UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

Índice de K-determinación de espacios topológicos y σ-fragmentabilidad de aplicaciones

María Muñoz Guillermo

2003

ÍNDICE DE K-DETERMINACIÓN DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS Y σ-FRAGMENTABILIDAD DE APLICACIONES

Don Pascual Lucas Saorín, Profesor Titular de Universidad del Área de Geometría y Topología y Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

INFORMA: Que la Tesis Doctoral titulada "ÍNDICE DE K-DETERMINACIÓN DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS Y σ-FRAGMENTABILIDAD DE APLICACIONES", ha sido realizada por Dña. María Muñoz Guillermo, bajo la inmediata dirección y supervisión de D. Bernardo Cascales Salinas y D. José Orihuela Calatayud, y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Murcia, a 23 de Diciembre de 2003

Fdo: Pascual Lucas Saorín

ÍNDICE DE K-DETERMINACIÓN DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS Y σ-FRAGMENTABILIDAD DE APLICACIONES

D. Bernardo Cascales Salinas y D. José Orihuela Calatayud, Profesor Titular y Catedrático, respectivamente, del Área de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

AUTORIZAN: La presentación de la Tesis Doctoral titulada "ÍNDICE DE K-DETERMINACIÓN DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS Y σ-FRAGMENTABILIDAD DE APLICACIONES" realizada por Dña. María Muñoz Guillermo, bajo nuestra inmediata dirección y supervisión, en el Departamento de Matemáticas, y que presenta para la obtención del Grado de Doctor por la Universidad de Murcia.

En Murcia, a 23 de Diciembre de 2003

Fdo: Bernardo Cascales Salinas José Orihuela Calatayud

Aprovecho esta oportunidad para agradecer a mis directores de tesis Dr. Bernardo Cascales Salinas y Dr. José Orihuela Calatayud su apoyo para la realización de esta memoria. Por mostrarme el camino y por enseñarme una forma de trabajar. Asimismo quisiera agradecer a los miembros del grupo de Análisis Funcional la ayuda que me han prestado, especialmente a Dr. Luis Oncina Deltell y Dr. Matías Raja Baño.

Agradecer también a Dra. María Ángeles Hernández Cifre su ayuda y apoyo en numerosas ocasiones. A mi compañero de despacho Dr. Juan Medina Molina, su confianza y ánimo en momentos difíciles.

Por último quisiera agradecer a mis padres y amigos el haber permanecido a mi lado y en general a todas aquellas personas que en algún momento durante estos años han aportado algún rayo de luz cuando lo necesitaba.

Especialmente tengo que agradecer a Juan su amor, su cariño e inquebrantable apoyo. Han sido muchos días, muchas horas... levantándome cuando yo sola no podía hacerlo, confiando en mí más que yo misma. Han sido vacaciones de trabajo, sin quejas, sin reproches... No podría resumir en unas líneas lo mucho que ha aportado a este trabajo.

GRACIAS A TODOS.

A Juan.

Introducción

Nuestra notación, terminología y definiciones básicas son estándar y se presentan entre las páginas xxi-xxv que siguen. En esta memoria se introducen y estudian ciertas cuestiones de topología que son aplicadas a espacios de funciones continuas, espacios de Banach y espacios localmente convexos. Siendo más concretos, los tres capítulos de la memoria se pueden resumir como sigue:

Capitulo 1. Filtros y uscos en espacios topológicos. Estudiamos los conceptos de filtro compactoide y numerablemente compactoide tal y como se introducen en las definiciones 1.2.1 y 1.3.4: *un filtro $\mathscr{F}$ en un espacio topológico se dice que es compactoide (resp. numerablemente compactoide) si todo ultrafiltro más fino que él converge (resp. si todo filtro de base numerable que lo corta tiene un punto de aglomeración)*. El estudio que hacemos sobre filtros compactoides y numerablemente compactoides se aplica para *generar* uscos (aplicaciones multivaluadas con valores compactos y superiormente semicontinuas) en dominios métricos, véase el teorema 1.6.1. Estos resultados sobre filtros también nos permiten obtener de forma sencilla los teoremas de Wallace, corolario 1.5.5 y de Kuratowski, corolario 1.7.7. Algunos de nuestros resultados aquí unifican y mejoran resultados en [12, 23, 21, 70].

Capitulo 2. Índice de K-determinación de espacios topológicos. En este segundo capítulo introducimos y estudiamos el índice de K-determinación $\ell\Sigma(Y)$ de un espacio topológico Y:

Definición 2.1.1. *Llamamos índice de K-determinación de un espacio topológico Y, y lo denotamos por $\ell\Sigma(Y)$, al cardinal más pequeño $\mathfrak{m}$ para el cual existe un* *espacio métrico M de peso $\mathfrak{m}$ y una aplicación multivaluada $\phi : M \to 2^Y$ usco tal que $Y = \bigcup \{\phi(x) : x \in M\}$.*

Estudiamos el comportamiento de $\ell\Sigma$ con respecto a las operaciones habituales en espacios topológicos y lo relacionamos con otras funciones cardinal ampliamente estudiadas en topología, en particular, encontramos relaciones no triviales entre $\ell\Sigma(Y)$, la *tightness* de $C_p(Y)$ y el índice de monoliticidad de los compactos de $C_p(Y)$. Cuando $\ell\Sigma(Y) = \aleph_0$ el espacio Y es numerablemente determinado y nuestros resultados tienen, como caso particular, los resultados que eran conocidos para este último tipo de espacios; en particular, en espacios $C(K)$ y espacios de Banach, extendemos un buen número de los resultados que M. Talagrand había demostrado en [77] para espacios de Banach débilmente K-analíticos y débilmente numerablemente determinados. El análisis realizado sobre filtros compactoides y numerablemente compactoides en el capítulo anterior, nos ha permitido en este capítulo intuir resultados y dar sus demostraciones, muchas veces, breves y elegantes (a nuestro juicio). Nos hemos ocupado de dar numerosas aplicaciones de los resultados establecidos. Destacamos el estudio que hacemos sobre la noción de Σ-grado de Hödel en la sección 2.8, así como las aplicaciones que damos a: (A) espacios localmente convexos en las secciones 2.7 y 2.9 que extienden resultados de [9, 15, 50]; (B) espacios uniformes en la sección 2.10 que extiende resultados de [14]. Siempre que nos ha sido posible, hemos puesto de manifiesto mediante ejemplos, que nuestros resultados son los *más finos* que se pueden demostrar, véanse los ejemplos 2.3.12 y 2.3.20.

Capitulo 3. Fragmentabilidad y σ-fragmentabilidad de aplicaciones. En este capítulo realizamos un estudio exhaustivo de aplicaciones y multifunciones σ-fragmentables; estudiamos familias que gozan de estas propiedades de manera uniforme. En nuestro caso el concepto primitivo es el de *barely-continuidad* o propiedad del punto de continuidad: *una función f de un espacio topológico Y en un espacio métrico (M,d) se dice que tiene la propiedad del punto de continuidad, si f tiene un punto de continuidad al restringirla a cada subconjunto cerrado de Y*. Mediante descomposiciones numerables y pasos al límite llegamos a las funciones σ-fragmentables: *$f : Y \to M$ es σ-fragmentable, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una descomposición $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n^{\varepsilon}$ de tal forma que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $A \subset Y_n^{\varepsilon}$ es un conjunto no vacío existe un abierto $U \subset Y$ con $U \cap A \neq \emptyset$ y $d-\mathrm{diam}(f(U \cap A)) < \varepsilon$.*

Estas funciones se introdujeron junto con su versión multivaluada en [45] para estudiar selectores. En este capítulo mostramos propiedades de las aplicaciones σ-fragmentables siguiendo el esquema de [65], y vemos como podemos extender a aproximaciones σ-fragmentables de la función dualidad de cualquier espacio de Banach las propiedades frontera que tenía el selector de la primera clase de Baire (véase Theorem 26 en [45]) para espacios de Asplund. Con ello obtenemos versiones no separables de un resultado de Godefroy para fronteras separables, véase el lema 3.3.4, dando respuesta una pregunta de A. Plichko sobre el mismo, véanse los teoremas 3.3.11 y 3.3.12.

$\diamondsuit$

Algunas propiedades sobre aplicaciones multivaluadas pueden ser expresadas en términos de propiedades de ciertos filtros en el espacio imagen. Por ejemplo:

Definición 1.2.1. *Un filtro $\mathscr{F}$ en un espacio topológico Y se dice que subconverge a un subconjunto L en Y (denotado $\mathscr{F} \rightsquigarrow L$), si dado un subconjunto abierto V de Y con $L \subset V$ existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \subset V$.*

Definición 1.2.5. *Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación multivaluada $\psi : X \to 2^Y$ se dice que es superiormente semicontinua en un punto $x_0 \in X$ si $\psi(x_0)$ es no vacío y para cada subconjunto abierto V en Y con $\psi(x_0) \subset V$ existe un entorno abierto U de x_0 en X tal que $\psi(U) \subset V$. En otras palabras ψ es superiormente semicontinua en x_0 si, y sólo si, $\psi(\mathscr{N}_{x_0}) \rightsquigarrow \psi(x_0)$, donde $\mathscr{N}_{x_0}$ es una base de entornos de x_0.*

Es razonable, por tanto, estudiar filtros en espacios topológicos para luego sacar ventaja de este estudio y deducir propiedades, por ejemplo, para aplicaciones multivaluadas. Con esta motivación estudiamos las nociones ya presentadas anteriormente de filtro compactoide, numerablemente compactoide y filtro subconvergente.

El concepto de filtro compactoide fue definido por primera vez por Topsoe en [78], y años después re-definido por Dolecki and Lechicki en [22]. El concepto de filtro compactoide generaliza a la vez el concepto de filtro (o red) convergente y de conjunto compacto. La noción de filtro compactoide se ha revelado como una herramienta útil en optimización, diferenciación, existencia de funciones superiormente semicontinuas, teoría del punto fijo, etc. -véanse por ejemplo, [21, 23, 57, 58, 70].

El primer resultado notable del capítulo es el que se establece la relación entre filtros compactoides y filtros subconvergentes —la terminología es la siguiente: si $\mathscr{F}$ es un filtro y $\mathscr{B}$ una base de filtro, entonces $C(\mathscr{F})$ y $C(\mathscr{B})$ son el conjunto de sus puntos de aglomeración, véase (1.2) en la página 3. Si $(y_i)_{i\in D}$ es una red el símbolo $(y_i)_{i\in D} \prec \mathscr{B}$ significa que $(y_i)_{i\in D}$ está eventualmente en cada elemento de $\mathscr{B}$.

Teorema 1.2.3. *Sea Y un espacio topológico y $\mathscr{B}$ una base de filtro en Y. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

(i) *existe un subconjunto compacto no vacío L de Y tal que $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en Y;*

(ii) *$C(\mathscr{B})$ es un compacto no vacío y $\mathscr{B} \rightsquigarrow C(\mathscr{B})$ en Y;*

(iii) *para cada cubrimiento abierto $\{O_s\}_{s\in S}$ de Y, existe un subconjunto finito S_0 de S y $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset \bigcup_{s\in S_0} O_s$;*

(iv) *para cada filtro $\mathscr{G}$ en Y que corta $\mathscr{B}$ se verifica que $C(\mathscr{G}) \neq \emptyset$;*

(v) *cada red $(y_i)_{i\in D} \prec \mathscr{B}$ tiene un punto de aglomeración en Y;*

(vi) *$\mathscr{B}$ es compactoide en Y.*

Entonces, (i) *y* (ii) *son equivalentes e implican cada una de las condiciones* (iii), (iv), (v) *y* (vi), *que a su vez son equivalentes entre sí. Si además, Y es regular, entonces todas las condiciones anteriores son equivalentes.*

La caracterización de los filtros numerablemente compactoides la obtenemos en la proposición que sigue:

Proposición 1.3.5. *Sea Y un espacio topológico y $\mathscr{B}$ una base de filtro en Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *para cada cubrimiento abierto $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Y, existe un subconjunto finito N_0 de $\mathbb{N}$ y $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset \bigcup_{n\in N_0} O_n$;*

(ii) *para cada filtro $\mathscr{G}$ con base numerable en Y que corta $\mathscr{B}$, tenemos $C(\mathscr{G}) \neq \emptyset$.*

Cada una de las condiciones equivalentes anteriores implica la condición:

(iii) *toda sucesión $(y_n)_n \prec \mathscr{B}$ tiene un punto de aglomeración en Y.*

Si además, $\mathscr{B}$ es numerable entonces (i), (ii) *y* (iii) *son equivalentes.*

En espacios en los que el comportamiento de los subconjuntos *relativamente numerablemente compactos* es bueno, los filtros compactoides y numerablemente compactoides de base numerable coinciden tal y como se recoge debajo. Este resultado es una herramienta esencial para estudiar uscos definidas en espacios que satisfacen el Primer Axioma de Numerabilidad.

Teorema 1.3.12. *Sea Y un espacio topológico en el que los conjuntos relativamente numerablemente compactos son relativamente compactos. Si $\mathscr{B}$ es una base de filtro numerable en Y, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *existe un subconjunto no vacío y numerablemente compacto L de Y tal que $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en Y;*

(ii) *para cada cubrimiento abierto numerable $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Y, existe un subconjunto finito N de $\mathbb{N}$ y $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset \bigcup_{n\in N} O_n$;*

(iii) *$\mathscr{B}$ es numerablemente compactoide en Y;*

(iv) *cada sucesión $(y_n)_n \prec \mathscr{B}$ tiene un punto de aglomeración en Y;*

(v) *$C_s(\mathscr{B})$ es numerablemente compacto no vacío y $\mathscr{B} \rightsquigarrow C_s(\mathscr{B})$ en Y;*

(vi) *$\mathscr{B}$ es compactoide en Y.*

Si dos topologías tienen los mismos compactos entonces tienen los mismos filtros compactoides de base numerable, corolario 1.4.2. En particular un espacio topológico (Y,τ) y su k-espacio asociado (Y,τ^k) tienen los mismos filtros compactoides y subconvergentes de base numerable; este último resultado no es cierto para filtros compactoides subconvergentes sin la restricción de ser de base numerable, ejemplo 1.4.17.

Los resultados que hemos ido obteniendo con anterioridad se aplican de forma inmediata para estudiar el comportamiento de los filtros respecto de productos:

Proposición 1.5.4. *Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $i \in I$ sea $\mathscr{B}_i$ una base de filtro en Y_i que subconverge a un subconjunto compacto no vacío $L_i \subset Y_i$. Entonces, $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ subconverge a $\prod_{i\in I} L_i$.*

De la proposición anterior se obtiene como consecuencia sencilla que el producto arbitrario de aplicaciones usco es usco otra vez, proposición 1.6.3 y el clásico teorema de Wallace que aparece debajo.

Corolario 1.5.5. (Teorema de Wallace, [25]) *Sean $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $L_i \subset Y_i$ un conjunto compacto de Y_i, para cada $i \in I$. Entonces para cada abierto W en $\prod_{i\in I} Y_i$ con*

$$\prod_{i\in I} L_i \subset W,$$

existen abiertos $U_i \subset Y_i$, para cada $i \in I$, con $U_i = Y_i$ salvo para una cantidad finita de índices, tales que

$$\prod_{i\in I} L_i \subset \prod_{i\in I} U_i \subset W.$$

Citamos por último, como uno de los resultados también centrales del capítulo, un resultado que jugará un papel esencial para la generación y extensión de aplicaciones usco que necesitaremos en el capítulo 2.

Teorema 1.6.1. *Sean X e Y espacios topológicos, Y regular. Para cada $x \in X$ fijamos $\mathcal{N}_x$ una base de entornos de x en X. Sea Z un subconjunto denso de X y $\varphi : Z \to 2^Y$ una aplicación multivaluada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $\phi : X \to 2^Y$ usco tal que*

$$\varphi(x) \subset \phi(x) \text{ para cada } x \in Z; \tag{1}$$

(ii) *la base de filtro*

$$\{\varphi(U \cap Z)\}_{U \in \mathcal{N}_x} \text{ es compactoide en } Y, \text{ para cada } x \in X. \tag{2}$$

Cuando (ii) se satisface, si para cada $x \in X$ definimos

$$\psi(x) = \bigcap\{\overline{\varphi(U \cap Z)} : U \in \mathcal{N}_x\},$$

entonces $\psi : X \to 2^Y$ es usco y es mínima con respecto a todas las aplicaciones usco de X en 2^Y que tienen la propiedad (1). *Si además φ es usco sobre Z, entonces $\varphi(x) = \psi(x)$ para cada $x \in Z$.*

En el caso en el que X satisface el Primer Axioma de Numerabilidad e Y es tal que los subconjuntos relativamente numerablemente compactos son relativamente compactos, la condición (2) *se satisface si, y sólo si, la siguiente condición se verifica:*

$$\begin{aligned} &\text{para cada sucesión } (x_n)_n \text{ en } Z \text{ convergente en } X, \\ &\text{el conjunto } \bigcup_n \varphi(x_n) \text{ es relativamente compacto en } Y. \end{aligned}$$

◊

Siguiendo a Hödel en [44] llamamos *función cardinal* ξ a aquella que asigna a cada espacio topológico un número cardinal, con la propiedad de que $\xi(X) = \xi(Y)$ siempre que X e Y son homeomorfos. Las funciones cardinales, según palabras de R. Hödel,

> *«son herramientas que sirven para estudiar y extender nociones topológicas tan importantes para un espacio topológico como son el ser separable, ser primer axioma o tener base numerable. Las funciones cardinales permiten formular, generalizar y probar resultados que establecen de forma precisa y cuantitativa comparaciones entre ciertas propiedades topológicas de una forma sistemática y elegante.»*

Los primeros ejemplos de funciones cardinales son las que a un espacio topológico Y le asocian su peso, $\mathrm{w}(Y)$, carácter de densidad, $\mathrm{d}(Y)$, *tightness*, $\mathrm{t}(Y)$, carácter, $\chi(Y)$, *tightness*, $\mathrm{t}(Y)$, número de Lindelöf, $\ell(Y)$ y peso de *network*, $\mathrm{nw}(Y)$, véanse las definiciones 1.6.9, 2.1.3, 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.13 y las referencias [1, 25], entre otros.

El índice de K-determinación $\ell\Sigma(Y)$ de un espacio Y tal y como aparece en la definición 2.1.1 es una función cardinal que se caracteriza en los términos que siguen.

Proposición 2.1.5. *Sea Y un espacio topológico completamente regular y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\ell\Sigma(Y) \leq \mathfrak{m}$*;*

(ii) *existe un conjunto I con $|I| \leq \mathfrak{m}$, un subespacio $\Sigma \subset I^{\mathbb{N}}$ y una aplicación usco $\Psi : \Sigma \to 2^Y$ tal que $Y = \bigcup\{\Psi(\alpha) : \alpha \in \Sigma\}$;*

(iii) *existe una familia de conjuntos cerrados $\mathscr{A} = \{A_j : j \in J\}$ en βY, $|J| \leq \mathfrak{m}$, tal que para cada $y \in Y$ existe una sucesión $(j_n)_n \subset J$, tal que*

$$y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{j_n} \subset Y.$$

$\boxed{\text{Operaciones con } \ell\Sigma}$

Las propiedades del índice de K-determinación con respecto a las operaciones habituales de espacios topológicos aparecen recogidas en las proposiciones 2.2.3, 2.2.4, 2.2.6, 2.2.7, 2.2.9, 2.2.10, 2.2.14 y el corolario 2.2.8 y son las siguientes:

(i) *Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Si $\ell\Sigma(Y_n) \leq \mathfrak{m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\ell\Sigma\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \leq \mathfrak{m}$.*

(ii) *Sean Y un espacio topológico y $Z \subset Y$ un subespacio cerrado. Entonces, se tiene que $\ell\Sigma(Z) \leq \ell\Sigma(Y)$.*

(iii) *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito e $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos disjuntos tales que $\ell\Sigma(Y_i) \leq \mathfrak{m}$ para cada $i \in I$ e $|I| \leq \mathfrak{m}$, entonces $\ell\Sigma(\oplus_i Y_i) \leq \mathfrak{m}$.*

(iv) *Sean X e Y espacios topológicos, y $\phi : X \to 2^Y$ una aplicación multivaluada usco tal que $Y = \bigcup_{x\in X} \phi(x)$. Entonces, $\ell\Sigma(Y) \leq \ell\Sigma(X)$.*

(v) *Sean Y y Z espacios topológicos y $f : Y \to Z$ una aplicación continua y suprayectiva. Entonces, $\ell\Sigma(Z) \leq \ell\Sigma(Y)$.*

(vi) *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito e $(Y_i)_{i\in I}$, $|I| \leq \mathfrak{m}$, una familia de subespacios de un espacio topológico Y. Si $\ell\Sigma(Y_i) \leq \mathfrak{m}$, para cada $i \in I$, entonces $\ell\Sigma(\bigcup_{i\in I} Y_i) \leq \mathfrak{m}$.*

(vii) *Sea Y un espacio vectorial topológico y Z un subconjunto de Y. Entonces, se tiene que $\ell\Sigma(span(Z)) \leq \ell\Sigma(Z)$, donde $span(Z)$ denota el espacio vectorial generado por Z.*

(viii) *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías regulares en un espacio topológico Y. Si τ_1 y τ_2 tienen los mismos compactos, entonces $\ell\Sigma(Y,\tau_1) = \ell\Sigma(Y,\tau_2)$.*

Relaciones de $\ell\Sigma$ con otros índices

La relación del índice de K-determinación con otras funciones cardinal se recogen en las proposiciones 2.3.4, 2.3.5, 2.3.14 y corolario 2.3.7 y las enumeramos a continuación:

(i) *Sea Y un espacio topológico. Entonces $\ell(Y) \leq \ell\Sigma(Y)$.*

(ii) *Sea M un espacio métrico. Entonces $\ell\Sigma(M) = \mathrm{w}(M) = d(M) = \ell(M)$.*

(iii) *Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos tal que $\ell\Sigma(Y_n) \leq \mathfrak{m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\ell\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \leq \mathfrak{m}$.*

(iv) *Sean (Y,τ) un espacio topológico y $\mathscr{G}$ una topología para Y más gruesa que τ. Entonces $d((Y,\tau)) \leq \text{máx}\left\{\ell\Sigma(Y,\tau), \mathrm{nw}((Y,\mathscr{G}))\right\}$.*

Con relación al peso no se da, en general, ni $\ell\Sigma(Y) \leq \mathrm{w}(Y)$ ni la desigualdad contraria: si Y es un espacio Banach reflexivo que no es de dimensión finita, entonces se tiene $\aleph_0 = \ell\Sigma(Y) < \mathrm{w}(Y)$. El ejemplo 2.3.12 muestra que se puede construir un espacio topológico Y tal que $\mathrm{w}(Y) < \ell\Sigma(Y)$.

$\ell\Sigma$ en espacios de Banach

Además de las relaciones comentadas más arriba de $\ell\Sigma$ con otras funciones cardinal para espacios topológicos generales, para espacios de Banach se tienen otras relaciones adicionales que se recogen en las las proposiciones 2.4.1, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.7, 2.4.11 y 2.4.12. Estas propiedades son las que aparecen debajo:

(i) *Sea K un espacio compacto, entonces*

$$\begin{aligned}\text{máx}\left\{\ell(C(K),\tau_p), \ell(C(K),\omega)\right\} &\leq \ell\Sigma(C(K),\tau_p) = \ell\Sigma(C(K),\omega) \leq \\ &\leq \mathrm{w}(C(K), \|\cdot\|_\infty).\end{aligned}$$

(ii) *Sea Y un espacio de Banach y $Z \subset Y$ un subespacio denso. Entonces, se tiene que $\ell\Sigma(Y,\sigma(Y,Y^*)) \leq \ell\Sigma(Z,\sigma(Z,Z^*))$.*

(iii) *Sea Y un espacio de Banach. Entonces, $d(Y,w) \leq \text{máx}\left\{d(Y^*,w^*), \ell\Sigma(Y,w)\right\}$.*

(iv) *Sea $Z \subset C(K)$ un subconjunto que separa puntos de un compacto K, entonces se tiene que $\ell\Sigma(C_p(K)) \leq \ell\Sigma(Z,\tau_p)$.*

(v) *Sea K un compacto y $K' \subset K$ un subespacio cerrado. Entonces* $\ell\Sigma(C_p(K')) \leq \ell\Sigma(C_p(K))$.

(vi) *Sean K y L espacios compactos y $f : K \to L$ una aplicación continua y suprayectiva. Entonces* $\ell\Sigma(C_p(L)) \leq \ell\Sigma(C_p(K))$.

Para espacios de Banach generales Y tenemos la siguiente caracterización que extiende [77, Theorem 3.6].

Teorema 2.4.9. *Sea Y un espacio de Banach y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. La siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe un subconjunto total S de Y con $\ell\Sigma(S,w) \leq \mathfrak{m}$.*

(ii) $\ell\Sigma(C_p(B_{Y^*})) \leq \mathfrak{m}$.

(iii) $\ell\Sigma(Y,w) \leq \mathfrak{m}$.

Los compactos K con índice $\ell\Sigma(C_p(K))$ dado se caracterizan el en teorema que sigue que generaliza [77, Theorem 3.4].

Teorema 2.4.10. *Sea K un espacio compacto y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Son equivalentes:*

(i) $\ell\Sigma(C_p(K)) \leq \mathfrak{m}$;

(ii) *Existe un espacio topológico Y con $\ell\Sigma(Y) \leq \mathfrak{m}$ tal que K es homeomorfo a un subconjunto compacto del espacio $C_p(Y)$.*

$\boxed{\ell\Sigma \textbf{ y espacios } C_p(Y)}$

La noción de espacio *fuertemente monolítico* aparece en [2, pág. 83].

Definición 2.5.1. *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Un espacio topológico Y se dice que es* fuertemente $\mathfrak{m}$-monolítico *si para cada $A \subset Y$ con $|A| \leq \mathfrak{m}$ el peso de la clausura $\overline{A}$ es menor o igual que $\mathfrak{m}$.*

Con el concurso de las propiedades (iii) y (iv) que aparecen en el apartado *Relaciones de $\ell\Sigma$ con otros índices* (resultados que corresponden al corolario 2.3.7 y proposición 2.3.14), demostramos las siguientes propiedades que se recogen en el teorema 2.5.4 y en los corolarios 2.5.7 y 2.5.5:

(i) *Sea Y un espacio topológico. Si $H \subset C_p(Y)$ es compacto, entonces H es fuertemente $\ell\Sigma(Y)$-monolítico.*

(ii) *Sea Y un espacio topológico y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Si $\ell\Sigma(Y) \leq \mathfrak{m}$, entonces* $\mathrm{t}(C_p(Y)) \leq \mathfrak{m}$.

(iii) *Sea Y un espacio numerablemente determinado. Entonces: (a)* $\mathrm{t}(C_p(Y)) \leq \aleph_0$*; si $H \subset C(Y)$ es un subconjunto τ_p-compacto y separable, entonces H es metrizable.*

Como una consecuencia de los resultados anteriores damos una prueba en la sección 2.6 de la angelicidad del espacio $C_p(Y)$ para Y numerablemente determinado, véase la página 21 para la noción de espacio angélico. Este resultado fue demostrado en [69] utilizando técnicas de teoría descriptiva de conjuntos. Nosotros damos una prueba alternativa en la que se aíslan las propiedades topológicas de Y que intervienen en cada paso hasta llegar a demostrar la angelicidad de Y: en nuestra demostración utilizamos las propiedades en (iii) de la lista anterior, el hecho de que el k-espacio asociado a un espacio numerablemente determinado es otra vez numerablemente determinado, proposición 2.2.11, y las ideas originales de Grothendieck para espacios $C_p(K)$, [35].

La sección 2.11 abordamos de posibles mejoras sobre la angelicidad de los espacios $C_p(Y)$ cuando Y es un espacio K-analítico. Nos plantemos y abordamos dos formas de mejorar este resultado de angelicidad:

Mejora cualitativa: una posible mejora es tratar de ver si el hecho de que los cierres de los subconjuntos relativamente compactos sean accesibles por sucesiones se puede llevar hasta el punto de que lo sean los cierres de todos los subconjuntos de $(C(Y),\tau_p)$.

Mejora cuantitativa: otra posible mejora es tratar de ver si para espacios de funciones más grandes que $C(Y)$, por ejemplo, para el espacio de las funciones de la primera clase de Baire en Y, $B_1(Y)$, todavía es verdad que $(B_1(Y),\tau_p(Y))$ es angélico.

Observamos primero la imposibilidad de que los espacios del tipo $B_1(Y)$ sean angélicos para Y un espacio K-analítico: $(B_1([0,\omega_1]),\tau_p)$ es un tal ejemplo como observaron Bourgain, Fremlin y Talagrand en [6]; el conjunto $A=\{x^*\in C([0,\omega_1]) : \|x^*\|_\infty\leq 1\}$ es relativamente numerablemente compacto en $(B_1([0,\omega_1]),\tau_p)$ pero no es relativamente compacto, véase el ejemplo 2.11.1.

En segundo lugar, vemos cómo, el exigir que para nuestro espacio K-analítico Y pueda mejorarse la noción de *angelicidad* para $(C(Y),\tau_p)$, en los términos expuestos anteriormente, conduce a que Y no puede contener compactos perfectos. En esta sección nos ocupamos de estas cuestiones, y al hacerlo damos una prueba alternativa, más simple, de un muy reciente resultado de Cascales y Namioka en [10, Theorem 4.1 and Corollary 4.2] y mejoramos propiamente un resultado de Kąkol y López-Pellicer en [49].

Teorema 2.11.4. *Sea Y un espacio K-analítico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Y es σ-disperso;*
(ii) *Y no contiene conjuntos compactos perfectos;*
(iii) *para cada subconjunto numerable A de $C(Y)$, la clausura $\overline{A}$ en $(\mathbb{R}^X, \tau_p)$ es metrizable con la topología inducida;*
(iv) *$(C(Y), \tau_p)$ es Fréchet-Urysohn;*
(v) *$(C(Y), \tau_p)$ es secuencial;*
(vi) *$(C(Y), \tau_p)$ es un k-espacio;*
(vii) *$(C(Y), \tau_p)$ es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio.*

$\ell\Sigma$, el índice de Nagami y la noción de Σ-grado

Nagami introduce en [66] la definición de Σ-espacio que ha sido ampliamente estudiada, véase por ejemplo el survey de Michael, [61], y el libro [2]. Tomando como punto de partida la noción de Σ-espacio, Hödel introduce en [44] una función cardinal que llama Σ-grado (véase la definición 2.8.9) y que ha sido de relevancia para el estudio de determinadas cuestiones de Topología general. Llevados por las ideas detrás de nuestra definición de $\ell\Sigma$, relacionamos el Σ-grado con otra función cardinal que llamamos índice de Nagami, que coincide con una función cardinal introducida recientemente por Kortezov [53]. Damos una caracterización nueva del índice de Nagami, Proposición 2.8.5, y añadimos nuevas propiedades a las que se habían estudiado en [53].

Definición 2.8.1. *Sea Y un espacio topológico completamente regular. Se define el índice de Nagami de Y, $Nag(Y)$, como el cardinal más pequeño de las familias $\mathscr{A}$ de subconjuntos cerrados en βY con la propiedad que:*

$$\bigcap\{A : y \in A, A \in \mathscr{A}\} \subset Y,$$

para cada $y \in Y$.

De forma similar a como se ha caracterizado el índice de K-determinación en la proposición 2.1.5, y otra vez gracias al estudio de filtros compactoides realizado en el capítulo 1, caracterizamos el índice de Nagami como sigue:

Proposición 2.8.5. *Sea Y un espacio topológico completamente regular y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe un espacio topológico X con $\mathrm{w}(X) \leq \mathfrak{m}$ y $\phi : X \to 2^Y$ usco tal que se tiene $Y = \bigcup\{\phi(\alpha) : x \in X\}$;*

(ii) *existen conjuntos I y J con $|I|,|J| \leq \mathfrak{m}$, un subespacio Σ del producto de espacios discretos I^J y una aplicación usco $\phi : \Sigma \to 2^Y$ tal que $Y = \bigcup\{\phi(\alpha) : \alpha \in \Sigma\}$;*

(iii) $Nag(Y) \leq \mathfrak{m}$.

Si Y es un conjunto, $\mathscr{F}$ un cubrimiento de Y y $p \in Y$ escribimos

$$C(p,\mathscr{F}) = \bigcap\{F \in \mathscr{F} : p \in F\}.$$

La siguiente definición aparece en [44].

Definición 2.8.9. *Sea Y un espacio topológico regular.*

a.- *Una* Σ-red fuerte *(en el sentido de Hödel) para el espacio Y es una colección de cubrimientos localmente finitos $\{\mathscr{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ formados por conjuntos cerrados de Y verificando las siguientes condiciones:*

   (i) $C(p) = \bigcap\{C(p,\mathscr{F}_\alpha) : \alpha \in A\}$ *es compacto, para cada $p \in Y$;*

   (ii) $\{C(p,\mathscr{F}_\alpha) : \alpha \in A\}$ *es una base para $C(p)$, en el sentido de que para cada conjunto abierto U tal que $C(p) \subset U$, existe $\alpha \in A$ satisfaciendo*

$$C(p,\mathscr{F}_\alpha) \subset U.$$

b.- *El Σ-grado del espacio Y, denotado como $\Sigma(Y)$, es $\aleph_0 \times \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m}$ es el cardinal más pequeño tal que Y tiene una Σ-red fuerte $\{\mathscr{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ con $|A| = \mathfrak{m}$.*

c.- *Y se dice que es un Σ-espacio fuerte (en el sentido de Nagami, [66]) si $\Sigma(Y) = \aleph_0$.*

De nuevo las herrramientas desarrolladas en el capítulo 1 nos permiten dar la siguiente relación que es de alguna manera llamativa.

Teorema 2.8.11. *Si Y es un espacio topológico completamente regular, entonces*

$$Nag(Y) = \text{máx}\{\Sigma\text{-grado}(Y), \ell(Y)\}.$$

Las propiedades del índice de Nagami muestran algunas discrepancias con las ya comentadas para $\ell\Sigma$. Éstas aparecen recogidas en la proposición 2.8.8 y en los corolarios 2.8.7 y 2.8.13: de la lista de debajo llamamos la atención sobre las propiedades (iii), (iv), (v) y (vi) que completan las que ya habían sido estudiadas en [53].

(i) *Si Y es un espacio topológico y $Z \subset Y$ un subespacio cerrado, entonces se tiene $Nag(Z) \leq Nag(Y)$;*

(ii) *si* $\mathfrak{m}$ *es un cardinal infinito e* $(Y_i)_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos tales que* $Nag(Y_i) \leq \mathfrak{m}$ *y* $|I| \leq \mathfrak{m}$*, entonces*

$$Nag(\prod_{i\in I} Y_i) \leq \mathfrak{m}.$$

(iii) *Si* Y *y* Z *son espacios topológicos y* $\phi : Y \to 2^Z$ *una aplicación usco para la que* $Z = \cup\{\phi(y) : y \in Y\}$*, entonces* $Nag(Z) \leq Nag(Y)$*.*

(iv) *Sea* (Y,τ) *un espacio topológico y* $\mathscr{G}$ *una topología en* Y *más gruesa que* τ*; entonces*

$$d(Y,\tau) \leq \text{máx}\{Nag(Y,\tau), \text{nw}(Y,\mathscr{G})\}.$$

(v) *Si* $Z \subset C(K)$ *un subconjunto que separa puntos de un compacto* K*, entonces*

$$Nag(C_p(K)) \leq Nag(Z,\tau_p).$$

(vi) *Sea* Y *un espacio topológico; si* $H \subset C_p(Y)$ *es compacto, entonces* H *es fuertemente* $Nag(Y)$*-monolítico.*

(vii) $\ell(Y) \leq Nag(Y) \leq \ell\Sigma(Y)$.

(viii) $Nag(Y) \leq \text{nw}(Y) \leq \text{w}(Y)$.

El capítulo 2 se completa con aplicaciones de las herramientas desarrolladas al contexto de los espacios localmente convexos y espacios uniformes. Destacamos los dos resultados que siguen.

Proposición 2.9.2. *Sea* $\mathfrak{m}$ *un cardinal infinito,* S *un conjunto con* $|S| \leq \mathfrak{m}$ *y* $(E_s,\tau_s)_{s\in S}$ *una familia de espacios locamente convexos* $\chi(E_s) \leq \mathfrak{m}$*, para cada* $s \in S$*. Sea* $\{f_s : E_s \to E\}_{s\in S}$ *una familia de aplicaciones lineales y* $(E,\tau) = \sum_{s\in S} f_s(E_s,\tau_s)$ *la envoltura localmente convexa de* $f_s(E_s,\tau_s)$*. Entonces*

(i) $Nag(E',\sigma(E',E)) \leq \mathfrak{m}$*.*

(ii) $\text{t}(C_p(E',\sigma(E',E))) \leq \mathfrak{m}$ *y los subconjuntos compactos de* $C_p(E',\sigma(E',E))$ *son fuertemente* $Nag(E',\sigma(E',E))$*-monolíticos.*

Esta proposición complementa el teorema 4.2 de [9] y tiene como caso particular el corolario de debajo que reune propiedades demostradas en [9] y [69].

Proposición 2.9.3. *Sea* $(E,\mathfrak{T}) = \text{lím}(E_n,\mathfrak{T}_n)$ *el límite inductivo de una sucesión de espacios localmente convexos metrizables. Entonces:*

(i) $(E',\sigma(E',E))$ *es numerablemente determinado;*

(ii) $(E,\sigma(E,E'))$ *es angélico;*

(iii) *los subconjuntos compactos separables de* $(E,\sigma(E,E'))$ *son* $\sigma(E,E')$*-metrizables;*
(iv) $\mathrm{t}(E,\sigma(E,E') = \aleph_0$.

Proposición 2.10.1. *Sea* $(Y,\mathfrak{U})$ *un espacio uniforme con una base para la uniformidad dada por* $\mathscr{B}_{\mathfrak{U}} = \{N_K : K \in \mathscr{K}(M)\}$*, donde* M *es un espacio métrico de peso infinito y* $\mathscr{K}(M)$ *el retículo de los compactos de* M*, satisfaciendo*

$$N_{K_1} \subset N_{K_2} \textit{ si } K_2 \subset K_1.$$

Entonces para cada subconjunto precompacto K *de* $(Y,\mathfrak{U})$ *se tiene que*

$$\mathrm{w}(K) \leq \mathrm{w}(M).$$

Un caso particular de la proposición anterior es el siguiente resultado que es el resultado central en [14].

Proposición 2.10.2. *Sea* $(Y,\mathfrak{U})$ *un espacio uniforme tal que la uniformidad* $\mathfrak{U}$ *tiene una base* $\mathscr{B}_{\mathfrak{U}} = \left\{N_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ *satisfaciendo:*

$$N_\beta \subset N_\alpha \textit{ si } \alpha \leq \beta \textit{ siendo } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Entonces cada subconjunto precompacto K *de* $(Y,\mathfrak{U})$ *es metrizable.*

◊

Para un espacio topológico Y y un espacio métrico (M,d) una aplicación $f: Y \to M$ se dice que es barely continua cuando para cada subconjunto cerrado $A \subset Y$ la aplicación f restringida a A tiene algún punto de continuidad en A. En términos $(\varepsilon - \delta)$ diremos que f es fragmentable cuando para cada $\varepsilon > 0$ y cada subconjunto cerrado A de Y existe un abierto U de Y tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $d-\mathrm{diam}(f(U \cap A)) < \varepsilon$. Para espacios Y hereditariamente de Baire ambas nociones coinciden (proposición 3.1.5). Cuando admitimos además particiones numerables de este concepto llegamos a la definición, tomada de [45].

Definición 3.1.1. *Sean* Y *un espacio topológico,* (M,d) *un espacio métrico. Diremos que una aplicación* $f: Y \to M$ *es* fragmentable *si para cada* $\varepsilon > 0$ *y cada subconjunto* $A \subset Y$*,* $A \neq \emptyset$*, existe un conjunto* U *abierto en* Y*, tal que* $U \cap A \neq \emptyset$ *y* $d-\mathit{diam}(f(U \cap A)) < \varepsilon$*.*

El primer teorema relevante que presentamos es una versión del teorema Grande de Baire [20, Theorem 4.1] para funciones σ-fragmentables que nos pone de manifiesto como las funciones σ-fragmentables se obtienen con las operaciones de partición numerable del dominio y paso al límite de funciones barely continuas:

Teorema 3.1.7. *Sean Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Una aplicación $f : Y \to M$ es σ-fragmentable si, y sólo si, f es límite uniforme de una sucesión de funciones $\{f_n : Y \to M\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una partición numerable de Y, $(Y_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que f_n restringida a Y_m^n es barely continua para cada $m \in \mathbb{N}$.*

Cuando el dominio es también un espacio métrico tenemos

Teorema 3.1.18. *Sean (Y,ρ) y (M,d) espacios métricos y $f : Y \to M$ una aplicación σ-fragmentable. Existen entonces funciones $f_n : Y \to M$ continuas a trozos; i.e. tales que $Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m^n$ y $f_{n|Y_m^n}$ es continua $m = 1,2,\ldots$, tales que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)$$

uniformemente en $y \in Y$.

y así cualquier aplicación σ-fragmentable entre espacios métricos lleva subespacios separables a subespacios separables, hecho que nos resultará de enorme interés para la demostración del teorema 3.3.11 en la sección 3 de este capítulo. El resto de la sección 3.1 recoge propiedades fundamentales de las aplicaciones σ-fragmentables siguiendo de cerca a [65] donde se han estudiado las aplicaciones σ-continuas (ver definición 3.1.12) en detalle.

En la sección 3.2 se estudian las familias de aplicaciones que sean σ-fragmentables de manera uniforme

Definición 3.2.1. *Sea Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Diremos que una familia de aplicaciones, $\mathscr{F} = \{f_j : Y \to M\}_{j\in J}$ es equi-fragmentable si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \subset Y$ no vacío, existe un abierto U en Y tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y*

$$d-diam\, f_j(U \cap A) < \varepsilon$$

para cada $j \in J$.

Definición 3.2.5. *Sean Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Diremos que una familia de aplicaciones $\mathscr{F} = \left\{f_j : Y \to M\right\}_{j\in J}$ es* equi-σ-fragmentable *si para cada $\varepsilon > 0$ podemos escribir Y como una unión numerable de conjuntos no vacíos $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n^{\varepsilon}$, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada subconjunto $A \subset Y_n^{\varepsilon}$ no vacío, existe un abierto U en Y tal que $U \cap A$ es no vacío y $d-diam\, f_j(U \cap A) < \varepsilon$ para cada $j \in J$.*

Vemos como subconjuntos compactos de $C_p(Y)$, para Y Čech-analítico tienen dicha propiedad. Para Y compacto, las familias equi-fragmentables coinciden con las equimedibles de A. Grothendieck [59].

Nuestro resultado principal en esta sección es el siguiente

Teorema 3.2.17 . *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *Y es σ-fragmentable.*

(ii) *Y admite particiones de la unidad equi-σ-fragmentables.*

(iii) *Existe un conjunto Γ y una inmersión homeomórfica ϕ de Y en un subconjunto de $c_0(\Gamma)$ tal que*

$$\{\phi(\cdot)_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

es equi-σ-fragmentable, donde $\phi(\cdot)_\gamma$ denota la aplicación definida en Y que asocia a cada elemento $y \in Y$ la coordenada γ-ésima de $\phi(y)$.

donde se siguen las ideas del teorema VIII.3.2. de [20] y vemos como la equi-σ-fragmentabilidad caracteriza la inmersión en $c_0(\Gamma)$ de cualquier espacio σ-fragmentable.

En la sección 3.3 estudiamos multifunciones σ-fragmentables:

Definición 3.3.1 . *Sea Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Una multifunción $F : Y \to 2^M$ se dice que es:*

(i) Fragmentable *si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \subset Y$ no vacío, existe un subconjunto abierto U en Y y un subconjunto D de M con $d - diam(D) < \varepsilon$ tales que $U \cap A \neq \emptyset$ y $F(y) \cap D \neq \emptyset$ para cada $y \in U \cap A$.*

(ii) σ-fragmentable *si para cada $\varepsilon > 0$ existe una descomposición de Y, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^{\varepsilon}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ si $A \subset Y_n^{\varepsilon}$ es un subconjunto no vacío existe un subconjunto abierto U en Y y un subconjunto D de M tales que $d - diam(D) < \varepsilon$, $U \cap A \neq \emptyset$ y $F(y) \cap D \neq \emptyset$ para cada $y \in U \cap A$.*

que nos permiten probar, por ejemplo, el siguiente

Teorema 3.3.8 . *Sea Y un espacio de Banach y $J : Y \to Y^*$ la función de dualidad dada por $J(y) := \{y^* \in B_{Y^*} : \langle y, y^* \rangle = \|y\|\}$ para cada $y \in Y$. Son equivalentes:*

(i) *Y es de Asplund.*

(ii) *J es σ-fragmentable como multifunción entre los espacios métricos $(Y, \|\cdot\|)$ y $(Y^*, \|\cdot\|^*)$, ($\|\cdot\|^*$ es la norma dual en Y^*).*

y como consecuencia de ello el siguiente:

Corolario 3.3.10 . *Sea Y un espacio de Banach. Entonces Y es un espacio Asplund si, y sólo si, la aplicación dualidad $J : Y \to 2^{Y^*}$ tiene un selector medible Borel.*

Nuestra prueba se basa en el lema que sigue:

Lema 3.3.4, Godefroy [34]. *Sea Y un espacio de Banach, y sea $B \subset S_{Y^*}$ una* boundary. *Si existe $0 < \varepsilon < 1$ e $\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset Y^*$ tales que $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(y_n^*, \varepsilon)$ entonces*

$$Y^* = \overline{span\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}.$$

En particular, Y^* es separable;

y el estudio de multifunciones y funciones σ-fragmentables que hemos desarrollado, en particular en el teorema 3.1.18 y en el siguiente resultado de ε-selección para multifunciones σ-fragmentables.

Teorema 3.3.2 . *Sean (Y, τ) un espacio topológico, (M, d) un espacio métrico y*

$$F : Y \to 2^M$$

una multifunción. Son equivalentes:

(i) *F es σ-fragmentable.*

(ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $f_\varepsilon : (Y, \tau) \to (M, d)$ σ-fragmentable tal que $d - dist(f_\varepsilon(y), F(y)) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$.*

Profundizando más en la propiedad de que funciones σ-fragmentables entre espacios métricos llevan subespacios separables a subespacios separables (ver el lema 3.1.14) podemos aportar una solución a una pregunta de Plichko sobre versiones no separables del lema 3.3.4 de Godefroy enunciado anteriormente, [71, Question 3, pág.12]:

Teorema 3.3.11 . *Sea Y un espacio de Banach. Si $f : Y \to Y^*$ es una aplicación σ-fragmentable y existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que*

$$\|\cdot\|^* - dist(f(y), J(y)) < \varepsilon$$

para cada $y \in Y$, donde J denota la aplicación dualidad. Entonces

$$\overline{span\, f(Y)}^{\|\cdot\|^*} = Y^*.$$

Teorema 3.3.12 . *Sea Y un espacio de Banach. Entonces Y es Asplund si, y sólo si, existe $0 < \varepsilon < 1$ y una aplicación $f_\varepsilon : Y \to Y^*$ σ-fragmentable tal que*

$$\|\cdot\|^* - dist(f_\varepsilon(y), J(y)) < \varepsilon$$

para cada $y \in Y$, donde J denota la aplicación dualidad.

Corolario 3.3.13 . *Sea Y un espacio de Banach. Si B_{Y^*} es ε-fragmentable para algún $0 < \varepsilon < 1$, entonces Y es un espacio de Asplund.*

Concluimos de nuestro estudio que las aplicaciones σ-fragmentables, familia mucho más amplia que las funciones de la primera clase de Baire, de hecho cualquier aplicación medible Borel entre espacios métricos completos es σ-fragmentable, [38], nos proporcionan las propiedades fundamentales del tipo *frontera* que encontramos en los espacios de Asplund y que habían sido con anterioridad para selectores Baire-uno de la función dualidad [11, 26, 27, 45].

Preliminares y Terminología

En esta sección introductoria fijamos la notación y presentamos resultados que necesitaremos con posterioridad. Nuestras referencias básicas son [52] y [25] para topología, [29] para espacios de Banach y espacios localmente convexos y [54] para espacios vectoriales topológicos.

Espacios topológicos

En esta memoria un espacio topológico Y será un espacio topológico Hausdorff. Si (Y,τ) es un espacio topológico y $A \subset Y$ es un subconjunto, denotaremos por $\overset{\circ}{A}$ (o *int* (A)) el interior de A y por $\overline{A}$ la clausura de A. Asimismo, dado $y \in Y$ denotaremos por $\mathscr{N}_y$ una *base de entornos* (abiertos) de y en (Y,τ).

Un espacio topológico Y se dice *compacto* si cada cubrimiento de él tiene un subcubrimiento finito. Un subconjunto de un espacio topológico se dice *compacto*, si con la topología inducida es un espacio topológico compaccto. El retículo de los conjuntos compactos de un espacio topológico Y lo denotamos por $\mathscr{K}(Y)$.

Un espacio topológico Y se dice que es *regular* si para cada punto $y \in Y$ y cada conjunto cerrado F de Y tal que $y \notin F$, existen abiertos disjuntos U y V tales que $y \in U$ y $F \subset V$.

Diremos que un espacio topológico Y es *completamente regular* si para cada $y \in Y$ y cada cerrado $F \subset Y$ tal que $y \notin F$, existe una función continua $f : Y \to [0,1]$ tal que $f(y) = 0$ y $f(y') = 1$ para cada $y' \in F$.

La compactificación de Stone-Čech de un espacio completamente regular Y la denotamos de la forma βY.

Una familia de subconjuntos $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$ en un espacio topológico Y se dice que es *localmente finita* (resp. discreta) si para cada $y \in Y$ existe un entorno abierto U de y tal que U tiene intersección no vacía con una cantidad finita de elementos de $\mathscr{A}$ (resp. con a lo más un elemento de $\mathscr{A}$). Una familia de subconjuntos $\mathscr{A}$ en un espacio topológico se dice que es σ-localmente finita si puede expresarse como una uniónh numerable de familias localmente finitas.

Un punto y en un espacio topológico Y se dice que es un *punto de acumulación* de un conjunto $A \subset Y$ si $y \in \overline{A \setminus \{y\}}$.

Redes

Diremos que el par $(D, \geq)$ es un *conjunto dirigido* si D es no vacío y se verifican las siguientes propiedades:

(i) si i_1, i_2 e i_3 son elementos de D tales que $i_2 \geq i_1$ e $i_3 \geq i_2$, entonces $i_3 \geq i_1$;

(ii) si $i \in D$ entonces $i \geq i$; y

(iii) si $i_1, i_2 \in D$, entonces existe $i_3 \in D$ tal que $i_3 \geq i_1$ e $i_3 \geq i_2$.

Una *red* en un espacio topológico Y es una función arbitraria definida en un conjunto dirigido D no vacío con valores en el espacio Y. Usualmente la denotaremos como $(y_i)_{i \in D}$ o $(y_i)_i$. Diremos fque una red $(y_i)_i$ está *eventualmente en un conjunto* $A \neq \emptyset$ si existe un elemento $i_0 \in D$ tal que si $i \geq i_0$ entonces $y_i \in A$. Un punto y se dice que es un *punto límite* de una red $(y_i)_{i \in D}$ si está eventualmente en cada entorno abierto de y. En este caso diremos que la red *converge* a y.

Un punto y se dice que es un *punto de aglomeración* de una red $(y_i)_{i \in I}$ si para cada entorno abierto U de y y todo $i_0 \in I$ existe $i \geq i_0$ tal que $y_i \in U$.

La noción de compacidad en términos de redes se traduce en que toda red $(y_i)_i$ contenida en K tiene una subred convergente.

Espacios métricos, Polacos y K-analíticos

Un *espacio métrico* es un par (M, d) formado por un conjunto y una función d definida en el conjunto $M \times M$ con valores en $\mathbb{R}^+$, satisfaciendo las siguientes condiciones:

(i) $d(x,y) = 0$ si y sólamente si $x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ para cada $x, y \in M$.

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para cada $x, y, z \in M$.

La función d se dice que es una *métrica* sobre M. Una *pseudométrica* en M es una función d definida en $M \times M$ que toma valores reales no negativos, satisfaciendo las propiedades (ii), (iii) junto con

(i') $d(x,x) = 0$ para cada $x \in M$.

recibe el nombre de pseudométrica.

Un espacio topológico (Y,τ) se dice que es metrizable si existe una métrica d en Y tal que la topología definida por d coincide con τ.

El Teorema de Stone, [25, Corollary 4.4.4] nos permite afirmar que:

Teorema I. *Todo espacio metrizable tiene una base σ-discreta.*

Diremos que un espacio topológico Y es *Polaco* si es un espacio separable y metrizable por una métrica completa. Todo espacio Polaco es imagen continua de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Diremos que un espacio Y es K-analítico si es Hausdorff y existe un espacio X Polaco y una multifunción ϕ definida en X con valores en $\mathscr{K}(Y)$ satisfaciendo:

(i) $Y = \bigcup_{x\in X}\phi(x)$;

(ii) si x es un punto de X y V un entorno abierto del conjunto $\phi(x)$ existe un entorno U de x tal que $\phi(U)\subset V$.

Cuando ϕ es una multifunción que toma valores compactos no vacíos con la propiedad (ii) diremos que ϕ es una aplicación usco.

Espacios vectoriales topológicos

Los espacios vectoriales en estam memoria lo serán sobre los números reales $\mathbb{R}$. Dado un espacio vectorial Y y un subconjunto $A\subset Y$, denotamos por Y_A el espacio generado por A; también escribiremos $span_{\mathbb{R}}A$ o simplemente $spanA$ para denotarlo. Cuando queremos denotar el espacio generado sobre $\mathbb{Q}$, escribiremos $span_{\mathbb{Q}}A$.

Un subconjunto A se dice que es *equilibrado* si $\alpha A\subset A$ para todo $\alpha\in\mathbb{K}$ tal que $|\alpha|\leq 1$. Decimos que A es *absorbente* si para cada $y\in Y$ existe $t_y>0$ tal que $y\in tA$, para cada $|t|\geq t_y$. Dado un conjunto absorbente A, el *funcional de Minkowski*, μ_A, viene dado por $\mu_A(x)=\inf\{t>0 : y\in tA\}$ para cada $y\in Y$.

Si Y es un espacio vectorial y τ una topología en Y, decimos que τ es vectorial si la suma y el producto por escalares son τ-continuos. τ se dice loclamente convexa si es una topología vectorial con una base de entornos del origen formada por conjuntos convexos.

Un espacio vectorial topológico (resp. localmente convexo; normado) es un espacio vectorial dotado con una topología vectorial (resp. localmente convexa; con una norma).

Diremos que Y es un espacio de Fréchet si es localmente convexo completo y metrizable.

Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo para la métrica asociada a la norma.

Espacios de funciones continuas

Dados Y y Z espacios topológicos, denotaremos por $C(Y,Z)$ el espacio de las funciones continuas definidas en Y con valores en Z. En el caso en el que Z sea el cuerpo de los números reales lo denotaremos por $C(Y)$. Cuando el espacio $C(Y)$ se considera dotado de la topología de convergencia puntual sobre Y, lo denotaremos por $C_p(Y)$ o bien $(C(Y),\tau_p)$.

Topologías débiles

Dado un espacio localmente convexo llamamos *dual topológico* de Y al espacio $Y' = \mathscr{L}(Y,\mathbb{K})$ de las formas lineales continuas.

Para un espacio localmente convexo Y, la *topología débil*, $\sigma(Y,Y')$ es la topología generada por la base dada por los conjuntos

$$V = \{y \in Y: \ |f_i(y-y_0)| < \varepsilon \text{ para } i = 1,\dots,n\},$$

donde $y_0 \in X,\ f_1,\dots,f_n \in Y'$ y $\varepsilon > 0$.

Análogamente, la topología débil estrella en Y' está generada por la base formada por

$$V^* = \left\{f \in Y': \ |(f-f_0)(y_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1,2,\dots,n\right\},$$

donde $f_0 \in Y', y_1,\dots,y_n \in Y$ y $\varepsilon > 0$. Denotaremos la topología *débil** de Y' por $\sigma(Y',Y)$.

En el caso en el que Y sea un espacio de Banach denotamos por Y^* su dual topológico e indistintamente w o $\sigma(Y,Y')$ a la topología débil y por w^* o $\sigma(Y',Y)$ a la topología débil estrella en Y'.

Sea $A \subset Y$ un subconjunto no vacío de un espacio localmente convexo, llamamos *polar* de A y lo denotamos por A° el conjunto de Y' dado por

$$A^\circ = \{y^* \in Y' : |y^*(y)| \leq 1 \text{ para cada } y \in A\}.$$

Si $A \subset Y$, entonces A° es un conjunto convexo, equilibrado y cerrado en la topología débil estrella $\sigma(Y',Y)$.

Cardinales

El conjunto de los números cardinales es un conjunto bien ordenado. Así para cada cardinal $\mathfrak{m}$, a dicho cardinal se le denota por $\Updownarrow^+$. Los cardinales $\aleph_1$, $\aleph_2,\dots$, se definen de forma recursiva con las condiciones $\aleph_{i+1} = \aleph_i^+$ para $i = 0,1,\dots,$. La igualdad $\mathfrak{c} = \aleph_1$, donde $\mathfrak{c}$ representa el cardinal de $\mathbb{R}$ se conoce con el nombre de *hipótesis del continuo* y es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos.

Un número ordinal infinito λ es un *número inicial* si λ es el más pequeño entre los números ordinales α tal que $|\alpha| = |\lambda|$, es decir, si $|\xi| < |\lambda|$ para cada $\xi < \lambda$.

Para cada número cardinal $\mathfrak{m}$ existe un número ordinal inicial λ, tal que $|\lambda| = \mathfrak{m}$. Sea α un número ordinal e Y un conjunto arbitrario. Llamaremos *sucesión transfinita* de tipo α a una aplicación f definida en todos los ordinales más pequeños que α con valores en Y tal que para cada $i < \alpha$, $f(i) = y_i$ y la denotaremos de la forma $(y_i)_{i<\alpha}$.

