



# **SPLINES Y OTRAS RECONSTRUCCIONES EN EL MUNDO NAVAL Y EN LA INGENIERÍA**

## **APLICACIONES**

*Autor: Daniel Egea García*  
*Director: Juan Carlos Trillo Moya*

Departamento de Matemática Aplicada y Estadística

Universidad Politécnica de Cartagena

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Juan Carlos Trillo Moya, director de este Proyecto.

A la Universidad Politécnica de Cartagena y sus profesores, quienes me han guiado durante todo el camino recorrido.

A mi mujer y mis hijas, por su apoyo y sacrificio durante lo que ya ha pasado y lo que está por venir.

A mis padres, por hacer posible el alcanzar cualquier objetivo propuesto.

A mis familiares y amigos, por estar a mi lado en todo momento.

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

Índice de figuras	5
Objetivos	7
1. Conceptos básicos	8
1.1. Barcos de transporte de cargas a granel (graneleros)	8
1.2. Medios de carga y descarga	9
1.2.1. A bordo	9
1.2.2. En puerto	12
1.3. Operaciones de carga y descarga	15
2. Splines	17
2.1. Definición de la función spline	17
2.2. Aplicaciones	17
2.3. Splines cúbicos	18
3. Splines cúbicos interpolantes	19
3.1. Condiciones de contorno	20
3.2. Elección de las condiciones de contorno	21
3.3. Nodos de interpolación	22
3.4. Construcción del spline cúbico interpolante	22
3.5. Comprobación del sistema compatible determinado	26
4. Splines cúbicos suavizantes	32
4.1. Planteamiento del problema de suavización	32
4.2. Definición del spline cúbico suavizante	33
4.3. Condiciones de contorno	34
4.4. Elección de las condiciones de contorno	34
4.5. Elección de los coeficientes de peso	35
4.6. Construcción de la función spline cúbica suavizante	36
4.7. Obtención de los coeficientes	39
4.8. Sistema de ecuaciones final en función de las condiciones de contorno	44
4.9. Comprobación del sistema compatible determinado	45
4.10. Sistema de ecuaciones final y comprobación del sistema compatible determinado	46
5. Programación de splines en Matlab	61
5.1. Scripts	62
5.2. Etapas del programa	68
5.3. Código Matlab para resolución de splines cúbicos suavizantes	68
7. Tutorial de la interfaz gráfica	78
7.1. La interfaz gráfica	78

7.2. Ejecución de la interfaz gráfica	78
7.2.1. Menú "Comenzar"	80
7.2.2. Panel de datos iniciales	80
7.2.3. Panel de condiciones de contorno	80
7.2.4. Panel de selección de gráficas	80
7.2.5. Menú "Opciones"	81
7.2.6. Menú "Ayuda"	81
7.2.7. Menú "Acerca de"	82
8. Análisis de caso práctico	83
Conclusiones	87
Bibliografía	88

## ÍNDICE DE FIGURAS

### CAPÍTULO 1

Figura 1.1: disposición general de un granelero

Figura 1.2: granelero en navegación

Figura 1.3: disposición general de granelero con grúas de a bordo

Figura 1.4: granelero con grúas de a bordo en navegación

Figura 1.5: grúa de a bordo en operación

Figura 1.6: pantalla de información de grúa de a bordo

Figura 1.7: sistema de descarga por cinta transportadora

Figura 1.8: descarga de granelero por cinta transportadora

Figura 1.9: detalle de manga neumática de aspiración

Figura 1.10: grúa de puerto descargando en silos

Figura 1.11: grúa sobre raíles en descarga

Figura 1.12: carga de excavadora en bodega

Figura 1.13: apilado de carga en bodega

Figura 1.14: operación de descarga a bordo

### CAPÍTULO 3

Figura 3.1: gráfica de derivada segunda

### CAPÍTULO 4

Figura 4.1: gráficas de splines en función del coeficiente de peso

### CAPÍTULO 7

Figura 7.1: ventana de selección de carpeta

Figura 7.2: ruta de la carpeta seleccionada

Figura 7.3: selección de la ruta de trabajo

Figura 7.4: pantalla principal de la interfaz

Figura 7.5: pantalla del menú ayuda

Figura 7.6: pantalla del menú acerca de

## CAPÍTULO 8

Figura 8.1: contexto para la creación del spline

Figura 8.2: spline cúbico

Figura 8.3: primera derivada

Figura 8.4: segunda derivada

## OBJETIVOS

El objetivo del presente proyecto final de carrera consiste en desarrollar y estudiar la función spline, en sus vertientes interpolante y suavizante, y su posible aplicación en la optimización de las operaciones de carga y descarga de buques graneleros (polvo de metal, cereales, etc.) con medios no automatizados, como es el uso de grúas o puntales provistos de cucharas para el movimiento de la carga entre las bodegas del buque y los silos de la instalación portuaria.

Siendo el movimiento de dichas grúas conocido, definido y repetitivo, la aplicación de las funciones spline podría permitir la sistematización de su recorrido, en función de las formas del buque y la maquinaria e instalaciones situadas en los alrededores de la zona de operación, que serán los puntos de control a utilizar, generando una curva suave y adecuada al contexto de cada situación, realizando dicha operativa de manera eficiente, segura e ininterrumpida.

La experiencia muestra que las formas de curvas y superficies no siempre pueden ser expresadas analíticamente como un todo mediante funciones elementales, dada su complejidad. Por ello, en ocasiones es necesario dividir las en fragmentos más simples, cada uno de los cuales puede ser definido con funciones elementales de manera que sean suficientemente suaves para la aplicación requerida.

Uno de los puntos más importantes a considerar es la suavidad en la transición entre fragmentos, lo que dotará a la curva de un recorrido continuo progresivo y sin oscilaciones indeseadas. Esto se consigue asegurando que la tangente a lo largo de toda la curva sea suave, o lo que es lo mismo, utilizando polinomios de tercer grado para la construcción de los fragmentos de la curva.

Si bien es cierto que este proceso de construcción de fragmentos de curva o superficie, en el caso de las dos dimensiones, requiere un gran volumen de cálculos, la ayuda de la programación permite que se puedan llevar a cabo obteniendo unos resultados aceptables.

## 1. CONCEPTOS BÁSICOS

### 1.1. BARCOS DE TRANSPORTE DE CARGAS A GRANEL (GRANELEROS)

Los barcos de transporte de cargas a granel (graneleros) son barcos diseñados para el transporte de cargas sólidas a granel. Dichas cargas normalmente son uniformes en su composición, y se cargan directamente en las bodegas sin ningún tipo de contenedor. Ejemplos de las materias transportadas son minerales (pirita, azufre, magnesio, hierro), carbón, cereales en grano o sal.

