Aplicaciones del servicio *Wolfram Alpha* para el aprendizaje de Matemáticas en el grado en ADE

Antonio Álvaro Ortega

Curso académico 2019/2020

Director: Roberto Javier Cañavate Bernal

Trabajo Fin de Grado para la obtención del título de Graduado en Administración y Dirección de Empresas

Índice

1. INTRODUCCIÓN

A la hora de escoger este tema para realizar mi Trabajo Fin de Grado, me pregunté si había alguna manera de poder resolver los problemas de Matemáticas que se tratan durante la carrera de una manera sencilla con algún programa informático. Como el campo de las Matemáticas es muy extenso decidí centrarme en una parte de la asignatura Matemáticas para la Empresa I del grado de Administración y Dirección de Empresas, ya que es muy común entre los estudiantes que cuando están cursando esta asignatura surjan dudas respecto a la resolución de ciertos ejercicios o ejemplos que no han sido resueltos en clase. Investigando me di cuenta de que en la asignatura hace varios años que no se utiliza ningún programa informático para resolver los ejercicios (anteriormente se empleaba Derive, pero se encuentra discontinuado desde 2007), y el único programa de cálculo matemático con el que cuenta la Universidad Politécnica de Cartagena es Matlab. Esta opción no resulta recomendable para el objetivo planteado porque además de ser un software más orientado a las carreras de ingeniería, la licencia solo permite su utilización en la Universidad y, si los estudiantes quisieran hacer un uso doméstico, existiría el inconveniente de que tendrían que adquirir una licencia del programa.

En estos casos, los estudiantes suelen recurrir al profesor que imparte la asignatura para que les resuelva la duda, y en algunas ocasiones, se acude a academias particulares. En prácticamente ningún caso se suelen utilizar programas matemáticos para la resolución de esos ejercicios debido a que en su mayoría éstos requieren de unos conocimientos que suelen necesitar tiempo para su aprendizaje y una utilización determinada por parte del usuario. Éste es probablemente el principal problema, ya que los estudiantes no disponen de ese tiempo para su aprendizaje y, si lo tienen, habitualmente suelen invertirlo en otros quehaceres. Esto se debe principalmente a que el lenguaje empleado en estos programas no es el que se está acostumbrado a utilizar en las aplicaciones informáticas habitualmente manejadas por los estudiantes, dado que suele basarse en programación con comandos, algo que si no se tiene una base previa puede resultar bastante complejo de manejar. Este problema se ve agravado por el hecho que las guías o manuales que explican la utilización de estos programas suelen resultar bastante tediosos y complejos para los estudiantes que no disponen de conocimientos previos informáticos adecuados.

Otro hecho a tener es cuenta es que los estudiantes actualmente buscan simplicidad y rapidez a la hora de resolver cualquier problema que surja y que pueda proporcionar el resultado final de una manera directa y sin muchas complicaciones. Existen diversas aplicaciones informáticas de carácter matemático que podría ser utilizadas por los estudiantes de la titulación para la resolución de ejercicios. Se pueden mencionar, entre otros:

- *Derive*
- *GNU Octave*
- *Scilab*
- *Mathway*
- *Matlab*
- *Mathematica*
- *Wolfram Alpha*

Un problema que surge con muchos de estos programas es el precio para el usuario. El coste de utilización de algunos de estos programas como, por ejemplo, *Mathematica* o *Matlab*, hacen que prácticamente ningún estudiante los utilice, ya que la relación precio/utilidad es bastante baja y normalmente preferirán utilizar alguna otra aplicación informática gratuita o, incluso, pedir ayuda a algún compañero.

Dicho esto, y habiendo realizado una breve revisión de los distintos programas para poder resolver algunos problemas que se plantean en la asignatura de Matemáticas para la Empresa I, se descartaron aquellos programas que no se pudieran utilizar gratuitamente o aquellos que necesitaran de un lenguaje de programación complejo. Una vez centrado el trabajo en aquellos de tipo gratuito, el siguiente problema que surge es la gran variedad de dichos programas que existen. Tras un pequeño proceso de prueba de algunos de ellos, hubo uno que llamó mi atención ya que utilizaba a *Mathematica* como buscador de respuestas sin tener que utilizar lenguaje de programación. Se trata de la aplicación *Wolfram Alpha*. Por lo tanto, decidí que podría dedicar el estudio de este Trabajo Fin de Grado a ver qué clase de problemas relacionados con la asignatura Matemáticas para la Empresa I del grado de Administración y Dirección de Empresas eran capaces de ser resueltos por *Wolfram Alpha* y cuáles no, ya que, al carecer de guía de uso como tal[1], era muy difícil determinar todas las funciones que podría realizar. Además, nuestra intención es que el trabajo pudiera servir como futura guía para los estudiantes que estuvieran interesados en el uso de este programa ya que podrían emplearlo como manual de la aplicación.

[1] Wolfram Alpha cuenta con los llamados *Examples, ejemplos de algunas de las diversas funciones que es capaz de realizar el programa en un determinado tema.* Sin embargo, los *Examples* no muestran todas las posibles utilizaciones de Wolfram Alpha como sí que harían las guías de otros programas como, por ejemplo, *Mathematica.*

2. *WOLFRAM ALPHA*

Según Wikipedia [1] se puede definir *Wolfram Alpha* como un buscador de respuestas basado en un sistema de inteligencia artificial que funciona utilizando una serie de algoritmos y que permite dar respuesta a una gran variedad de cuestiones de diferentes campos. *Wolfram Alpha* ha sido desarrollado por la empresa *Wolfram Reseach* y se lanzó en el año 2009 tomando como base lo que hoy conocemos como *Wolfram Language*. Se debe tener en cuenta que *Wolfram Alpha* no es un motor de búsqueda, ya que no busca respuestas a las preguntas de un conglomerado de páginas web o documentos, sino que las respuestas son dinámicas ya que responden de una manera concreta y específica a la cuestión preguntada.

Los cuatro grandes campos que abarca *Wolfram Alpha* son:

- Matemáticas
- Tecnología científica
- Sociedad y cultura
- Vida cotidiana

A su vez, estos cuatro campos se van desarrollando y subdividiendo en otros.

Una de las características diferenciadoras de *Wolfram Alpha*, es que este tiene la capacidad de responder preguntas directamente sobre determinados hechos, productos, sucesos de actualidad, etc., todo ello a través de una base de datos totalmente estructurada. Esta base de datos utiliza fuentes de información tanto públicas como privadas que son seleccionadas por el personal de *Wolfram Alpha*, con lo que es capaz de acceder a información que no poseen otros buscadores como Google o Yahoo!, debido, por ejemplo, a que en ocasiones la fuente de información puede no ser gratuita. Se puede comprobar que lo que *Wolfram Alpha* propone es priorizar la información.

Otro dato a tener en cuenta acerca de esta aplicación es que, en vez de mostrar links o proporcionar una lista de los documentos o páginas web que podrían contener la respuesta para que se pueda acceder a los sitios que contienen la información, tal y como sucede habitualmente con los motores de búsqueda tradicionales (Google, Bing, Yahoo!), *Wolfram Alpha* ofrece respuestas basadas en los datos recogidos en páginas web y procesados por el software.

De todos los campos que posee *Wolfram Alpha* nos centraremos en el estudio de la resolución de algunos tipos de ejercicios de Álgebra y Cálculo que aparecen en la asignatura Matemáticas para la Empresa I del grado en ADE. El lenguaje de interacción con el usuario de la herramienta en esta área es el propio de *Mathematica*. Este software, lanzado en 1998 [2], es un programa utilizado en áreas científicas como Ingeniería o Matemáticas, y es el encargado de procesar las grandes cantidades de información que se manejan en *Wolfram Alpha*. *Mathematica* se puede definir como un sistema de computación global que utiliza un lenguaje de programación de alto nivel simbólico-numérico, con funciones que están asociadas a extensas bases de datos y amplia agilidad algorítmica. *Mathematica* se divide en 2 partes, el *kernel* que se encarga de los cálculos, y el *front end*, que despliega los resultados y permite al usuario interactuar con el *kernel* como si fuera un documento.

Según Wikipedia [3] y Stephen Wolfram [4], *Wolfram Language* se puede definir como un lenguaje de programación multiparadigma que ha sido desarrollado por *Wolfram Reseach* y que sirve como el idioma principal de interfaz para *Mathematica* y *Wolfram Programming Cloud*. También permite a los programadores operar a un nivel superior, gracias a que incorpora la llamada inteligencia computacional que está basada en unos complejos algoritmos que también utilizan conocimientos del mundo real. Todo esto ha dado lugar a que *Wolfram Language* sea considerado como "el lenguaje de programación más productivo que se conoce y el primero que ha sido catalogado como computacional para las personas y para la inteligencia artificial" [4].

Por último, *Wolfram Alpha* cuenta con una opción "pro" entre las que incluyen algunas mejoras como: historial de consulta accesible, preferencias personalizables, soluciones paso a paso y gráficos personalizados y resultados descargables, a lo que hay que añadir que cuenta con una versión de pago para Android e IOS.

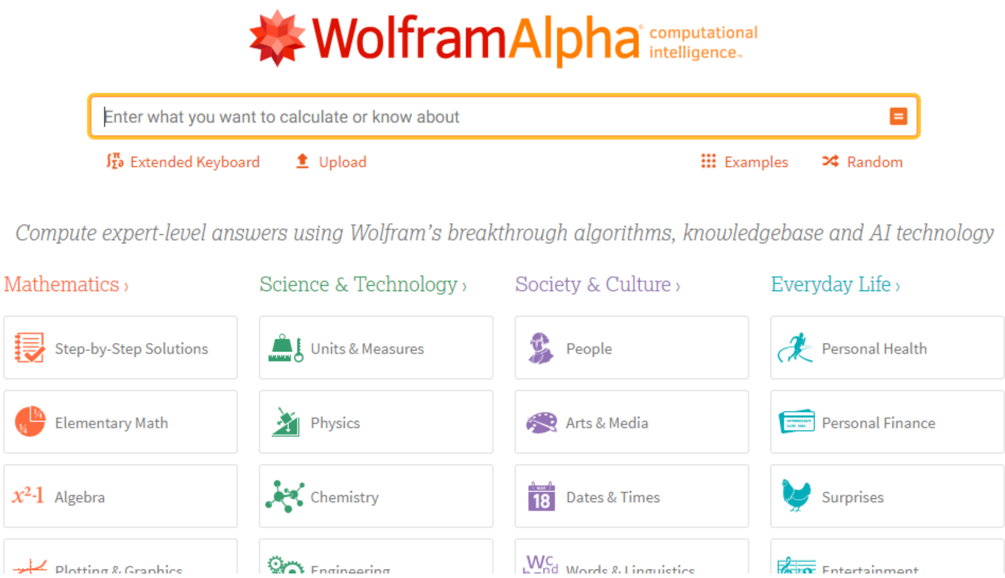
Como se ha indicado *Wolfram Alpha* no solo permite realizar cálculos matemáticos, sino que es mucho más, ya que proporciona respuestas a cuestiones de la vida cotidiana, sociedad, cultura, ciencia y tecnología. Uno de los principales puntos a su favor es que aprovecha todo el potencial que le brinda Mathematica sin tener que utilizar un lenguaje de programación tedioso para el usuario, lo que permite resolver cuestiones más o menos complejas a través de un lenguaje más asequible e intuitivo.

Otro aspecto positivo de *Wolfram Alpha*, y que supone una gran ventaja respecto a la competencia, es la posibilidad de utilizarlo de forma completamente gratuita (las funciones "pro" son añadidos no esenciales) y accesible desde cualquier dispositivo: PC, móvil o tableta. Asimismo, cabe destacar su capacidad de interpretar las entradas del usuario e, incluso, detectar algunos errores en la escritura de los comandos, lo que redunda aún más en su facilidad de uso.

Uno de los aspectos que potencialmente podrían condicionar su utilización es que el lenguaje básico de funcionamiento de la aplicación es el inglés, lo que podría significar una dificultad añadida para determinados estudiantes. Consideramos que esto supone un aliciente extra para la realización del presente trabajo, ya que esperamos que con él también se pueda ayudar a aquellos estudiantes para los que el inglés supone una barrera importante.

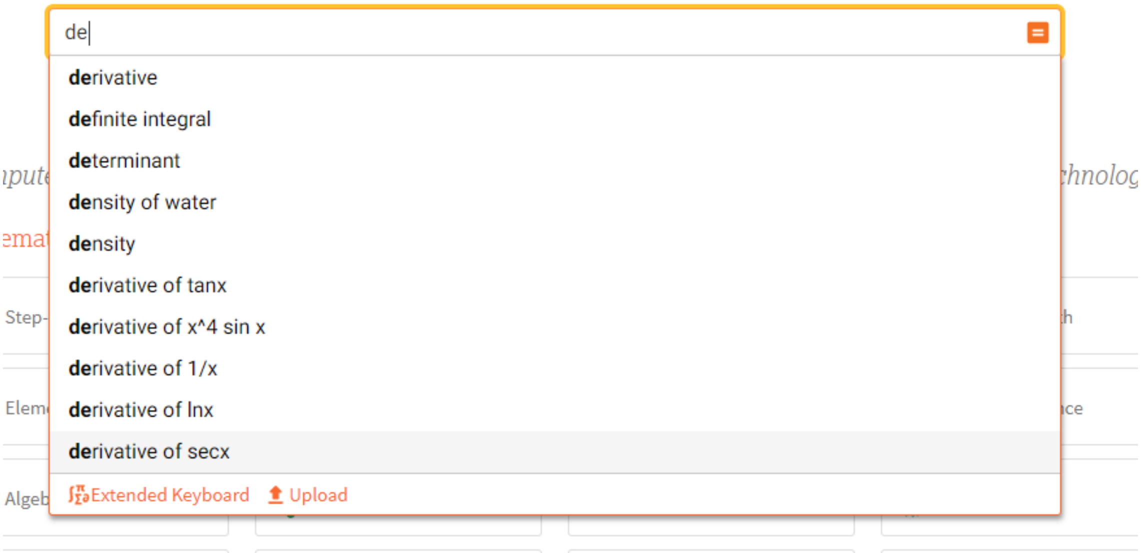
3. UTILIZACIÓN GENERAL DE *WOLFRAM ALPHA*

Wolfram Alpha es un programa informático multiplataforma que, al ejecutarse a través de una aplicación web[2], no requiere de ningún requisito específico para su utilización. Cuenta con una interfaz bastante simple en la que el elemento principal es una barra de búsqueda en la que el usuario introduce las peticiones al programa. También cuenta con algunos botones situados debajo del recuadro de búsqueda los cuales permiten, respectivamente, hacer uso de un teclado extendido (cuenta con determinados símbolos que pueden resultar útiles en ciertas situaciones), subir archivos (sólo usuarios PRO), elegir algunos ejemplos de uso y encontrar la respuesta a una petición al azar. En este buscador es donde se introducirán las cuestiones que se plantean al programa, mientras que las respuestas se obtienen o bien pulsando la tecla Enter o bien clicando en el botón .

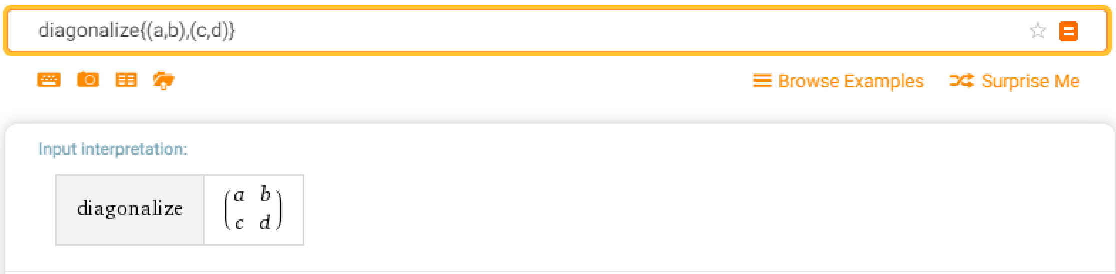


[2] A lo largo del trabajo se muestran numerosas capturas de pantalla de la aplicación web de Wolfram Alpha que, debido a los diferentes momentos en las que han sido tomadas, pueden mostrar un aspecto estético diferente en la interfaz del programa. En todo caso, no se han producido cambios importantes en el funcionamiento de la aplicación que condicionen el presente estudio.

