por $\mathbf{e}_k^b(s)$ (ver Tabla A.2) y las funciones vector modales de la guía vienen dadas por $\mathbf{e}_m(s)$ (ver Tabla A.1). De aquí en adelante, y para el resto de apartados que se desarrollarán en este apéndice distinguiremos los diferentes modos TE/TM de la guía como m, n y los del parche metálico como p, q .

Caso TE-TE:

$$\begin{aligned} C_{k,m}^{TE-TE} &= \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds = \int_{obs} \left[-A_{p,q} \frac{q\pi}{b_{obs}} \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) \mathbf{x}_0 + \right. \\ &A_{p,q} \frac{p\pi}{a_{obs}} \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) \mathbf{y}_0 \left. \cdot \left[-A_{m,n} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \mathbf{x}_0 + \right. \right. \\ &A_{m,n} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \mathbf{y}_0 \left. \right] ds = \\ &= A_{m,n} A_{p,q} \frac{nq\pi^2}{b \cdot b_{obs}} \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \int_{y_1}^{y_2} \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy + \\ &+ A_{m,n} A_{p,q} \frac{mq\pi^2}{a \cdot a_{obs}} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \int_{y_1}^{y_2} \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Para una mayor claridad se realizarán los siguientes cambios en la ecuación (A.4):

$$cS_x = \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \quad (\text{A.5})$$

$$sC_x = \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \quad (\text{A.6})$$

$$cS_y = \int_{y_1}^{y_2} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy \quad (\text{A.7})$$

$$sC_y = \int_{y_1}^{y_2} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy \quad (\text{A.8})$$

Por tanto, introduciendo estas simplificaciones en la ecuación (A.4), se puede reescribir del siguiente modo:

$$C_{k,m}^{TE-TE} = A_{m,n} A_{p,q} \left[\frac{nq\pi^2}{b \cdot b_{obs}} cS_x sC_y + \frac{mq\pi^2}{a \cdot a_{obs}} sC_x cS_y \right] \quad (\text{A.9})$$

Caso TE-TM:

$$\begin{aligned}
C_{k,m}^{TE-TM} &= \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds = \int_{obs} \left[A_{p,q} \frac{p\pi}{a_{obs}} \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) \mathbf{x}_0 + \right. \\
&A_{p,q} \frac{q\pi}{b_{obs}} \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) \mathbf{y}_0 \left. \right] \cdot \left[-A_{m,n} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \mathbf{x}_0 + \right. \\
&A_{m,n} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \mathbf{y}_0 \left. \right] ds = \\
&= -A_{m,n} A_{p,q} \frac{np\pi^2}{b \cdot a_{obs}} \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \int_{y_1}^{y_2} \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy + \\
&+ A_{m,n} A_{p,q} \frac{mq\pi^2}{a \cdot b_{obs}} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \int_{y_1}^{y_2} \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Utilizando las ecuaciones (A.5)-(A.8) se puede reescribir la ecuación (A.10) del siguiente modo:

$$C_{k,m}^{TE-TM} = A_{m,n} A_{p,q} \left[\frac{mq\pi^2}{a \cdot b_{obs}} c s_x s c_y - \frac{np\pi^2}{b \cdot a_{obs}} s c_x c s_y \right] \tag{A.11}$$

Caso TM-TE:

$$\begin{aligned}
C_{k,m}^{TM-TE} &= \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds = \int_{obs} \left[-A_{p,q} \frac{q\pi}{b_{obs}} \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) \mathbf{x}_0 + \right. \\
&A_{p,q} \frac{p\pi}{a_{obs}} \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) \mathbf{y}_0 \left. \right] \cdot \left[-A_{m,n} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \mathbf{x}_0 + \right. \\
&-A_{m,n} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \mathbf{y}_0 \left. \right] ds = \\
&= A_{m,n} A_{p,q} \frac{mq\pi}{a \cdot b_{obs}} \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \int_{y_1}^{y_2} \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy + \\
&- A_{m,n} A_{p,q} \frac{np\pi^2}{b \cdot a_{obs}} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \int_{y_1}^{y_2} \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Como en los casos anteriores, utilizando las ecuaciones (A.5)-(A.8), se puede reescribir la ecuación (A.12), quedando del siguiente modo:

$$C_{km}^{TM-TE} = -A_{m,n} A_{p,q} \left[\frac{np\pi^2}{b \cdot a_{obs}} c s_x s c_y - \frac{mq\pi^2}{a \cdot b_{obs}} s c_x c s_y \right] \tag{A.13}$$

Caso TM-TM:

$$\begin{aligned}
 C_{k,m}^{TM-TM} &= \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds = \int_{obs} \left[A_{p,q} \frac{p\pi}{a_{obs}} \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) \mathbf{x}_0 + \right. \\
 & A_{p,q} \frac{q\pi}{b_{obs}} \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) \mathbf{y}_0 \left. \right] \cdot \left[-A_{m,n} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \mathbf{x}_0 + \right. \\
 & \left. -A_{m,n} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \mathbf{y}_0 \right] ds = \\
 &= -A_{m,n} A_{p,q} \frac{mp\pi^2}{a \cdot a_{obs}} \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \int_{y_1}^{y_2} \sin\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy + \\
 & -A_{m,n} A_{p,q} \frac{nq\pi^2}{b \cdot b_{obs}} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi(x-x_0)}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx \int_{y_1}^{y_2} \cos\left(\frac{n\pi(y-y_0)}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Utilizando los cambios nombrados en las ecuaciones (A.5)-(A.8), la ecuación (A.14) queda:

$$C_{k,m}^{TM-TM} = -A_{m,n} A_{p,q} \left[\frac{mp\pi^2}{a \cdot a_{obs}} cs_x sc_y + \frac{nq\pi^2}{b \cdot b_{obs}} sc_x cs_y \right] \tag{A.15}$$