Los espacios de habilitación, el puente y la cámara de máquinas se encuentran en la popa del buque para no entorpecer las operaciones de carga y descarga. La carga va en las bodegas centrales, mientras que los espacios que las rodean (costados y doble fondo) se utilizan para el transporte del agua de lastre, combustible, aceite y agua dulce.

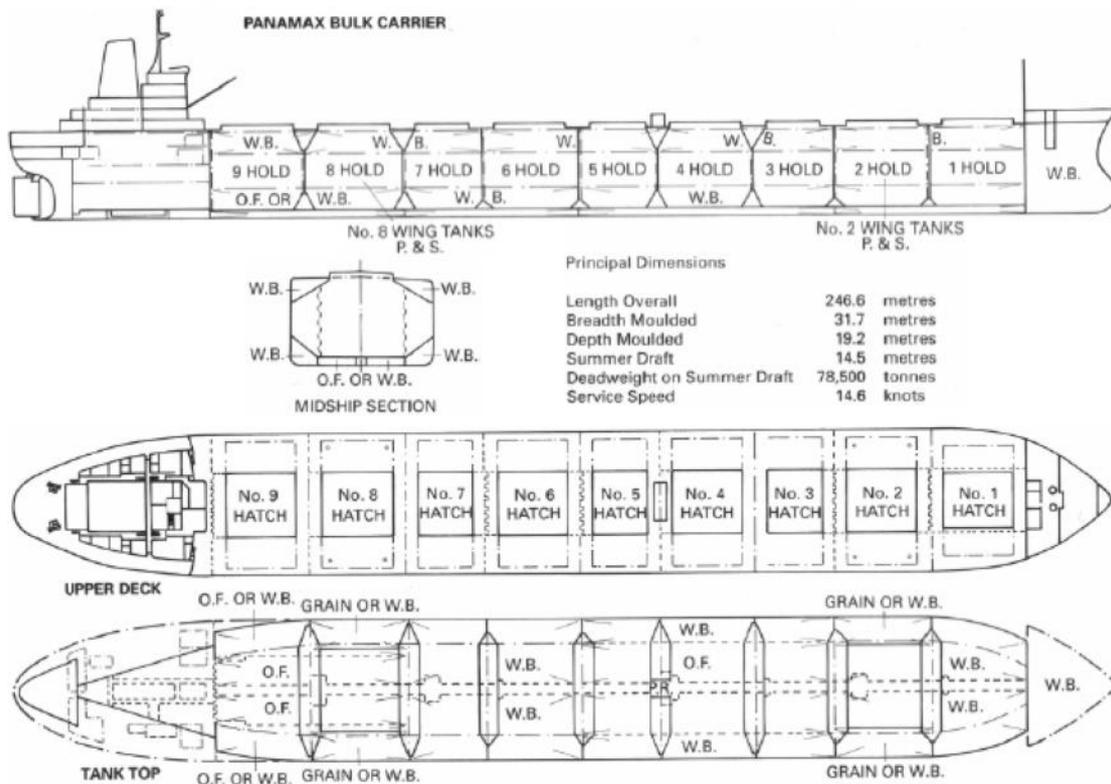


Figura 1.1: Disposición general de un granelero. Fuente: Wikimedia Commons



Figura 1.2: Granelero en navegación. Fuente: Wikipedia

## 1.2. MEDIOS DE CARGA Y DESCARGA

### 1.2.1. A bordo

Además de las escotillas de acceso a las bodegas, y en función del tipo, el tamaño del barco y los puertos donde esté previsto que recale durante su operativa, pueden también existir sobre la cubierta una o varias grúas para las operaciones de carga y descarga de las bodegas.

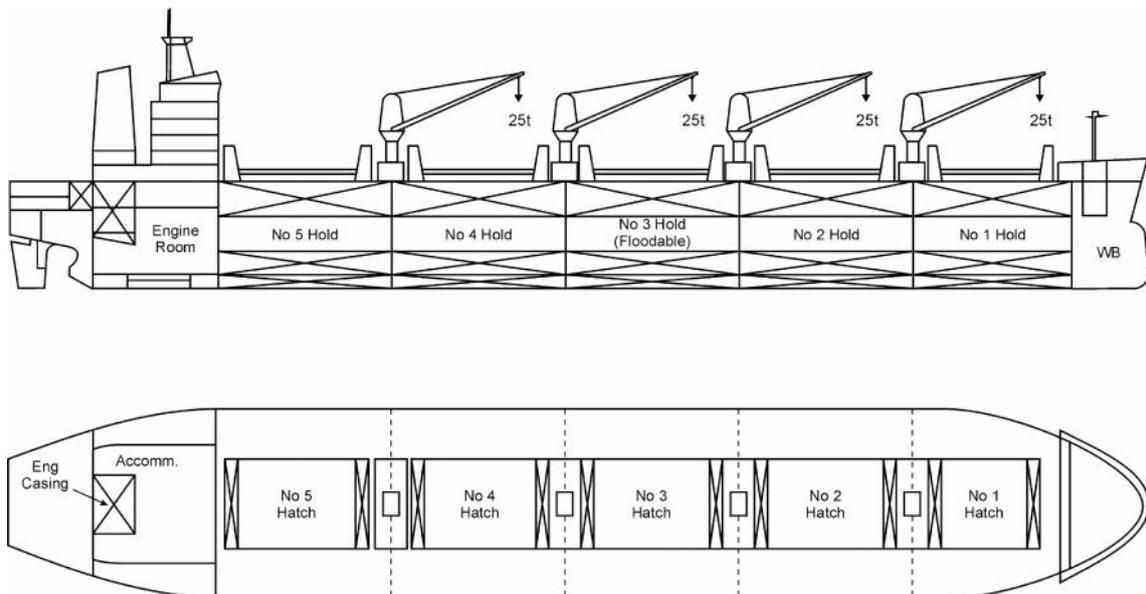


Figura 1.3: Disposición general de granelero con grúas de a bordo. Fuente: Wikimedia Commons



Figura 1.4: Granelero con grúas de a bordo en navegación. Fuente: Wikipedia

Dichas grúas, equipadas con una cuchara de gran capacidad en su extremo, permiten al buque descargar la carga a las instalaciones portuarias en los casos en los que estas últimas no dispongan de medios adecuados.