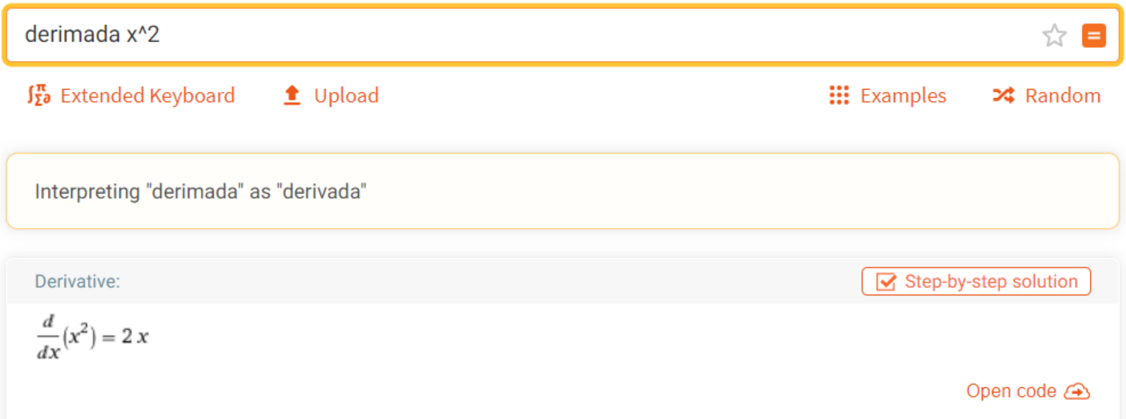
Resulta interesante observar que *Wolfram Alpha* es capaz de ofrecer sugerencias con las expresiones más buscadas mientras se escribe:



En la respuesta ofrecida por *Wolfram Alpha*, el programa mostrará su interpretación del significado del *input* y, de esta manera, se puede comprobar si se han introducido de una manera correcta los datos y comandos. Por ejemplo, al pedir que diagonalice una matriz cualquiera la aplicación mostrará lo siguiente:



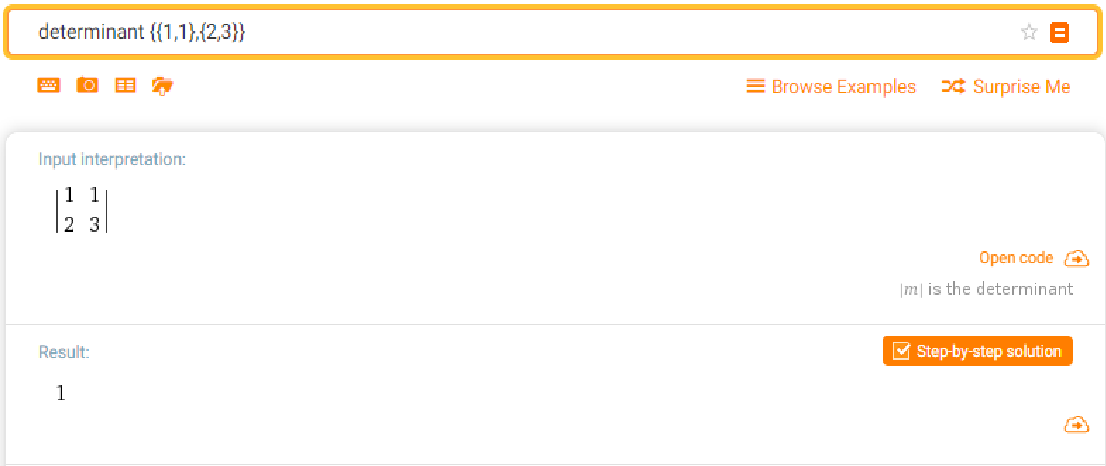
Otra de las características más útiles de *Wolfram Alpha* es su capacidad de interpretar errores leves en la escritura de los comandos y/o expresiones. A veces, incluso es capaz de reinterpretar algunos comandos en español a pesar de que su lenguaje de utilización es el inglés. Si, por ejemplo, se introduce "derimada x^2", el sistema es capaz de interpretarlo correctamente a pesar de que el comando base de la aplicación es *derivative*.



Se ha podido observar con *Wolfram Alpha* se pueden obtener los resultados requeridos mediante diferentes procedimientos. Para facilitar su estudio los hemos clasificado en dos grupos, a las que hemos denominado método directo e indirecto.

3.1 Método directo

Consiste en introducir directamente en la barra de búsqueda el comando que se quiere realizar seguido de su expresión correspondiente. Por ejemplo, para conocer el determinante de una matriz, se introduce en la barra de búsqueda el comando *determinant* seguido de la expresión de la matriz en formato *Mathematica*, esto es, entre llaves y encerrando las filas también mediante llaves:

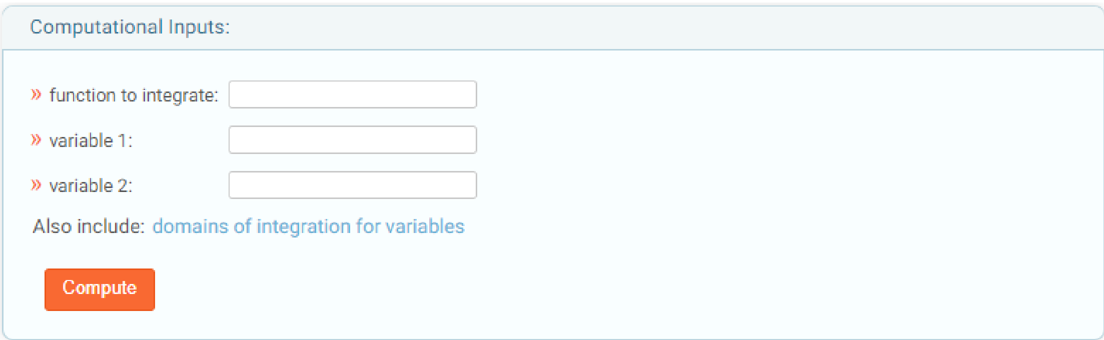


Se observa que el sistema interpreta los datos introducidos y directamente muestra los resultados correspondientes, entre ellos el valor del determinante solicitado. No obstante, es habitual que *Wolfram Alpha* muestre de forma automática otros datos accesorios que podrían ser de interés para el usuario. Esto permite obtener resultados a través de *Wolfram Alpha* de una forma diferente a la que hemos denominado *método indirecto*.

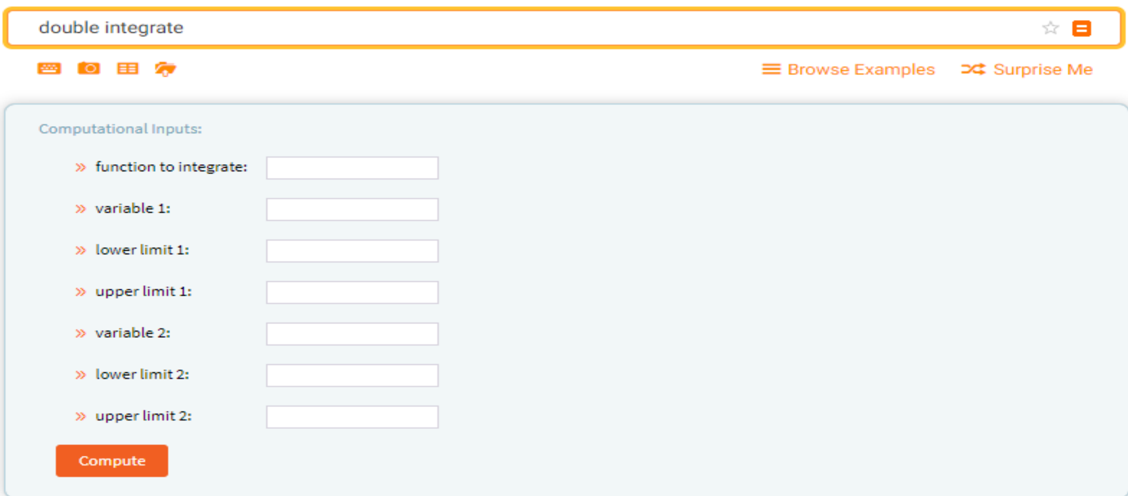
3.2 Método indirecto

Consiste habitualmente en introducir en la barra de búsqueda solo una parte de lo que se quiere calcular. Esto supone una gran ventaja respecto al método directo en casos en los que el usuario no recuerde la forma exacta de introducir una determinada expresión. Se pueden destacar dos casos.

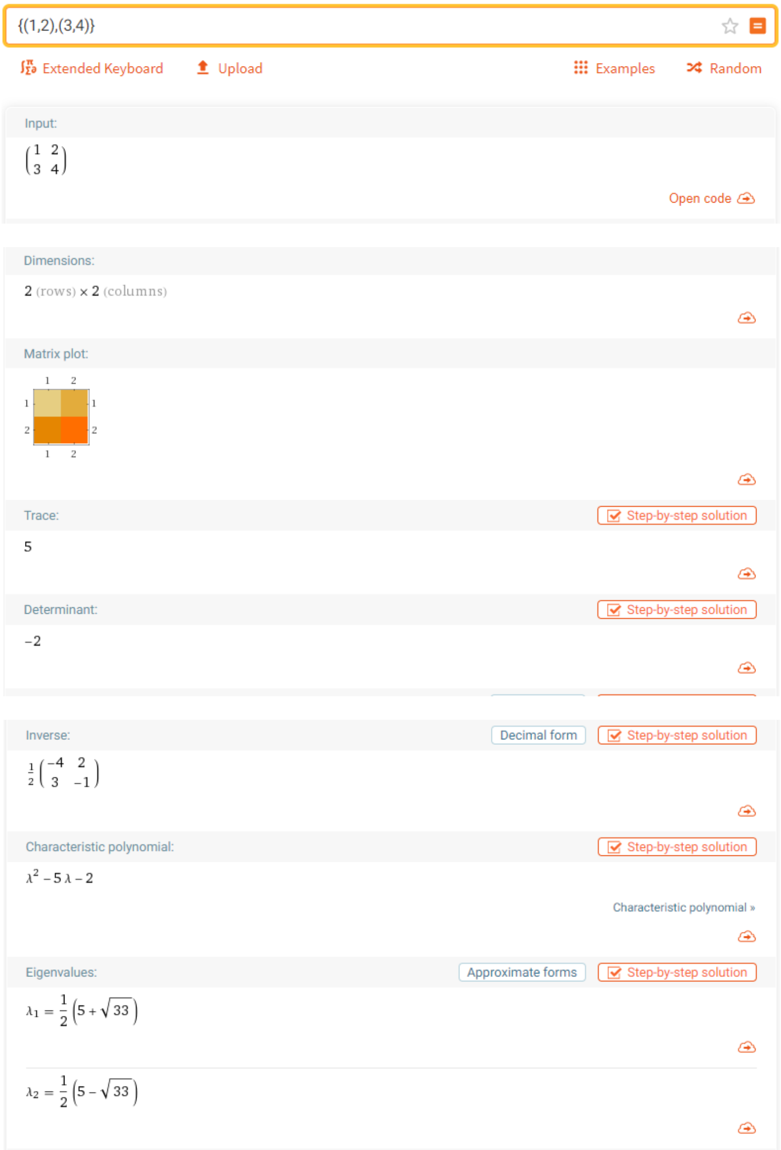
El primero consiste en introducir en la barra de búsqueda únicamente el comando correspondiente. Esta situación es especialmente útil a la hora de trabajar con derivadas e integrales ya que puede resultar difícil recordar como introducir correctamente la expresión completa debido a la longitud de esta. Por ejemplo, para realizar una integral doble en la que se tengan que especificar los límites de integración, resultará más sencillo utilizar el método indirecto, ya que bastará con introducir en la barra de búsqueda el comando *double integrate.*



Una vez se ha procedido a buscar, Wolfram Alpha mostrará una pequeña interfaz en la que se podrán agregar los límites de integración haciendo clic sobre la frase “domains of integration for variables”.



El segundo caso consiste en introducir únicamente la expresión sobre la que se quiere trabajar que, en nuestro caso, usualmente será o bien una matriz o bien una función. Al no especificar ningún comando *Wolfram Alpha* proporcionará una gran cantidad de información y resultados derivados de la expresión, entre los que podría estar el que se está buscando. Por ejemplo, si se introduce una matriz cualquiera y no se especifica nada más se mostrarían los resultados siguientes:



Adicionalmente, *Wolfram Alpha* es capaz, independientemente de si se trata del método directo o indirecto, de proporcionar junto con el resultado unos datos y cálculos complementarios. De toda la información que Wolfram Alpha facilita automáticamente, nos centraremos en aquella que sea de utilidad para el objetivo de este trabajo. En este sentido conviene señalar que en la parte relativa al cálculo (derivadas e integrales) los datos accesorios no suelen presentar demasiada utilidad en relación con las necesidades de un estudiante del grado en ADE, de forma contraria a lo que sucede en los contenidos de Álgebra. Esta es la razón por la cual los datos complementarios que se va a comprobar si son aportados por *Wolfram Alpha* son los de la parte correspondiente al Álgebra: dimensión, determinante, matriz inversa, polinomio característico, valores propios, vectores propios y diagonalización.

En la Tabla 1 se muestra qué informaciones adicionales objetivo de este estudio son proporcionadas por *Wolfram Alpha* cuando se introducen determinadas expresiones. La primera columna muestra algunas expresiones que se pueden introducir en el programa, mientras que en la primera fila se encuentran los resultados que consideramos de interés para los estudiantes y que podrían ser mostrados automáticamente por el programa en su respuesta. Esto permite al usuario conocer por adelantado si recibirá de *Wolfram Alpha* una determinada información simplemente con la introducción de una cierta expresión o si, por el contrario, necesitará utilizar el método directo para obtener ese dato.

Tabla 1. Resultados presentados automáticamente por Wolfram Alpha al introducir ciertas expresiones.

	Dimensión	Determinante	Inversa	Polinomio característico	Valores propios	Vectores propios	Diagonalización
Introducimos solo la matriz	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Introducimos el deterterminante	NO	SI	NO	NO	NO	NO	NO
Introducimos el polinomio característico	NO	NO	NO	SI	NO	NO	NO
Introducimos los valores propios	NO	NO	NO	NO	SI	SI	NO
Introducimos los vectores propios	NO	NO	NO	NO	SI	SI	NO
Introducimos diagonalización	NO	NO	NO	NO	NO	NO	SI

Fuente: Elaboración propia

Por ejemplo, si en un ejercicio se precisa calcular los valores y vectores propios de una matriz, se puede realizar de varias formas:

1- Introduciendo en la barra de búsqueda únicamente la matriz. Se observa en la Tabla 1 que *Wolfram Alpha* incluirá en la respuesta los valores y vectores propios de la matriz.

2- Introduciendo en la barra de búsqueda o bien el comando para los valores propios o bien el de vectores propios. Se puede observar en la Tabla 1 que introduciendo únicamente uno de estos comandos *Wolfram Alpha* también proporcionará el otro. De esta manera, en vez de tener que realizar dos peticiones al programa sería suficiente con introducir únicamente uno de los dos comandos.

4. APLICACIÓN DE *WOLFRAM ALPHA* A LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES Y FORMAS CUADRÁTICAS

Una vez se ha descrito el funcionamiento básico y las distintas formas de introducir la información en *Wolfram Alpha*, nos centraremos en el aprendizaje de los distintos comandos y la forma en la que se tienen que introducir para poder resolver los problemas de Matemáticas.

Como el objetivo principal de este trabajo es, como ya se ha indicado, ayudar a aquellos alumnos que cursen la asignatura Matemáticas para la Empresa I, todos los ejemplos y ejercicios están tomados de hojas de problemas de cursos anteriores de la asignatura. De esta forma, los estudiantes que vayan a consultar este estudio podrán hallar ejemplos resueltos de ejercicios iguales o similares a los que tendrán que afrontar durante el aprendizaje de la asignatura o los exámenes que realicen.

Conviene señalar que los problemas están tomados de hojas de ejercicios pertenecientes a grupo bilingüe y, por tanto, el idioma es el inglés. Esto es así debido a que yo realicé mis estudios en dicho idioma y, además, porque consideramos que de esa forma el estudio dispone de un público objetivo mayor ya que, a pesar de que los enunciados se hallen en inglés, se explica en todo momento su significado en español.

4.1 Vectores propios. Valores propios

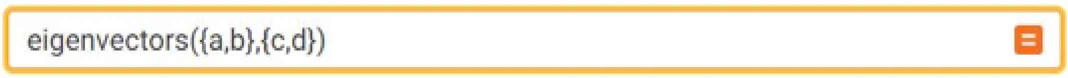
Un vector propio o autovector de una matriz A de tamaño n × n es un vector $x \in R^n$, distinto de 0, tal que para cierto escalar λ ∈ R,

$$Ax = \lambda x.$$

En este caso, al escalar λ se le denomina valor propio o autovalor del vector propio o autovector $x \in R^n$.

La forma de introducir en la barra de búsqueda los valores y vectores propios es la siguiente:

a. Para los vectores propios:



Como el lenguaje básico de funcionamiento de *Wolfram Alpha* es el inglés, hay que introducir en la barra de búsqueda el comando *eigenvectors* seguido de la matriz a la que se le quiera calcular el vector propio. Se ha de tener en cuenta que el sistema no es capaz de interpretar los equivalentes en español del comando *eigenvector* (vector propio o autovector).

b. Para los valores propios:

Como se puede observar, se debe introducir en la barra de búsqueda la palabra *eigenvalue* (que significa valor propio) seguido de la matriz correspondiente. *Wolfram Alpha* no es capaz de interpretar los equivalentes en español al comando *eigenvalue* (valor propio o autovalor).

Una vez que se ha visto cómo calcular los valores y los vectores propios se va a proceder a realizar un ejemplo para ver cómo se aplicaría a *Wolfram Alpha*.