A continuación, se resuelven las integrales cs_x , sc_y , sc_x y cs_y presentadas en las ecuaciones (A.5)-(A.8). En primer lugar, se mostraran 2 relaciones necesarias para la resolución de estas integrales.

$$\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)] \implies \text{Relación 1.A}$$

$$\cos(A) - \cos(B) = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \implies \text{Relación 2.A}$$

$$\begin{aligned}
 cs_x &= \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx = \{se aplica 1.A\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{m\pi x}{a} + \frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) + \right. \\
 & \left. + \sin\left(\frac{m\pi x}{a} - \frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) \right] dx = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a} + \frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx + \\
 & \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a} - \frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{m\pi}{a} + \frac{p\pi}{a_{obs}}\right)^{-1} \left[\cos\left(\frac{m\pi x_2}{a} + \frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) - \right. \\
 & \left. - \cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{m\pi}{a} - \frac{p\pi}{a_{obs}}\right)^{-1} \left[\cos\left(\frac{m\pi x_2}{a} + \frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) - \cos\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \right] = \{se aplica 2.A\} \\
 & \left(\frac{p\pi}{a_{obs}} + \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \sin\left[\frac{p\pi}{a_{obs}} \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a} \left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{a_{obs}} \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a} \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] + \\
 & + \left(\frac{p\pi}{a_{obs}} - \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \sin\left[\frac{p\pi}{a_{obs}} \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a} \left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{a_{obs}} \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a} \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right]
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Al igual que en la ecuación (A.16) se utilizarán las relaciones (1.A) y (2.A) para resolver las integrales y reescribirlas de una forma sencilla (sobre todo desde el punto de vista de su programación) y legible. Por tanto, tras aplicar estas relaciones en las ecuaciones (A.6), (A.7) y (A.8) el resultados es:

$$\begin{aligned}
sC_x &= \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{a_{obs}}\right) dx = \\
&\left(\frac{p\pi}{a_{obs}} + \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \sin\left[\frac{p\pi}{a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] - \\
&- \left(\frac{p\pi}{a_{obs}} - \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \sin\left[\frac{p\pi}{a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
cS_y &= \int_{y_1}^{y_2} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy = \\
&\left(\frac{q\pi}{b_{obs}} + \frac{n\pi}{b}\right)^{-1} \sin\left[\frac{q\pi}{b_{obs}}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) + \frac{n\pi}{b}\left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{q\pi}{b_{obs}}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) + \frac{n\pi}{b}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)\right] + \\
&+ \left(\frac{q\pi}{b_{obs}} - \frac{n\pi}{b}\right)^{-1} \sin\left[\frac{q\pi}{b_{obs}}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) - \frac{n\pi}{b}\left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{q\pi}{b_{obs}}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) - \frac{n\pi}{b}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
sC_y &= \int_{y_1}^{y_2} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{q\pi(y-y_1)}{b_{obs}}\right) dy = \\
&\left(\frac{q\pi}{b_{obs}} + \frac{n\pi}{b}\right)^{-1} \sin\left[\frac{q\pi}{b_{obs}}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) + \frac{n\pi}{b}\left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{q\pi}{b_{obs}}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) + \frac{n\pi}{b}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)\right] - \\
&- \left(\frac{q\pi}{b_{obs}} - \frac{n\pi}{b}\right)^{-1} \sin\left[\frac{q\pi}{b_{obs}}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) - \frac{n\pi}{b}\left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{q\pi}{b_{obs}}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right) - \frac{n\pi}{b}\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{A.19}$$

A.2.2. Parche metálico en $x = 0$

En este caso, la suposición es la de tener una guía de onda con un parche metálico situado en la pared $x = 0$, como el presentado anteriormente en la Figura A.2. Del mismo modo que en la subsección anterior, las funciones vectoriales eléctricas que caracterizan la guía de onda rectangular, son las presentadas en la Tabla A.1, mientras que las funciones vectoriales modales eléctricas del parche metálico situado en $x = 0$ son las presentadas en la Tabla A.3. Se puede apreciar que las funciones del parche metálico presentadas en la Tabla A.3 son ligeramente diferentes a las de la Tabla A.2, ya que las condiciones de contorno impuestas son ligeramente diferentes.

Las integrales de acoplo de este nuevo caso de estudio vienen dadas por la siguiente expresión:

$$C_{k,m} = \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds \quad (\text{A.20})$$

Del mismo modo que en la subsección anterior, se presentarán las cuatro posibilidades de integrales de acoplo. En este caso se presentará directamente el resultado final, ya que el procedimiento de resolución es igual que el presentado anteriormente.

$$C_{k,m}^{TE-TE} = A_{m,n}A_{p,q} \left[\frac{nq\pi^2}{b \cdot b_{obs}} CC_x SC_y - \frac{mp\pi^2}{a \cdot 2a_{obs}} SS_x CS_y \right] \quad (\text{A.21})$$

$$C_{k,m}^{TE-TM} = A_{m,n}A_{p,q} \left[\frac{mq\pi^2}{a \cdot b_{obs}} CC_x SC_y + \frac{np\pi^2}{b \cdot 2a_{obs}} SS_x CS_y \right] \quad (\text{A.22})$$

$$C_{k,m}^{TM-TE} = A_{m,n}A_{p,q} \left[\frac{np\pi^2}{b \cdot 2a_{obs}} CC_x SC_y + \frac{mq\pi^2}{a \cdot b_{obs}} SS_x CS_y \right] \quad (\text{A.23})$$

$$C_{k,m}^{TM-TM} = A_{m,n}A_{p,q} \left[\frac{mp\pi^2}{a \cdot 2a_{obs}} CC_x SC_y - \frac{nq\pi^2}{b \cdot b_{obs}} SS_x CS_y \right] \quad (\text{A.24})$$