En sus versiones más actuales, estos elementos ocupan un espacio compacto a bordo, permitiendo maximizar el aprovechamiento del espacio disponible en el buque para el transporte de cargas.



Figura 1.5: Grúa de a bordo en operación. Fuente: Liebherr

Su manejo se realiza de forma manual desde el propio buque, disponiendo de pantallas donde se muestra la información a tiempo real de la grúa, tanto en lo relativo a sus movimientos como a la carga que se transporta o el estado de sus componentes.

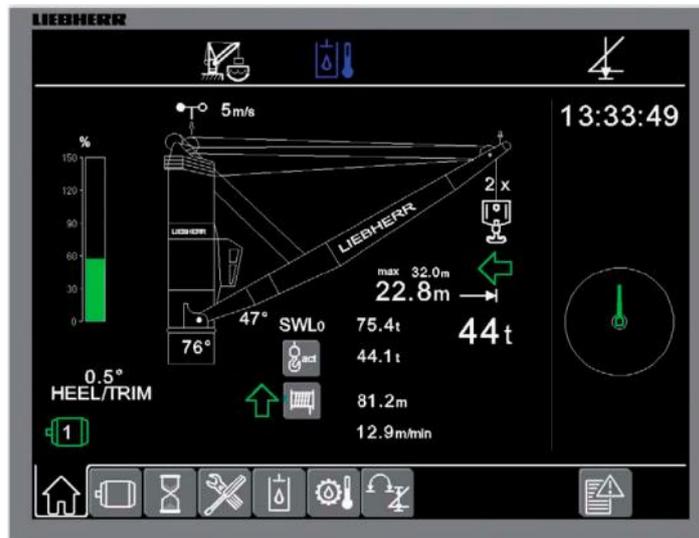


Figura 1.6: Pantalla de información de grúa de a bordo. Fuente: Liebherr

Existen otros medios, que se encuentran instalados en buques más modernos, que multiplican la velocidad de descarga de los graneles. Dichos métodos incluyen medios tanto mecánicos como neumáticos. Un buen ejemplo de estos medios lo constituyen las cintas transportadoras que, integradas en la estructura del buque, permiten una rápida descarga del granel, seleccionando las bodegas a vaciar en cada momento, lo que también contribuye a un mayor control de la distribución de cargas y esfuerzos a bordo, así como de la estabilidad del buque.

Una cinta transportadora recorre la parte inferior del buque, bajo las bodegas de carga, en el fondo de las cuales se sitúan unas escotillas que permiten el vaciado de cada uno de los espacios.

Cuando la carga cae sobre la cinta, esta la transporta hacia la zona de popa, por donde sube hasta el nivel de la cubierta principal, donde se dispone de una extensión que permite depositar la carga en la instalación portuaria.

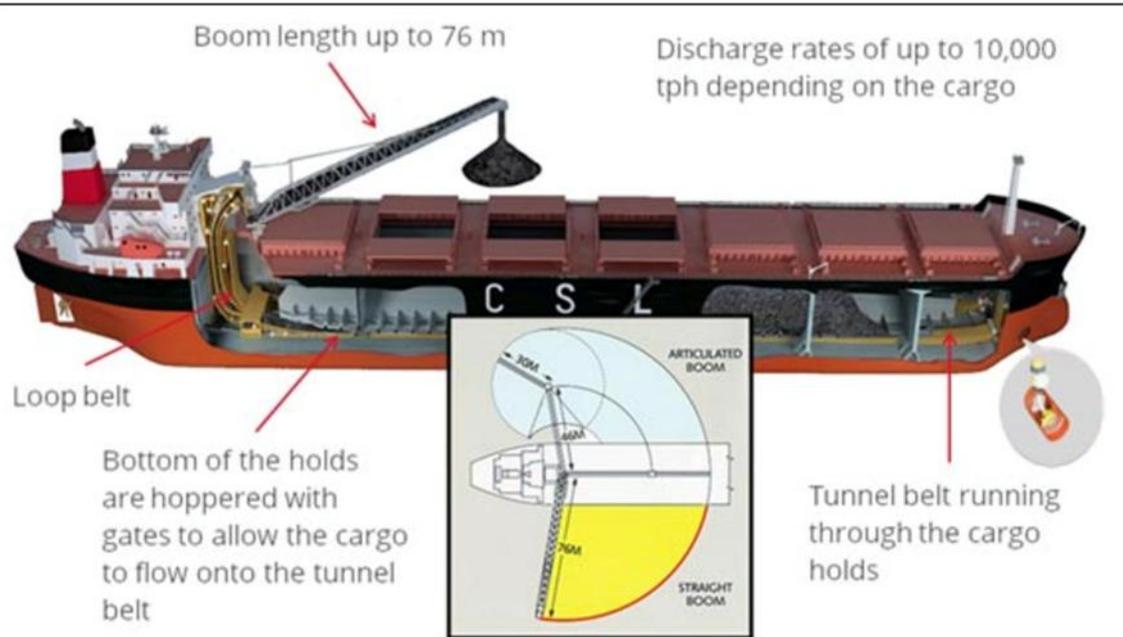


Figura 1.7: Sistema de descarga por cinta transportadora. Fuente: Revista Ingeniería Naval



Figura 1.8: Descarga de granelero por cinta transportadora. Fuente: Marine Traffic

### 1.2.2. En puerto

En los puertos de mercancías existen diferentes medios de carga y descarga de buques, en función del tipo y tamaño de los mismos, así como del grado de desarrollo de la zona marítima en cuestión.

En lo referente a las cargas a granel, pueden encontrarse gran variedad de medios, desde simples grúas-cuchara como las que pueden encontrarse a bordo de los buques, citadas anteriormente, en sus distintos grados de desarrollo, grúas montadas sobre raíles de forma que se sitúa en un punto fijo y se permite la

traslación perpendicular de la cuchara respecto a la eslora del barco, o mangas neumáticas con gran capacidad de carga y descarga en toneladas por hora.

Mangas de aspiración.

Una manga flexible, accionada por medios neumáticos, absorbe la carga a granel de las bodegas, a gran velocidad, para situarla sobre una cinta transportadora que deriva en los silos de recepción o, en función de la instalación, directamente sobre la pila de descarga en el puerto, desde donde se cargará a los medios de transporte terrestre.