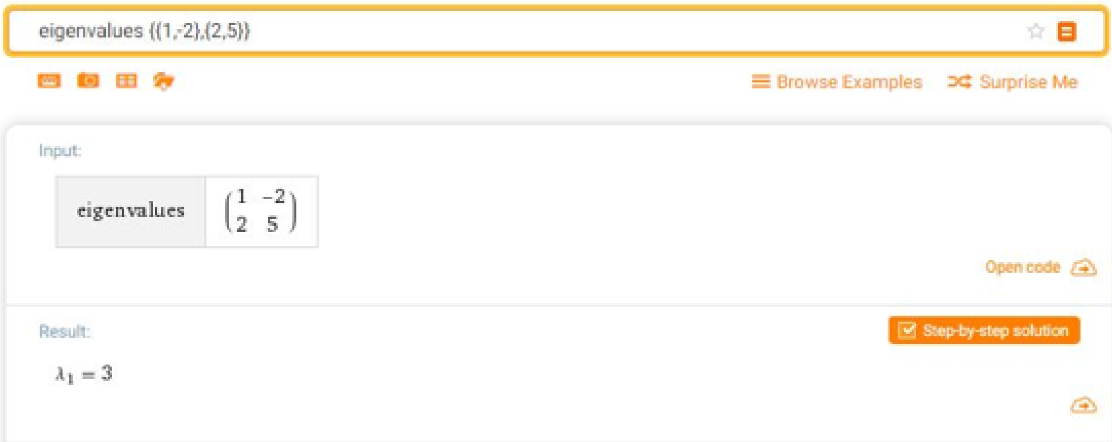
<u>Example 1</u>

Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

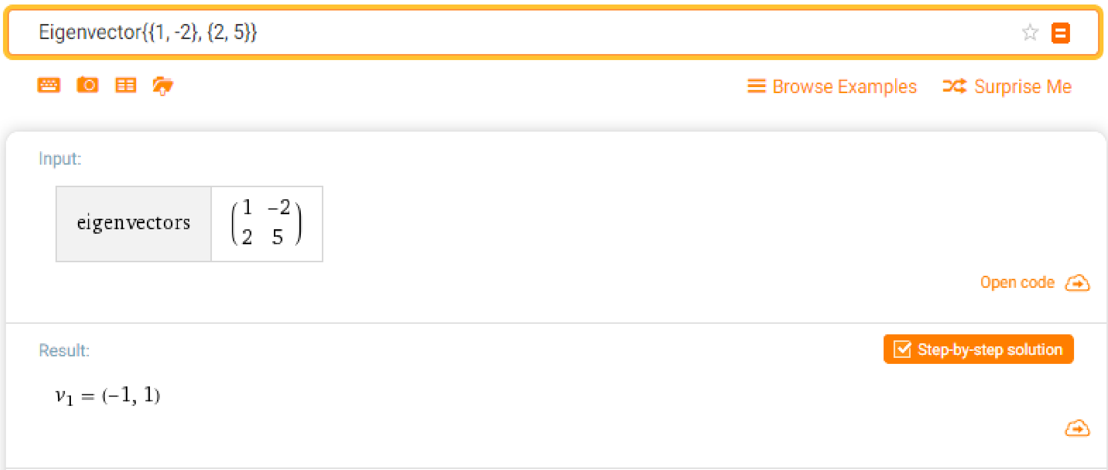
(a) Calculate its eigenvalues and one eigenvector of one of them.

En este ejercicio se pide halla los valores y vectores propios de una matriz. Tal y como se ha descrito anteriormente, la búsqueda de los valores propios se realiza con el comando e*igenvalues*.



Es interesante observar que *Wolfram Alpha* proporciona un único valor propio para esta matriz, λ=3, algo que puede generar dudas ya que es imposible que una matriz de tamaño 2 disponga de un único valor propio real. La explicación de esta aparente contradicción es, sin embargo, relativamente simple: la aplicación no muestra las multiplicidades algebraicas de los valores propios, de modo que lo que ocurre en realidad es que el valor propio de la matriz anterior es doble.

Para calcular el vector propio se procede de igual manera que con el valor propio, pero esta vez introduciendo el comando *eigenvector* en la barra de búsqueda.



Como se puede comprobar hay un único vector propio, $v_1 = (-1,1)$.

4.2 Polinomio Característico

El polinomio característico de una matriz cuadrada se define como el determinante de la matriz resultante de restar a la inicial la matriz identidad multiplicada por λ.

Para hallar el polinomio característico mediante *Wolfram Alpha* se introduce en la barra de búsqueda el comando *characteristic polynomial* seguido de la matriz correspondiente. De nuevo, se ha comprobado que *Wolfram Alpha* no es capaz de interpretar la traducción al español del comando *characteristic polynomial* (polinomio característico).

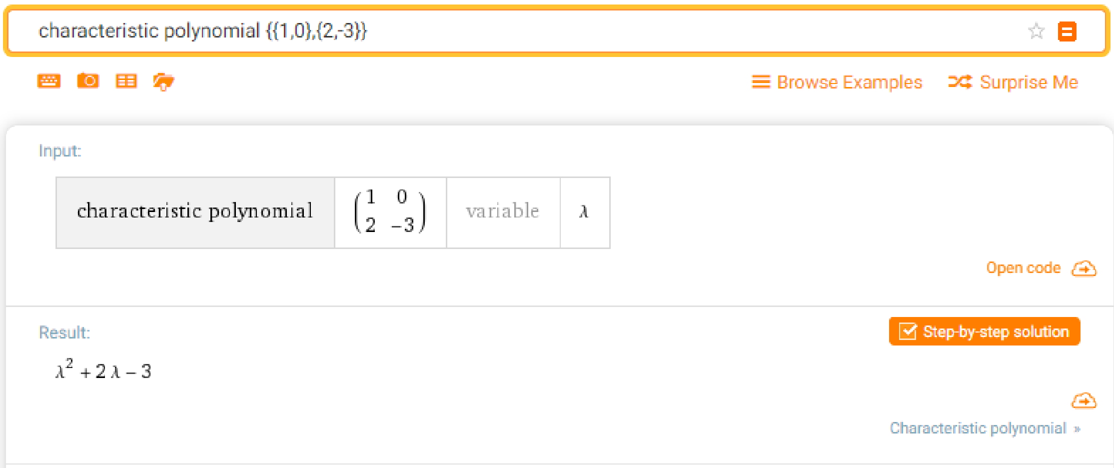
A continuación se muestra su uso en un ejercicio.

Example 8. Let us consider the endomorphism in the example above, $f(x, y) = (x, 2x - 3y)$. Its associated matrix in the standard basis is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},$$

and the characteristic polynomial is

Como se quiere calcular el polinomio característico bastará con introducir en la barra de búsqueda el comando *characteristic polynomial* seguido de la matriz A.



Como se observa el polinomio característico es $\lambda^2 + 2\lambda - 3$.

4.3 Matrices diagonales

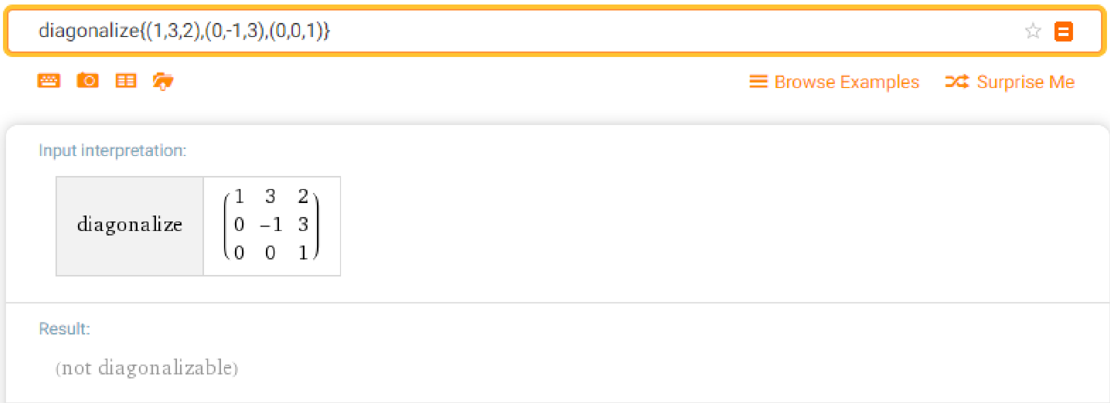
Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Para determinar si una matriz es diagonalizable y, en su caso, hallar su matriz diagonal semejante, se introduce en la barra de búsqueda la palabra *diagonalize* o *diagonal matrix* seguido de la matriz. En esta ocasión *Wolfram Alpha* sí es capaz de interpretar los equivalentes en español del comando *diagonalize* (diagonaliza o diagonalizar).

Un ejemplo:

Let us examine whether the following matrix is diagonalizable or not.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para ver si es diagonalizable se introduce en la barra de búsqueda *diagonalize* seguido de la matriz A.



Se puede observar que la matriz A no es diagonalizable.

4.3.1 Matrices simétricas

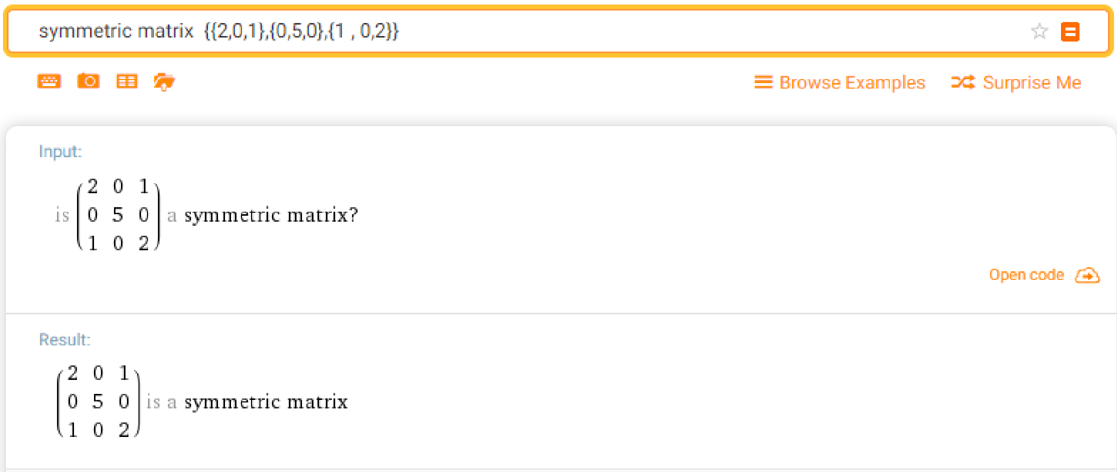
Se dice que una matriz cuadrada es simétrica si es igual a su traspuesta. Es decir, si la fila X coincide con la columna X y así con todas las filas y columnas de la matriz. Las matrices simétricas son un caso especialmente interesante ya que por una parte son frecuentes (las matrices asociadas a formas cuadráticas son siempre simétricas) y por otra tienen propiedades especiales (son siempre diagonalizables).

Una de las preguntas que puede responder *Wolfram Alpha* es si una matriz en concreto es simétrica o no. Para ello se introduce en la barra de búsqueda la palabra *symmetric matrix* seguido de la matriz la cual se quiere comprobar si es simétrica. Una vez más *Wolfram Alpha* no es capaz de interpretar los equivalentes en español de *symmetric matrix* (matriz simétrica).

Ejemplo 1. ¿Es la siguiente matriz simétrica?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para saber si una matriz si es simétrica se introduce en la barra de búsqueda el comando *symmetric matrix* seguido de la matriz.



De acuerdo con los resultados obtenidos se puede afirmar que la matriz es simétrica.

Una vez que se ha visto como introducir y nombrar los distintos tipos de comandos de diagonalización de matrices en *Wolfram Alpha,* se procederá a la resolución de un par de ejercicios tipo examen, esto es, más ricos y algo más completos, y en los que se tendrán que aplicar varios de los comandos explicados en apartados anteriores.

<u>Ejercicio 1</u>

Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

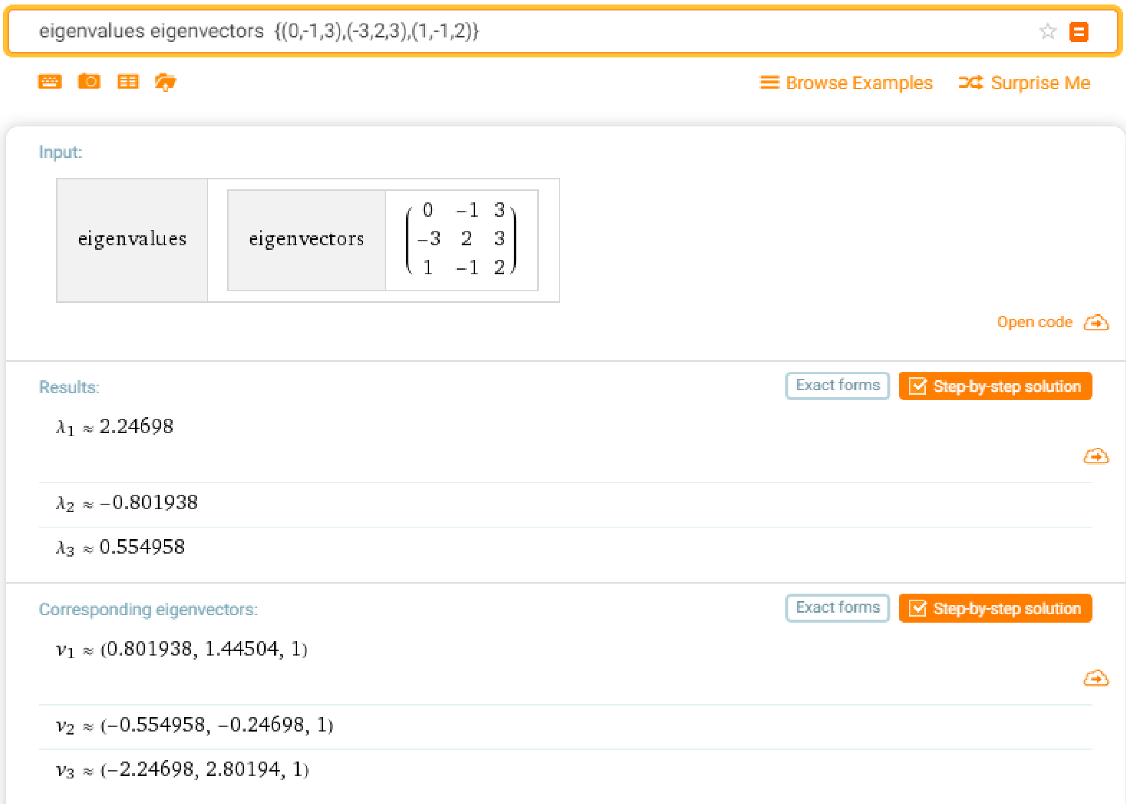
Calculate its eigenvalues and eigenvectors. Determine wether it is diagonalizable and, if so, calculate a diagonal matrix associated to it.

Primero se pide calcular los valores y los vectores propios. Para ello se introduce en la barra de búsqueda el comando *eigenvalues* seguido de la matriz y una vez se han calculado se procede de la misma manera, pero con el comando *eigenvectors* seguido de la matriz.

Los valores propios son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Los vectores propios son: $v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,1,1), v_3 = (1,0,1)$.

Hay que comentar que si se intenta introducir el comando *eigenvalues eigenvectors* todo junto hace que *Wolfram Alpha* muestre un resultado erróneo.



Ahora se procede a calcular si la matriz es diagonalizable, y en caso afirmativo se calculará su matriz diagonal asociada a ella.

Para ver si la matriz es diagonalizable se introduce en la barra de búsqueda el comando *diagonalize* seguido de la matriz.

Se observa que la matriz sí es diagonizable y su matriz diagonal asociada es J con matrices de paso S y S^{-1}.

Ejercicio 2

Study wether the following endomorphisms are diagonalizable and, if so, calculate its diagonal matrix.

(a) The endomorphism with matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 9 \end{pmatrix}.$$

(b) The endomorphism $f(x, y) = (-y, x)$.

(c) The endomorphism of $\mathbb{R}^3$ such that $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (3, -1, 0)$, $f(0, 0, 1) = (2, 3, 1)$.

(d) The endomorphism in $\mathbb{R}^3$ such that $f(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$, $f(0, 1, 0) = (0, 3, 0)$ and $f(0, 0, 1) = (1, 0, 2)$.

(e) The endomorphism $f(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, y, -2x - 3z)$.

(f) The endomorphism $f(x, y, z) = (2x - 2y + z, x + 3y + z, y + 2z)$.

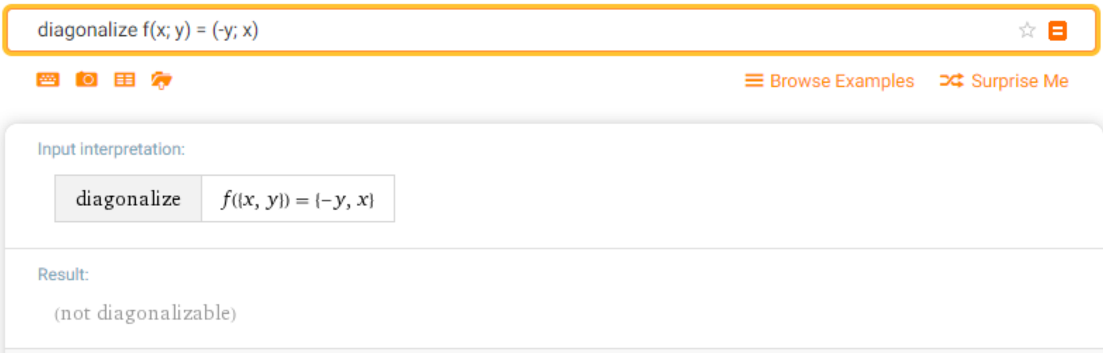
(a) Primero hay que ver si la matriz es diagonalizable y en caso afirmativo calcular la matriz diagonal.

Para ello se introduce en la barra de búsqueda el comando *diagonal matrix* seguido de la matriz.

Se observa que la matriz es diagonalizable y su matriz diagonal semejante es $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Los valores propios son $\lambda_1 = 8 \;\; \lambda_2 = 12$, evidentemente los mismos que aparecen en la diagonal de la matriz diagonal semejante a la inicial.

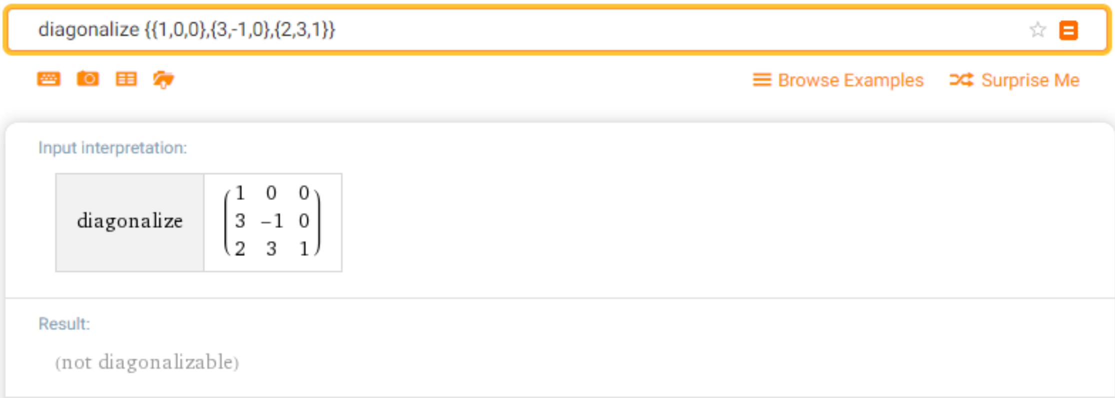
(b) Se calcula si la matriz es diagonalizable:



Al no ser diagonalizable no se puede calcular la matriz diagonal.