Para la resolución de las integrales CC_x , SS_x se utilizarán las siguientes relaciones:

$$\sin(A) \sin(B) = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)] \implies \text{Relación 3.A}$$

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \implies \text{Relación 4.A}$$

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \implies \text{Relación 5.A}$$

Por tanto, la resolución de las integrales queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned} CC_x &= \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) dx = \\ &\left(\frac{p\pi}{2a_{obs}} - \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \cos\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] + \\ &+ \left(\frac{p\pi}{2a_{obs}} + \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \cos\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} SS_x &= \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) dx = \\ &\left(\frac{p\pi}{2a_{obs}} - \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \cos\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] - \\ &- \left(\frac{p\pi}{2a_{obs}} + \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \cos\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Las integrales SC_y y CS_y son las presentadas en las ecuaciones (A.17) y (A.18) respectivamente.

A.2.3. Parche metálico en $x = a$

En esta subsección, se presentan las integrales de acoplo de una guía de onda rectangular con un parche metálico en $x = a$ como la presentada en la Figura A.3. Las funciones vectoriales modales eléctricas son las presentadas en la Tabla A.1 (para la guía de onda rectangular) y en la Tabla A.4 para el parche metálico situado en $x = a$. La expresión sobre la que partimos para calcular las integrales de acoplo es la que se ha usado en las subsecciones anteriores.

$$C_{k,m} = \int_{obs} \mathbf{e}_k^b(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds \quad (\text{A.27})$$

Para esta estructura las cuatro posibilidades de integrales de acoplo son las siguientes:

$$C_{k,m}^{TE-TE} = A_{m,n} A_{p,q} \left[\frac{nq\pi^2}{b \cdot b_{obs}} c s_x s c_y + \frac{mp\pi^2}{a \cdot 2a_{obs}} s c_x c s_y \right] \quad (\text{A.28})$$

$$C_{k,m}^{TE-TM} = A_{m,n} A_{p,q} \left[\frac{mq\pi^2}{a \cdot b_{obs}} c s_x s c_y - \frac{np\pi^2}{b \cdot 2a_{obs}} s c_x c s_y \right] \quad (\text{A.29})$$

$$C_{k,m}^{TM-TE} = -A_{m,n} A_{p,q} \left[\frac{np\pi^2}{b \cdot 2a_{obs}} c s_x s c_y + \frac{mq\pi^2}{a \cdot b_{obs}} s c_x c s_y \right] \quad (\text{A.30})$$

$$C_{k,m}^{TM-TM} = -A_{m,n} A_{p,q} \left[\frac{mp\pi^2}{a \cdot 2a_{obs}} c s_x s c_y + \frac{nq\pi^2}{b \cdot b_{obs}} s c_x c s_y \right] \quad (\text{A.31})$$

En este caso, las integrales $c s_y$ y $s c_y$ son las mismas que las presentadas en las ecuaciones (A.18) y (A.19) respectivamente, mientras que $s c_x$ y $c s_x$ serán ligeramente diferentes. La forma en la que finalmente quedan $s c_x$ y $c s_x$ es presentada a continuación:

$$\begin{aligned} s c_x &= \int_{x_1}^{x_2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) dx = \\ &\left(\frac{p\pi}{2a_{obs}} + \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] - \\ &- \left(\frac{p\pi}{2a_{obs}} - \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} c s_x &= \int_{x_1}^{x_2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi(x-x_1)}{2a_{obs}}\right) dx \\ &\left(\frac{p\pi}{2a_{obs}} + \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) + \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] + \\ &+ \left(\frac{p\pi}{2a_{obs}} - \frac{m\pi}{a}\right)^{-1} \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{p\pi}{2a_{obs}}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right) - \frac{m\pi}{a}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

A.2.4. Puerto en $x = 0$

En este apartado, se presenta la integral de acoplo de un puerto situado en $x = 0$. Para este caso, se busca la interacción entre los modos del parche metálico situado en $x = 0$ y el pulso. Esta estructura se muestra en la Figura A.4. Por otro lado, las funciones vectoriales modales eléctricas son las presentadas en la Tabla A.3.

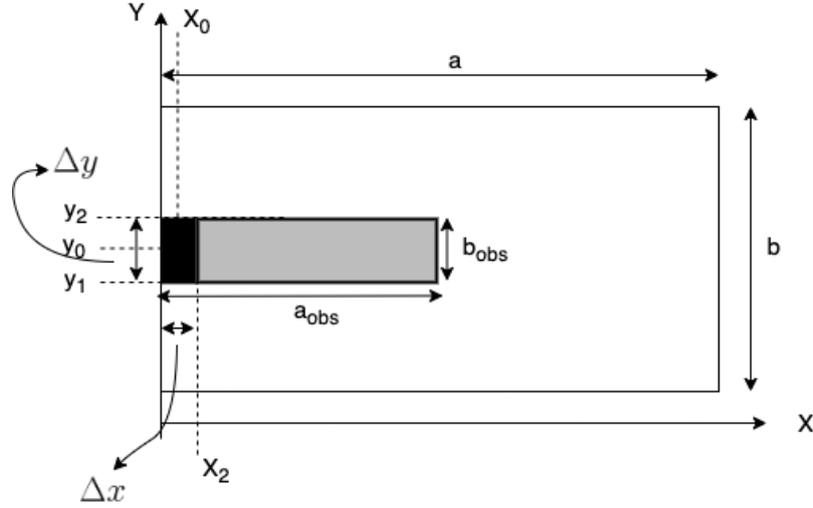


Figura A.4: Sección transversal de una guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$ con un puerto en $x = 0$. La zona en color gris hace referencia al parche metálico mientras que la zona en color negro hace referencia a la excitación del puerto.