Índice general

1

Filtros y uscos en espacios topológicos

El objetivo de este primer capítulo, tal y como ha sido ya comentado en la introducción general en detalle, es analizar y estudiar las propiedades de los filtros en espacios topológicos, destacando aquellas que serán utilizadas para determinar la existencia de uscos (aplicaciones multivaluadas con valores compactos y superiormente semicontinuas) en dominios métricos. La existencia y generación de uscos es esencial para el estudio del índice de K-determinación que hacemos en el segundo capítulo. Por otro lado, queremos resaltar que el estudio de los filtros compactoides y numerablemente compactoides que realizamos es aplicado en este mismo capítulo para obtener de forma muy sencilla los teoremas de Wallace, corolario 1.5.5 y de Kuratowski, corolario 1.7.7.

1.1 Recordatorio sobre filtros

La noción de filtro que recordamos debajo, debida a H. Cartan, se puede encontrar en Bourbaki, [4, Chap. I. §6], donde nos remitimos para los detalles de los resultados y pruebas que involucran las nociones de *convergencia, puntos de aglomeración, etc.* asociados a un filtro en un espacio topológico que utilizamos aquí.

Definición 1.1.1. *Una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de un conjunto Y se dice que es un filtro, si se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *si $A \subset Y$, con $A \supset F$ para algún $F \in \mathscr{F}$, entonces $A \in \mathscr{F}$;*

(ii) *si $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$;*

(iii) *el conjunto vacío no pertenece a $\mathscr{F}$.*

Una familia $\mathscr{B}$ de subconjuntos de Y se dice que es una *base de filtro* si satisface las propiedades:

(i) *para $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset B_1 \cap B_2$;*

(ii) *el conjunto vacío no pertenece a $\mathscr{B}$.*

Si $\mathscr{B}$ es una base de filtro, la familia

$$\mathscr{F} := \{F \subset Y : \text{existe } B \in \mathscr{B} \text{ con } B \subset F\}, \tag{1.1}$$

es un filtro, que llamaremos *filtro generado* por $\mathscr{B}$. Recíprocamente, para un filtro dado $\mathscr{F}$ una subfamilia $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ se dice que es base para $\mathscr{F}$ si (1.1) se da. Si $\mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$ son dos filtros en Y, se dice que $\mathscr{F}_1$ es *más fino* que $\mathscr{F}_2$ si para cada $F \in \mathscr{F}_2$ se tiene que $F \in \mathscr{F}_1$, brevemente $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_1$. Para bases de filtro la noción de *ser más fina* se entenderá como que la correspondiente relación entre los filtros asociados se satisface. Así, hablaremos también, a veces, de filtro/base de filtro *más fino* que una base de filtro/filtro, con el significado evidente.

Definición 1.1.2. *Un filtro $\mathscr{U}$ en un conjunto Y se dice que es un ultrafiltro si es maximal, es decir, si no existen filtros estrictamente más finos que él en Y.*

Con ayuda del lema de Zorn se prueba que para cada filtro $\mathscr{F}$ en Y existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ más fino que $\mathscr{F}$. Como dice Bourbaki en [5, págs. 192-198]:

> *“ Los ultrafiltros son en topología y análisis un precioso instrumento que ha contribuido a iluminar y simplificar resultados notables como el teorema de Tychonoff que establece que el producto de una familia arbitraria de espacios topológicos compactos es compacto.”*

En todo lo que sigue Y es un espacio topológico Hausdorff. Se dice que un filtro $\mathscr{F}$ en el espacio topológico Y *converge* a un punto $y \in Y$ si para cada entorno abierto V de y en Y, existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \subset V$; en otras palabras, $\mathscr{F}$ es más fino que el filtro $\mathscr{N}_y$ de los entornos de y en Y. Cuando esto es así escribiremos $\mathscr{F} \to y$. Recordemos que un espacio topológico es compacto si, y sólo si, cada ultrafiltro en él es convergente a un punto; equivalentemente si, y sólo si, todo filtro tiene un punto de aglomeración, véase [4, Chap I. §9].

El *conjunto de puntos de aglomeración* del filtro $\mathscr{F}$ en Y es el conjunto cerrado (posiblemente vacío) definido por $C(\mathscr{F}) := \bigcap_{F\in\mathscr{F}} \overline{F}$ –los cierres están tomados en Y. Es un sencillo ejercicio probar la igualdad:

$$C(\mathscr{F}) = \{y \in Y : y \text{ es límite de algún ultrafiltro más fino que } \mathscr{F}\}. \tag{1.2}$$

Un ultrafiltro $\mathscr{U}$ en Y converge si, y sólo si, $C(\mathscr{U}) \neq \emptyset$, véase [4, Chap I. §7.2]; obsérvese que si $C(\mathscr{U}) \neq \emptyset$, entonces $\mathscr{U}$ contiene necesariamente un único punto que es el límite del ultrafiltro $\mathscr{U}$.

1.2 Filtros compactoides

En esta sección damos la definición, entre otras, de filtro *compactoide* que extiende simultáneamente la noción de filtro convergente y la de conjunto compacto. La siguiente definición utiliza el concepto de red tal y como aparece en el libro de Kelley [52]. Las nociones y resultados que siguen, aparte de su interés por sí mismos, clarifican resultados clásicos –véase por ejemplo nuestra prueba del teorema (de Wallace) 1.5.5 en contraposición con la prueba en [25, 3.2.10]– y simplifican drásticamente el estudio de aplicaciones multivaluadas que son una de las herramientas esenciales que utilizamos en esta memoria.

Definición 1.2.1. *Sea Y un espacio topológico $\mathscr{F}$ y $\mathscr{G}$ filtros en Y y $\mathscr{B}$ una base de filtro. Se dice que:*

(i) *$\mathscr{F}$ es compactoide en Y si cada ultrafiltro más fino que $\mathscr{F}$ en Y converge a un punto de Y;*

(ii) *$\mathscr{F}$ subconverge a un subconjunto L en Y (denotado $\mathscr{F} \rightsquigarrow L$), si dado un subconjunto abierto V de Y con $L \subset V$ existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \subset V$;*

(iii) *una red $(y_i)_{i\in D}$ está* eventualmente *en $\mathscr{F}$ (denotado por $(y_i)_{i\in D} \prec \mathscr{F}$) si para cada $F \in \mathscr{F}$ existe $i_0 \in D$ tal que para cada $i \geq i_0$ se tiene que $y_i \in F$;*

(iv) *la base de filtro $\mathscr{B}$ es compactoide o subconverge a un subconjunto L de Y, cuando el filtro $\mathscr{F}$ generado por $\mathscr{B}$ es compactoide o subconverge a L.*

(v) *$\mathscr{G}$ y $\mathscr{B}$ se cortan si $G \cap B \neq \emptyset$ para cada $G \in \mathscr{G}$ y $B \in \mathscr{B}$.*

La noción de filtro compactoide como se ha introducido en (i) aparece, entre otros, en [70, 21]. La noción de filtro $\mathscr{F}$ que *subconverge* a L tal y como la hemos definido en (ii) aparece en [70], [21] con los términos de $\mathscr{F}$ *semiconverge* a L y en [23] con los términos $\mathscr{F}$ apunta a *(en inglés, aimed to)* L.

Dado un filtro $\mathscr{F}$ en Y la igualdad (1.2) se completa fácilmente con:

$$\begin{aligned} C(\mathscr{F}) &= \{y \in Y : y \text{ es punto de aglomeración de alguna red } (y_i)_{i\in D} \prec \mathscr{F}\} \\ &= \{y \in Y : y \text{ es límite de alguna red } (y_i)_{i\in D} \prec \mathscr{F}\}. \end{aligned}$$

El resultado que sigue reúne propiedades generales de los filtros.

Proposición 1.2.2. *Sea Y un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un filtro en Y.*

(i) *Si Y es regular,*

$$L \subset Y \textit{ es cerrado y } \mathscr{F} \rightsquigarrow L, \textit{ implica que } C(\mathscr{F}) \subset L. \tag{1.3}$$

Recíprocamente, si (1.3) *se verifica para cada filtro $\mathscr{F}$ que subconverge a un conjunto cerrado en Y, entonces Y es regular.*

(ii) *Si L es un compacto no vacío, entonces* (1.3) *se verifica sin suponer la regularidad en Y.*

(iii) *Si $\mathscr{F}$ es compactoide, entonces $C(\mathscr{F}) \neq \emptyset$ y $\mathscr{F} \rightsquigarrow C(\mathscr{F})$.*

DEMOSTRACIÓN: Demostramos (i) por reducción al absurdo. Sea $y \in C(\mathscr{F})$ y supongamos que $y \notin L$. Puesto que Y es regular, existen abiertos U y V tales que $L \subset U$ e $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Como $\mathscr{F} \rightsquigarrow L$, existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $F \subset U$, lo que contradice que $y \in \overline{F}$ ya que $F \cap V = \emptyset$ y la prueba de esta implicación acaba. De igual forma, por reducción al absurdo, probamos que si (1.3) se verifica para cada filtro $\mathscr{F}$ que subconverge a un conjunto cerrado en Y, entonces el espacio Y es regular. Supongamos que el espacio no es regular. Entonces existen un punto $y \in Y$ y un cerrado $L \subset Y$, tales que $y \notin L$ y de forma que para cada par de abiertos U, V con $L \subset U$ e $y \in V$ se tiene $U \cap V \neq \emptyset$. Si $\mathscr{N}_L$ y $\mathscr{N}_y$ son las familias de abiertos que contienen a L e y, respectivamente, entonces

$$\mathscr{B} := \{U \cap V : U \in \mathscr{N}_L, V \in \mathscr{N}_y\},$$

es una base de filtro con $\mathscr{B} \to y$. Como por otro lado $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$, si (1.3) es cierta, se debe tener $y \in L$, lo que es una contradicción que acaba la prueba.

La prueba de (ii) es análoga a la demostración de (i), basta señalar que en un espacio topológico Hausdorff si L es compacto e $y \notin L$ podemos construir abiertos U, V tales que $L \subset U$ e $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$; ahora razonamos como en la prueba del apartado (i).

Por último demostramos (iii). Supongamos que $\mathscr{F}$ es compactoide. Por el Lema de Zorn, existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ más fino que $\mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ es compactoide, $\mathscr{U}$ converge, es decir, existe $y \in Y$ tal que

$$y \in \bigcap_{U \in \mathscr{U}} \overline{U} \subset \bigcap_{F \in \mathscr{F}} \overline{F} = C(\mathscr{F}),$$

y así $C(\mathscr{F})$ es no vacío. Veamos ahora que $\mathscr{F} \rightsquigarrow C(\mathscr{F})$. Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que la última afirmación no es cierta, entonces existe un abierto V, tal que $V \supset C(\mathscr{F})$ y la intersección $F \cap (Y \setminus V) \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathscr{F}$. Entonces, la familia $\mathscr{B} = \{F \cap (Y \setminus V) : F \in \mathscr{F}\}$ es una base de filtro. Por el lema de Zorn, existe un ultrafiltro $\mathscr{U}$ más fino que $\mathscr{B}$. El ultrafiltro $\mathscr{U}$ es más fino que $\mathscr{F}$ también. Puesto que $\mathscr{F}$ es compactoide, el ultrafiltro $\mathscr{U}$ converge, es decir, $\bigcap_{U \in \mathscr{U}} \overline{U} = \{y\}$ para algún $y \in Y$. Por una parte, tenemos que

$$\{y\} = \bigcap_{U \in \mathscr{U}} \overline{U} \subset \bigcap_{F \in \mathscr{F}} \overline{F \cap (Y \setminus V)} \subset (Y \setminus V),$$

y por otra

$$\{y\} = \bigcap_{U \in \mathscr{U}} \overline{U} \subset \bigcap_{F \in \mathscr{F}} \overline{F} = C(\mathscr{F}) \subset V,$$

y llegamos así a una contradicción que acaba la prueba. □

Si $(y_i)_{i \in D}$ es una red en Y y para cada $i \in D$ definimos

$$R_i := \{y_j : j \in D, j \geq i\}, \tag{1.4}$$

entonces $\mathscr{R} = (R_i)_{i \in D}$ es una base de filtro, a la que nos referiremos como *base de filtro asociada* a $(y_i)_{i \in D}$. El conjunto de los puntos de aglomeración de la red $(y_i)_{i \in D}$ es por definición $C((y_i)_{i \in D}) := C(\mathscr{R})$. Un punto y es un punto de aglomeración de $(y_i)_{i \in D}$ si, y solamente si, es el límite de alguna subred de $(y_i)_{i \in D}$, véase [52, pág.71].

En el teorema siguiente se relacionan entre sí las nociones que para filtros hemos dado en la definición 1.2.1. Este teorema unifica resultados de [70, 21, 23, 12]. La prueba que damos, con la intención de hacer autocontenida esta memoria, sigue las ideas de [12]. En el transcurso de dicha prueba utilizamos el siguiente hecho elemental: *si Y es un espacio regular, entonces para cada $A \subset Y$ se tiene*

$$\overline{A} = \bigcap \{\overline{U} : U \text{ abierto}, U \supset A\}. \tag{1.5}$$

De hecho, la validez de (1.5) para cada $A \subset Y$ caracteriza la regularidad de Y.

Teorema 1.2.3. *Sea Y un espacio topológico y $\mathscr{B}$ una base de filtro en Y. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

(i) *existe un subconjunto compacto no vacío L de Y tal que $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en Y;*
(ii) *$C(\mathscr{B})$ es un compacto no vacío y $\mathscr{B} \rightsquigarrow C(\mathscr{B})$ en Y;*
(iii) *para cada cubrimiento abierto $\{O_s\}_{s\in S}$ de Y, existe un subconjunto finito S_0 de S y $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset \bigcup_{s\in S_0} O_s$;*
(iv) *para cada filtro $\mathscr{G}$ en Y que corta $\mathscr{B}$ se verifica que $C(\mathscr{G}) \neq \emptyset$;*
(v) *cada red $(y_i)_{i\in D} \prec \mathscr{B}$ tiene un punto de aglomeración en Y;*
(vi) *$\mathscr{B}$ es compactoide en Y.*

Entonces, (i) *y* (ii) *son equivalentes e implican cada una de las condiciones* (iii), (iv), (v) *y* (vi), *que a su vez son equivalentes entre sí. Si además, Y es regular, entonces todas las condiciones anteriores son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN: La implicación (ii)⇒(i) es clara. Veamos ahora como (i)⇒(ii). Por la proposición 1.2.2, apartado (ii), $C(\mathscr{B}) \subset L$, y puesto que $C(\mathscr{B})$ es cerrado concluimos que $C(\mathscr{B})$ es compacto. Si suponemos, por contradicción, que $C(\mathscr{B}) = \emptyset$, entonces para cada $y \in L$, existe $B_y \in \mathscr{B}$ tal que $y \notin \overline{B_y}$ y así $U_y \cap B_y = \emptyset$ para algún $U_y \in \mathscr{N}_y$. Dado que L es compacto, existe una colección finita de puntos $y_1, y_2, \ldots, y_n \in L$ tales que

$$L \subset U := U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \ldots \cup U_{y_n}.$$

Utilizando que $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ encontramos un elemento $B_0 \in \mathscr{B}$ tal que $B_0 \subset U$. Claramente se tiene entonces que

$$B_0 \cap B_{y_1} \cap B_{y_2} \cap \cdots \cap B_{y_n} \subset U \cap B_{y_1} \cap B_{y_2} \cap \cdots \cap B_{y_n} = \emptyset,$$

lo que contradice que $\mathscr{B}$ es una base de filtro y consecuentemente hemos establecido que $C(\mathscr{B}) \neq \emptyset$.

Demostramos ahora $\mathscr{B} \rightsquigarrow C(\mathscr{B})$. Supongamos que la afirmación no es cierta, entonces existe un entorno abierto $V \supset C(\mathscr{B})$ tal que $B \cap (Y \setminus V) \neq \emptyset$ para cada $B \in \mathscr{B}$. Se sigue entonces que la familia

$$\mathscr{B}' = \{B \cap (Y \setminus V) : B \in \mathscr{B}\}$$

es una base de filtro que satisface $\mathscr{B}' \rightsquigarrow L$. Por lo probado anteriormente sabemos que $C(\mathscr{B}')$ es no vacío. En consecuencia

$$\emptyset \neq \bigcap \left\{ \overline{B \cap (Y \setminus V)} : B \in \mathscr{B} \right\} \subset \bigcap \left\{ \overline{B} \cap (Y \setminus V) : B \in \mathscr{B} \right\} = C(\mathscr{B}) \cap (Y \setminus V) = \emptyset,$$

y la implicación (i)⇒(ii) queda demostrada.

Probamos ahora la equivalencia entre sí de las condiciones (iii), (iv), (v) y (vi).

Establecemos (iii)⇒(iv) por contradicción: supongamos que (iii) se verifica, que el filtro $\mathscr{G}$ corta a $\mathscr{B}$ y que $\bigcap_{G \in \mathscr{G}} \overline{G} = \emptyset$. Entonces $Y = \bigcup_{G \in \mathscr{G}} Y \setminus \overline{G}$. Como (iii) se verifica, existen $G_1, \dots, G_m \in \mathscr{G}$ y $B \in \mathscr{B}$ tales que $B \subset \bigcup_{j=1}^m Y \setminus \overline{G_j}$. Así,

$$\emptyset \neq B \cap (\bigcap_{j=1}^m G_j) \subset (\bigcup_{j=1}^m Y \setminus \overline{G_j}) \cap (\bigcap_{j=1}^m G_j) = \emptyset,$$

que es una contradicción, con lo cual esta implicación queda probada.

Demostramos ahora (iv)⇒(iii) también por contradicción. Suponemos que (iii) no se verifica y consideramos un cubrimiento abierto $(O_i)_{i \in I}$ de Y tal que para cada $F \subset I$ finito, y para cada $B \in \mathscr{B}$, se tiene que $B \bigcap (Y \setminus \bigcup_{i \in F} O_i) \neq \emptyset$. Para cada subconjunto finito F de I definimos $A_F = Y \setminus \bigcup_{i \in F} O_i$. La familia

$$\mathscr{A} := \{A_F : F \in I, F \text{ finito}\},$$

es una base de filtro. Sea $\mathscr{G}$ el filtro asociado a $\mathscr{A}$. Como el filtro $\mathscr{G}$ corta a $\mathscr{B}$, se tiene que $\emptyset \neq \bigcap_{G \in \mathscr{G}} \overline{G} = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \overline{A}$. Tomemos $y \in \bigcap_{A \in \mathscr{A}} \overline{A}$. El punto y debe estar en algún O_i pero al mismo tiempo $y \in A_{\{i\}} = Y \setminus O_i$, llegando de esta forma a la contradicción que buscábamos que termina la prueba de (iv)⇒(iii).

Veamos la implicación (iv)⇒(v). Tomamos una red $(y_i)_{i \in D} \prec \mathscr{B}$ y consideramos su filtro asociado $\mathscr{R} = (R_i)_{i \in D}$. La condición $(y_i)_{i \in D} \prec \mathscr{B}$ implica que $\mathscr{R}$ corta a $\mathscr{B}$. Así, si (iv) es cierto entonces $C((y_i)_{i \in D}) = C(\mathscr{R}) \neq \emptyset$, y consecuentemente (v) también se satisface.

Para probar (v)⇒(vi) razonamos como sigue. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro más fino que $\mathscr{B}$. Demostraremos que $\mathscr{U}$ es convergente en Y; para ello es suficiente ver que $C(\mathscr{U}) \neq \emptyset$. Dirijamos el conjunto $\mathscr{U} \times \mathscr{B}$ mediante la relación

$$(U, B) \succ (U', B') \text{ si, y sólo si, } U \subset U' \text{ y } B \subset B'.$$

Para cada $(U, B) \in \mathscr{U} \times \mathscr{B}$ se tiene que $U \cap B \neq \emptyset$; tomemos $y_{(U,B)} \in U \cap B$. La red $(y_{(U,B)})_{(U,B) \in \mathscr{U} \times \mathscr{B}}$ está eventualmente en $\mathscr{B}$ y en $\mathscr{U}$. De lo primero, utilizando que (v) se da, obtenemos que $(y_{(U,B)})_{(U,B)\in\mathscr{U}\times\mathscr{B}}$ tiene un punto de aglomeración $y\in Y$ y de lo segundo obtenemos que ha de ser $y\in C(\mathscr{U})$. En conclusión $C(\mathscr{U})\neq\emptyset$ como queríamos establecer.

La implicación (vi)⇒(iv) cierra la equivalencia entre (iii), (iv), (v) y (vi). Tomemos un filtro $\mathscr{G}$ que corta $\mathscr{B}$ y consideramos la base de filtro

$$\mathscr{H} := \{G\cap B : G\in\mathscr{G}, B\in\mathscr{B}\}.$$

Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro más fino que $\mathscr{H}$. Entonces $\mathscr{U}$ es más fino que $\mathscr{B}$ y que $\mathscr{G}$. Si suponemos que (vi) se da, tenemos que $\emptyset\neq C(\mathscr{U})\subset C(\mathscr{G})$. Así, (iv) se verifica.

Por último supongamos que Y es regular y que (v) se verifica. Vamos a probar que (ii) también se da. Después del apartado (iii) de la proposición 1.2.2, sólo tenemos que demostrar que $C(\mathscr{B})$ es compacto. Para esto, probaremos que todo filtro en $C(\mathscr{B})$ tiene un punto de aglomeración en $C(\mathscr{B})$. Sea $\mathscr{A}$ un filtro en $C(\mathscr{B})$. Consideramos la base de filtro

$$\theta(\mathscr{A}) = \{U\subset Y : U \text{ abierto}, A\subset U \text{ para algún } A\in\mathscr{A}\}.$$

Como antes, consideremos el conjunto dirigido $\theta(\mathscr{A})\times\mathscr{B}$, donde decimos que

$$(U,B)\succ(U',B') \text{ si, y solamente si, } U\subset U' \text{ y } B\subset B'.$$

Dados $B\in\mathscr{B}$ y $U\in\theta(\mathscr{A})$ tenemos que $B\cap U\neq\emptyset$; tomamos $y_{(U,B)}\in U\cap B$. La red $(y_{(U,B)})_{(U,B)\in\theta(\mathscr{A})\times\mathscr{B}}$ tiene un punto de aglomeración y en $C(\mathscr{B})\cap C(\theta(\mathscr{A}))$. Ahora como Y es regular, para cada $A\in\mathscr{A}$ la igualdad (1.5) permite obtener que

$$y\in\bigcap\{\overline{U} : U\in\theta(\mathscr{A})\} = \bigcap\{\overline{A} : A\in\mathscr{A}\} = C(\mathscr{A}),$$

y nuestra prueba acaba. □

El lema que sigue nos será de utilidad en la demostración de la proposiciones 2.1.5 y 2.8.5 por esa razón lo aislamos aquí.

Lema 1.2.4. *Sean T un espacio topológico, $Y\subset T$ un subespacio y $\mathscr{B}$ una base de filtro en Y. Si $\mathscr{B}$ es compactoide en Y, entonces se tiene*

$$\bigcap_{B\in\mathscr{B}}\overline{B}^{Y} = \bigcap_{B\in\mathscr{B}}\overline{B}^{T}.$$

DEMOSTRACIÓN: Siendo la inclusión $\bigcap_{B\in\mathscr{B}} \overline{B}^Y \subset \bigcap_{B\in\mathscr{B}} \overline{B}^T$ clara, sólo tenemos que probar la inclusión contraria. Tomemos $t \in \bigcap_{B\in\mathscr{B}} \overline{B}^T$. Definimos la base de filtro en Y dada por

$$\mathscr{A} = \{U \cap B : U \in \mathscr{N}_t, B \in \mathscr{B}\},$$

donde $\mathscr{N}_t$ denota la base de entornos abiertos de t en T. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en Y más fino que $\mathscr{A}$. El ultrafiltro $\mathscr{U}$ es más fino que $\mathscr{B}$, y consecuentemente $\mathscr{U}$ converge en Y a algún punto $y \in Y$. Como por otro lado $\mathscr{U} \to t$ en T se tiene que

$$t = y \in \bigcap_{B\in\mathscr{B}} \overline{B}^T \cap Y,$$

y la prueba termina. □

Finalizamos esta sección con algunos ejemplos de filtros compactoides y filtros que subconvergen a ciertos conjuntos. Uno de los ejemplos más importantes que citamos es el asociado a aplicaciones superiormente semicontinuas con valores compactos. Recordamos primero la definición de multifunción superiormente semicontinua, que puede encontrarse entre otros en [56, §18].

Definición 1.2.5. *Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación multivaluada $\psi : X \to 2^Y$ se dice que es superiormente semicontinua en un punto $x_0 \in X$ si $\psi(x_0)$ es no vacío y para cada subconjunto abierto V en Y con $\psi(x_0) \subset V$ existe un entorno abierto U de x_0 en X tal que $\psi(U) \subset V$. En otras palabras ψ es superiormente semicontinua en x_0 si, y sólo si, $\psi(\mathscr{N}_{x_0}) \rightsquigarrow \psi(x_0)$ para cada $x_0 \in X$.*

La multifunción ψ se dice superiormente semicontinua si es superiormente semicontinua en cada punto de X.

Ejemplo 1.2.6.

(i) *Redes convergentes.*
Si $(y_i)_{i\in D}$ es una red convergente en Y, entonces su base de filtro asociada $\mathscr{R} = (R_i)_{i\in D}$ es compactoide.

(ii) *Filtros que contienen un conjunto relativamente compacto.*
Un filtro en un espacio topológico Y que contiene un conjunto relativamente compacto es compactoide. Si además, Y es un espacio regular, se sigue de las consideraciones anteriores, que A es relativamente compacto si, y sólo si, el filtro generado por $\mathscr{B} = \{A\}$ es compactoide.

(iii) *Filtros acotados en espacios localmente convexos semirreflexivos.*
Sea Y un espacio localmente convexo semirreflexivo y $\mathscr{F}$ un filtro en Y que contiene un conjunto acotado. Entonces, $\mathscr{B}$ es compactoide en (Y,w): basta recordar que los conjuntos acotados en los espacios localmente convexos semirreflexivos son relativamente compactos en la topología débil, véase [54, §23.3.(1)].

(iv) *Filtros asociados a uscos.*
Si X e Y son dos espacios topológicos, una aplicación multivaluada $\psi : X \to 2^Y$ se dice que es *usco* (abreviación en inglés para *upper semi-continuous compact valued*) si es superiormente semicontinua, de acuerdo a la definición 1.2.5, y para cada $x \in X$ el conjunto $\psi(x)$ es no vacío y compacto. En otras palabras:

> ψ *es* usco *si para cada* $x \in X$ *el conjunto* $\psi(x)$ *es no vacío y compacto y* $\psi(\mathscr{N}_x) \rightsquigarrow \psi(x)$.

Hay variados y notables ejemplos de aplicaciones *usco* en topología y análisis. Nos remitimos a [56] para tales ejemplos, en general, y al ejemplo 1.3.3 que recogemos en la sección siguiente para algunas uscos relevantes.

1.3 Filtros compactoides de base numerable

En el capítulo 2 introducimos una nueva *función cardinal* a través de aplicaciones *usco* definidas en espacios métricos. Obsérvese que si (M,d) es un espacio métrico y $\psi : M \to 2^Y$ es *usco* entonces $\psi(x)$ es compacto y $\psi(\mathscr{N}_x) \rightsquigarrow \psi(x)$, con la particularidad de que la base de filtro $\psi(\mathscr{N}_x)$ puede ser tomada numerable. Con esto en mente, recopilamos en esta sección las propiedades que posteriormente utilizaremos sobre filtros subconvergentes y filtros compactoides de base numerable. Muchos de los resultados que siguen se encuentran repartidos en [12] y [16]; aquí damos demostraciones para todos ellos y aportamos algunas matizaciones – por ejemplo lema 1.3.8 apartado (iii), que clarifican la relación entre estos conceptos.

La diferencia de comportamiento entre filtros compactoides arbitrarios y filtros compactoides de base numerable se fundamenta en la proposición 1.3.1, que a su vez utiliza el hecho que sigue:

Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en el espacio topológico* Y*, entonces*

$$\overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup C((y_n)_n). \tag{1.6}$$

Para establecer la igualdad anterior, observemos que claramente se tiene la inclusión

$$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup C((y_n)_n) \subset \overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Recíprocamente, si tomamos $y \in \overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$ e $y \notin \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces y es punto de acumulación del conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Esto implica que $y \in C((y_n)_n)$ y la igualdad (1.6) queda establecida.

Proposición 1.3.1. *Sea* $\mathscr{F}$ *un filtro en el espacio topológico* Y *y sea* $L \subset Y$ *un subconjunto compacto no vacío. Consideramos las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathscr{F} \rightsquigarrow L$ *en* Y*;*

(ii) *para cada sucesión* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathscr{F}$ *el conjunto* $\overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$ *es compacto y el conjunto de los puntos de aglomeración* $C((y_n)_n)$ *está contenido en* L*.*

(iii) *cada sucesión* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathscr{F}$ *tiene un punto de aglomeración que está en* L*.*

Entonces, (i) *siempre implica* (ii) *y* (ii) *implica a su vez* (iii)*. Si* $\mathscr{F}$ *tiene una base de filtro numerable, entonces las tres condiciones son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente (ii)⇒(iii). Supongamos que (i) se verifica y probemos que (ii) también. Fijemos una sucesión $(y_n)_n \prec \mathscr{F}$. Sea $\mathscr{R} = (R_n)_n$ la base de filtro asociada a $(y_n)_n$. Como $\mathscr{F} \rightsquigarrow L$ se tiene que $\mathscr{R} \rightsquigarrow L$ y utilizando el teorema 1.2.3 obtenemos que

$$C((y_n)_n) \text{ es compacto no vacío y } \mathscr{R} \rightsquigarrow C((y_n)_n). \tag{1.7}$$

Por el apartado (ii) de la proposición 1.2.2 tenemos que $C((y_n)_n) \subset L$. Tomemos un cubrimiento abierto $\{O_s\}_{s\in S}$ de Y. Utilizando la condición (iii) del teorema 1.2.3 podemos escoger $n \in \mathbb{N}$ y un subconjunto finito $S_0 \subset S$ tales que

$$R_n = \{y_m : m \geq n\} \subset \bigcup_{s\in S_0} O_s.$$

Finalmente, teniendo además en cuenta la igualdad (1.6) y que $C((y_n)_n)$ es compacto, se sigue que una cantidad finita de O'_s cubre $\overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$, y consecuentemente la validez de (i)⇒(ii) queda establecida.

Para acabar, sea $\mathscr{B}$ una base numerable para $\mathscr{F}$, supongamos que (iii) se verifica y veamos que (i) también se da. Podemos suponer que $\mathscr{B}$ se escribe como una sucesión decreciente $B_1 \supset B_2 \supset \cdots B_n \supset \cdots$ de conjuntos no vacíos. Dado $V \subset Y$ abierto con $L \subset V$ probamos que para algún $m \in \mathbb{N}$ se verifica que $B_m \subset V$. Si esto no fuera así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiría $y_n \in B_n \setminus V$. La sucesión $(y_n)_n \prec \mathscr{F}$ y $\emptyset \neq C((y_n)_n) \subset Y \setminus V$. Puesto que $Y \setminus V$ tiene intersección vacía con L, esto contradice (iii) y la prueba queda terminada. $\square$

El siguiente corolario, bien conocido, es una herramienta útil que se obtiene aquí como consecuencia de la proposición anterior.

Corolario 1.3.2. *Sea X un espacio topológico que satisface el Primer Axioma de Numerabilidad. Si Y es otro espacio topológico y $\psi : X \to 2^Y$ una multifunción con valores compactos no vacíos, entonces son equivalentes:*

(i) *ψ es superiormente semicontinua (i.e. usco en este caso);*

(ii) *para cada sucesión $(x_n)_n$ convergente a algún $x \in X$, si tomamos $y_n \in \psi(x_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, entonces $(y_n)_n$ tiene un punto de aglomeración y en $\psi(x)$.*

DEMOSTRACIÓN: El corolario se sigue inmediatamente de la proposición 1.3.1 teniendo en cuenta que si para cada $x \in X$ fijamos una base numerable de entornos $\mathscr{N}_x$ entonces la condición (i) aquí, semicontinuidad superior, equivale a que $\psi(\mathscr{N}_x) \rightsquigarrow \psi(x)$ y la condición (ii) equivale a que cada sucesión $(y_n)_n \prec \psi(\mathscr{N}_x)$ tiene un punto de aglomeración en el compacto $\psi(x)$. $\square$

En el ejemplo que sigue recogemos tres situaciones en las que las aplicaciones usco aparecen de forma natural.

Ejemplo 1.3.3.

(i) *La aplicación dualidad.*

Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Para cada $x \in S_X$ definimos

$$J(x) = \{x^* \in B_{X^*} : x^*(x) = \|x\| = 1\} \tag{1.8}$$

Siguiendo a [20, pág. 23] al conjunto definido en (1.8) se le da el nombre de *subdiferencial* de la norma $\|\cdot\|$ en x.

La aplicación $J : S_X \to 2^{B_{X^*}}$ que a cada $x \in S_X$ le asocia $J(x)$ definido por (1.8) es $\|\cdot\| - w^*$-usco. Obsérvese que gracias al teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in S_X$, el conjunto $J(x)$ es no vacío. Además, $J(x)$ es w^*-cerrado y acotado, y por tanto w^*-compacto.

Para probar que J es una aplicación superiormente semicontinua probamos que para cada sucesión $(x_n)_n$ que converge a x en $(X,\|\cdot\|)$, si $x_n^* \in J(x_n)$ entonces $(x_n^*)_n$ tiene un punto de w^*-aglomeración en $J(x)$. Como (B_{X^*},w^*) es compacto, la sucesión $(x_n^*)_n$ tiene un punto de aglomeración $x^* \in B_{X^*}$ en la topología w^*. Veamos que $x^* \in J(x)$. Utilizando la desigualdad triangular tenemos que

$$||x^*(x)|-|x_n^*(x_n)|| \le |x^*(x)-x_n^*(x_n)| \le |x^*(x)-x_n^*(x)|+|x_n^*(x)-x_n^*(x_n)|.$$

Teniendo en cuenta que $x_n^*(x_n)=1$ para cada $n\in\mathbb{N}$, la desigualdad precedente queda de la forma

$$\begin{aligned}1-|x^*(x)| &\le |x^*(x)-x_n^*(x)|+|x_n^*(x)-x_n^*(x_n)| \le \\ &\le |x^*(x)-x_n^*(x)|+\|x_n-x\|.\end{aligned}$$

Como $(x_n^*(x))_n$ se aglomera en $x^*(x)$ y $\text{lím}_n \|x_n-x\|=0$, se tiene que $|x^*(x)|=1$ y $x^*\in J(x)$.

La aplicación dualidad aparece de forma natural en el estudio de la diferenciabilidad Gâteaux y la diferenciabilidad Fréchet de la norma en un punto x, ver [20, pág. 7].

(ii) *La proyección métrica en un espacio de Banach reflexivo.*

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach e $Y\subset(X,\|\cdot\|)$ un subespacio. Y se dice *proximinal* si para cada $x\in X$ existe $y_0\in Y$ tal que $d(x,Y)=d(x,y_0)$. Obsérvese que si Y es proximinal, entonces Y es necesariamente cerrado. Si $Y\subset X$ es proximinal el conjunto

$$P_Y(x)=\{y\in Y:\|y-x\|=d(x,Y)\}$$

es acotado, convexo y cerrado. Efectivamente, $P_Y(x)$ es cerrado en norma. Por otra parte si $y_0,y_1\in P_Y(x)$ y $0\le\lambda,\mu\le 1$ con $\lambda+\mu=1$, se tiene

$$\begin{aligned}\|(\lambda y_0+\mu y_1)-x\| &= \|(\lambda y_0+\mu y_1)-(\lambda+\mu)x\| \le \\ &\le \lambda\|y_0-x\|+\mu\|y_1-x\| = \\ &= \lambda\, d(x,Y)+\mu\, d(x,Y)=d(x,Y)\end{aligned}$$

lo que prueba que $P_Y(x)$ es convexo. Para terminar, obsérvese que si $y\in P_Y(x)$ entonces,

$$\|y\|\le\|x-y\|+\|x\|=\|x\|+d(x,Y)\le 2\|x\|$$

y así, $P_Y(x)$ es acotado.

Por otro lado si $(X,\|\cdot\|)$ es reflexivo, cada subespacio cerrado $Y\subset X$ es proximinal. Efectivamente, dado $x\in X$ si

$$d(x,Y):=\inf\{\|x-y\|:y\in Y\},$$

podemos tomar $(y_n)_n\subset Y$ con $d(x,Y)=\lim_n\|x-y_n\|$. Esto implica que $(y_n)_n$ es acotada en norma. Como X es reflexivo, Y lo es también y así, la sucesión $(y_n)_n$ tiene, gracias al teorema de Eberlein-Smulian, [37, Theorem 81] una subsucesión $(y_{n_k})_k$ que converge hacia un cierto punto $y_0\in Y$ en la topología débil. Así, para cada $x^*\in X^*$, $\|x^*\|\leq 1$, se tiene que

$$|x^*(x)-x^*(y_0)|\leq|x^*(x)-x^*(y_{n_k})|+|x^*(y_{n_k})-x^*(y_0)|.$$

Fijado $\varepsilon>0$ existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que si $k\geq k_0$

$$|x^*(x)-x^*(y_0)|\leq|x^*(x)-x^*(y_{n_k})|+\varepsilon.$$

De aquí,

$$\begin{aligned}\sup_{x^*\in B_{X^*}}|x^*(x)-x^*(y_0)|&\leq\sup_{x^*\in B_{X^*}}|x^*(x)-x^*(y_{n_k})|+\varepsilon\\ \|x-y_0\|&\leq\|x-y_{n_k}\|+\varepsilon,\end{aligned}$$

de donde finalmente obtenemos que

$$\|x-y_0\|=\lim_k\|x-y_{n_k}\|=d(x,Y)$$

y consecuentemente Y es proximinal.

Utilizando lo anterior, si $(X,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach reflexivo, entonces para cada $x\in X$ el conjunto de las mejores aproximaciones $P_Y(x)$ es no vacío, convexo y w-compacto. La aplicación multivaluada así definida, $P_Y:X\to 2^Y$ se llama proyección métrica. La proyección métrica es en este caso $\|\cdot\|$-w-usco. Probamos ahora la semicontinuidad superior. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X convergente a x en $\|\cdot\|$, y para cada $n\in\mathbb{N}$ tomamos $y_n\in P_Y(x_n)$. La sucesión $(y_n)_n$ tiene un punto de aglomeración y en la topología débil puesto que está acotada, gracias a la desigualdad

$$\|y_n-x\|\leq\|y_n-x_n\|+\|x_n-x\|=d(x_n,Y)+\|x_n-x\|$$

y $(d(x_n,Y))_n$ converge a $d(x,Y)$. Ahora concluimos que $y\in P_Y(x)$ ya que

$$\begin{aligned}|x^*(x-y)|&\leq|x^*(x-x_n)|+|x^*(x_n-y_n)|+|x^*(y_n-y)|\\ &\leq\|x-x_n\|+\|x_n-y_n\|+x^*(y_n-y)\\ &\leq\|x-x_n\|+d(x_n,Y)+x^*(y_n-y),\end{aligned}$$

para cada $x^* \in B_{X^*}$. De aquí se sigue

$$|x^*(x-y)| \leq d(x,Y),$$

para cada $x^* \in B_{X^*}$, luego $\|x-y\| = d(x,Y)$.

(iii) *Espacios de Banach débilmente compactamente generados*

Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach *débilmente compactamente generado*, es decir, $X = \overline{\left(\cup_{n=1}^{\infty} nW\right)}^{\|\cdot\|}$, donde W es un subconjunto w-compacto y absolutamente convexo. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} &\to 2^{(X^{**},w^*)} \\ (t_1,t_2,\ldots,t_k,\ldots,) &\to \bigcap_{k=1}^{\infty}(t_kW + \frac{1}{k}B_{X^{**}}) \end{aligned} \tag{1.9}$$

es usco. Para cada $\alpha = (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ el conjunto $\Psi(\alpha)$ es no vacío y w^*-compacto por ser intersección de conjuntos w^*-compactos. Veamos que Ψ es superiormente semicontinua. Sea $\alpha = (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y U un abierto en la topología w^* tal que $\Psi(\alpha) \subset U$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{k=1}^{m}\left(t_kW + \frac{1}{k}B_{X^{**}}\right) \subset U,$$

Así, el conjunto $O := \left\{\beta = (\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \delta_k = t_k, k = 1,\ldots,m\right\}$, es un entorno abierto de α en la topología de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, y $\Psi(O) \subset U$, quedando demostrada la semicontinuidad superior.

Por otra parte obsérvese que

$$\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \Psi(\alpha) = X$$

ya que la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nW$ es densa en X.

Siguiendo a [21] damos la siguiente definición.

Definición 1.3.4. *Sea Y un espacio topológico, $\mathscr{F}$ un filtro y $\mathscr{B}$ una base de filtro en Y.*

(i) *Se dice que $\mathscr{F}$ es numerablemente compactoide en Y si para cada filtro $\mathscr{G}$ con base numerable que corta a $\mathscr{F}$, de acuerdo a la definición 1.2.1*[(v)], *$C(\mathscr{G}) \neq \emptyset$ en Y;*

(ii) *Se dice que $\mathscr{B}$ es numerablemente compactoide cuando el filtro $\mathscr{F}$ generado por $\mathscr{B}$ es numerablemente compactoide.*

La equivalencia en la proposición que sigue entre (i) y (ii) puede encontrarse en [21] y con el concurso de (iii) en [12].

Proposición 1.3.5. *Sea Y un espacio topológico y $\mathscr{B}$ una base de filtro en Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *para cada cubrimiento abierto $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Y, existe un subconjunto finito N_0 de $\mathbb{N}$ y $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset \bigcup_{n\in N_0} O_n$;*

(ii) *para cada filtro $\mathscr{G}$ con base numerable en Y que corta $\mathscr{B}$, tenemos $C(\mathscr{G}) \neq \emptyset$.*

Cada una de las condiciones equivalentes anteriores implica la condición:

(iii) *toda sucesión $(y_n)_n \prec \mathscr{B}$ tiene un punto de aglomeración en Y.*

Si además, $\mathscr{B}$ es numerable entonces (i), (ii) *y* (iii) *son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN: Para la equivalencia (i)⇔(ii) basta repetir la prueba (iii)⇔(iv) del teorema 1.2.3 sustituyendo $\mathscr{G}$ por su base numerable y un cubrimiento abierto arbitrario por uno que sea numerable.

Para obtener una prueba de (ii)⇒(iii) es suficiente seguir los pasos de la prueba (iv)⇒(v) del teorema 1.2.3 sustituyendo redes por sucesiones. Supongamos ahora que $\mathscr{B}$ es numerable y vamos a probar que (iii)⇒(ii). Sea $\mathscr{G}$ un filtro con una base numerable $\mathscr{B}'$ que corta a $\mathscr{B}$. Supongamos que $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}'$ se escriben, respectivamente, como las sucesiones decrecientes de conjuntos no vacíos,

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots B_n \supset \cdots \text{ y } B_1' \supset B_2' \supset \cdots B_n' \supset \cdots$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $y_n \in B_n \cap B_n'$. La sucesión $(y_n)_n \prec \mathscr{B}$. Puesto que (iii) se verifica $(y_n)_n$ tiene un punto de aglomeración y en Y. Por tanto $y \in \overline{B_n'}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí se sigue que $y \in \bigcap_{G\in\mathscr{G}} \overline{G}$ y (ii) se verifica. □

Las bases de filtro numerables con la propiedad (iii) de la proposición 1.3.5 reciben el nombre de *relativamente numerablemente compactas* en [16, Definition 1]. En este último artículo y también en [23] se distingue y estudia el conjunto de *puntos de aglomeración sucesionales* $C_s(\mathscr{F})$ de un filtro $\mathscr{F}$ como aparece debajo.

Definición 1.3.6. *Dado un filtro $\mathscr{F}$ en el espacio topológico Y, el* conjunto de los puntos de aglomeración de sucesiones *de $\mathscr{F}$ se define como*

$$C_s(\mathscr{F}) := \{y \in Y : \ y \text{ es punto de aglomeración de alguna sucesión } (y_n)_n \prec \mathscr{F}\}.$$

Definición 1.3.7. *Un espacio topológico Y se dice que es* numerablemente compacto *(abreviadamente, NK) si para todo recubrimiento abierto numerable $(O_n)_n$ de Y existe un conjunto finito $N \subset \mathbb{N}$ tal que $Y = \bigcup_{n\in N} O_n$. Un subconjunto A de un espacio topológico Y se dice que es numerablemente compacto si con la topología inducida es un espacio numerablemente compacto.*

Equivalentemente, A es numerablemente compacto si toda sucesión en A tiene un punto de aglomeración en A o si todo conjunto infinito $M \subset A$ tiene un punto de acumulación en A, véanse [52, pág. 162] y [25, Theorem 3.10.3, pág. 202].

Las implicaciones (i)⇔(ii)⇒(iii) en el siguiente lema se pueden encontrar en [16, Main Lemma]. Que (iii) es de hecho equivalente a (i) y (ii) clarifica el comportamiento de los filtros numerablemente compactoides de base numerable.

Lema 1.3.8. *Sea Y un espacio topológico y $\mathscr{B}$ una base de filtro numerable en Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *para cada sucesión $(y_n)_n \prec \mathscr{B}$ el conjunto $\overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es numerablemente compacto;*

(ii) *$\mathscr{B}$ es numerablemente compactoide y $C_s(\mathscr{B})$ es numerablemente compacto no vacío;*

(iii) *$C_s(\mathscr{B})$ es numerablemente compacto no vacío y $\mathscr{B} \rightsquigarrow C_s(\mathscr{B})$.*

DEMOSTRACIÓN: (i)⇒(ii) Después de la proposición 1.3.5, $\mathscr{B}$ es numerablemente compactoide. Veamos ahora que $C_s(\mathscr{B})$ es numerablemente compacto. Supongamos que $\mathscr{B}$ viene dada como una sucesión decreciente de conjuntos $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \cdots$. Sea $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_s(\mathscr{B})$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe una sucesión $(y_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $(y_n^j)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathscr{B}$, y tal que y_j es un punto de aglomeración de $(y_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe una sucesión creciente

$$n_1^j < n_2^j < \cdots < n_p^j \cdots,$$

de enteros positivos tal que

$$y_n^j \in B_k \text{ si } n_k^j \leq n < n_{k+1}^j, \text{ para } k = 1, 2, \ldots$$

Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$\{y^1_{n^1_1}, \ldots, y^1_{n^1_2-1}, y^1_{n^1_2}, \ldots, y^1_{n^1_3-1}, y^2_{n^2_2}, \ldots, y^2_{n^2_3-1}, y^1_{n^1_3}, \ldots, y^1_{n^1_4-1},$$
$$y^2_{n^2_3}, \ldots, y^2_{n^2_4-1}, y^3_{n^3_3}, \ldots, y^3_{n^3_4-1}, y^1_{n^1_4}, \ldots\}.$$

La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está eventualmente en $\mathscr{B}$, y así $\overline{\{z_n : n\in\mathbb{N}\}}$ es numerablemente compacto por hipótesis. Pero

$$y_j \in \overline{\{z_n : n\in\mathbb{N}\}}, \text{ para } j\in\mathbb{N}$$

ya que,

$$\left\{y_n^j : n \geq n_j^j\right\} \subset \{z_n : n\in\mathbb{N}\}.$$

De aquí se sigue que, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de aglomeración y en Y. Además, $y\in C_s(\mathscr{B})$ ya que y es de hecho punto de aglomeración de la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_n \prec \mathscr{B}$. Ciertamente, si U es un entorno abierto de y y $p\in\mathbb{N}$ existe algún entero positivo $j_p > p$ tal que $y_{j_p}\in U$, y así para algún $m > p$ se sigue que $z_m\in U$, ya que U es un conjunto abierto e y_{j_p} es punto de aglomeración de la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii)⇒(iii) Procedamos por reducción al absurdo y supongamos (ii) se da y que $\mathscr{B}$ no subconverge hacia $C_s(\mathscr{B})$. Podemos suponer que $\mathscr{B}$ se escribe como una sucesión decreciente

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \cdots.$$

Existe pues $V\subset Y$ abierto con $C_s(\mathscr{B})\subset V$ y $B_n\cap(Y\setminus V)\neq\emptyset$, para cada $n\in\mathbb{N}$; tomemos $y_n\in B_n\cap(Y\setminus V)$. La sucesión $(y_n)_n\prec\mathscr{B}$, y así tiene un punto de aglomeración y que necesariamente está en $Y\setminus V$. Por otro lado como por definición $y\in C_s(\mathscr{B})$ lo que contradice $C_s(\mathscr{B})\subset V$ y acaba la prueba de la implicación (ii)⇒(iii).

(iii)⇒(i) Fijemos $(y_n)_n\prec\mathscr{B}$. Como $\overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}$ es cerrado, para probar que es numerablemente compacto veremos que para cada recubrimiento abierto numerable $(O_m)_m$ de Y, una cantidad finita de O_m's cubre $\overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}$. Dado el cubrimiento $(O_m)_m$, como $C_s(\mathscr{B})$ es numerablemente compacto, existe $N\subset\mathbb{N}$ tal que

$$C_s(\mathscr{B}) \subset \bigcup_{m\in N} O_m. \tag{1.10}$$

Dado que $\mathscr{B}\rightsquigarrow C_s(\mathscr{B})$ para un cierto $K\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\{y_n : n\geq K\} \subset \bigcup_{m\in N} O_m \tag{1.11}$$

Por otro lado la igualdad (1.6) nos da la inclusión

$$\overline{\{y_n : n\geq K\}} \subset \{y_n : n\in\mathbb{N}\}\cup C_s(\mathscr{B}). \tag{1.12}$$

Si ahora utilizamos (1.10), (1.11) y (1.12) concluimos que una cantidad finita de O_m's cubre $\overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}$ y la prueba termina. □

Definición 1.3.9. *Diremos que un subconjunto A de un espacio topológico Y es relativamente numerablemente compacto (abreviadamente RNK) si toda sucesión en A tiene un punto de aglomeración en Y. Diremos que A es sucesionalmente compacto, (respectivamente relativamente sucesionalmente compacto) si toda sucesión en A tiene una subsucesión convergente a un punto de A (respectivamente de Y).*

Debe notarse aquí que la definición para ser A relativamente numerablemente compacto *no es* que la clausura $\overline{A}$ es numerablemente compacto, como pone de manifiesto el ejemplo que sigue que ha sido tomado de [30, Example 1.2.(9)]: este ejemplo es de hecho un subconjunto sucesionalmente compacto A cuyo cierre $\overline{A}$ no es numerablemente compacto.

Ejemplo 1.3.10. *Sea $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de conjuntos tal que $T_i \cap T_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y T_i no numerable para cada $i \in \mathbb{N}$. Tomamos $T := \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, y definimos*

$$X := \left\{ f : T \to \mathbb{R} : \text{ existe } n \in \mathbb{N} : \operatorname{sop}(f) \cap (\bigcup_{i=n}^{\infty} T_i) \text{ es numerable} \right\},$$

donde $\operatorname{sop}(f) = \{t \in T : f(t) \neq 0\}$. *Dotamos $X \subset \mathbb{R}^T$ con la topología de convergencia puntual sobre T. El conjunto*

$$A := \{ f \in X : sop(f) \text{ es numerable y } |f(t)| \leq 1 \text{ para cada } t \in T\}$$

es sucesionalmente compacto y su clausura $\overline{A}$ en X no es numerablemente compacto.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de A. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\operatorname{sop}(f_n) \subset T$ es numerable y así también el conjunto $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{sop}(f_n)$. Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $t \in T$ tenemos que $|f_n(t)| \leq 1$ tenemos que la sucesión $(f_n)_n$ está contenida en el espacio $[-1,1]^D$, que es compacto y metrizable. De lo anterior deducimos que $(f_n)_n$ tiene una subsucesión convergente en $[-1,1]^D$ y por ende en X, y así queda probado que A es relativamente numerablemente compacto.

Demostramos ahora que $\overline{A}^X$ no es numerablemente compacto, para ello es suficiente mostrar una sucesión en $\overline{A}^X$ que no tenga puntos de aglomeración. El cierre de A en la topología de X es el conjunto

$$\overline{A}^X = \{ f \in X : |f(t)| \leq 1 \text{ para cada } t \in T\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el subconjunto $T'_n = \bigcup_{i=1}^n T_i$ y la función $\chi_{T'_n} : T \to \mathbb{R}$ dada por $\chi_{T'_n}(t) = 1$ si $t \in T'_n$ y $\chi_{T'_n}(t) = 0$ si $t \notin T'_n$. La sucesión de funciones $(\chi_{T'_n})_n$ está contenida en $\overline{A}^X$, y converge a la función constante igual a 1 en T, $\mathbf{1}$ en $\mathbb{R}^T$. Sin embargo, $\mathbf{1} \notin X$ ya que $|T|$ es no numerable, y así hemos encontrado una sucesión en $\overline{A}^X$ que no tiene puntos de aglomeración en X. □

Un conjunto numerable numerablemente compacto es compacto. El siguiente ejemplo muestra un conjunto numerable y relativamente numerablemente compacto cuyo cierre no es compacto.

Ejemplo 1.3.11. *Sea $\beta\mathbb{N}$ la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ con la topología discreta, y $X = \beta\mathbb{N} \setminus \{r\}$ dotado de la topología inducida, donde $r \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Entonces $\mathbb{N}$ es relativamente numerablemente compacto en X pero $\overline{\mathbb{N}}^X$ no es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Después de [25, Theorem 3.6.14] sabemos que cada subconjunto cerrado de $\beta\mathbb{N}$ tiene cardinal no numerable, así cada subconjunto numerable $A \subset \mathbb{N}$ tiene un punto de aglomeración en X. Sin embargo, $\overline{\mathbb{N}}^X = X$ y X no es compacto. □

Teorema 1.3.12. *Sea Y un espacio topológico en el que los conjuntos relativamente numerablemente compactos son relativamente compactos. Si $\mathscr{B}$ es una base de filtro numerable en Y, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *existe un subconjunto no vacío y numerablemente compacto L de Y tal que $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en Y;*

(ii) *para cada cubrimiento abierto numerable $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Y, existe un subconjunto finito N de $\mathbb{N}$ y $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset \bigcup_{n\in N} O_n$;*

(iii) *$\mathscr{B}$ es numerablemente compactoide en Y;*

(iv) *cada sucesión $(y_n)_n \prec \mathscr{B}$ tiene un punto de aglomeración en Y;*

(v) *$C_s(\mathscr{B})$ es numerablemente compacto no vacío y $\mathscr{B} \rightsquigarrow C_s(\mathscr{B})$ en Y;*

(vi) *$\mathscr{B}$ es compactoide en Y.*

DEMOSTRACIÓN: (i)⇒(ii) es obvio. La implicación (ii)⇒(iii)⇒(iv) está probada en la proposición 1.3.5. Probamos (iv)⇒(v). Sea $(y_n)_n \prec \mathscr{B}$. Si (iv) se verifica entonces el conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente numerablemente compacto. Ciertamente, dada una sucesión $(z_n)_n$ en $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto $\{m \in \mathbb{N} : y_m = z_n$ para algún $n \in \mathbb{N}\}$ es finito o infinito. En el primer caso $(z_n)_n$ tiene una subsucesión que es constante, y por tanto convergente. En el segundo caso hay sucesiones de enteros positivos

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \quad m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots,$$

tales que $z_{n_k} = y_{m_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, $(z_{n_k})_k \prec \mathscr{B}$ y por tanto $(z_n)_n$ tiene un punto de aglomeración en Y, lo cual nos permite afirmar que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente numerablemente compacto. La hipótesis sobre Y implica que $\overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es compacto y utilizando el lema 1.3.8 obtenemos que $C_s(\mathscr{B})$ es numerablemente compacto y $\mathscr{B} \rightsquigarrow C_s(\mathscr{B})$.

(v)⇒(i) ya que $\mathscr{B} \rightsquigarrow \overline{C(\mathscr{B})}$ y $\overline{C(\mathscr{B})}$ es compacto por las hipótesis.

(v)⇒(vi) Otra vez, dado que $\mathscr{B} \rightsquigarrow \overline{C(\mathscr{B})}$ por el teorema 1.2.3, $\mathscr{B}$ es compactoide.

(vi)⇒(iii) Se sigue directamente de la implicación (vi)⇒(iv) en el teorema 1.2.3. □

Debemos comentar aquí que la hipótesis de que los conjuntos relativamente numerablemente compactos sean relativamente compactos que hemos hecho sobre Y en el teorema anterior se satisface para amplias clases de espacios topológicos entre otras para:

A. *Los espacios realcompactos:* Un espacio topológico se dice que es realcompacto si es homeomorfo a un subespacio cerrado de un producto de rectas reales, [33].

B. *Los espacios Dieudonné completos:* Un espacio topológico se dice que es Dieudonné completo si es homeomorfo a subespacio cerrado de un producto de espacios metrizables, [25, 8.5.13].

C. *Los espacios angélicos [Fremlin, [30]]* Un espacio topológico Y se dice que es angélico si para cada conjunto relativamente numerablemente compacto $A \subset Y$ se tiene:

   (i) A es relativamente compacto;

   (ii) para cada $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $(y_n)_n$ en A tal que $\lim_n y_n = y$.

   Una buena referencia para el estudio sistemático de los espacios angélicos es la monografía [30]. Entre otros, son espacios angélicos: los espacios métricos; el espacio de funciones continuas $(C(K), \tau_p(K))$ en un compacto dotado de su topología de convergencia puntual $\tau_p(K)$ sobre K; los espacios normados dotados de sus topologías débiles; etc. En los artículos [13, 69, 15, 14] se prueba que muchos espacios de funciones continuas y espacios con topologías vectoriales obtenidas por operaciones de tipo numerable a partir de espacios metrizables y sus duales, son espacios angélicos. Remitimos al lector a la sección 2.6 de esta memoria donde algunos de los resultados citados más arriba son extendidos.

Es notable el hecho de que en espacios angélicos un subconjunto es compacto si, y sólo si, es numerablemente compacto y si, y sólo si, es sucesionalmente compacto (también para las nociones relativas), [30].