Figura 1.9: Detalle de manga neumática de aspiración. Fuente: schrage.de

Grúas-cuchara

Grúas como las descritas a bordo de los buques, que pueden ser fijas o móviles dependiendo de la instalación portuaria. Pueden descargar directamente en los vehículos de transporte, a través de silos receptores, o en zonas de acopio para la posterior manipulación y/o movimiento de la mercancía.



Figura 1.10: Grúa de puerto descargando en silos. Fuente: Autoridad Portuaria de A Coruña

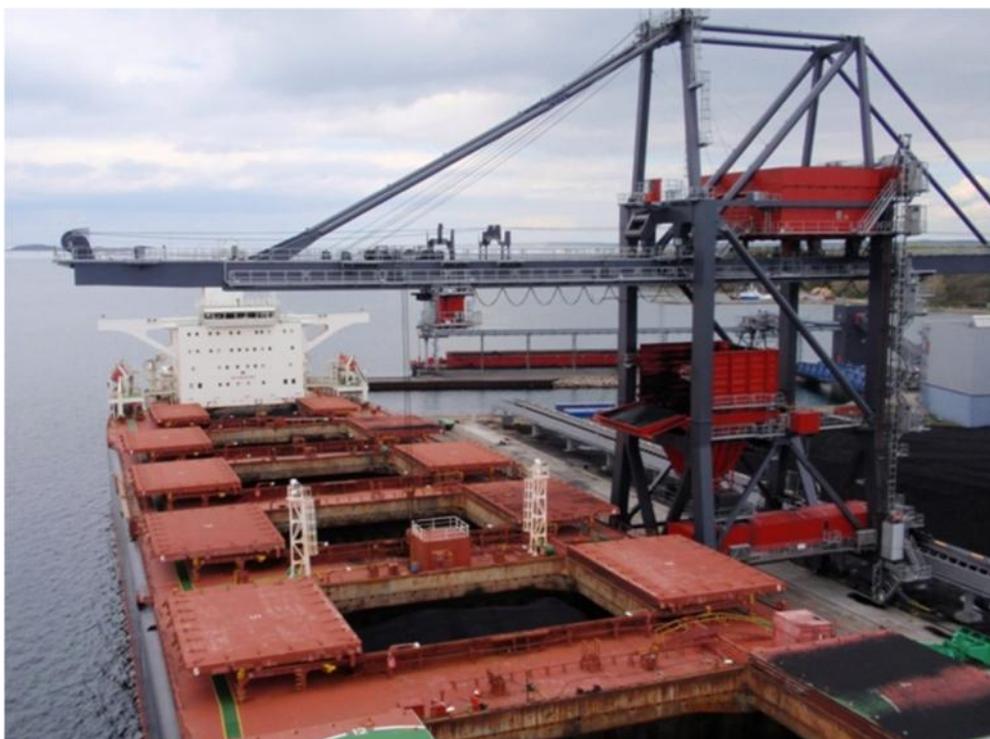


Figura 1.11: Grúa sobre raíles en descarga. Fuente: Konecranes.es

### 1.3. OPERACIONES DE CARGA Y DESCARGA

Además de los medios ya mencionados para las operaciones de carga y descarga de graneles, en ocasiones es necesario disponer de maquinaria auxiliar que facilite las operaciones descritas a realizar desde las grúas.

Uno de estos medios son las excavadoras que, en ocasiones, se cargan en el interior de las bodegas de los buques a su llegada para, a medida que se va descargando la mercancía, ésta se va apilando en el centro de cada bodega, a fin de facilitar la maniobra a realizar por la grúa de cuchara entre el punto de descarga a bordo y el punto de recepción en el muelle.

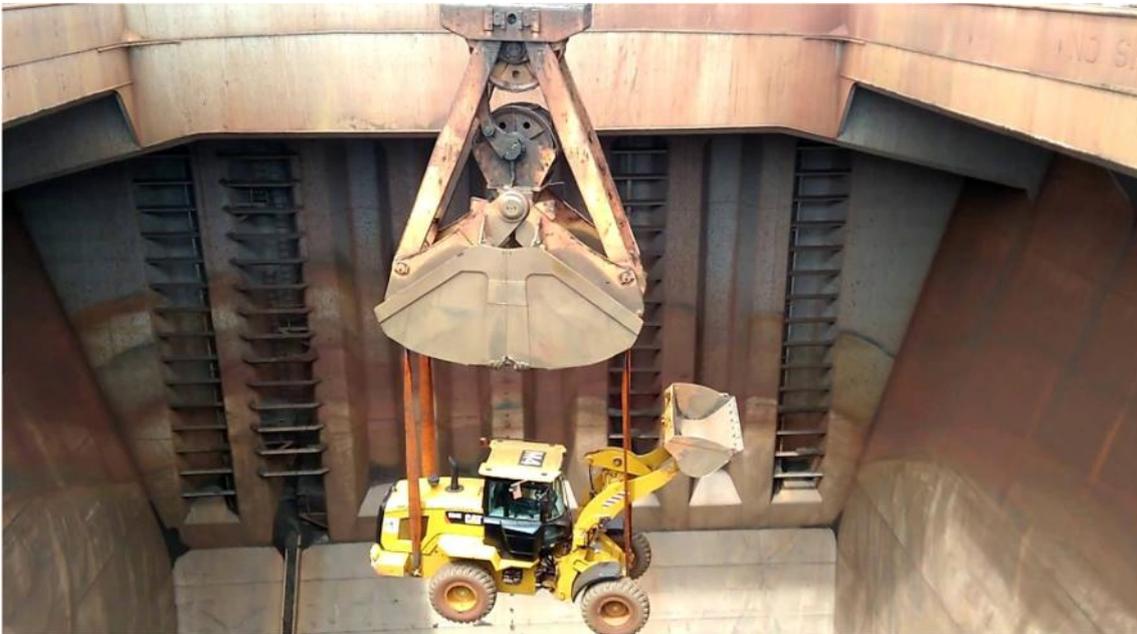


Figura 1.12: Carga de excavadora en bodega. Fuente: youtube.com



Figura 1.13: Apilado de carga en bodega. Fuente: stevesmaritime.com



Figura 1.14: Operación de descarga a bordo. Fuente: remotecontrolgrab.sell.everychina.com

## 2. SPLINES

### 2.1. DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN SPLINE

Supongamos que en un segmento  $[a,b]$  está dado un retículo

$$w : a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

Los puntos  $x_1$  y  $x_m$  se llaman *nodos fronterizos* del retículo  $w$ , y los puntos  $x_2, \dots, x_{m-1}$  son *nodos interiores*.