La integral de acoplo (teniendo en cuenta el caso TE y TM) para la estructura presentada en la Figura A.4 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 C_{i,0}^{TE} &= \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] = \\
 &\int_{obs} \left[-A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \cos \left(\frac{m\pi x}{2a_{obs}} \right) \cos \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) \mathbf{x}_0 - A_{m,n} \frac{m\pi}{2a_{obs}} \sin \left(\frac{m\pi x}{2a_{obs}} \right) \sin \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) \mathbf{y}_0 \right] \cdot \\
 &\left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] ds = \\
 &\frac{1}{\Delta x} \int_0^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} -\frac{n\pi}{b_{obs}} A_{m,n} \cos \left(\frac{m\pi x}{2a_{obs}} \right) \cos \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) dx dy = -n\pi A_{m,n} \text{sinc}(n) \text{sinc} \left(\frac{mx_2}{2a_{obs}} \right)
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
C_{i,0}^{TM} &= \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] = \\
&\int_{obs} \left[-A_{m,n} \frac{m\pi}{2a_{obs}} \cos \left(\frac{m\pi x}{2a_{obs}} \right) \cos \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) \mathbf{x}_0 + A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \sin \left(\frac{m\pi x}{2a_{obs}} \right) \sin \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) \mathbf{y}_0 \right] \cdot \\
&\left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] ds = \\
&\frac{1}{\Delta x} \int_0^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} -\frac{n\pi}{b_{obs}} A_{m,n} \cos \left(\frac{m\pi x}{2a_{obs}} \right) \cos \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) dx dy = \\
&= -b_{obs} \frac{m\pi}{2a_{obs}} A_{m,n} \text{sinc}(n) \text{sinc} \left(\frac{mx_2}{2a_{obs}} \right)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

A.2.5. Puerto en $x = a$

A continuación, se presentará la integral de acoplo de un puerto situado en $x = a$, donde la interacción será entre los modos del parche metálico situado en $x = a$ y el pulso. La estructura a la que se hace referencia en este subsección se muestra en la Figura A.5. Además, las funciones vectoriales eléctricas para el parche metálico son las presentadas en la Tabla A.4.

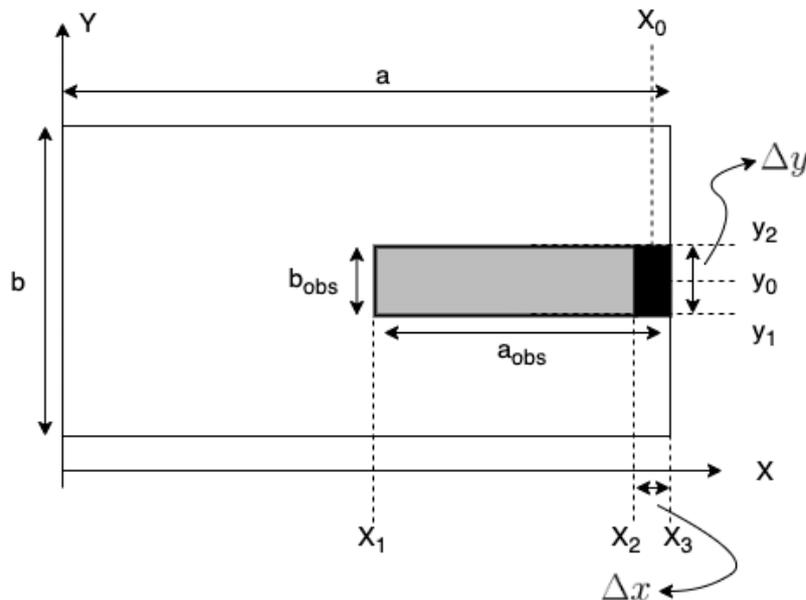


Figura A.5: Sección transversal de una guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$ con un puerto en $x = a$. La zona en color gris hace referencia al parche metálico mientras que la zona en color negro hace referencia a la excitación del puerto.