1.4 Filtros compactoides y k-espacios

Empezamos esta sección con la siguiente proposición que clarifica los aspectos relacionados con la *proposition 2.3* de [12] y nos sirve para poner de manifiesto, véase corolario 1.4.2, que la coincidencia de las familias de compactos para dos topologías y de las familias de filtros compactoides de base numerable para éstas son una misma cosa.

Proposición 1.4.1. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en Y tales que todo subconjunto τ_1-compacto es τ_2-compacto. Sean $\mathscr{B}$ una base de filtro numerable y L un conjunto no vacío τ_1-compacto de Y. Si $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (Y,τ_1), entonces $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (Y,τ_2).*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (Y,τ_1). Después de la proposición 1.3.1, para ver que $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (Y,τ_2) es suficiente probar que para cada sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathscr{F}$

$$\text{el conjunto } \overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}^{\tau_2} \text{ es } \tau_2\text{-compacto,} \tag{1.13}$$

y que el conjunto de los puntos de aglomeración de $(y_n)_n$ en (Y,τ_2)

$$\bigcap_m \overline{\{y_n : n\geq m\}}^{\tau_2} \text{ está contenido en } L. \tag{1.14}$$

Ahora bien, como $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (Y,τ_1), la proposición 1.3.1, se aplica para obtener que $\overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}^{\tau_1}$ es τ_1-compacto y que $\bigcap_m \overline{\{y_n : n\geq m\}}^{\tau_1} \subset L$. Como, por hipótesis, los conjuntos τ_1-compactos son τ_2-compactos, se obtiene que $\overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}^{\tau_1}$ es τ_2-compacto, consecuentemente τ_2-cerrado y así $\overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}^{\tau_2} \subset \overline{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}^{\tau_1}$ lo que nos dice que la afirmación en (1.13) se satisface. Es claro, que el razonamiento anterior aplicado a $(y_n)_{n\geq m}$ en lugar de a $(y_n)_{n\geq 1}$ nos dice que

$$\overline{\{y_n : n\geq m\}}^{\tau_2} \subset \overline{\{y_n : n\geq m\}}^{\tau_1}, \text{ para cada } m\in\mathbb{N},$$

y por tanto (1.14) se cumple. $\square$

Corolario 1.4.2. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías regulares en Y. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

(i) *los espacios (Y,τ_1) e (Y,τ_2) tienen los mismos compactos;*

(ii) *los espacios (Y,τ_1) e (Y,τ_2) tienen los mismos filtros compactoides de base numerable.*

Entonces (i) *siempre implica* (ii). *Cuando existe una topología Hausdorff δ en Y que es simultáneamente más gruesa que τ_1 y τ_2 entonces* (ii) *también implica* (i).

DEMOSTRACIÓN: La implicación (i)$\Rightarrow$(ii) se sigue de la proposición 1.4.1 y del teorema 1.2.3. Para la implicación (ii)$\Rightarrow$(i) basta tener en cuenta que si $A \subset Y$ es τ_1-compacto, entonces la base de filtro $\mathscr{B} := \{A\}$ es τ_1-compactoide y por tanto τ_2-compactoide. Esto implica después del teorema 1.2.3 que A es τ_2-relativamente compacto. Para acabar la prueba es suficiente ver que A es τ_2-cerrado. Veámoslo. Si tomamos $y \in \overline{A}^{\tau_2}$ entonces existe una red $(y_j)_{j\in D}$ tal que $y = \text{lím}_{j\in D} y_j$ para τ_2. Por otro lado como A es τ_1-compacto, existe una subred $(y_\ell)_{\ell\in L}$ de $(y_j)_{j\in D}$ y un punto $x \in A$ tal que $x = \text{lím}_{\ell\in L} y_\ell$ para τ_1. Como δ es más gruesa que τ_1 y τ_2 se obtiene que $(y_\ell)_{\ell\in L}$ converge para δ a los puntos x e y. Como δ es Hausdorff, deducimos que $y = x$ y por tanto se obtiene que $y \in A$ lo que prueba que A es τ_2-cerrado como queríamos. Si intercambiamos τ_1 por τ_2 y repetimos el razonamiento anterior obtenemos que los conjuntos τ_2-compactos de Y son τ_1-compactos y así termina la prueba. $\square$

Debemos comentar que la condición de que dos topologías tengan los mismos compactos implica que las dos topologías coinciden en estos conjuntos, y que esto implica, en particular, que las dos topologías tienen las mismas sucesiones convergentes.

En los resultados que siguen utilizamos la noción de k-espacio, cuya definición recordamos a continuación.

Definición 1.4.3. *Un espacio topológico Y se dice que es un k-espacio, si los conjuntos cerrados de Y son precisamente los conjuntos cuya intersección con cada subconjunto compacto de Y es un conjunto cerrado.*

Si (Y,τ) es un espacio topológico entonces la familia

$$\begin{aligned} &\tau^k \textit{de subconjuntos } U \textit{ de } Y \textit{ tales que } U\cap K \textit{ es abierto en } K\\ &\textit{para cada subconjunto compacto } K \textit{ de } Y, \end{aligned} \tag{1.15}$$

es una topología en Y que llamaremos *k-topología asociada* a τ. La proposición que sigue recoge, sin demostración, las propiedades de la k-topología τ^k asociada a τ.

Proposición 1.4.4. *Sea (Y,τ) un espacio topológico. Entonces la k-topología τ^k asociada a τ, tiene las siguientes propiedades:*

(i) *τ^k es más fina que τ;*

(ii) *τ y τ^k coinciden en los compactos de τ. Consecuentemente τ y τ^k tienen los mismos compactos;*

(iii) *(Y,τ^k) es un k-espacio;*

(iv) *$\tau = \tau^k$ si, y solamente si, (Y,τ) es un k-espacio.*

Remitimos al lector interesado a [52, pág. 240] y [25, Section 3.3] para cuestiones adicionales a las recogidas aquí relativas a k-espacios. El siguiente corolario sin prueba se sigue inmediatamente de la proposición 1.4.1:

Corolario 1.4.5. *Sea (Y,τ) un espacio topológico, $\mathscr{B}$ una base de filtro numerable en Y y $L \subset Y$ un conjunto compacto. Entonces, $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (Y,τ) si, y sólo si, $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (Y,τ^k).*

Corolario 1.4.6. *Sean (X,δ) e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función que es continua al restringirla a cada subconjunto compacto de X. Sean $\mathscr{B}$ una base de filtro numerable y L un subconjunto compacto de X. Si $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en X, entonces $f(\mathscr{B}) \rightsquigarrow f(L)$ en Y.*

DEMOSTRACIÓN: Obsérvese que $f(L)$ es compacto en X. Si $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (X,δ) entonces $\mathscr{B} \rightsquigarrow L$ en (X,δ^k) gracias al corolario anterior. La hipótesis sobre f equivale a que la función $f : (X,\delta^k) \to Y$ es continua. Efectivamente sea $V \subset Y$ un abierto entonces, puesto que la restricción de f a cada subconjunto compacto K es continua, para cada K compacto, tenemos que $f^{-1}(V) \cap K$ es abierto en K y por tanto $f^{-1}(V)$ es abierto en δ^k.

Fijemos un abierto V en Y tal que $L \subset V$. Entonces $f^{-1}(V)$ es abierto en (X,δ^k) y consecuentemente existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset f^{-1}(V)$, lo que implica que $f(B) \subset V$ y la prueba termina. $\square$

A la vista de lo probado hasta ahora es natural preguntarse cuál es el papel que el hecho de ser las bases numerables juega en los resultados anteriores: el papel desempeñado es crucial. Por ejemplo, si sustituimos filtros compactoides de base numerable por filtros compactoides arbitrarios en el corolario 1.4.2 lo que estamos caracterizando es cuando dos topologías coinciden. Si el lector piensa un momento sobre esta afirmación se dará cuenta de que esto es así dado que, mientras el concepto de filtro compactoide de base numerable extiende simultáneamente el concepto de conjunto compacto y de sucesión convergente, el concepto de filtro compactoide arbitrario extiende también el concepto de filtro y red convergente. La siguiente observación que aparece recogida en [12] explica parte de lo que queremos decir:

Proposición 1.4.7. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías comparables en un espacio topológico Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\tau_1 = \tau_2$;

(ii) τ_1 *y* τ_2 *tienen los mismos filtros compactoides.*

DEMOSTRACIÓN: Demostramos (ii)⇒(i) por contradicción. Probamos que si τ_1 es estrictamente más gruesa que τ_2 entonces (ii) no se verifica. Sea $(y_i)_{i\in D}$ una red convergente a y en (Y,τ_1) que no converge en τ_2. Tomamos $U \subset Y$ un entorno abierto de y en la topología τ_2 tal que el conjunto

$$J = \{j \in D : y_j \in Y \setminus U\} \tag{1.16}$$

es cofinal en $(D,\geq)$. Entonces la base de filtro $\mathscr{R} = \{R_j\}_{j\in J}$ asociada a la red $(y_j)_{j\in J}$ claramente subconverge a $\{y\}$ en (Y,τ_1) pero no es compactoide en (Y,τ_2). De hecho, si $\mathscr{R}$ fuera compactoide para τ_2 entonces

$$\emptyset \neq \bigcap_{j\in J} \overline{R_j}^{\tau_2} \subset \bigcap_{j\in J} \overline{R_j}^{\tau_1} = \{y\} \subset U,$$

lo cual es una contradicción con la inclusión $\bigcap_{j\in J} \overline{R_j}^{\tau_2} \subset Y \setminus U$ que sigue de la definición de J en (1.16). □

A partir de aquí es fácil construir un conjunto Y con dos topologías que tengan los mismos subconjuntos compactos pero distintos filtros compactoides. Efectivamente, como se indica en [12, Example 2], basta tomar $Y = \mathbb{R}^I$, con I no numerable y $\tau_1 := \tau_p(I)$, la topología producto en Y y $\tau_2 := \tau_p(I)^k$ la k-topología asociada. De acuerdo a nuestros comentarios anteriores τ_1 y τ_2 tienen los mismos compactos, y sin embargo no pueden tener los mismos filtros compactoides dado que τ_1 es estrictamente más gruesa que τ_2, véase [52, Ejercicio J, pág. 240].

Es posible construir otros ejemplos de topologías distintas en un conjunto Y, incluso completamente regulares, que tienen los mismos subconjuntos compactos, i.e., ejemplos de topologías completamente regulares en un conjunto Y que no tienen los mismos filtros compactoides pero que sin embargo sí tienen los mismos filtros compactoides de base numerable. El ejemplo 1.4.17 con el que acaba esta sección se basa en el hecho de que un espacio $C(K)$ con la topología de convergencia puntual $\tau_p(K)$ es k-espacio si, y sólo si, K es un compacto *disperso*, [60]; véase también [2, Theorem III.1.2] como otra posible referencia. En la sección 2.11 mejoramos este resultado utilizando el lema 1.4.11 –en el que se aíslan ideas de [60], que demostramos aquí para razonar de forma autocontenida el ejemplo 1.4.17 mencionado.

Definición 1.4.8. *Sea Y un espacio topológico y $\mathfrak{B}$ la σ-álgebra de Borel de Y. Una aplicación $\mu : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}^+$ se dice que es una* medida positiva *si*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) *para cada sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos en $\mathfrak{B}$ se cumple la igualdad*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Cuando además se verifica que para cada subconjunto de Borel B en Y se tiene

(i)

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \inf\{\mu(G) : B \subset G, G \text{ abierto en } Y\} \\ &= \sup\{\mu(F) : F \subset B, F \text{ cerrado en } Y\},\end{aligned} \tag{1.17}$$

(ii) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ compacto en } Y\}$

se dice que la medida es de Radon, véase [18]. Cuando una medida positiva μ verifica que $\mu(Y) = 1$ se dice que μ es una medida de probabilidad.

Proposición 1.4.9. *Sean Y y Z espacios topológicos, $f : Y \to Z$ una función continua y μ una medida positiva en la σ-álgebra de Borel de Y. Entonces la aplicación μf^{-1} definida en la σ-álgebra de Borel de Z, $\mathfrak{B}_Z$, dada por*

$$\mu f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

siendo B un elemento de $\mathfrak{B}_Z$, es una medida positiva. Además si Y es compacto y μ es de Radon, μf^{-1} también es una medida de Radon.

DEMOSTRACIÓN: La aplicación μf^{-1} es una medida positiva. Por la forma en la que se ha definido toma valores reales no negativos y además:

(i) $\mu f^{-1}(\emptyset) = 0$;

(ii) si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos de Borel disjuntos en Z, entonces la sucesión de conjuntos de Borel disjuntos $(f^{-1}(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ verifica que

$$f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n),$$

y así

$$\mu f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu f^{-1}(B_n).$$

Veamos que μf^{-1} es de Radon. Sea $B \subset Z$ un subconjunto de Borel en Z, entonces, puesto que f es continua, $f^{-1}(B)$ es de Borel en Y. Siendo μ una medida de Radon, para $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subset f^{-1}(B)$ tal que $\mu(f^{-1}(B)\setminus K) \leq \varepsilon$. Ahora, $L = f(K)$ es compacto en Z y se verifica que

$$f^{-1}(B\setminus L) \subset f^{-1}(B)\setminus K.$$

Utilizando la monotonía de μ, tenemos que

$$0 \leq \mu f^{-1}(B\setminus L) \leq \mu(f^{-1}(B)\setminus K) \leq \varepsilon,$$

con lo cual concluimos que para cada conjunto de Borel B en Z se verifica que

$$\mu f^{-1}(B) = \sup\left\{\mu f^{-1}(L) : L \subset B \text{ compacto}\right\}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\mu f^{-1}(Y)\setminus \mu f^{-1}(B) &= \sup\left\{\mu f^{-1}(L) : L \subset (Y\setminus B) \text{ compacto}\right\} = \\ &= \mu f^{-1}(Y)\setminus \text{ínf}\left\{\mu f^{-1}(Y\setminus L) : L \subset (Y\setminus B) \text{ compacto}\right\} = \\ &= \mu f^{-1}(Y)\setminus \text{ínf}\left\{\mu f^{-1}(A) : A \subset B \text{ abierto}\right\},\end{aligned}$$

es decir,

$$\mu f^{-1}(B) = \text{ínf}\left\{\mu f^{-1}(A) : B \subset A \text{ abierto}\right\},$$

y la prueba acaba. □

La proposición anterior es válida para el caso en el que f sea una función medible, [18, pág. 82]. Tras este resultado tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.4.10. *Sean Y y Z espacios topológicos y $f : Y \to Z$ una función continua. Dada una medida positiva μ en la σ-álgebra de Borel de Y, se define la medida imagen de μ y se denota μf^{-1} como la medida en la σ-álgebra de Borel de Z dada por*

$$\mu f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

para cada conjunto de Borel B en Z.

Para K compacto, en el espacio de funciones reales continuas $C(K)$ consideraremos su estructura natural de espacio de Banach asociado a la norma del supremo

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in K\}.$$

Lema 1.4.11. *Sea K un espacio compacto en el que existe una medida de probabilidad de Radon μ tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in K$. Sea $\Psi : C(K) \to \mathbb{R}$ la forma lineal dada por*

$$\Psi(f) := \int_K f d\mu, \text{ para } f \in C(K).$$

Entonces existe un conjunto $A \subset [0,1]^K \cap C(K)$ tal que:

(i) *la función $\mathbf{1}$ constantemente igual a 1 en K pertenece a $\overline{A}^{\tau_p}$;*

(ii) $1 = \Psi(\mathbf{1}) \notin \overline{\Psi(A)}$ *y consecuentemente* $\mathbf{1} \notin \overline{A}^w$.

En particular, se deduce de lo anterior que Ψ no es τ_p continua cuando se restringe a $[0,1]^K \cap C(K)$, aunque sí es débilmente continua.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x \in K$ y $n \in \mathbb{N}$ consideramos un entorno abierto $U_{n,x}$ de x en K, tal que

$$\mu(U_{n,x}) \leq \frac{1}{2n}. \tag{1.18}$$

Los subconjuntos $K \setminus U_{n,x}$ y $\{x\}$ son cerrados y disjuntos, y podemos utilizar el lema de Urysohn [52, pág. 115], para asegurar la existencia de una función $f_{n,x} \in C(K)$ tal que $0 \leq f_{n,x} \leq 1$ siendo $f_{n,x}(x) = 1$ y $f_{n,x}(y) = 0$, para cada $y \in K \setminus U_{n,x}$. Denotemos por $\mathscr{P}_0(K)$ la familia de los subconjuntos finitos de K y definamos

$$A := \left\{ f_F \in [0,1]^K \cap C(K) : F \in \mathscr{P}_0(K) \right\}, \tag{1.19}$$

donde para $F \in \mathscr{P}_0(K)$ la función f_F viene dada por la fórmula

$$f_F(y) = \sup\{ f_{n,x}(y) : x \in F\}, \text{ para } y \in K,$$

con $n := |F|$, cardinal de F.

Afirmamos que el conjunto A dado por (1.19) satisface las propiedades (i) y (ii) del enunciado. Efectivamente, dado $F \in \mathscr{P}_0(K)$ la función f_F vale 1 en cada punto $x \in F$, y por tanto (i) se satisface. Obsérvese para ello que un entorno básico de $\mathbf{1}$ en la topología de convergencia puntual viene determinado por un conjunto finito $F \subset K$ y un número real positivo $\varepsilon > 0$. Puesto que f_F coincide con $\mathbf{1}$ en F, la función f_F pertenece a dicho abierto, cualquiera que sea el ε elegido. Veamos ahora (ii). Como μ es una probabilidad la igualdad $1 = \Psi(\mathbf{1})$ es clara. Por otro lado si fijamos $F = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathscr{P}_0(K)$, se tiene

$$\begin{aligned} \Psi(f_F) &= \int_K f_F \, d\mu \leq \int_K \sum_{i=1}^{n} f_{n,x_i} d\mu \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{U_{n,x_i}} \mathbf{1} \, d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(U_{n,x_i}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

gracias a (1.18). Consecuentemente $\Psi(A) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y por tanto $1 = \Psi(\mathbf{1}) \notin \overline{\Psi(A)}$, y en particular Ψ no es τ_p-continua cuando se restringe a $[0,1]^K \cap C(K)$. Obsérvese también, que como Ψ es w-continua se tiene que $\Psi(\overline{A}^w) \subset \overline{\Psi(A)}$ y por tanto necesariamente se tiene que $\mathbf{1} \notin \overline{A}^w$, lo que termina la prueba. □

El ejemplo anterior, claro, es el típico ejemplo para poner de manifiesto que el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue no es válido en general para redes: como $\mathbf{1} \in \overline{A}^{\tau_p}$ existe una red $(f_j)_{j \in D}$ en A (por lo tanto uniformemente acotada) tal que $1 = \lim_j f_j(x)$, para cada $x \in K$ y sin embargo la red de las integrales

$$\Psi(f_j) = \int_K f_j d\mu,$$

no converge a $1 = \Psi(\mathbf{1}) = \int_K \mathbf{1} d\mu$.

La construcción anterior se puede hacer en particular para $K = [0,1]$ y μ la medida de Lebesgue. Más en general, los compactos en los que se puede hacer dicha construcción son aquellos que contienen un compacto *perfecto*, cuya definición damos a continuación.

Definición 1.4.12. *Dado un espacio topológico Y, un subconjunto $A \subset Y$ se dice que es:*

(i) *perfecto si es no vacío, cerrado y denso en sí mismo, es decir, cada punto $x \in A$ es un punto de acumulación de A.*

(ii) *disperso si no contiene conjuntos no vacíos densos en sí mismos.*

(iii) *σ-disperso si puede expresarse como unión numerable de conjuntos* dispersos.

Es conocido el resultado que sigue. Puede hallarse en [74, pág. 105].

Proposición 1.4.13. *Un espacio compacto K contiene un compacto perfecto si, y sólo si, existe una función continua y suprayectiva $f : K \to [0,1]$.*

Proposición 1.4.14. *Sean K,L espacios compactos y $f : K \to L$ es una función continua y suprayectiva, entonces para cada medida de Radon positiva ν en L existe una medida de Radon positiva μ en K tal que para cada conjunto de Borel B de L, se verifica*

$$\mu(f^{-1}(B)) = \nu(B).$$

DEMOSTRACIÓN: Si $f : K \to L$ es una función continua y suprayectiva entonces la aplicación

$$\begin{aligned} T_f : (C(L), \|\cdot\|_\infty) &\to (C(K), \|\cdot\|_\infty) \\ g &\longrightarrow g \circ f \end{aligned}$$

es una isometría lineal. Efectivamente, utilizando que f es suprayectiva, la igualdad

$$\|g \circ f\|_\infty = \sup\{|g(f(k))| : k \in K\} = \sup\{|g(l)| : l \in L\} = \|g\|_\infty$$

muestra que T_f es una isometría. Por otra parte la linealidad es obvia. Es conocido que para L compacto, el dual de $C(L)$ es el espacio de las medidas de Radon L, $\mathscr{M}(L)$, [18, pág. 220]. En el teorema de Riesz se asocia a cada medida $\nu \in \mathscr{M}(L)$ la aplicación lineal y continua $\phi_\nu : C(L) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_\nu(g) = \int_L g\, d\nu$. La aplicación

$$\phi_\nu \circ (T_f)^{-1} : T_f(C(L)) \to \mathbb{R}$$

es lineal y continua. Por el teorema de Hahn-Banach, existe una extensión lineal y continua de $\phi_\nu \circ (T_f)^{-1}$ a $C(K)$, es decir, existe una medida de Radon μ en K tal que para cada $g \in C(L)$,

$$\int_K (g \circ f)\, d\mu = \phi_\nu \circ (T_f)^{-1}(g \circ f) = \phi_\nu(g) = \int_L g\, d\nu. \tag{1.20}$$

Ahora bien, después de la proposición 1.4.9, la medida imagen de μ en K es una medida positiva de Radon tal que para cada conjunto de Borel B de L se verifica que

$$\mu f^{-1}(B) = \mu(f^{-1}(B)),$$

y por la unicidad del teorema de Riesz concluimos que $\mu f^{-1} = \nu$, es decir,

$$\mu f^{-1}(B) = \nu(B)$$

para cada conjunto de Borel B en L. $\square$

Proposición 1.4.15. *Sea K un espacio compacto que contiene un compacto perfecto, entonces existe una medida de Radon positiva tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in K$.*

DEMOSTRACIÓN: Después de la proposición 1.4.13, si K es un espacio compacto que contiene un compacto perfecto, entonces existe una aplicación $f : K \to [0,1]$ que es continua y suprayectiva. Ahora por la proposición 1.4.14, considerando en el espacio compacto $[0,1]$ la medida de Lebesgue λ, tenemos que existe una medida μ en K tal que para cada conjunto de Borel B de $[0,1]$ se tiene que

$$\mu f^{-1}(B) = \lambda(B).$$

En particular, si $x \in K$ y $a = f(x)$,

$$0 \leq \mu(\{x\}) \leq \mu f^{-1}(\{a\}) = \lambda(\{a\}) = 0,$$

es decir μ se anula en los conjuntos de cardinal igual a uno y la prueba acaba. $\square$

Teorema 1.4.16. *Sea K un compacto. Son equivalentes:*

(i) *K es disperso.*

(ii) $(B_{C(K)}, \tau_p) = (B_{C(K)}, w)$.

DEMOSTRACIÓN: (i)⇒(ii). Si K es un compacto disperso, entonces $C(K)^*$ es isométrico a $\ell_1(K)$, [28, pág. 400, Theorem 12.28].

Sea $\mu \in \mathscr{M}(K)$ una medida de probabilidad en K, entonces, puesto que $\mu \in B_{C(K)^*}$, existe $(c_k)_{k\in K} \in \ell_1(K)$ tal que $\int_K f\,d\mu = \sum_{k\in K} c_k f(k)$ para cada $f \in C(K)$. Tomamos $r := \sum_{k\in K} |c_k| < \infty$ y fijamos $\varepsilon > 0$, entonces existe $F \subset K$ finito tal que $\sum_{k\in K\setminus F} |c_k| \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

Sea $f \in B_{C(K)}$ demostraremos que para cada abierto básico en $(B_{C(K)}, w)$ de f de la forma

$$V_{\mu,\varepsilon} := \{g \in B_{C(K)} : |\int_K (f-g)d\mu| < \varepsilon\},$$

donde $\mu \in B_{C(K)^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe un entorno básico U_f de f en la topología de convergencia puntual contenido en $V_{\mu,\varepsilon}$. Definimos el abierto de f en la τ_p dado por

$$U_f := \{g \in B_{C(K)} : |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2r}, x \in F\}.$$

Sea $g \in U_f$, entonces

$$\begin{aligned} |\int_K (f-g)\,\mathrm{d}\mu| &\leq \sum_{k\in F} |f(k)-g(k)|\cdot|c_k| + \sum_{k\in K\setminus F} |f(k)-g(k)|\cdot|c_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{2r}\cdot\sum_{k\in F}|c_k| + 2\cdot\sum_{k\in K\setminus F}|c_k| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2r}\cdot r + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

y de aquí $g \in V_{\mu,\varepsilon}$.

Veamos ahora (ii)⇒(i). Supongamos por reducción al absurdo que K no es disperso, en cuyo caso K contiene un compacto perfecto. Después de la proposición 1.4.15, existe una medida positiva de Radon μ en K tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in K$. Ahora utilizando el lema 1.4.11 obtenemos que $(B_{C(K)}, \tau_p) \neq (B_{C(K)}, w)$ llegando a contradicción y la prueba finaliza. □

Enunciamos en forma de ejemplo dos hechos que serán utilizados posteriormente.

Ejemplo 1.4.17. *Sea K un espacio compacto y $B_{C(K)}$ la bola unidad cerrada de $C(K)$. Entonces,*

(i) *las topologías τ_p y w tienen los mismos compactos en $B_{C(K)}$;*

(ii) *si K es un compacto perfecto τ_p y w en $B_{C(K)}$ tienen los mismos filtros compactoides de base numerable pero distintos filtros compactoides.*

La conclusión (i) se sigue del teorema de Grothendieck, véase [30, Theorem 4.2], que afirma que un subconjunto de $C(K)$ es w-compacto si, y sólo si, es uniformemente acotado y τ_p-compacto.

Para la segunda parte utilizamos que si K es compacto perfecto entonces, después del teorema 1.4.16, tenemos que τ_p es estrictamente más gruesa que w en $B_{C(K)}$, así nuestra afirmación se sigue ahora de la proposición 1.4.7 y del corolario 1.4.2. □

1.5 Producto de Filtros compactoides: *Teoremas de Tijonov y de Wallace*

La nociones que siguen se encuentran en [5]. Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos, y para cada índice $i \in I$, sea $\mathscr{B}_i$ una base de filtro en Y_i. Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de las partes del producto $\prod_{i\in I} Y_i$, que son de la forma $\prod_{i\in I} B_i$ donde $B_i = Y_i$ salvo para una cantidad finita de índices y donde $B_i \in \mathscr{B}_i$ para todo i tal que $M_i \neq Y_i$. Gracias a la fórmula

$$\big(\prod_{i\in I} B_i\big) \cap \big(\prod_{i\in I} C_i\big) = \prod_{i\in I} B_i \cap C_i,$$

es inmediato que $\mathscr{B}$ es una base de filtro en $\prod_{i\in I} Y_i$.

Definición 1.5.1. *Dado un filtro $\mathscr{F}_i$ en cada uno de los conjuntos Y_i, $i \in I$, el filtro producto de $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$, $\prod_{i\in I} \mathscr{F}_i$, se define como el filtro en $\prod_{i\in I} Y_i$, que tiene como base todos los conjuntos de la forma $\prod_{i\in I} B_i$, donde $B_i \in \mathscr{F}_i$ para cada $i \in I$ y $B_i = Y_i$ salvo para un número finito de índices.*

Con las observaciones precedentes es claro que si $\mathscr{B}_i$ es una base de filtro para $\mathscr{F}_i$ entonces $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ es una base de filtro para $\prod_{i\in I} \mathscr{F}_i$.

Supongamos ahora que $(Y_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos y consideremos $Y := \prod_{i\in I} Y_i$ dotado de su topología producto. Para cada $y = (y_i)_{i\in I} \in Y$, si $\mathscr{N}_{y_i}$ es una base de entornos abiertos de y_i en Y_i, entonces el filtro producto $\mathscr{N}_y = \prod_{i\in I} \mathscr{N}_{y_i}$ es una base de entornos abiertos de y en Y. Para el espacio producto $Y = \prod_{i\in I} Y_i$ escribiremos π_j para denotar la proyección sobre la j-ésima coordenada $\pi_j : \prod_{i\in I} Y_i \longrightarrow Y_j$ definida por $\pi_j((y_i)_{i\in I}) := y_j$, para cada $(y_i)_{i\in I} \in Y$. Entonces si $\mathscr{F}$ es un filtro en Y, $\pi_i(\mathscr{F})$ es un filtro en Y_i para cada $i \in I$. Además si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro $\pi_i(\mathscr{U})$ sigue siendo ultrafiltro en Y_i. En general, si $f : Y \to Z$ es una aplicación suprayectiva, entonces la imagen de un filtro sigue siendo un filtro y en el caso en el que dicho filtro sea compactoide el filtro imagen también lo es.

Obsérvese que en las condiciones anteriores, si $\mathscr{F}$ es un filtro en Y, entonces $\mathscr{F}$ es más fino que el filtro producto $\prod_{i\in I} \pi_i(\mathscr{F})$. Un sencillo razonamiento muestra que un filtro $\mathscr{F}$ es convergente en Y si, y sólo si, para cada $i \in I$ el filtro $\pi_i(\mathscr{F})$ es convergente en Y_i.

Proposición 1.5.2. *Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in I$ sea $\mathscr{B}_i$ una base de filtro compactoide en Y_i. Entonces, la base de filtro producto $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ es compactoide en $\prod_{i\in I} Y_i$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro más fino que $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$. Para cada $i \in I$, $\pi_i(\mathscr{U})$ es un ultrafiltro en Y_i más fino que $\mathscr{B}_i$. Puesto que $\mathscr{B}_i$ es compactoide, el ultrafiltro $\pi_i(\mathscr{U})$ converge en Y_i para cada $i \in I$, lo que es equivalente a decir que $\mathscr{U}$ converge en $\prod_{i\in I} Y_i$. $\square$

La proposición anterior tiene como caso particular el Teorema de Tijonov.

Corolario 1.5.3 (Teorema de Tijonov, 1935). *Si $(Y_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios compactos, entonces el espacio producto $\prod_{i\in I} Y_i$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $i \in I$, tomamos $\mathscr{B}_i = \{Y_i\}$. Entonces la base de filtro producto $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ $(= \{\prod_{i\in I} Y_i\})$ es compactoide. Como todo ultrafiltro en $\prod_{i\in I} Y_i$ es más fino que $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$, la definición de compactoide implica que todo ultrafiltro en $\prod_{i\in I} Y_i$ es convergente, y por tanto $\prod_{i\in I} Y_i$ es compacto. $\square$

Proposición 1.5.4. *Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $i \in I$ sea $\mathscr{B}_i$ una base de filtro en Y_i que subconverge a un subconjunto compacto no vacío $L_i \subset Y_i$. Entonces, $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ subconverge a $\prod_{i\in I} L_i$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $i \in I$ la base de filtro $\mathscr{B}_i$ es compactoide por el teorema 1.2.3. Gracias a la proposición 1.5.2 la base de filtro $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$ es compactoide, y así tenemos que $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i \rightsquigarrow C(\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i)$ después del apartado (iii) de la proposición 1.2.2. Fijemos un ultrafiltro $\mathscr{U}$ más fino que $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i$. Como $\prod_{i\in I} B_i$ es compactoide, $\mathscr{U}$ converge a cierto punto $y \in \prod_{i\in I} Y_i$. Ahora $\pi_i(\mathscr{U})$ es un ultrafiltro en Y_i más fino que $\mathscr{B}_i$, para cada $i \in I$; por tanto $\pi_i(\mathscr{U})$ es convergente a un punto y_i que necesariamente pertenece a L_i gracias al apartado (ii) de la proposición 1.2.2. De aquí se sigue que $y \in \prod_{i\in I} L_i$. Si tenemos en cuenta la igualdad (1.2) página 3, hemos probado que $C(\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i) \subset \prod_{i\in I} L_i$. Como ya sabíamos que $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i \rightsquigarrow C(\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i)$, ahora tenemos que $\prod_{i\in I} \mathscr{B}_i \rightsquigarrow \prod_{i\in I} L_i$, y la prueba termina. $\square$

Un caso particular de la proposición 1.5.4 es el teorema de Wallace que sigue que puede encontrarse en [25, pág. 140]

Corolario 1.5.5 (Teorema de Wallace, [25]). *Sean $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y $L_i \subset Y_i$ un conjunto compacto de Y_i, para cada $i \in I$. Entonces para cada abierto W en $\prod_{i\in I} Y_i$ con*

$$\prod_{i\in I} L_i \subset W,$$

existen abiertos $U_i \subset Y_i$, para cada $i \in I$, con $U_i = Y_i$ salvo para una cantidad finita de índices, tales que

$$\prod_{i\in I} L_i \subset \prod_{i\in I} U_i \subset W.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{N}_{L_i}$ la familia de los conjuntos abiertos de Y_i que contienen a L_i, $i \in I$. Cada $\mathcal{N}_{L_i}$ es una base de filtro que claramente satisface $\mathcal{N}_{L_i} \rightsquigarrow L_i$. La proposición 1.5.4 nos dice que $\prod_{i\in I} \mathcal{N}_{L_i} \rightsquigarrow \prod_{i\in I} L_i$ en $\prod_{i\in I} Y_i$, que es exactamente lo que queremos demostrar. $\square$

1.6 USCOS

Los resultados de las secciones anteriores se aplican de forma natural al estudio de aplicaciones *usco* entre espacios topológicos. Tal y como se comentó en el ejemplo 1.2.6 una aplicación multivaluada entre dos espacios topológicos $\psi : X \to 2^Y$ es *usco* si para cada $x \in X$ el conjunto $\psi(x)$ es compacto no vacío y $\psi(\mathcal{N}_x) \rightsquigarrow \psi(x)$.

Empezamos por recoger un resultado que unifica resultados previos en [16, 58, 12].

Teorema 1.6.1. *Sean X e Y espacios topológicos, Y regular. Para cada $x \in X$ fijamos $\mathcal{N}_x$ una base de entornos de x en X. Sea Z un subconjunto denso de X y $\varphi : Z \to 2^Y$ una aplicación multivaluada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe $\phi : X \to 2^Y$ usco tal que*

$$\varphi(x) \subset \phi(x) \text{ para cada } x \in Z; \tag{1.21}$$

(ii) *la base de filtro*

$$\{\varphi(U \cap Z)\}_{U\in\mathcal{N}_x} \text{ es compactoide en } Y, \text{ para cada } x \in X. \tag{1.22}$$

Cuando (ii) se satisface, si para cada $x \in X$ definimos

$$\psi(x) = \bigcap\{\overline{\varphi(U \cap Z)} : U \in \mathcal{N}_x\},$$

entonces $\psi : X \to 2^Y$ es usco y es mínima con respecto a todas las aplicaciones usco de X en 2^Y que tienen la propiedad (1.21). *Si además φ es usco sobre Z, entonces $\varphi(x) = \psi(x)$ para cada $x \in Z$.*

En el caso en el que X satisface el Primer Axioma de Numerabilidad e Y es tal que los subconjuntos relativamente numerablemente compactos son relativamente compactos, la condición (1.22) *se satisface si, y sólo si, la siguiente condición se verifica:*

$$\begin{aligned} &\text{para cada sucesión } (x_n)_n \text{ en } Z \text{ convergente en } X,\\ &\text{el conjunto } \bigcup_n \varphi(x_n) \text{ es relativamente compacto en } Y. \end{aligned} \tag{1.23}$$

DEMOSTRACIÓN: La implicación (i)⇒(ii) ha sido esencialmente comentada ya. En efecto, si ϕ es usco entonces $\phi(\mathscr{N}_x) \rightsquigarrow \phi(x)$ es compactoide; si ahora suponemos que (1.21) se satisface, entonces $\{\varphi(U \cap Z)\}_{U \in \mathscr{N}_x} \rightsquigarrow \phi(x)$, donde $\phi(x)$ es un conjunto compacto y (ii) esta probado.

Recíprocamente, supongamos que (ii) se da y establezcamos que ψ definida como en el enunciado es usco y satisface (1.22). Como para cada $x \in X$ la base de filtro $\{\varphi(U \cap Z)\}_{U \in \mathscr{N}_x}$ es compactoide en Y, el conjunto

$$\psi(x) = \bigcap \{\overline{\varphi(U \cap Z)} : U \in \mathscr{N}_x\}$$

es compacto no vacío gracias al teorema 1.2.3. Vamos a demostrar que ψ es superiormente semicontinua. Tomamos un conjunto abierto V en Y con $\psi(x) \subset V$. Puesto que la base de filtro $\{\varphi(U \cap Z)\}_{U \in \mathscr{N}_x}$ es compactoide e Y es regular, el teorema 1.2.3 garantiza la existencia de $U \in \mathscr{N}_x$ tal que $\overline{\varphi(U \cap Z)} \subset V$. De aquí, concluimos la inclusión $\psi(U) \subset \overline{\varphi(U \cap Z)} \subset V$, y así ψ es usco.

Claramente ψ satisface las inclusiones de (1.21). El hecho de que ψ es mínima con respecto a todas las aplicaciones usco que satisfacen la condición (1.21) es fácil también. Supongamos que $\phi : X \to 2^Y$ es usco, con $\varphi(x) \subset \phi(x)$ para cada $x \in Z$. Entonces

$$\psi(x) = \bigcap \{\overline{\varphi(U \cap Z)} : U \in \mathscr{N}_x\} \subset \bigcap \{\overline{\phi(U \cap Z)} : U \in \mathscr{N}_x\} \subset \phi(x),$$

para cada $x \in X$, donde la última inclusión se verifica porque ϕ es usco. Para terminar con las propiedades de ψ, si φ es usco sobre Z, entonces

$$\psi(x) = \bigcap \{\overline{\varphi(U \cap Z)} : U \in \mathscr{N}_x\} \subset \varphi(x), \text{ para cada } x \in Z,$$

y en este caso se tiene que $\phi(x) = \psi(x)$ para cada $x \in Z$.

Vamos a probar ahora la última parte del teorema. Fijamos $\mathscr{N}_x$ una base de entornos numerable para cada $x \in X$. Vamos a probar que la condición (1.23) se verifica si, y sólo si, la condición (1.22) se satisface para estas bases numerables $\mathscr{N}_x$, $x \in X$.

Supongamos que (1.23) se satisface y veamos que (1.22) también lo hace. Puesto que los conjuntos relativamente numerablemente compactos en Y son relativamente compactos, para comprobar (1.22) es suficiente probar que la base de filtro $\{\varphi(U \cap Z)\}_{U \in \mathscr{N}_x}$ es numerablemente compactoide para cada $x \in X$, después del teorema 1.3.12. Tomamos $(y_n)_n \prec \{\varphi(U \cap Z)\}_{U \in \mathscr{N}_x}$. Podemos suponer que $\mathscr{N}_x$ se expresa como una sucesión decreciente de entornos abiertos de x dada por

$$U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_m \supset \cdots$$

Para $(y_n)_n$ existen enteros positivos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tales que

$$y_n \in \varphi(U_k \cap Z) \text{ para } n_k \leq n < n_{k+1}, k = 1, 2, \ldots$$

Escogemos ahora

$$x_n \in U_k \cap Z \text{ con } y_n \in \varphi(x_n) \text{ para } n_k \leq n < n_{k+1}, k = 1, 2, \ldots$$

La sucesión $(x_n)_{n \geq n_1}$ está contenida en Z y converge en X, así se tiene la inclusión

$$\{y_n : n \geq n_1\} \subset \bigcup_{n=n_1}^{\infty} \varphi(x_n),$$

lo que establece que $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto y de esta forma hemos concluido que (1.23)$\Rightarrow$ (1.22).

Para establecer que (1.22)$\Rightarrow$ (1.23) es suficiente establecer que

$$\begin{aligned} &\text{para cada conjunto } A \subset Z \text{ relativamente compacto en } X, \\ &\varphi(A) \text{ es relativamente compacto en } Y. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Supongamos A como en (1.24). Tomamos una red $(y_i)_{i \in D}$ en $\varphi(A)$. Elegimos $(x_i)_{i \in D}$ en A tal que $y_i \in \varphi(x_i)$ para cada $i \in D$. Puesto que A es relativamente compacto en X, la red $(x_i)_{i \in D}$ tiene una subred $(x_j)_{j \in J}$ que converge a un punto $x \in X$. Como $(y_j)_{j \in J} \prec \{\varphi(U \cap Z)\}_{U \in \mathscr{N}_x}$, por el teorema 1.2.3 tenemos que la red $(y_j)_{j \in J}$ tiene puntos de aglomeración. De aquí se obtiene que, $(y_i)_{i \in D}$ tiene también puntos de aglomeración y $\varphi(A)$ es relativamente compacto. $\square$

Aprovechando las ideas con las que hemos acabado la prueba del teorema anterior podemos demostrar fácilmente el corolario que sigue, que recoge el bien conocido hecho de que las aplicaciones usco transforman compactos en compactos.

Corolario 1.6.2. *Sean X e Y espacios topológicos y $\phi : X \to 2^Y$ una aplicación usco, entonces para cada $K \subset X$ compacto $\phi(K)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \subset X$ un compacto. Para demostrar que $\phi(K)$ es compacto probamos que toda red tiene un punto de aglomeración en $\phi(K)$. Sea $(y_j)_{j \in D}$ una red en $\phi(K) = \bigcup_{x \in K} \phi(x)$. Elegimos $(x_j)_{j \in D}$ tal que $y_j \in \phi(x_j)$ para cada $j \in D$. La red $(x_j)_{j \in D}$ tiene un punto de aglomeración x en K, por ser K compacto. Como $(y_j)_{j \in D}$ está eventualmente en $\phi(\mathscr{N}_x)$ y $\phi(\mathscr{N}_x) \rightsquigarrow \phi(x)$, entonces, por el teorema 1.2.3, la red $(y_j)_j$ tiene un punto de aglomeración en $\phi(x) \subset \phi(K)$ y la prueba acaba. $\square$

Proposición 1.6.3. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ e $\{Y_i\}_{i\in I}$ dos familias de espacios topológicos. Para cada $i \in I$, sea $\phi_i : X_i \to 2^{Y_i}$ una aplicación multivaluada usco. Entonces la aplicación $\phi : \prod_{i\in I} X_i \to 2^{\prod_{i\in I} Y_i}$ definida por $\phi((x_i)_i) = \prod_{i\in I} \phi_i(x_i)$ es usco.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Tijonov, 1.5.3, para cada $x = (x_i)_{i\in I}$ en $\prod_{i\in I} X_i$, $\phi(x) = \prod_{i\in I} \phi_i(x_i)$ es compacto. Por otra parte, utilizando que cada ϕ_i es usco, tenemos que $\phi_i(\mathscr{N}_{x_i}) \rightsquigarrow \phi_i(x_i)$ para cada $i \in I$. Si utilizamos 1.5.4 concluimos que

$$\prod_{i\in I} \phi_i(\mathscr{N}_{x_i}) \rightsquigarrow \prod_{i\in I} \phi_i(x_i).$$

Para terminar sólo nos queda observar que la base de filtro $\phi(\prod_{i\in I} \mathscr{N}_{x_i})$ es más fina que el producto $\prod_{i\in I} \phi_i(\mathscr{N}_{x_i})$; se concluye también que $\phi(\prod_{i\in I} \mathscr{N}_{x_i}) \rightsquigarrow \prod_{i\in I} \phi_i(x_i)$. Como $\prod_{i\in I} \mathscr{N}_{x_i}$ es una base de entornos de $x = (x_i)_{i\in I}$ hemos así establecido que ϕ es una aplicación usco. □

La proposición que sigue se basa en el siguiente hecho elemental: si $\phi : Y \to 2^Z$ es una aplicación multivaluada superiormente semicontinua y $\mathscr{B}$ es una base de filtro que subconverge en Y al conjunto L, entonces $\phi(\mathscr{B}) \rightsquigarrow \phi(L)$.

Proposición 1.6.4. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y $\phi : X \to 2^Y$, $\psi : Y \to 2^Z$ aplicaciones multivaluadas usco, entonces la composición $\Psi = \psi \circ \phi$ dada por*

$$\Psi(x) = \psi(\phi(x)) = \bigcup_{y\in\phi(x)} \psi(y), \ \ x \in X,$$

es usco.

DEMOSTRACIÓN: Después del corolario 1.6.2, el conjunto $\Psi(x) = \psi(\phi(x))$ es compacto para cada $x \in X$, puesto que es la imagen mediante la aplicación usco ψ del compacto $\phi(x)$. Veamos ahora que Ψ es superiormente semicontinua. Por ser ϕ usco, para cada $x \in X$, se tiene que $\phi(\mathscr{N}_x) \rightsquigarrow \phi(x)$. Por la observación previa, aplicada para la multifunción ψ, la base de filtro $\mathscr{B} = \phi(\mathscr{N}_x)$ y el conjunto $L = \phi(x)$, se concluye que $\Psi(\mathscr{N}_x) = \psi(\phi(\mathscr{N}_x)) \rightsquigarrow \psi(\phi(x))$, y la prueba termina. □

Proposición 1.6.5. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en Y tales que todo subconjunto τ_1-compacto de Y es τ_2-compacto. Si $\phi : X \to 2^Y$ es τ_1-usco y X es primer axioma, entonces ϕ es τ_2-usco.*

DEMOSTRACIÓN: Puesto que X es primer axioma, para cada $x \in X$ existe una base de entornos numerable $\mathscr{N}_x$. Como ϕ es usco la base de filtro numerable $\phi(\mathscr{N}_x)$ subconverge al compacto $\phi(x)$. Utilizando la proposición 1.4.1 obtenemos que $\phi(\mathscr{N}_x) \rightsquigarrow \phi(x)$ en (Y, τ_2) para cada $x \in X$. Por tanto ϕ es usco considerando en Y la topología τ_2. $\square$

Acabamos esta sección con la proposición 1.6.11 que nos será de utilidad posteriormente. Para entender la prueba de la proposición necesitamos algunas consideraciones sobre la topología de Vietoris y la distancia de Hausdorff que pasamos a exponer.

Sea M un espacio métrico escribimos

$$\mathscr{K}(M) := \{K \subset M : K \subset M \text{ compacto no vacío } \},$$

para denotar el retículo de los compactos de M. Dada una familia finita de abiertos $\mathscr{O} = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ en M, definimos

$$\langle \mathscr{O} \rangle = \left\{ K \in \mathscr{K}(M) : K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i \text{ y } K \cap O_i \neq \emptyset \text{ para cada } i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{1.25}$$

La topología de Vietoris en $\mathscr{K}(Y)$ es la topología que tiene por base la familia

$$\{\langle \mathscr{O} \rangle : \mathscr{O} \text{ familia finita de abiertos en } Y\},$$

véase [25, págs. 120-121].

La topología de Vietoris en $\mathscr{K}(M)$ deriva de una métrica, a saber, la *métrica de Hausdorff*, que se define para $K, K' \in \mathscr{K}(M)$ como

$$d_H(K, K') = \operatorname{ínf}\left\{r > 0 : B_d(K, r) \supset K' \text{ y } B_d(K', r) \supset K\right\},$$

donde $B_d(K, r) = \{x \in M : d(x, K) = \operatorname{ínf}\{d(x, x') : x' \in K\} \leq r\}$.

En la proposición que sigue, tomada de [64, pág. 101], se da una prueba de este hecho.

Proposición 1.6.6. *Sea (M, d) un espacio métrico. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) *si $\mathscr{O} = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos de (M, d), entonces $\langle \mathscr{O} \rangle$ es abierto en $(\mathscr{K}(M), d_H)$;*

(ii) *la colección*

$$\mathscr{B} = \{\langle \mathscr{O} \rangle : \mathscr{O} \text{ familia finita de abiertos en } M\} \tag{1.26}$$

es una base de la topología de $(\mathscr{K}(M), d_H)$.

DEMOSTRACIÓN: (i) Sea $\mathscr{O}=\{O_1,O_2,\dots,O_n\}$ una familia finita de subconjuntos abiertos de (M,d) y sea $K\in\langle\mathscr{O}\rangle$. Para cada $i=1,\dots,n$, existe $x_i\in O_i\cap K$. Existe $r_0>0$ tal que $B_d(K,r_0)\subset\bigcup_{i=1}^n O_i$. Por otra parte, para cada $i=1,\dots,n$ existe $r_i>0$ tal que $B_d(x_i,r_i)\subset O_i$. Tomamos $r=\text{mín}\{r_j : j=0,1,\dots,n\}>0$. Así,

$$B_d(x_i,r)\subset O_i,\ \text{para } i=1,\dots,n, \tag{1.27}$$

y

$$B_d(K,r)\subset\bigcup_{i=1}^n O_i. \tag{1.28}$$

Sea $K'\in\mathscr{K}(M)$ tal que $d_H(K,K')<r$. Como $K'\subset B_d(K,r)$, la inclusión (1.28) nos da $K'\subset\bigcup_{i=1}^n O_i$. Por otro lado, fijemos un elemento arbitrario $O_i\in\mathscr{O}$. Como $K\subset B_d(K',r)$, existe $x\in K'$ tal que $d(x,x_i)<r$. Por (1.27), $x\in O_i$, es decir, $K'\cap O_i\neq\emptyset$, y así $B_{d_H}(K,r)\subset\langle\mathscr{O}\rangle$.

(ii) Para cada $K\in\mathscr{K}(M)$ y $\varepsilon>0$, existe una familia finita $\mathscr{O}=\{O_1,\dots,O_n\}$ de subconjuntos abiertos de (M,d) tal que

a) $K\subset\bigcup_{i=1}^n O_i\subset B_d(K,\varepsilon)$,
b) para cada $i=1,\dots,n$, $O_i\bigcap K\neq\emptyset$,
c) para cada $i=1,\dots,n$, $\text{diam}(O_i)\le\varepsilon$.

Así, $K\in\langle\mathscr{O}\rangle$. Afirmamos que $\langle\mathscr{O}\rangle$ está contenido en $B_{d_H}(K,\varepsilon)$. Para demostrar la afirmación anterior tomamos un elemento arbitrario $K'\in\langle\mathscr{O}\rangle$. Por la condición a), tan sólo tenemos que demostrar que $K\subset B_d(K',\varepsilon)$. Sea $x\in K$. Por a), existe i_0 tal que $x\in O_{i_0}$. Como $K'\in\langle\mathscr{O}\rangle$ tenemos que $K'\cap O_{i_0}\neq\emptyset$, lo cual implica por c) que existe $x'\in K'$ tal que $d(x,x')<\varepsilon$, y así $x\in B_d(K',\varepsilon)$.

Para probar que $\mathscr{B}$ es base de la topología vemos por último que dados dos elementos de $\mathscr{B}$, $\langle\mathscr{O}_1\rangle=\{O_1^1,\dots,O_n^1\}$ y $\langle\mathscr{O}_2\rangle=\{O_1^2,\dots,O_m^2\}$, entonces $\langle\mathscr{O}_1\rangle\cap\langle\mathscr{O}_2\rangle\in\mathscr{B}$. Si denotamos $O_1=\bigcup_{i=1}^n O_i^1$ y $O_2=\bigcup_{i=1}^m O_i^2$, entonces

$$\langle\mathscr{O}_1\rangle\cap\langle\mathscr{O}_2\rangle=\langle\{O_1\cap O_1^2,O_1\cap O_2^2,\dots,O_1\cap O_m^2,O_1^1\cap O_2,O_2^1\cap O_2,\dots,O_n^1\cap O_2\}\rangle,$$

y así acaba la prueba. □

Corolario 1.6.7. *Sea (M,d) un espacio métrico. Si la sucesión $(K_n)_n$ converge hacia K en $(\mathscr{K}(M),d_H)$, entonces $K_0=\bigcup_n K_n\cup K$ es compacto en (M,d).*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(O_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos en (M,d) que cubre K_0. Puesto que K es compacto, existe $F \subset I$ finito tal que $K \subset \bigcup_{i\in F} O_i$ y $K\cap O_i \neq \emptyset$, para cada $i\in F$. Sea $\mathscr{O} = \{O_i : i \in F\}$. El conjunto $\langle \mathscr{O} \rangle$ es un entorno abierto de K en $(\mathscr{K}(M), d_H)$, y por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ entonces $K_n \in \langle \mathscr{O} \rangle$. Por otra parte, para cada $n \leq n_0$, existe $F_n \subset I$ finito tal que $K_n \subset \bigcup_{i\in F_n} O_i$. Así, $K_0 \subset \cup\{O_i : i \in F\cup F_1 \cup \ldots \cup F_{n_0}\}$ y la prueba termina. $\square$

Proposición 1.6.8. *Sea (M,d) un espacio métrico y $D \subset M$ un subconjunto denso. Entonces la familia $\mathscr{P}_0(D)$ de las partes finitas de D es un subconjunto denso en el espacio $(\mathscr{K}(M), d_H)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{O} = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ una familia finita de abiertos de M. Como D es denso en M, para cada $i = 1,\ldots,n$, existe $x_i \in D$, tal que $x_i \in D\cap O_i$. El conjunto finito $\{x_1,\ldots,x_n\}$ es un elemento de $\mathscr{P}_0(D)$ y claramente pertenece a $\langle \mathscr{O} \rangle$. Esto último dice, gracias a la proposición 1.6.6, que $\mathscr{P}_0(D)$ es denso. $\square$

Las siguientes definiciones son estándar y pueden encontrarse, entre otros, en [25, págs. 27, 44], [2, pág. 4-5] y [44]. Dado un conjunto A escribimos, como es habitual, $|A|$ para denotar el cardinal de A.

Definición 1.6.9. *Sea Y un espacio topológico.*

(i) *El conjunto de los números cardinales $|\mathscr{B}|$ donde $\mathscr{B}$ es una base de la topología de Y, tiene un elemento mínimo; este número cardinal mínimo se llama peso del espacio topológico Y y se denota por* $\mathrm{w}(Y)$.

(ii) *Definimos el carácter de densidad* $\mathrm{d}(Y)$ *de Y, como el mínimo cardinal de un conjunto denso en Y.*

Con esta terminología, un espacio Y satisface el segundo axioma de numerabilidad (resp. Y es separable) si, y sólo si, $\mathrm{w}(Y)$ (resp. $\mathrm{d}(Y)$) es a lo más numerable.

Corolario 1.6.10. *Sea M un espacio cuya topología está asociada a una métrica d y sea $\mathscr{K}(M)$ el retículo de los compactos de M con la topología asociada a la distancia de Hausdorff. Entonces,*

$$\mathrm{w}(M) = d(M) = d(\mathscr{K}(M)) = \mathrm{w}(\mathscr{K}(M)).$$

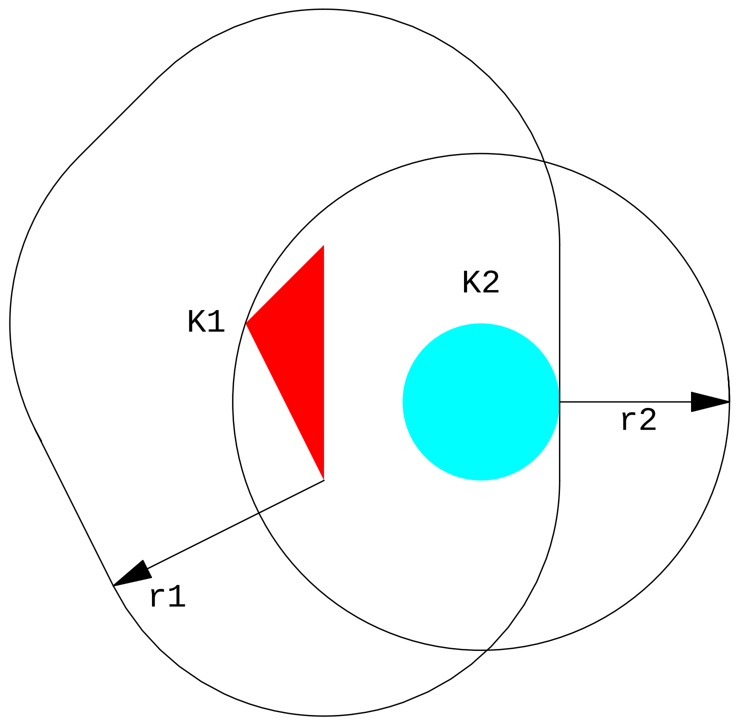

Figura 1.1: La distancia de Hausdorff entre los compactos $K1$ y $K2$, representados por figuras opacas, viene dada por $R := \max\{r1, r2\}$.

DEMOSTRACIÓN: Es bien conocido, véase más adelante la proposición 2.3.3, que para todo espacio métrico su carácter de densidad y peso coinciden. La proposición 1.6.8 nos dice que $\mathrm{d}(\mathscr{K}(M)) \leq \mathrm{d}(M)$. Por otra parte, como (M,d) puede mirarse de forma natural como subespacio de $(\mathscr{K}(M), d_H)$ se tiene que $\mathrm{w}(M) \leq \mathrm{w}(\mathscr{K}(M))$. Combinando todas las estimaciones anteriores tenemos que

$$\mathrm{w}(\mathscr{K}(M)) = \mathrm{d}(\mathscr{K}(M)) \leq \mathrm{d}(M) = \mathrm{w}(M) \leq \mathrm{w}(\mathscr{K}(M)),$$

y la prueba termina. $\square$

Obsérvese que alternativamente el corolario 1.6.10 se puede demostrar directamente utilizando la proposición 1.6.6.

Proposición 1.6.11. *Sea Y un espacio topológico en el que los subconjuntos relativamente numerablemente compactos son relativamente compactos y $\mathfrak{m}$ un número cardinal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *existe una aplicación multivaluada usco* $\psi : M \to 2^Y$ *definida en un espacio métrico* M *de peso* $\mathfrak{m}$ *tal que* $Y = \bigcup_{x \in M} \psi(x)$*;*

(ii) *existe una familia* $\{Y_K : K \in \mathscr{K}(M')\}$ *de subconjuntos compactos de* Y *indicada en el retículo de los compactos de un espacio métrico* M' *de peso* $\mathfrak{m}$ *tal que*

   (a) $Y_{K_1} \subset Y_{K_2}$, *si* $K_1, K_2 \in \mathscr{K}(M')$ *y* $K_1 \subset K_2$*;*

   (b) $\bigcup \{Y_K : K \in \mathscr{K}(M')\} = Y$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos como (i)⇒(ii). Sea ψ la multifunción dada en (i). El corolario 1.6.2 nos dice que para $K \in \mathscr{K}(M)$ el subconjunto $\psi(K)$ de Y es compacto. Así, si tomamos $M' = M$ y para $K \in \mathscr{K}(M)$ definimos $Y_K := \psi(K)$ entonces la familia $\{Y_K : K \in \mathscr{K}(M')\}$ verifica las condiciones requeridas en (ii).