Una función  $S(x)$ , definida en el segmento  $[a,b]$ , se llama Spline de orden  $p+1$  (de grado  $p$ ) si:

1.- En todo segmento

$$i = [x_i, x_{i+1}] \quad \forall i = 1, \dots, m-1$$

es un polinomio de grado  $p$ :

$$S(x) = S_i(x) = \sum_{k=0}^p a_k^{(i)} (x - t_i)^k \quad \forall i=1, \dots, m-1$$

En todo el segmento, el Spline es un polinomio de grado  $p$  con  $p+1$  coeficientes. En total se tienen  $(m-1)$  segmentos parciales. Consecuentemente, para determinar completamente el Spline es necesario hallar  $(m-1)(p+1)$  números.

2.- Es  $(p-1)$  veces diferenciable con continuidad en el segmento  $[a,b]$ :

$$S(x) \in C^{p-1}[a,b]$$

Esta condición implica la continuidad de la función  $S(x)$  y sus derivadas  $S'(x), S''(x), \dots, S^{p-1}(x)$  en todos los  $m-2$  nodos interiores del retículo  $w$ . Por tanto, para hallar los coeficientes de todos los polinomios se dispone de  $p(m-2)$  condiciones (ecuaciones).

Para determinar completamente el Spline faltan  $(p+1)(m-1) - p(m-2) = (m+p-1)$  condiciones.

La elección de las condiciones adicionales dependerá del carácter del problema analizado.

### 2.2. APLICACIONES

La aplicación más común de las curvas Spline en el mundo naval generalmente ha sido el suavizado de formas en el proceso de diseño de buques.

Antiguamente, antes de la aparición de los programas de diseño, se hacía uso de junquillos para este propósito, durante el proceso de dibujo a mano. Dichos junquillos son listones flexibles con los cuales se pueden dibujar curvas suaves en dos dimensiones. Mediante el ajuste de los puntos finales del junquillo y aplicando unos pesos, se crea una curva suave sobre la cual se puede realizar el trazo.

Actualmente se utilizan las curvas Spline mediante programas específicos de diseño para este propósito. En función del método de obtención de los puntos de control, es preferible el uso de uno u otro tipo de curva Spline:

En caso de ser obtenidos directamente de una cartilla de trazado, las coordenadas de los nodos serán exactas, y por tanto será útil realizar una interpolación.

Por el contrario, si los nodos se han medido de forma manual (por ejemplo midiendo directamente en una embarcación o escaneando un plano de formas), se asume que habrá un cierto "ruido" en las mediciones, y por tanto es mucho más útil realizar un proceso de suavizado.

Otra posible aplicación de los splines, en la que se centra el estudio de este proyecto, es el movimiento de una grúa de carga y descarga de buques de cargas a granel, estableciendo la curva que deberá seguir dicha grúa entre los puntos de carga y descarga entre el barco y el muelle. Siendo éste un movimiento repetitivo, un cálculo inicial será suficiente para la aplicación durante toda la operativa.

### **2.3. SPLINES CÚBICOS**

Los problemas más frecuentes en las aplicaciones son los de interpolación y suavizamiento, en los cuales se pide construir un spline a partir de un conjunto de puntos en el plano.

En los problemas de interpolación el gráfico del spline debe pasar por todos los puntos  $(t_i, y_i) \forall i=1, \dots, m$ , lo que proporciona  $m$  condiciones adicionales. Las restantes  $p-1$  ecuaciones para la construcción unívoca del spline son los valores de las derivadas menores del spline en los extremos del segmento analizado: las condiciones de contorno. La posibilidad de elegir diferentes condiciones de contorno permite construir splines con las más diversas propiedades.

En los problemas de suavizamiento el spline se construye de tal modo que su gráfico pase cerca de los puntos  $(t_i, y_i) \forall i=1, \dots, m$ , pero no por ellos. La medida de esta cercanía se puede definir de diferentes maneras, lo que genera una gran variedad de splines suavizantes.

### 3. SPLINES CÚBICOS INTERPOLANTES

El problema de interpolación planteado consiste en construir, en el intervalo  $[a,b]$ , una función suave  $(x)$  que coincide en los nodos del retículo  $w$  con una función dada  $f(x)$ , la cual no posee la suavidad necesaria.

Suponemos que en un intervalo  $[a,b]$  está definido un retículo

$$w : a = t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$$

Consideremos la colección de números

$$y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$$

Construimos una función  $(x)$  suave en el intervalo  $[a,b]$  que en los nodos del retículo  $w$  tome los valores dados, es decir

$$(t_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, m-1, m$$

Es evidente que, planteado de esta manera, el problema tendría infinitas soluciones, pero imponiendo a la función  $(x)$  condiciones adicionales, es posible lograr que el problema tenga solución única.

Se llama spline cúbico interpolante  $S(x)$  en un retículo  $w$  a la función que:

1.- En cada uno de los intervalos  $[t_i, t_{i+1}] \quad \forall i = 1, \dots, m-1$  es un polinomio de tercer grado,

$$S(x) = S_i(x) = a_0 + a_1^{(i)}(x-t_i) + a_2^{(i)}(x-t_i)^2 + a_3^{(i)}(x-t_i)^3$$

En todo el intervalo el spline es un polinomio de tercer grado que se define mediante cuatro coeficientes. En total hay  $(m-1)$  intervalos, por lo que, para definir completamente el spline, es necesario hallar  $4(m-1)$  números:

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, \quad \forall i = 1, \dots, m-1$$

2.- Es dos veces diferenciable con continuidad en el intervalo  $[a,b]$ , es decir, pertenece a la clase  $C^2[a,b]$ .

Esta condición significa continuidad en la función  $S(x)$  y de sus derivadas  $S'(x)$  y  $S''(x)$  en todos los nodos internos del retículo  $w$ . Como el número de nodos internos es  $m-2$ , entonces tenemos  $3(m-2)$  condiciones más.

3.- Satisface las condiciones:

$$S(t_i) = f(t_i) = y_i \quad i = 1, \dots, m$$

Junto con las condiciones de continuidad, tenemos  $3(m-2) + m = 4m - 6$  condiciones (ecuaciones).

### 3.1. CONDICIONES DE CONTORNO

Para tener las  $4(m-1) = 4m - 4$  condiciones necesarias para la definición unívoca del spline, faltan dos ecuaciones, las cuales se formulan como restricciones sobre los valores del spline y/o sus derivadas en los extremos del intervalo  $[a,b]$ .