(c) Primero hay que determinar la matriz ya que no aparece explícitamente en el enunciado del ejercicio. Una vez obtenida la matriz se procede de la misma manera que antes.

Para ello se introduce en la barra de búsqueda el comando *diagonalize* seguido de la matriz.



Como se puede ver, no es diagonalizable. A continuación, hay que calcular el polinomio característico y los valores propios, para lo cual se introduce en la barra de búsqueda el comando *characteristic polynomial* seguido de la matriz.

El polinomio característico es: $-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1$.

Ahora, para calcular los valores propios se introduce en la barra de búsqueda el comando *eigenvalues* seguido de la matriz.

Como se puede comprobar, los valores propios son $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1$.

(d) Se procede de la misma manera que en el apartado anterior, obteniendo en primer lugar la matriz a la que hace referencia y luego determinando si es diagonalizable.

Una vez obtenida la matriz asociada al endomorfismo se introduce en la barra de búsqueda el comando *diagonalize* seguido de la matriz asociada.

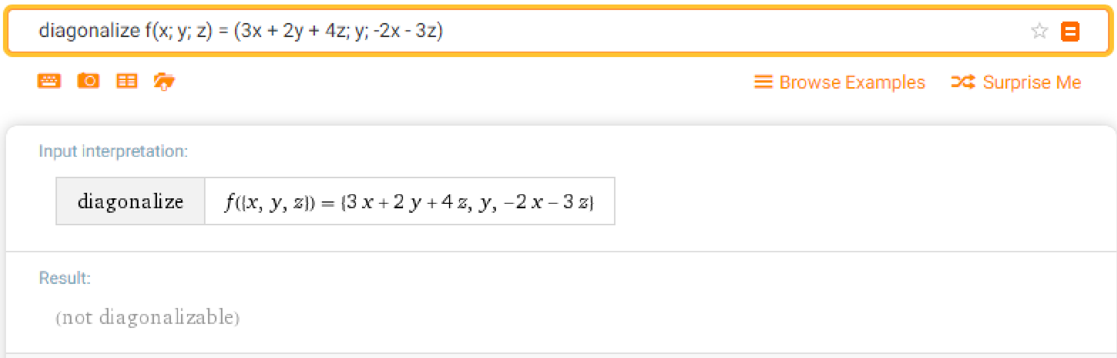
Se observa que es diagonalizable y que su matriz diagonal semejante es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Teniendo la matriz diagonizable se puede decir que los valores propios son: $\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 3,\quad \lambda_3 = 3$.

Para calcular el polinomio caracerístico se introduce en la barra de búsqueda el comando *characteristic polynomial* seguido de la matriz correspondiente.

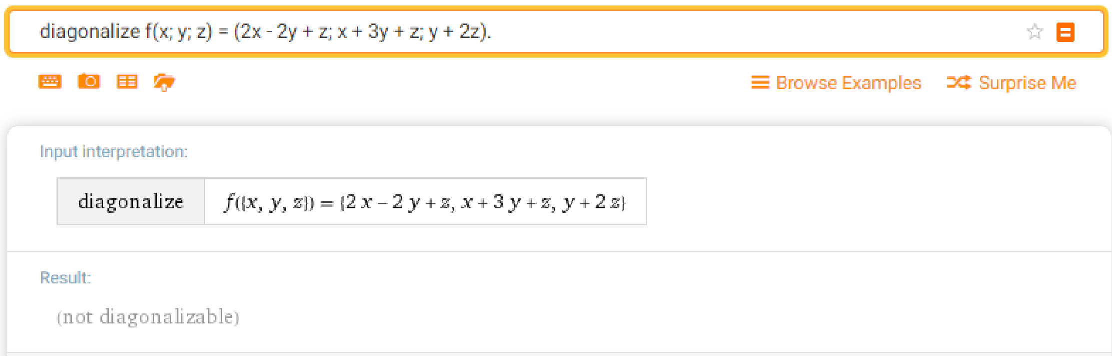
Vemos que el polinomio característico es $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9$.

(e) Se procede de la misma manera que en el caso anterior, primero hay que estudiar si es diagonalizable. Para ello se introduce en la barra de búsqueda el comando *diagonalize* seguido de la matriz.



En este caso la matriz no es diagonalizable.

(f) Se procede de la misma manera que en el caso anterior, decidiendo en primer lugar si la matriz es diagonalizable. Para ello se introduce en la barra de búsqueda el comando *diagonalize* seguido de la matriz.



De nuevo la matriz no es diagonalizable.

4.4 Formas cuadráticas

Se llama forma cuadrática a una aplicación Q de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ tal que su expresión sea un polinomio homogéneo de segundo grado con n variables:

$$Q : \Re^n \rightarrow \Re$$

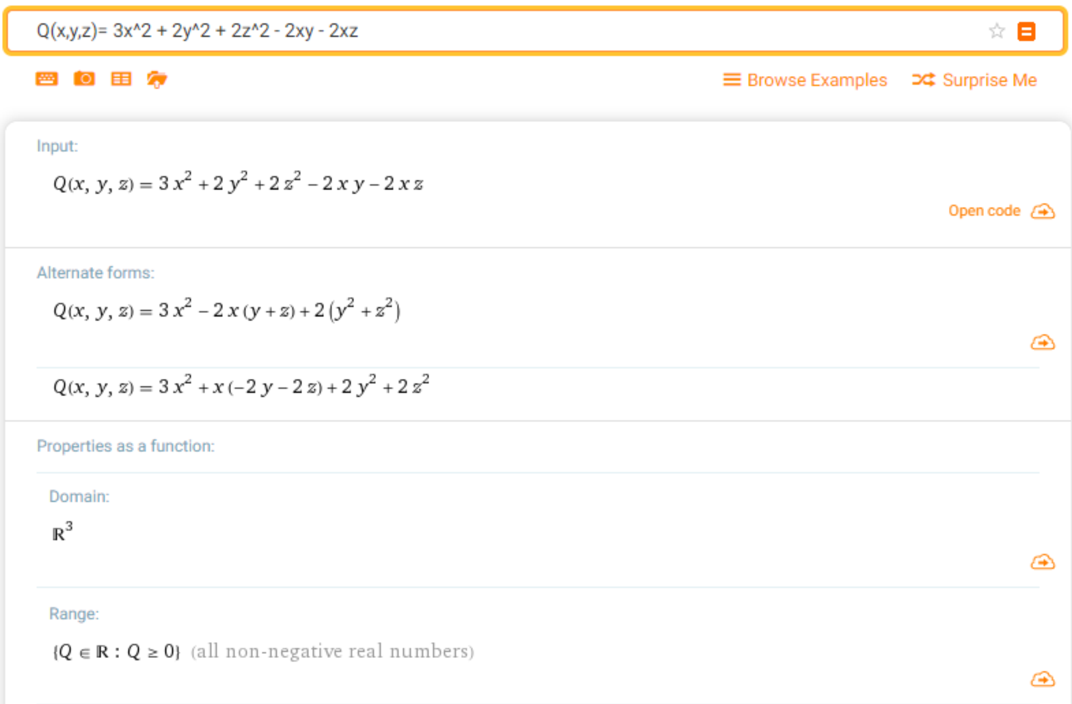
$$(x_1 \ldots x_n) \rightarrow (x_1 \ldots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x_1^{\ 2} + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{nn}x_n^{\ 2}$$

En el estudio de formas cuadráticas hemos encontrado algunas limitaciones en el uso de *Wolfram Alpha* que se exponen a continuación:

a) <u>De expresión polinómica a forma matricial</u>: A la hora de estudiar las formas cuadráticas no fue posible encontrar ninguna forma de conseguirlo con *Wolfram Alpha*. Si bien esto puede parecer un problema importante ya que en la mayoría de los problemas es algo que se debe realizar, en la práctica no suele ser un contratiempo tan determinante ya que es una propiedad sencilla que los estudiantes suelen realizar con cierta agilidad.

Se puede ver que *Wolfram Alpha* no es capaz de mostrar la función como una matriz.



b) <u>De forma matricial a expresión polinómica</u>: *Wolfram Alpha* es capaz de obtener la expresión polinómica de una matriz. Para conseguirlo se debe tener en cuenta su definición:

$$(x_1 .. x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vamos a resolver un ejercicio para ver cómo se introduce en *Wolfram Alpha*:

Tenemos la siguiente matriz, determinar su forma cuadrática.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos la fórmula que se introduce de la siguiente forma:

$$(x, y, z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Una vez se ha introducido *Wolfram Alpha* proporcionará la forma cuadrática asociada a la matriz:

Input:

$$\{x, y, z\}.\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.\{x, y, z\}$$

Open code

Result:

$$y\left(\frac{3z}{2} - \frac{x}{2}\right) + x\left(2x - \frac{y}{2}\right) + z\left(\frac{3y}{2} - z\right)$$

Alternate forms:

More

$$\frac{1}{8}(4x - y)^2 + \frac{1}{8}(-y^2 + 24yz - 8z^2)$$

$$2x^2 + y(3z - x) - z^2$$

$$2x^2 - xy + 3yz - z^2$$

La expresión polinómica de la forma cuadrática es: $2x^2 - xy + 3yz - z^2$.

c) <u>Clasificación de formas cuadráticas</u>: Se pueden clasificar en definidas positivas, definidas negativas, semidefinidas positivas, semidefinidas negativas e indefinidas. A la hora de determinar el signo de una forma cuadrática, *Wolfram Alpha* utiliza una expresión bastante sencilla, pero un tanto repetitiva consistente en preguntar al programa si la matriz es de cada uno de los tipos mencionados. Esta forma de determinar de qué tipo cada forma cuadrática presenta el inconveniente que hay que preguntar en cada uno de los casos hasta que en alguno se responda de una manera positiva. Como se ha visto anteriormente, *Wolfram Alpha* no es capaz de interpretar formas cuadráticas directamente, con lo que se le debe introducir la matriz asociada a la forma cuadrática que se desee conocer. Las expresiones que se utilizan son las siguientes:

1. Si se quiere conocer si es definida positiva se introduce en la barra de búsqueda la expresión "Is seguido de la matriz positive definite?"
2. Si se quiere conocer si es definida negativa se introduce en la barra de búsqueda la expresión "Is seguido de la matriz negative definite?"
3. Si se quiere conocer si es semidefinida positiva se introduce en la barra de búsqueda la expresión "Is seguido de la matriz positive *semidefinite*?"
4. Si se quiere conocer si es semidefinida negativa se introduce en la barra de búsqueda la expresión "Is seguido de la matriz negative *semidefinite*?"
5. Si se quiere conocer si es indefinida se introduce en la barra de búsqueda la expresión "Is seguido de la matriz *indefinite*?"

Vamos a ver como se aplica a un ejemplo:

Determine the definiteness of the following quadratic forms:

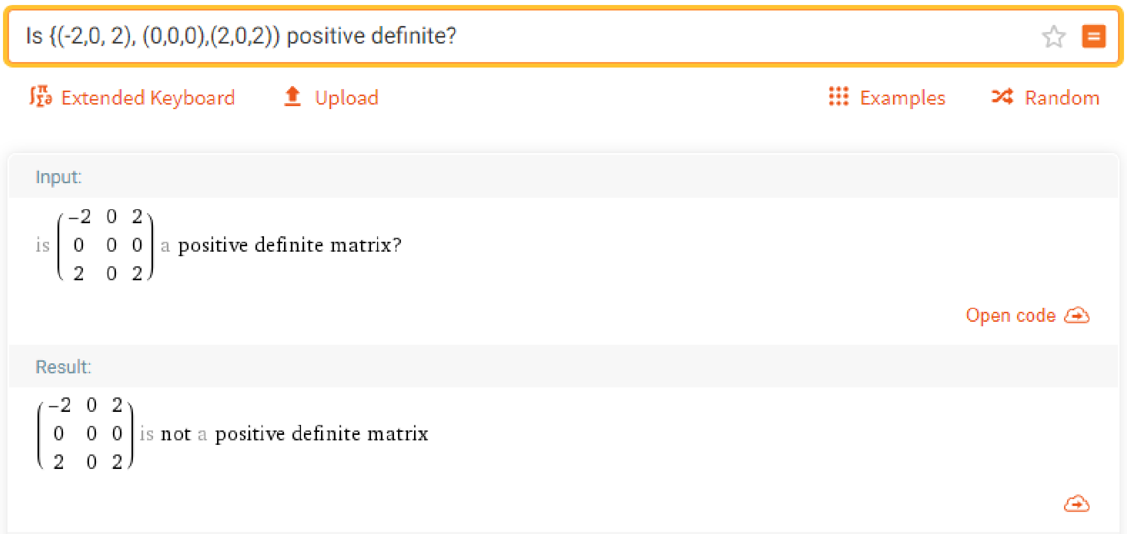
(a) $Q(x, y, z) = -2x^2 + 4xz + 2z^2$.

(b) $Q(x, y) = 3x^2 - 4xy + 7y^2$.

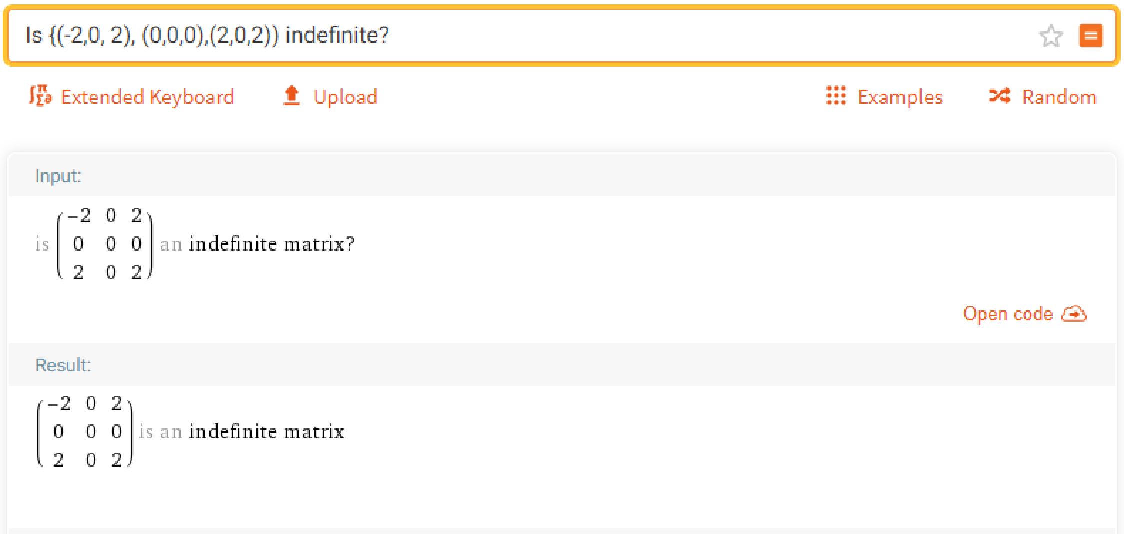
(a) Como se ha explicado anteriormente primero se ha de obtener la matriz asociada a la forma cuadrática:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vez que se ha obtenido consiste en preguntarle a *Wolfram Alpha* si la matriz es definida positiva, definida negativa, etc.



No es definida positiva por lo que se volverá a preguntar a *Wolfram Alpha*.

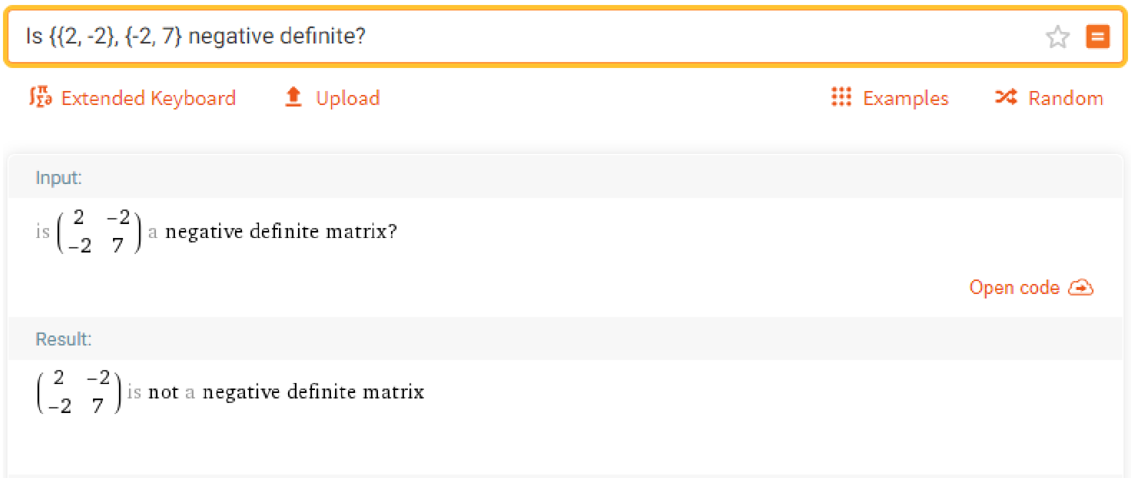


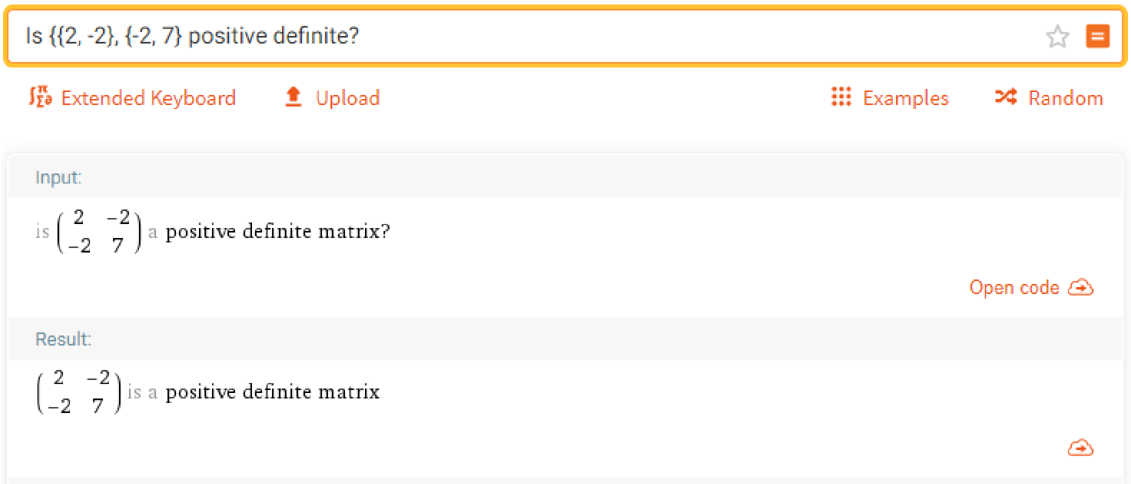
Se observa que la matriz asociada a la forma cuadrática es indefinida.