La implicación (ii)⇒(i) es como sigue. Sea $\{Y_K : K \in \mathscr{K}(M')\}$ la familia de subconjuntos compactos que satisface (a) y (b) en (ii). Si d' es la métrica de M' definimos $M := \mathscr{K}(M')$ con la métrica de Hausdorff $d := d'_H$. Consideramos ahora la función multivaluada $\varphi : M \to 2^Y$ dada por

$$\varphi(K) := Y_K, \text{ para } K \in \mathscr{K}(M').$$

La multifunción φ satisface la condición (1.23) en el teorema 1.6.1: efectivamente, si $(K_n)_n$ es una sucesión de compactos convergente hacia K en $(\mathscr{K}(M'), d'_H)$, entonces, después del corolario 1.6.7, $\bigcup_n K_n \cup K$ es compacto en Y ; así, la condición (a) nos dice que

$$\bigcup_n \varphi(K_n) = \bigcup_n Y_{K_n} \subset Y_{\bigcup_n K_n \cup K},$$

es relativamente compacto en Y, es decir, la condición (1.23) es satisfecha. Como en Y los subconjuntos relativamente numerablemente compactos son relativamente compactos, el teorema 1.6.1 nos garantiza ahora una multifunción $\psi : \mathscr{K}(M') \to 2^Y$ usco tal que $\varphi(K) \subset \psi(K)$, para cada $K \in \mathscr{K}(M')$. Toda esta información nos dice que (i) se satisface para $M = \mathscr{K}(M')$ dado que M' y $\mathscr{K}(M')$ tienen el mismo peso después del corolario 1.6.10. □

El ejemplo 2.3.20 en la página 68 pone de manifiesto que la hipótesis de que los conjuntos relativamente numerablemente compactos de Y sean relativamente compactos no se puede relajar en la proposición anterior.

1.7 Filtros compactoides y la medida de no-compacidad: *Teorema de Kuratowski*

Siguiendo a Dolecki, Greco y Lechicki, [21], mostramos una aplicación más de los filtros compactoides: El Teorema de Kuratowski.

La definición que sigue la encontramos en [54, pág. 29].

Definición 1.7.1. *Un espacio Y se dice que es* uniforme *cuando existe un filtro $\mathfrak{U}$ en $Y \times Y$ con las siguientes propiedades:*

(i) *Si $U \in \mathfrak{U}$, entonces U contiene la diagonal, es decir, contiene el conjunto dado por $\{(y,y) : y \in Y\}$.*

(ii) *Si $U \in \mathfrak{U}$, entonces el conjunto $\{(y,y') : (y',y) \in U\} \in \mathfrak{U}$.*

(iii) *Para cada $U \in \mathfrak{U}$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que*

$$\{(x,z) : \text{ existe } y \in Y : (x,y) \in V \text{ e } (y,z) \in V\} \subset U.$$

Para cada $y \in Y$ y para cada $U \in \mathfrak{U}$ se define el conjunto $U_y = \{y' \in Y : (y,y') \in U\}$. La familia $\{U_y : U \in \mathfrak{U}\}$ es una base de entornos abiertos de y para una topología, a la que llamamos topología del espacio uniforme $(Y,\mathfrak{U})$.

La definición que sigue ha sido tomada de [21].

Definición 1.7.2. *Sea $(Y,\mathfrak{U})$ un espacio uniforme. Un filtro $\mathscr{F}$ (base de filtro $\mathscr{B}$) en Y se dice que es totalmente acotado si para cada $U \in \mathfrak{U}$, existe un conjunto finito $\{y_1,\dots,y_n\} \subset Y$ y $F \in \mathscr{F}$, ($B \in \mathscr{B}$), tal que*

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(y_i), \qquad \Big(B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(y_i)\Big)$$

donde $U(y_i) = \{y \in Y : (y_i,y) \in U\}$.

Proposición 1.7.3 ([21], Prop. 7.1). *Sea $(Y,\mathfrak{U})$ un espacio uniforme completo. Un filtro $\mathscr{F}$ (base de filtro $\mathscr{B}$) es compactoide en Y si, y sólo si, es totalmente acotado.*

DEMOSTRACIÓN: En un espacio uniforme un filtro compactoide es siempre totalmente acotado, basta para ello considerar el teorema 1.2.3(iii). Para el recíproco se requiere la completitud del espacio. Supongamos que $\mathscr{F}$ es totalmente acotado. Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro más fino que $\mathscr{F}$. Para cada $U \in \mathfrak{U}$ existe un conjunto finito $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{n} U(y_i) \in \mathscr{F} \subset \mathscr{U}.$$

Puesto que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro existe $n_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $U(y_{n_0}) \in \mathscr{U}$, [52, pág. 83]. Es decir, $\mathscr{U}$ contiene conjuntos de diámetro arbitrariamente pequeño. Por completitud, tenemos entonces que $\mathscr{U}$ es convergente y la prueba acaba. □

Definición 1.7.4. *Sea M un espacio métrico y $A \subset M$, se define la medida de no compacidad de Kuratowski, $\alpha(A)$, de un conjunto A como el ínfimo de los números reales positivos r para los cuáles existe una partición finita de A cuyos elementos tienen diámetro menor que r.*

Proposición 1.7.5. *Sea M un espacio métrico. Un filtro $\mathscr{F}$ (base de filtro $\mathscr{B}$) en M es totalmente acotado si, y sólo si,*

$$\inf_{F \in \mathscr{F}} \alpha(F) = 0 \qquad (\inf_{B \in \mathscr{B}} \alpha(B) = 0). \tag{1.29}$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathscr{F}$ es totalmente acotado. Después de la proposición 1.7.3 $\mathscr{F}$ es compactoide. Sea $\varepsilon > 0$. Denotamos por $B_\varepsilon(x)$ la bola abierta de centro x y radio ε. La familia $(B_\varepsilon(x))_{x \in M}$ es un cubrimiento abierto de M. Después del teorema 1.2.3 existe $F \in \mathscr{F}$ y un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$. Así, $0 \le \alpha(F) \le \varepsilon$, y de aquí se obtiene la igualdad (1.29).

Supongamos ahora que la ecuación (1.29) se verifica. Sea $\mathscr{O} = (O_i)_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de M. Por el Teorema de Stone, [25, Theorem 4.4.1, pág. 280], para cada $\varepsilon > 0$, existe un refinamiento de $\mathscr{O}$, $\mathscr{O}'$, tal que $\operatorname{diam}(O) < \varepsilon$ para cada $O \in \mathscr{O}'$. Ahora existe $F \in \mathscr{F}$ y un conjunto finito de elementos de $\mathscr{O}'$, $\{O'_1, \ldots, O'_n\}$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^n O'_i$. Puesto que $\mathscr{O}'$ es un refinamiento de $\mathscr{O}$, existen $O_i \in \mathscr{O}$ tales que $O'_i \subset O_i$ para cada $i = 1, \ldots n$, de donde se sigue que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_i.$$

Por el teorema 1.2.3, $\mathscr{F}$ es compactoide y la prueba acaba. □

Corolario 1.7.6. *Sea M un espacio métrico completo. Un filtro $\mathscr{F}$ (base de filtro $\mathscr{B}$) tal que* $\operatorname{ínf}_{F\in\mathscr{F}} \alpha(F) = 0$ *(*$\operatorname{ínf}_{B\in\mathscr{B}} \alpha(B) = 0$*) es compactoide.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que los filtros totalmente acotados y los filtros compactoides coinciden en un espacio métrico completo. □

Corolario 1.7.7 (Teorema de Kuratowski, [56]). *Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos cerrados en un espacio métrico completo. Si* $\operatorname{lím}_{n\to\infty} \alpha(A_n) = 0$, *entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

es compacto y no vacío.

DEMOSTRACIÓN: La familia $\mathscr{B} = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de filtro y, después de la proposición 1.7.5, totalmente acotada. Utilizando la proposición 1.7.3 tenemos que $\mathscr{B}$ es compactoide. Finalmente, por el teorema 1.2.3, $C(\mathscr{B}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es compacto y no vacío y la prueba acaba. □

2

Índice de K-determinación de espacios topológicos

En este segundo capítulo introducimos, tal y como ha sido detallado en la introducción general, el índice de K-determinación $\ell\Sigma(Y)$ de un espacio topológico Y. El índice de K-determinación de un espacio topológico Y lo definimos en términos de aplicaciones usco y a través de él *obtenemos* el número mínimo de compactos que necesitamos en la compactificación βY para determinar vía intersecciones numerables a partir de ellos todos los puntos de Y, véase la caracterización dada en la proposición 2.1.5. Estudiamos el comportamiento de $\ell\Sigma$ con respecto a las operaciones habituales en espacios topológicos y lo relacionamos con otras funciones cardinal ampliamente estudiadas en topología: número de Lindelöf y peso de un espacio, índice de Nagami, etc. Destacamos la relación que encontramos en la sección 2.5 entre $\ell\Sigma(Y)$ y la *tightness* de $C_p(Y)$ y el índice de monoliticidad de los compactos de $C_p(Y)$; en particular, cuando se $\ell\Sigma(Y)$ es numerable, es decir, cuando Y es numerablemente determinado obtenemos que $C_p(Y)$ tiene *tightness* numerable y sus compactos separables son metrizables; de esta forma se da una prueba puramente topológica de la angelicidad de $C_p(Y)$ para Y numerablemente determinado. Desde un punto de vista analítico estudiamos el índice de K-determinación en espacios del tipo $C(K)$ dotados de su topología de convergencia puntual y débil y, más en general, el índice de K-determinación de espacios de Banach dotados de sus topologías débiles, extendiendo un buen número de los resultados que Talagrand [77] había demostrado para espacios de Banach débilmente K-analíticos y débilmente numerablemente determinados.

Muchas de las demostraciones de este capítulo se han podido hacer de forma, a nuestro juicio, breve y elegante gracias a las propiedades que se han estudiado en abstracto sobre filtros compactoides y numerablemente compactoides en el capítulo 1.

Queremos comentar también que utilizamos estas técnicas generales para dar distintas aplicaciones a cuestiones de metrizabilidad en espacios uniformes y en espacios localmente convexos.

Siempre que nos es posible, ponemos de manifiesto mediante ejemplos, que nuestros resultados son los *más finos* que se pueden demostrar.

2.1 Definición y caracterizaciones

Definimos ahora una nueva función cardinal, que *« intuitivamente mide el número mínimo de compactos necesario para cubrir de forma continua un espacio topológico.»*

Definición 2.1.1. *Llamamos índice de K-determinación de un espacio topológico Y, y lo denotamos por $\ell\Sigma(Y)$, al cardinal más pequeño $\mathfrak{m}$ para el cual existe un espacio métrico M con $\mathrm{w}(M) = \mathfrak{m}$ y una aplicación multivaluada $\phi : M \to 2^Y$ usco tal que $Y = \bigcup\{\phi(x) : x \in M\}$.*

En primer lugar observamos que la función cardinal índice de K-determinación está bien definida. Efectivamente, sea Y un espacio topológico e (Y,d) el espacio Y dotado de la métrica discreta d, (es decir, la métrica que asocia a cada par de puntos $(y_1,y_2) \in Y \times Y$ el valor 1 si $y_1 \neq y_2$ y 0 en caso contrario). El espacio (Y,d) es entonces un espacio métrico con $\mathrm{w}(Y,d) = |Y|$. Ahora, la aplicación identidad $Id : (Y,d) \to (Y,\tau)$ es continua y suprayectiva, en particular usco y así obtenemos una cota superior del índice de K-determinación del espacio Y,

$$\ell\Sigma(Y) \leq |Y|. \tag{2.1}$$

La definición de índice de K-determinación $\ell\Sigma(Y)$ de un espacio topológico Y está dada de forma externa, ya que en ella intervienen un espacio métrico M y una aplicación usco $\phi : M \to Y$. Es natural preguntarse si $\ell\Sigma(Y)$ se puede caracterizar en términos exclusivos de Y: la respuesta es, en cierto modo, afirmativa pero involucra Y y al menos su compactificación de Stone-Čech βY, véase la proposición 2.1.5 y el corolario 2.1.6.

El siguiente resultado, que tiene interés por sí mismo, es la herramienta que necesitamos para establecer las caracterizaciones referidas en el párrafo anterior.

Proposición 2.1.2. *Sea M un espacio métrico y $\mathfrak{m}$ un cardinal tal que* $\mathrm{w}(M) = \mathfrak{m}$. *Entonces existen un conjunto I, con $|I| = \mathfrak{m}$, un subespacio $\Sigma \subset I^{\mathbb{N}}$, donde I se dota de su topología discreta y una aplicación $f : \Sigma \to (M,d)$ continua y suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sea I un conjunto con $|I| = \mathfrak{m}$ y $\mathscr{O} = \{O_i : i \in I\}$ una base de abiertos para la topología en M. Definimos $\Sigma \subset I^{\mathbb{N}}$ como

$$\Sigma := \left\{(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}} : (O_{i_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ es base de entornos para algún } x \in M\right\}.$$

Por la propia definición que hemos dado de Σ, la aplicación $f : \Sigma \to M$ dada por $f((i_n)_n) = \bigcap_n O_{i_n}$ está bien definida y es suprayectiva. Veamos que es continua. Para ello, sea $(i_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ una sucesión de índices tal que $(O_{i_n})_n$ es base de entornos de $x \in M$, es decir, $f((i_n)_n) = x$. Sea U un entorno abierto de x. Puesto que $(O_{i_n})_n$ es base de x existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $O_{i_{n_0}} \subset U$. Definimos el conjunto

$$O := \{(j_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma : j_{n_0} = i_{n_0}\},$$

que es claramente un abierto en Σ. Entonces, $(i_n)_{n\in\mathbb{N}} \in O$ y $f(O) \subset U$, quedando así finalizada la prueba. $\square$

De la proposición anterior se obtiene como caso particular que un espacio métrico separable es imagen continua de un subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

La siguiente definición está tomada de [25, pág. 28].

Definición 2.1.3. *Sea (Y,τ) un espacio topológico. Dado un punto $y \in Y$, el carácter de y en Y, $\chi(y,Y)$ es el cardinal más pequeño para las bases de entornos de y en la topología τ. El carácter de Y denotado por $\chi(Y)$ se define como el supremo* $\sup_{y\in Y}\chi(y,Y)$.

Con esta nomenclatura el espacio Y es primer axioma si $\chi(Y) \leq \aleph_0$.

La misma prueba que hemos dado en la proposición 2.1.2 sirve para demostrar el resultado más general que enunciamos a continuación.

Proposición 2.1.4. *Sea Y un espacio topológico, $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}'$ cardinales tales que* $\mathrm{w}(Y) = \mathfrak{m}$ *y* $\chi(Y) = \mathfrak{m}'$. *Entonces existen conjuntos I y J, con $|I| = \mathfrak{m}$ y $|J| = \mathfrak{m}'$, un subespacio $\Sigma \subset I^J$, donde I se dota de su topología discreta, y $f : \Sigma \to X$ continua y suprayectiva.*

Obsérvese que gracias a la proposición anterior en la definición de $\ell\Sigma$ podemos utilizar indistintamente espacios métricos o espacios que satisfacen el primer axioma de numerabilidad.

En la caracterización que sigue en 2.1.5 hacemos uso de la existencia de la compactificación de Stone-Čech para un espacio topológico completamente regular Y. Recordemos que la compactificación de Stone-Čech de Y, véase [25, Section 3.6], es un espacio compacto βY, único salvo homeomorfismos, para el que se cumplen:

(i) existe una aplicación continua $\Delta : Y \to \beta Y$ con la propiedad de que $\Delta : Y \to \Delta(Y)$ es un homeomorfismo;

(ii) $\Delta(Y)$ es denso en $\beta(Y)$;

(iii) si $f \in C(Y)$, entonces existe una aplicación continua $f^\beta : \beta(Y) \to \mathbb{K}$ tal que $f^\beta \circ \Delta = f$.

Si I es un conjunto denotamos por $I^{(\mathbb{N})}$ el conjunto de las sucesiones finitas de elementos de I. Dado $\alpha = (\alpha_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ denotamos por $\alpha|n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Proposición 2.1.5. *Sea Y un espacio topológico completamente regular y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\ell\Sigma(Y) \leq \mathfrak{m}$;

(ii) *existe un conjunto I con $|I| \leq \mathfrak{m}$, un subespacio $\Sigma \subset I^{\mathbb{N}}$ y una aplicación usco $\Psi : \Sigma \to 2^Y$ tal que $Y = \bigcup\{\Psi(\alpha) : \alpha \in \Sigma\}$;*

(iii) *existe una familia de conjuntos cerrados $\mathscr{A} = \{A_j : j \in J\}$ en βY, $|J| \leq \mathfrak{m}$, tal que para cada $y \in Y$ existe una sucesión $(j_n)_n \subset J$, tal que*

$$y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{j_n} \subset Y. \tag{2.2}$$

DEMOSTRACIÓN: (i)$\Rightarrow$(ii) Si $\ell\Sigma(Y) \leq \mathfrak{m}$ existe por definición un espacio métrico M con peso $\mathrm{w}(M) \leq \mathfrak{m}$ y $\phi : M \to 2^Y$ usco con $Y = \bigcup_{x \in M} \phi(x)$. Después de la proposición 2.1.2, existen un conjunto I con $|I| = \mathrm{w}(M) \leq \mathfrak{m}$, Σ un subespacio de $I^{\mathbb{N}}$ y $f : \Sigma \to M$ continua y suprayectiva. Si escribimos $\Psi = \phi \circ f$, entonces $\Psi : \Sigma \to 2^Y$ es usco por la proposición 1.6.4, e $Y = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} \Psi(\alpha)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Sean I, Σ y Ψ como en el enunciado de (ii). Definamos

$$J = \left\{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in I^{(\mathbb{N})} : \text{existe } \alpha \in \Sigma \text{ tal que } \alpha|n = (i_1, i_2, \dots, i_n)\right\}.$$

Claramente $|J| \leq \mathfrak{m}$. Dado $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in J$ definimos

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_n} := \overline{\Psi(\{\gamma \in \Sigma : \gamma|n = (i_1, i_2, \dots, i_n)\})}^{\beta Y},$$

y afirmamos que la familia $\mathscr{A} = \{A_{i_1,i_2,\ldots,i_n} : (i_1,i_2,\ldots,i_n) \in J\}$ tiene las propiedades requeridas. Efectivamente, dado $y \in Y$ existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $y \in \Psi(\alpha)$. Por otro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$V_{\alpha,n} = \{\gamma \in \Sigma : \gamma|n = \alpha|n\}.$$

Entonces $(V_{\alpha,n})_n$ es base de entornos de α en Σ. Como Ψ es usco, se tiene que la base de filtro $\Psi(V_{\alpha|n})_n$ subconverge a $\Psi(\alpha)$ en Y. Así, el teorema 1.2.3 nos asegura que $\left\{\Psi(V_{\alpha|n})\right\}_n$ es compactoide en Y y el lema 1.2.4 nos dice que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Psi(V_{\alpha|n})}^{\beta Y} \subset Y.$$

Como $\overline{\Psi(V_{\alpha|n})}^{\beta Y} \in \mathscr{A}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, (2.2) queda establecida.

(iii)⇒(i) Supongamos que (iii) se satisface y definamos

$$\Sigma := \left\{ \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}} : \bigcap_n A_{\alpha_n} \neq \emptyset \text{ y } \bigcap_n A_{\alpha_n} \subset Y \right\},$$

y la multifunción $\Psi : \Sigma \subset I^{\mathbb{N}} \to 2^Y$ dada por

$$\Psi(\alpha) := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n},\ \alpha \in \Sigma.$$

Claramente Ψ toma valores compactos y cubre el espacio Y. Veamos que Ψ es superiormente semicontinua. Fijemos $\alpha = (\alpha_n)_n$ en Σ y sea $O \subset Y$ abierto tal que

$$\Psi(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n} \subset O. \tag{2.3}$$

Sea $O_{\beta Y} \subset \beta Y$ abierto tal que $O_{\beta Y} \cap Y \subset O$. Como βY es compacto y los A_{α_n}'s son cerrados en βY, la inclusión (2.3) conduce a la existencia de $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{m} A_{\alpha_n} \subset O_{\beta Y}.$$

Si ahora consideramos $V = \{\gamma \in \Sigma : \gamma|m = \alpha|m\}$, afirmamos que $\Psi(V) \subset O$. Efectivamente, dado $\gamma \in V$ se tiene

$$\Psi(\gamma) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\gamma_n} \subset \bigcap_{n=1}^{m} A_{\gamma_n} = \bigcap_{n=1}^{m} A_{\alpha_n} \subset O_{\beta Y}.$$

Consecuentemente, $\Psi(\gamma) \subset Y \cap O_{\beta Y} \subset O$ y la demostración queda terminada dado que Σ es un espacio topológico de peso a lo más $\mathfrak{m}$. □

Obsérvese que en la prueba que acabamos de hacer la compactificación de Stone-Čech de Y puede sustituirse por cualquier otro espacio compacto en el que Y se sumerja. Una lectura distinta de la proposición 2.1.5 proporciona el siguiente corolario.

Corolario 2.1.6. *Para todo espacio topológico Y completamente regular se satisface la igualdad*

$$\ell\Sigma(Y) = \text{mín}\{\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \text{ cardinal infinito satisfaciendo (ii) en proposición 2.1.5}\}.$$

2.2 Operaciones con el índice de K-determinación

Las funciones cardinales no siempre presentan las regularidades deseables cuando consideramos subespacios o bien cuando realizamos operaciones entre espacios: sumas y productos.

Una función cardinal ψ se dice que es *monótona* si $\psi(Z) \leq \psi(Y)$ para cada subespacio Z de Y. El peso w es una función monótona, mientras que el carácter de densidad lo es para subespacios abiertos.

Los resultados que siguen muestran el comportamiento del índice de K-determinación al realizar las operaciones habituales con espacios topológicos. En primer lugar estudiamos el índice de K-determinación de un producto numerable de espacios topológicos. Para ello precisamos algunos resultados de carácter general. El que sigue lo encontramos en [25, Theorem 2.3.13. pág. 81].

Proposición 2.2.1. *Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Si*

$$\mathrm{w}(Y_i) \leq \mathfrak{m} \geq \aleph_0,$$

para cada $i \in I$ y $|I| \leq \mathfrak{m}$, entonces

$$\mathrm{w}\left(\prod_{i\in I} Y_i\right) \leq \mathfrak{m}.$$

En particular, si $I = \mathbb{N}$ y cada Y_i tiene peso infinito, entonces

$$\mathrm{w}\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{w}(Y_n).$$

Utilizaremos el resultado precedente aplicado a una familia numerable de espacios métricos. En concreto utilizaremos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.2. *Sea $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios métricos y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Entonces el espacio producto $M = \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ es un espacio métrico. Si además*

$$\mathrm{w}(M_n) \leq \mathfrak{m},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\mathrm{w}(M) \leq \mathfrak{m}.$$

Para productos numerables tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.3. *Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos y $\mathfrak{m}$ un cardinal. Si*

$$\ell\Sigma(Y_n) \leq \mathfrak{m} \geq \aleph_0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\ell\Sigma\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \leq \mathfrak{m}. \tag{2.4}$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen, por definición, un espacio métrico M_n con $\mathrm{w}(M_n) = \ell\Sigma(Y_n)$ y una aplicación usco $\phi_n : M_n \to 2^{Y_n}$ tal que $Y_n = \bigcup_{x\in M_n} \phi_n(x)$. Después del corolario 2.2.2, $M = \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ es un espacio métrico con $\mathrm{w}(M) \leq \mathfrak{m}$. Utilizando la proposición 1.6.3, la aplicación $\phi : M \to 2^{\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n}$ definida por

$$\phi((x_n)_n) := \prod_{n\in\mathbb{N}} \phi_n(x_n),$$

para $(x_n)_n \in M$, es usco y satisface $\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \bigcup_{(x_n)_n\in M} \phi((x_n)_n)$. Así concluimos que que $\ell\Sigma(\prod_n Y_n) \leq \mathfrak{m}$ y la prueba termina. $\square$

La proposición que sigue muestra que la función cardinal índice de K-determinación es monótona para subconjuntos cerrados.

Proposición 2.2.4. *Sean Y un espacio topológico y $Z \subset Y$ un subespacio cerrado. Entonces $\ell\Sigma(Z) \leq \ell\Sigma(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Por definición existe un espacio métrico M con peso $\mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Y)$ y una aplicación $\phi : M \to 2^Y$ usco tal que $Y = \bigcup_{x\in M} \phi(x)$. Consideramos el subconjunto $M' := \{x \in M : \phi(x) \cap Z \neq \emptyset\} \subset M$ dotado con la métrica inducida. La función cardinal peso es monótona, así $\mathrm{w}(M') \leq \mathrm{w}(M)$. Definimos la aplicación

$$\Phi : M' \to 2^Z$$

dada por

$$\Phi(x) = \phi(x) \cap Z$$

para cada $x \in M'$. El conjunto $\phi(x) \cap Z$ es compacto, para cada $x \in M'$, por ser $\phi(x)$ compacto y Z cerrado en Y.

Veamos ahora que Φ es usco. Sea $(x_n)_n \subset M'$ una sucesión convergente a $x \in M'$. Si $y_n \in \Phi(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $y_n \in \phi(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que ϕ es usco, utilizando el corolario 1.3.2 tenemos que $(y_n)_n$ tiene un punto de aglomeración y en $\phi(x)$. Por otra parte, puesto que Z es cerrado e $(y_n)_n \subset Z$, se sigue que $y \in Z$. Así, $y \in \phi(x) \cap Z = \Phi(x)$ y de nuevo por el corolario 1.3.2 obtenemos que Φ es usco y la prueba acaba. □

Siguiendo la notación de [25, pág. 74], dada una familia de espacios topológicos $\{Y_i : i \in I\}$ tal que $Y_i \cap Y_j = \emptyset$ para $i \neq j$; consideramos el conjunto $Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$ y la familia $\mathscr{O}$ de todos los conjuntos $U \subset Y$ tal que $U \cap Y_i$ es abierto en Y_i para cada $i \in I$. Entonces $\mathscr{O}$ es una topología en Y. El conjunto Y con esta topología recibe el nombre de *suma directa topológica* de los espacios $\{Y_i : i \in I\}$ y se denota por $\oplus_{i\in I} Y_i$ o por $Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots \oplus Y_k$ si $I = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Para la demostración de la proposición que sigue ver [25, pág. 258].

Proposición 2.2.5. *Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una familia arbitraria de espacios métricos disjuntos. Entonces la suma topológica $\oplus_{i\in I} Y_i$ es un espacio métrico. Si $|I| \leq \mathfrak{m}$ y*

$$\mathrm{w}(Y_i) \leq \mathfrak{m} \geq \aleph_0$$

para cada $i \in I$, entonces

$$\mathrm{w}(\oplus_{i\in I} Y_i) \leq \mathfrak{m}. \tag{2.5}$$

Proposición 2.2.6. *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal e $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos disjuntos tales que $\ell\Sigma(Y_i) \leq \mathfrak{m} \geq \aleph_0$ para cada $i \in I$ y $|I| \leq \mathfrak{m}$, entonces*

$$\ell\Sigma(\oplus_i Y_i) \leq \mathfrak{m}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $i \in I$, sea M_i un espacio métrico con $\mathrm{w}(M_i) = \ell\Sigma(Y_i)$ y sea $\phi_i : M_i \to 2^{Y_i}$ una aplicación multivaluada usco tal que $Y_i = \bigcup\{\phi_i(x) : x \in M_i\}$. Definimos para cada $i \in I$ el espacio métrico $M_i' := M_i \times \{i\}$. Ahora $\{M_i' : i \in I\}$ es una familia de espacios métricos disjuntos con $\mathrm{w}(M_i') \leq \mathfrak{m}$ para cada $i \in I$. Después de la proposición 2.2.5, $\oplus_{i\in I} M_i'$ es un espacio métrico, con $\mathrm{w}(\oplus_{i\in I} M_i') \leq \mathfrak{m}$. La aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \oplus_{i\in I} M_i' &\to 2^{\oplus_i Y_i} \\ \phi(x,i) &\to \phi_i(x) \end{aligned}$$

toma imágenes compactas, cubre el espacio $\oplus_{i\in I} Y_i$ y es usco puesto que ϕ_i lo es para cada $i \in I$. □

Nos ocupamos ahora del comportamiento del índice de K-determinación mediante imágenes de uscos.

Proposición 2.2.7. *Sean X e Y espacios topológicos, y $\phi : X \to 2^Y$ una aplicación multivaluada usco tal que $Y = \bigcup_{x\in X} \phi(x)$. Entonces*

$$\ell\Sigma(Y) \leq \ell\Sigma(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Sean M un espacio métrico y $\psi : M \to 2^X$ una aplicación multivaluada usco tal que $X = \bigcup_{x\in M} \psi(x)$. Después de 1.6.4, la aplicación multivaluada

$$\begin{aligned} \Psi : M &\to 2^Y \\ x &\to \phi\left(\psi(x)\right) \end{aligned}$$

es usco. También tenemos que

$$Y = \phi(\bigcup_{x\in M} \psi(x)) = \bigcup_{x\in M} \phi(\psi(x)) = \bigcup_{x\in M} \Psi(x),$$

de donde concluimos que $\ell\Sigma(Y) \leq \ell\Sigma(X)$. □

Corolario 2.2.8. *Sean Y y Z espacios topológicos y $f : Y \to Z$ una aplicación continua y suprayectiva. Entonces*
$$\ell\Sigma(Z) \leq \ell\Sigma(Y).$$

En particular si (Y,τ) es un espacio topológico y τ' es otra topología en Y más gruesa que τ, entonces $\ell\Sigma(Y,\tau') \leq \ell\Sigma(Y,\tau)$.

Proposición 2.2.9. *Sea $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$ un número cardinal e $(Y_i)_{i\in I}$, $|I| \leq \mathfrak{m}$, una familia de subespacios de un espacio topológico Y. Si $\ell\Sigma(Y_i) \leq \mathfrak{m}$, para cada $i \in I$, entonces*
$$\ell\Sigma(\bigcup_{i\in I} Y_i) \leq \mathfrak{m}.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que $\bigcup_{i\in I} Y_i$ es imagen continua de $\oplus_{i\in I}(Y_i \times \{i\})$ y utilizar la proposición 2.2.6 y el corolario 2.2.8. $\square$

Proposición 2.2.10. *Sea Y un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ y Z un subconjunto de Y. Entonces*
$$\ell\Sigma(span(Z)) \leq \ell\Sigma(Z),$$
donde $span(Z)$ denota el espacio vectorial generado por Z.

DEMOSTRACIÓN: Si $Z_n := \{\sum_{n\, sumandos} \lambda_i z_i : z_i \in Z, \lambda_i \in \mathbb{K}\}$, el espacio vectorial generado por Z viene dado por
$$span(Z) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n.$$
Sea M un espacio métrico con $\mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Z)$ y $\phi : M \to 2^Z$ una aplicación multivaluada usco tal que $Z = \bigcup_{x\in M} \phi(x)$. Definimos
$$\begin{array}{rcl} \phi_n : \mathbb{K}^n \times M^n & \longrightarrow & 2^{Z_n} \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n,x_1,\ldots,x_n) & \longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \phi(x_i) \end{array}$$
Trivialmente la aplicación ϕ_n cubre Z_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, la función
$$f_n : \mathbb{K}^n \times M^n \to Z_n$$
$$f_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,x_1,,\ldots,x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

es continua. Para demostrar que ϕ_n es usco basta observar que $\phi_n = f_n \circ \Phi_n$, donde Φ_n viene dada de la forma

$$\begin{aligned} \Phi_n : \mathbb{K}^n \times M^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \times (2^Z)^n \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, x_1, \ldots, x_n) &\longrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)). \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación Φ_n es usco por ser producto de aplicaciones usco, proposición 1.6.3. Y de ahí, por la proposición 1.6.4, ϕ_n también es usco. Obtenemos entonces que $\ell\Sigma(Z_n) \leq \ell\Sigma(Z)$ y después de la proposición 2.2.9 tenemos que

$$\ell\Sigma(span(Z)) = \ell\Sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n) \leq \ell\Sigma(Z).$$

□

En la siguiente proposición se establece la invariabilidad del índice de K-determinación cuando en el espacio topológico se considera la k-topología asociada, ver (1.15).

Proposición 2.2.11. *Sea (Y, τ) un espacio topológico y τ^k la k-topología asociada a τ,* (1.15). *Entonces*

$$\ell\Sigma(Y, \tau) = \ell\Sigma(Y, \tau^k).$$

DEMOSTRACIÓN: Aplicando la proposición 1.6.5 tenemos que si $\phi : M \to 2^{(Y,\tau)}$ es una aplicación multivaluada usco, siendo M un espacio métrico con $\mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Y, \tau)$, entonces la aplicación $\phi : M \to 2^{(Y,\tau^k)}$ considerando en Y la k-topología asociada también es usco, y así

$$\ell\Sigma(Y, \tau^k) \leq \ell\Sigma(Y, \tau).$$

La otra desigualdad $\ell\Sigma(Y, \tau) \leq \ell\Sigma(Y, \tau^k)$ se sigue del corolario 2.2.8. □

Proposición 2.2.12. *Sean (Y, τ_Y) y (Z, τ_Z), espacios topológicos y $f : Y \to Z$ una aplicación suprayectiva tal que f restringida a compactos es continua, entonces*

$$\ell\Sigma(Z) \leq \ell\Sigma(Y).$$

DEMOSTRACIÓN: Después de la proposición 2.2.11, tenemos la igualdad

$$\ell\Sigma(Y, \tau_Y^k) = \ell\Sigma(Y, \tau_Y),$$

y por otra parte, la aplicación $f : (Y, \tau_Y^k) \to Z$ es continua. Aplicando ahora la proposición 2.2.8, obtenemos $\ell\Sigma(Z) \leq \ell\Sigma(Y)$ y la prueba acaba. □

Corolario 2.2.13. *Sea (Y,τ_1) un espacio topológico y τ_2 una topología en Y más fina que τ_1 con los mismos conjuntos compactos, entonces*

$$\ell\Sigma(Y,\tau_1) = \ell\Sigma(Y,\tau_2).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que la k-topología asociada a τ_2 coincide con la k-topología asociada a τ_1. Así, después de la proposición 2.2.11,

$$\ell\Sigma(Y,\tau_1^k) = \ell\Sigma(Y,\tau_1)$$

$$\ell\Sigma(Y,\tau_2^k) = \ell\Sigma(Y,\tau_2).$$

Concluimos entonces que

$$\ell\Sigma(Y,\tau_1) = \ell\Sigma(Y,\tau_2).$$

□

En el caso en el que las topologías no sean comparables tenemos el resultado que sigue.

Proposición 2.2.14. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías regulares en un espacio topológico Y. Si τ_1 y τ_2 tienen los mismos compactos entonces*

$$\ell\Sigma(Y,\tau_1) = \ell\Sigma(Y,\tau_2).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea M un espacio métrico con $\ell\Sigma(Y,\tau_1) = \mathrm{w}(M)$ y $\phi : M \to 2^Y$ una aplicación multivaluada usco considerando en Y la topología τ_1, tal que $Y = \bigcup_{x\in M}\phi(x)$. Para cada $x \in M$ la base de filtro $\phi(\mathscr{N}_x)$ es compactoide en (Y,τ_1). Después del corolario 1.4.2, (Y,τ_1) e (Y,τ_2) tienen los mismos filtros compactoides de base numerable y así $\phi(\mathscr{N}_x)$ es una base de filtro compactoide en (Y,τ_2) y así ϕ sigue siendo usco considerando en Y la topología τ_2. Hemos demostrado así que $\ell\Sigma(Y,\tau_2) \leq \ell\Sigma(Y,\tau_1)$. La desigualdad en el otro sentido es idéntica y la prueba acaba. □

2.3 Relación con otros índices topológicos

En las secciones precedentes hemos introducido distintas funciones cardinales como son el peso, el carácter de densidad (véase definición 1.6.9) o el carácter de un espacio topológico 2.1.3. Ahora recordaremos algunas más, que pueden encontrarse en [2, pág. 4-5].

Definición 2.3.1. *La tightness de un espacio topológico Y, $\mathrm{t}(Y)$, es el cardinal infinito más pequeño $\mathfrak{m}$ para el cual se verifica que para cada conjunto A de Y, si $y \in \overline{A}$, entonces existe $B \subset A$ tal que $|B| \leq \mathfrak{m}$ e $y \in \overline{B}$.*

Definición 2.3.2. *El número de Lindelöf de un espacio topológico Y $\ell(Y)$, es el cardinal infinito más pequeño, $\mathfrak{m}$, tal que para cada cubrimiento de Y existe un subcubrimiento de cardinal menor o igual que $\mathfrak{m}$.*

En general, para un espacio topológico Y se verifica que ,

$$\begin{aligned} \ell(Y) &\leq \mathrm{w}(Y), \\ d(Y) &\leq \mathrm{w}(Y), \text{ y} \\ \mathrm{t}(Y) &\leq \chi(Y), \end{aligned} \tag{2.6}$$

véase [25] y [44].

Nosotros utilizaremos que en un espacio métrico M el número de Lindelöf, el carácter de densidad y el peso coinciden, que es un resultado clásico, que demostramos para hacer autocontenida esta parte.

Proposición 2.3.3. *Sea M un espacio métrico. Entonces*

$$\ell(M) = d(M) = \mathrm{w}(M).$$

DEMOSTRACIÓN: En el caso es en el que el cardinal de M sea finito se verifica que

$$|M| = \ell(M) = d(M) = \mathrm{w}(M).$$

Supongamos entonces que $|M| \geq \aleph_0$. Sea $\mathscr{O} = \{O_i : i \in I\}$ una base de abiertos para la topología de M. Tomamos $x_i \in O_i$ para cada $i \in I$. Entonces el conjunto $D = \{x_i : i \in I\}$ es denso en M. Efectivamente, si U es un abierto en M entonces existe $O_i \subset U$, y de aquí $x_i \in U$. Hemos demostrado que $d(M) \leq \mathrm{w}(M)$.

Veamos ahora la desigualdad contraria. Sea $D = \{x_i : i \in I\}$ un conjunto denso en M, entonces, si $B(x, \varepsilon)$ denota la bola abierta de centro x y radio ε, la familia

$$\mathscr{O} = \{B(x_i, 1/n) : i \in I, n \in \mathbb{N}\}$$

tiene cardinal igual al del conjunto D y es una base de la topología. Así, si U es un abierto en M, por ser D denso existe $x_i \in D$ tal que $x_i \in U$, y por ser U abierto existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $B(x_i, \frac{1}{n}) \subset U$. De aquí $d(M) \geq \mathrm{w}(M)$.

Es claro que $\ell(M) \leq \mathrm{w}(M)$. Veamos que $d(M) \leq \ell(M)$. Consideramos la familia

$$\mathscr{O}_n = \{B(x, 1/n) : x \in M\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Existe entonces un subconjunto $M_n \subset M$ de cardinal $\ell(M)$ tal que

$$M = \bigcup_{x \in M_n} B(x, 1/n),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora el conjunto $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ tiene cardinal igual a $\ell(M)$ y es denso. Efectivamente, sea U un abierto en M, entonces existe $x_U \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x_U, \frac{1}{n}) \subset U$. Entonces existe $x \in M_{2n}$ tal que $x_U \in B(x, \frac{1}{2n})$. Así, tenemos que

$$B(x, \frac{1}{2n}) \subset B(x_U, \frac{1}{n}) \subset U.$$

En particular $x \in U$ y la prueba acaba. $\square$

Proposición 2.3.4. *Sea Y un espacio topológico. Entonces*

$$\ell(Y) \leq \ell\Sigma(Y).$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea (M, d) un espacio métrico con $\mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Y)$ y $\phi : M \to 2^Y$ una aplicación usco tal que $Y = \bigcup_{x \in M} \phi(x)$. Sea $\mathscr{O} = \{O_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos tal que $Y = \bigcup_{i \in I} O_i$. El conjunto $\phi(x)$ es compacto para cada $x \in M$, así, existe un conjunto finito de índices $i_1^x, i_2^x, \ldots, i_{n_x}^x$ tales que

$$\phi(x) \subset O_{i_1^x} \cup O_{i_2^x} \cup \ldots \cup O_{i_{n_x}^x}.$$

Por ser ϕ una aplicación usco, si tomamos el conjunto abierto $O(x) := \bigcup_{j=1}^{n_x} O_{i_j^x}$, entonces existe $U(x)$ entorno abierto de x en M tal que

$$\phi(U(x)) \subset O(x).$$

Ahora, la familia $\mathscr{U} = \{U(x) : x \in M\}$ es un cubrimiento abierto de M. Después de la proposición 2.3.3, $\ell(M) = \mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Y)$. Existe entonces un subconjunto $S \subset M$ con $|S| \leq \ell\Sigma(Y)$ y tal que

$$M = \bigcup_{x \in S} U(x).$$

De ahí tenemos que

$$Y = \bigcup_{x\in S} \phi(U(x)) \subset \bigcup_{x\in S} O(x) = \bigcup_{x\in S}\bigcup_{j=1}^{n_x} O_{i_j^x},$$

es decir, hemos obtenido un subcubrimiento de cardinal menor o igual que el cardinal $|S|$ y $|S| \le \ell\Sigma(Y)$. Así, concluimos que $\ell(Y) \le \ell\Sigma(Y)$. □

La proposición que sigue está en el espíritu de [9, prop.2.1].

Proposición 2.3.5. *Sea M un espacio métrico. Entonces*

$$\ell\Sigma(M) = \mathrm{w}(M) = d(M).$$

DEMOSTRACIÓN: La desigualdad $\ell\Sigma(M) \le \mathrm{w}(M)$ es obvia. Basta para ello considerar la aplicación identidad del espacio en sí mismo. Por la proposición 2.3.4, tenemos que $\ell(M) \le \ell\Sigma(M)$. Considerando ambas desigualdades obtenemos

$$\ell(M) \le \ell\Sigma(M) \le \mathrm{w}(M).$$

Después de la proposición 2.3.3 $\ell(M) = \mathrm{w}(M)$. Concluimos entonces que las desigualdades anteriores son igualdades y el resultado queda demostrado. □

El número de Lindelöf no es estable para productos como pone de manifiesto el ejemplo que sigue a continuación.

Ejemplo 2.3.6. *Sea $Y = \mathbb{R}$ dotado con la topología τ para la cual una base viene dada por todos los intervalos $[y,r)$, donde $y,r \in \mathbb{R}$, $y < r$ y r es un número racional. Entonces Y es Lindelöf pero $Y \times Y$ no lo es. El espacio topológico (Y,τ) es conocido como espacio de Sorgenfrey, [25, 1.2.2 pág. 21].*

DEMOSTRACIÓN: El espacio Y es un espacio que verifica el primer axioma de numerabilidad y es Lindelöf. Sin embargo, el conjunto dado en la forma

$$\{(y,-y) : y \in Y\} \subset Y \times Y$$

es un conjunto discreto de cardinal no numerable, por tanto el número de Lindelöf del espacio $Y \times Y$ tiene cardinal no numerable. □

De la proposición 2.3.4 obtenemos como corolario el resultado que sigue.

Corolario 2.3.7. *Sea $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios topológicos tal que $\ell\Sigma(Y_n) \leq \mathfrak{m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\ell\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n\right) \leq \mathfrak{m}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por la proposición 2.2.3 tenemos que $\ell\Sigma(\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n) \leq \mathfrak{m}$, y de ahí, por la proposición 2.3.4, se obtiene que $\ell(\prod_{n\in\mathbb{N}} Y_n) \leq \mathfrak{m}$. □

Dado un espacio topológico Y siempre tenemos que $\ell(Y) \leq \mathrm{w}(Y)$ y $\ell(Y) \leq \ell\Sigma(Y)$. Sin embargo, no es posible establecer una desigualdad general entre el índice de K-determinación y el peso, siendo también posible la desigualdad en el otro sentido. Daremos un ejemplo que ilustre dicha afirmación. Antes necesitamos algunos resultados.

Recordamos que $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ y ω el cardinal de $\mathbb{N}$.

Lema 2.3.8. (i) *El espacio $\beta\mathbb{N}$ tiene cardinal 2^{2^ω} y $\mathrm{w}(\beta\mathbb{N}) = 2^\omega$.*

(ii) *Cada conjunto cerrado e infinito $F \subset \beta\mathbb{N}$ contiene un subconjunto homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. En particular F tiene cardinal 2^{2^ω} y peso 2^ω.*

(iii) *Sean $I, P \subset \mathbb{N}$ subconjuntos disjuntos entonces*

$$\overline{I}^{\beta\mathbb{N}} \cap \overline{P}^{\beta\mathbb{N}} = \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN: La afirmación (i) la hayamos en [25, 3.6.12], mientras que (ii) es [25, 3.6.14]. Como consecuencia de [81, 1.15] obtenemos de forma inmediata (iii). □

Lema 2.3.9. *El espacio $\beta\mathbb{N}$ tiene 2^{2^ω} copias de $\beta\mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{C}$ la familia de las copias de $\beta\mathbb{N}$ en $\beta\mathbb{N}$, es decir,

$$\mathscr{C} = \{K \subset \beta\mathbb{N} : K \text{ es homeomorfo a } \beta\mathbb{N}\}.$$

Sea $I \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los números impares y $P \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los pares. Entonces $I \cap P = \emptyset$. Utilizando 2.3.8[iii] tenemos que $\overline{I}^{\beta\mathbb{N}} \cap \overline{P}^{\beta\mathbb{N}} = \emptyset$. Además $\overline{I}^{\beta\mathbb{N}}$ y $\overline{P}^{\beta\mathbb{N}}$ son homeomorfos a $\beta\mathbb{N}$. En particular, el cardinal de $\overline{I}^{\beta\mathbb{N}}$ y $\overline{P}^{\beta\mathbb{N}}$ es 2^{2^ω}. De la propia definición de la compactificación de Stone-Čech resulta que si K es una copia de $\beta\mathbb{N}$ y $p \notin K$ entonces $K \cup \{p\}$ es una copia de $\beta\mathbb{N}$. Así, la familia

$$\{\overline{I}^{\beta\mathbb{N}} \cup \{p\} : p \in \overline{P}^{\beta\mathbb{N}}\}$$

está formada por copias de $\beta\mathbb{N}$ distintas dos a dos. Tenemos por tanto que $|\mathscr{C}| \geq 2^{2^{\omega}}$.

Por otra parte, como $\beta\mathbb{N}$ es separable, si $K \in \mathscr{C}$ debe existir un conjunto numerable $N \subset \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ tal que $K = \overline{N}$. Así, el cardinal de $\mathscr{C}$ debe ser menor o igual que el cardinal de los subconjuntos numerables de $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. De aquí

$$|\mathscr{C}| \leq |\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}|^{\omega} = [2^{2^{\omega}}]^{\omega} = 2^{2^{\omega}}.$$

Combinando ambas desigualdades obtenemos la igualdad buscada. $\square$

Lema 2.3.10. *Existe $Y \subset \beta\mathbb{N}$ tal que $|Y| = 2^{2^{\omega}}$, $\mathrm{w}(Y) \leq 2^{\omega}$ y cada subconjunto $K \subset Y$ compacto es finito.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{C} = \{C_{\alpha} \subset \beta\mathbb{N} : 0 \leq \alpha < 2^{2^{\omega}}\}$ la familia de las copias de $\beta\mathbb{N}$, lema 2.3.9. La construcción de Y la hacemos por inducción transfinita, imitando la construcción del conjunto de Berstein [20, 8.8.1, pág. 260]. Tomamos $x_{-1} \neq y_{-1}$ en $\beta\mathbb{N}$ y $x_0 \neq y_0 \in C_0 \setminus \{x_{-1}, y_{-1}\}$. En el siguiente paso escogemos

$$x_1 \neq y_1 \in C_1 \setminus \{x_{-1}, x_0\} \cup \{y_{-1}, y_0\}.$$

Sea $\alpha \leq 2^{2^{\omega}}$ y supongamos definidos x_{γ}, y_{γ} para cada $\gamma < \alpha$. Tomamos

$$x_{\alpha} \neq y_{\alpha} \in C_{\alpha} \setminus \{x_{\gamma} : 0 \leq \gamma < \alpha\} \cup \{y_{\gamma} : 0 \leq \gamma < \alpha\}.$$

Definimos los conjuntos $A = \{x_{\alpha} : 0 \leq \alpha < 2^{2^{\omega}}\}$ y $B = \{y_{\alpha} : 0 \leq \alpha < 2^{2^{\omega}}\}$. Entonces A y B son conjuntos disjuntos de cardinal $2^{2^{\omega}}$ y $\mathrm{w}(A) = \mathrm{w}(B) \leq \mathrm{w}(\beta\mathbb{N}) = 2^{\omega}$. Además si $K \subset A$ es un compacto infinito entonces por el lema 2.3.8[ii], existe $\alpha < 2^{2^{\omega}}$ tal que $C_{\alpha} \subset K$, y de aquí $x_{\alpha}, y_{\alpha} \in A$ lo cual es una contradicción. Luego si K es compacto en A entonces es finito. Tomando $Y := A$ (o $Y := B$) obtenemos el resultado buscado. $\square$

El lema que sigue la encontramos en [44, Theorem 4.1].

Lema 2.3.11. *Sea (M,d) un espacio métrico. Si $\mathrm{w}(M) \leq 2^{\omega}$, entonces $|M| \leq 2^{\omega}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{O} = \{O_i\}_{i \in I}$ una base de la topología tal que $|I| \leq 2^{\omega}$. Para cada $x \in M$ fijamos una sucesión $\mathscr{O}(x) = \{O(x)_1, O(x)_2, \ldots, O(x)_n, \ldots\}$ que sea una base de entornos de x. Si $x \neq y$ entonces $\mathscr{O}(x) \neq \mathscr{O}(y)$. Así,

$$|M| \leq (2^{\omega})^{\omega} = 2^{\omega}.$$

$\square$

Ejemplo 2.3.12. *El espacio Y construido en el lema 2.3.10 satisface que*

$$\mathrm{w}(Y) < \ell\Sigma(Y).$$

Supongamos que existe un espacio métrico (M,d) de peso menor o igual que 2^ω y una aplicación usco $\phi : M \to 2^Y$ tal que $Y = \bigcup\{\phi(\alpha) : \alpha \in M\}$. Utilizando 2.3.11 tenemos que $|M| \leq 2^\omega$ y de aquí, puesto que $\phi(\alpha)$ es finito para cada $\alpha \in M$, $|Y| \leq 2^\omega$, llegando a una contradicción. Por tanto, Y no es imagen mediante una aplicación usco de un espacio métrico (M,d) con $\mathrm{w}(M) \leq 2^\omega$ y

$$\ell\Sigma(Y) > 2^\omega = \mathrm{w}(Y).$$

Definición 2.3.13. *Una familia $\mathscr{N}$ de subconjuntos de un espacio topológico Y se dice que es una* network *para Y si para cada punto $y \in Y$ y cada entorno U de y existe $N \in \mathscr{N}$ tal que $y \in N \subset U$. El* peso network *de un espacio Y es el cardinal más pequeño de $\mathscr{N}$, donde $\mathscr{N}$ es una network para Y. Este cardinal se denota por* $\mathrm{nw}(Y)$.

Es claro que para un espacio topológico Y, $\mathrm{nw}(Y) \leq \mathrm{w}(Y)$.

La proposición que sigue generaliza los teoremas [77, Theorem 2.4] y [16, Theorem 8] y es clave para los resultados que se demuestran en la sección 2.5.

Proposición 2.3.14. *Sean (Y,τ) un espacio topológico y $\mathscr{G}$ una topología para Y más gruesa que τ. Entonces*

$$d((Y,\tau)) \leq \text{máx}\{\ell\Sigma(Y,\tau), \mathrm{nw}((Y,\mathscr{G}))\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean M un espacio métrico con $\mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Y,\tau)$, y $\phi : M \to 2^Y$ una aplicación multivaluada usco con $Y = \bigcup_{x\in M}\phi(x)$. Tomamos $X := M \times (Y,\mathscr{G})$, entonces, utilizando [25, 3.1.J. (a)], tenemos que

$$\mathrm{nw}(X) \leq \text{máx}\{\mathrm{nw}(M), \mathrm{nw}(Y,\mathscr{G})\}.$$

Puesto que en un espacio métrico M, $\mathrm{w}(M) = \mathrm{nw}(M)$, (véase [25, Theorem 4.1.15]), la desigualdad anterior queda de la forma

$$\mathrm{nw}(X) \leq \text{máx}\{\ell\Sigma(Y,\tau), \mathrm{nw}(Y,\mathscr{G})\}.$$

Sea $T := \{(x,y) : y \in \phi(x)\} \subset X$ un subespacio y $p : T \to (Y,\tau)$ la aplicación dada por $p(x,y) := y$. La aplicación p es continua, ya que si $\left(x_j, y_j\right)_{j\in D}$ es una red en T convergente a (x,y), entonces la red $(x_j)_{j\in D}$ converge a x en M, y la red $(y_j)_{j\in D}$ converge a y en $(Y,\mathscr{G})$. Basta demostrar que $(y_j)_{j\in D}$ converge a y en la topología τ para obtener que p es continua. Por ser ϕ una aplicación usco tenemos que $(y_j)_{j\in D}$ tiene un punto de aglomeración $z\in\phi(x)$ en la topología τ. De ahí tenemos también que $(y_j)_{j\in D}$ tiene a z como punto de aglomeración en cualquier topología más gruesa que τ, y así $y=z$, y la red tiene a y como punto de aglomeración en (Y,τ). Como el razonamiento anterior es válido para cualquier subred de $(y_j)_{j\in D}$ tenemos que $(y_j)_{j\in D}$ converge a y en (Y,τ).

Trivialmente, la aplicación $p: T\to(Y,\tau)$ es suprayectiva: si $y\in Y$ entonces existe $x\in M$ tal que $y\in\phi(x)$, lo cual implica que $(x,y)\in T$ e $y=p(x,y)$.

Tenemos que

$$\mathrm{nw}(T,\tau)\le\mathrm{nw}(X)\le\text{máx}\{\ell\Sigma(Y,\tau),\mathrm{nw}(Y,\mathscr{G})\},$$

y dado que (Y,τ) es imagen continua de T se tiene $d(Y,\tau)\le d(T)\le\mathrm{nw}(T)$, de donde obtenemos la desigualdad

$$d(Y,\tau)\le\text{máx}\{\ell\Sigma(Y,\tau),\mathrm{nw}(Y,\mathscr{G})\}.$$

que termina la prueba. □

De forma inmediata se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2.3.15. *Sea (Y,τ) un espacio topológico. Entonces*

$$d(Y,\tau)\le\text{máx}\{\ell\Sigma(Y),\text{mín}\{\mathrm{nw}(Y,\mathscr{G}):\mathscr{G}\le\tau\}\}.$$

Corolario 2.3.16. *Sea (Y,τ) un espacio topológico submetrizable, (i.e., existe una topología $\mathscr{G}$ más gruesa que la original metrizable), entonces (Y,τ) es imagen continua de un espacio métrico de peso menor o igual que $\ell\Sigma(Y,\tau)$ y así, en particular, $d(Y)\le\ell\Sigma(Y,\tau)$.*

DEMOSTRACIÓN: Atendiendo a la demostración proposición 2.3.14 se tiene (Y,τ) es imagen continua de un subespacio T del producto $X:=M\times(Y,\mathscr{G})$ donde M es métrico de peso $\mathrm{w}(M)=\ell\Sigma(Y,\tau)$. Como $(Y,\mathscr{G})$ es metrizable e imagen continua de (Y,τ) se concluye, gracias a las proposiciones 2.2.8 y 2.3.5, que

$$\mathrm{w}(Y,\mathscr{G})=\ell\Sigma(Y,\mathscr{G})\le\ell\Sigma(Y,\tau).$$

Consecuentemente X tiene peso menor o igual que $\ell\Sigma(Y,\tau)$, en particular T también y la prueba termina. □

Proposición 2.3.17. *Sea K un compacto, entonces*

$$\mathrm{t}(K) \leq \ell(C_p(K)).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset K$ un subconjunto. Puesto que $C_p(\overline{A})$ es imagen continua de $C_p(K)$, se tiene que

$$\ell(C_p(\overline{A})) \leq \ell(C_p(K)),$$

y podemos suponer que $K = \overline{A}$. Fijamos $a \in K$. Consideramos el subconjunto τ_p-cerrado

$$F := \left\{ f \in C_p(K) : \ f(a) \geq 1 \right\},$$

el cual verifica que

$$F \subset \bigcup_{b \in K} \{ f \in C(K) : \ f(b) > 0 \},$$

es decir, F está contenido en una unión de conjuntos τ_p-abiertos. Existe entonces $D \subset A$ de cardinal igual a $\ell(C_p(K))$ tal que

$$F \subset \bigcup_{b \in D} \{ f \in C(K) : \ f(b) > 0 \}.$$

Ahora $a \in \overline{D}$ tomando la clausura en la topología del compacto. Efectivamente, sea U un entorno abierto de a en K, entonces, por el lema de Urysohn existe una aplicación $g : K \to [0,1]$ tal que $f(a) = 1$ y $f(x) = 0$ para cada $x \in K \setminus U$. De aquí, puesto que $g \in F$ existe $b \in D$ tal que $g(b) > 0$ y así, $b \in U$. Concluimos entonces que $a \in \overline{D}$ y la prueba acaba. □

Como corolario del resultado anterior obtenemos el siguiente resultado que generaliza el teorema [77, 6.4].