La integral de acoplo (teniendo en cuenta el caso TE y TM) para la estructura presentada en la Figura A.5 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 C_{i,0}^{TE} &= \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] = \\
 &\int_{obs} \left[-A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \sin \left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}} \right) \cos \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) \mathbf{x}_0 + A_{m,n} \frac{m\pi}{2a_{obs}} \cos \left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}} \right) \sin \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) \mathbf{y}_0 \right] \cdot \\
 &\left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] ds = \\
 &\frac{1}{\Delta x} \int_{x_2}^{x_3} \int_{y_1}^{y_2} -\frac{n\pi}{b_{obs}} A_{m,n} \sin \left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}} \right) \cos \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) dx dy = \\
 &= -\frac{nm}{\Delta x} 2a_{obs} A_{m,n} \text{sinc}(n) \left[-\cos \left(\frac{m\pi(x_3-x_1)}{2a_{obs}} \right) + \cos \left(\frac{m\pi(x_2-x_1)}{2a_{obs}} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
 C_{i,0}^{TM} &= \int_{obs} \mathbf{e}_i^b(s) \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] = \\
 &\int_{obs} \left[A_{m,n} \frac{m\pi}{2a_{obs}} \sin \left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}} \right) \cos \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) \mathbf{x}_0 + A_{m,n} \frac{n\pi}{b_{obs}} \cos \left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}} \right) \sin \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) \mathbf{y}_0 \right] \cdot \\
 &\left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] ds = \\
 &\frac{1}{\Delta x} \int_{x_2}^{x_3} \int_{y_1}^{y_2} \frac{m\pi}{2a_{obs}} A_{m,n} \sin \left(\frac{m\pi(x-x_1)}{2a_{obs}} \right) \cos \left(\frac{n\pi(y-y_1)}{b_{obs}} \right) dx dy = \\
 &= \frac{b_{obs}}{\Delta x} A_{m,n} \text{sinc}(n) \left[-\cos \left(\frac{m\pi(x_3-x_1)}{2a_{obs}} \right) + \cos \left(\frac{m\pi(x_2-x_1)}{2a_{obs}} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A.37}$$

Apéndice B

Expansión de la Formulación de Red Multimodo Equivalente con varios puertos y parches metálicos

En este apéndice se desarrollará una extensión de la formulación desarrollada en el Capítulo 2. Esta extensión simplemente consiste en cómo se realizaría el desarrollo en el caso de tener un mayor número de puertos o parches metálicos internos. Para realizar un ejemplo más completo que el presentado en el Capítulo 2, se desarrollará la formulación de Red Multimodo Equivalente cuando existen dos puertos de excitación laterales y un parche metálico interno en la intersección (ver Figura B.1). Otro aspecto a destacar es que en este apéndice solo se destacarán aquellos procedimientos matemáticos que sean diferentes de lo que se ha presentado en el Capítulo 2, por lo que no se volverá a hacer una explicación de los conceptos ya presentados con anterioridad.

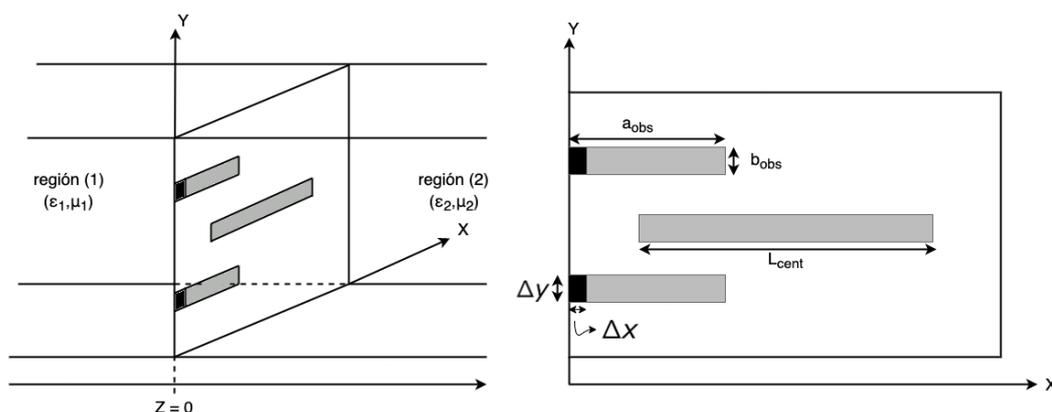


Figura B.1: Guía de onda rectangular de dimensiones $a \times b$ con dos puertos laterales en $x = 0$ y un parche interno en la interfaz.

B.1. Desarrollo matemático de la extensión de Red Multimodo Equivalente

En primer lugar, se define el campo eléctrico de excitación $\bar{\mathbf{E}}$ como un pulso de tensión constante V_0 y un ancho determinado. La expresión de dicho pulso es,

$$\mathbf{E}_{exc}(s) = V_0 \frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 \quad (\text{B.1})$$

donde (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del pulso, Δx y Δy son los anchos del pulso, $s = (x, y)$ indica un punto de la discontinuidad de la guía de onda y \mathbf{x}_0 es un vector unitario en la dirección del eje x .

Del mismo modo que se hizo en el Capítulo 2, se imponen las condiciones de contorno sobre la componente tangencial del campo eléctrico en la discontinuidad (donde hay que incluir la contribución del pulso) situada en $z = 0$, como se puede apreciar en la Figura B.1. Una vez se impone la continuidad del eléctrico en el parche se obtiene,

$$\mathbf{E}_t(s) + \mathbf{E}_{exc}^{(1)}(s) + \mathbf{E}_{exc}^{(2)}(s) = 0 \quad (\text{B.2})$$

Como la región 1 es igual a la región 2, y además, la discontinuidad es de espesor nulo, se puede reescribir (B.2) utilizando el formalismo de la expansión modal,

$$\sum_{m=2}^{\infty} V_m \mathbf{e}_m(s) + V_0 \frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 + V_1 \frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_1}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_1}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 = 0 \quad (\text{B.3})$$

donde \mathbf{e}_m es la función vector modal eléctrica, V_m es la tensión modal total en la interfaz y m se refiere a todos los modos TE y TM de la guía. En esta ecuación m comienza en 2 para que no se confunda con el término del segundo pulso. Aún así, $m = 2$ hace referencia al primer modo accesible.