(b) Se procederá de la misma forma que en el apartado anterior. Primero se calcula la matriz asociada.

B= $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

Una vez calculada se vuelve a preguntar a *Wolfram Alpha* hasta obtener la respuesta.





Se observa que la función es definida positiva.

d) <u>Clasificación de formas cuadráticas con restricciones</u>: En el supuesto que se tenga que determinar el signo de una forma cuadrática que tenga alguna restricción, se procederá a resolver la forma cuadrática aplicándole la restricción manualmente y una vez que se haya obtenido la forma cuadrática restringida se obtendrá la matriz asociada y se procederá a resolver como en el caso (c) anterior.

Vamos a ver como se aplica a un ejemplo:

Example 58. We will determine the definiteness of the quadratic form

$$Q(x, y, z) = x^2 - xy + z^2$$

when restricted to the vector subspace $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y = 0, z = 0\}$.

Se pide determinar que clase de forma cuadrática es la expresión Q.

Primero se resuelven las ecuaciones implícitas y se obtiene que:

$y = 2x, \ z = 0.$

Una vez se tienen dichas ecuaciones se procede a sustituir en Q.

$$q(x) = x^2 - x(2x) + 0^2 = -x^2.$$

La matriz asociada es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}.$$

Se puede observar que el valor propio de la matriz es negativo por lo que q es definida negativa. Por lo tanto, Q será definida negativa en el subespacio S.

5. APLICACIÓN DE *WOLFRAM ALPHA* A DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN

Esta parte está dedicada a la resolución de problemas relacionadas con las derivadas, integrales y su aplicación a la Empresa con el software *Wolfram Alpha*. El programa resulta bastante útil porque agiliza el cálculo a la hora de encontrar la solución, pero se ha de tener en cuenta que *Wolfram Alpha* no interpreta el resultado de los problemas matemáticos, por lo que se debe entender qué es lo que se está pidiendo y cuál es el significado de los datos obtenidos.

5.1 Derivadas y su aplicación a las Matemáticas

Los conceptos que vamos a utilizar son los siguientes:

- Dominio: Para calcular el dominio hay que introducir en la barra de búsqueda la palabra *domain of* seguido de la función a la que se le quiere calcular el dominio. Wolfram Alpha no es capaz de reinterpretar el comando *domain of* si este se introduce en español (dominio).

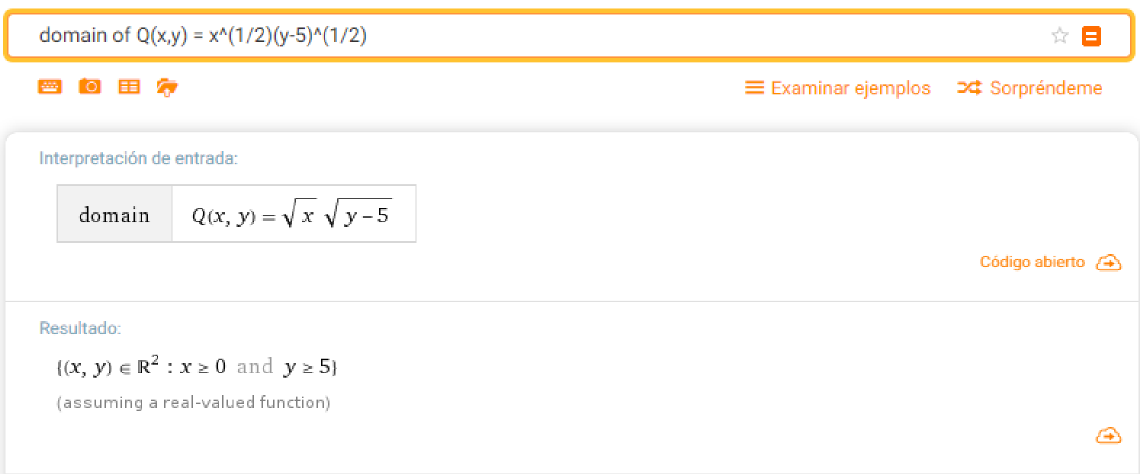
Vamos a ver cómo aplicarlo a un ejemplo:

Let $Q(x,y) = x^{1/2}(y-5)^{1/2}$ be a production function that measures the quantity produced of a certain good depending on the quantities x and y of two inputs.

(a) Determine and represent graphically the domain of Q.

(b) Calculate and represent graphically the isoquant of level $Q = 10$ and indicate whether the combinations of inputs $(16, 15)$ and $(20, 10)$ lies on it.

(a) Se introduce en la barra de búsqueda el comando "domain of" seguido de la función:



Se observa que el dominio es $Dom\ (f) = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 / x \geq 0, y \geq 5\}$.

(b) Tenemos que aplicar conceptos matemáticos, y en la función de producción sustituir Q por el valor 10.

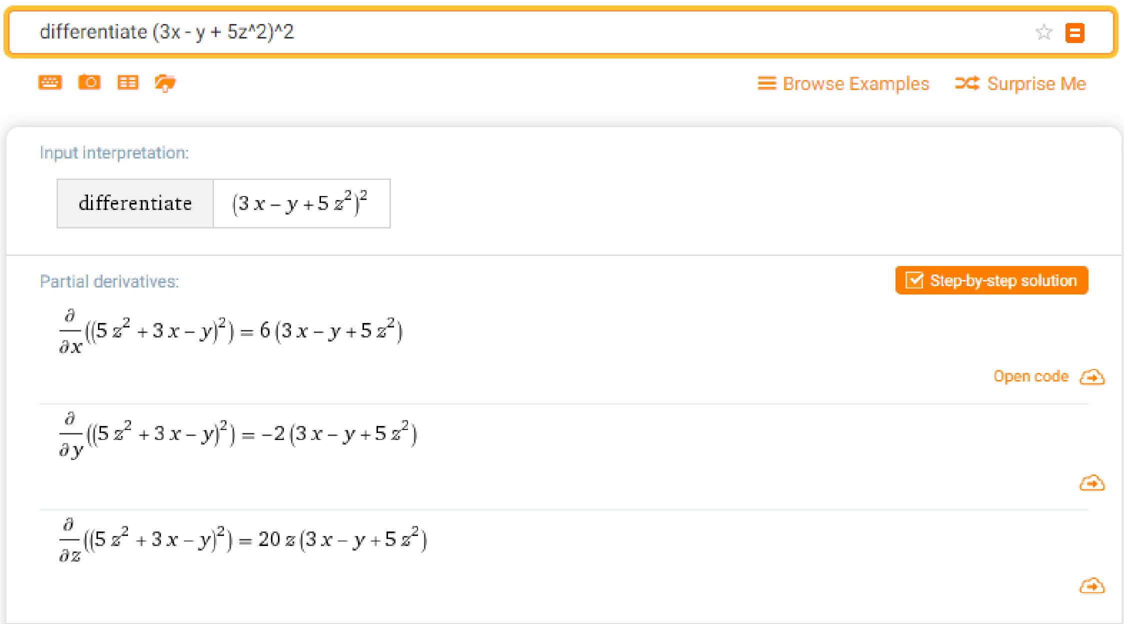
Una vez se ha sustituido, basta con comprobar si los puntos obtenidos pertenecen o no pertenecen sustituyendo por las incógnitas de la función.

- Derivadas parciales de primer orden: Para calcular derivadas parciales de primer orden se introduce en la barra de búsqueda el comando *differentiate* o *derivative* seguido de la función más las palabras *with respect to* seguidas de la variable la cual se va a derivar. Hay que tener en cuenta que si no se introduce respecto a que variables derivar el programa calculará la derivada respecto de todas las variables. Wolfram Alpha es capaz de interpretar el comando si se introduce en español (derivar).

Veamos un ejemplo:

Given the function $f(x, y, z) = (3x - y + 5z^2)^2$, find the first order partial derivatives of f at $(1, 1, 1)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$.

Como el ejercicio pide calcular todas las derivadas parciales de primer orden y no una en particular bastará con introducir en la barra de búsqueda el comando *differentiate* seguido de la función:



Una vez obtenidas las derivadas parciales de primer orden bastará con sustituir en ellas el punto que deseemos:

$Para\ x: 6 * (3 * 1 - 1 + 5 * 1) = 42$

$Para\ y{:}\ -2 * (3 * 1 - 1 + 5 * 1) = \ -14$

$Para\ z{:}\ 20 * (3 - 1 + 5 * 1) = 140$

- <u>Gradiente</u>: Para calcular el gradiente se introduce en la barra de búsqueda el comando *gradient of* seguido de la función a la que calcular el gradiente. Wolfram Alpha no es capaz de reinterpretar el comando *gradient* si este se introduce en español (gradiente).

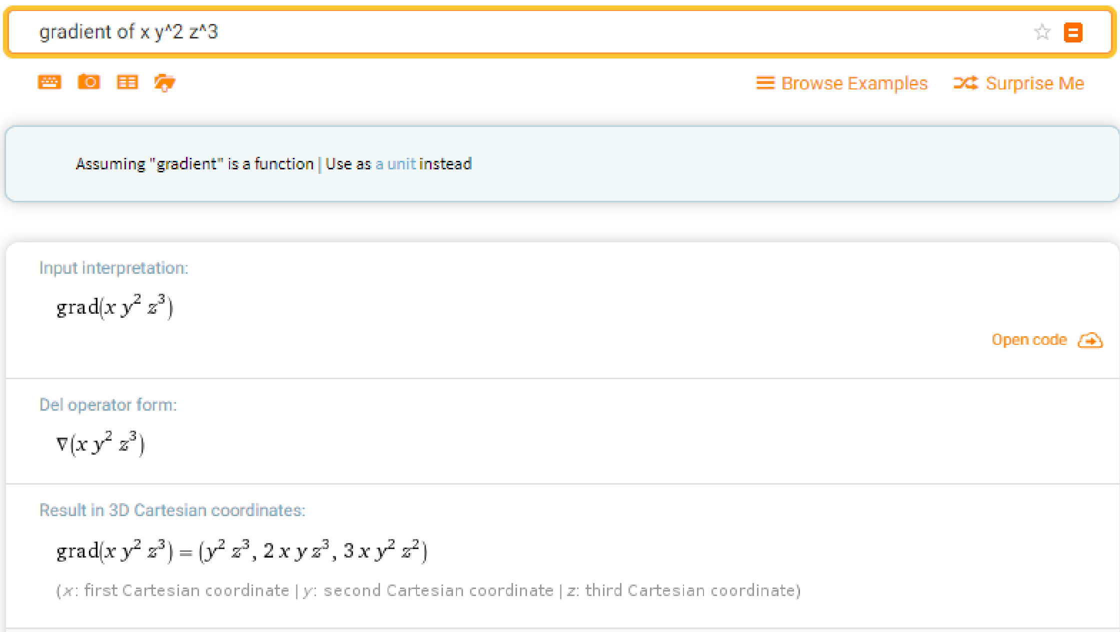
Vamos a ver un ejemplo:

Find the following gradients:

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^2$ at $(3, -3, 1)$.
(b) $f(x, y) = xe^{xy} + ye^{-x^2}$ at (x, y).
(c) $f(x, y, z) = z \log(x + y)$ at $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

Se pide calcular los gradientes para diversos tipos de funciones.

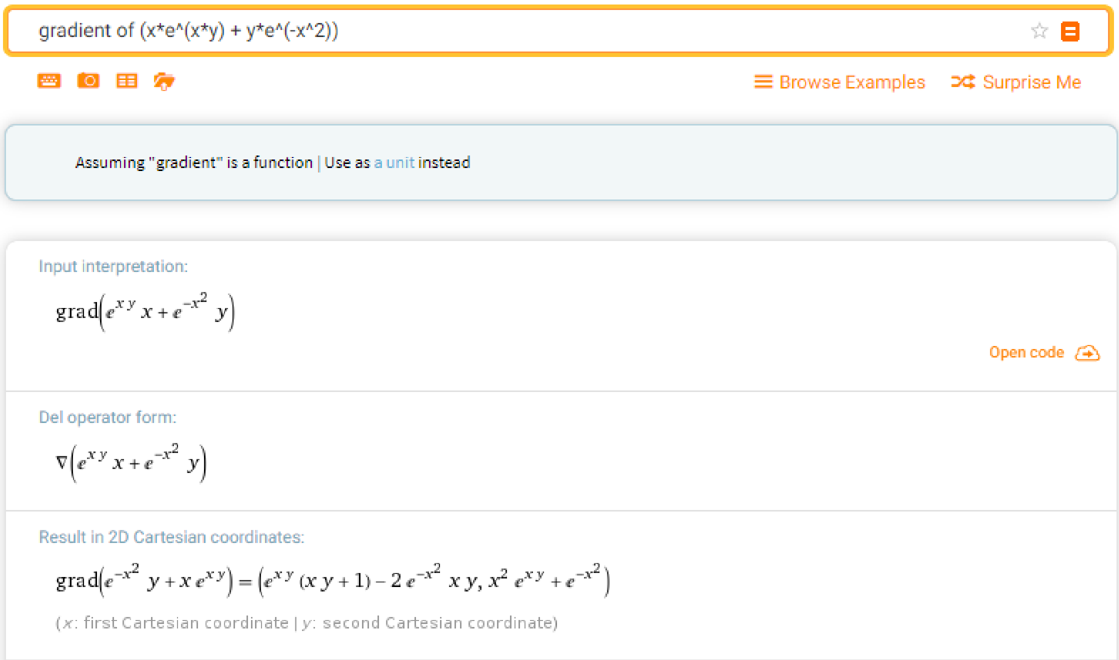
(a) Se introduce en la barra de búsqueda el comando *gradient of* seguido de la función correspondiente.



Como se ve en vez de utilizarx_1, x_2, x_3 *se ha utilizado* x, y, z, para facilitar la escritura en *Wolfram Alpha*. También se puede observar que *Wolfram Alpha* interpreta el comando *gradient* como una función.

La solución será el resultado 3D en coordenadas cartesianas. Para calcularlo en el punto bastará con sustituir en el resultado por los puntos que se pidan.

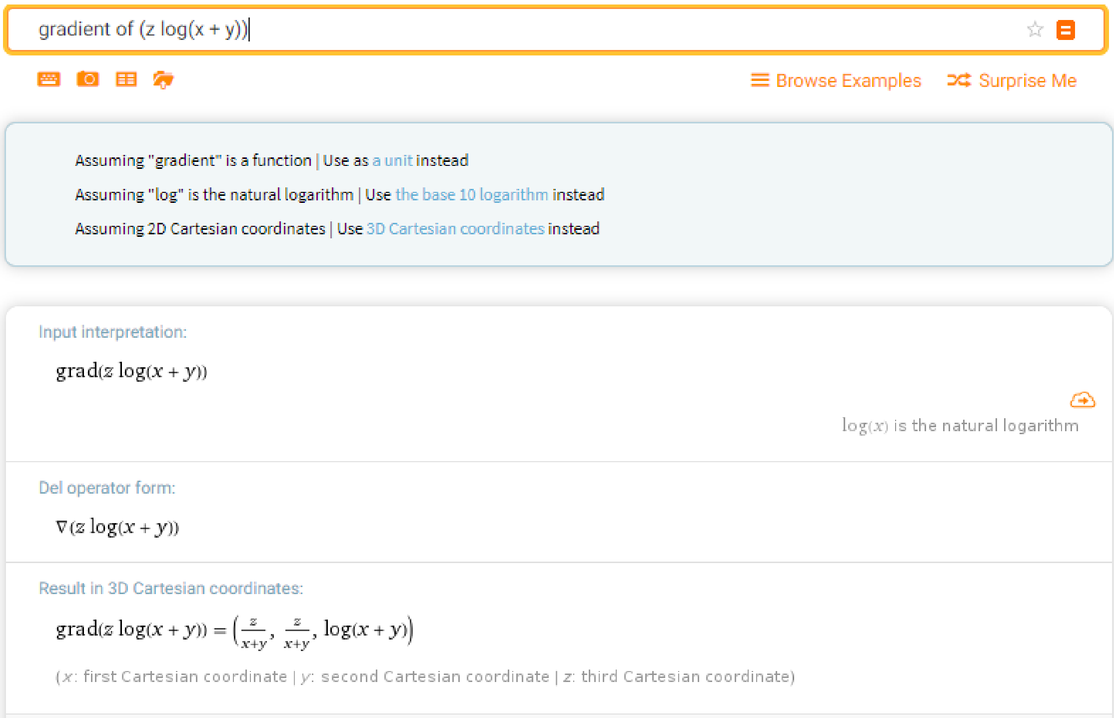
(b) Se resuelve de la misma forma que en el apartado anterior. Se introduce en la barra de búsqueda el comando *gradient of* seguido de la función correspondiente:



Para calcular el punto bastará con sustituir en el resultado manualmente en el “result in 2D Cartesian coordinates”. Se observa que *Wolfram Alpha* es capaz de trabajar con bases neperianas.