Corolario 2.3.18. *Sea K un compacto, entonces*

$$\mathrm{t}(K) \leq \ell\Sigma(C_p(K)).$$

DEMOSTRACIÓN: Después de la proposición 2.3.4

$$\ell(C_p(K)) \leq \ell\Sigma(C_p(K)),$$

y por la proposición 2.3.17

$$\mathrm{t}(K) \leq \ell(C_p(K)).$$

Combinando ambas desigualdades obtenemos el resultado buscado. $\square$

Sacamos ahora ventaja de la relación entre el índice de K-determinación de un espacio y el número de Lindelöf para demostrar la existencia de un espacio topológico Y que muestra que las hipótesis de nuestra proposición 1.6.11 no se pueden relajar. El resto de la sección lo dedicamos a la construcción de este ejemplo 2.3.20. En [79], Valdivia da un ejemplo de un espacio Y quasi-Suslin que no es K-analítico. El mismo espacio Y nos sirve para dar un ejemplo de un espacio que satisface la condición (ii) de la proposición 1.6.11 pero no (i). Introducimos algunas nociones necesarias para la descripción del espacio Y.

Un espacio de sucesiones λ es un espacio lineal cuyos elementos son sucesiones $x = (x_n)_n$ en $\mathbb{R}$. Si $y = (y_n)_n, z = (z_n)_n \in \lambda$ y $r \in \mathbb{R}$, definimos las operaciones *suma* y *producto por escalares* en la forma usual

$$y + z = (y_n + z_n)_n, \quad \text{y} \quad r \cdot y = (r \cdot y_n)_n.$$

Dadas dos sucesiones $(y_n)_n$ y $(z_n)_n$ diremos que $(y_n)_n \leq (z_n)_n$ si $y_n \leq z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si λ es un espacio de sucesiones se define el espacio de sucesiones λ^x aquel que viene dado por todas aquellas sucesiones $u = (u_n)_n$ tales que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n \cdot u_n| < \infty$$

para cada $(x_n)_n \in \lambda$. El espacio λ^x se llama el α-dual de λ.

Sea $(\alpha_r)_r$ una sucesión en la que para cada $r \in \mathbb{N}$

$$\alpha_r = (a_n^{(r)}), \quad r = 1, 2, \dots, \tag{2.7}$$

satisfaciendo

(i) $\alpha_{r+1} \geq \alpha_r \geq \mathbf{0}$, $r = 1, 2, \dots$;

(ii) para cada entero positivo n existe un entero positivo r tal que $a_n^{(r)} > 0$.

Tomamos $\lambda = \left\{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |x_n| a_n^{(r)} < \infty, r \in \mathbb{N}\right\}$, y consideramos

$$\lambda_1 := \left\{(y_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \text{ existen } r \in \mathbb{N} \text{ y } h > 0 \text{ tales que } |y_n| \leq h \cdot a_n^{(r)}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Es conocido, ver [79, págs. 210-212] que el espacio λ_1 es el α-dual de λ. En este caso, se dice que el espacio de sucesiones λ es un espacio *echelon* definido por el sistema (2.7) de pasos y λ_1 es un espacio *co-echelon* definido por los pasos (2.7). En λ se considera la topología asociada a la familia de seminormas $\{p_r : r \in \mathbb{N}\}$, donde

$$p_r((x_n)_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n a_n^{(r)}$$

para $(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $r \in \mathbb{N}$.

Lema 2.3.19. *Sea λ el espacio echelon generado por los pasos*

$$\alpha_r = (a_{i,j}^{(r)}), \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{2.8}$$

tal que para cada par de enteros positivos j y r

$$a_{i,j}^{(r)} = 2^{r \cdot j}, i = 1, 2, \ldots, r; \, a_{i,j}^{(r)} = 1, \, i = r+1, r+2, \ldots.$$

El bidual de λ, Y, con la topología $\sigma(Y, \lambda_1)$ verifica que existe una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ de subconjuntos compactos en Y tal que

(i) *$A_\alpha \subset A_\beta$, si $\alpha_n \leq \beta_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $\alpha = (\alpha_n)_n$ y $\beta = (\beta_n)_n$;*

(ii) *$Y = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} A_\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que el espacio λ es un espacio de Fréchet, es decir la topología asociada viene dada por la familia de seminormas $(p_r)_{r \in \mathbb{N}}$, donde

$$p_r : \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \to \mathbb{R}^+,$$

y

$$p_r((x_{i,j})_{i,j}) = \sum_{i,j} x_{i,j} a_{i,j}^{(r)}$$

para cada $(x_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ y cada $r \in \mathbb{N}$. Sea $U_r := \{(x_{i,j})_{i,j} \in \lambda : \, p_r((x_{i,j})_{i,j}) \leq 1\}$. Definimos $V_r := \overline{U_r}^{\sigma(Y, \lambda_1)}$ para cada $r \in \mathbb{N}$, y para cada $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\alpha = (m_n)_n$, tomamos

$$A_\alpha := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} m_n \cdot V_n.$$

El conjunto A_α es compacto en Y con la topología de convergencia puntual sobre λ_1. Además

$$Y = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} A_\alpha,$$

y así acaba la prueba. $\square$

Ejemplo 2.3.20. *El espacio $Y = \lambda_1$, (ver 2.3.19) verifica que:*

(i) *Existe una familia de compactos $\{Y_K : K \in \mathscr{K}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\}$ en Y tal que*

   (a) *si $K \subset K'$ compactos en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ entonces $Y_K \subset Y_{K'}$;*

(b) $Y = \bigcup \left\{Y_K : K \in \mathscr{K}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\right\}$.

(ii) $\ell\Sigma(Y) > \aleph_0$.

DEMOSTRACIÓN: Demostramos (i). Sea $\pi_n : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ la proyección sobre la n-ésima coordenada. Si $K \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es compacto, entonces $\pi_n(K) \subset \mathbb{N}$ es compacto y por tanto finito. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $\beta_n = \max\{\pi_n(\alpha) : \alpha \in K\}$ y definimos $\beta := (\beta_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Para cada $\alpha \in K$ tenemos que $\alpha \leq \beta$ y de aquí

$$Y_K := \overline{\bigcup_{\alpha \in K} A_\alpha} \subset A_\beta$$

es compacto. Así, la familia $\left\{Y_K : K \in \mathscr{K}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\right\}$, donde cada Y_K viene dado por $Y_K = \overline{\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in K\}}$, es una familia de compactos en Y que cubre el espacio y tal que si $K \subset K'$ entonces $Y_K \subset Y_{K'}$.

(ii) Si suponemos que $\ell\Sigma(Y)$ es numerable entonces Y es Lindelöf. Basta para llegar a contradicción encontrar un subconjunto cerrado $\overline{A} \subset Y$ numerablemente compacto que sin embargo no es compacto.

Dada la sucesión doble $(z_{i,j})_{i,j}$ con $z_{r,s} = 1$, $z_{i,j} = 0$, $(i,j) \neq (r,s)$, tomamos $f_{r,s} = (z_{i,j})_{i,j}$ cuando $(z_{i,j})_{i,j}$ sea considerado como un elemento de λ y $e_{r,s} = (z_{i,j})_{i,j}$ cuando suponemos que está en λ_1.

El subconjunto $A := \left\{f_{i,j} \in \lambda : i,j \in \mathbb{N}\right\} \subset Y$ es acotado. Utilizando un resultado de Grothendieck [36] afirmamos que toda sucesión acotada en el bidual Y de un espacio de Fréchet es equicontinua y por tanto tiene un punto de aglomeración, en particular $\overline{A}^{\sigma(Y,\lambda_1)}$ es numerablemente compacto. Sin embargo, el conjunto no es relativamente compacto, para ello demostraremos que existe un ultrafiltro en A que no converge.

Tomamos

$$B_r := \left\{(u_{i,j}) \in \lambda_1 : u_{i,j} \leq a_{i,j}^{(r)}, i,j = 1,2,\dots\right\},$$

para cada $r \in \mathbb{N}$. Si r es un entero positivo y si $(m_i)_i$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tomamos

$$F(r,(m_i)_i) = \left\{f_{i,j} : i > r,\, j \geq m_i\right\}.$$

La familia $\mathscr{B} = \{F(r,(m_i)_i)\}$ es una base de filtro. Sea $\mathscr{F}$ el filtro generado por $\mathscr{B}$ en λ y $\mathscr{U}$ un ultrafiltro en λ más fino que $\mathscr{F}$. Sea E el dual algebraico de λ_1. Identificamos λ con un subespacio de E. Dado un elemento $u = (u_{i,j})_{i,j} \in \lambda_1$ definimos

$$F(r,(m_i)_i,u) = \left\{\langle f_{i,j}, u\rangle : f_{i,j} \in F(r,(m_i)_i)\right\} \subset \mathbb{R}.$$

La familia $\mathscr{B}(u) = \{F(r,(m_i)_i,u) : F(r,(m_i)_i) \in \mathscr{B}\}$ es una base de filtro en $\mathbb{R}$. Sea $\mathscr{U}(u)$ un ultrafiltro más fino que el generado por $\mathscr{B}(u)$.

Por otra parte, existen enteros positivos s y h tales que $u \in h \cdot B_s$. Así, si $r > s$ se sigue que $u_{r,j} \leq h$ y por tanto que $F(r,(m_i)_i,u)$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$. De ahí $\mathscr{U}(u)$ converge en $\mathbb{R}$ a un elemento $f(u)$, de donde se sigue que $\mathscr{U}$ converge a $f \in E$ con la topología de convergencia puntual sobre λ_1. Dado un entero positivo k, si $v = (v_{i,j}) \in B_k$ y $r > k$, entonces

$$|\langle f_{r,j}, v\rangle| = |v_{r,j}| \leq 1,$$

y de aquí

$$|f(u)| \leq 1 \text{ para cada } u \in \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r. \tag{2.9}$$

Así, f es una forma lineal definida en λ_1 con valores reales y acotada sobre conjuntos acotados de λ_1. Supongamos que $f \in \overline{A}^{\sigma(Y,\lambda_1)}$. Si A° es la polar de A en λ_1 entonces tenemos que

$$f(w) \leq 1 \text{ para cada } w \in A^\circ.$$

Para cada entero positivo i encontramos un entero positivo $h(i)$ tal que

$$B_i \subset 2^{h(i)} A^\circ.$$

Sea $v = (v_{i,j})_{i,j}$ un elemento de B_1 dado por

$$v_{i,j} = 1,\ j > h(i)+2,\ v_{i,j} = 0,\ j \leq h(i)+2,\ i \in \mathbb{N}.$$

La sucesión

$$\sum_{i,j=1}^{r} 2v_{i,j}e_{i,j},\ r \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

está contenida en $2B_1$ y converge coordenada a coordenada a $2v$. Puesto que el conjunto B_1 es $\sigma(\lambda_1,\lambda)$-compacto, la serie

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} 2v_{i,j}e_{i,j}$$

converge a $2v$ en $(\lambda_1, \sigma(\lambda_1,\lambda))$. Por otra parte,

$$2^{i\cdot j} e_{i,j} \in B_i \subset 2^{h(i)} A^\circ,$$

y de aquí,

$$2^{i\cdot j - h(i)} e_{i,j} \in A^\circ.$$

Si tomamos $j > h(i)+2$ se sigue que

$$i\cdot j - h(i) \geq (i-1)j+3$$

y en consecuencia

$$2^{(i-1)j+3}e_{i,j} \in A^{\circ}$$

Entonces

$$2^{(i-1)j+3}v_{i,j}e_{i,j} \in A^{\circ}, \quad i,j=1,2,\ldots.$$

Puesto que A° es absolutamente convexo y

$$\sum_{i,j}\frac{1}{2^{(i-1)j+2}} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{(i-1)}}\right)^j = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 1.$$

Tenemos que

$$\sum_{i,j=1}^{r}\frac{1}{2^{(i-1)j+2}}\cdot 2^{(i-1)j+3}v_{i,j}e_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{r}2v_{i,j}e_{i,j} \in A^{\circ},$$

para cada $r\in\mathbb{N}$. Puesto que A° es $\sigma(\lambda_1,\lambda)$-cerrado se sigue que $2v$ pertenece a A°. Si $f_{i,j}$ es un elemento de $F(1,(h(i)+3)_i)$, tenemos que $j > h(i)+2$ y de aquí

$$\langle f_{i,j}, 2v\rangle = 2v_{i,j} = 2.$$

Obteniendo de esta forma que $\langle f, 2v\rangle = 2$ que es una contradicción con la ecuación (2.9), y f no pertenece a Y. □

2.4 El índice de K-determinación en espacios de Banach

En [77], Talagrand estudia los espacios de Banach débilmente K-analíticos y débilmente numerablemente determinados, es decir, los espacios de Banach que dotados con la topología débil son K-analíticos o numerablemente determinados. En esta sección se generalizan algunos de los resultados de Talagrand.

En el caso del espacio de las funciones continuas $C(K)$ sobre un compacto K tenemos las siguientes desigualdades, las cuáles serán utilizadas cuando se establezca más adelante el teorema 2.4.8.

Proposición 2.4.1. *Sea K un espacio compacto, entonces*

$$\begin{aligned}\text{máx}\left\{\ell(C(K),\tau_p),\ell(C(K),\omega)\right\} \leq \ell\Sigma(C(K),\tau_p) = \ell\Sigma(C(K),\omega) \leq \\ \leq \mathrm{w}(C(K),\|\cdot\|_\infty).\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Después de la proposición 2.3.4, tenemos que

$$\begin{aligned}\ell(C(K),\tau_p) &\leq \ell\Sigma(C(K),\tau_p), \text{ y}\\ \ell(C(K),\omega) &\leq \ell\Sigma(C(K),\omega).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Por otra parte, en la bola unidad $B_{C(K)}$ la topología débil y la topología de convergencia puntual tienen los mismos compactos y $w \leq \tau_p$, véase [30, Theorem 4.2]. Por el corolario 2.2.13 afirmamos que

$$\ell\Sigma(B_{C(K)},\tau_p) = \ell\Sigma(B_{C(K)},\omega).$$

Ahora, puesto que $C(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\cdot B_{C(K)}$ utilizando la proposición 2.2.9 obtenemos las igualdades

$$\ell\Sigma(C(K),w) = \ell\Sigma(B_{C(K)},w),$$

y

$$\ell\Sigma(C(K),\tau_p) = \ell\Sigma(B_{C(K)},\tau_p).$$

Así,

$$\ell\Sigma(C(K),\tau_p) = \ell\Sigma(C(K),\omega). \tag{2.12}$$

Combinando las ecuaciones (2.11) y (2.12) obtenemos

$$\text{máx}\left\{\ell(C(K),\tau_p),\ell(C(K),\omega)\right\} \leq \ell\Sigma(C(K),\tau_p) = \ell\Sigma(C(K),\omega).$$

La desigualdad $\ell\Sigma(C(K),\omega) \leq \mathrm{w}(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ se sigue tras observar que la aplicación identidad $\mathrm{Id}: (C(K),\|\cdot\|_\infty) \to (C(K),\omega)$ es continua, teniendo en cuenta la definición de $\ell\Sigma(C(K),w)$. □

Obsérvese que con la misma prueba obtenemos el resultado que sigue.

Corolario 2.4.2. *Sea K un espacio compacto, e $Y \subset C(K)$ un subespacio, entonces*

$$\ell\Sigma(Y,\tau_p) = \ell\Sigma(Y,w).$$

DEMOSTRACIÓN: En la bola unidad $B_Y = Y \cap B_{C(K)}$ de Y la topología débil y la topología de convergencia puntual tienen los mismos compactos, después del teorema de Grothendieck [30, Theorem 4.2]. Por el corolario 2.2.13, $\ell\Sigma(B_Y, \tau_p) = \ell\Sigma(B_Y, w)$. Ahora observando que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot B_Y$ y haciendo uso de la proposición 2.2.9 obtenemos que

$$\ell\Sigma(Y, \tau_p) = \ell\Sigma(Y, w)$$

y la prueba acaba. □

Proposición 2.4.3. *Sea Y un espacio de Banach y $Z \subset Y$ un subespacio denso. Entonces*

$$\ell\Sigma(Y, \sigma(Y, Y^*)) \leq \ell\Sigma(Z, \sigma(Z, Z^*)).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea (M,d) un espacio métrico con peso $\mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Z, \sigma(Z, Z^*))$ y sea $\varphi : M \to 2^{(Z,\sigma(Z,Z^*))}$ una aplicación usco tal que $Z = \bigcup_{x\in M} \varphi(x)$. Definimos

$$M' := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}} : B_Y \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\varphi(x_n) + \frac{1}{n} B_{Y^{**}} \right) \neq \emptyset \right\},$$

donde $B_{Y^{**}}$ denota la bola unidad del bidual de Y, y la aplicación multivaluada

$$\phi : M' \to 2^{B_Y}$$

dada por

$$\phi(x) = \phi((x_n)_n) = B_Y \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\varphi(x_n) + \frac{1}{n} B_{Y^{**}} \right),$$

para cada $x = (x_n)_n \in M'$.

Entonces se verifican las siguientes propiedades:

(i) La aplicación ϕ es suprayectiva, es decir, $B_Y = \bigcup\{\phi(x), x \in M'\}$. Efectivamente, fijamos $y \in B_Y$. Considerando (B_Y, w) como un subespacio de $(B_{Y^{**}}, w^*)$ y puesto que Z es denso en Y, tenemos que

$$\{y + \frac{1}{n} B_{Y^{**}}\} \cap Z \neq \emptyset$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. De ahí, puesto que $Z = \bigcup_{x\in M} \varphi(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in M$ tal que

$$y \in \varphi(x_n) + \frac{1}{n} B_{Y^{**}},$$

y así,

$$y \in B_Y \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\varphi(x_n) + \frac{1}{n} B_{Y^{**}} \right) = \phi((x_n)_n).$$

(ii) La aplicación ϕ es usco cuando en B_Y consideramos la topología débil. Para cada $x\in M'$, el conjunto $\phi(x)$ es compacto en (B_Y,w) ya que es compacto en $(B_{Y^{**}},w^*)$ y está contenido en B_Y.

Para demostrar que ϕ es una aplicación usco basta tomar una sucesión $(x_n)_n$ convergente a $x=(x^j)_{j\in\mathbb{N}}$ en M', donde $x_n=(x_n^j)_{j\in\mathbb{N}}$ para cada $n\in\mathbb{N}$, y probar que si $y_n\in\phi(x_n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un punto de aglomeración en $\phi(x)$.

Puesto que $(B_{Y^{**}},w^*)$ es compacto, la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset B_{Y^{**}}$ tiene un punto de aglomeración y en $B_{Y^{**}}$, es decir, existe una subred $(y_l)_{l\in L}$ de $(y_n)_n$ convergente a y. Veamos que $y\in\phi(x)$. Para cada $l\in L$ se tiene

$$y_l\in\phi(x_l)=(\varphi(x_l^1)+B_{Y^{**}})\cap(\varphi(x_l^2)+\frac{1}{2}B_{Y^{**}})\cap\ldots,$$

es decir, $y_l=z_l^j+b_l^j$, donde $z_l^j\in\varphi(x_l^j)$ y $b_l^j\in\frac{1}{j}B_{Y^{**}}$ para cada $j\in\mathbb{N}$. Fijemos $j\in\mathbb{N}$. Por ser φ una aplicación usco, $(z_l^j)_{l\in L}$ tiene un punto de aglomeración z^j en $\varphi(x^j)$ considerando la topología $\sigma(Z,Z^*)$, es decir, existe una subred $(z_s^j)_{s\in S}$ de $(z_l^j)_{l\in L}$ que converge a z^j. Por otra parte $(b_s^j)_{s\in S}$ es una red que tiene un punto de aglomeración $b^j\in\frac{1}{j}B_{Y^{**}}$, por ser $(B_{Y^{**}},w^*)$ compacto. Pasando a una nueva subred $(z_i^j+b_i^j)_{i\in I}$ podemos suponer que $(z_i^j+b_i^j)_{i\in I}$ converge hacia $z^j+b^j\in\varphi(x^j)+\frac{1}{j}B_{Y^{**}}$. Como dicha red es subred de $(y_l)_{l\in L}$ que es convergente a y, tenemos que

$$y=z^j+b^j\in\varphi(x^j)+\frac{1}{j}B_{Y^{**}}.$$

Como este argumento se puede repetir para cada $j\in\mathbb{N}$ se tiene que $y\in\phi(x)$.

Por lo tanto, $\ell\Sigma(B_Y,w)\leq \mathrm{w}(M')=\ell\Sigma(Z,\sigma(Z,Z^*))$. Puesto que $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}n\cdot B_Y$, después de 2.2.9, obtenemos que

$$\ell\Sigma(Y,\sigma(Y,Y^*))\leq\ell\Sigma(Z,\sigma(Z,Z^*))$$

y la prueba finaliza. □

El siguiente resultado que se obtiene como corolario de la proposición 2.3.14.

Proposición 2.4.4. *Sea Y un espacio de Banach. Entonces*

$$d(Y,w)\leq \text{máx}\{d(Y^*,w^*),\ell\Sigma(Y,w)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $D \subset Y^*$ un subconjunto denso en Y^* tal que $|D| = d(Y^*, w^*)$. Consideraremos como $\mathscr{G}$ la topología de convergencia puntual sobre el conjunto $D \subset Y^*$, entonces,

$$\mathrm{nw}(Y, \mathscr{G}) \leq \mathrm{w}(Y, \mathscr{G}) \leq |D| = d(Y^*, w^*). \tag{2.13}$$

Después de la proposición 2.3.14, tenemos que

$$d(Y,w) \leq \text{máx}\,\{\mathrm{nw}(Y,\mathscr{G}), \ell\Sigma(Y,w)\} \leq \text{máx}\{d(Y^*,w^*), \ell\Sigma(Y,w)\}, \tag{2.14}$$

y la prueba acaba. □

En particular se obtiene el resultado que sigue.

Corolario 2.4.5 ([77]). *Sea Y un espacio de Banach tal que (Y, w) es numerablemente determinado. Entonces:*

$$d(Y,w) = d(Y^*, w^*).$$

DEMOSTRACIÓN: La desigualdad $d(Y^*, w^*) \leq d(Y, w)$ es cierta en general para un espacio de Banach, [28, pág. 358] y la desigualdad en el otro sentido nos viene dada por la proposición 2.4.4, ya que en este caso $\ell\Sigma(Y, w)$ es numerable y

$$d(Y,w) \leq \text{máx}\{d(Y^*,w^*), \aleph_0\} \leq d(Y^*,w^*).$$

□

Las propiedades que siguen son generalizaciones de resultados conocidos para espacios de Banach débilmente numerablemente determinados tal y como aparecen en [77, Theorem 5.1].

Proposición 2.4.6. *Sea Y un espacio de Banach y sea $Z \subset Y$ un subespacio tal que el subespacio cociente Y/Z es separable. Entonces*

$$\ell\Sigma(Y, \sigma(Y,Y^*)) \leq \text{máx}\{\ell\Sigma(Z, \sigma(Z,Z^*)), \aleph_0\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $p : Y \to Y/Z$ la proyección canónica y sea $D \subset Y$ un subconjunto numerable tal que $p(D) \subset Y/Z$ es denso en Y/Z. De ahí, el conjunto

$$D + Z = \bigcup_{d \in D} \{d + Z\}$$

es denso en Y. Utilizando proposición 2.2.9, tenemos que

$$\ell\Sigma(D+Z) \leq \ell\Sigma(Z,\sigma(Z,Z^*)),$$

ya que D es numerable. Por la proposición 2.4.3, concluimos que

$$\ell\Sigma(Y,\sigma(Y,Y^*)) \leq \ell\Sigma(D+Z) \leq \ell\Sigma(Z,\sigma(Z,Z^*))$$

y la prueba acaba. □

La proposición que sigue es un paso previo para presentar el resultado que generaliza el teorema [77, Theorem 3.4].

Proposición 2.4.7. *Sea $Z \subset C(K)$ un subconjunto que separa puntos de un compacto K, entonces*

$$\ell\Sigma(C_p(K)) \leq \ell\Sigma(Z,\tau_p).$$

DEMOSTRACIÓN: Puesto que Z separa puntos de K, por el teorema de Stone-Weierstrass, véase [52, pág. 244], la subálgebra $\mathscr{A}$ generada por Z y las constantes es densa en $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$. Veamos que

$$\ell\Sigma(\mathscr{A}) \leq \ell\Sigma(Z).$$

Las constantes verifican que

$$\ell\Sigma(\{constantes\}) \leq \aleph_0 \leq \ell\Sigma(Z),$$

ya que pueden expresarse como imagen continua de $\mathbb{R}$ cuyo peso es numerable. Después de la proposición 2.2.9 tenemos que el espacio $Y = Z\cup\{constantes\}$ sigue verificando que $\ell\Sigma(Y) \leq \ell\Sigma(Z)$. Sea M un espacio métrico con $\mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Y)$ y $\varphi : M \to 2^Y$ una aplicación usco que cubre Y. Dados $f,g \in C(K)$ denotamos por $f\cdot g$ la función producto definida en K con valores reales dada por $f\cdot g(x) = f(x)\cdot g(x)$. Es conocido que el producto finito de funciones continuas es una función continua y la aplicación

$$\begin{aligned} C_p(K)\times C_p(K) &\to C_p(K)\\ (f,g) &\rightsquigarrow f\cdot g \end{aligned}$$

es continua. Definimos ahora los subconjuntos

$$\begin{array}{lll} Z_1 & := & \{Y\},\\ Z_2 & := & \{f_1\cdot f_2 :\ f_1,f_2\in Y\},\\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ Z_n & := & \{f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_n :\ f_i\in Y \text{ para cada } i=1,\ldots,n\}\\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Demostraremos que $\ell\Sigma(Z_n,\tau_p) \leq \ell\Sigma(Y,\tau_p)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Efectivamente, después de la proposición 2.2.3 tenemos que $\ell\Sigma((Y,\tau_p)^n) \leq \ell\Sigma(Y,\tau_p)$, y además la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_n : Y^n &\longrightarrow Z_n \\ (f_1, f_2, \dots, f_n) &\longrightarrow f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n, \end{aligned}$$

es continua y suprayectiva, así, por el corolario 2.2.8,

$$\ell\Sigma(Z_n,\tau_p) \leq \ell\Sigma(Y,\tau_p) \leq \ell\Sigma(Z,\tau_p)$$

como habíamos anunciado. Se tiene entonces, utilizando la proposición 2.2.9, que

$$\ell\Sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n,\tau_p) \leq \ell\Sigma(Z,\tau_p).$$

Por otro lado, la subálgebra $\mathscr{A}$ de $C_p(K)$ generada por Y, coincide con el espacio vectorial generado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ y por la proposición 2.2.10 se tiene que

$$\ell\Sigma(\mathscr{A},\tau_p) \leq \ell\Sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n,\tau_p) \leq \ell\Sigma(Z,\tau_p).$$

Después del corolario 2.4.2, tenemos que $\ell\Sigma(\mathscr{A},\tau_p) = \ell\Sigma(\mathscr{A},w)$. Utilizando la proposición 2.4.3, se concluye ahora que

$$\ell\Sigma(C(K),w) \leq \ell\Sigma(\mathscr{A},w) \leq \ell\Sigma(Z,\tau_p).$$

Por último señalar que $\ell\Sigma(C(K),w) = \ell\Sigma(C(K),\tau_p)$, proposición 2.4.1, y así el resultado queda demostrado. □

Nota: Otra forma de finalizar la prueba anterior consiste en demostrar que $C_p(K)$ es imagen continua de $\mathscr{A} \times B_{\mathscr{A}}^{\mathbb{N}}$, donde por $B_{\mathscr{A}}$ denotamos la bola unidad de $\mathscr{A}$. La aplicación es la que sigue

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{A} \times B_{\mathscr{A}}^{\mathbb{N}} &\to C_p(K) \\ (f,(f_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\to f + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f_n \end{aligned}$$

La aplicación Φ verifica las siguientes propiedades:

(i) Está bien definida. Efectivamente, puesto que $(C(K),\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|f_n\|_\infty$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot f_n$ converge en $(C(K),\|\cdot\|)$ a un punto $g \in C(K)$, en particular converge a g en $(C(K),\tau_p)$.

(ii) Es continua. Sea $(f_j,(f_n^j)_{n\in\mathbb{N}})_{j\in J}$ una red convergente a $(f,(f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ en la topología producto, es decir, $(f_j)_{j\in J}$ converge a f en la topología de convergencia puntual y $(f_n^j)_{j\in J}$ converge a f_n para cada $n\in\mathbb{N}$ también en la topología de convergencia puntual. Entonces, fijado $x\in K$ tenemos que $(f^j(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n^j(x))_{j\in J}$ converge a $f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n(x)$.

(iii) Es suprayectiva. Sea $g\in C(K)$. Entonces existen $f\in\mathscr{A}$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in B_{\mathscr{A}}$ tal que $g=f+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n$ si, y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}(g-f)-\frac{1}{2^n}f_n\right)=0.$$

Puesto que la subálgebra $\mathscr{A}$ es densa en $(C(K),\|\cdot\|_\infty)$ existe $f\in\mathscr{A}$ tal que

$$\|g-f\|_\infty<\frac{1}{2}.$$

Si demostramos que existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en $B_{\mathscr{A}}$ verificando

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}(g-f)-\frac{1}{2^k}f_k\right)\right\|<\frac{1}{2^{n+2}},$$

habremos terminado. Para $n=1$ tenemos que por la densidad de $\mathscr{A}$ existe una función $f_1\in\mathscr{A}$ tal que $\|(g-f)-f_1\|_\infty<\frac{1}{2^2}$ y se satisface $\|\frac{1}{2}(g-f)-\frac{1}{2}f_1\|<\frac{1}{2^3}$. Supuesto cierto para n, lo demostramos para $n+1$. Efectivamente, tenemos que para n se verifica

$$\left\|2^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}(g-f)-\frac{1}{2^k}f_k\right)\right\|<\frac{1}{2},$$

de nuevo por la densidad del subálgebra $\mathscr{A}$ existe $f_{n+1}\in B_{\mathscr{A}}$ tal que

$$\left\|2^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}(g-f)-\frac{1}{2^k}f_k\right)-f_{n+1}\right\|<\frac{1}{2^2},$$

es decir,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2^k}(g-f)-\frac{1}{2^k}f_k\right)\right\|<\frac{1}{2^{n+3}}.$$

Ahora, por el corolario 2.2.8, $\ell\Sigma(C_p(K))\le\ell\Sigma(\mathscr{A}\times B_{\mathscr{A}}^{\mathbb{N}})\le\ell\Sigma(Z,\tau_p)$, y la prueba acaba. □

El teorema que enunciamos a continuación generaliza el teorema [77, Theorem 3.4] de Talagrand.

Teorema 2.4.8. *Sea K un conjunto compacto y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Son equivalentes:*

(i) *Existe un conjunto $X \subset C(K)$ que separa puntos de K y tal que $\ell\Sigma(X, \tau_p) \leq \mathfrak{m}$.*

(ii) $\ell\Sigma(C_p(K)) \leq \mathfrak{m}$.

(iii) $\ell\Sigma(C(K), \omega) \leq \mathfrak{m}$.

DEMOSTRACIÓN:

(i)$\Rightarrow$(ii) Proposición 2.4.7.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Es una de las desigualdades de la proposición 2.4.1.

(iii)$\Rightarrow$(i) Tomar $X = C(K)$. Este espacio separa puntos de K y puesto que la topología puntual es más gruesa que la topología débil tenemos que $\ell\Sigma(X, \tau_p) \leq \mathfrak{m}$. $\square$

Se dice que un espacio compacto K es de tipo $\mathscr{E}$ (o Eberlein) si es homeomorfo a un subconjunto w-compacto de un espacio de Banach. En [19] se demuestra que un compacto K es de tipo $\mathscr{E}$ si, y sólo si, $C(K)$ con la topología débil es un espacio débilmente compactamente generado. En [3] se demuestra que un espacio de Banach es un subespacio de un espacio débilmente compactamente generado si, y sólo si, la bola unidad de su dual (con la topología débil estrella) es de tipo $\mathscr{E}$. En [77], Talagrand define los compactos de tipo $\mathscr{E}_1$ (resp. de tipo $\mathscr{E}_2$). Un compacto K se dice que es de tipo $\mathscr{E}_1$ (resp. de tipo $\mathscr{E}_2$) si $(C(K), w)$es un espacio K-analítico (resp. numerablemente determinado). Continuando con la idea de generalizar los resultados conocidos para espacios K-analíticos y numerablemente determinados, estudiamos algunos resultados para el espacio $C(K)$ donde K es un espacio compacto.

Recordamos que un subconjunto X de un espacio de Banach Y se dice que es *total* si $\overline{span(X)} = Y$.

Teorema 2.4.9. *Sea Y un espacio de Banach y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. La siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe un subconjunto total X de Y con $\ell\Sigma(X, w) \leq \mathfrak{m}$.*

(ii) *Si B_{Y^*} es la bola unidad del dual de Y con la topología w^*, entonces*

$$\ell\Sigma(C_p(B_{Y^*})) \leq \mathfrak{m}.$$

(iii) $\ell\Sigma(Y, w) \leq \mathfrak{m}$.

DEMOSTRACIÓN: La implicación (iii)$\Rightarrow$(i) es trivial. La implicación (i)$\Rightarrow$(iii) se sigue de la proposición 2.4.3 junto con el hecho $\ell\Sigma(span(X)) \leq \ell\Sigma(X)$.

(i)$\Rightarrow$(ii) Si X es un subconjunto total de Y, entonces X separa puntos del compacto (B_{Y^*}, w^*). Ahora utilizando el teorema 2.4.8 tenemos que $\ell\Sigma(C_p(B_{Y^*})) \leq \mathfrak{m}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Observamos que $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ es un subespacio cerrado de $(C(B_{Y^*}), \|\cdot\|_\infty)$, y así, $(Y,w) \subset (C(B_{Y^*}), w)$ sigue siendo cerrado. Utilizando la proposición 2.2.4 obtenemos que

$$\ell\Sigma(Y,w) \leq \ell\Sigma(C(B_{Y^*},w) = \ell\Sigma(C(B_{Y^*}), \tau_p) \leq \mathfrak{m}$$

y la prueba acaba. □

Teorema 2.4.10. *Sea K un espacio compacto y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Son equivalentes:*

(i) $\ell\Sigma(C_p(K)) \leq \mathfrak{m}$*;*

(ii) *Existe un espacio topológico Y con $\ell\Sigma(Y) \leq \mathfrak{m}$ tal que K es homeomorfo a un subconjunto compacto en la topología de convergencia puntual del espacio $C(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: (i)$\Rightarrow$(ii) Basta con tomar $Y = C_p(K)$. Efectivamente en este caso K es homeomorfo a un subconjunto compacto de $C_p(C_p(K))$. Definimos la aplicación

$$\Phi : K \to C_p(C_p(K))$$
$$x \to \Phi(x) : C_p(K) \to \mathbb{R},$$

donde $\Phi(x)(g) = g(x)$ para cada $g \in C_p(K)$. La aplicación Φ es continua. Si $(x_j)_{j\in J}$ es una red convergente a x en K entonces para cada $g \in C_p(K)$ tenemos que $(g(x_j))_{j\in J}$ converge a $g(x)$, es decir, $(\Phi(x_j))_{j\in J}$ converge a $\Phi(x)$ en la topología de convergencia puntual sobre $C_p(K)$. La aplicación Φ es inyectiva. Efectivamente si $x \neq x'$ en K entonces existe $g \in C_p(K)$ tal que $g(x) \neq g(x')$, y así $\Phi(x)(g) \neq \Phi(x')(g)$. Luego, la aplicación $\Phi : K \to \Phi(K)$ sobre su imagen es una biyección continua, donde $\Phi(K) \subset C_p(C_p(K))$ es compacto por ser imagen continua de un compacto. Tan sólo nos queda demostrar que la inversa $\Phi^{-1} : \Phi(K) \to K$ es continua. Sea $(\Phi(x_j))_{j\in J}$ una red convergente a $\Phi(x)$ entonces para cada $g \in C_p(K)$ tenemos que $\Phi(x_j)(g) = g(x_j)$ converge a $\Phi(x)(g) = g(x)$, de donde se sigue que $(x_j)_{j\in J}$ converge a x en K, quedando demostrado que K es homeomorfo a $\Phi(K)$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Supongamos que $K \subset C_p(Y)$. La aplicación $p : Y \to C_p(K)$ definida por $p(y)(f) = f(y)$ es continua, así por 2.2.8, $\ell\Sigma(p(Y)) \leq \ell\Sigma(Y)$. Por otra parte el conjunto $p(Y) \subset C_p(K)$ separa puntos de K. Utilizando el teorema 2.4.8 concluimos que

$$\ell\Sigma(C_p(K)) \leq \ell\Sigma(p(Y)) \leq \ell\Sigma(Y),$$

y la prueba acaba. □

Proposición 2.4.11. *Sea K un compacto y $K' \subset K$ un subespacio cerrado. Entonces*

$$\ell\Sigma(C_p(K')) \leq \ell\Sigma(C_p(K)).$$

DEMOSTRACIÓN: Si K' es un subespacio cerrado de K, $C_p(K')$ es imagen continua de $C_p(K)$. Basta para ello asociar a cada $g \in C(K)$ su restricción a K', es decir, la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : C_p(K) &\to C_p(K') \\ f &\to f_{|K'} \end{aligned}$$

es continua y suprayectiva. La continuidad es trivial y el hecho de que es suprayectiva se sigue del teorema de extensión de Tietze [52, pág. 242]. Ahora utilizando el corolario 2.2.8

$$\ell\Sigma(C_p(K')) \leq \ell\Sigma(C_p(K)),$$

y la prueba acaba. □

Proposición 2.4.12. *Sean K, L compactos y $f : K \to L$ una aplicación continua y suprayectiva. Entonces*

$$\ell\Sigma(C_p(L)) \leq \ell\Sigma(C_p(K)).$$

DEMOSTRACIÓN: La aplicación $\Phi : (C(L), \|\cdot\|\infty) \to (C(K), \|\cdot\|_\infty)$, dada por

$$\begin{aligned} \Phi(h) : K &\to \mathbb{R} \\ k &\to h(f(k)) \end{aligned}$$

para cada $h \in C_p(L)$ es una isometría. Efectivamente, sea $h \in C(L)$, entonces

$$\|\Phi(h)\|_\infty = \max_{k\in K} |\Phi(h)(k)| = \max_{k\in K} |h(f(k))| = \max_{l\in L} |h(l)| = \|h\|_\infty,$$

y así, podemos considerar el espacio $(C(L), \|\cdot\|_\infty)$ como un subespacio cerrado de $(C(K)$ con la topología de la norma y lo mismo para la topología débil, es decir, $(C(L), w)$ es un subespacio cerrado de $(C(K), w)$ y utilizando la proposición 2.2.4,

$$\ell\Sigma(C(L), \tau_p) = \ell\Sigma(C(L), w) \leq \ell\Sigma(C(K), w) = \ell\Sigma(C(K), \tau_p)$$

finalizando de esta forma la prueba. □

Proposición 2.4.13. *Sea $(K_n)_n$ una sucesión de compactos y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Si*

$$\ell\Sigma(C_p(K_n)) \leq \mathfrak{m}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\ell\Sigma(C_p(\prod_{n\in\mathbb{N}} K_n)) \leq \mathfrak{m}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $C(K_n)$ separa puntos de K_n. Por otra parte, fijado $m \in \mathbb{N}$, la aplicación

$$p_m : C_p(K_m) \to C_p(\prod_{n\in\mathbb{N}} K_n)$$
$$f \to p_m(f) = f \circ \pi_m$$

donde $\pi_m : \prod_{n\in\mathbb{N}} K_n \to K_m$ denota la proyección sobre la m-ésima coordenada, es continua y así $\ell\Sigma(p_m(C_p(K_m)) \leq \ell\Sigma(C_p(K_m))$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Ahora, por la proposición 2.2.9, tenemos que la unión $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} p_m(C_p(K_m))$ verifica

$$\ell\Sigma\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} p_m(C_p(K_m))\right) \leq \mathfrak{m}.$$

Además separa puntos de $\prod_{n\in\mathbb{N}} K_n$, y así, por 2.4.8, se obtiene que

$$\ell\Sigma(C_p(\prod_{n\in\mathbb{N}} K_n)) \leq \mathfrak{m}$$

finalizando la prueba. □

2.5 Tightness de $C_p(Y)$ y monoliticidad de subconjuntos compactos en $C_p(Y)$

La definición que sigue la encontramos en [2, pág. 83].

Definición 2.5.1. *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Un espacio topológico Y se dice que es* fuertemente $\mathfrak{m}$-monolítico *si para cada $A \subset Y$ con $|A| \leq \mathfrak{m}$ el peso de la clausura $\overline{A}$ es menor o igual que $\mathfrak{m}$.*

Ejemplo 2.5.2. *Los espacios métricos son fuertemente $\mathfrak{m}$-monolíticos para cada cardinal $\mathfrak{m}$ infinito.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que en un espacio métrico el carácter de densidad y el peso coinciden. Sean $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito, M un espacio métrico y $A \subset M$ con $|A| \leq \mathfrak{m}$, entonces $\mathrm{w}(\overline{A}) = d(\overline{A}) \leq \mathfrak{m}$. □

Las siguientes propiedades de los espacios fuertemente $\mathfrak{m}$-monolíticos son de demostración inmediata, véase [2, pág. 84].

Proposición 2.5.3. *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Entonces:*

(i) *Todo subespacio de un espacio fuertemente $\mathfrak{m}$-monolítico es fuertemente $\mathfrak{m}$-monolítico.*

(ii) *El producto de una familia numerable de espacios fuertemente $\mathfrak{m}$-monolíticos es fuertemente $\mathfrak{m}$-monolítico.*

Teorema 2.5.4. *Sea Y un espacio topológico. Si $H \subset C_p(Y)$ es compacto, entonces H es fuertemente $\ell\Sigma(Y)$-monolítico.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $H' \subset H$ con $|H'| \leq \ell\Sigma(Y)$ y sea $\overline{H'}$ el cierre de H' en $C_p(Y)$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \delta : Y &\to C_p(\overline{H'}) \\ y &\to \delta_y : \overline{H'} \to \mathbb{R} \\ &\qquad h \rightsquigarrow h(y) \end{aligned} \tag{2.15}$$

La aplicación δ verifica:

(i) Está bien definida, es decir $\delta_y \in C_p(\overline{H'})$ para cada $y \in Y$. Efectivamente, si $(h_j)_{j\in J} \subset \overline{H'}$ es una red convergente a h en la topología de convergencia puntual sobre Y, entonces $(h_j(y))_{j\in J}$ converge a $h(y)$ para cada $y \in Y$. Así,

$$(\delta_y(h_j))_{j\in J} \text{ converge a } \delta_y(h),$$

para cada $y \in Y$.

(ii) Es continua. Si $(y_j)_{j\in J} \subset Y$ es una red convergente a $y \in Y$ en la topología de Y, entonces demostraremos que $(\delta_{y_j})_{j\in J}$ es una red que converge a δ_y en la topología de convergencia puntual sobre $\overline{H'}$. Sea $h \in \overline{H'}$, entonces

$$\delta_{y_j}(h) = h(y_j)$$

para cada $j \in J$ y, puesto que h es continua, se tiene que $(h(y_j))_{j\in J}$ converge a $h(y)$. En términos de la aplicación δ tenemos que

$$(\delta(y_j)(h))_{j\in J} \text{ converge a } \delta_y(h).$$

Ahora $\delta(Y) \subset C(\overline{H'})$ es un conjunto que separa puntos de $\overline{H'}$ y por la proposición 2.4.7 tenemos que $\ell\Sigma(C_p(\overline{H'})) \leq \ell\Sigma(\delta(Y), \tau_p(\overline{H'}))$. Por otra parte, puesto que δ es continua, utilizando el corolario 2.2.8, tenemos que $\ell\Sigma(\delta(Y), \tau_p(\overline{H'})) \leq \ell\Sigma(Y)$. Combinando ambas desigualdades obtenemos

$$\ell\Sigma(C_p(\overline{H'})) \leq \ell\Sigma(Y). \tag{2.16}$$

Por otra parte sabemos que

$$\mathrm{nw}(C(\overline{H'}), \tau_p(H')) \leq \mathrm{w}(C(\overline{H'}), \tau_p(H')) \leq |H'| \leq \ell\Sigma(Y). \tag{2.17}$$

De la proposición 2.3.14, se sigue que

$$d(C_p(\overline{H'})) \leq \text{máx}\left\{\mathrm{nw}(C_p(\overline{H'}), \tau_p(H')), \ell\Sigma(C_p(\overline{H'}))\right\},$$

y después de las desigualdades (2.16) y (2.17), obtenemos que

$$d(C_p(\overline{H'})) \leq \ell\Sigma(Y).$$

Puesto que $\mathrm{w}(\overline{H'}) = d(C_p(\overline{H'}))$ finalmente concluimos que

$$\mathrm{w}(\overline{H'}) \leq \ell\Sigma(Y)$$

y la prueba acaba. □

Como corolario obtenemos el siguiente resultado que podemos encontrar en [15].

Corolario 2.5.5. *Sea Y un espacio numerablemente determinado. Sea $H \subset C(Y)$ un subconjunto τ_p-compacto y separable entonces H es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: Basta particularizar el enunciado del teorema 2.5.4 para $\ell\Sigma(Y)$ numerable. □

El teorema que sigue es un conocido resultado, [2, pág. 45] que nos será de utilidad para demostrar distintos resultados de esta sección y de las restantes.

Teorema 2.5.6 (Teorema de Arkhangel'skii). *Sea Y un espacio topológico y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Si $\ell(Y^n) \leq \mathfrak{m}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $t(C_p(Y)) \leq \mathfrak{m}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset C_p(Y)$ y $\overline{A}$ la clausura de A en la topología de convergencia puntual sobre Y. Fijados $n \in \mathbb{N}$ y $f \in \overline{A}$, para cada $g \in A$ definimos

$$L_g^n := \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y^n : |f(y_i) - g(y_i)| < \frac{1}{n}, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

que son abiertos en el espacio producto Y^n con la topología producto, ya que

$$L_g^n = \bigcap_{i=1}^{n} \Phi_i^{-1} \left((0, \frac{1}{n}) \right),$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \Phi_i : Y^n & \to & \mathbb{R} \\ (y_1, y_2, \dots, y_n) & \to & |f(y_i) - g(y_i)| \end{array}$$

es continua para cada $i = 1, \dots, n$. Puesto que $f \in \overline{A}$, tenemos que

$$Y^n \subset \bigcup_{g \in A} L_g^n.$$

Por hipótesis $\ell(Y^n) \leq \mathfrak{m}$, así, existe $D_n \subset A$ de cardinal menor o igual que $\mathfrak{m}$ tal que

$$Y^n \subset \bigcup_{g \in D_n} L_g^n. \tag{2.18}$$

Definimos el conjunto $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Es claro que $|D| \leq \mathfrak{m}$. Para concluir demostramos que $f \in \overline{D}$, siendo la clausura de D en la topología de convergencia puntual sobre Y. Sea U_f un entorno abierto de f en la topología de convergencia puntual sobre Y, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ e $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y^n$ tales que

$$V_{y_1, y_2, \dots, y_n, n} := \left\{ g \in C_p(Y) : |g(y_i) - f(y_i)| \leq \frac{1}{n} : i = 1, 2, \dots, n \right\} \subset U_f. \tag{2.19}$$

Por otra parte, por la ecuación (2.18), existe $g_{y_1, y_2, \dots, y_n} \in D_n$ satisfaciendo

$$(y_1, y_2, \dots, y_n) \in L^n_{g_{y_1, y_2, \dots, y_n}},$$

es decir,

$$|f(y_i) - g_{y_1,y_2,\dots,y_n}(y_i)| \le \frac{1}{n}$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$, y así $g_{y_1,y_2,\dots,y_n} \in V_{y_1,y_2,\dots,y_n}$ y por la inclusión de (2.19) obtenemos que $g_{y_1,y_2,\dots,y_n} \in U_f$ y la prueba finaliza. $\square$

El recíproco del teorema de Arkhangel'skii también es cierto y puede consultarse en la misma referencia, [2, pág. 45].

Del resultado anterior deducimos el corolario que sigue.

Corolario 2.5.7. *Sea Y un espacio topológico y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Si $\ell\Sigma(Y) \le \mathfrak{m}$, entonces* $\mathrm{t}(C_p(Y)) \le \mathfrak{m}$.

DEMOSTRACIÓN: Después de la proposición 2.3.4, tenemos que

$$\ell(Y^n) \le \ell\Sigma(Y^n) \le \mathfrak{m}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora utilizando el teorema 2.5.6 obtenemos el resultado buscado y la prueba acaba. $\square$

2.6 Otra prueba de la angelicidad de $C_p(Y)$ para Y numerablemente determinado

Para un espacio numerablemente determinado Y el espacio $C_p(Y)$ es angélico, [69]. En esta sección demostramos damos una prueba alternativa de este resultado utilizando en la que se aíslan las que propiedades topológicas de Y intervienen en cada paso para llegar a demostrar la angelicidad de $C_p(Y)$: utilizamos el resultado sobre metrizabilidad demostrado en el corolario 2.5.5, el hecho de que el k-espacios asociado a un espacio numerablemente determinado es otra vez numerablemente determinado, proposición 2.2.11 y las ideas originales de Grothendieck para espacios $C_p(K)$, [35].

En lo sucesivo emplearemos *RNK* y *RK* para referirnos a la noción de conjunto relativamente numerablemente compacto y relativamente compacto, respectivamente.

Definición 2.6.1. *Sea Y un espacio topológico y $B \subset Y$. Llamamos clausura sucesional de B y lo denotamos por $\overline{B}^s$ al conjunto*

$$\overline{B}^s = \left\{ y \in Y : \text{ existe } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B \text{ tal que } \lim_{n\to\infty} y_n \to y \right\}.$$

La noción de angelicidad ha sido recordada en la sección 1.3 de esta memoria. El lema que sigue es un resultado clásico conocido como *lema angélico*. La prueba del mismo puede consultarse en [30, Lema 3.1, pág. 28].

Lema 2.6.2. *Sean Y y Z espacios topológicos, siendo Y regular, y $f : Y \to Z$ una aplicación continua e inyectiva. Si $A \subset Y$ es RNK y para todo $B \subset f(A)$ la clausura sucesional $\overline{B}^s$ de B es cerrada en Z, entonces $f(\overline{A})$ es cerrado en Z y $f_{|\overline{A}}$ es un homeomorfismo.*

Una consecuencia inmediata del lema angélico es la proposición que sigue.

Proposición 2.6.3. *Sean Y y Z espacios topológicos Hausdorff con Y regular y Z angélico y $f : Y \to Z$ una aplicación inyectiva y continua, entonces Y es angélico.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset Y$ un conjunto RNK, entonces, puesto que f es continua, $f(A)$ es RNK. Puesto que Z es angélico tenemos que $f(A)$ es RK. Por otra parte, por la angelicidad de Z, tenemos que si $B \subset f(A)$, entonces $\overline{B} \subset \overline{B}^s$ y así $\overline{B} = \overline{B}^s$. Por el lema 2.6.2 tenemos que $f(\overline{A})$ es cerrado en Z y $f_{|\overline{A}}$ es un homeomorfismo y la prueba acaba, pues A tiene las mismas propiedades en Y que $f(A)$ en Z. □

Definición 2.6.4 (Grothendieck). *Sean Y un espacio topológico, X un conjunto arbitrario y $A \subset Y^X$ un subconjunto del espacio de las funciones de X en Y. Dado un subconjunto $K \subset X$ diremos que A* intercambia límites *con K (en Y) si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, de la existencia de los límites*

$$\lim_n (\lim_m f_n(x_m)) \qquad y \qquad \lim_m (\lim_n f_n(x_m))$$

se sigue su igualdad.

Ejemplo 2.6.5. *Sean Y y Z espacios topológicos. Si $A \subset C_p(Y,Z)$ es RNK y $K \subset Y$ es RNK entonces A y K tienen la propiedad del intercambio de límites.*

DEMOSTRACIÓN: Efectivamente, sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ sucesiones y sean $f \in C(Y,Z)$ un punto de aglomeración de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y \in K$ un punto de aglomeración de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si existen,

$$\lim_m(\lim_n f_n(y_m)) = \lim_m f(y_m) = f(y),$$

y

$$\lim_n(\lim_m f_n(y_m)) = \lim_n f_n(y) = f(y),$$

obviamente coinciden. $\square$

El resultado crucial del estudio de la compacidad en los espacios $C_p(K)$ es el siguiente:

Lema 2.6.6. *Sea K un conjunto, (Z,d) un espacio métrico compacto y $A \subset Z^K$ un subconjunto. Si A tiene la propiedad del intercambio de límites con K, entonces para cada $f \in \overline{A}^{Z^K}$, donde $\overline{A}^{Z^K}$ denota la clausura de A en Z^K con la topología producto, existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in K$.*

DEMOSTRACIÓN: Haremos la demostración en dos etapas. Sea d una métrica describiendo la topología de Z.

[1ª] Dadas funciones $g_1, g_2, \ldots, g_n \in Z^K$ y $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $L \subset K$ tal que

$$\min_{y\in L}\max_{m\le n}\{d(g_m(x), g_m(y))\} < \varepsilon \text{ para cada } x \in K. \tag{2.20}$$

Es decir, las imágenes de K por las funciones se pueden alcanzar por un número finito de bolas. Efectivamente el conjunto

$$B = \{(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)) : x \in K\} \subset Z^n$$

es relativamente compacto (Z^n es compacto) en el espacio métrico (Z^n, d_∞), donde

$$d_\infty((z_1, z_2, \ldots, z_n), (z_1', z_2', \ldots, z_n')) = \sup_{m\le n} d(z_m, z_m').$$

La familia $\{B_\infty(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x); \varepsilon) : x \in K\}$ es un recubrimiento abierto de $\overline{B}$ y así, existe $L \subset K$ finito tal que

$$B \subset \bigcup_{y\in L} B_\infty(g_1(y), \ldots, g_n(y); \varepsilon)$$

lo que nos da (2.20).

[2ª] Sea $f \in \overline{A}^{Z^K}$. Vamos a construir la sucesión que converge. Tomamos $f_1 := f$. Por la etapa anterior existe $L_1 \subset K$ finito tal que

$$\min_{y\in L_1} d(f_1(x), f_1(y)) < 1 \text{ para cada } x \in K.$$

Puesto que $f \in \overline{A}^{Z^K}$, para $L_1 \subset K$ finito existe $f_2 \in A$ tal que

$$d(f_2(y), f_1(y)) \leq \frac{1}{2} \text{ para cada } y \in L_1.$$

Ahora aplicamos de nuevo la primera etapa a f_1, f_2 y $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y así sucesivamente. Procediendo por recurrencia podemos encontrar funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots$ ($f_i \in A$, $i \geq 2$) y subconjuntos finitos $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ de K tales que

$$\min_{y\in L_n} \max_{m\leq n} \{d(f_m(x), f_m(y))\} \leq \frac{1}{n}$$

para cada $x \in K$, y

$$d(f_{n+1}(y), f_1(y)) \leq \frac{1}{n+1}$$

para cada $y \in \bigcup_{m=1}^{n} L_m$.

Con esta construcción podemos asegurar que si definimos $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$, entonces:

a) Para cada $y \in D$, existe $\lim_m f_m(y) = f_1(y)$.

b) Fijado $x \in K$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in D$ tal que

$$\max_{m\leq n} d(f_m(x), f_m(y_n)) \leq \frac{1}{n},$$

y así tenemos en particular que para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_n f_m(y_n) = f_m(x).$$

Utilizando a) y b) vamos a demostrar que $\lim_m f_m(x) = f_1(x) = f(x)$ para cada $x \in K$. Para ello es suficiente ver que $f(x)$ es el único punto de aglomeración de $f_m(x)$. Supongamos que y es punto de aglomeración de $f_m(x)$. Como Z es un espacio métrico existe una subsucesión $(f_{m_j}(x))_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_j f_{m_j}(x) = y$$

$$y = \lim_j f_{m_j}(x) = \lim_j(\lim_n f_{m_j}(y_n)) = \lim_n(\lim_j f_{m_j}(y_n)) = \lim_n f_1(y_n) = f_1(x) = f(x),$$

donde $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión construida en el apartado b) para x. La igualdad de los límites reiterados se tiene porque ambos límites existen y A intercambia límites con K. $\square$

Definición 2.6.7. *Un espacio topológico Y se dice que es $k_{\mathbb{R}}$-espacio si cada función $f : Y \to \mathbb{R}$ es continua si, y sólo si, para cada compacto $K \subset Y$ la restricción $f_{|K} : K \to \mathbb{R}$ es continua.*

Obsérvese que cada k-espacio es $k_{\mathbb{R}}$-espacio.

El siguiente resultado aparece propuesto como un ejercicio en [30, Ejer. 1.21 b)].

Corolario 2.6.8. *Sean Y un $k_{\mathbb{R}}$-espacio y $A \subset C(Y)$. Entonces son equivalentes:*

(i) *A es RNK en $(C(Y), \tau_p)$;*

(ii) *A es RK en $(C(Y), \tau_p)$.*

DEMOSTRACIÓN: La implicación (ii)$\Rightarrow$ (i) es evidente. Veamos (i)$\Rightarrow$ (ii). Denotamos por Z una compactificación métrica de la recta $\mathbb{R}$. El espacio $(C(Y,Z), \tau_p(Y))$ es un subespacio del espacio Z^Y el cual, después del Teorema de Tijonov, es un espacio compacto. El conjunto $\overline{A}^{Z^Y}$ es un subconjunto compacto de Z^Y, y así, para demostrar el resultado es suficiente demostrar que

$$\overline{A}^{Z^Y} \subset C(Y, \mathbb{R}).$$

Sean $f \in \overline{A}^{Z^Y}$ y $K \subset Y$ un subconjunto compacto. Demostraremos que $f_{|K} \in C(K, \mathbb{R})$. Después del ejemplo 2.6.5, el subconjunto RNK A de $C(Y, \mathbb{R})$ y el subconjunto compacto $K \subset Y$ intercambian límites. Ahora por el lema 2.6.6 existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que

$$\lim_n f_n(y) = f(y) \tag{2.21}$$

para cada $y \in K$. Ahora, puesto que A es RNK en $C(K, \mathbb{R})$, tenemos que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un punto de aglomeración g en $C(K, \mathbb{R})$. Como además se verifica (2.21) tenemos que para cada $y \in K$

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(y) = f(y) = g(y) \in \mathbb{R},$$

es decir, la función f coincide con g en K, y de aquí se sigue que $f_{|K} \in C(K, \mathbb{R})$. Puesto que el razonamiento anterior es válido para cualquier compacto $K \subset Y$ e Y es $k_{\mathbb{R}}$-espacio obtenemos finalmente que $f \in C(Y, \mathbb{R})$ y la prueba acaba. $\square$

Corolario 2.6.9. *Sea Y un espacio numerablemente determinado. Entonces $C_p(Y)$ es un espacio angélico.*

DEMOSTRACIÓN: Después de la proposición 2.2.11, Si (Y,τ) es numerablemente determinado, el espacio Y dotado de la k-topología asociada τ^k también lo es. Ahora el espacio $(C(Y,\tau^k),\tau_p)$ es angélico, ya que:

(i) Por el corolario 2.6.8, tenemos que si $A \subset C_p(Y)$ es RNK entonces A es RK.