Generalmente, para la construcción de un spline cúbico interpolante, se utilizan condiciones de los cuatro tipos siguientes:

A.- Condiciones de primer tipo: se dan los valores que debe tomar la derivada primera de  $S(x)$  en los extremos del intervalo  $[a,b]$ :

$$S'(a) = f'(a) ; S'(b) = f'(b)$$

B.- Condiciones de segundo tipo: se dan los valores que debe tomar la derivada segunda de  $S(x)$  en los extremos del intervalo  $[a,b]$ :

$$S''(a) = f''(a) ; S''(b) = f''(b)$$

C.- Condiciones de tercer tipo: condiciones periódicas:

$$S'(a) = S'(b) ; S''(a) = S''(b)$$

Es natural imponer este tipo de condiciones cuando la función a interpolar es periódica de período  $T = b-a$

D.- Condiciones de cuarto tipo:

$$S'''(y, t_2-0) = S'''(y, t_2+0)$$

$$S'''(y, t_{m-1}-0) = S'''(y, t_{m-1}+0)$$

En los puntos interiores del retículo la derivada tercera de  $S(x)$  es, en general, discontinua. Sin embargo, el número de puntos de discontinuidad puede ser reducido con ayuda de este tipo de condiciones.

En este caso, el spline obtenido es tres veces diferenciable con continuidad en los puntos  $t_2$  y  $t_{m-1}$  acercándose por la izquierda (-0) o acercándose por la derecha (+0).

Teorema: El Spline cúbico interpolante que satisface las condiciones

$$S(t_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

y una condición de contorno cualquiera dentro de los cuatro tipos enumerados existe y es único.

Más adelante se comprobará que este teorema es cierto y que, además, pueden tomarse condiciones de contorno mixtas (una en cada extremo), exceptuando el caso de condiciones de tercer tipo y el caso de

condiciones de cuarto tipo con menos de cuatro nodos, existiendo el spline cúbico interpolante con solución única.

### 3.2. ELECCIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

La elección de las condiciones de contorno es uno de los problemas principales en la interpolación, y adquiere una importancia especial cuando es necesario garantizar una precisión alta del spline  $S(x)$  en las proximidades de los extremos del intervalo  $[a,b]$ .

Las condiciones de contorno ejercen una influencia visible en el comportamiento del spline cerca de los extremos  $a$  y  $b$ , y dicha influencia se va atenuando según nos alejamos de ellos. La elección de las condiciones de contorno depende, a menudo, de la existencia de datos adicionales sobre el comportamiento del spline.

Si se conocen los valores de la derivada primera  $f'(x)$  en los extremos del intervalo  $[a,b]$ , es decir, se conoce la dirección de la tangente de la curva en los extremos, entonces es lógico utilizar condiciones de contorno de primer tipo.

Si, por el contrario, lo que se conocen son los valores de la derivada segunda  $f''(x)$ , entonces es lógico utilizar condiciones de contorno de segundo tipo.

Si existe la posibilidad de elegir entre condiciones de primer y segundo tipo, se dará preferencia a las primeras.

Si la función es periódica, se deben elegir condiciones de contorno de tercer tipo.

En caso de no existir información adicional sobre el comportamiento de la función, se pueden utilizar las condiciones naturales de contorno:

$$S''(a) = 0 ; S''(b) = 0$$

Con estas condiciones, la precisión en la aproximación puede disminuir bruscamente cerca de los extremos del intervalo  $[a,b]$ .

Otra opción es utilizar las condiciones de contorno de primer o de segundo tipo con valores aproximados; esto es, se tomarán sus aproximaciones en diferencias, en lugar de los valores exactos de sus derivadas. La experiencia muestra que, en ocasiones, elegir las condiciones de contorno de cuarto tipo da buenas aproximaciones.

### 3.3. NODOS DE INTERPOLACIÓN

Si la derivada tercera  $f'''(x)$  tiene discontinuidades en algunos puntos del intervalo, para mejorar la aproximación estos puntos deben ser incluidos entre los nodos de interpolación.

Si la derivada segunda  $f''(x)$  es discontinua, es necesario tomar medidas especiales para evitar oscilaciones del spline cerca de los puntos de discontinuidad.

Generalmente los nodos de interpolación se eligen de tal manera que los puntos de la discontinuidad de la derivada segunda estén contenidos en un intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  tal que  $h_i = \min\{h_{i-1}, h_{i+1}\}$  donde  $\epsilon \ll 1$ . El número  $\epsilon$  puede ser elegido empíricamente, pero a menudo es suficiente con tomar  $\epsilon = 0,01$ .

Cuando las discontinuidades se presentan en la primera derivada  $f'(x)$ , existen varias técnicas para superar las dificultades que surgen. Una de las técnicas más simples consiste en partir el intervalo de aproximación en intervalos de continuidad de la derivada y construir, en cada uno de ellos, un spline.

### 3.4. CONSTRUCCIÓN DEL SPLINE CÚBICO INTERPOLANTE

Interpolemos una función  $f(x)$  sobre unos nodos  $t_i \forall i = 1, \dots, m$  mediante un spline cúbico interpolante, siendo  $t_1=a$ ,  $t_m=b$ . Denotamos por  $y_i = f(t_i)$  los valores conocidos de la función en los nodos. Denominamos  $h_i = t_{i+1}-t_i$  a los diferentes espaciados entre nodos. Sea  $S_i(x)$  la restricción de la función spline  $S(x)$  al intervalo  $[t_i, t_{i+1}] \forall i = 1, \dots, m-1$ . Como la función  $S(x)$  está definida en  $[a, b]$  como  $S(x)=S_i(x)$ , si  $x \in [t_i, t_{i+1}]$ , bastará conocer cada uno de los trozos cúbicos  $S_i(x)$ .

Recordemos que  $S_i(x)$  es un polinomio cúbico que satisface las condiciones:

$$S_i(t_i)=y_i \forall i = 1, \dots, m$$

y la condición  $S_i(x) \in C^2[a, b]$ , es decir:

$$S_i'(t_i) = S_{i+1}'(t_i) \forall i = 1, \dots, m-1$$

$$S_i''(t_i) = S_{i+1}''(t_i) \forall i = 1, \dots, m-1$$

Al ser  $S_i(x)$  un polinomio de grado tres, su derivada será de grado dos y su segunda derivada será de grado uno.