(c) Se vuelve a calcular el gradiente.

Para ello se introduce en la barra de búsqueda el comando *gradient of* seguido de la función:



Se observa que *Wolfram Alpha* puede operar con logaritmos.

Una vez se obtiene el resultado, para calcular el punto bastará con sustituir en este por las coordenadas que se den.

- Matriz y determinantes hessianos: Para calcular la matriz hessiana se introduce en la barra de búsqueda el comando *hessian matrix* seguido de la función a la que se le va a calcular la matriz.
  Para calcular el determinante hessiano se introduce en la barra de búsqueda el comando *hessian of* seguido de la función a la que se le va a calcular el determinante hessiano. Wolfram Alpha no es capaz de reinterpretar estos comandos si se introducen en español.

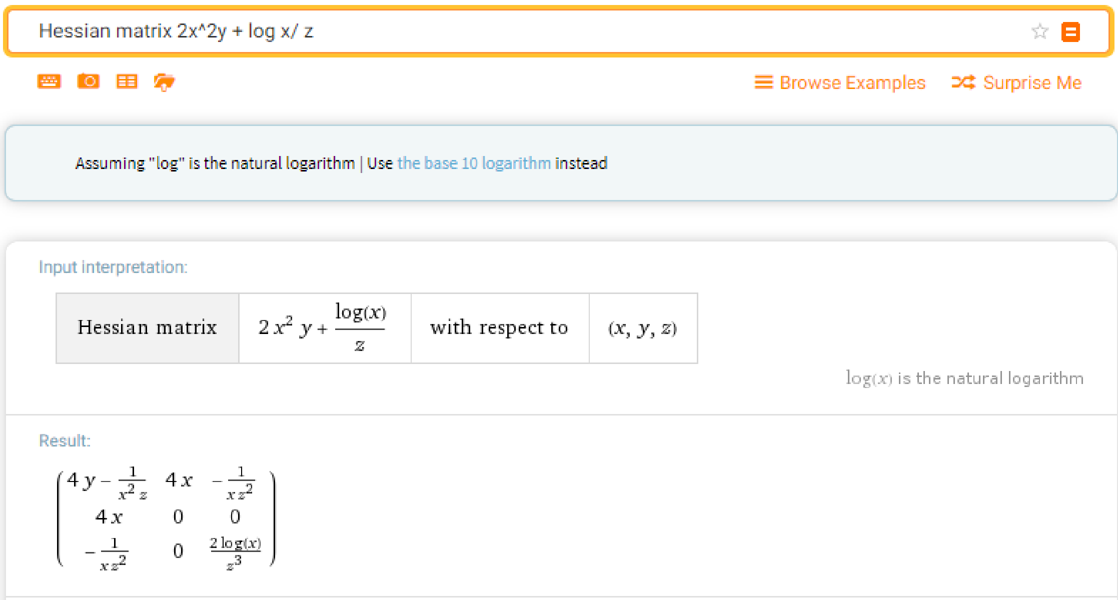
Veamos un ejemplo:

Find the Hessian of the following functions at $(1, 1, 1)$:

(a) $f(x, y, z) = 2x^2y + \frac{\log x}{z}$.

(b) $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2^3 - x_3x_1^5 + x_1^2x_2x_3$.

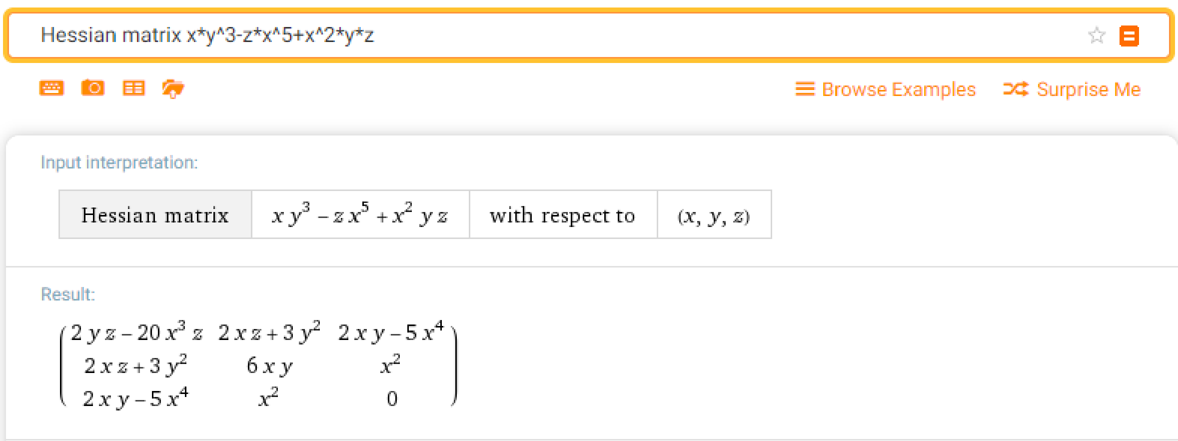
(a) Primero hay que introducir en la barra de búsqueda el comando *hessian of* y la función que se quiere calcular de la siguiente manera:



Una vez que se calcula la matriz hessiana hay que sustituir en el resultado por los puntos que se dan para así obtener la función respecto de ese punto.

(b) Se calcula la matriz hessiana, pero en vez de utilizar x_1, x_2, x_3 utilizamos x, y, z para facilitar la escritura en *Wolfram Alpha*.

Para ello se introduce en la barra de búsqueda el comando *hessian matrix* y la función que se quiere calcular de la siguiente manera:



Una vez se ha calculado la matriz hessiana solo queda sustituir por el punto que se ha dado en el ejercicio.

Una vez se ha visto un ejemplo de cada concepto se va a proceder a la resolución de ejercicios más complejos en los que es necesario saber interpretar para calcular lo que se pide.

A firm manufactures a good using two factors of production, A and B in quantities x and y which it acquires at unit prices €15 and €10 respectively. The firm's production function is $Q(x,y) = 3\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ and it sells its products at a unit price of €10. Currently, the quantities used are $x = 36$ and $y = 27$. Calculate the marginal profit of both inputs and explain the results.

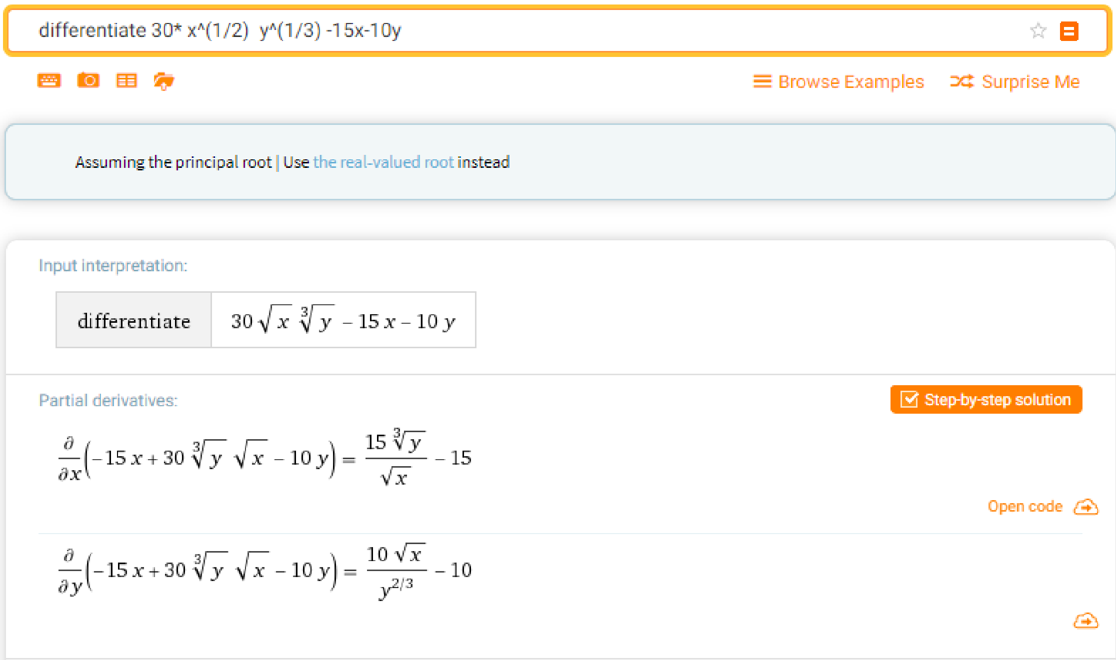
Primero hay que sacar la función de beneficio de la empresa, para poder aplicar *Wolfram Alpha*.

Para sacar la función de beneficio se multiplica el precio de venta de los productos por la función de producción. Esto son los ingresos. Los gastos se calculan restando a los precios de adquisición los de los productos.

La función de beneficio queda de la siguiente manera:

$$B(x,y) = 10 \cdot \left(3\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\right) - [15x + 10y] = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 15x - 10y.$$

Como se pide calcular los beneficios marginales de los productos x e y, se aplica la primera derivada respecto de x y respecto de y. Calculada la primera derivada, se sustituye por las cantidades usadas:



Calculadas las expresiones se sustituye:

$$\frac{\partial B}{\partial x}(36, 27) = -\frac{15}{2}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(36, 27) = -\frac{10}{3}.$$

Ahora se procederá a la resolución de un ejercicio tipo examen en el que no se pida directamente derivar.

The utility function of two consumer goods A and B purchased in amounts of x units and y units respectively, is:

$$U(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - \frac{1}{2}xy$$

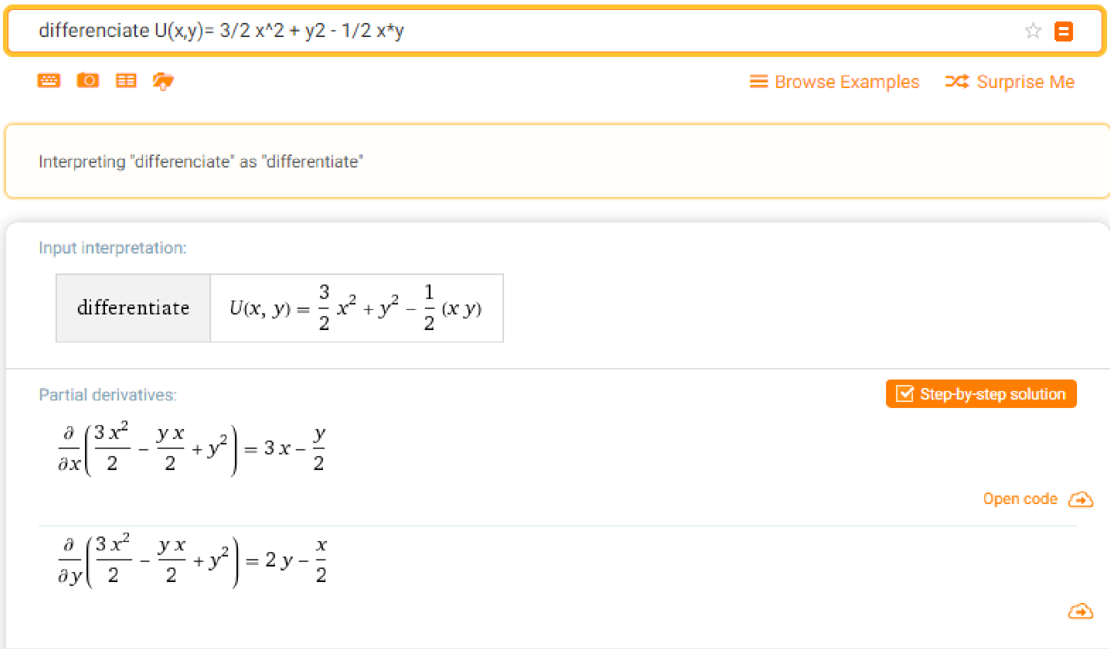
A consumer purchases 1 unit of A, and 2 units of B.

(a) Calculate the marginal rate of substitution of one good for another, required to maintain utility at the same level.

(b) Estimate how consumption of the second good should change if the consumer wishes to consume 1.5 units of x instead of 1 unit while maintaining the same utility level.

(a) Se pide calcular la tasa marginal de sustitución de un bien sin que varíe el nivel de utilidad. Para ello se deriva parcialmente x sobre y, y se deriva parcialmente y sobre x.

Se introduce en la barra de búsqueda el comando *differenciate* y la función a la que se quiere calcular de la siguiente manera:



Una vez que se calculan ambas derivadas parciales sustituiríamos en x=1, y=2.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial U}{\partial y}(1,2)} = -\frac{2}{7/2} = -\frac{4}{7}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial y}(1,2)}{\frac{\partial U}{\partial x}(1,2)} = -\frac{7/2}{2} = -\frac{7}{4}$$

Después de sustituir y obtener los resultados se puede interpretar que:

Por cada unidad de aumento de x, y debería disminuir aproximadamente en $4/7$ unidades para mantener la utilidad al mismo nivel, y por cada unidad de aumento de y, x debería disminuir aproximadamente en $7/4$ unidades para mantener la utilidad al mismo nivel.

(b) Se pide ver como variaría el consumo para x=1 manteniendo el mismo nivel de utilidad. Podemos saber que como estamos cambiando la proporción del bien x hay que calcular en:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}(1,2)}{\frac{\partial U}{\partial y}(1,2)}$$

Y como se dice que la producción de x aumenta en 0,5 basta con multiplicar el incremento por $\frac{\partial x}{\partial y} en\ (1,2)$.

$$0.5 \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2}{7}$$

Podemos decir que el consumo debería disminuir en $\frac{2}{7}\ u.m.$

5.2 Integración

Para integrar en *Wolfram Alpha* se tiene que introducir en la barra de búsqueda el comando *integrate* seguido de la función que se quiere integrar. *Wolfram Alpha* es capaz de interpretar el comando *integrate* si este se introduce en español (integrar).

Evaluate the following indefinite integrals:

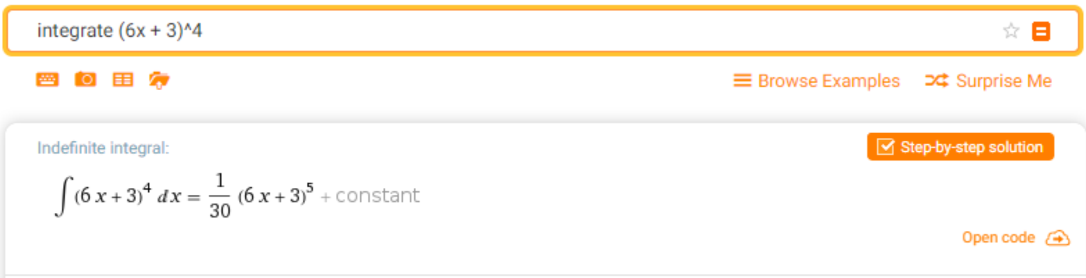
(a) $\int (6x+3)^4\,dx$

(b) $\int \frac{x-5}{(x-5)^2+1}\,dx$

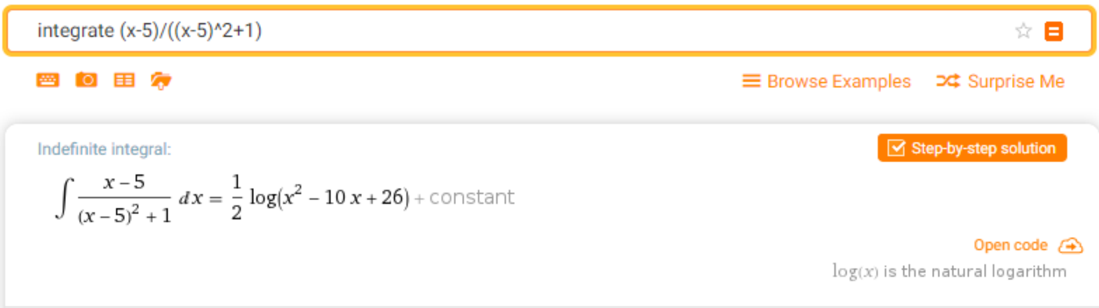
(c) $\int \frac{7x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(d) $\int e^{7x^2}\cdot x\,dx$

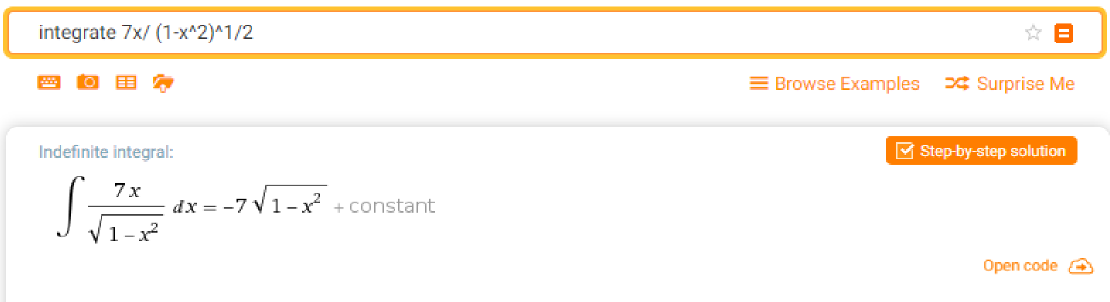
(a) Se Introduce en la barra de búsqueda *integrate* y la función que se va a integrar:



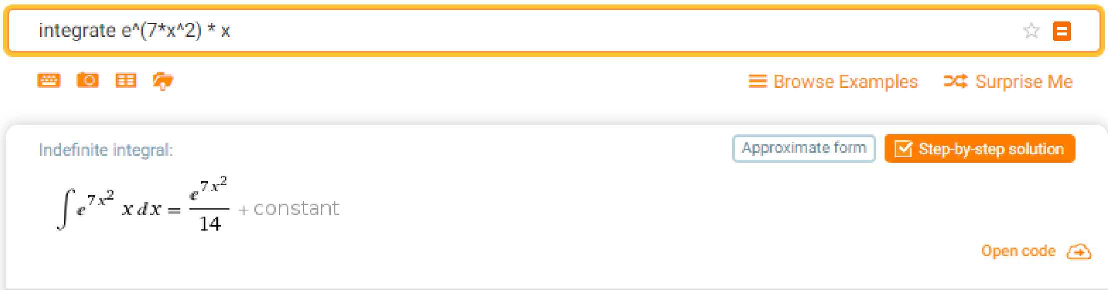
(b)Se repite el proceso:



(c) Se repite el proceso:



(d) Se repite el proceso:



Se puede observar que Wolfram es capaz de entender que la *e* es la base de una función logaritmo natural.