(ii) Después del corolario 2.5.7, $\mathrm{t}(C_p(Y)) \leq \aleph_0$, y así para cada $f \in \overline{A}$ existe un conjunto numerable $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$, tal que $f \in \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{A}$. Ahora bien, como $\overline{A}$ es compacto, utilizando el corolario 2.5.5 tenemos que $\overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es τ_p-metrizable y por tanto, existe una sucesión $(f_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $(f_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la topología de convergencia puntual.

Para acabar la prueba basta tener presente que los subespacios de espacios angélicos son espacios angélicos a su vez. □

2.7 Una aplicación a los espacios quasi-LB

El resultado obtenido en la proposición 2.4.3 en el marco de los espacios de Banach sigue siendo válido en los espacios quasi-LB. Recordamos primero algunas definiciones que pueden encontrarse en [80].

Sea Y un espacio vectorial topológico y $A \subset Y$ un subconjunto acotado y absolutamente convexo. Denotamos por Y_A la envoltura lineal de A dotada con la norma del funcional de Minkowski de A (véase la definición en [54, pág.153]).

Definición 2.7.1. *Sea Y un espacio localmente convexo y $A \subset Y$ un subconjunto acotado y absolutamente convexo. Se dice que A es un disco de Banach si Y_A es un espacio de Banach.*

Definición 2.7.2. *Sea Y un espacio localmente convexo. Una familia de discos de Banach $\left\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ de Y se dice que es una quasi-LB-representación de Y si verifica las siguientes propiedades:*

(i) $\bigcup\left\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\} = Y$.

(ii) *Si $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $\alpha \leq \beta$, entonces $A_\alpha \subset A_\beta$.*

Un espacio vectorial topológico con una quasi-LB-representación diremos que es un espacio quasi-LB.

En esta sección utilizaremos la noción de red introducida por De Wilde en [82].

Definición 2.7.3. *Una red en un espacio Y es una familia*

$$\mathscr{W} = \{C_{m_1,m_2,\ldots,m_n} : n, m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{N}\}$$

de subconjuntos de Y que satisface las siguientes relaciones:

(i) $Y = \bigcup\{C_{m_1} : m_1 = 1,2,\ldots,\}$,

(ii) $C_{m_1,m_2,\ldots,m_n} = \bigcup\left\{C_{m_1,m_2,\ldots,m_n,k} : k = 1,2,\ldots,\right\}, \quad n \geq 1.$

Diremos que la red $\mathscr{W}$ es

(i) Acotada *si para cada $\alpha = (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y cada entorno del origen U de Y existe un entero positivo n_U y un número positivo p_U tal que $C_{n_1,n_2,\ldots,n_U}$ está contenido en $p_U \cdot U$.*

(ii) Ordenada *si dados los enteros positivos $h, r_1, r_2, \ldots, r_h, s_1, s_2, \ldots, s_h$, tales que $r_j \leq s_j$, $j = 1,2,\ldots,h$, entonces $C_{r_1,r_2,\ldots,r_h}$ está contenida en $C_{s_1,s_2,\ldots,s_h}$.*

Recordamos que una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio localmente convexo Y se dice que *converge rápidamente* a un punto $y \in Y$, si existe un disco de Banach $A \subset Y$ tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e y están contenidos en A e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en el espacio de Banach Y_A. El resultado que sigue generaliza la proposición 2.4.3.

Proposición 2.7.4. *Sea (Y,τ) un espacio quasi-LB completo y $Z \subset Y$ un subespacio denso en Y. Si para cada $y \in Y$ existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en Z tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge rápidamente a y, entonces*

$$\ell\Sigma(Y,\sigma(Y,Y')) \leq \ell\Sigma(Z,\sigma(Z,Z')).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea M un espacio métrico con $\mathrm{w}(M) = \ell\Sigma(Z)$ y $\varphi : M \to 2^Z$ una aplicación usco tal que $Z = \bigcup\{\varphi(x) : x \in M\}$.

De acuerdo con [80, Proposition 22] es posible tener una quasi-*LB* representación $\left\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ de Y tal que cada disco de Banach de Y está contenido en algún A_α, [80]. Para los enteros positivos $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$, definimos

$$C_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \bigcup\left\{A_\alpha : \alpha = (a_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, a_j = n_j,\ j = 1,2,\ldots,k\right\}.$$

La familia $\mathscr{W} = \{C_{n_1,n_2,\ldots,n_k} : k, n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\}$ es una red ordenada y acotada en Y, [7, Theorem 5]. Sea

$$T := \left\{(\alpha,x) = ((n_k)_k,(x_k)_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times M^{\mathbb{N}} : \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\varphi(x_k) + \frac{1}{k} \cdot \overline{C_{n_1,n_2,\ldots,n_k}}\right) \neq \emptyset\right\},$$

donde los cierres de los conjuntos se consideran en la topología débil del bidual $\sigma(Y'',Y')$. Definimos $\phi : T \to 2^{(Y,\sigma(Y,Y'))}$ dada por

$$\phi(\alpha,x) = \phi((n_k)_k,(x_k)_k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\varphi(x_k) + \frac{1}{k} \cdot \overline{C_{n_1,n_2,\dots,n_k}}^{\sigma(Y'',Y')} \right),$$

para cada $(\alpha,x) \in T$. Fijamos $(\alpha,x) \in T$ y veamos que $\phi(\alpha,x)$ está contenido en Y. La familia $\{U^{\circ\circ} : U \in \mathscr{U}\}$, donde $\mathscr{U}$ es la familia de los entornos del origen absolutamente convexos en Y, es una base de entornos del origen de Y'' para una topología τ_n, topología que recibe el nombre de topología natural, [54, pág. 300]. La topología natural induce en Y la topología original τ, [54, pág. 301]. Sea U un entorno en $\mathscr{U}$, entonces $U^{\circ\circ}$ es un entorno $\sigma(Y'',Y')$-cerrado del origen en $(Y'',\tau_n(Y'',Y'))$. Puesto que $\mathscr{W}$ está acotada en Y, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{k} \cdot \overline{C_{n_1,n_2,\dots,n_k}} \subset \overline{U}^{\sigma(Y'',Y')} \subset U^{\circ\circ}.$$

Así, tenemos que

$$\phi(\alpha,(x_n)_n) \subset \bigcap_{U\in\mathscr{U}} \{Z + U^{\circ\circ}\}.$$

Por la completitud tenemos que

$$Y = \bigcap_{U\in\mathscr{U}} \{Z + U^{\circ\circ}\},$$

y así,

$$\phi(\alpha,x) \subset Y.$$

Demostramos ahora que $\phi(\alpha,x)$ es acotado. Por la acotación de la familia $\mathscr{W}$ para cada $U \in \mathscr{U}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} \cdot C_{n_1,n_2,\dots,n_k} \subset U$ y de aquí

$$\frac{1}{k} \cdot \overline{C_{n_1,n_2,\dots,n_k}}^{\sigma(Y'',Y')} \subset \overline{U}^{\sigma(Y'',Y)} \subset U^{\circ\circ}.$$

El subconjunto $\varphi(x_k)$ es $\sigma(Y',Y)$-compacto. Existe entonces $\rho > 0$ tal que $\varphi(x_k) \subset \rho \cdot U \subset \rho \cdot U^{\circ\circ}$, y así

$$\phi(\alpha,x) \subset (1+\rho)U^{\circ\circ}.$$

Pero $\phi(\alpha,x) \subset Y$. Así,

$$\phi(\alpha,x) \subset (1+\rho_U)U^{\circ\circ} \cap Y,$$

para cada $U \in \mathscr{U}$, siendo $\mathscr{U}$ una base de entornos del origen en (Y,τ) y así hemos demostrado que $\phi(\alpha,x)$ es acotado. Por otra parte, el conjunto $\phi(\alpha,x)$ es $\sigma(Y'',Y')$-cerrado, ya que es intersección de conjuntos $\sigma(Y'',Y')$-cerrados. Puesto que $\phi(\alpha,x)$ está contenido en Y tenemos que es $\sigma(Y,Y')$-cerrado y acotado y el teorema de Alaoglu nos permite afirmar que $\phi(\alpha,x)$ es $\sigma(Y,Y')$-compacto.

Demostramos ahora que $\bigcup_{(\alpha,x)\in T}\phi(\alpha,x)=Y$. Sea $y\in Y$, entonces existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Z que converge rápidamente a y. Sea $\beta=(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e y están contenidos en A_β de manera que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en Y_{A_β}. La inclusión $A_\beta\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}C_{b_1,b_2,\dots,b_k}$ nos permite obtener una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y-y_{n_k}\in\frac{1}{k}\cdot C_{b_1,b_2,\dots,b_k}$ para cada $k\in\mathbb{N}$. Sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M tal que $y_{n_k}\in\varphi(x_{n_k})$ para cada $k\in\mathbb{N}$. De aquí tenemos que $y\in\phi(\beta,(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}})$ ya que

$$y=y_{n_k}+(y-y_{n_k})\in\varphi(x_{n_k})+\frac{1}{k}\cdot C_{b_1,b_2,\dots,b_k}$$

para cada $k\in\mathbb{N}$.

Por último demostraremos que la aplicación ϕ es usco. Sea $(\alpha_n,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en T convergente a (α,x), donde

$$(\alpha_n,x_n)=((a_n^j)_j,(x_n^j)_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$ y $(\alpha,x)=(a^j,x^j)_{j\in\mathbb{N}}$. Tomamos $y_n\in\phi(\alpha_n,x_n)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces la sucesión $(y_n)_n$ tiene un punto de aglomeración y en Y'' en la topología $\sigma(Y'',Y')$. Para ello basta demostrar que la sucesión $(y_n)_n$ está acotada en Y. Efectivamente, sea $U\in\mathscr{U}$, entonces existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k}\cdot C_{a_1,a_2,\dots,a_k}\subset U$. De aquí

$$\frac{1}{k}\cdot\overline{C_{a_1,a_2,\dots,a_k}}^{\sigma(Y'',Y')}\subset\overline{U}^{\sigma(Y'',Y')}\subset U^{\circ\circ}.$$

Por otra parte, para dicho $k\in\mathbb{N}$ existe $m\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq m$ se tiene que $y_n\in\varphi(x_n^k)+U^{\circ\circ}$. Puesto que $(x_n^k)_n$ converge a x^k, el conjunto $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi(x_n^k)$ es $\sigma(Y,Y')$-relativamente compacto, y de ahí acotado. Existe entonces $\rho>0$ tal que $A\subset\rho\cdot U\subset\rho U^{\circ\circ}$. Así $y_n\in(1+\rho)U^{\circ\circ}\cap Y$ para cada $n\geq m$. Por otra parte para cada y_n con $n<m$ existe $\rho_n>0$ tal que $y_n\in\rho_nU^{\circ\circ}$ tomando $\rho_0:=\text{máx}\{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_{m-1},1+\rho\}$ obtenemos que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en $\rho_0U^{\circ\circ}\cap Y$.

Veamos ahora que $y\in\Phi(\alpha,x)$ y así (y_n) tiene un punto de aglomeración para la topología $\sigma(Y,Y')$ que pertenece a $\Phi(\alpha,x)$, lo que termina la prueba de que ϕ es usco. Fijamos $k\in\mathbb{N}$. Existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para cada $n\geq N$, $a_n^j=a^j$ para cada $j=1,\dots,k$. Sea $(y_l)_{l\in L}$ una subred de $(y_n)_{n\geq N}$ convergente a y en la topología $\sigma(Y'',Y')$. Para cada $l\in L$, $y_l=z_l^k+d_l$, donde $z_l^k\in\varphi(x_l^k)$ y $d_l\in\frac{1}{k}\cdot\overline{C_{\alpha^1,\dots,\alpha^k}}$. Puesto que $(x_l^k)_{l\in L}$ es una subred de $(x_n^k)_{n\geq N}$ y $(x_n^k)_{n\geq N}$ es convergente a x^k tenemos que $(x_l^k)_{l\in L}$ converge a x^k. Por ser φ usco tenemos que $(z_l^k)_l$ tiene un punto de aglomeración z^k en $\varphi(x^k)$. Sea $(z_s^k)_{s\in S}$ una subred de $(z_l^k)_{l\in L}$ convergente a z^k. Ahora la red $(d_s)_{s\in S} = (y_s - z_s^k)_{s\in S}$ está contenida en $\frac{1}{k}\cdot\overline{C_{\alpha^1,\dots,\alpha^k}}$ y es convergente. Hemos demostrado que $y \in \varphi(x^k) + \frac{1}{k}\cdot\overline{C_{\alpha^1,\alpha^2,\dots,\alpha^k}}$. Puesto que el razonamiento es válido para cada $k \in \mathbb{N}$ obtenemos finalmente que $y \in \phi(\alpha, x)$ y la prueba acaba. □

2.8 El índice de Nagami

En [66] N. Nagami introduce la definición de Σ-espacio que ha sido ampliamente estudiada, véase por ejemplo el survey de Michael, [61], y el libro [2]. Tomando como punto de partida la noción de Σ-espacio, Hödel introduce en [44] una función cardinal que llama Σ-grado (véase la definición 2.8.9) que ha sido de relevancia para el estudio de determinadas cuestiones de Topología general. El objeto de esta sección es interpretar de forma diferente a como se había hecho hasta ahora el Σ-grado y relacionarlo con el índice de determinación $\ell\Sigma$ que hemos introducido y estudiado en este capítulo así como con versiones más generales de éste.

La definición que sigue está relacionada con la caracterización que hemos dado del índice $\ell\Sigma$ en la proposición 2.1.5, y aunque no responde a noción alguna introducida explícitamente por Nagami sí está muy relacionada e inspirada por las ideas de Nagami al estudiar Σ-espacios, véase la definición 2.8.9.

Definición 2.8.1. *Sea Y un espacio topológico completamente regular. Se define el índice de Nagami de Y, $Nag(Y)$, como el cardinal más pequeño de las familias $\mathscr{A}$ de subconjuntos cerrados en βY con la propiedad que:*

$$\bigcap\{A : y \in A, A \in \mathscr{A}\} \subset Y, \text{ para cada } y \in Y. \tag{2.22}$$

En [53, Definition 2] aparece la siguiente definición.

Definición 2.8.2. *Sea Y un subespacio de un espacio compacto Hausdorff K. Una familia de cerrados $\mathscr{A}$ en K se dice que determina Y, si para cada $y \in Y$ y cada $k \in K\setminus Y$, existe*

$A \in \mathscr{A}$ tal que $y \in A$ e $k \notin A$. Se define el índice the determinación $di_K(Y)$ de Y en K como el número cardinal

$$di_K(Y) = \aleph_0 \,\text{mín}\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \text{ familia de cerrados determinando } Y \text{ en } K\}.$$

Utilizando el lema 1.2.4 es fácil probar que $di_K(Y) = di_{K'}(Y)$ si K y K' son dos compactos tales que $Y \subset K$ e $Y \subset K'$, véase también [53, Corollary 1], y en consecuencia tiene sentido la siguiente definición:

Definición 2.8.3 ([53, Definition 3]). *El índice de determinación $di(Y)$ de un espacio topológico completamente regular Y se define como $di(Y) := di_K(Y)$ para algún (por tanto para todo) espacio compacto $K \subset Y$.*

Es fácil comprobar que si $Y \subset K$ y $\mathscr{A}$ es una familia de cerrados en K, entonces $\mathscr{A}$ determina Y si, y sólo si, $\bigcap\{A : y \in A, A \in \mathscr{A}\} \subset Y$, para cada $y \in Y$. Consecuentemente tenemos la siguiente igualdad.

Proposición 2.8.4. *Si Y es un espacio completamente regular con $Nag(Y)$ infinito, entonces $Nag(Y) = di(Y)$.*

La proposición 2.1.5 nos sirve de inspiración para relacionar el índice de Nagami y *uscos* tal y como presentamos en el siguiente resultado donde una de las implicaciones que demostramos simplifica y aclara alguno de los argumentos en la proposición 2.1.5.

Proposición 2.8.5. *Sea Y un espacio topológico completamente regular y $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe un espacio topológico X con $\mathrm{w}(X) \leq \mathfrak{m}$ y $\phi : X \to 2^Y$ usco tal que se tiene $Y = \bigcup\{\phi(\alpha) : x \in X\}$;*

(ii) *existen conjuntos I y J con $|I|, |J| \leq \mathfrak{m}$, un subespacio Σ del producto de espacios discretos I^J y una aplicación usco $\phi : \Sigma \to 2^Y$ tal que $Y = \bigcup\{\phi(\alpha) : \alpha \in \Sigma\}$;*

(iii) *$Nag(Y) \leq \mathfrak{m}$.*

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia (i)⇔(ii) es consecuencia de las proposiciones 2.1.4 y 1.6.4.

La implicación (iii)⇒(ii) es similar a la correspondiente implicación en la proposición 2.1.5. Consideremos una familia de cerrados $\mathscr{A} = (A_i)_{i \in I}$ en βY, $|I| = Nag(Y)$, satisfaciendo la propiedad exigida en la ecuación (2.22). Para cada $y \in Y$ tomamos

$$\mathfrak{n}(y) := \text{mín}\{|\mathscr{B}| : \bigcap_{B \in \mathscr{B}} B \subset Y \text{ e } y \in B, \text{ para cada } B \in \mathscr{B}, \mathscr{B} \subset \mathscr{A}\},$$

y definimos
$$\mathfrak{r} := \sup\{\mathfrak{n}(y) : y \in Y\}.$$
Tomamos J un conjunto de cardinal igual a $\mathfrak{r}$. Definimos el subconjunto de I^J dado por
$$\Sigma := \{(i_j)_{j\in J} \in I^J : \text{ existe } y \in Y \text{ tal que } y \in \bigcap_{j\in J} A_{i_j} \subset Y\}.$$
Consideramos la aplicación $\phi : \Sigma \to 2^Y$ definida por
$$\phi((i_j)_{j\in J}) = \bigcap_{j\in J} A_{i_j}.$$
Evidentemente, ϕ toma valores compactos no vacíos dentro de Y, teniéndose también que $Y = \bigcup\{\phi(\alpha) : \alpha \in \Sigma\}$. Por último demostramos que ϕ es superiormente semicontinua y para ello razonamos como en la proposición 2.1.5. Sea $(i_j)_{j\in J} \in \Sigma$ y $O \subset Y$ un conjunto abierto en Y tal que
$$\phi((i_j)_{j\in J}) = \bigcap_{j\in J} A_{i_j} \subset O. \tag{2.23}$$
Sea $O_{\beta Y} \subset \beta Y$ un conjunto abierto tal que $O_{\beta Y} \cap Y \subset O$. Como βY es compacto y los $(A_{i_j})_{j\in J}$ son cerrados en βY, de la inclusión (2.23) deducimos que existe un conjunto finito de índices $J_0 \subset J$ tal que
$$\bigcap_{j\in J_0} A_{i_j} \subset O_{\beta Y}.$$
Consideramos ahora el conjunto $V = \{(t_j)_{j\in J} \in \Sigma : t_s = j_s, s \in J_0\}$ que es un entorno abierto de $(i_j)_{j\in J}$ en Σ. Se tiene que $\phi(V) \subset O$, ya que para cada $(t_j)_{j\in J} \in V$ tenemos que
$$\phi((t_j)_{j\in J}) = \bigcap_{j\in J} A_{t_j} \subset \bigcap_{j\in J_0} A_{i_j} \subset O_{\beta_Y}$$
y por otra parte
$$\phi((t_j)_{j\in J}) \subset Y.$$
Luego $\phi((t_j)_{j\in J}) \subset Y \cap O_{\beta Y} \subset O$ y con esto acaba la prueba de esta implicación.

Veamos ahora la implicación (i)⇒(iii). Supongamos que (i) se satisface y fijemos $\mathscr{O} = \{O_i : i \in I\}$ una base de la topología de X con $|I| \leq \mathfrak{m}$. Vamos a probar que la familia $\mathscr{A} := \{\overline{\phi(O_i)}^{\beta Y} : i \in I\}$ satisface las condiciones exigidas en (iii). Efectivamente. Obsérvese primero que dado $x \in X$ la familia
$$\mathscr{U}_x := \{O_i : x \in O_i\}$$

es una base de entornos del punto x en X. Por tanto, $\phi(\mathscr{U}_x)$ es compactoide en Y. Dado $y \in Y$ tomamos $x \in X$ tal que $y \in \phi(x)$. Entonces,

$$\bigcap\{\overline{\phi(O_i)}^{\beta Y} : y \in \overline{\phi(O_i)}^{\beta Y}\} \subset \bigcap\{\overline{\phi(O_i)}^{\beta Y} : O_i \in \mathscr{U}_x\} \subset Y,$$

después del lema 1.2.4. □

De la prueba anterior se sigue el siguiente corolario.

Corolario 2.8.6. *Sea Y un espacio topológico completamente regular y $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$ cardinales infinitos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe un espacio topológico X con $\mathrm{w}(X) \leq \mathfrak{m}$, $\chi(Y) \leq \mathfrak{n}$ y $\phi : X \to 2^Y$ usco tal que se tiene $Y = \bigcup\{\phi(\alpha) : x \in X\}$;*

(ii) *existen conjuntos I y J con $|I| \leq \mathfrak{m}$, $|J| \leq \mathfrak{n}$, un subespacio $\Sigma \subset I^J$ y una aplicación usco $\phi : \Sigma \to 2^Y$ tal que $Y = \bigcup\{\phi(\alpha) : \alpha \in \Sigma\}$;*

(iii) *existe una familia de conjuntos cerrados $\mathscr{A} = \{A_i : i \in I\}$ en βY, $|I| \leq \mathfrak{m}$, tal que para cada $y \in Y$ existe $J \subset I$ con $|J| \leq \mathfrak{n}$ tal que $y \in \bigcap_{j \in J} A_j \subset Y$.*

Cuando ponemos $\mathfrak{n} = \aleph_0$ en el corolario anterior lo que obtenemos es la proposición 2.1.5: téngase en cuenta que como ya se comentó en la página 50, en la definición de $\ell\Sigma$ podemos utilizar indistintamente espacios métricos o espacios que satisfacen el primer axioma de numerabilidad. El fijar o no el carácter $\chi(X)$ explica la gran diferencia entre $\ell\Sigma$ y el índice de Nagami.

Corolario 2.8.7. *Sea Y un espacio topológico completamente regular. Se tienen las siguientes desigualdades:*

(i) $Nag(Y) \leq \mathrm{w}(Y)$;

(ii) $Nag(Y) \leq \ell\Sigma(Y)$.

Obsérvese que si $\ell\Sigma(Y)$ es numerable, entonces $Nag(Y) = \ell\Sigma(Y)$ y en este caso Y es numerablemente determinado. En general, las desigualdades (i) *y* (ii) *pueden ser estrictas.*

DEMOSTRACIÓN: Ambas propiedades (i) y (ii) se siguen de la propiedad (i) en la proposición 2.8.5 y de la definición de $\ell\Sigma(Y)$ que dimos en 2.1.1.

Para ver que la desigualdad (i) puede ser estricta basta considerar $Y = (X, \sigma(X, X^*))$ un espacio de Banach de dimensión infinita reflexivo con su topología débil: en este caso $Nag(Y) = \ell\Sigma(Y) = \aleph_0$ y $\mathrm{w}(Y) > \aleph_0$ dado que Y no puede ser metrizable.

Para ver que la desigualdad (ii) puede ser estricta consideramos el ejemplo 2.3.12 donde se exhibe un espacio $Y \subset \beta\mathbb{N}$ que verifica que $\mathrm{w}(Y) < \ell\Sigma(Y)$. Combinando las desigualdades (i) y (ii) obtenemos

$$Nag(Y) \leq \mathrm{w}(Y) < \ell\Sigma(Y),$$

y así acaba la prueba. $\square$

En la proposición que sigue resumimos algunas propiedades del índice de Nagami.

Proposición 2.8.8. *En la clase de espacios topológicos completamente regulares se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *si Y es un espacio topológico y $Z \subset Y$ un subespacio cerrado, entonces se tiene $Nag(Z) \leq Nag(Y)$;*

(ii) *si $\mathfrak{m}$ es un cardinal infinito e $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos tales que $Nag(Y_i) \leq \mathfrak{m}$ y $|I| \leq \mathfrak{m}$, entonces*

$$Nag(\prod_{i\in I} Y_i) \leq \mathfrak{m};$$

(iii) *si Y y Z son espacios topológicos y $\phi : Y \to 2^Z$ una aplicación usco para la que $Z = \cup\{\phi(y) : y \in Y\}$, entonces $Nag(Z) \leq Nag(Y)$;*

(iv) *sea (Y,τ) un espacio topológico y $\mathscr{G}$ una topología en Y más gruesa que τ; entonces*

$$d(Y,\tau) \leq \max\{Nag(Y,\tau), \mathrm{nw}(Y,\mathscr{G})\};$$

(v) *si $Z \subset C(K)$ un subconjunto que separa puntos de un compacto K, entonces*

$$Nag(C_p(K)) \leq Nag(Z,\tau_p);$$

(vi) *sea Y un espacio topológico; si $H \subset C_p(Y)$ es compacto, entonces H es fuertemente $Nag(Y)$-monolítico;*

(vii) *$\ell(Y) \leq Nag(Y)$ para todo espacio topológico.*

DEMOSTRACIÓN: La demostraciones de (i), (ii), (iii), (iv) y (vi) son similares a las pruebas de los resultados análogos para el índice de K-determinación: proposiciones 2.2.4, 2.2.3, 2.2.7, 2.3.14 y el teorema 2.5.4. La demostración de (v) es viable utilizando la prueba alternativa que sugerimos en la proposición 2.5.4. Por último (vii) se demuestra imitando la prueba de 2.3.4. $\square$

Hödel influido por las ideas de Nagami, [66], introduce en [43] una función cardinal que llama Σ-grado de un espacio topológico que presentamos en la definición siguiente y de la que nos ocupamos en el resto de la sección.

Si Y es un conjunto, $\mathscr{F}$ un cubrimiento de Y y $p \in Y$ escribiremos

$$C(p,\mathscr{F}) = \bigcap\{F \in \mathscr{F} : p \in F\}. \tag{2.24}$$

Obsérvese que cuando Y es un espacio topológico y $\mathscr{F}$ es un cubrimiento localmente finito, entonces las familias $\{F \in \mathscr{F} : p \in F\}$ que intervienen en (2.24) es finita.

Definición 2.8.9. *Sea Y un espacio topológico regular.*

a.- *Una* Σ-red fuerte *(en el sentido de Hödel) para el espacio Y es una colección de cubrimientos localmente finitos $\{\mathscr{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ formados por conjuntos cerrados de Y verificando las siguientes condiciones:*

(i) $C(p) = \bigcap\{C(p,\mathscr{F}_\alpha) : \alpha \in A\}$ *es compacto, para cada $p \in Y$;*

(ii) $\{C(p,\mathscr{F}_\alpha) : \alpha \in A\}$ *es una base para $C(p)$, en el sentido de que para cada conjunto abierto U tal que $C(p) \subset U$, existe $\alpha \in A$ satisfaciendo*

$$C(p,\mathscr{F}_\alpha) \subset U.$$

b.- *El Σ-grado del espacio Y, denotado como $\Sigma(Y)$, es $\aleph_0 \times \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m}$ es el cardinal más pequeño tal que Y tiene una Σ-red fuerte $\{\mathscr{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ con $|A| = \mathfrak{m}$.*

c.- *Y se dice que es un Σ-espacio fuerte (en el sentido de Nagami, [66]) si $\Sigma(Y) = \aleph_0$.*

Hemos relacionado ya el índice de Nagami con el índice de K-determinación. Mostramos ahora la relación que hay entre el índice de Nagami y el Σ-grado. Para ello necesitamos el siguiente lema de demostración elemental.

Lema 2.8.10. *Sea Y un espacio topológico y $\mathscr{F}$ un cubrimiento localmente finito de Y. Entonces $|\mathscr{F}| \leq \ell(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $y \in Y$ sea U_y un entorno abierto de y que corta a una cantidad finita de miembros de $\mathscr{F}$. Por definición de numero de Lindelöf, existe $Z \subset Y$ tal que $|Z| = \ell(Y)$ satisfaciéndose $Y = \bigcup\{U_y : y \in Z\}$. Cómo claramente se tiene

$$\mathscr{F} = \bigcup_{y \in J}\{F \in \mathscr{F} : F \cap U_y \neq \emptyset\},$$

y cada conjunto $\{F \in \mathscr{F} : F \cap U_y \neq \emptyset\}$ es finito, concluimos que $|\mathscr{F}| \leq |J| = \ell(Y)$. $\square$

Teorema 2.8.11. *Si Y es un espacio topológico completamente regular, entonces*

$$Nag(Y) = \text{máx}\{\Sigma\text{-grado}(Y), \ell(Y)\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Demostramos que $Nag(Y) \geq \Sigma$-grado(Y). Sea

$$\mathscr{F} = \{A_j : j \in J\}$$

una familia de cerrados en βY tal que $|J| = Nag(Y)$ con la propiedad (2.22). Sea $\mathscr{L}$ la familia de los subconjuntos finitos de J con la propiedad de que para cada $F \in \mathscr{L}$ se tiene que

$$A_F := \bigcap_{j \in F} A_j \cap Y \neq \emptyset$$

Para $F \in \mathscr{L}$ definimos el cubrimiento localmente finito $\mathscr{F}_F := \{A_F \cap Y, Y\}$. La familia de cubrimientos $\{\mathscr{F}_F : F \in \mathscr{L}\}$ es una Σ-red fuerte en Y. En efecto, para cada $p \in Y$ tenemos que

$$C(p) = \bigcap\{A_F : p \in A_F, F \in \mathscr{L}\} = \bigcap\{A_j : j \in J, p \in A_j\} \subset Y.$$

Así, $C(p)$ es compacto. Por otro lado, como cada A_j es cerrado en la βY, si tomamos un abierto O en βY tal que $C(p) \subset O$, la compacidad de βY implica que existe $F \in \mathscr{L}$ tal que

$$\bigcap\{A_j : j \in F, p \in A_j\} \subset O.$$

De aquí se sigue que $A_F \subset O \cap Y$, y la prueba de que $\{\mathscr{F}_F : F \in \mathscr{L}\}$ es una Σ-red fuerte en Y está completa. Como por otra parte se tiene que $Nag(Y) \geq \ell(Y)$, proposición 2.8.8, tenemos ya establecido que $Nag(Y) \geq \text{máx}\{\Sigma - \text{grado(Y)}, \ell(\text{Y})\}$.

Demostraremos ahora la otra desigualdad $Nag(Y) \leq \text{máx}\{\Sigma - \text{grado(Y)}, \ell(\text{Y})\}$. Supongamos que $\{\mathscr{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ es una Σ-red fuerte de Y. Después del lema 2.8.10 se tiene que $|\mathscr{F}_\alpha| \leq \ell(Y)$ para cada $\alpha \in A$. Consideramos la familia

$$\mathscr{T} := \bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{F}_\alpha,$$

que la escribimos en la forma $\mathscr{T} = \{F_j : j \in J\}$. Es claro que $|\mathscr{T}| = |J| \leq \text{máx}\{|A|, \ell(Y)\}$. Ahora definimos la familia de las intersecciones finitas

$$\mathscr{F} := \{F \subset Y : F \neq \emptyset \text{ y existen } j_1, j_2, \ldots, j_n \in J, n \in \mathbb{N} \text{ tales que } F = \bigcap_{i=1}^{n} F_{j_i}\}.$$

El cardinal de $\mathscr{F}$ vuelve a ser menor o igual $\text{máx}\{|A|, \ell(Y)\}$. Demostraremos que para cada $p \in Y$ la familia $\mathscr{B} = \{F \in \mathscr{F} : p \in F\}$ es una base de filtro compactoide. Efectivamente:

$\mathscr{B}$ **es base de filtro.** El conjunto vacío no pertenece a $\mathscr{B}$, y dados dos elementos de $\mathscr{B}$ su intersección vuelve a ser un elemento de $\mathscr{B}$.

$\mathscr{B}$ **es compactoide.** Obsérvese que cada $C(p,\mathscr{F}_\alpha) \in \mathscr{B}$ ya que al ser $\mathscr{F}_\alpha$ localmente finita la intersección que define $C(p,\mathscr{F}_\alpha)$ es finita. Por otro lado se tiene la igualdad:

$$C(\mathscr{B}) = \bigcap_{F\in\mathscr{B}} F = \bigcap_{\alpha\in A} C(p,\mathscr{F}_\alpha) = C(p), \tag{2.25}$$

Al ser Σ-red fuerte, y por definición, se tiene, por un lado, que $C(p)$ es compacto, y, por otro que para cada abierto $U \subset Y$ tal que $C(p) \subset U$ existe $\alpha \in A$ tal que $C(p,\mathscr{F}_\alpha) \subset U$. Esto prueba que $\mathscr{B}$ es compactoide.

Utilizando el lema 1.2.4 tenemos que

$$\bigcap\{\overline{F}^{\beta Y} : F \in \mathscr{B}\} = \bigcap\{F : F \in \mathscr{B}\} \subset Y.$$

De aquí la familia $\{\overline{F}^{\beta Y} : F \in \mathscr{F}\}$ verifica

$$\bigcap\{\overline{F}^{\beta Y} : p \in \overline{F}^{\beta Y}, F \in \mathscr{F}\} \subset \bigcap\{\overline{F}^{\beta Y} : p \in F, F \in \mathscr{F}\} \subset \bigcap\{\overline{F}^{\beta Y} : F \in \mathscr{B}\} \subset Y.$$

Esto completa la prueba de que $Nag(Y) \leq \text{máx}\{\Sigma\text{-grado}(Y), \ell(Y)\}$ y con esta desigualdad la demostración de la proposición también acaba. $\square$

Proposición 2.8.12 ([43, Proposition 4.1]). *Todo espacio topológico regular Y tiene un Σ-red fuerte $\{\mathscr{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ con $|A| \leq \mathrm{nw}(Y)$. En particular, $\Sigma\text{-grado}(Y) \leq \mathrm{nw}(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{N} = \{N_\alpha : \alpha \in A\}$ una network para Y con $|A| = \mathrm{nw}(Y)$. Para cada α en A ponemos $\mathscr{F}_\alpha = \{\overline{N_\alpha}, Y\}$. Entonces $\{\mathscr{F}_\alpha : \alpha \in A\}$ es una Σ-red fuerte. $\square$

Como corolario obtenemos una mejora de la desigualdad $Nag(Y) \leq \mathrm{w}(Y)$.

Corolario 2.8.13. *Si Y un espacio topológico completamente regular, entonces se tiene $Nag(Y) \leq \mathrm{nw}(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Después del teorema 3.8.12 de [25] tenemos que $\ell(Y) \leq \mathrm{nw}(Y)$. Por otro lado la proposición anterior nos dice que $\Sigma\text{-grado}(Y) \leq \mathrm{nw}(Y)$. Así la desigualdad $Nag(Y) \leq \mathrm{nw}(Y)$ es un consecuencia directa del teorema 2.8.11. $\square$

2.9 Aplicaciones en espacios localmente convexos

En esta sección vamos a dar algunas aplicaciones de los resultados de la sección precedente en el marco de los espacios localmente convexos. Estas aplicaciones mejoran y complementan resultados antiguos obtenidos en [15] y resultados muy recientes demostrados en [9].

Siguiendo a [9], para un cardinal infinito $\mathfrak{m}$, denotamos por $\mathscr{G}_{\mathfrak{m}}$ la clase de espacios localmente convexos E de carácter menor o igual que $\mathfrak{m}$. En otras palabras $\mathscr{G}_{\mathfrak{m}}$ es la clase de espacios localmente convexos que tienen una base de entornos del origen de cardinal $\mathfrak{m}$. Obsérvese que $\mathscr{G}_{\aleph_0}$ es la clase de espacios localmente convexos metrizables.

En los espacios de la clase $\mathscr{G}_{\mathfrak{m}}$ obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.9.1. *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito y (E,τ) un espacio localmente convexo perteneciente a la clase $\mathscr{G}_{\mathfrak{m}}$. Entonces:*

$$Nag(E',\sigma(E',E)) \leq \mathfrak{m}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathscr{B}$ una base de entornos del origen en τ tal que $|B| \leq \mathfrak{m}$. Consideremos el espacio $(\mathscr{B},\tau_d)$ cuyos elementos son entornos del origen en $\mathscr{B}$ y la topología τ_d es la discreta. Definimos

$$\begin{array}{rcl} \phi : (\mathscr{B},\tau_d) & \to & 2^{(E',\sigma(E',E))} \\ B & \to & B^\circ = \left\{ f \in E' : |f(x)| \leq 1 \text{ para cada } x \in B \right\} \end{array}$$

Entonces:

(i) B° es compacto, por el teorema de Alaoglu [54, pág. 248].

(ii) $E' = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B^\circ$.

(iii) ϕ es superiormente semicontinua. La demostración de este hecho resulta obvia dado que en el espacio $\mathscr{B}$ manejamos la topología discreta.

De aquí, basta observar que $\mathrm{w}(\mathscr{B},\tau_d) \leq |\mathscr{B}| \leq \mathfrak{m}$, para obtener el resultado buscado. □

La proposición que sigue complementa el teorema 4.2 de [9].

Proposición 2.9.2. *Sea $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito, S un conjunto con $|S| \leq \mathfrak{m}$ y $(E_s,\tau_s)_{s\in S}$ una familia de espacios locamente convexos en $\mathscr{G}_{\mathfrak{m}}$. Sea $\{f_s : E_s \to E\}_{s\in S}$ una familia de aplicaciones lineales y $(E,\tau) = \sum_{s\in S} f_s(E_s,\tau_s)$ la envoltura localmente convexa de $f_s(E_s,\tau_s)$. Entonces*

(i) $Nag(E',\sigma(E',E)) \leq \mathfrak{m}$.
(ii) $t(C_p(E',\sigma(E',E))) \leq \mathfrak{m}$ *y los subconjuntos compactos de* $C_p(E',\sigma(E',E))$ *son fuertemente* $Nag(E',\sigma(E',E))$*-monolíticos.*

DEMOSTRACIÓN: En [54, 22.2.2, 22.3.2 y pág. 287] se demuestra que $(E',\sigma(E',E))$ es isomórficamente homeomorfo a un subespacio cerrado de $\prod_{s\in S}(E'_s,\sigma(E'_s,E_s))$. Después del lema 2.9.1, $Nag(E'_s,\sigma(E'_s,E_s)) \leq \mathfrak{m}$ y puesto que $|S| \leq \mathfrak{m}$, tenemos, por la proposición 2.8.8, que

$$Nag(E',\sigma(E',E)) \leq \mathfrak{m}.$$

Ahora (ii) se deduce de (i) utilizando el teorema 2.5.6 y la proposición 2.8.8. □

En particular para $\mathfrak{m} = \aleph_0$ la proposición anterior conduce al siguiente corolario.

Corolario 2.9.3. *Sea* $(E,\mathfrak{T}) = \text{lím}(E_n,\mathfrak{T}_n)$ *el límite inductivo de una sucesión de espacios localmente convexos metrizables. Entonces:*

(i) $(E',\sigma(E',E))$ *es numerablemente determinado;*
(ii) $(E,\sigma(E,E'))$ *es angélico;*
(iii) *los subconjuntos compactos separables de* $(E,\sigma(E,E'))$ *son* $\sigma(E,E')$*-metrizables;*
(iv) $t(E,\sigma(E,E') = \aleph_0$.

DEMOSTRACIÓN: La afirmación (i) se sigue de la proposición anterior, apartado (i), teniendo en cuenta que en este caso $Nag(E',\sigma(E',E)) = \ell\Sigma(E',\sigma(E',E)) = \aleph_o$, después del corolario 2.8.7. La afirmación (ii) se sigue del corolario 2.6.9 que nos garantiza que $C_p(E',\sigma(E',E))$ es un espacio angélico teniendo en cuenta que $(E,\sigma(E,E'))$ se puede mirar como subespacio suyo y que la angelicidad se conserva por subespacios. La propiedad (iii) se sigue de las observaciones anteriores y del corolario 2.5.5. Por último, la propiedad (iv) es consecuencia directa del corolario 2.5.7. □

Hacemos notar que las propiedades (i), (ii) y (iii) fueron demostradas con técnicas distintas en los artículos [15, 14] y [69]. Comentamos también que la afirmación en (iv) es una mejora del clásico resultado de Kaplanski que establece que todo espacio localmente convexo metrizable la topología débil tiene *tightness* numerable, véase [54, §24.1.6].

2.10 Aplicaciones a espacios uniformes

Como aplicación de resultados de secciones anteriores establecemos en esta sección el teorema que sigue que nos permite dar estimaciones sobre el peso de los subconjuntos precompactos en espacios uniformes. Este resultado mejora uno de los resultados centrales del artículo [14] que nosotros establecemos aquí como corolario 2.10.2.

Teorema 2.10.1. *Sea $(Y,\mathfrak{U})$ un espacio uniforme con una base para la uniformidad dada por $\mathscr{B}_{\mathfrak{U}} = \{N_K : K \in \mathscr{K}(M)\}$, donde M es un espacio métrico de peso infinito y $\mathscr{K}(M)$ el retículo de los compactos de M, satisfaciendo*

$$N_{K_1} \subset N_{K_2} \text{ si } K_2 \subset K_1. \tag{2.26}$$

Entonces para cada subconjunto precompacto K de $(Y,\mathfrak{U})$ se tiene que

$$\mathrm{w}(K) \leq \mathrm{w}(M).$$

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente realizar la prueba para conjuntos compactos, ya que en el caso de los precompactos basta considerar la complección del espacio. Sean K un compacto en $(Y,\mathfrak{U})$ y $(\mathscr{K}(M),d_H)$ el retículo de los compactos de M con la métrica Hausdorff, como sabemos $\mathrm{w}(\mathscr{K}(M),d_H) = \mathrm{w}(M)$, después de 1.6.10. Definimos la aplicación φ definida en $\mathbb{N}\times(\mathscr{K}(M),d_H)^{\mathbb{N}}$ con valores en $2^{C(K)}$ dada por:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{N}\times(\mathscr{K}(M),d_H)^{\mathbb{N}} & \to & 2^{C(K)} \\ (m,(K_n)_n) & \to & A_{(m,(K_n)_n)} \end{array}$$

donde

$$A_{(m,(K_n)_n)} := \{ f \in C(K) : \|f\|_\infty \leq m, |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{n}, (x,y) \in (K\times K)\cap N_{K_n}\}.$$

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a α en el espacio producto $\mathbb{N}\times\mathscr{K}(M)^{\mathbb{N}}$ donde $\alpha_n = (m_n,(K_j^n)_{j\in\mathbb{N}})$ para cada $n\in\mathbb{N}$ y $\alpha = (m,(K_j)_{j\in\mathbb{N}})$. Definimos

$$r := \max\{m_n : n\in\mathbb{N}\}$$

y $L_n := K_n \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} K_n^j$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Después del corolario 1.6.7 el conjunto L_n es compacto para cada $n\in\mathbb{N}$ puesto que $(K_n^j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge en la distancia Hausdorff a K_n. Definimos $\beta := (r,(L_n)_n)$. Entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi(\alpha_n) \subset \varphi(\beta).$$

Por la propia definición el conjunto $A_{(m,(K_n)_n)}$ es acotado y cerrado para la norma del supremo y uniformemente equicontinuo. De aquí, por el teorema de Ascoli [52, pág. 243], se sigue que $A_{(m,(K_n)_n)}$ es un subconjunto compacto de $(C(K),\|\cdot\|)_\infty)$. Por otra parte $\varphi(\mathbb{N}\times\mathscr{K}(M)^{\mathbb{N}}) = C(K)$, ya que cada función continua definida en un compacto es acotada y uniformemente continua. Así, sea $m\in\mathbb{N}$ tal que $\|f\|_\infty \leq m$ y para cada $n\in\mathbb{N}$ tomamos N_{K_n} tal que $|f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{n}$ para cada $(x,y)\in(K\times K)\cap N_{K_n}$, entonces $f\in\varphi(m,(K_n)_n)$. Ahora, por el teorema 1.6.1 existe una aplicación $\phi:\mathbb{N}\times(\mathscr{K}(M),d_H)^{\mathbb{N}}\to 2^{(C(K),\|\cdot\|_\infty)}$ usco tal que $\varphi(\alpha)\subset\phi(\alpha)$ para cada $\alpha\in\mathbb{N}\times\mathscr{K}(M)^{\mathbb{N}}$, y como

$$\phi(\mathbb{N}\times\mathscr{K}(M)^{\mathbb{N}}) = C(K),$$

entonces

$$\mathrm{w}(K) = d(C(K),\|\cdot\|_\infty) = \ell\Sigma(C(K),\|\cdot\|_\infty) \leq \mathrm{w}(M),$$

donde la segunda igualdad viene dada por la proposición 2.3.5, y la prueba acaba. □

Corolario 2.10.2 (Cascales-Orihuela,[14]). *Sea $(Y,\mathfrak{U})$ un espacio uniforme tal que la uniformidad $\mathfrak{U}$ tiene una base $\mathscr{B}_{\mathfrak{U}} = \left\{N_\alpha : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right\}$ satisfaciendo:*

$$N_\beta \subset N_\alpha \textit{ si } \alpha\leq\beta \textit{ siendo } \alpha,\beta\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Entonces cada subconjunto precompacto K de $(Y,\mathfrak{U})$ es metrizable.

DEMOSTRACIÓN: Por la misma razón argumentada en la prueba del teorema 2.10.1 es suficiente demostrar el resultado para conjuntos compactos de Y. Consideramos $\mathbb{N}$ dotado de la topología discreta y $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de la topología producto. Sea $K\subset\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un compacto y sea $\pi_n:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{N}$ la proyección sobre la n-ésima coordenada. Puesto que K es compacto y π_n es continua para cada $n\in\mathbb{N}$, se sigue que $\pi_n(K)\subset\mathbb{N}$ es un subconjunto compacto y, por tanto, finito. Definimos $a_n := \text{máx}\{\pi_n(k) : k\in K\}$ y $\alpha(K) := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Se tiene entonces que si K_1,K_2 son compactos en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $K_1\subset K_2$, entonces $\alpha(K_1)\leq\alpha(K_2)$ ya que

$$\text{máx}\{\pi_n(k) : k\in K_1\} \leq \text{máx}\{\pi_n(k) : k\in K_2\}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Definimos $N_K := N_{\alpha(K)}$. Por otra parte la familia $\{N_K : K\in\mathscr{K}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\}$ es una base para la uniformidad $\mathfrak{U}$, ya que

$$\{N_\alpha : \alpha\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\} \subset \{N_K : K\in\mathscr{K}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})\}.$$

Utilizando ahora el teorema 2.10.1 se sigue que $\mathrm{w}(K) \leq \mathrm{w}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \aleph_0$, y la prueba acaba. $\square$

Sea $(I_s \leq_s)_{s\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos dirigidos e $I = \prod_{s\in\mathbb{N}} I_s$ el espacio producto. Entonces I es un conjunto dirigido con el orden inducido $\leq$ dado por:

$$\alpha \leq \beta \text{ si, y sólo si } \alpha_s \leq_s \beta_s \text{ para cada } s \in \mathbb{N}, \tag{2.27}$$

donde $\alpha = (\alpha_s)_{s\in\mathbb{N}}$ y $\beta = (\beta_s)_{s\in\mathbb{N}}$. De forma similar a 2.10.1 se prueba el teorema que sigue, el cual ha sido demostrado en [9].

Teorema 2.10.3. *Sean $\mathfrak{m}$ un cardinal infinito e $(Y,\mathfrak{U})$ un espacio uniforme tal que la uniformidad $\mathfrak{U}$ tiene una base $\mathscr{B}_{\mathfrak{U}} = \{N_\alpha : \alpha \in \prod_{s\in\mathbb{N}} I_s\}$, donde $(I_s, \leq_s)$ es un conjunto dirigido con $|I_s| \leq \mathfrak{m}$ para cada $s \in \mathbb{N}$, satisfaciendo:*

$$N_\beta \subset N_\alpha \textit{ si } \alpha \leq \beta, \textit{ siendo } \alpha, \beta \in \prod_{s\in\mathbb{N}} I_s. \tag{2.28}$$

Entonces para cada subconjunto precompacto, K, de $(Y,\mathfrak{U})$ se verifica que

$$\mathrm{w}(K) \leq \mathfrak{m}.$$

DEMOSTRACIÓN: La prueba es similar a 2.10.1. Sólo probaremos el resultado para compactos $K \subset Y$. Definimos $J_1 := \mathbb{N}$ dotado de la topología discreta y con su orden natural y para $n \geq 2$ tomamos $J_n := \prod_{s\in\mathbb{N}} I_s$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n es un conjunto dirigido por el orden inducido, véase (2.27), y lo dotamos de la topología producto considerando en I_s topología discreta para cada $s \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio

$$X := \prod_{n\in\mathbb{N}} J_n,$$

con la topología producto. Por la proposición 2.2.1, $\mathrm{w}(X) \leq \mathfrak{m}$. Definimos la aplicación $\varphi : X \to 2^{C(K)}$, dada por

$$\varphi(x) = \{ f \in C(K) : \|f\|_\infty \leq m \text{ y } |f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{n} \text{ si } (s,t) \in (K \times K) \cap N_{\alpha_n}, n \in \mathbb{N}\}$$

para cada $x = (m, (\alpha_n)_n) \in X$. Utilizando los mismos argumentos que en la prueba del teorema 2.10.1 se demuestra que estamos en las condiciones del teorema 1.6.1, de donde se sigue que existe una aplicación $\phi : X \to 2^{C(K)}$ usco con la propiedad

$$\varphi(x) \subset \phi(x)$$

para cada $x \in X$ y tal que $C(K) = \bigcup \{\phi(x) : x \in X\}$. Por tanto

$$\mathrm{w}(K) = d(C(K), \|\cdot\|_\infty) = \ell\Sigma(C(K), \|\cdot\|_\infty) \leq \mathrm{w}(X) \leq \mathfrak{m}.$$

$\square$

2.11 Espacios sin compactos perfectos

En la sección 2.6 hemos dado una prueba de la angelicidad del espacio $C_p(Y)$ para Y, en particular, un espacio K-analítico. Hay dos formas de mejorar este resultado de angelicidad:

Mejora cualitativa: una posible mejora es tratar de ver si el hecho de que los cierres de los subconjuntos relativamente compactos sean accesibles por sucesiones se pue- de llevar hasta el punto de que lo sean los cierres de todos los subconjuntos de $(C(Y), \tau_p)$.

Mejora cuantitativa: otra posible mejora es tratar de ver si para espacios de funciones mas grandes que $C(Y)$, por ejemplo, para el espacio de las funciones de la primera clase de Baire en Y, $B_1(Y)$, todavía es verdad que $(B_1(Y), \tau_p(Y))$ es angélico.

En esta sección nos ocupamos de estas cuestiones, y al hacerlo damos una prueba alternativa, más simple, de un muy reciente resultado de Cascales y Namioka en [10, Theorem 4.1 and Corollary 4.2] y mejoramos propiamente un resultado de Kąkol y López-Pellicer en [49]. Veremos cómo, el exigir que para nuestro espacio K-analítico Y pueda mejorarse la noción de *angelicidad* para $(C(Y), \tau_p)$, en los términos expuestos anteriormente, conduce a que Y no puede contener compactos perfectos.

La imposibilidad de que los espacios del tipo $B_1(Y)$ sean angélicos para Y K-analítico la pone de manifiesto el siguiente ejemplo debido a Bourgain, Fremlin y Talagrand, [6], que incluso muestra que esto no es así ni incluso espacios del tipo $(B_1(K), \tau_p)$ con K compacto disperso.

Ejemplo 2.11.1. *Sea $X = [0, \omega_1]$, donde ω_1 es el primer ordinal no numerable, dotado de la topología del orden, con la cual X es un espacio topológico compacto. Sea*

$$A = \{x^* \in C(X) : \|x^*\|_\infty \leq 1\}.$$

Entonces

(i) *A es relativamente sucesionalmente compacto en $B_1(X)$.*

(ii) *A no es relativamente compacto en $B_1(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Después de [33, pág. 75], el espacio de las funciones continuas sobre X viene dado por

$$C(X) = \{x^* \in \mathbb{R}^X : \text{ existe } t \in [0, \omega_1) \text{ tal que } x^*(\xi) = x^*(\omega_1) \text{ para cada } \xi \geq t\}.$$

Demostramos (i). Sea $(x_n^*)_n$ una sucesión en A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n < \omega_1$ tal que x_n^* restringida a $[t_n, \omega_1]$ es constante. Tomamos $t_0 := \max\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Después de [33, 5.12, pág. 74], tenemos que $t_0 < \omega_1$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n^* es constante, digamos igual a r_n, en $[t_0, \omega_1]$. Como $(r_n)_n$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ acotada, podemos tomar una subsucesión $(r_{n_k})_k$ convergente. Consideramos el conjunto numerable $D = [0, t_0]$ que es numerable. La sucesión $(x_{n_k}^*|_D)_k$ está contenida en $[-1, 1]^D$ que es un espacio metrizable, así $x_{n_k}^*|_D$ tiene una subsucesión convergente, y de aquí se obtiene que A es relativamente sucesionalmente compacto.

Para ver (ii) basta observar que

$$A \subsetneq \{x^* \in B_1(X) : \|x^*\|_\infty \leq 1\} \subsetneq [-1, 1]^X,$$

siendo A denso en $([-1, 1]^X, \tau_p)$. Si A fuese relativamente compacto en $B_1(X)$ se tendría que el cierre de A en $([-1, 1]^X, \tau_p)$ debería satisfacer $\overline{A} \subset B_1(X)$, con lo que se tendría

$$\{x^* \in B_1(X) : \|x^*\|_\infty \leq 1\} = [-1, 1]^X,$$

que proporciona la contradicción que termina la prueba. □

La siguiente es una noción acuñada en topología y utilizada con profusión en análisis y topología.

Definición 2.11.2. *Un espacio topológico Y se dice que es un espacio* Fréchet-Urysohn *si para cada subconjunto A de Y y para todo $y \in \overline{A}$ existe una sucesión $(y_n)_n$ en A que converge a y.*

Los espacios métricos son espacios Fréchet-Urysohn pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, si Γ es un conjunto no numerable y

$$\Sigma(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^\Gamma : \text{sop}(x) \text{ es numerable}\},$$

es conocido que $(\Sigma(\Gamma), \tau_p)$ is Fréchet-Urysohn, [68], pero no es metrizable (no satisface de hecho el Primer Axioma de Numerabilidad). Para una amplia clase de espacios localmente convexos ha sido probado recientemente que las propiedades de metrizabilidad y Fréchet-Urysohn son, sin embargo, equivalentes, [8]. Una generalización de los espacios Fréchet-Urysohn la constituyen los espacios secuenciales: Y es un espacio topológico *secuencial* si, y sólo si, para cada conjunto no cerrado $A \subset Y$ existe una sucesión en A que converge a un punto de $Y \setminus A$, véase [2, p. 51]. Los espacios secuenciales forman una subclase importante de los k-espacios, véase la definición 1.4.3. Fue establecido por Pytkeev [72] y por Gerlits y Nagy [32], en 1982, que:

Teorema 2.11.3. *Para un espacio completamente regular Y las propiedades que siguen son equivalentes.*

(i) $(C(Y), \tau_p)$ *es Fréchet-Urysohn;*
(ii) $(C(Y), \tau_p)$ *es secuencial;*
(iii) $(C(Y), \tau_p)$ *es k-espacio*

En el caso en el que $Y = K$ es un compacto R. Meyer estableció en un muy bonito trabajo, [60], que las propiedades anteriores son equivalentes a:

(iv) *Y es disperso,*

Véase también [31] y [72]. La sección está dedicada a demostrar el teorema que sigue, que relaciona los propiedades de arriba en una situación mucho más general que la de los compactos dispersos y aparece como Theorem 4.1 y Corollary 4.2 en [10]: nuestra prueba es distinta, y en algunas implicaciones bastante más simple que la original de [10].

Teorema 2.11.4. *Sea Y un espacio K-analítico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Y es σ-disperso;*
(ii) *Y no contiene conjuntos compactos perfectos;*
(iii) *para cada subconjunto numerable A de $C(Y)$, la clausura $\overline{A}$ en $(\mathbb{R}^X, \tau_p)$ es metrizable con la topología inducida;*
(iv) $(C(Y), \tau_p)$ *es Fréchet-Urysohn;*
(v) $(C(Y), \tau_p)$ *es secuencial;*
(vi) $(C(Y), \tau_p)$ *es un k-espacio;*
(vii) $(C(Y), \tau_p)$ *es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio.*

La prueba completa del teorema anterior se reúne en la página 114, y antes de llegar a ella necesitamos unos lemas de carácter técnico que pueden tener interés por sí mismos. Aislamos también como teorema 2.11.8 una de las implicaciones del teorema anterior que se satisface en general sin necesidad de la hipótesis de K-analiticidad.

Empezamos por el siguiente lema.

Lema 2.11.5. *Sean Y y Z espacios topológicos y $f : Y \to Z$ una aplicación continua, abierta y suprayectiva. Si Y es $k_{\mathbb{R}}$-espacio entonces Z es $k_{\mathbb{R}}$-espacio.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $g : Z \to \mathbb{R}$ una función tal que para cada compacto $K' \subset Z$ la restricción $g_{|K'} : K' \to \mathbb{R}$ es continua. La aplicación $g \circ f : Y \to \mathbb{R}$ es continua. Efectivamente, sea K un compacto en Y, entonces

$$(g \circ f)_{|K} = g_{|f(K)} \circ f_K.$$

Ahora, por ser f continua, el subconjunto $f(K)$ es compacto en Z, y por tanto la restricción $g_{|f(K)} : f(K) \to \mathbb{R}$ es continua. Luego, la restricción $(g \circ f)_{|K}$ es continua para cada K compacto en Y. Ahora por ser Y un $k_{\mathbb{R}}$-espacio obtenemos que $g \circ f$ es continua.