Una vez aplicada esta condición se reescribe la ecuación (B.3) separando los modos accesibles de los modos localizados. El resultado es,

$$\sum_{n=1}^N V_n \mathbf{e}_n(s) + V_0 \frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 + V_1 \frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_1}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_1}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 = \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \bar{I}_m \mathbf{e}_m(s) \quad (\text{B.4})$$

donde N es el número de modos accesibles en la red equivalente, \bar{I}_m es la corriente total modal en la interfaz ($\bar{I}_m = \bar{I}_m^{(1)} - \bar{I}_m^{(2)}$) y Z_m^T es la impedancia total modal, donde $Z_m^T = Z_m^{(1)} || Z_m^{(2)}$.

Continuando con el desarrollo, ahora es necesario buscar la relación entre la corriente modal (\bar{I}_m) y el campo magnético en la interfaz. La relación entre ambos parámetros es,

$$\bar{I}_m = \int_{obs} [z_0 \times (\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)})(s')] \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (\text{B.5})$$

siendo $\mathbf{H}_t^{(\delta)}$ el campo magnético en el parche metálico. La integral se extiende a lo largo del parche metálico, por lo que *obs* se refiere a la superficie de dicho parche de dimensiones $a_p \times b_p$ (ver Figura 2.1).

Debido a la linealidad del problema, el campo magnético desconocido en el obstáculo puede ser expandido en un sumatorio de las corrientes eléctricas parciales (\mathbf{N}_n y \mathbf{N}_0),

$$[z_0 \times (\mathbf{H}_t^{(1)} - \mathbf{H}_t^{(2)})(s')] = \sum_{n=2}^N V_n \mathbf{N}_n(s') + V_0 \mathbf{N}_0(s') + V_1 \mathbf{N}_1(s') \quad (\text{B.6})$$

donde \mathbf{N}_0 , \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_n son las funciones todavía desconocidas del problema.

Ahora, se introduce la ecuación (B.6) en (B.5) obteniendo la siguiente expresión de la corriente modal,

$$\bar{I}_m = \int_{obs} \left(\sum_{n=2}^N V_n \mathbf{N}_n(s') + V_0 \mathbf{N}_0(s') + V_1 \mathbf{N}_1(s') \right) \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (\text{B.7})$$

Si además, introducimos la ecuación (B.7) en (B.4), se pueden obtener las ecuaciones integrales fundamentales del problema, siendo estas ecuaciones las que se muestran a continuación,

$$\sum_{n=2}^N V_n \mathbf{e}_n(s) = \sum_{n=2}^N V_n \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y_0} \right) \mathbf{x}_0 = \int_{obs} \mathbf{N}_0(s') \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' ds' \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_1} \right) \left(\frac{y-y_1}{\Delta y_1} \right) \mathbf{x}_0 = \int_{obs} \mathbf{N}_1(s') \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' ds' \quad (\text{B.10})$$

donde el kernel de las ecuaciones integrales es el termino expresado como un sumatorio de los infinitos modos.

$$\mathbf{K}(s, s') = \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T \mathbf{e}_m(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (\text{B.11})$$

Para completar la formulación se escriben las corrientes modales en función de la tensión modal.

$$I_0 = Y_{0,0}V_0 + Y_{0,1}V_1 + \sum_{n=2}^N Y_{0,n}V_n \quad (\text{B.12})$$

$$I_1 = Y_{1,0}V_0 + Y_{1,1}V_1 + \sum_{n=2}^N Y_{1,n}V_n \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{I}_m = Y_{m,0}V_0 + Y_{m,1}V_1 + \sum_{n=2}^N Y_{m,n}V_n \quad (\text{B.14})$$

De las ecuaciones (B.12), (B.13) y (B.14) se pueden identificar los elementos de la matriz generalizada de acoplamiento de admitancia. Las expresiones de estos elementos son:

$$Y_{0,0} = \int_{obs} \mathbf{N}_0(s') \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x'-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y'-y_0}{\Delta y} \right) \mathbf{x}_0 \right] ds' \quad (\text{B.15})$$

$$Y_{0,1} = \int_{obs} \mathbf{N}_1(s') \left[\frac{1}{\Delta x_0} \prod \left(\frac{x'-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y'-y_0}{\Delta y_0} \right) \mathbf{x}_0 \right] ds' \quad (\text{B.16})$$

$$Y_{0,n} = \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x'-x_0}{\Delta x_0} \right) \left(\frac{y'-y_0}{\Delta y_0} \right) \mathbf{x}_0 \right] ds' \quad (\text{B.17})$$

$$Y_{1,0} = \int_{obs} \mathbf{N}_0(s') \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x'-x_1}{\Delta x_1} \right) \left(\frac{y'-y_1}{\Delta y_1} \right) \mathbf{x}_0 \right] ds' \quad (\text{B.18})$$

$$Y_{1,1} = \int_{obs} \mathbf{N}_1(s') \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x'-x_1}{\Delta x_1} \right) \left(\frac{y'-y_1}{\Delta y_1} \right) \mathbf{x}_0 \right] ds' \quad (\text{B.19})$$

$$Y_{1,n} = \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x'-x_1}{\Delta x_1} \right) \left(\frac{y'-y_1}{\Delta y_1} \right) \mathbf{x}_0 \right] ds' \quad (\text{B.20})$$

$$Y_{m,0} = \int_{obs} \mathbf{N}_0(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (\text{B.21})$$

$$Y_{m,1} = \int_{obs} \mathbf{N}_1(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (\text{B.22})$$

$$Y_{m,n} = \int_{obs} \mathbf{N}_n(s') \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (\text{B.23})$$

Una vez se conocen los elementos, la matriz generalizada de acoplamiento de admitancias queda del siguiente modo:

$$\bar{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} Y_{0,0} & Y_{0,1} & Y_{0,2} & \dots & Y_{0,N} \\ Y_{1,0} & Y_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & & & \cdot \\ \vdots & & & & \cdot \\ Y_{M,0} & Y_{M,1} & Y_{M,2} & \dots & Y_{M,N} \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Destacar que las dos primeras fila y columnas de la matriz hacen referencia a la interacción del pulso con los diferentes modos accesibles.