A la hora de introducir la expresión en las integrales definidas el "método directo" puede resultar un poco más complicado ya que se tiene que especificar en qué coordenadas se va a llevar a cabo. Por lo tanto, en estos casos resulta bastante la utilización del "método indirecto".

Para calcular las integrales definidas se tiene que introducir en la barra de búsqueda el comando *integrate* seguido de la función que se quiere integrar seguido de la palabra *from* seguido de las coordenadas.

En el siguiente ejemplo se procederá a su resolución por los dos métodos posibles:

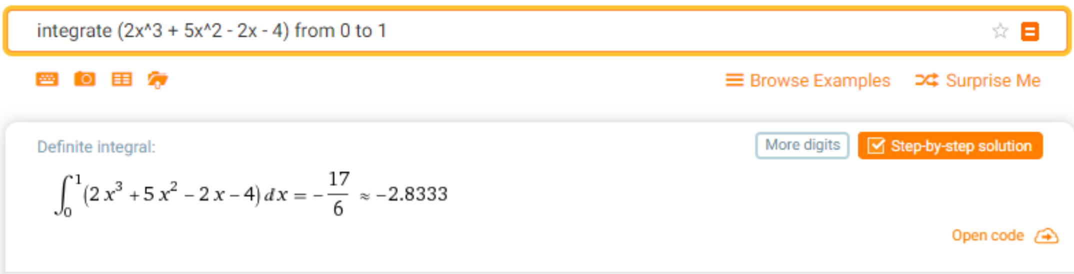
Evaluate the following definite integrals:

(a) $\int_0^1 (2x^3 + 5x^2 - 2x - 4)\,dx$

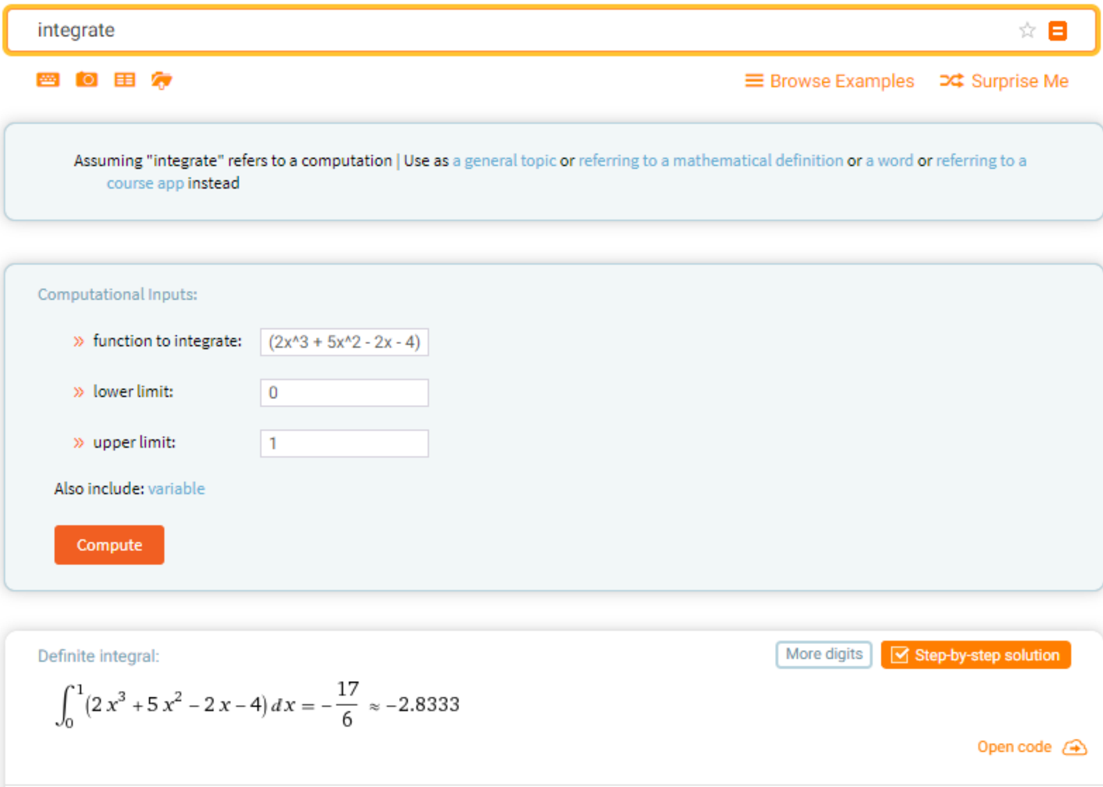
(b) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

Para este ejercicio se va a proceder a su resolución tanto de la manera directa como de la manera indirecta.

(a) De forma directa:

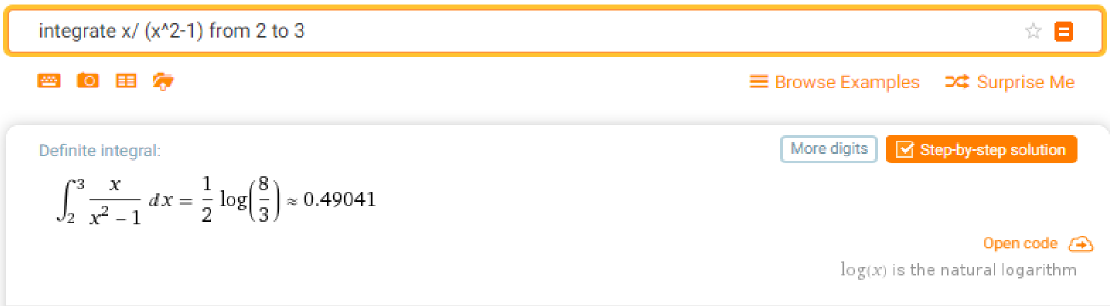


De forma indirecta:

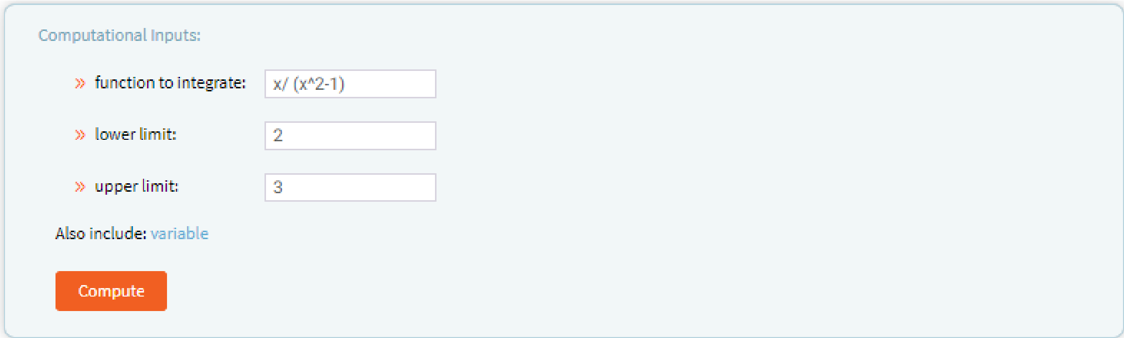


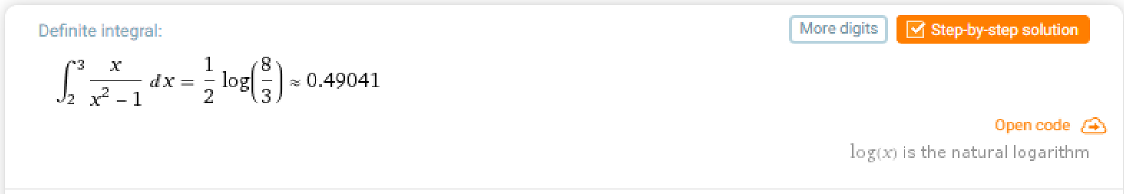
Como se puede ver de la forma indirecta se muestran unos recuadros en donde se introducen cada uno de los límites, lo que evita errores en su reinscripción. Aunque esto no suele ser un problema ya que *Wolfram Alpha* permite ver que se ha interpretado y si se aprecia cualquier error se puede modificar de una manera sencilla.

(b) Manera directa:



Manera indirecta:





- <u>Integrales impropias</u>: Para calcularlas se procede de la misma forma que se ha visto en las integrales definidas. Se introduce en la barra de búsqueda el comando *integrate* seguido de la función que se quiere integrar seguido de la palabra *from* seguido de las coordenadas. Hay que tener en cuenta que solo dará resultado cuando sean convergentes, ya que cuando sean divergentes no tendrá límite.

Veamos algún ejemplo:

Determine wether the following improper integrals are convergent or divergent. When they are convergent, calculate their value.

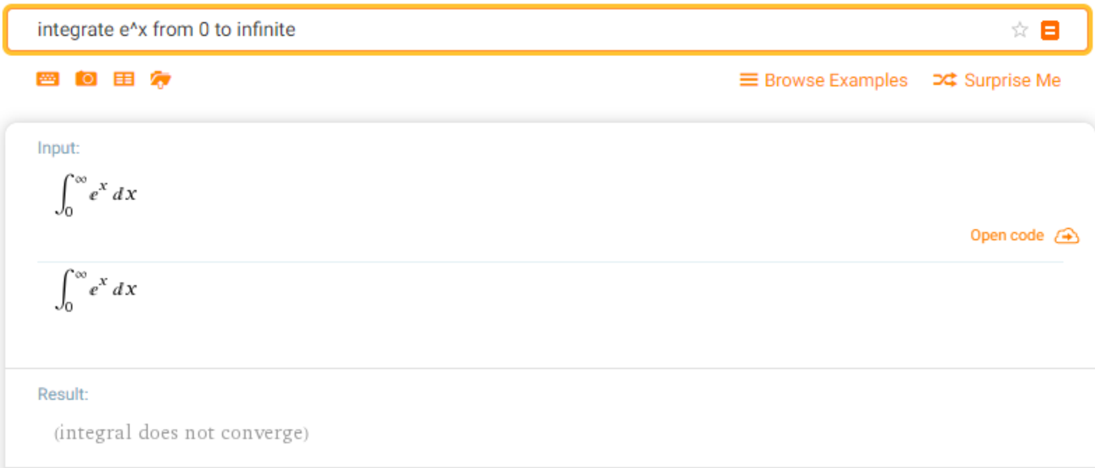
(a) $\int_0^{+\infty} e^x \, dx$

(b) $\int_{-\infty}^{0} x^2 \, dx$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$

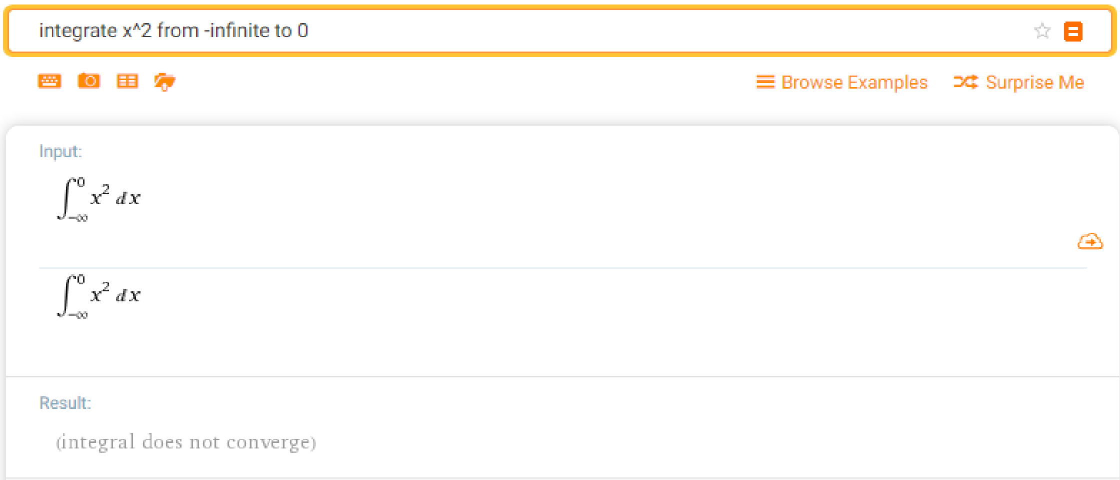
(d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} \, dx$

(a)



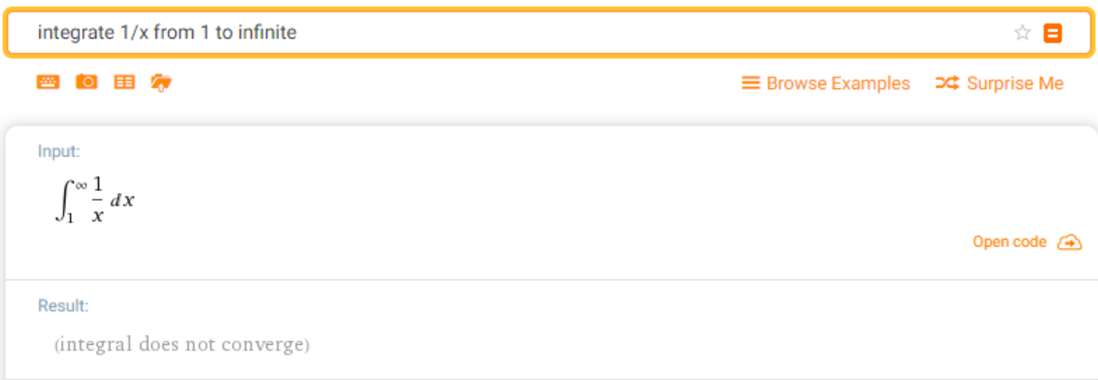
Como se ve *Wolfram Alpha* indica que la integral no converge y por lo tanto no se puede calcular nada.

(b)



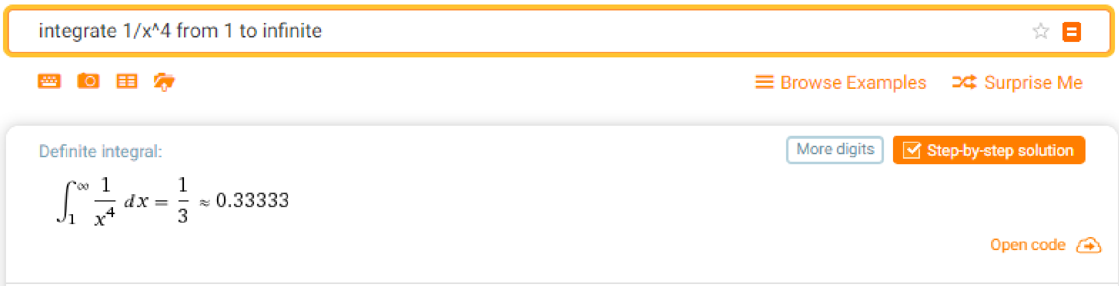
Mismo caso que la anterior ya que la integral es divergente.

(c)



De nuevo la integral es divergente.

(d)



En este caso al ser convergente sí que se puede obtener el valor de la integral impropia.

- <u>Integrales dobles</u>: A la hora de calcular las integrales dobles puede resultar un poco más difícil hacerlo de la forma directa ya que se juntan varios límites y esto puede inducir a errores. Por lo tanto, en determinadas situaciones conviene utilizar la forma indirecta, y así introducir los datos poco a poco.

Veamos algún ejemplo:

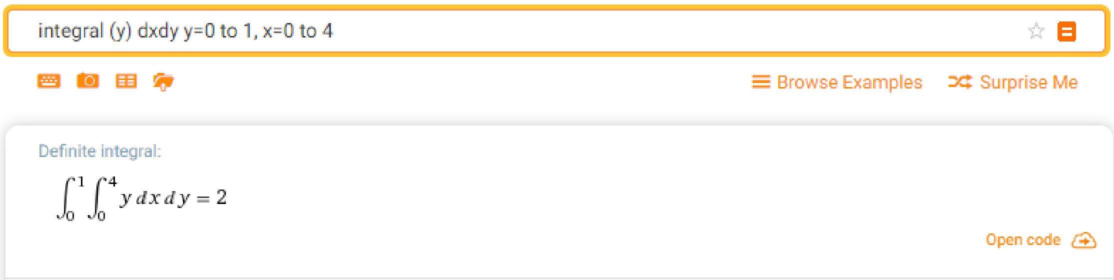
Calculate the following integrals.