Demostramos ahora que g es continua utilizando que $g \circ f$ lo es y que f es abierta. Sea $z \in Z$. Como f es suprayectiva, existe $y \in Y$ tal que $f(y) = z$. Fijamos $\varepsilon > 0$, entonces, puesto que $g \circ f$, es continua existe un entorno abierto U_y de y, tal que

$$|g \circ f(y) - g \circ f(y')| < \varepsilon \text{ para cada } y' \in U_y.$$

Como f es abierta $f(U_y)$ es un entorno abierto de $z \in Z$ y para cada $z' \in f(U_x)$ tenemos que

$$\left|g(z) - g(z')\right| < \varepsilon,$$

finalizando la prueba. □

Lema 2.11.6. *Sea Y un espacio topológico completamente regular y $K \subset Y$ un conjunto compacto. Entonces*

$$\begin{array}{ccc} (C(Y), \tau_p(Y)) & \xrightarrow{\Phi} & (C(K), \tau_p(K)) \\ f & \to & f_{|K} \end{array}$$

es una aplicación continua, abierta y suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN: Φ es claramente continua. El hecho de que Φ es suprayectiva se sigue del teorema de Tietze, [51, Ejercicio O, p. 275]. Efectivamente, sea $g : K \to \mathbb{R}$ un elemento de $C(K)$. Como Y es completamente regular podemos considerar la compactificación de Stone-Čech de Y, βY. Entonces el teorema de Tietze aplicado a K y g en el espacio normal βY nos proporciona una extensión continua de g, $\tilde{g}$ definida en βY. Así, $\tilde{g}_{|Y}$ es continua y también es una extensión de g. Ahora $\Phi(\tilde{g}_{|Y}) = g$.

Veamos para terminar que Φ es abierta [2, Proposition 0.4.1]. Consideramos un conjunto abierto de $(C(Y), \tau_p)$ dado por

$$W(f, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon) = \{g \in C(Y) : |f(y_i) - g(y_i)| < \varepsilon, i = 1, \ldots, k\}.$$

Podemos suponer que $y_1, \ldots, y_l \in K$ e $y_{l+1}, \ldots, y_k \in Y \setminus K$, $0 \leq l \leq k$. Claramente se tiene

$$W(f, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon) \subset W(\Phi(f), y_1, \ldots, y_l, \varepsilon) \cap \Phi(C(Y)).$$

Demostramos ahora que

$$\Phi(W(f, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)) = W(\Phi(f), y_1, \ldots, y_l, \varepsilon) \cap \Phi(C(Y)),$$

lo cual implica que el conjunto $W(\Phi(f), y_1, \ldots, y_l, \varepsilon)$ es abierto en $\Phi(C(Y)) = C(K)$ y de ahí se obtiene que la aplicación $\Phi : (C(Y), \tau_p) \to (C(K), \tau_p)$ es abierta.

Sea $g \in \Phi(C(Y))$ y $|g(y_i) - \Phi(f)(y_i)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, l$. Fijamos $g_1 \in C(Y)$ tal que $\Phi(g_1) = g$. Como Y es completamente regular, K es cerrado en Y, y se tiene

$$\{y_{l+1}, \ldots, y_k\} \subset Y \setminus K,$$

existe una función $\psi \in C(Y)$ tal que

$$\psi(K) = \{0\} \text{ y } \psi(y_j) = f(y_j) - g_1(y_j), j = l+1, \ldots, k.$$

Si tomamos $h = \psi + g_1$, es claro que $h \in W(f, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)$ y $\Phi(h) = g$. □

Lema 2.11.7. *Si K es un compacto perfecto, entonces $(C(K), \tau_p)$ no es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio.*

DEMOSTRACIÓN: Como $(C(K, \mathbb{R}), \tau_p)$ y $(C(K, (-2, 2)), \tau_p)$ son homeomorfos, es suficiente probar que este último espacio no es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio. Como K es un compacto perfecto existe una medida de Radon μ definida en los Borelianos de K tal que $\mu(\{y\}) = 0$ para cada $y \in K$, proposición 1.4.15. Vamos a probar que la función Ψ dada por

$$\Psi(f) = \int_K f \, d\mu,$$

para cada $f \in C(K,(-2,2))$, es continua al restringirla a los subconjuntos compactos de $(C(K,(-2,2)),\tau_p)$ pero no es τ_p-continua en todo $C(K,(-2,2))$.

Sea H un subconjunto τ_p-compacto de $C(K,(-2,2))$ y tomemos C un subconjunto arbitrario de H. Para $f \in \overline{C}^{\tau_p}$, existe $(f_n)_n$ en C que converge hacia f puntualmente después del corolario 2.6.9. El teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue nos permite concluir que $\Psi(f) = \lim_n \Psi(f_n)$. De aquí se sigue que $\Psi(\overline{C}^{\tau_p}) \subset \overline{\Psi(C)}^{\tau_p}$, lo que prueba que $\Psi|_H$ is τ_p-continua.

Por otra parte Ψ no es continua en $(C(K,(-2,2)),\tau_p)$: para asegurarnos de esto basta utilizar el lema 1.4.11 que nos asegura que Ψ no es τ_p-continua al restringirla a $[0,1]^K \cap C(K,\mathbb{R})$, o lo que en este caso es lo mismo, al restringirla a $[0,1]^K \cap C(K,(-2,2))$. $\square$

Teorema 2.11.8. *Sea Y un espacio topológico. Si $(C(Y),\tau_p)$ es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio entonces Y no contiene subconjuntos compactos perfectos.*

DEMOSTRACIÓN: La prueba se hace por contradicción. Supongamos que Y contiene un compacto perfecto K. Por el lema 2.11.6, tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (C(Y),t_p(Y)) & \stackrel{\Phi}{\to} & (C(K),t_p(K)) \\ f & \to & f_{|K} \end{array}$$

es continua, abierta y suprayectiva. Como $(C(Y),\tau_p)$ es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio el lema 2.11.5 nos asegura que $(C(K),\tau_p)$ es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio llegando así a una contradicción con el lema 2.11.7. $\square$

Antes de proceder a la demostración del teorema 2.11.4 enunciamos sin demostración dos resultados más que necesitaremos e introducimos algunas nociones que también utilizaremos.

Teorema 2.11.9 (Komoullis, [55, Theorem 3.1]). *Para un espacio Y-analítico, exactamente una de los dos alternativas siguientes se da: o Y es σ-disperso o Y contiene un compacto perfecto.*

Teorema 2.11.10 ([74, Theorem 5.4.2]). *Si Y es un espacio regular K-analítico que no contiene compactos perfectos y f es una aplicación continua de Y sobre un espacio topológico Hausdorff, entonces $f(Y)$ no contiene compactos perfectos.*

Un espacio Polaco es un espacio topológico separable y metrizable en el que alguna de las métricas metrizando su topología es completa. Un espacio topológico es analítico si es imagen continua de un espacios Polaco.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.11.4:
(i)⇔(ii) Es consecuencia del teorema 2.11.9.
(ii)⇒(iii) Tomemos A un subconjunto numerable de $C(Y)$ y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : Y &\rightarrow (\mathbb{R}^A, \tau_p) \\ y &\rightarrow \phi(y) = (f(y))_{f\in A}. \end{aligned}$$

La aplicación ϕ es continua, el espacio $\mathbb{R}^A$ es Polaco y consecuentemente $\phi(Y) \subset \mathbb{R}^A$ es K-analítico en un espacio Polaco, y por ende analítico. Afirmamos que $\phi(Y)$ es numerable: si no lo fuera de acuerdo a [74, Corollary 3.5.2] contiene un subconjunto compacto perfecto. Pero entonces por el teorema 2.11.10, Y contiene un compacto perfecto lo cual es una contradicción. Sea $D \subset Y$ numerable tal que $\phi(Y) = \phi(D)$. Esta última igualdad se lee: para cada $y \in Y$ existe $d \in D$ tal que

$$f(y) = f(d) \text{ para cada } f \in A,$$

lo que claramente implica que

$$f(y) = f(d) \text{ para cada } f \in \overline{A}. \tag{2.29}$$

Si enumeramos D como $D = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ la fórmula

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f(y_n) - g(y_n)|}{1 + |f(y_n) - g(y_n)|},$$

para cada $f, g \in \overline{A}$ es una métrica en $\overline{A}$ cuya topología asociada es τ_p después de la igualdad (2.29).
(iii)⇒(iv) Como Y es K-analítico, Y^n es Lindelöf para cada $n \in \mathbb{N}$ después de la proposición 2.3.7. El teorema de Arkhangel'skii 2.5.6 nos garantiza que $t(C_p(Y))$ es numerable. Tomemos ahora $B \subset C(Y)$ y sea $y \in \overline{B}$; como $t(C_p(Y))$ es numerable, existe $A \subset B$ numerable tal que $y \in \overline{A}$. Como $\overline{A}$ es τ_p-metrizable, existe una sucesión $(y_n)_n$ en A, por lo tanto en B, que converge hacia y. Esto prueba que $(C(Y), \tau_p)$ es un espacio Fréchet-Urysohn.
Las implicaciones (iv)⇒(v)⇒(vi)⇒(vii) son evidentes.
(vii)⇒(ii) es el teorema 2.11.8, y con esto la demostración está completa. □

Nuestro teorema 2.11.4 tiene como caso particular el resultado central del artículo [49] que aparece debajo como corolario 2.11.13. De hecho podemos probar algo mejor que este corolario (corolario 2.11.12) cuya prueba requiere del siguiente lema:

Lema 2.11.11. *Sea Y un espacio hereditariamente Baire. Entonces, Y es σ-disperso si, y sólo si, Y es disperso.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ una descomposición de Y tal que Y_n es disperso para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $A \subset Y$ no vacío. Tomamos $F = \overline{A}$. Ahora F es un espacio de Baire y lo podemos expresar en la forma

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F \cap Y_n.$$

De aquí, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que el interior de $\overline{F \cap Y_n}$ es no vacío, es decir, existe un conjunto abierto

$$U \subset \overline{F \cap Y_n}. \tag{2.30}$$

De aquí $U \cap (F \cap Y_n) \neq \emptyset$, en particular $U \cap F \neq \emptyset$. Puesto que Y_n es disperso, existe $y \in U \cap F \cap Y_n$ y un entorno abierto U_y de y tal que $U_y \cap U \cap F \cap Y_n = \{y\}$. Demostraremos que

$$U_y \cap U \cap F = \{y\}. \tag{2.31}$$

Supongamos por contradicción que existe $y' \in U_y \cap U \cap F$, $y' \neq y$, entonces existe $U_{y'}$ entorno de y' tal que $y \notin U_{y'}$. Utilizando (2.30), se sigue que

$$(U_{y'} \cap U_y \cap U) \cap (F \cap Y_n) \neq \emptyset.$$

Pero

$$\emptyset \neq (U_{y'} \cap U_y \cap U) \cap (F \cap Y_n) \subset U_y \cap U \cap F \cap Y_n = \{y\},$$

llegando a contradicción con $y \notin U_{y'}$. Así, hemos demostrado (2.31). Ahora, puesto que $y \in F$, tenemos que $(U_y \cap U) \cap A \neq \emptyset$, es decir,

$$(U_y \cap U) \cap A = \{y\},$$

y la prueba acaba. $\square$

Como consecuencia del lema anterior podemos completar el teorema 2.11.4 como sigue:

Corolario 2.11.12. *Sea Y un espacio K-analítico y hereditariamente Baire. Todas las condiciones del teorema 2.11.4 son equivalentes a la condición:*

(viii) *Y es disperso;*

El resultado anterior extiende simultáneamente la caracterización de los espacios compactos dispersos debida a Meyer que hemos mencionado en la página 110 (véase una prueba alternativa en [11, Corolario 3.6]) y el siguiente resultado de [49].

Teorema 2.11.13 (Kakol-Lopez Pellicer, [49]). *Sea Y un espacio Lindelöf Čech-completo. Son equivalentes:*

(i) *Y es disperso;*

(ii) *$(C(Y), \tau_p)$ es un espacio Fréchet-Urysohn;*

(iii) *$(C(Y), \tau_p)$ es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio.*

DEMOSTRACIÓN: Basta utilizar el corolario 2.11.12 teniendo en cuenta que los espacios Čech-completos son hereditariamente Baire, [25, Theorem 3.9.3 y 3.9.6] □

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la hipótesis Lindelöf y Čech-completo en el teorema 2.11.13 es más restrictiva que la hipótesis K-analítico y hereditariamente Baire del corolario 2.11.12.

Ejemplo 2.11.14. *La bola unidad B_{ℓ^1} de $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ dotada con la topología débil inducida es un espacio analítico hereditariamente Baire y no Čech-completo.*

DEMOSTRACIÓN: Como $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ es separable y completo, B_{ℓ^1} con la topología inducida por $\|\cdot\|_1$ es Polaco, y consecuentemente B_{ℓ^1} con la topología débil es analítico. Por otro lado ℓ_1 tiene la propiedad de Radon-Nikodym y consecuentemente la propiedad del *punto de continuidad* (i.e. para cada conjunto acotado débil cerrado A de ℓ^1, la aplicación identidad $id : (A, \sigma(\ell^1, \ell^\infty)) \to (A, \|\cdot\|)$ tiene al menos un punto de continuidad; entonces [24, Theorem 3.13] se aplica para darnos que B_{ℓ^1} dotado de la topología débil es hereditariamente Baire. Por otro lado, si B_{ℓ^1} dotado de la topología débil fuera un espacio Čech-completo al ser separable, su dual, ℓ^∞, debería ser separable de acuerdo a [24, Lemma 3.1]. Como ℓ^∞ no es separable, las tesis del ejemplo han sido establecidas. □

3

Fragmentabilidad y σ-fragmentabilidad de aplicaciones

En el presente capítulo aportamos tres resultados fundamentales sobre aplicaciones σ-fragmentables. En el teorema 3.1.7 relacionamos estas aplicaciones con límites de aplicaciones barely-continuas a trozos en la línea del teorema de Baire para funciones de la primera clase de Baire que tiene sus predecesores en M. Raja [73], R. Hansell [40] y [42]. En el teorema 3.2.17 caracterizaremos la σ-fragmentabilidad de un espacio de Banach a través de las coordenadas de su inmersión en $c_0(\Gamma)$ que deben de tener una propiedad de σ-fragmentabilidad uniforme, que llamaremos equi-σ-fragmentabilidad, por analogía con las familias equicontinuas. Las familias equi-fragmentables coinciden con las equi-medibles de A. Grothendieck en el caso de espacios compactos. En el teorema 3.3.11 damos la versión no separable de un resultado de G. Godefroy [34] sobre fronteras ε-separables dando respuesta a una pregunta de A. Plichko [71], refinando propiedades del selector de la primera clase de Baire para la función de dualidad de un espacio de Asplund a ε-aproximaciones a dicha función de dualidad mediante aplicaciones σ-fragmentables, que de existir nos forzarán a que el espacio sea de Asplund (Teorema 3.3.12). Recogeremos de [65] los resultados necesarios para nuestro análisis de la función dualidad en 3.3, donde presentamos nuevas caracterizaciones de los espacios de Asplund.

3.1 Aplicaciones fragmentables y σ-fragmentables

La noción de fragmentabilidad utilizada en esta memoria fue introducida por primera vez por Jayne y Rogers en [46]. Siguiendo a [45], definimos el concepto de *aplicación fragmentable* y *σ-fragmentable*. En esta sección estudiamos las aplicaciones σ-fragmentables relacionándolas con las aplicaciones barely continuas a través de paso al límite y descomposiciones numerables del dominio, teorema 3.1.7, conectando así nuestro estudio con el realizado en [65] para aplicaciones σ-continuas.

Definición 3.1.1. *Sean Y un espacio topológico, (M,d) un espacio métrico. Diremos que una aplicación $f : Y \to M$ es* fragmentable *si para cada $\varepsilon > 0$ y cada subconjunto $A \subset Y$, $A \neq \emptyset$, existe un conjunto U abierto en Y, tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $d - diam(f(U \cap A)) < \varepsilon$.*

Definición 3.1.2. *Sean Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Una aplicación $f : Y \to M$ se dice que es σ-fragmentable, si para cada $\varepsilon > 0$ podemos escribir Y como una unión numerable de conjuntos $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n^{\varepsilon}$, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada subconjunto $A \subset Y_n^{\varepsilon}$ no vacío, existe un abierto U de Y tal que $U \cap A$ es no vacío y $d - diam\, f(U \cap A) < \varepsilon$.*

Observación 3.1.3. *No es restrictivo suponer que la descomposición del espacio Y que aparece en la definición precedente es una partición.*

Efectivamente, fijado $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada subconjunto $A \subset T_n$ no vacío existe un abierto U en Y tal que $A \cap U \neq \emptyset$ y $d -$ diam $f(A \cap U) < \varepsilon$. Definimos la partición $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $Y_1 := T_1$ e $Y_m := T_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} T_i$ para $m \geq 2$. Trivialmente esta partición del espacio Y verifica la misma propiedad que la descomposición inicial, ya que $Y_n \subseteq T_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$.

Siguiendo a [56, pág. 395 y 419] introducimos el concepto de aplicación *barely continua*, (ver [63]).

Definición 3.1.4. *Sean Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Diremos que una aplicación $f : Y \to M$ es* barely continua *si para cada subconjunto $A \subset Y$ cerrado no vacío, la aplicación f restringida a A tiene un punto de continuidad en A.*

La noción de *barely continuidad* también recibe el nombre de *propiedad del punto de continuidad* o abreviadamente *PC*.

Proposición 3.1.5. *Sea Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Toda aplicación $f : Y \to M$* barely continua *es fragmentable. Si además Y es hereditariamente Baire, entonces el recíproco es cierto.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $f : Y \to M$ es *barely* continua y consideremos un subconjunto $A \subset Y$ no vacío. Entonces, existe $y_0 \in \overline{A}$ tal que f es continua en y_0. De aquí, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entorno abierto U_ε de y_0 tal que $d-\operatorname{diam} f(U_\varepsilon \cap \overline{A}) < \varepsilon$. Por otra parte, puesto que $y_0 \in \overline{A}$, por definición $U_\varepsilon \cap A \neq \emptyset$. Así, obtenemos que

$$d-\operatorname{diam} f(U_\varepsilon \cap A) \leq d-\operatorname{diam} f(U_\varepsilon \cap \overline{A}) < \varepsilon.$$

Supongamos que Y es hereditariamente Baire y veamos la implicación recíproca. Sea $f : Y \to M$ una aplicación fragmentable y supongamos que f no es *barely continua*, por lo que existirá un subconjunto A cerrado en Y tal que $f_{|A}$ no tiene puntos de continuidad. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el subconjunto

$$A_n := \left\{ y \in A : \text{ para cada entorno abierto } U \text{ de } y,\, d-\operatorname{diam} f(U \cap A) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Demostramos que A_n es cerrado. Sea $(y_j)_{j\in D}$ una red en A_n convergente a y. Por ser A cerrado, se tiene que $y \in A$ y, por ser y límite de la red $(y_j)_{j\in D}$, para cada entorno abierto U de y existe $j \in D$ tal que $y_j \in U$. Ahora U es entorno de $y_j \in A_n$ y así, $d-\operatorname{diam}(U \cap A) > \frac{1}{n}$, de donde $y \in A_n$. Por otra parte, puesto que f no tiene puntos de continuidad en A es claro que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ahora, utilizando que Y es hereditariamente Baire, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ y V abierto en Y tal que $V \cap A$ es no vacío y $V \cap A \subset A_n$. Por ser f fragmentable, para $\varepsilon := \frac{1}{n}$ existe U abierto en Y tal que $U \cap (V \cap A)$ es no vacío y $d-\operatorname{diam} f(U \cap (V \cap A)) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción, puesto que si

$$y \in U \cap (V \cap A) \subset A_n,$$

entonces $U \cap V$ es un entorno abierto de y y $d-\operatorname{diam} f((U \cap V) \cap A) > \frac{1}{n}$ y la prueba acaba. $\square$

La relación entre funciones continuas y barely continuas fue puesta de manifiesto por Baire en el *Baire's Great Theorem*, ver por ejemplo [20, Theorem 4.1], referencia a la que nos remitimos para su demostración.

Teorema 3.1.6. *Sean Y un espacio métrico completo y $(M,\|\cdot\|)$ un espacio normado. Dada una aplicación $f : Y \to M$, son equivalentes:*

(i) *f es* barely continua.

(ii) *f es límite puntual de una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones continuas definidas en Y con valores en M.*

El siguiente resultado nos muestra como los conceptos de aplicación barely continua y aplicación σ-fragmentable están ahora ligados a través de paso al límite y descomposición numerable.

Teorema 3.1.7. *Sean Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Una aplicación $f : Y \to M$ es σ-fragmentable si, y sólo si, f es límite uniforme de una sucesión de funciones $\{f_n : Y \to M\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una partición numerable de Y, $(Y_m^n)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que f_n restringida a Y_m^n es barely continua para cada $m \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $f : Y \to M$ es σ-fragmentable. Fijado $n \in \mathbb{N}$ existe una partición $(Y_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ de Y tal que para cada subconjunto $A \subset Y_i^n$ no vacío existe un abierto, U de Y tal que $A\cap U \neq \emptyset$ y $d-\mathrm{diam}\, f(A\cap U) < 1/n$. Fijamos $m \in \mathbb{N}$. Para $A = Y_m^n$, existe $U_{m,0}^n$ abierto tal que $d-\mathrm{diam}\, f(U_{m,0}^n \cap Y_m^n) < 1/n$. Definimos $V_{m,0}^n := U_{m,0}^n \cap Y_m^n$. Sea η un cardinal y supongamos que hemos definido los conjuntos $(V_{m,\xi}^n)_{\xi<\eta}$. Si $Y_m^n = \bigcup_{\xi<\eta} V_{m,\xi}^n$ hemos terminado, si por el contrario $A := Y_m^n \setminus \bigcup_{\xi<\eta} V_{m,\xi}^n \neq \emptyset$, entonces existe $U_{m,\eta}^n$ abierto en Y, tal que $U_{m,\eta}^n \cap A \neq \emptyset$ y $d-\mathrm{diam}\, f(U_{m,\eta}^n \cap A) < 1/n$. Definimos $V_{m,\eta}^n := U_{m,\eta}^n \cap A$, y tendremos $d-\mathrm{diam} f(V_{m,\eta}^n) < 1/n$. El proceso acabará para algún cardinal $\eta_{n,m}$, de forma que $Y_m^n = \bigcup_{\xi<\eta_{n,m}} U_{m,\xi}^n$. Suponemos que dicho proceso se ha realizado para cada $m \in \mathbb{N}$. Para cada (m,ξ), tal que $m \in \mathbb{N}$ y $\xi < \eta_{n,m}$ escogemos un elemento $y_{m,\xi}^n \in V_{m,\xi}^n$. Definimos la aplicación $f_n : Y \to M$ dada por $f_n(y) := f(y_{m,\xi}^n)$ si $y \in V_{m,\xi}^n$. Puesto que los conjuntos $(V_{m,\xi}^n)_{m\in\mathbb{N},\xi<\eta_{n,m}}$ son disjuntos y cubren Y la aplicación f_n está bien definida para cada $n \in \mathbb{N}$ y f_n es *barely continua* restringida a Y_m^n para cada $m \in \mathbb{N}$. Efectivamente, si $A \subset Y_m^n$ es un subconjunto cerrado no vacío, definimos

$$\lambda := \mathrm{ínf}\{\xi \in [0,\eta_{n,m}) : V_{m,\xi}^n \cap A \neq \emptyset\},$$

entonces $U_{m,\lambda}^n \cap A = V_{m,\lambda}^n \cap A$ y f_n es constante en $U_{m,\lambda}^n \cap A$.

Veamos ahora que f es límite uniforme de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Existe entonces $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon}$. Demostraremos que para cada $n > n_\varepsilon$ y cada $y \in Y$ se tiene que $d(f_n(y), f(y)) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. En efecto, fijamos $n > n_\varepsilon$ y tomamos $y \in Y$. Puesto que $Y = \bigcup\{V^n_{m,\xi} : m \in \mathbb{N}, \xi < \eta_{n,m}\}$, existen $m \in \mathbb{N}$ y $\xi < \eta_{n,m}$ tales que $y \in V^n_{m,\xi}$. De aquí,

$$d(f_n(y), f(y)) = d(f(y^n_{m,\xi}), f(y)) < \frac{1}{n},$$

ya que $d - \operatorname{diam}(f(V^n_{m,\xi}) < \frac{1}{n}$. El razonamiento anterior es válido para cualquier $y \in Y$ y para cada $n > n_\varepsilon$, así hemos demostrado la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hacia f.

Recíprocamente, supongamos ahora que f es límite uniforme de una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una partición numerable $(Y^n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que f_n es *barely continua* restringida a cada Y^n_m, $m \in \mathbb{N}$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\varepsilon$ se tiene que $d(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $y \in Y$. Demostraremos que la partición numerable $(Y^{n_\varepsilon}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ cumple la condición de la definición de σ-fragmentabilidad. Sea $A \subset Y^{n_\varepsilon}_m$ un subconjunto no vacío. La aplicación f_{n_ε} es *barely continua* restringida a $Y^{n_\varepsilon}_m$ y por tanto, después de la proposición 3.1.5, afirmamos que es fragmentable. De aquí existe un abierto U en Y tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $d - \operatorname{diam} f_{n_\varepsilon}(U \cap A) < \frac{\varepsilon}{4}$. Sean $y, y' \in U \cap A$, entonces

$$\begin{aligned} d(f(y), f(y')) &\leq d(f(y), f_{n_\varepsilon}(y)) + d(f_{n_\varepsilon}(y), f_{n_\varepsilon}(y')) + d(f_{n_\varepsilon}(y'), f(y')) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $d - \operatorname{diam} f(U \cap A) < \varepsilon$ y la prueba acaba. □

Para el paso al límite es suficiente la convergencia puntual para conservar la σ-fragmentabilidad, incluso podemos afirmar lo siguiente:

Proposición 3.1.8. *Sean (Y, τ) un espacio topológico y (M, d) un espacio métrico. Si $\{f_n : Y \to M\}_{n\in\mathbb{N}}$, es una sucesión de aplicaciones σ-fragmentables y $f : Y \to M$ es una aplicación que verifica que*

$$f(y) \in \overline{\{f_n(y) : n \in \mathbb{N}\}}^d \tag{3.1}$$

para cada $y \in Y$, entonces f es σ-fragmentable.

DEMOSTRACIÓN: Fijados $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$Y_m := \left\{ y \in Y : d(f_m(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

Es obvio por la condición (3.1) que $Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$. Puesto que f_m es σ-fragmentable, existe una descomposición $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^m$ de tal manera que para cada subconjunto $A \subset Y_n^m$ no vacío existe un abierto U tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $d-\operatorname{diam} f_m(U \cap A) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ahora la familia

$$\{Y_m \cap Y_n^m : m,n \in \mathbb{N}\}$$

verifica que $Y = \bigcup_{n,m=1}^{\infty}(Y_m \cap Y_n^m)$, y para cada subconjunto $A \subset Y_m \cap Y_n^m$ no vacío existe U abierto tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $d-\operatorname{diam}(f(U \cap A)) \leq \varepsilon$. Basta para ello observar que para cada $y, y' \in U \cap A$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(f(y), f(y')) &\leq d(f(y), f_m(y)) + d(f_m(y), f_m(y')) + d(f_m(y'), f(y')) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

y así concluye la prueba. $\square$

La clase de la aplicaciones de Baire entre dos espacios métricos es la familia más pequeña de funciones que contiene a las funciones continuas y a los límites de sucesiones en la clase para la topología de convergencia puntual. El siguiente corolario es ahora inmediato.

Corolario 3.1.9. *Sea Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Una aplicación de Baire $f : Y \to M$ es σ-fragmentable.*

Cuando el rango es un espacio normado podemos utilizar también la estructura vectorial y tenemos:

Proposición 3.1.10. *Sean Y un espacio topológico y $(M, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $\{f_n : Y \to M\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones σ-fragmentables y $f : Y \to M$ una aplicación tal que*

$$f(y) \in \overline{\mathit{span}_{\mathbb{R}}\{f_n(y) : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} \text{ para cada } y \in Y,$$

entonces f es σ-fragmentable.

DEMOSTRACIÓN: El conjunto numerable de las combinaciones $\mathbb{Q}$-lineales de funciones de $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ verifica las condiciones de la proposición 3.1.8 para la aplicación f. El resultado se sigue, pues

$$\overline{\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{f_n(y) : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|} = \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{f_n(y) : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}.$$

□

Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach podemos ahora refinar en esta situación a una aproximación *débil*:

Corolario 3.1.11. *Sean Y un espacio topológico y $(M,\|\cdot\|)$ un espacio normado. Sea $\{f_n : Y \to M\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de aplicaciones σ-fragmentables y $f : Y \to M$ una aplicación tal que*

$$f(y) \in \overline{\{f_n(y) : n \in \mathbb{N}\}}^w \text{ para cada } y \in Y,$$

entonces f es σ-fragmentable.

El siguiente concepto aparece de forma implícita en [45, Corollary 7] y se ha estudiado sistemáticamente en [65] donde se analizan sus predecesores debidos a Michael, [62] y Hansell, [39].

Definición 3.1.12. *Sean Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Una aplicación $f : Y \to M$ se dice que es σ-continua si para cada $\varepsilon > 0$ existe una descomposición del espacio Y, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_{n,\varepsilon}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $y \in Y_{n,\varepsilon}$, existe un entorno abierto U de y tal que $d-diam(U \cap Y_{n,\varepsilon}) < \varepsilon$.*

Observación 3.1.13. *La observación 3.1.3 sigue siendo válida en la definición de σ-continuidad. Así, cuando una aplicación f es σ-continua no es restrictivo suponer que dicha descomposición es disjunta.*

Recordamos que una familia de subconjuntos $\{D_i : i \in I\}$ en un espacio topológico Y se dice que es *discreta* (*aislada*) si para cada punto $y \in Y$ ($y \in \bigcup\{D_i : i \in I\}$) existe un entorno abierto U de y tal que $U \cap D_i = \emptyset$ excepto quizás para un único punto $i_0 \in I$. Asimismo, diremos que la familia es σ-*discreta* (σ-*aislada*) si puede descomponerse en una unión numerable de familias discretas (aisladas).

En [65, Theorem 2.15] se demuestra que una aplicación entre espacios métricos $f : (Y,\rho) \to (M,d)$ es σ-continua si, y sólo si, para cada $y \in Y$ existe un conjunto numerable $W_y \subset Y$ tal que para cada sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a y se verifica que

$$f(y) \in \overline{\bigcup\{f(W_{y_n}) : n \in \mathbb{N}\}}^d.$$

En el lema que sigue reproducimos una de las implicaciones de dicho resultado que nos resultará esencial para la prueba del resultado principal del capítulo en la sección 3.3.

Lema 3.1.14. *Sean (Y,ρ) y (M,d) espacios métricos y $f: Y \to M$ una aplicación σ-continua. Entonces para cada $y \in Y$ existe un conjunto numerable $W_y \subset Y$ tal que para cada sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a y se verifica que*

$$f(y) \in \overline{\bigcup\{f(W_{y_n}) : n \in \mathbb{N}\}}^{d}.$$

DEMOSTRACIÓN: Encontraremos primero una base para la función f que sea σ-aislada, esto es, una familia $\mathscr{B}_0$, σ-aislada en Y, tal que para cualquier abierto U de M y cualquier y en Y con $y \in f^{-1}(U)$ tengamos algún $B \in \mathscr{B}_0$ con $y \in B \subset f^{-1}(U)$. Por el Teorema de Stone, [25, pág. 280] sabemos que existe en M una base $\mathscr{B}$ σ-discreta, es decir, $\mathscr{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la familia

$$\mathscr{B}_n = \{B^n_\xi : \xi \in [0,\xi_n)\}$$

es discreta. Definimos para cada $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ y $\xi \in [0,\xi_n)$ el conjunto

$$B^n_{\xi,p} = \{x \in B^n_\xi : B(x,\frac{1}{p}) \cap B^n_\eta = \emptyset,\ \eta \neq \xi,\ \eta \in [0,\xi_n)\}.$$

Por ser la familia $\mathscr{B}_n$ discreta tenemos que

$$B^n_\xi = \bigcup_{p=1}^{\infty} B^n_{\xi,p}.$$

Por otra parte, puesto que f es σ-continua, para cada $p \in \mathbb{N}$ existe una partición del espacio $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_{n,\frac{1}{p}}$ tal que para cada $y \in Y_{n,\frac{1}{p}}$ existe un entorno abierto V de y tal que

$$d-\mathrm{diam}(f(Y_{n,\frac{1}{p}} \cap V)) < \frac{1}{p}. \tag{3.2}$$

Para $m,n,p \in \mathbb{N}$ fijos definimos la familia

$$\{f^{-1}(B^n_{\xi,p}) \cap Y_{m,\frac{1}{p}} : \xi \in [0,\xi_n)\},$$

la cual es una familia aislada. En efecto, si $y \in f^{-1}(B^n_{\xi,p}) \cap Y_{m,\frac{1}{p}}$, y V es el entorno de y que satisface la ecuación (3.2), tenemos que

$$V \cap f^{-1}(B^n_{\eta,p}) \cap Y_{m,\frac{1}{p}} = \emptyset,$$

para cada $\eta \neq \xi$ y $\xi \in [0,\xi_n)$. Como

$$f^{-1}(B^n_\xi) = \bigcup_{m,p=1}^{\infty} f^{-1}(B^n_{\xi,p}) \cap Y_{m,\frac{1}{p}}.$$

Si consideramos ahora la familia

$$\mathscr{B}_0 := \bigcup_{m,n,p\in\mathbb{N}} \{f^{-1}(B^n_{\xi,p}) \cap Y_{m,\frac{1}{p}} : \xi \in [0,\xi_n)\},$$

tenemos una familia σ-aislada en Y tal que, para cada U abierto en M, y cada $y \in Y$ con $f(y) \in U$ existirá $B \in \mathscr{B}_0$ tal que $y \in B \subset f^{-1}(U)$ al ser $\mathscr{B}$ una base de la topología del espacio métrico M.

Para simplificar la notación denotamos $\mathscr{B}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}^0_n$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la familia $\mathscr{B}^0_n$ es aislada en Y. Con la familia $\mathscr{B}_0$ podemos encontrar ahora los conjuntos numerables W_y para cada y que satisfacen el enunciado. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in Y$ y cada $\delta > 0$ tal que la bola $B_\rho(y,\delta)$ corte en como mucho un elemento de $\mathscr{B}^0_n$ escogemos $y(n,\delta)$ en

$$B_\rho(y,\delta) \cap \bigcup\{B : B \in \mathscr{B}^0_n\}$$

cuando esta intersección es no vacía. Definimos $W_y := \{y(n,\frac{1}{p}) : n,p \in \mathbb{N}\}$ entonces demostraremos que

$$f(y) \in \overline{\bigcup\{f(W_{y_n}) : n \in \mathbb{N}\}}^d$$

cuando $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n,y) = 0$. Supongamos que $(y_n)_n$ converge a y en (Y,ρ) y fijamos $\varepsilon > 0$. Entonces existe un elemento B de $\mathscr{B}_0$ tal que $y \in B \subset f^{-1}(B_d(f(y),\varepsilon))$. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $B \in \mathscr{B}^0_n$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\rho(y,\delta)$ sólo corta el conjunto B de $\mathscr{B}^0_n$. Sea k un entero tal que $d(y_k,y) < \delta/2$, entonces $B(y_k,\delta/2) \subset B(y,\delta)$ y de aquí $B(y_k,\delta/2)$ sólo corta el conjunto B de $\mathscr{B}^0_n$ y el punto $y_k(n,\delta/2)$ ha sido definido para que se cumpla $y_k(n,\delta/2) \in B \cap B(y_k,\delta/2)$. No es restrictivo suponer que $\delta = \frac{1}{p}$ para algún entero p e $y_k(n,1/2p) \in W_{y_k}$ con $d(f(y), f(y_k(n,\frac{1}{2p}))) < \varepsilon$, ya que y e $y_k(n,\frac{1}{2p})$ pertenecen a $B \subset f^{-1}(B_d(f(y),\varepsilon)$. $\square$

Como consecuencia tenemos:

Corolario 3.1.15. *Sean (Y,ρ) y (M,d) espacios métricos y $f : Y \to M$ una aplicación σ-continua. Entonces para cada subespacio separable Z de Y, $f(Z)$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea Z un subespacio separable y $D \subset Z$ denso y numerable. Entonces utilizando el lema anterior tenemos que para cada $y \in Y$ existe W_y numerable tal que si $(y_n)_n$ es una sucesión convergente a y entonces $f(y) \in \overline{\bigcup\{f(W_{y_n}) : n \in \mathbb{N}\}}^d$. De aquí,

$$f(Z) \subset \overline{\bigcup\{W_y : y \in D\}}^d,$$

y el resultado queda probado. En efecto, por una parte $\bigcup_{y\in D} W_y$ es un conjunto numerable y para cada $y \in Y$ existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ convergente a y, de donde se sigue que $f(y) \in \overline{\bigcup\{W_{y_n} : n \in \mathbb{N}\}}$ y la prueba acaba. $\square$

Trivialmente una función σ-continua es σ-fragmentable. En [65] se demuestra que cuando el dominio (Y,τ) es hereditariamente *weakly θ-refinable*, es decir, cuando cada familia de conjuntos abiertos tiene un refinamiento σ-aislado y el espacio de llegada M es un métrico entonces cada aplicación $f : Y \to M$ σ-fragmentable es σ-continua. En particular, el resultado es cierto cuando Y es un espacio métrico, véase [65]. La prueba para el caso métrico la reproducimos aquí en dos pasos:

Proposición 3.1.16. *Sean (Y,ρ) y (M,d) espacios métricos. Si $f : Y \to M$ es fragmentable entonces f es σ-continua.*

DEMOSTRACIÓN: Fijamos $\varepsilon > 0$ y encontramos por inducción transfinita una familia de abiertos $\{U_\xi : \xi \in [0,\xi_0)\}$ en Y que cubren Y y tales que

$$d - \operatorname{diam} f(U_\xi \setminus (\bigcup_{\eta<\xi} U_\eta)) < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Definiendo $M_\xi := U_\xi \setminus (\bigcup_{\eta<\xi} U_\eta)) \neq \emptyset$ para $\xi < \xi_0$ y

$$M_\xi^n = \{x \in M_\xi : dist(x, Y \setminus U_\xi) \geq \frac{1}{n}\}$$

para $n = 1,2,\ldots,$. Observamos que $\{M_\xi^n : \xi < \xi_0\}$ es una familia aislada en (Y,ρ) siendo

$$M_\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_\xi^n. \tag{3.4}$$

De esta forma tomamos $Y_n^\varepsilon := \bigcup\{M_\xi^n : \xi < \xi_0\}$ y para $y \in Y_n^\varepsilon$ tenemos que

$$B_\rho(y, \frac{1}{n}) \cap Y_n^\varepsilon \subset M_{\xi_1}^n$$

si $y \in M_{\xi_1}^n$ con lo que $f(B_\rho(y,\frac{1}{n}) \cap Y_n^\varepsilon) \subset f(M_{\xi_1}^n) = f(U_{\xi_1} \setminus \bigcup_{\eta<\xi_1} U_\eta)$ y así tenemos $d - \operatorname{diam} f(B_\rho(y,\frac{1}{n}) \cap Y_n^\varepsilon) < \varepsilon$ por (3.3). Además, (3.4) nos asegura que $Y = \bigcup_{n=1}^\infty Y_n^\varepsilon$ ya que $\{U_\xi : \xi < \xi_0\}$ era un cubrimiento de Y. $\square$

Corolario 3.1.17. *Sea (Y,ρ) y (M,d) espacios métricos. Si $f:(Y,\rho)\to(M,d)$ es σ-fragmentable entonces f es σ-continua también.*

DEMOSTRACIÓN: El Teorema 3.1.7 nos dice que f es límite uniforme de una sucesión de funciones que serán σ-continuas por la proposición 3.1.16 y en consecuencia f será también σ-continua. En efecto, dado $\varepsilon>0$, si definimos

$$Y_n^{\varepsilon} := \{y\in Y : d(f_n(y),f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}\}$$

tendremos que $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^{\varepsilon}$ y para cada n, como f_n es σ-continua, podemos escribir $Y_n^{\varepsilon}=\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_{n,m}^{\varepsilon}$ de tal forma que para cada $y\in Y_{n,m}^{\varepsilon}$ tengamos U entorno de y en Y tal que $d-\operatorname{diam} f_n(U\cap Y_{n,m}^{\varepsilon})<\frac{\varepsilon}{3}$. De esta forma

$$Y=\bigcup_{n,m=1}^{\infty} Y_{n,m}^{\varepsilon}$$

y para cada $y\in Y_{n,m}^{\varepsilon}$, el entorno U determinado antes nos da ahora que si $z,z'\in U\cap Y_{n,m}^{\varepsilon}$ tendremos

$$\begin{aligned} d(f(z),f(z')) &\le d(f(z),f_n(z))+d(f_n(z),f_n(z'))+d(f_n(z'),f(z'))< \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \end{aligned}$$

y así, $d-\operatorname{diam} f(U\cap Y_{n,m}^{\varepsilon})<\varepsilon$, como queríamos demostrar. □

Profundizando más en este caso, el teorema 3.1.7 nos permite ahora probar el siguiente resultado [40] y [73], ver también [42].

Teorema 3.1.18. *Sean (Y,ρ) y (M,d) espacios métricos y $f:Y\to M$ una aplicación σ-fragmentable. Existen entonces funciones $f_n:Y\to M$ continuas a trozos; i.e. tales que $Y=\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m^n$ y $f_{n|Y_m^n}$ es continua $m=1,2,\dots,$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(y)=f(y)$$

uniformemente en $y\in Y$.

DEMOSTRACIÓN: El teorema 3.1.7 nos da una sucesión $\{g_n:Y\to M\}$ tales que para cada n podemos descomponer $Y=\bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m^n$ siendo $g_{n|Z_m^n}$ barely continua $m=1,2,\dots,$ y $\lim_{n\to\infty} g_n(y)=f(y)$ uniformemente en $y\in Y$. En la situación actual, cuando el dominio

Y es métrico también, el teorema a probar nos asegura que es posible conseguir, probablemente con nuevas descomposiciones de Y, el que las funciones g_n lleguen a ser continuas en los trozos de la descomposición. Veamos que esto es precisamente lo que ocurre. Las funciones g_n construidas en el teorema 3.1.7 son tales que en cada Z_m^n tenemos una familia ordenada de abiertos $\{U_{m,\eta}^n : \eta < \eta_{n,m}\}$ en Z_m^n tales que cubren Z_m^n,

$$\emptyset \neq M_{m,\gamma}^n := U_{m,\gamma}^n \setminus \bigcup\{U_{m,\beta}^n : \beta < \gamma\}, \text{ si } \gamma < \eta_{n,m}$$

y

$$d - \operatorname{diam} f(M_{m,\gamma}^n) < \frac{1}{n}$$

si $\gamma < \eta_{n,m}$, y se han definido como $g_n(y) := f(y_{m,\xi}^n)$ si $y \in M_{m,\gamma}^n$, donde $y_{m,\xi}^n$ se ha elegido de forma previa una vez realizadas las particiones $\{M_{m,\xi}^n : \xi < \eta_{n,m}\}$ de Z_m^n. Al ser (Y,ρ) un espacio métrico, las familias $\{M_{m,\xi}^n : \xi < \eta_{n,m}\}$ son σ-discretamente descomponibles; esto es podemos descomponer $M_{m,\xi}^n = \bigcup_{p=1}^{\infty} M_{m,\xi}^{n,p}$ de tal forma que

$$\{M_{m,\xi}^{n,p} : \xi < \eta_{n,m}\}$$

sea una familia discreta en Z_m^n. En efecto, tal como hicimos en la proposición 3.1.16 es suficiente definir

$$M_{m,\xi}^{n,p} := \{y \in M_{m,\xi}^n : dist(y, Y \setminus U_{m,\xi}^n) \geq \frac{1}{p}\}$$

para $p = 1, 2, \ldots,$. Ahora bien, fijamos el entero p y observamos que la discretitud de

$$\{M_{m,\xi}^{n,p} : \xi < \eta_{n,m}\}$$

nos asegura que $g_{n|Z_m^{n,p}}$ es continua para $Z_m^{n,p} := \bigcup\{M_{m,\xi}^{n,p} : \xi < \eta_{n,m}\}$ siendo además

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} Z_m^{n,p} = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup\{M_{m,\xi}^{n,p} : \xi < \eta_{n,m}\} = \bigcup\{M_{m,\xi}^n : \xi < \eta_{n,m}\} = Z_m^n.$$

En consecuencia, las funciones $g_{n|Z_m^{n,p}}$ son continuas y

$$\bigcup_{p,m=1}^{\infty} Z_m^{n,p} = \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m^n = Y$$

tal y como queríamos demostrar. $\square$

Más adelante precisamos el siguiente resultado:

Proposición 3.1.19. *Sea (Y,τ) un espacio topológico y (M,d), (Z,ρ) espacio métricos. Si $f:Y\to M$ y $g:M\to Z$ son aplicaciones σ-fragmentables, entonces la composición $g\circ f:Y\to Z$ es σ-fragmentable.*

DEMOSTRACIÓN: Por el corolario 3.1.17 g es σ-continua y dado $\varepsilon>0$ podemos descomponer $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n^{\varepsilon}$ de tal forma que para cada trozo M_n^{ε} tengamos un número positivo δ_n tal que para cada $x\in M_n^{\varepsilon}$

$$\rho-\operatorname{diam} g(B_d(x,\delta_n)\cap M_n^{\varepsilon})<\varepsilon.$$

Tenemos $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(M_n^{\varepsilon})$ y para cada δ_n, por ser f σ-fragmentable podemos descomponer $Y=\bigcup_{m=1}^{\infty}Y_m^{\delta_n}$ de forma que, para cada $m\in\mathbb{N}$ y cada subconjunto no vacío $A\subset Y_m^{\delta_n}$ tengamos un abierto U en Y con $U\cap A\neq\emptyset$ y

$$d-\operatorname{diam}(f(U\cap A))<\delta_n.$$

Haremos ahora las intersecciones

$$f^{-1}(M_n^{\varepsilon})\cap Y_m^{\delta_n}$$

para $n,m\in\mathbb{N}$ y observamos lo siguiente, si $A\subset f^{-1}(M_n^{\varepsilon})\cap Y_m^{\delta_n}$ es un conjunto no vacío sabemos que hay un abierto U en Y con $A\cap U\neq\emptyset$ y $d-\operatorname{diam}(f(A\cap U))<\delta_n$, tomando $y\in A\cap U$ tendremos $f(y)\in M_n^{\varepsilon}$ y

$$\rho-\operatorname{diam} g(B_d(f(y),\delta_n)\cap M_n^{\varepsilon})<\varepsilon,$$

de donde se sigue que $\rho-\operatorname{diam}(g(f(A\cap U))<\varepsilon$ ya que

$$f(A\cap U)\subset B_d(f(y),\delta_n)\cap M_n^{\varepsilon}.$$

Por consiguiente, la descomposición $Y=\bigcup_{n,m=1}^{\infty}f^{-1}(M_n^{\varepsilon})\cap Y_m^{\delta_n}$ nos da la condición de ε-fragmentabilidad para la composición $g\circ f$. □

La definición que sigue la encontramos en [26, pág. 82], se debe a N. Ribarska y es fundamental para la caracterización de espacios topológicos que admiten métrica fragmentando su topología.

Definición 3.1.20. *Sea (Y,τ) un espacio topológico. Una familia bien ordenada de subconjuntos de Y, $\mathscr{U}=\{U_\xi\subset Y:\xi\in[0,\xi_0)\}$, se dice que es una partición de Y relativamente abierta si se verifican las siguientes condiciones:*

(i) $Y = \bigcup_{\xi<\xi_0} U_\xi$.
(ii) U_ξ *está contenido y es relativamente abierto en* $Y \setminus \bigcup_{\eta<\xi} U_\eta$ *para cada* $\xi \in [0,\xi_0)$.

En nuestro contexto ya nos han aparecido anteriormente y resultan de utilidad para construir aplicaciones σ-fragmentables, por ejemplo:

Proposición 3.1.21. *Sea* Y *un espacio topológico y* (M,d) *un espacio métrico. Sea* $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ *una partición de* Y *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *la familia* $\mathscr{U}_n = \left\{U^n_\xi : \xi \in [0,\xi_n)\right\}$ *es una partición relativamente abierta de* Y_n*. Si* $f : Y \to M$ *es una aplicación tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\xi \in [0,\xi_n)$, $f_{|U^n_\xi}$ *es constante, entonces* f *es* σ*-fragmentable.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $\varepsilon > 0$, consideremos la partición de Y dada por $Y = \bigcup_{n=1}^\infty Y_n$. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Sea $A \subset Y_n$ no vacío. Definimos

$$\eta := \text{mín}\{\xi \in [0,\xi_n) : A \cap U^n_\xi \neq \emptyset\}.$$

Ahora $U^n_\eta \cap A$ es relativamente abierto en A y

$$d - \text{diam}(f(U^n_\eta \cap A)) = 0 < \varepsilon,$$

y la prueba acaba. □

De esta forma quedan estudiadas las propiedades fundamentales de las aplicaciones σ-fragmentables y las hemos relacionado con la aplicaciones σ-continuas y con el concepto subyacente de *barely*-continuidad o *PC* (propiedad del punto de continuidad).

3.2 Equi-fragmentabilidad de una familia de aplicaciones

Las familias equicontinuas de funciones resultan de interés en muchos aspectos del análisis matemático. Vamos ahora a desarrollar un concepto análogo cuando trabajamos con familias de funciones fragmentables.

Definición 3.2.1. *Sea Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Diremos que una familia de aplicaciones, $\mathscr{F} = \{f_j : Y \to M\}_{j\in J}$ es equi-fragmentable si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \subset Y$ no vacío, existe un abierto U en Y tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y*

$$d - diam\, f_j(U \cap A) < \varepsilon$$

para cada $j \in J$.

Esta noción estará ligada con la equicontinuidad por doquier de acuerdo a la siguiente:

Definición 3.2.2. *Sea Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Diremos que una familia de aplicaciones $\mathscr{F} = \{f_j : Y \to M\}_{j\in J}$ es equi-barely continua si para cada subconjunto $A \subset Y$ cerrado no vacío, existe $y \in A$ tal que $\mathscr{F}_{|A}$ es equi-continua en y.*

Tendremos la siguiente:

Proposición 3.2.3. *Sea Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Si*

$$\mathscr{F} = \{f_j : Y \to M\}_{j\in J}$$

es una familia de aplicaciones equi-barely-continua entonces $\mathscr{F}$ es equi-fragmentable. Si además, Y es un espacio hereditariamente Baire entonces el recíproco también es cierto.

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset Y$ un subconjunto no vacío y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $y \in \overline{A}$ tal que $\mathscr{F}_{|\overline{A}}$ es equi-continua en y. Así, existe U entorno abierto de y en Y tal que

$$d - \operatorname{diam} f_j(U \cap \overline{A}) < \varepsilon,$$

para cada $j \in J$. Ahora, puesto que $y \in \overline{A}$, $U \cap A \neq \emptyset$ y de aquí

$$d - \operatorname{diam} f_j(U \cap A) \leq d - \operatorname{diam} f_j(U \cap \overline{A}) < \varepsilon,$$

quedando la implicación en este sentido probada.

Supongamos ahora que el espacio Y es hereditariamente Baire y que la familia $\mathscr{F}$ es equi-fragmentable. Si suponemos que $\mathscr{F}$ no es equi-barely-continua, existe $A \subset Y$ cerrado no vacío tal que para cada $y \in A$, $\mathscr{F}_{|A}$ no es equi-continua en y. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} A_n := \{y \in A : \ & \text{para cada entorno abierto } U \text{ de } y \text{ existe } j \in J \text{ tal que} \\ & d - \operatorname{diam} f_j(U \cap A) > \frac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Demostramos que A_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $(y_i)_{i\in D}$ una red en A_n convergente a y. Por ser A cerrado, $y \in A$. Para cada entorno abierto U de y, existe $i \in D$ tal que $y_i \in U$. Ahora U es entorno abierto de $y_i \in A_n$, así, existe $j \in J$ tal que $d-\operatorname{diam} f_j(U \cap A) > \frac{1}{n}$, quedando demostrado que $y \in A_n$. Puesto que $\mathscr{F}_{|A}$ no es equi-continua en puntos de A tenemos la igualdad $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Como A es cerrado, entonces es de Baire, de aquí existe $n \in \mathbb{N}$ y V abierto en Y tal que $A \cap V$ es no vacío y $A \cap V \subset A_n$. Existe, por ser $\mathscr{F}$ equi-fragmentable, U abierto en Y tal que $U \cap A \cap V$ es no vacío y $d-\operatorname{diam} f_j(U \cap A \cap V) < \frac{1}{n}$ para cada $j \in J$, llegando así a una contradicción con el hecho de que $U \cap A \cap V \subset A_n$ concluyendo la prueba. □

La siguiente observación muestra la dualidad entre equi-fragmentabilidad de una familia de aplicaciones y la fragmentabilidad del dominio.

Observación 3.2.4. *Sean Y un espacio topológico, (M,d) un espacio métrico y*

$$\mathscr{F} = \{f_j : Y \to M\}_{j\in J}$$

una familia de aplicaciones. Entonces $\mathscr{F}$ es equi-fragmentable si, y sólo si, Y es fragmentable por la pseudométrica

$$\rho(y,y') := \sup\{d(f_j(y), f_j(y')) : j \in J\}$$

para cada $y,y' \in Y$.

Para aplicaciones σ-fragmentables tenemos la noción correspondiente.

Definición 3.2.5. *Sean Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Diremos que una familia de aplicaciones $\mathscr{F} = \left\{f_j : Y \to M\right\}_{j\in J}$ es* equi-σ-fragmentable *si para cada $\varepsilon > 0$ podemos escribir Y como una unión numerable de conjuntos no vacíos $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada subconjunto $A \subset Y_n$ no vacío, existe un abierto U en Y tal que $U \cap A$ es no vacío y $d-\operatorname{diam} f_j(U \cap A) < \varepsilon$ para cada $j \in J$.*

Análogamente al caso anterior tenemos:

Proposición 3.2.6. *Sean Y un espacio topológico, (M,d) un espacio métrico y*

$$\mathscr{F} = \left\{f_j : Y \to M\right\}_{j\in J}$$

una familia de aplicaciones. La familia $\mathscr{F}$ es equi-σ-fragmentable si, y sólo si, Y es σ-fragmentable por la pseudométrica

$$\rho(y,y') = \sup\{d(f_j(y), f_j(y')) : j \in J\},$$

para cada $y,y' \in Y$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathscr{F}$ es una familia equi-σ-fragmentable y veamos que Y es σ-fragmentable por la pseudométrica ρ. Fijamos $\varepsilon > 0$, entonces existe una descomposición numerable de $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $A \subset Y_n$ es no vacío, existe U abierto en Y tal que $U \cap A$ es no vacío y $d - \text{diam}(f_j(U \cap A)) < \varepsilon$ para cada $j \in J$, y de aquí,

$$\rho - \text{diam}(U \cap A) < \varepsilon.$$

Veamos la implicación en el otro sentido. Supongamos ahora Y es σ-fragmentable por ρ. Fijamos $\varepsilon > 0$. Existe una descomposición numerable de $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $A \subset Y_n$ es no vacío, existe U abierto en Y tal que $A \cap U$ es no vacío y $\rho - \text{diam}(U \cap A) < \varepsilon$, es decir $d - \text{diam}\, f_j(U \cap A) < \varepsilon$ para cada $j \in J$, y de aquí, $\mathscr{F}$ es equi-σ-fragmentable. $\square$

Proposición 3.2.7. *Sean (Y,τ) un espacio topológico hereditariamente Baire y (M,d) un espacio métrico. Cualquier familia $\mathscr{F}$ de funciones en $C(Y,M)$ que sea equi-σ-fragmentable es equi-barely-continua.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A un subconjunto cerrado no vacío de Y y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ tales que para cada n y cada subconjunto $C \subset Y_n$ no vacío, existe un abierto U de Y tal que $U \cap C \neq \emptyset$ y $d - \text{diam}\, f(U \cap A) < \varepsilon$ para cada $f \in \mathscr{F}$. Como A es de Baire y $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A \cap Y_n$ encontraremos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{A \cap Y_p}$ tiene interior no vacío en A, por consiguiente hay un abierto V de Y tal que $\emptyset \neq V \cap A \subset \overline{A \cap Y_p}$ siendo $V \cap A \cap Y_p$ denso en $V \cap A$ al ser V abierto. Como $V \cap A \cap Y_p \neq \emptyset$ debe existir un abierto U en Y tal que

$$\emptyset \neq U \cap V \cap A \cap Y_p \text{ y } d - \text{diam}(f(U \cap V \cap A \cap Y_p)) < \varepsilon$$

para cada $f \in \mathscr{F}$. Pero $U \cap V \cap A \cap Y_p$ es denso en $U \cap V \cap A$ también al ser $U \cap V$ abierto, con lo que la continuidad de las funciones $\mathscr{F}$ nos asegura que

$$d - \text{diam}(f(U \cap V \cap A)) \leq \varepsilon$$

para cada $f \in \mathscr{F}$, lo que termina la prueba teniendo en cuenta la proposición 3.2.3. $\square$

Resulta claro que uniones finitas, sumas y productos de familias $\mathscr{F} \subset [0,1]^Y$ que sean equi-σ-fragmentables seguirán siendo equi-σ-fragmentables, y que si $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^Y$ es equi-σ-fragmentable también lo será su envoltura convexa y puntualmente cerrada. Probemos, por ejemplo, la siguiente:

Proposición 3.2.8. *Sean (Y,τ) un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Si $\mathscr{F} \subset M^Y$ es equi-σ-fragmentable entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ es equi-σ-fragmentable.*

DEMOSTRACIÓN: Fijamos $\varepsilon > 0$. Puesto que $\mathscr{F}$ es equi-σ-fragmentable existe una descomposición $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^{\varepsilon/3}$ de tal manera que para cada subconjunto $A \subset Y_n$ no vacío existe un abierto U en Y tal que $U \cap A$ es no vacío y $d-\operatorname{diam}(f(U \cap A)) < \varepsilon/3$ para cada $f \in \mathscr{F}$. De aquí, si $g \in \overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$, tenemos que

$$d-\operatorname{diam}(g(U \cap A)) \leq \varepsilon.$$

Efectivamente, la última desigualdad es cierta ya que para cada $y, y' \in U \cap A$, y $\varepsilon > 0$ existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $|f(y) - g(y)| < \varepsilon/3$ y $|f(y') - g(y')| < \varepsilon/3$, con ello tenemos

$$\begin{aligned} \left|g(y) - g(y')\right| &\leq |g(y) - f(y)| + \left|f(y) - f(y')\right| + \left|f(y') - g(y')\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

y así concluye la prueba. $\square$

El teorema de Namioka [67] sobre continuidad conjunta de una función separadamente continua nos asegura lo siguiente:

Teorema 3.2.9 (Namioka). *Dados un espacio topológico Čech-completo Y, un espacio compacto K y una aplicación $h : Y \times K \to \mathbb{R}$ separadamente continua en cada variable, existe un subconjunto G_δ-denso U en Y tal que h es conjuntamente continua en el producto $U \times K$.*

Una consecuencia inmediata de este resultado nos proporciona el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.10. *Si Y es un espacio topológico Čech-completo y $K \subset C_p(Y)$ es un subconjunto τ_p-compacto, entonces K es equi-fragmentable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset Y$ un subconjunto cerrado, por tanto Čech-completo y sobre él podemos aplicar el teorema de Namioka para obtener un G_δ-denso $U \subset A$ tal que la función evaluación $e : Y \times K \to \mathbb{R}$, definida por $e(y, f) := f(y)$ es conjuntamente continua sobre $U \times K$. Fijando un punto $u_0 \in U \neq \emptyset$ y teniendo en cuenta la compacidad de K podemos encontrar un entorno V de u_0 tal que para $y, y' \in V \cap U$ se tenga

$$\left| f(y) - f(y') \right| < \varepsilon$$

para cada $f \in K$, y de esta forma vemos que $V \cap A \neq \emptyset$ y para $y, y' \in V \cap A$ tendremos

$$\left| f(y) - f(y') \right| \leq \varepsilon$$

para cada $f \in K$ ya que al ser U denso en A y V abierto, $U \cap V$ es denso en $V \cap A$. $\square$

En particular, si Y es compacto o métrico completo, cualquier compacto K de $C_p(Y)$ es equi-fragmentable. En el caso Y compacto ser equi-fragmentable equivale a ser equi-medible en el sentido de A. Grothendieck; i. e. un subconjunto $\mathscr{F}$ de funciones acotado en $C(Y)$ con Y un espacio compacto, se dice que es equimedible si para cada medida de Radon μ sobre Y y cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto $S \subset Y$ cerrado tal que $|\mu|(S) > \|\mu\| - \varepsilon$ y $\mathscr{F}_{|S}$ es un conjunto relativamente compacto de $C(S)$, [59, Theorem 5.1].