Si denotamos por  $z_i \forall i = 1, \dots, m$  los valores que toma  $S_i''(t_i)$  para cada  $i$ , entonces para que las derivadas segundas peguen bien entre los diferentes trozos de la función  $S''(x)$  tendrá que ser del estilo de la siguiente figura:

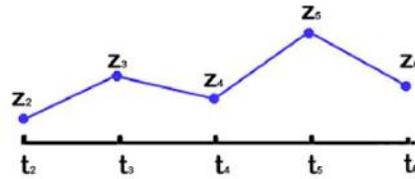


Figura 3.1: gráfica de derivada segunda

Para que esto sea así, basta con construir cada trozo lineal  $S''_i(x)$  de manera que  $S''_i(t_i) = z_i$  y  $S''_i(t_{i+1}) = z_{i+1}$ . Usando la interpolación de Lagrange tenemos:

$$S''_i(x) = z_{i+1} \frac{x-t_i}{h_i} + z_i \frac{t_{i+1}-x}{h_i}$$

De esta expresión, integrando dos veces, obtenemos:

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x-t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1}-x)^3 + C_i(x-t_i) + D_i(t_{i+1}-x)$$

De las condiciones  $S(t_i) = y_i \forall i = 1, \dots, m$  sabemos que  $S_i(t_i) = y_i$  y  $S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$ . A partir de estas condiciones podemos deducir el valor de  $C_i$  y  $D_i$ , llegando hasta la expresión:

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i} (x-t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i} (t_{i+1}-x)^3 + \left( \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) (x-t_i) + \left( \frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right) (t_{i+1}-x)$$

Con esta expresión de  $S_i(x)$  se garantiza la continuidad de  $S(x)$  para cada intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ , y coincidirá con  $f(t_i)$  en los puntos  $t_i \forall i = 1, \dots, m$ .

Queda por satisfacer la continuidad de la derivada primera de  $S(x)$ :

$$S'_i(t_i) = S'_{i-1}(t_i) \forall i = 2, \dots, m-1$$

Calculamos  $S'_i(t_i)$  y  $S'_{i-1}(t_i)$ :

$$S'_i(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i} (x-t_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i} (t_{i+1}-x)^2 + \left( \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) - \left( \frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right)$$

$$S'_{i-1}(x) = \frac{z_i}{2h_i} (x-t_{i-1})^2 - \frac{z_{i-1}}{2h_{i-1}} (t_i-x)^2 + \left( \frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{z_i h_{i-1}}{6} \right) - \left( \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{z_{i-1} h_{i-1}}{6} \right)$$

Imponiendo  $S'_i(t_i) = S'_{i-1}(t_i)$ , simplificando la expresión y teniendo en cuenta que  $i = 2, \dots, m-1$ , llegamos al sistema de ecuaciones lineales:

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i} (y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}} (y_i - y_{i-1})$$

Si definimos:

$$b_i = \frac{\epsilon}{h_i}(y_{i+1}-y_i) - \frac{\epsilon}{h_{i-1}}(y_i-y_{i-1}) \quad \forall i = 2, \dots, m-1$$

El sistema queda:

$$\begin{cases} h_1 z_1 + 2(h_1+h_2)z_2 + h_2 z_3 = b_2 \\ h_2 z_2 + 2(h_2+h_3)z_3 + h_3 z_4 = b_3 \\ \dots \\ h_{m-2} z_{m-2} + 2(h_{m-2}+h_{m-1})z_{m-1} + h_{m-1} z_m = b_{m-1} \end{cases}$$

Se trata de (m-2) ecuaciones lineales con m incógnitas, y por tanto quedan dos variables libres. Para obtenerlas, debemos aplicar condiciones de contorno.

Como se ha explicado anteriormente, éstas se escogen dependiendo de los datos adicionales que se tengan sobre el comportamiento de la función f(x). A continuación se detalla la construcción de las dos ecuaciones necesarias para resolver el sistema según el tipo de condiciones de contorno que se utilicen, pudiendo éstas ser distintas en cada extremo.

A.- En caso de conocer condiciones de primer tipo, es decir, los valores de la primera derivada de S(x) en los extremos del intervalo [a,b], se obtendrían las dos ecuaciones que faltan para completar el sistema, del siguiente modo:

- Se obtiene la derivada del trozo de spline correspondiente al extremo.
- Se evalúa esta ecuación en el punto extremo.
- Se iguala al valor conocido de la primera derivada.

1.- Para el extremo izquierdo (a):

$$S'_1(t_1) = -\frac{z_1}{2h_1}(t_2-t_1)^2 + \frac{y_2}{h_1} - \frac{z_2 h_1}{\epsilon} - \frac{y_1}{h_1} + \frac{z_1 h_1}{\epsilon} = f'(a)$$

Reordenando las componentes:

$$-\frac{h_1}{3} z_1 - \frac{h_1}{6} z_2 = f'(a) - \frac{y_2 - y_1}{h_1}$$

2.- Para el extremo derecho (b):

$$S'_{m-1}(t_m) = \frac{z_m}{2h_{m-1}}(t_m-t_{m-1})^2 + \frac{y_m}{h_{m-1}} - \frac{z_m h_{m-1}}{\epsilon} - \frac{y_{m-1}}{h_{m-1}} + \frac{z_{m-1} h_{m-1}}{\epsilon} = f'(b)$$

Reordenando las componentes:

$$\frac{h_{m-1}}{3} z_m + \frac{h_{m-1}}{6} z_{m-1} = f'(b) - \frac{y_m - y_{m-1}}{h_{m-1}}$$

B.- Si utilizamos condiciones de segundo tipo, es decir, damos los valores de la segunda derivada en los extremos del intervalo  $[a,b]$ , se han de dar los valores de  $z_1$  y  $z_m$ :

$$f''(a) = z_1 ; f''(b) = z_m$$

C.- En caso de que la función a suavizar sea periódica de periodo  $T = b-a$ , en particular  $f(a) = f(b)$  y por tanto  $S_1(a) = S_{m-1}(b)$ , se utilizarán condiciones de tercer tipo, las cuales darán las siguientes ecuaciones:

$$1.- S'_1(t_1) = S'_{m-1}(t_m):$$

$$\frac{h_1}{3} z_1 + \frac{h_1}{6} z_2 + \frac{h_{m-1}}{6} z_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3} z_m = \frac{y_{m-1} - y_m}{h_{m-1}} + \frac{y_2 - y_1}{h_1}$$

$$2.- S''_1(t_1) = S''_{m-1}(t_m)$$

$$z_1 - z_m = 0$$

D.- Si deseamos utilizar condiciones de cuarto tipo, con continuidad también en la derivada tercera de  $S(x)$  en los extremos, de forma que  $S_1=S_2$ ,  $S_{m-2}=S_{m-1}$  sabiendo que satisface  $S_i(x) \in C^2[a,b]$ ; entonces se debe igualar  $S''_{i-1}(t_i)$  a  $S''_i(t_i)$   $\forall i = 2, \dots, m-1$ . Los splines así construidos se suelen denominar splines no nodo.