A continuación, en la Figura B.2 se puede observar la red equivalente de una estructura como la que aparece en la Figura B.1.

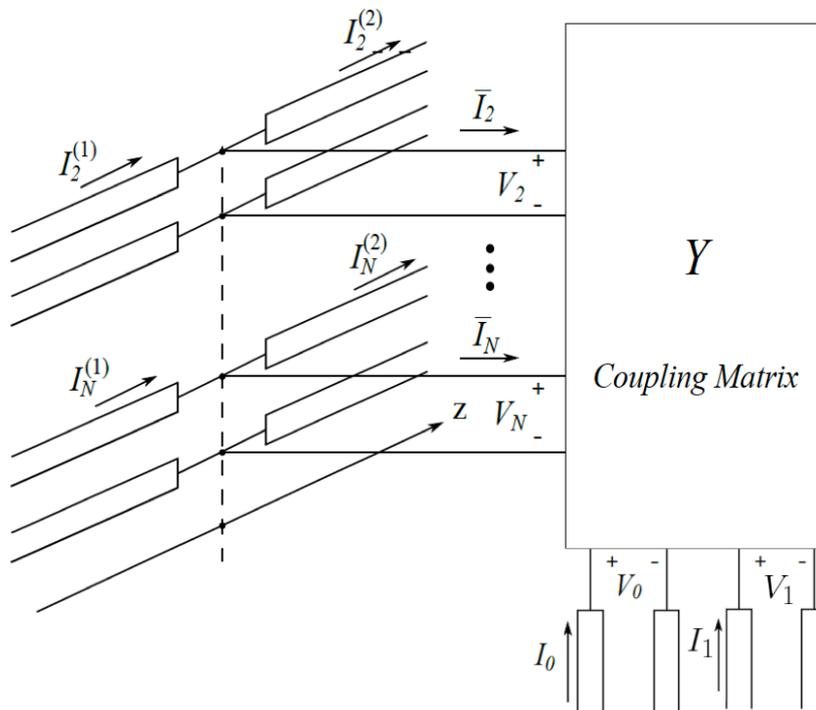


Figura B.2: Red Multimodo Equivalente para la estructura de la Figura B.1.

Para poder resolver la matriz de acoplamientos de admitancia de la ecuación (B.24) se necesita expandir las funciones no conocidas (\mathbf{N}_0 y \mathbf{N}_n) aplicando el Método de los Momentos (MoM) junto con el procedimiento de Galerkin [4]. Dichas funciones, se expanden en el siguiente sumatorio de funciones de base,

$$\mathbf{N}_0(s') = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(1)}(s') + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(2)} \mathbf{e}_k^{(2)}(s') + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(3)} \mathbf{e}_k^{(3)}(s') \quad (\text{B.25})$$

$$\mathbf{N}_1(s') = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(1)}(s') + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(2)} \mathbf{e}_k^{(2)}(s') + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(3)} \mathbf{e}_k^{(3)}(s') \quad (\text{B.26})$$

$$\mathbf{N}_n(s') = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(1)} \mathbf{e}_k^{(1)}(s') + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(2)} \mathbf{e}_k^{(2)}(s') + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(3)} \mathbf{e}_k^{(3)}(s') \quad (\text{B.27})$$

donde N_b es el número de funciones de base utilizadas en el MoM y $\alpha_{n,k}$, $\alpha_{0,k}$ y $\alpha_{1,k}$ son los coeficientes todavía desconocidos. Del mismo modo que en el Capítulo 1, las funciones de base son iguales a las funciones de test ($\mathbf{e}_k^b = \mathbf{e}_i^b$). En este caso los superíndices “b” de \mathbf{e}_k^b y \mathbf{e}_i^b se sustituyen por 1, 2 y 3. Estos números hacen referencia a los diferentes parches metálicos de la estructura.

Introduciendo las ecuaciones (B.25), (B.26) y (B.27) en las ecuaciones (B.8), (B.9) y (B.10) respectivamente, se pueden reescribir las ecuaciones integrales fundamentales del problema con el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} C_{i,n}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(1)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(1)} C_{i,m}^{(j)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(2)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(2)} C_{i,m}^{(j)} \\ &+ \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(3)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(3)} C_{i,m}^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} C_{i,0}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(1)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(1)} C_{i,m}^{(j)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(2)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(2)} C_{i,m}^{(j)} \\ &+ \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(3)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(3)} C_{i,m}^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} C_{i,1}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(1)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(1)} C_{i,m}^{(j)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(2)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(2)} C_{i,m}^{(j)} \\ &+ \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(3)} \sum_{m=N+1}^{\infty} Z_m^T C_{k,m}^{(3)} C_{i,m}^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

donde el superíndice $j = 1, 2$ o 3 , dependiendo de la función de test aplicada ($\mathbf{e}_i^{(1)}(s)$, $\mathbf{e}_i^{(2)}(s)$ y $\mathbf{e}_i^{(3)}(s)$). Además, las integrales de acoplo son los siguientes términos:

$$C_{k,m}^{(i)} = \int_{obs} \mathbf{e}_k^{(i)}(s') \cdot \mathbf{e}_m^*(s') ds' \quad (\text{B.31})$$