Para un espacio Y Čech-analítico las mismas consideraciones que en el teorema [48, Theorem 4.1] nos llevan a extender el ejemplo anterior y tendremos:

Ejemplo 3.2.11. *Si Y es un espacio topológico Čech-analítico y $K \subset C(Y)$ es uniformemente acotado y τ_p-compacto, entonces K es un conjunto equi-σ-fragmentable de funciones sobre Y. Si Y es además hereditariamente de Baire, entonces K será equi-fragmentable.*

DEMOSTRACIÓN: La pseudométrica ρ de convergencia uniforme sobre K para los puntos de Y σ-fragmenta el espacio Čech-analítico Y por el teorema 4.1 de [48] ya que para cualquier subconjunto compacto S de Y, S está fragmentado por ρ gracias al ejemplo 3.2.10 anterior. Se tiene entonces por 3.2.6 que K es equi-σ-fragmentable. En el caso hereditariamente Baire todo subconjunto equi-σ-fragmentable será equi-fragmentable si está formado por funciones continuas después de la proposición 3.2.7. $\square$

En particular, si Y es K-analítico, los subconjuntos uniformemente acotados y τ_p-compactos de $C_p(Y)$ son equi-σ-fragmentables.

El siguiente ejemplo nos muestra otra situación de interés.

Ejemplo 3.2.12. *Sea (Y,τ) un espacio topológico σ-fragmentado por una métrica d. Entonces si $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^Y$ es d-equicontinuo será equi-σ-fragmentable.*

DEMOSTRACIÓN: Fijado $\varepsilon > 0$, para cada $y \in Y$ existe $\delta(y) > 0$ tal que para cualquier $f \in \mathscr{F}$ tenemos

$$\left| f(y) - f(y') \right| < \varepsilon$$

siempre que $d(y,y') < \delta(y)$. Sea $Y_n := \{y \in Y : \delta(y) > \frac{1}{n}\}$. La σ-fragmentabilidad de (Y,τ) para la métrica d nos permite descomponer cada conjunto $Y_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m^n$ de tal forma que para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $A \subset Y_m^n$ no vacío exista un abierto U de (Y,τ) tal que $\emptyset \neq U \cap A$ y $d - \mathrm{diam}(U \cap A) < \frac{1}{n}$. De esta forma tendremos que $|f(y) - f(y')| < \varepsilon$ siempre que $y,y' \in A \cap U$ y $f \in \mathscr{F}$, esto es,

$$\mathrm{diam}(f(U \cap A)) \leq \varepsilon$$

para cada $f \in \mathscr{F}$ tal y como queríamos probar al ser $Y = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} Y_m^n$. □

En particular, tendremos el siguiente:

Ejemplo 3.2.13. *Para un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|)$ son equivalentes:*

(i) *(Y,w) es σ-fragmentable.*

(ii) *B_{Y^*} es un conjunto equi-σ-fragmentable de aplicaciones en $C((Y,w))$.*

(iii) *Existe un subconjunto normante $S \subset Y^*$ que es equi-σ-fragmentable en $C((Y,w))$.*

DEMOSTRACIÓN: (i)⇔(ii)⇒(iii) de forma clara. Al ser S normante, $S \cap B_y$ genera

$$B := \overline{co(S \cap B_Y)}^{w^*}$$

que nos da una norma equivalente tomando su conjunto polar. Por las propiedades de estabilidad de las familias equi-σ-fragmentables tenemos que B es equi-σ-fragmentable también y así (Y,w) es σ-fragmentable por la norma equivalente dada por B°. □

Siguiendo a [28, pág. 328] damos la definición que sigue.

Definición 3.2.14. *Sea Y un espacio de Banach. Una familia*

$$\mathscr{P} = \{h_\alpha : Y \to [0,\infty)\}_{\alpha \in \Lambda}$$

de funciones continuas se dice que es una partición de la unidad *si para cada* $y \in Y$ *existe un entorno abierto* U_y *de* y *tal que* $U_y \cap \operatorname{sop} h_\alpha \neq \emptyset$ *para a lo sumo un conjunto finito de índices* $\alpha \in \Lambda$ *y* $\sum_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha(y) = 1$ *para cada* $y \in Y$.

Se dice que una partición de la unidad está subordinada a un cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ *de* Y *si para cada* α *existe* $U_\alpha \in \mathscr{U}$ *tal que* $\operatorname{sop}(h_\alpha) \subset U_\alpha$.

Diremos que Y *admite particiones de la unidad equi-σ-fragmentables si cualquier cubrimiento abierto de* Y *tiene una partición de la unidad subordinada a* Y *que sea equi-σ-fragmentable; esto es si*

$$\mathscr{U} = \{U_\beta : \beta \in B\}$$

entonces la partición de la unidad es de la forma $\{h_\beta : \beta \in B\}$, $\operatorname{sop} h_\beta \subset U_\beta$ *para cada* $\beta \in B$ *y* $\{h_\beta : \beta \in B\}$ *es una familia equi-σ-fragmentable en* (Y,w).

Nuestro objetivo ahora es caracterizar la σ-fragmentabilidad de un espacio de Banach por el tipo de particiones de la unidad subordinadas que admitan sus cubrimientos abiertos. Precisamos la siguiente

Proposición 3.2.15. *Sean* Y *un espacio de Banach σ-fragmentable y* $\{h_\alpha : Y \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in\Lambda}$ *una familia de funciones continuas tal que para cada* $y \in Y$ *existe* U_y *entorno de* y *tal que* $U_y \cap \operatorname{sop} h_\alpha \neq \emptyset$ *para a lo sumo un conjunto finito de índices* $\alpha \in \Lambda$. *Entonces la familia* $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es equi-σ-fragmentable en* (Y,w).

Para su demostración utilizaremos el siguiente lema, debido a R. Hansell [41].

Lema 3.2.16. *En un espacio de Banach* Y *que sea σ-fragmentable cualquier familia discreta de conjuntos* $\mathscr{B} = \{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *admite una descomposición*

$$B_\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^\gamma,$$

$\gamma \in \Gamma$ *de forma que para cada* $n \in \mathbb{N}$, *si* $X_n := \bigcup\{B_n^\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *y* A *es un subconjunto no vacío de* X_n, *existirá un abierto débil* U *en* Y *tal que* $U \cap A \neq \emptyset$ *y* $U \cap A \subset B_n^{\gamma_0}$ *para algún* $\gamma_0 \in \Gamma$.

DEMOSTRACIÓN: Sin perder generalidad podemos asumir que $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia ε-discreta para $\varepsilon > 0$; i. e. $\operatorname{dist}(B_\gamma, B_{\gamma'}) \geq \varepsilon$ para $\gamma \neq \gamma'$ en Γ. Sea $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^\varepsilon$ la partición de ε-fragmentabilidad para Y y definamos

$$B_n^\gamma := B_\gamma \cap Y_n^\varepsilon$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{U_\xi : \xi < \mu_n\}$ una familia de abiertos débiles de Y_n^ε tales que

$$M_\xi := U_\xi \setminus \bigcup\{U_\beta : \beta < \xi\} \neq \emptyset,$$

y

$$\|\cdot\| - \operatorname{diam}(M_\xi) < \varepsilon \text{ si } \xi < \mu_n$$

y $\{U_\xi : \xi < \mu_n\}$ cubren Y_n^ε. Si A es un subconjunto no vacío de X_n, tomamos $\xi_0 := \text{mín}\{\xi < \xi_n : U_\xi \cap A \neq \emptyset\}$ y tendremos que

$$\emptyset \neq U_{\xi_0} \cap A \subset M_{\xi_0}$$

con

$$\|\cdot\| - \operatorname{diam}(U_{\xi_0} \cap A) < \varepsilon.$$

Como la familia $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es ε-discreta, $U_{\xi_0} \cap A$ estará contenido en un único elemento de $\{B_n^\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, tal y como queríamos demostrar □

Ahora podemos demostrar la proposición 3.2.15.

DEMOSTRACIÓN: [Proposición 3.2.15] Para cada $y \in Y$ existe U_y entorno abierto de y en $(Y, \|\cdot\|)$ tal que $h_\alpha(x) = 0$ para cada $x \in U_y$ y para cada $\alpha \notin F_x$ subconjunto finito de A. Además, por continuidad de las funciones podemos tomar U_y tal que $\operatorname{diam} h_\alpha(U_y) < \varepsilon$ para cada $\alpha \in A$. Sea $\mathscr{B} = \bigcup_{m=1}^\infty \mathscr{B}_n$ un refinamiento σ-discreto del cubrimiento $\{U_y : y \in Y\}$. Aplicando el lema anterior a cada familia discreta $\mathscr{B}_n = \{B_j^n : j \in J_n\}$, podemos descomponer

$$B_j^n = \bigcup_{m=1}^\infty B_j^{n,m}$$

para cada $j \in J_n$ de tal forma que si $X_m^n := \bigcup\{B_j^{n,m} : j \in J_n\}$ y A es un subconjunto no vacío de X_m^n tengamos un abierto débil U en Y tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $U \cap A \subset B_{j_0}^{n,m}$ para algún $j_0 \in J_n$. Como $\operatorname{diam} h_\alpha(B) < \varepsilon$ para cada $\alpha \in A$ y cada $B \in \mathscr{B}$, tendremos en particular que

$$\operatorname{diam} h_\alpha(U \cap A) < \varepsilon$$

para cada $\alpha \in A$. Además, como $\mathscr{B}$ es un cubrimiento de Y tendremos

$$Y = \bigcup\{X_m^n : n, m \in \mathbb{N}\}$$

y esto termina la prueba. □

Llegamos así al principal resultado de esta sección, que después de la proposición 3.2.15 sigue esencialmente la pauta del teorema VIII.3.2 de [20].

Teorema 3.2.17. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *Y es σ-fragmentable.*

(ii) *Y admite particiones de la unidad equi-σ-fragmentables.*

(iii) *Existe un conjunto Γ y una inmersión homeomórfica ϕ de Y en un subconjunto de $c_0(\Gamma)$ tal que*

$$\left\{\phi(\cdot)_\gamma : \gamma \in \Gamma\right\}$$

es equi-σ-fragmentable, donde $\phi(\cdot)_\gamma$ denota la aplicación definida en Y que asocia a cada elemento $y \in Y$ la coordenada γ-ésima de $\phi(y)$.

DEMOSTRACIÓN: (i)$\Rightarrow$(ii) Es consecuencia inmediata de la proposición 3.2.15 y la paracompacidad de los espacios métricos [25, Chapter 5]. Veamos (ii)$\Rightarrow$(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathscr{W}_n$ un cubrimiento de Y consistiendo en bolas abiertas de radio $\frac{1}{n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ construimos la partición de la unidad $\mathscr{P}_n = \{h_{n,\alpha} : \alpha \in \Lambda_n\}$ subordinada a $\mathscr{W}_n$ que, por hipótesis, es equi-σ-fragmentable. Definimos para cada $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda_n$ el abierto $U_{n,\alpha} = h_{n,\alpha}^{-1}(0,\infty)$. Ahora la familia $\mathscr{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{O}_n$, donde $\mathscr{O}_n = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_n} U_{n,\alpha}$, es una familia localmente finita de subconjuntos abiertos de Y. Además $\mathscr{O}$ es una base para la topología de Y. En efecto, sea V un abierto e $y_0 \in V$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n_0} < dist(y_0, Y \setminus V)$. Puesto que $Y = \bigcup_{\alpha\in\Lambda_{n_0}} U_{n_0,\alpha}$, existe $\alpha_0 \in \Lambda_{n_0}$ tal que $y_0 \in U_{n_0,\alpha_0}$. Por otra parte $\{h_{n_0,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda_{n_0}}$ está subordinada a $\mathscr{W}_{n_0}$ y cada elemento de $\mathscr{W}_{n_0}$ es una bola de radio $1/n_0$, de donde se sigue que $\|\cdot\| - \operatorname{diam}(U_{n_0,\alpha_0}) < 2/n_0$, y así, $y_0 \in U_{n_0,\alpha_0} \subset V$, obteniendo que, $\{U_{n,\alpha}\}_{n\in\mathbb{N},\alpha\in\Lambda_n}$ es una base para la topología de Y. Sin perder generalidad podemos asumir que $\mathscr{O}_n \cap \mathscr{O}_m = \emptyset$ para cada $n \neq m$.

Sea $\mathscr{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}_n$. Ahora para cada $U \in \mathscr{O}$, escogemos $h_U \in \mathscr{P}$, $0 \leq h_U \leq 1$ tal que $U = h_U^{-1}(0,\infty)$. Definimos $\phi : Y \to c_0(\mathscr{O})$ dada por $\phi(y) = (\phi(y)_U)_{U\in\mathscr{O}}$, donde para cada $U \in \mathscr{O}$,

$$\phi(y)_U = \frac{1}{n} h_U(y)$$

para cada $y \in Y$, donde $n \in \mathbb{N}$ es el único número natural tal que $U \in \mathscr{O}_n$ y $\phi(y)_U$ denota la U-ésima coordenada de $\phi(y)$ en $c_0(\mathscr{O})$. La aplicación está bien definida ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{O}_n$ es localmente finita. Veamos que ϕ es continua. Sea $(y_j)_j$ una sucesión convergente a y en Y y fijamos $\varepsilon > 0$. Escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2/n_0 < \varepsilon$ y un entorno $U \in \mathscr{O}$ de y en Y tal que para algún $k \in \mathbb{N}$, $U_1, U_2, \ldots, U_k$ son todos los elementos de $\mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2 \cup \ldots \cup \mathscr{O}_{n_0}$ que tienen intersección no vacía con U. Escogemos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_j \in U$ para $j > j_0$ y $|h_{U_i}(y_j) - h_{U_i}(y)| < \varepsilon$ para $j > j_0$ e $i = 1, 2, \ldots, k$. Si $W \in \mathscr{O}_1 \cup \mathscr{O}_2 \cup \ldots \cup \mathscr{O}_{n_0}$, $W \neq U_1, \ldots, U_k$, entonces $W \cap U = \emptyset$ y, para $j > j_0$, $h_W(y_j) = h_W(y) = 0$. Si $W \in \bigcup_{i>n_0} \mathscr{O}_i$

entonces

$$|\phi(y_j)_W - \phi(y)_W| \leq |\phi(y_j)_W| + |\phi(y)_W| \leq 2/n_0 < \varepsilon.$$

De aquí, si $j > j_0$, entonces $|\phi(y_j)_W - \phi(y)_W| < \varepsilon$ para cada $W \in \mathscr{O}$. Así queda probada la continuidad de ϕ.

La aplicación ϕ es inyectiva. De hecho, si $y \neq y'$ son elementos en Y, entonces existe $U \in \mathscr{O}$ tal que $y \in U$ e $y' \neq U$. Supongamos que $U \in \mathscr{O}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\phi(y)_U = \frac{1}{n}h_U(y) \neq 0$ y $\phi(y')_U = 0$, ya que $y' \notin U$.

Demostramos ahora que ϕ^{-1} es continua. Supongamos que $(y_j)_j$ es una sucesión en Y tal que $(\phi(y_j))_j$ converge a $\phi(y)$ para cierto $y \in Y$. Demostraremos que $(y_j)_j$ converge a y. De ser $(\phi(y_j))_j$ convergente a $\phi(y)$ se sigue que $(h_U(y_j))_j$ converge a $h_U(y)$ para cada $U \in \mathscr{O}$. La familia $\mathscr{O}$ es una base para la topología de Y. De aquí si $(y_j)_j$ no converge a y, existe $U \in \mathscr{O}$ con $y \in U$ y una subsucesión $(y_{j_k})_k$ tal que $y_{j_k} \notin U$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $h_U(y_{j_k}) = 0$ y $h_U(y) \neq 0$ en contradicción con el hecho de que $(h_U(y_j))_j$ converge a $h_U(y)$ y así ϕ^{-1} es continua.

Por último, tenemos que por ser la familia $\mathscr{P}_n = \{h_U : U \in \mathscr{O}_n\}$ equi-σ-fragmentable para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\{\phi(\cdot)_U : U \in \mathscr{O}\}$ es equi-σ-fragmentable. En efecto, fijado $\varepsilon > 0$ si $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ tenemos que diam$\phi(Y)_U < \varepsilon$ para cada $U \in \bigcup_{n \geq n_0} \mathscr{O}_n$. Como $\{\phi(\cdot)_U : U \in \mathscr{O}_n\}$ $n = 1, 2, \ldots, n_0$ es un conjunto finito de familias equi-σ-fragmentables, entonces $\bigcup_{n=1}^{n_0} \{\phi(\cdot)_U : U \in \mathscr{O}_n\}$ es equi-σ-fragmentable y en definitiva $\{\phi(\cdot)_U : U \in \mathscr{O}\}$ lo es también.

La implicación (iii)$\Rightarrow$(i) se sigue de la proposición 3.2.6, ya que la familia

$$\{\phi(\cdot)_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$$

es equi-σ-fragmentable, siendo la inmersión ϕ de Y en $c_0(\Gamma)$ un homeomorfismo sobre la imagen para las normas. Tenemos entonces que la métrica

$$d(y,y') := \left\|\phi(y) - \phi(y')\right\|_\infty$$

σ-fragmenta a Y por la proposición 3.2.6, y como $\phi^{-1} : (\phi(Y), \|\cdot\|_\infty) \to (Y, \|\cdot\|_\infty)$ es continua, la identidad $(Y, w) \to (Y, \|\cdot\|)$ será σ-fragmentable como composición de $id : (Y, w) \to (Y, d)$ y de $\phi^{-1} : (\phi(Y), \|\cdot\|_\infty \to (Y, \|\cdot\|)$, por la proposición 3.1.19. $\square$

3.3 Multifunciones σ-fragmentables

Siguiendo a [45] damos las definiciones que siguen.

Definición 3.3.1. *Sea Y un espacio topológico y (M,d) un espacio métrico. Una multifunción $F : Y \to 2^M$ se dice que es:*

(i) Fragmentable *si para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \subset Y$ no vacío, existe un subconjunto abierto U en Y y un subconjunto D de M con $d - diam(D) < \varepsilon$ tales que $U \cap A \neq \emptyset$ y $F(y) \cap D \neq \emptyset$ para cada $y \in U \cap A$.*

(ii) σ-fragmentable *si para cada $\varepsilon > 0$ existe una descomposición de Y, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^{\varepsilon}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ si $A \subset Y_n^{\varepsilon}$ es un subconjunto no vacío existe un subconjunto abierto U en Y y un subconjunto D de M tales que $d - diam(D) < \varepsilon$, $U \cap A \neq \emptyset$ y $F(y) \cap D \neq \emptyset$ para cada $y \in U \cap A$.*

En [65] se estudian las aplicaciones σ-fragmentables por conjuntos Y_n^{ε} que sean cerrados con el fin de obtener selectores de la primera clase de Baire. Veremos aquí lo que podemos asegurar cuando no exigimos ninguna condición a los conjuntos Y_n^{ε}.

El teorema que sigue da una caracterización de la σ-fragmentabilidad de una multifunción en términos de aproximaciones uniformes por funciones σ-fragmentables, siguiendo las ideas del teorema 5 de [45].

Teorema 3.3.2. *Sean (Y,τ) un espacio topológico, (M,d) un espacio métrico y*

$$F : Y \to 2^M$$

una multifunción. Son equivalentes:

(i) *F es σ-fragmentable.*

(ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función $f_{\varepsilon} : (Y,\tau) \to (M,d)$ σ-fragmentable tal que $d - dist(f_{\varepsilon}(y), F(y)) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos (i)$\Rightarrow$(ii). Fijamos $\varepsilon > 0$, entonces existe una descomposición de $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n^{\varepsilon}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ si $A \subset Y_n^{\varepsilon}$ es no vacío, existe U abierto en Y y $D \subset M$ tales que $d - \mathrm{diam}(D) < \varepsilon$, $U \cap A \neq \emptyset$ y $F(y) \cap D \neq \emptyset$ para cada $y \in U \cap A$. Podemos hacer la descomposición de Y disjunta, para ello definimos $Y_1' := Y_1^{\varepsilon}$ y para cada $n > 1$, $Y_n' := Y_n^{\varepsilon} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} Y_i^{\varepsilon}$. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y realizamos la construcción que sigue por inducción transfinita. Sea $A_1^n := Y_n'$, entonces existen U_1^n abierto en Y y $D_1^n \subset M$ tales que $V_1^n := A_1^n \cap U_1^n \neq \emptyset$, $d-\operatorname{diam}(D_1^n) < \varepsilon$ y $F(y) \cap D_1^n \neq \emptyset$ para cada $y \in V_1^n$. Sea γ un ordinal y supongamos que para cada $\mu < \gamma$ hemos definido $V_\mu^n \subset Y$ y $D_\mu^n \subset M$ tales que V_μ^n es relativamente abierto en $Y_n' \setminus \bigcup_{\delta<\mu} V_\delta^n$, $d-\operatorname{diam}(D_\mu^n) < \varepsilon$ y $F(y) \cap D_\mu^n \neq \emptyset$ para cada $y \in V_\mu^n$. Si $Y_n' = \bigcup_{\mu<\gamma} V_\mu^n$ entonces hemos acabado. En caso contrario el conjunto $A = Y_n' \setminus \bigcup_{\mu<\gamma} V_\mu^n$ es no vacío, entonces existen U_γ^n abierto en Y y $D_\gamma^n \subset M$ tales que $d-\operatorname{diam}(D_\gamma^n) < \varepsilon$, $U_\gamma^n \cap A \neq \emptyset$ y $F(y) \cap D_\gamma^n \neq \emptyset$ para cada $y \in U_\gamma^n \cap A$. Definimos $V_\gamma^n = U_\gamma^n \cap A$. Realizando la construcción hasta cubrir Y_n' obtenemos una partición relativamente abierta de $Y_n' = \bigcup_{\mu<\gamma_n} V_\mu^n$. El proceso se realiza de igual forma para cada $n \in \mathbb{N}$ y así, tenemos una partición de Y de la forma $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\mu<\gamma_n} V_\mu^n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\mu < \gamma_n$, escogemos $x_\mu^n \in D_\mu^n$. Ahora definimos la aplicación $f_\varepsilon : Y \to M$ dada por $f_\varepsilon(y) = x_\mu^n$, si $y \in V_\mu^n$. La aplicación está bien definida ya que el hecho de que la familia $\{V_\mu^n : n \in \mathbb{N}, \mu < \gamma_n\}$ sea disjunta nos da la unicidad de n y $\mu \in [1, \gamma_n)$. Ahora la aplicación f_ε es constante en V_μ^n para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\mu \in [1, \xi_n)$, siendo $\{V_\mu^n, \mu < \gamma_n\}$ una partición relativamente abierta de Y_n' para cada $n \in \mathbb{N}$. Utilizando la proposición 3.1.21 se sigue que f_ε es una aplicación σ-fragmentable, y por construcción

$$d-\operatorname{dist}(f_\varepsilon(y), F(y)) < \varepsilon$$

para cada $y \in Y$.

Veamos (ii)$\Rightarrow$(i). Fijamos $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe una aplicación $f_{\frac{\varepsilon}{3}}$ σ-fragmentable tal que $d-\operatorname{dist}(f_\varepsilon(y), F(y)) < \varepsilon/3$ para cada $y \in Y$. Para $\varepsilon/3$, existe una descomposición de Y, $Y = \bigcup_{n=1}^\infty Y_n$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $A \subset Y_n$ es un subconjunto no vacío, existe U abierto en Y tal que $U \cap A \neq \emptyset$ y $d-\operatorname{diam} f_\varepsilon(U \cap A) < \varepsilon/3$. Definimos

$$D := \{x \in M : d-\operatorname{dist}(x, f_{\frac{\varepsilon}{3}}(U \cap A)) < \frac{\varepsilon}{3}\}.$$

Entonces $d-\operatorname{diam}(D) < \varepsilon$ y $F(y) \cap D \neq \emptyset$ para cada $y \in U \cap A$, finalizando así la prueba.

$\square$

Dado que haremos múltiples referencias al lema [34, Lemma 4] lo enunciamos más adelante. Recordamos que para un espacio de Banach Y, una *boundary* B es un subconjunto de

$$S_{Y^*} = \{y^* \in Y^* : \|y^*\|^* = 1\}$$

tal que para cada $y \in Y$ existe $y^* \in B$ tal que $y^*(y) = \|y\|$. Asimismo haremos uso en la prueba del lema de la desigualdad de Simons, que pasamos a recordar [75].

Teorema 3.3.3. *Sea E un conjunto e $(y_n)_n$ una sucesión uniformemente acotada de funciones definidas en E. Sea B un subconjunto de E tal que para cada sucesión $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ de números rales positivos con $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$, existe $b \in B$ tal que*

$$\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot y_n(y) : y \in E\} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot y_n(b)$$

entonces,

$$\sup_{b \in B}\{\overline{\text{lím}}_{n\to\infty} y_n(b)\} \geq \text{ínf}\{\sup_E g : g \in co(y_n)\}.$$

Lema 3.3.4 ([34]). *Sea Y un espacio de Banach, y sea $B \subset S_{Y^*}$ una* boundary. *Si existe $0 < \varepsilon < 1$ e $\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset Y^*$ tales que $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(y_n^*, \varepsilon)$ entonces*

$$Y^* = \overline{span\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|}.$$

En particular, Y^* es separable.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que el resultado no es cierto. Entonces existe $z \in Y^{**}$ con $\|z\| = 1$ y $z(y_n^*) = 0$ para cada $n \geq 1$. Puesto que $\|z\| = 1$, existe $y \in B_{Y^*}$ tal que $z(y) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Puesto que B_Y es w^*-denso en $B_{Y^{**}}$, existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en B_Y tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k(y_n^*) = z(y_n^*) = 0 \tag{3.5}$$

para cada $n \geq 1$, y

$$\lim_{k\to\infty} x_k(y) = z(y) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Por (3.6) podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_k(y) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se sigue entonces de (3.5) y de la hipótesis del enunciado que para cada $b \in B$

$$\overline{\text{lím}}_{k\to\infty} x_k(b) \leq 1 - \varepsilon.$$

De aquí, por la desigualdad de Simons, 3.3.3 existe $x \in \text{co}(\bigcup\{x_k : k \in \mathbb{N}\})$ tal que

$$\|x\| < 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

pero tenemos

$$\|x\| \geq x(y) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

llegando a contradicción. □

Sean X e Y espacios topológicos y $F_0 : X \to 2^Y$ una aplicación usco, diremos que F_0 es *minimal* si dada otra usco $F : X \to 2^Y$ tal que $F(x) \subseteq F_0(x)$ para cada $x \in X$ entonces $F = F_0$. Si $F : X \to 2^Y$ es usco, el axioma de elección implica que existe una usco minimal $F_0 : X \to 2^Y$ tal que $F_0(x) \subseteq F(x)$ para cada $x \in X$.

La propiedad que sigue caracteriza las aplicaciones usco minimales, [17, Lemma 1.5].

Proposición 3.3.5. *Sean X e Y espacios topológicos tal que Y es regular y $F : X \to 2^Y$ una multifunción. Son equivalentes:*

(i) *F es minimal usco.*

(ii) *Para cada U abierto de X y V abierto de Y tales que $U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset$ existe un abierto $W \subset U$ no vacío tal que $F(W) \subset V$.*

DEMOSTRACIÓN: (i)$\Rightarrow$(ii) Supongamos que existen $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos tales que

$$U \cap F^{-1}(V) \neq \emptyset,$$

es decir, existe $x_0 \in U$ tal que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Supongamos por reducción al absurdo que para cada $W \subset U$ abierto, se tiene que $F(W) \not\subset V$. De aquí se sigue que $F(x) \not\subset V$ para cada $x \in U$, ya que en caso contrario, es decir, si existe $x \in U$ tal que $F(x) \subset V$, entonces por ser F usco existe W_x entorno abierto de x tal que $F(W_x) \subset V$ lo cual es contradictorio con nuestra hipótesis.

Definimos $F^* : X \to 2^Y$ dada por

$$F^*(x) := \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in X \setminus U \\ F(x) \cap (Y \setminus V) & \text{si } x \in U. \end{cases}$$

Afirmamos que F^* es usco tal que $F^*(x) \subseteq F(x)$ para cada $x \in X$ y para x_0, $F(x_0) \subset F(x)$, y así acaba la prueba de esta implicación, puesto que llegamos a contradicción con el hecho de que F sea minimal. Efectivamente,

(i) $F^*(x)$ es compacto para cada $x \in X$. Si $x \in X \setminus U$, $F^*(x) = F(x)$ que es compacto. Por otra parte, si $x \in U$, entonces $F^*(x) = F(x) \cap (Y \setminus V)$ es compacto por ser un conjunto cerrado contenido en un compacto.

(ii) F^* es superiormente semicontinua. Trivialmente F^* es superiormente semicontinua para cada $x \in X \setminus U$. Veamos que F^* es superiormente semicontinua para cada $x \in U$. Sea $(x_j)_j$ una red en X tal que $(x_j)_j$ converge a $x \in U$. Podemos suponer que la red está contenida en U ya que existe $j_0 \in J$ tal que si $j \geq j_0$ $x_j \in U$. Sea $(y_j)_j$ una red en Y tal que $y_j \in F^*(x_j) = F(x_j) \cap (Y \setminus V)$ para cada $j \in J$. Ahora la red $(y_j)_j$ tiene un punto de aglomeración y en $F(x)$ por ser F usco y además $y \in (Y \setminus V)$ por ser este último conjunto cerrado. Así $(y_j)_j$ tiene un punto de aglomeración en $F^*(x)$.

(iii) $F^*(x) \subseteq F(x)$ para cada $x \in X$ de manera obvia, existiendo el punto x_0 en el que la inclusión es estricta.

(ii)⇒(i) Supongamos que existe $F_0 : X \to 2^Y$ usco tal que $F_0(x) \subset F(x)$ para cada $x \in X$. Sea $x_0 \in X$ tal que la inclusión $F_0(x_0) \subset F(x)$ es estricta. Sea $z \in F(x_0) \cap (Y \setminus F_0(x_0)) \neq \emptyset$. Por ser el espacio Y regular existe un abierto V entorno de z tal que $\overline{V} \cap F_0(x_0) = \emptyset$. Ahora $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, en particular para cada U abierto tal que $x_0 \in U$ tenemos que $F(U) \cap V \neq \emptyset$ y así existe $W \subset U$ tal que $F(W) \subset V$. Sea $(U_j)_j$ una base de entornos de x_0. Para cada j tomamos $x_j \in W_j \subset U_j$ de forma que $F(x_j) \subset V$. Ahora $(x_j)_j$ converge a x_0. Para cada j tomamos $y_j \in F_0(x_j)$. Por ser F_0 usco $(y_j)_j$ tiene un punto de aglomeración y en $F_0(x_0)$ lo cual es absurdo, ya que $y \in \overline{V}$ y este último conjunto se tomó disjunto de $F_0(x_0)$. □

Utilizando esta caracterización de las aplicaciones usco minimales demostramos la proposición que sigue la cual la encontramos en [45, Proposition 11].

Proposición 3.3.6. *Sea K un subconjunto w^*-compacto del dual de un espacio de Banach Y^* tal que K es fragmentable por la norma y T un espacio topológico Hausdorff. Si $F : T \to 2^{(K,w^*)}$ es una aplicación usco, entonces F es fragmentable. Si $F : T \to 2^{Y^*}$ es w^*-usco e Y^* es el dual de un espacio de Asplund, entonces F es σ-fragmentable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varepsilon > 0$, y $A \subset T$ no vacío. Consideramos la aplicación restricción $F : A \to 2^K$ que sigue siendo una aplicación usco. Ahora, por el lema de Zorn, sabemos que existe una aplicación usco minimal $F_0 : A \to 2^K$ tal que $F_0(t) \subseteq F(t)$ para cada $t \in T$.

Puesto que $F(A) \subset K$ y K es fragmentable por la norma, existe un conjunto w^*-abierto $W \subset Y^*$ tal que $D = W \cap F(A)$ es no vacío y

$$\|\cdot\| - \mathrm{diam}(D) < \varepsilon.$$

Por la proposición 3.3.5 existe un conjunto abierto V de T tal que $A \cap V \neq \emptyset$ y $F_0(A \cap V) \subset W \cap F_0(A) = D$. Esto implica que $F(t) \cap D \neq \emptyset$ para cada $t \in C \cap V$ ya que $F_0(t) \subset F(t)$.

Consideramos ahora $F : T \to 2^{Y^*}$ usco y definimos las bolas cerradas en el dual del espacio de Asplund y dadas por

$$B_n := \{y^* \in Y^* : \|y^*\| \leq n\}.$$

Ahora B_n es w^*-compacto y fragmentable por la norma para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $T_n := \{t \in T : J(t) \cap B_n \neq \emptyset\}$. Los conjuntos T_n cubren el espacio T. Consideramos las aplicaciones w^*-usco $F_n : T_n \to 2^{B_n}$ definidas por $F_n(t) = F(t) \cap B_n$. Aplicando la primera parte de esta proposición obtenemos que F restringida a T_n es fragmentable, y de aquí que F es σ-fragmentable. □

En el marco en el que nos hayamos nos será de utilidad la caracterización de los espacios Asplund que sigue a continuación. La demostración puede consultarse en [20, Theorem 5.7, pág. 29].

Teorema 3.3.7. *Sea Y un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *Y es un espacio Asplund.*

(ii) *Cada subespacio separable Z de Y tiene dual separable.*

Recordemos que la aplicación de dualidad J en un espacio de Banach Y se define como $J(y) : \{y^* \in B_{Y^*} : \langle y, y^* \rangle = \|y\|\}$ para cada $y \in Y$, (ver 1.3.3). Una primera consecuencia del teorema 3.3.2, el corolario 3.1.15 y el lema de Godefroy 3.3.4 es el siguiente:

Teorema 3.3.8. *Para un espacio de Banach Y son equivalentes.*

(i) *Y es de Asplund.*

(ii) *J es σ-fragmentable como multifunción entre los espacios métricos $(Y, \|\cdot\|)$ y $(Y^*, \|\cdot\|^*)$, ($\|\cdot\|^*$ es la norma dual en Y^*).*

DEMOSTRACIÓN: (i)⇒(ii) La aplicación dualidad J es $\|\cdot\|$-w^*-usco, como ya fue probado en 1.3.3 y por ser Y un espacio de Asplund, [20, Theorem 5.2], (B_{Y^*}, w^*) es un compacto fragmentable por $\|\cdot\|^*$. Ahora basta utilizar la proposición 3.3.6 para obtener el resultado buscado.

(ii)⇒(i) Fijamos $\varepsilon > 0$ con $0 < \varepsilon < 1$ y $f_\varepsilon : Y \to Y^*$ σ-fragmentable tal que $\|\cdot\|^* -\operatorname{dist}(f_\varepsilon(y), J(y)) < \varepsilon$ para cada $y \in Y$. Como $(Y, \|\cdot\|)$ es métrico f_ε es σ-continua y para cada subespacio $Z \subset Y$ separable $f_\varepsilon(Z)$ es también separable, por el corolario 3.1.15. Veremos como esta situación nos fuerza a que Z^* sea separable y en definitiva a la prueba de que Y es un espacio de Asplund. Sea D_Z un conjunto numerable denso en $f_\varepsilon(Z)$. Para cada $z \in Z$ podemos escoger $b_z^* \in J(z)$ tal que $\left\| f_\varepsilon(z) - b_z^* \right\| < \varepsilon$, si consideramos el conjunto

$$B := \{b^*_{z|Z} : z \in Z\}$$

obtenemos una frontera del espacio de Banach separable Z. Si D es un conjunto numerable denso en $f_\varepsilon(Z)$ tendremos que $B \subset \bigcup_{d^* \in D} B(d^*_{|Z}, \varepsilon)$ y podemos aplicar el lema 3.3.4 para concluir que Z^* es separable. $\square$

Con los resultados previos podemos afirmar que para un espacio de Banach Y que no sea Asplund, ningún selector f de la aplicación dualidad puede ser medible Borel. Recordamos que una aplicación $f : (Y, \rho) \to (M, d)$ es *medible Borel* si para cada $U \subset M$ abierto en M tenemos que $f^{-1}(U)$ es un conjunto de Borel. Hansell demostró en [38] el siguiente resultado cuando traducimos sus aplicaciones con base de función σ-discreta como las aplicaciones σ-continuas (ver [65]).

Teorema 3.3.9. *Sea Y un espacio métrico completo y (M, d) un espacio métrico. Si $f : Y \to M$ es una aplicación medible Borel entonces es una aplicación σ-continua.*

Como corolario obtenemos el siguiente resultado, anunciado por C. Stegall en [76].

Corolario 3.3.10. *Sea Y un espacio de Banach. Entonces Y es un espacio Asplund si, y sólo si, la aplicación dualidad $J : Y \to 2^{Y^*}$ tiene un selector medible Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Si la aplicación dualidad J tiene un selector medible Borel, entonces, por el teorema 3.3.9, dicho selector es una aplicación σ-fragmentable que verifica la condición (ii) del teorema 3.3.2 para cada $\varepsilon > 0$. Fijándonos $0 < \varepsilon < 1$ para la prueba (ii)$\Rightarrow$(i) anterior nos da el resultado.

Por otra parte, para Y de Asplund la aplicación dualidad J admite selectores incluso de la primera clase de Baire por el teorema de selección de Jayne y Rogers, [47] y así selectores medibles Borel. $\square$

El teorema que sigue da una respuesta afirmativa a una pregunta de Plichko sobre si es posible dar una versión no separable del lema de Godefroy 3.3.4, en esencia supone precisar mejor el teorema 3.3.8 anterior.

Teorema 3.3.11. *Sea Y un espacio de Banach. Si $f : Y \to Y^*$ es una aplicación σ-fragmentable y existe $0 < \varepsilon < 1$ tal que*

$$\|\cdot\|^* - dist(f(y), J(y)) < \varepsilon$$

para cada $y \in Y$, donde J denota la aplicación dualidad. Entonces

$$\overline{span\, f(Y)}^{\|\cdot\|^*} = Y^*.$$

DEMOSTRACIÓN: La prueba de (ii)⇒(i) del teorema 3.3.8 nos asegura la validez del enunciado cuando Y es separable, nuestro objetivo ahora es hacer la prueba en el caso general que sigue los argumentos de reducción al caso separable del teorema 26 de [45] que a su vez tienen su origen en los dados en [27].

Después del lema 3.1.14, y dado que f es también σ-continua al estar definida entre espacios métricos, podemos asignar a cada $y \in Y$ un subconjunto numerable W_y en Y tal que

$$f(y) \in \overline{\{f(W_{y_n}) : n = 1,2,\dots\}}^{\|\cdot\|^*}$$

siempre que $\lim_n y_n = y$ en $(Y, \|\cdot\|)$. Vamos a construir, dada $g \in Y^*$, un subespacio separable $Z \subset Y$ tal que del hecho de ser $g_{|Z} \in \overline{\operatorname{span} f(Z)_{|Z}}^{\|\cdot\|_{Z^*}}$ podamos concluir que $g \in \overline{\operatorname{span} f(Y)}^{\|\cdot\|^*}$ también. Comencemos con un $Z_1 \subset Y$, $Z_1 \neq \{0\}$ $\mathbb{Q}$-espacio vectorial numerable arbitrario y de forma inductiva construimos conjuntos numerables Z_n, D_n y $F_n := \{v_{n,j} : j = 1,2,\dots\} \subset B_y$ tales que

(i) $D_n \subset D_{n+1}$ y $D_{n+1} \supset \bigcup\{W_y : y \in Z_{n+1}\}$.

(ii) $Z_n \cup F_n \subset Z_{n+1}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

(iii) Si $C_n = \{h_{n,j} : j \in \mathbb{N}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{f(W_y) : y \in D_n\}$, entonces tendremos

$$\langle g - h_{n,j}, v_{n,j}\rangle \geq \|g - h_{n,j}\| - \frac{1}{n}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$.

En efecto, dado Z_1 podemos definir $D_1 = \bigcup\{W_y : y \in Z_1\}$ que es numerable y así lo será $C_1 = \{h_{1,j} : j \in \mathbb{N}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{f(W_y) : y \in D_1\}$. Podemos ahora encontrar vectores $v_{1,j} \in B_y$ tales que $\langle g - h_{1,j}, v_{1,j}\rangle \geq \left\|g - h_{1,j}\right\| - 1$ y por consiguiente definir $F_1 := \{v_{1,j} : j = 1,2,\dots\} \subset B_y$ y así definir $Z_2 := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{Z_1 \cup F_1\}$ que sigue siendo numerable, así como $D_2 := D_1 \cup \{W_y : y \in Z_2\}$. Resulta evidente como el proceso de inducción completa nos construirá Z_n, D_n, F_n con las propiedades requeridas. Podemos ahora considerar el espacio separable $Z = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty Z_n}$ que tiene el $\mathbb{Q}$-espacio $\bigcup_{n=1}^\infty Z_n$ como conjunto numerable y denso y por la construcción hecha tenemos que $f(\bigcup_{n=1}^\infty D_n) = \bigcup\{f(W_y) : y \in \bigcup_{n=1}^\infty Z_n\}$ es denso en $f(Z)$, por lo tanto

$$g_{|Z} \in \overline{\operatorname{span}\{f(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)_{|Z}\}}^{\|\cdot\|_{Z^*}}$$

por el lema 3.3.4 aplicado sobre el subespacio separable Z y el conjunto numerable $f(\bigcup_{n=1}^\infty D_n)$ que está ε-cerca de una frontera en B_{Z^*} para Z ya que

$$dist(f(z), J(z)) < \varepsilon$$

para cada $z \in Z$ también. Por todo ello, podemos encontrar para cada $\overline{\varepsilon} > 0$ una forma lineal $h = \sum_{i=1}^{p} q_i \cdot f(d_i)$, donde $q_i \in \mathbb{Q}$ y $\{d_1, d_2, \ldots, d_p\} \in D_n$ para algún entero n tales que

$$\left\|g_{|Z} - h_{|Z}\right\| < \frac{\overline{\varepsilon}}{2}.$$

Ahora bien $h = \sum_{i=1}^{p} q_i f(d_i) \in C_n$ y tendremos $h = h_{n,j}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Además no es restrictivo suponer n suficientemente grande para que $\overline{\varepsilon} \geq 2/n$ gracias a la condición (i). De esta forma tenemos

$$\begin{aligned}
\|g - h\|_{Y^*} = \|g - h_{n,j}\|_{Y^*} &\leq 1/n + \langle g - h_{n,j}, v_{n,j}\rangle \\
&\leq \overline{\varepsilon}/2 + \|(g - h_{n,j})\|_{|Z^*} \\
&= \overline{\varepsilon}/2 + \|(g - h)_{|Z}\|_{|Z^*} \\
&\leq \overline{\varepsilon}/2 + \overline{\varepsilon}/2 \\
&= \overline{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Como esto es válido para cualquier $\overline{\varepsilon} > 0$, tendremos en definitiva

$$g \in \overline{\operatorname{span} f(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)}^{\|\cdot\|}$$

tal y como queríamos demostrar. □

Teorema 3.3.12. *Sea Y un espacio de Banach. Entonces Y es Asplund si, y sólo si, existe $0 < \varepsilon < 1$ y una aplicación $f_\varepsilon : Y \to Y^*$ σ-fragmentable tal que*

$$\|\cdot\|^* - dist(f_\varepsilon(y), J(y)) < \varepsilon$$

para cada $y \in Y$, donde J denota la aplicación dualidad.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que Y es Asplund. Utilizando el teorema 3.3.8 tenemos que la aplicación dualidad es σ-fragmentable y por el teorema 3.3.2 tenemos que para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe una aplicación f_ε con la propiedad requerida. El recíproco es una consecuencia inmediata del teorema 3.3.11 que nos asegura que para cualquier $Z \subset Y$ tendremos que

$$Z^* = \overline{\operatorname{span} f_\varepsilon(Z)_{|Z}}^{\|\cdot\|_{Z^*}},$$

y en particular cuando Z es separable, $f_\varepsilon(Z)$ será separable también por el lema 3.1.15 ya que f_ε es σ-continua también, y así lo será Z^*. □

Corolario 3.3.13. *Sea Y un espacio de Banach. Si B_{Y^*} es ε-fragmentable para algún $0 < \varepsilon < 1$, entonces Y es un espacio de Asplund.*

DEMOSTRACIÓN: Si B_{Y^*} es ε-fragmentable, utilizando la misma prueba que en la proposición 3.3.6 obtenemos que la aplicación dualidad $J : Y \to Y^*$ es ε-σ-fragmentable. De aquí por la prueba del teorema 3.3.2 existe una aplicación $f_\varepsilon : Y \to Y^*$ σ-fragmentable tal que

$$d - \mathrm{dist}(f_\varepsilon(y), J(y)) < \varepsilon$$

para cada $y \in Y$. Utilizando el teorema 3.3.12 obtenemos finalmente que Y es Asplund y la prueba acaba. $\square$

Bibliografía

[1] A.V. Arkhangel'skii and V.I. Ponomarev, *Fundamentals of general topology*, D. Reidel Publishing Company, 1984.

[2] A. V. Arkhangel′skiĭ, *Topological function spaces*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 78, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992, Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen. MR 92i:54022

[3] Y. Benyamini, A. E. Rudin, and M. Wage, *Continuous images of weakly compact subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **70** (1977), 309 – 324.

[4] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. topologie générale*, Hermann, Paris, 1971.

[5] ______, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid, 1976.

[6] J. Bourgain, D. H. Fremlin, and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. Math. **100** (1978), no. 4, 845–886. MR 80b:54017

[7] B. Cascales, *On K-analytic locally convex spaces*, Arch. Math. (Basel) **49** (1987), 232–244.

[8] B. Cascales, J. Kąkol, and S. A. Saxon, *Metrizability vs. Fréchet-Urysohn property*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 11, 3623–3631 (electronic). MR 1 991 777

[9] B. Cascales, J. Kąkol, and S. A. Saxon, *Weight of precompact subsets and tightness*, J. Math. Anal. Appl. **269** (2002), 500–518.

[10] B. Cascales and I. Namioka, *The lindelöf property and σ-fragmentability*, To appear in Fund. Math. 2004, 2003.

[11] B. Cascales, I. Namioka, and J. Orihuela, *The Lindelöf property in Banach spaces*, Studia Math. **154** (2003), no. 2, 165–192. MR 1 949 928

[12] B. Cascales and L. Oncina, *Compactoid filters and USCO maps*, J. Math. Anal. Appl. **282** (2003), no. 2, 826–845. MR 1 989 690

[13] B. Cascales and J. Orihuela, *Metrizability of precompact subsets in (LF)-spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **103A** (1986), 293–299.

[14] ______, *On compactness in locally convex spaces*, Math. Z. **195** (1987), no. 3, 365–381. MR 88i:46021

[15] ______, *On pointwise and weak compactness in spaces of continuous functions*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B **40** (1988), no. 3, 331–352.

[16] ______, *A sequential property of set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. **156** (1991), no. 1, 86–100.

[17] J. Christensen and P. Kenderov, *Weight of precompact subsets and tightnesdense strong continuity of mappings and the radon-nykodym property*, Math. Scand. **54** (1984), 70 – 78.

[18] D. L. Cohn, *Measure theory*, Birkhauser, 1980.

[19] H. H. Corson, *The weak topology of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 1–15.

[20] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, vol. 64, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 1993.

[21] S. Dolecki, G. Greco, and A. Lechicki, *Compactoid and compact filters*, Pac. J. Math. **117 (1)** (1985), 69–98.

[22] Szymon Dolecki and Alojzy Lechicki, *Semi-continuité supérieure forte et filtres adhérents*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **293** (1981), no. 3, 219–221. MR 82k:54015

[23] L. Drewnowski and I. Labuda, *On minimal upper semicontinuous compact-valued maps*, Rocky Mountain J. Math. **20** (1990), no. 3, 737–752.

[24] G. A. Edgar and R. F. Wheeler, *Topological properties of Banach spaces*, Pacific J. Math. **115** (1984), no. 2, 317–350.

[25] R. Engelking, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60]. MR 58 #18316b

[26] M. Fabian, *Gâteaux differentiability of convex functions and topology*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1997.

[27] M. Fabian and G. Godefroy, *The dual of every asplund space admits a projectional resolution of the identity*, Studia Math. **91** (1988), 141 – 151.

[28] M. Fabian, P. Habala, and alt., *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 2001.

[29] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, vol. 8, Springer-Verlag, New York, 2001. MR 2002f:46001

[30] K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978. MR 82b:46001

[31] J. Gerlits, *Some properties of $C(X)$. II*, Topology Appl. **15** (1983), no. 3, 255–262. MR 84i:54018

[32] J. Gerlits and Zs. Nagy, *Some properties of $C(X)$. I*, Topology Appl. **14** (1982), no. 2, 151–161. MR 84f:54021

[33] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Springer-Verlag, New York, 1976, Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 43.

[34] G. Godefroy, *Some applications of Simons' inequality*, Serdica Math. Journal (2001).

[35] A. Grothendieck, *Criteres de compacité dans les espaces fontionnelles généraux*, Amer. J. Math **74** (1952), 168–186.

[36] ______, *Sur les espaces F et DF.*, Summa Brasil. Math **3** (1954), 57 – 123.

[37] P. Habala, P. Hájek, and V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I,II*, Prague: Matfyzpress, 1996.

[38] R.W. Hansell, *Borel measurable mappings for non separable metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **161** (1971), 145 – 169.

[39] ______, *On characterizing non-separable analytic and extended borel sets as types of continuous images*, Proc. London Math. Soc. **28** (1974), 683 – 699.

[40] ______, *Absolute Souslin-F spaces and other weak-invariants of the norm topology*, To appear, 2001.

[41] ______, *Descriptive sets and the topology of non separable Banach spaces*, Serdica Math. J. **27** (2001), 1–66.

[42] R.W. Hansell and L. Oncina, *Generalized first class selectors for upper semi-continuous set-valued maps in Banach spaces*, 2004.

[43] R. Hödel, *On a theorem of Arhangel'skii concerning Lindelöf p-spaces*, Can. J. Math. **27** (1975), 459 – 468.

[44] ______, *Cardinal functions I*, Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier Science Publishers, 1984, pp. 1–61.

[45] J. E. Jayne, J. Orihuela, A. J. Pallarés, and G. Vera, *σ-fragmentability of multivalued maps and selection theorems*, J. Funct. Anal. **117** (1993), no. 2, 243–273.

[46] J. E. Jayne and C. A. Rogers, *Borel selectors for upper semicontinuous multivalued set-valued maps*, Acta Math. **155** (1985), 41–79.

[47] ______, *Borel selectors for upper semicontinuous set-valued maps*, Acta Math. **155** (1985), no. 1-2, 41–79.

[48] J.E. Jayne, I. Namioka, and C. A. Rogers, *Topological properties of Banach spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **66** (1993), no. 3, 651–672. MR 94c:46041

[49] J. Kąkol and M. Lopez-Pellicer, *On countable bounded tightness for spaces $C_p(X)$*, J. Math. Anal. Appl. **280** (2003), no. 1, 155–162. MR 1 972 199

[50] Jerzy Kąkol and Stephen A. Saxon, *Montel (DF)-spaces, sequential (LM)-spaces and the strongest locally convex topology*, J. London Math. Soc. (2) **66** (2002), no. 2, 388–406. MR 2003h:46013

[51] J. L. Kelley, *Topología general*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 1962. MR 33 #6566

[52] ______, *General topology*, Springer-Verlag, New York, 1975, Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27. MR 51 #6681

[53] I. Kortezov, *Fragmentability and cardinal invariants*, Topology Appl. **101** (2000), no. 2, 93–106. MR 2001b:54005

[54] G. Köthe, *Topological vector spaces. I*, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 40 #1750

[55] G. Koumoullis, *Topological spaces containing compact perfect sets and Prohorov spaces*, Topology Appl. **21** (1985), no. 1, 59–71. MR 87b:54032

[56] K. Kuratowski, *Topology*, vol. I, PWN-Polish Scientific Publishers- Warszawa, 1966.

[57] A. Lechicki and S. Levi, *Extensions of semicontinuous multifunctions*, Università degli studi di Milano **20** (1988).

[58] ______, *Extensions of semicontinuous multifunctions*, Forum Math. **2** (1990), no. 4, 341–360.

[59] E. Matouskova and C. Stegall, *Compact spaces with finer metric topology and Banach spaces*, General Topology in Banach spaces (2001), 81 – 101.

[60] P. R. Meyer, *Function spaces and the Aleksandrov-Urysohn conjecture*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **86** (1970), 25–29. MR 43 #8039

[61] E. Michael, *On Nagami's Σ-spaces and some related matters*, Proc. Washington State Univ. Conf. on General Topology (Pullman, Wash., 1970), Pi Mu Epsilon, Dept. of Math., Washington State Univ., Pullman, Wash., 1970, pp. 13–19. MR 42 #1067

[62] E. Michael, *On maps relates to σ-discrete collection of sets*, Pac. J. Math **98** (1982), 138 – 152.

[63] E. Michael and I. Namioka, *Barely continuous functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Mat. Astronom. Phys. **24** (1976), no. 10, 889–892.

[64] J. Van Mill, *The infinite-dimensional topology of funcion spaces*, North-Holland Mathematical Library, 2000.

[65] A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski, and M. Valdivia, *A non linear transfer technique*, Preprint, 2003.

[66] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fundamenta Mathematicae **65** (1969), 169 – 192.

[67] I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pac. J. Math. **51** (1974), no. 2, 515–531.

[68] N. Noble, *The continuity of functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 187–198. MR 41 #2636

[69] J. Orihuela, *Pointwise compactness in spaces of continuous functions*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), no. 1, 143–152. MR 88f:46058

[70] J. P. Penot, *Compact nets, filters, and relations*, J. Math. Anal. Appl. **93** (1983), no. 2, 400–417.

[71] A. Plichko, *On sequential properties of Banach spaces and duality*, Preprint, 2003.

[72] E. G. Pytkeev, *Sequentiality of spaces of continuous functions*, Uspekhi Mat. Nauk **37** (1982), no. 5(227), 197–198. MR 84c:54020

[73] M. Raja, *Medibilidad borel y renormamiento de espacios de banach*, Ph.D. thesis, Universidad de Murcia, 1999.

[74] C. A. Rogers and J. E. Jayne, *Analytic sets*, ch. K-analytic sets, pp. 1–181, Academic Press, 1980.

[75] S. Simons, *A convergence theorem with boundary*, Pacific J. Math. **40** (1972), 703–708.

[76] C. Stegall, *Functions of the first Baire class*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 4, 981–991.

[77] M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 407–438. MR 81a:46021

[78] F. Topsoe, *Compactness in spaces of measures*, Studia Math. **36** (1970), 195 – 222.

[79] M. Valdivia, *Topics in locally convex spaces*, Nort-Holland. Mathematics Studies, Amsterdam, 1982.

[80] ______, *Quasi-LB-spaces*, J. London Math. Soc. (2) **35** (1987), no. 1, 149–168.

[81] Walker, *The Stone-čech compactification*, Springer-Verlag, 1974.

[82] M. De Wilde, *Closed graph theorems and webbed spaces*, Pitman, London - San Francisco - Melbourne, 1978.