(a) $\iint_R y\,dx\,dy\,,\quad R = [0,4]\times[0,1].$

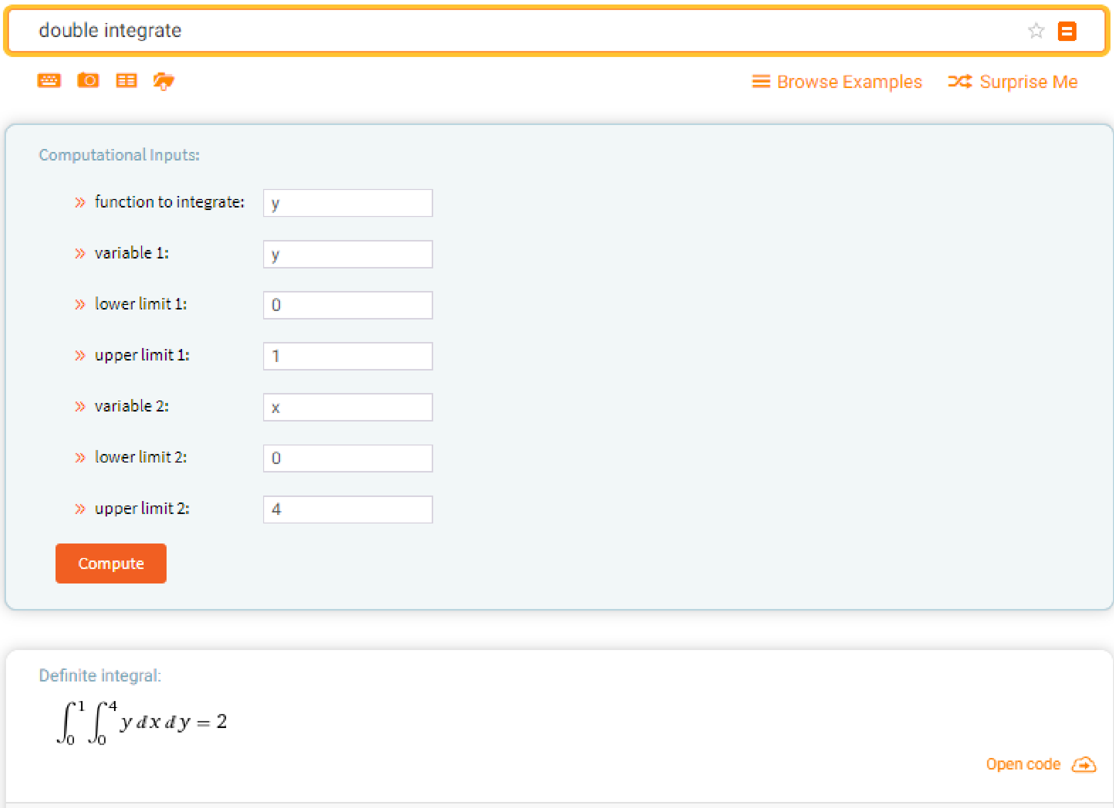
(b) $\iint_R x^2 y\,dx\,dy\,,\quad R = [1,2]\times[0,1].$

En este ejemplo se procederá a su resolución por los dos métodos:

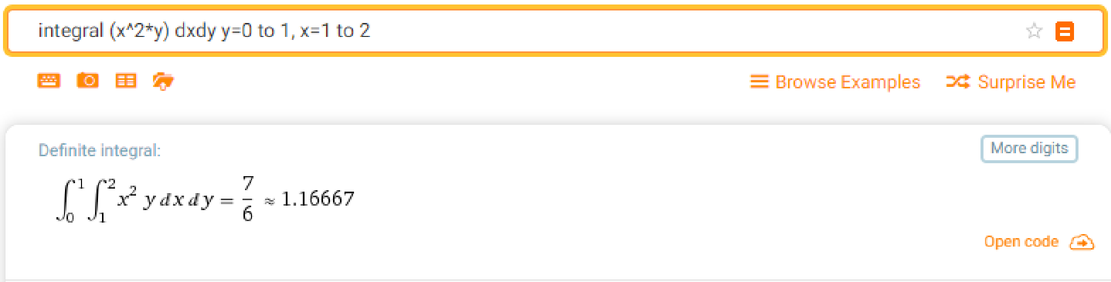
(a) Método directo: Se tiene que introducir el comando *integral* seguido de la función que se desea integrar, el término *dxdy* para indicar las variables de integración y finalmente los límites de integración se incluyen con la expresión y=o to 1



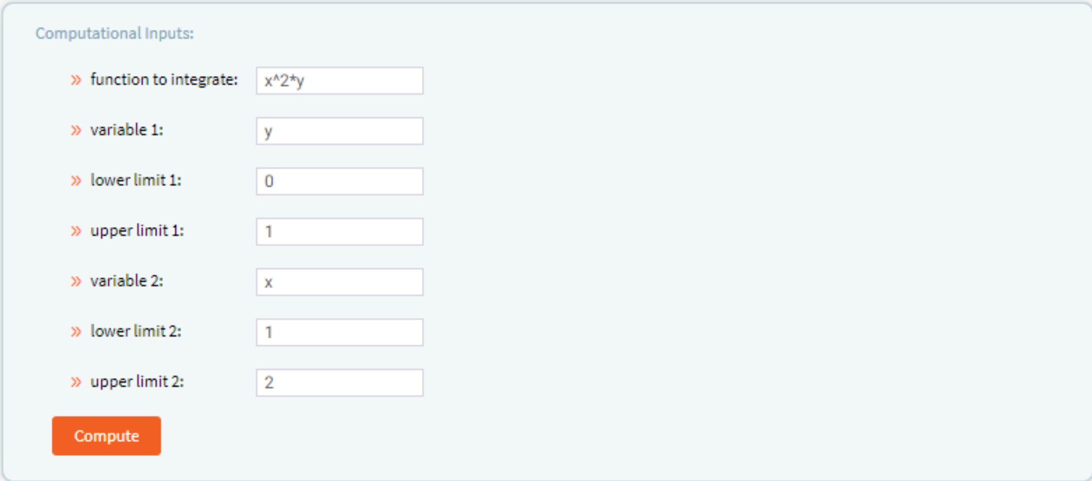
Método indirecto: Al introducir la expresión *double integrate Wolfram Alpha* mostrará una interfaz en la que se podrán introducir los límites con las variables correspondientes.

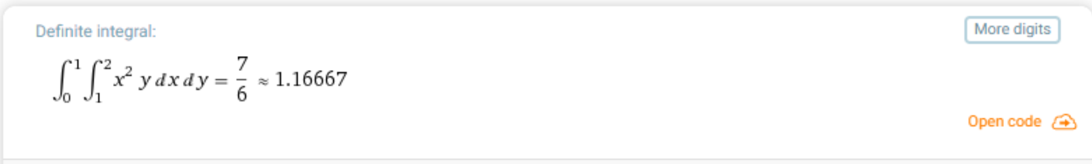


(b) Método directo:



Método indirecto:





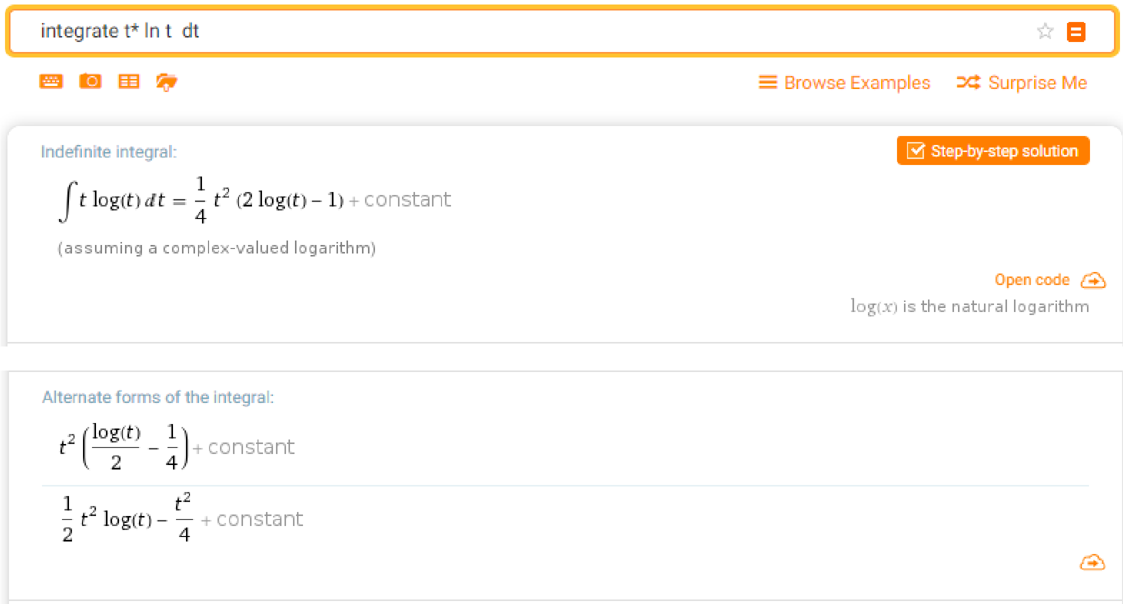
Una vez se ha visto como calcular cada tipo de integral se procederá a realizar un ejercicio tipo examen en donde no se pida directamente integrar.

The value of a piece of art changes through the time following the function $V'(t) = t \cdot \ln t$, being $V(t)$ the value of the piece after t years of the purchase. It is known that, 1 year after the purchase, the value of the piece was €700. What will be its value after 2 years of the purchase? Was it revalued or depreciated between 1 year and 2 years?

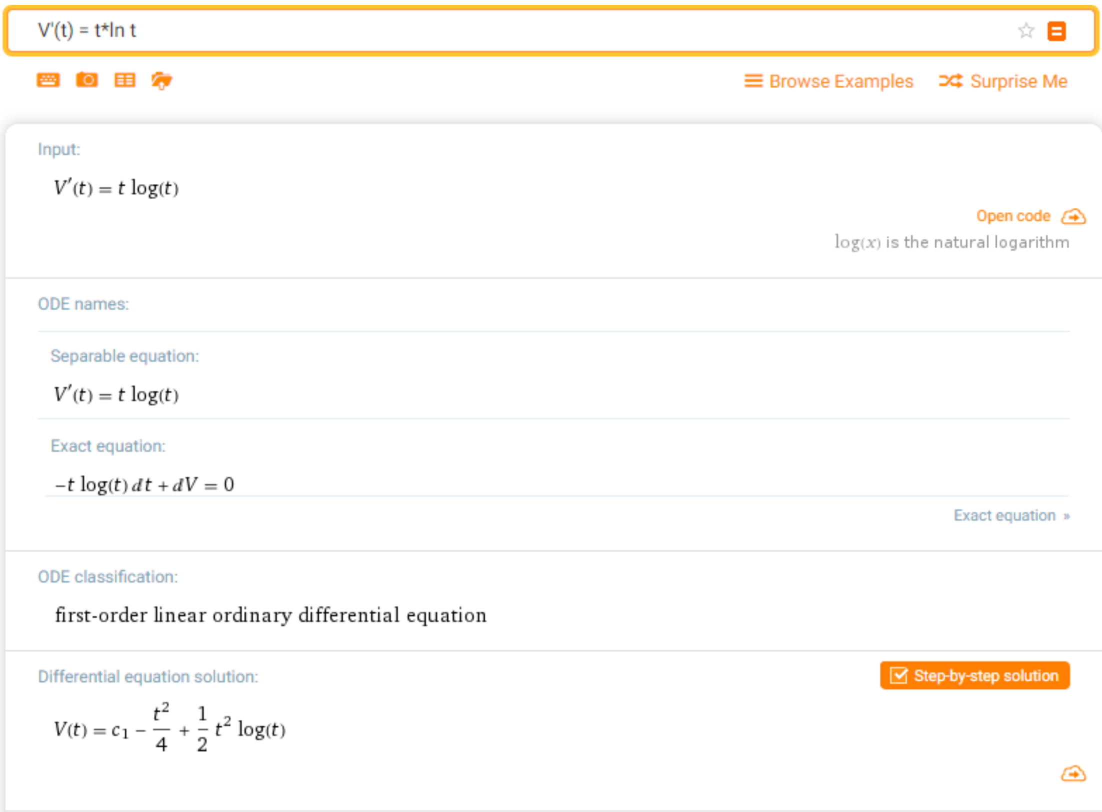
Como se pueden observar, el ejercicio está dando $V'(t) = t \cdot ln\, t$ y el ejercicio pide $V(t)$. Para conseguir se tiene que integrar la función $V'(t)$.

$$V(t) = \int (t \cdot \ln t)\ dt$$

Se introduce en la barra de búsqueda *integrate* seguido de la función y el término dt donde t es la variable de integración.



También se puede conseguir la función pide $V(t)$ tomando $V'(t)$como una ecuación diferencial de la siguiente manera:



Se puede observar que el resultado es el mismo de las dos formas.

También se observa que *Wolfram Alpha* interpretada él ln como log pero se especifica abajo a la derecha que se trata del logaritmo natural, es decir, ln.

Por lo tanto, la función queda de la siguiente manera:

$$V(t) = \int (t \cdot \ln t)\ dt = \frac{t^2 \cdot \ln t}{2} - \frac{t^2}{4} + c$$

Como “t” se refiere al tiempo y se dice que un año después de la compra el valor es 700, se sustituye en la función y donde esté la “t” se introduce un 1 se iguala a 700.

El valor de la constante es igual a $c = \frac{2801}{4}$, entonces:

$$V(t) = \frac{t^2 \cdot \ln t}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{2801}{4}$$

Como se pide explicar si se ha devaluado o se ha revalorizado en el segundo año, se sustituye “t” por dos y se obtiene:

$$V(2) = 2 \cdot \log 2 + \frac{2801}{4} \approx 700.63 \text{ euros.}$$

Al obtener un resultado mayor de 700 euros se puede decir que se ha revalorizado en 0,63 euros.

6. CONCLUSIONES

La realización de este este trabajo viene precedida de la necesidad de los estudiantes del grado de Administración y Dirección de Empresas de contar con un software matemático de fácil uso, gratuito y multiplataforma, ya que desde hace años la facultad no cuenta con ningún software de este tipo. Tras revisar algunos programas informáticos, el que más parece que se adecúa a las necesidades de los estudiantes del grado de Administración y Dirección de Empresas es *Wolfram Alpha*, del cual hemos estudiado algunas de sus aplicaciones en la parte del Álgebra y el Cálculo.

Uno de los objetivos principales ha sido aplicar *Wolfram Alpha* a la resolución de problemas matemáticos de una parte de la asignatura Matemáticas para la Empresa I debido a que un estudio más ambicioso habría resultado demasiado extenso teniendo en cuenta los límites de los Trabajos Fin de Grado de la UPCT. En el trabajo se han mostrado tanto los comandos como otras formas de introducir la información en *Wolfram Alpha* de modo que el programa responda a las cuestiones sobre valores y vectores propios, matrices diagonales y simétricas, polinomios característicos, derivadas e integrales que los estudiantes puedan necesitar.

Todo ello ha sido realizado intentando que pudiera ser utilizado por los estudiantes futuros como una guía o referencia que les sirviera de utilidad, ya que todos los ejemplos que se ven a lo largo del trabajo son ejercicios de años anteriores de la asignatura. Este trabajo está pensado tanto para alumnos del grupo bilingüe como del grupo de español, ya que, aunque los ejemplos utilizados, comandos y el mismo *Wolfram Alpha* están en inglés, se han proporcionado las herramientas necesarias para que un usuario que no controle este idioma sea capaz de manejarlo, incluyendo también explicaciones de qué es lo que se pretende en cada ejercicio.

7. BIBLIOGRAFÍA

[1] Colaboradores de Wikipedia. Wolfram Alpha. Wikipedia [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2019. Página web consultada: 2/10/2019

https://es.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Alpha

[2] PROFAISELGISDEDIEGO BLOG. Página web consultada 14/08/2019

https://profaiselgisdediego.wordpress.com/que-es-mathematica/

[3] Colaboradores de Wikipedia. Wolfram (lenguaje de programación). Wikipedia [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2019. Página web consultada: 7/10/2019

https://es.wikipedia.org/wiki/Wolfram_(lenguaje_de_programaci%C3%B3n)

[4] WOLFRAM. Programación con inteligencia computacional incorporada. Página web consultada 22/08/2019

https://www.wolfram.com/language/

WOLFRAM, STEPHEN (2013). Página web consultada 22/09/2019

https://blog.wolfram.com/2013/06/23/celebrating-mathematicas-first-quarter-century/

WOLFRAM ALPHA EN ESPAÑOL BLOG (2019). Página web consultada 14/08/2019

http://wolframalpha0.blogspot.com/

WOLFRAM, STEPHEN. Una Introducción Elemental a Wolfram Language, Spanish edition [En línea]. Champaign. Wolfram Media, Inc. Libro electrónico consultado el 5/10/2019

https://library.wolfram.com/infocenter/Books/9742/

WOLFRAM ALPHA (2019). Página web consultada 5/09/2019

https://www.wolframalpha.com/

WOLFRAM RESEARCH. Wolfram Mathematica 12.0 [Software]. Consultado 5/10/2019

https://www.wolfram.com/mathematica/

MATHWORKS. MATLAB R2019a [Software]. Consultado 5/10/2019

https://es.mathworks.com/products/matlab.html

JOHN W. EATON Y COLABORADORES. GNU Octave [Software]. Consultado 4/05/2019

https://www.gnu.org/software/octave/

MATHWAY (2019). Página web consultada 5/09/2019

https://www.mathway.com/es/Calculus
INRIA. Scilab 6.0.2.[software]. Consultado 5/10/2019

https://www.scilab.org/

PASCUAL, JUAN ANTONIO (2015). Así funciona *Wolfram Alpha*, el buscador que te responde. Página web consultada 11/07/2019

https://computerhoy.com/noticias/internet/asi-funciona-wolfram-alpha-buscador-que-te-responde-37137

Mathematics for Business I. Worksheet 2 – Diagonal Matrixes. Quadratic Forms. Cartagena: UPCT, 2018

Mathematics for Business I. Worksheet 3 – Derivatives and its applications to business. Cartagena: UPCT, 2018

Mathematics for Business I. Worksheet 4 – Integration. Cartagena: UPCT, 2018

Mathematics for Business I. Unit 2 – Diagonal Matrixes. Quadratic Forms. Cartagena: UPCT, 2018