El superíndice $i = 1, 2$ o 3 hace referencia a las diferentes funciones de base.

$$C_{i,m}^{(j)} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^{(j)}(s) \cdot \mathbf{e}_m(s) ds \quad (\text{B.32})$$

$$C_{i,n}^{(j)} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^{(j)}(s) \mathbf{e}_n(s) ds \quad (\text{B.33})$$

$$C_{i,0}^{(j)} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^{(j)}(s) \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_0}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_0}{\Delta y} \right) \right] \quad (\text{B.34})$$

$$C_{i,1}^{(j)} = \int_{obs} \mathbf{e}_i^{(j)}(s) \left[\frac{1}{\Delta x} \prod \left(\frac{x-x_1}{\Delta x} \right) \left(\frac{y-y_1}{\Delta y_0} \right) \right] \quad (\text{B.35})$$

El superíndice j hace referencia a las diferentes funciones de test aplicadas.

Los elementos de la matriz generalizada de acoplamiento de admitancia ($\bar{\mathbf{Y}}$) pueden ser calculados como:

$$Y_{0,0} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(1)} C_{k,0}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(2)} C_{k,0}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(3)} C_{k,0}^{(3)} \quad (\text{B.36})$$

$$Y_{0,1} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(1)} C_{k,0}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(2)} C_{k,0}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(3)} C_{k,0}^{(3)} \quad (\text{B.37})$$

$$Y_{n,1} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(1)} C_{k,0}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(2)} C_{k,0}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(3)} C_{k,0}^{(3)} \quad (\text{B.38})$$

$$Y_{1,0} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(1)} C_{k,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(2)} C_{k,1}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(3)} C_{k,1}^{(3)} \quad (\text{B.39})$$

$$Y_{1,1} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(1)} C_{k,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(2)} C_{k,1}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(3)} C_{k,1}^{(3)} \quad (\text{B.40})$$

$$Y_{1,n} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(1)} C_{k,1}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(2)} C_{k,1}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(3)} C_{k,1}^{(3)} \quad (\text{B.41})$$

$$Y_{m,0} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(1)} C_{k,m}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(2)} C_{k,m}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{0,k}^{(3)} C_{k,m}^{(3)} \quad (\text{B.42})$$

$$Y_{m,1} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(1)} C_{k,m}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(2)} C_{k,m}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{1,k}^{(3)} C_{k,m}^{(3)} \quad (\text{B.43})$$

$$Y_{m,n} = \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(1)} C_{k,m}^{(1)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(2)} C_{k,m}^{(2)} + \sum_{k=1}^{N_b} \alpha_{n,k}^{(3)} C_{k,m}^{(3)} \quad (\text{B.44})$$

El paso siguiente es calcular los parámetros S. El siguiente paso es calcular los parámetros S. Este desarrollo, que es independiente del número de parches metálicos intermedios, ya ha quedado explicado en la sección 2.2, donde ya se han considerado dos puertos de excitación en el plano transversal.

Bibliografía

- [1] N. MARCUVITZ, *Waveguide Handbook, MIT Radiation Laboratory Series*, vol. 10, New York Mc-Graw-Hill, 1951.
- [2] M. SALAZAR PALMA, T. K. SARKAR, L. E. GARCIA CASTILLO, T. ROY y A. DJORDJEVIC, *Iterative and Self-Adaptive Finite Elements in Electromagnetic Modeling*. Norwood, MA, USA: Artech House, Inc., 1998.
- [3] A. F. PETERSON, S. L. RAY y R. MITTRA, *Finite-Difference Time Domain Methods on Orthogonal Meshes*. Wiley-IEEE Press, 1998, pp. 495-523.
- [4] G. CONCIAURO, M. GUGLIELMI y R. SORRENTINO, *Advanced Modal Analysis. CAD Techniques for Waveguide Components and Filters*, New York: J. Wiley & Sons, 1999.
- [5] ANTONIO MANUEL HUESCAR DE LA CRUZ, *Trabajo final de grado. Formulación de Red Multimodo Equivalente para el análisis de discontinuidades planares en dispositivos en guía de onda*. Oct. 2019, pp. 25-47
- [6] G. CONCIAURO, M. BRESSAN AND C. ZUFFADA, 'Waveguide modes via an integral equation leading to a linear matrix eigenvalue problem', *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, vol. MTT-32, no. 11, Nov. 1984, pp. 1495 - 1504.
- [7] CELIA GÓMEZ MOLINA, FERNANDO QUESADA PEREIRA, ALEJANDRO ÁLVAREZ MELCÓN, STEPHAN MARINI, MIGUEL A. SÁNCHEZ-SORIANO, VICENTE E. BORRÍA AND MARCO GUGLIELMI. 'Multimode Equivalent Network for Boxed Multilayer Arbitrary Planar Circuits', *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, vol. 68, pp. 2501 - 2514.
- [8] <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/fest3d/>.
- [9] ANTONIO MANUEL HUESCAR DE LA CRUZ, *Trabajo final de grado. Formulación de Red Multimodo Equivalente para el análisis de discontinuidades planares en dispositivos en guía de onda*. Oct. 2019, pp. 75-82
- [10] CELIA GÓMEZ MOLINA, *Investigación en Técnicas Numéricas Basadas en Ecuación Integral para el Análisis Y Diseño de Dispositivos de Microondas para Comunicaciones Espaciales*. Nov. 2020