Sabemos que  $S''_i(x)$  es una recta que pasa por los puntos  $(t_{i-1}, z_{i-1})$  y  $(t_i, z_i)$ ; entonces su pendiente, y por tanto su derivada, será un coeficiente tal que:

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{t_i - t_{i-1}} = \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i}$$

1.- En el extremo izquierdo:

$$S''_1(t_2) = S''_2(t_2)$$

$$\frac{z_2 - z_1}{h_1} = \frac{z_3 - z_2}{h_2}$$

Ordenando las componentes:

$$-h_2 z_1 + (h_2 + h_1) z_2 - h_1 z_3 = 0$$

2.- En el extremo derecho:

$$S''_{m-1}(t_{m-1}) = S''_{m-2}(t_{m-1})$$

$$\frac{z_m - z_{m-1}}{h_{m-1}} = \frac{z_m - z_{m-2}}{h_{m-2}}$$

Ordenando las componentes:

$$-h_{m-1}z_{m-2} + (h_{m-1} + h_{m-2})z_{m-1} - h_{m-2}z_m = 0$$

No siempre conocemos los mismos datos en ambos extremos del intervalo  $[a,b]$ , por lo que podemos tener diferentes condiciones en cada extremo, excepto en las condiciones de tercer tipo, que exigen que la función sea periódica de periodo  $T=b-a$ , y en particular  $f(a) = f(b)$ .

Recuérdese que las condiciones de primer tipo (primera derivada conocida) tienen preferencia sobre las de segundo tipo (segunda derivada conocida), y que en caso de no conocer los valores de estas derivadas, se pueden aproximar. Incluso si tampoco se pueden aproximar, se puede asumir  $z_1=z_m=0$ , en detrimento de la precisión de aproximación en caso de que la segunda derivada no fuese nula. Los splines cúbicos así contruidos se denominan naturales. Optar por usar condiciones de cuarto tipo cuando se desconocen las demás suele dar buenos resultados.

### 3.5. COMPROBACIÓN DEL SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

A continuación se demostrará que cada uno de los sistemas que se forman incluyendo las condiciones de contorno es compatible determinado, y por tanto no se tendrán problemas a la hora de obtener el spline correspondiente.

Las siguientes abreviaturas serán utilizadas en adelante:

- 1: condiciones de primer tipo (se conoce el valor de la primera derivada en el extremo).
- 2: condiciones de segundo tipo (se conoce el valor de la segunda derivada en el extremo).
- 3: condiciones de tercer tipo (existe periodicidad).
- 4: condiciones de cuarto tipo (existe tercera derivada continua en el extremo).
- CI: condición de contorno en el extremo izquierdo.
- CD: condición de contorno en el extremo derecho.

Si construimos el sistema completo  $Az = B$  para que éste tenga solución compatible determinada, sólo habrá que demostrar que la matriz  $A$  es invertible, es decir, que el determinante de  $A$  no es nulo.

Formalmente, se nota que la matriz  $A$  de orden  $m$  es estrictamente diagonal dominante cuando se satisface:

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |a_{i,j}| \quad i = 1, \dots, m$$

Enunciado del lema de Hadamard: si  $A = ((a_{i,j})_{i,j}) \quad i = 1, \dots, m$  es una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces  $A$  es invertible.

Demostración por contrarrecíproco: supongamos que A no es invertible, entonces su núcleo no se reduce a cero, entonces existe un vector:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \neq 0$$

tal que  $AX = 0$ .

Entonces, si se tiene que:

$$i = 1, \dots, m; \quad \sum_{j=1}^m a_{i,j} x_j = 0$$

Como  $X \neq 0$ , existe  $x_{i_0} \neq 0$  tal que  $|x_{i_0}| = m \cdot \{|x_i|\}$   $i = 1, \dots, m$ .

Tenemos:

$$-a_{i_0, i_0} x_{i_0} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m a_{i_0, j} x_j$$

de donde:

$$|a_{i_0, i_0} x_{i_0}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m |a_{i_0, j} x_j|$$

y como:

$$j = 1, \dots, m; \quad \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} < 1$$

se obtiene:

$$|a_{i_0, i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m |a_{i_0, j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m |a_{i_0, j}|$$

Finalmente:

$$|a_{i_0, i_0}| < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^m |a_{i_0, j}|$$

contradicción con la que culmina la demostración.

CASO CI=1, CD=1

Las condiciones en los extremos son de primer tipo, por lo que se conocen las primeras derivadas y tenemos las dos siguientes ecuaciones adicionales:

$$-\frac{h_1}{3}z_1 - \frac{h_1}{6}z_2 = f'(a) - \frac{y_2 - y_1}{h_1}$$

$$\frac{h_{m-1}}{3}z_m + \frac{h_{m-1}}{6}z_{m-1} = f'(b) - \frac{y_m - y_{m-1}}{h_{m-1}}$$

Por tanto la matriz quedará de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} -\frac{h_1}{3} & -\frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

Tal y como fácilmente puede comprobarse, la matriz es estrictamente diagonal dominante y, por tanto, es invertible.

CASO CI=1, CD=2

La condición en el extremo izquierdo es de primer tipo, y en el extremo derecho de segundo tipo, por lo que se conoce la primera derivada en un extremo y la segunda derivada en el otro, por lo que tenemos las dos ecuaciones adicionales siguientes:

$$-\frac{h_1}{3}z_1 - \frac{h_1}{6}z_2 = f'(a) - \frac{y_2 - y_1}{h_1}$$

$$z_m = f''(b)$$

Por lo tanto, la matriz quedará de la forma:

$$\begin{pmatrix} -\frac{h_1}{3} & -\frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De nuevo puede comprobarse que la matriz será invertible, pues es estrictamente diagonal dominante.

CASO CI=1, CD=4

La condición en el extremo izquierdo es de primer tipo, y en el extremo derecho es de cuarto tipo, por lo que se conoce la primera derivada en un extremo y que en el otro extremo su tercera derivada es continua, por lo que tenemos las dos ecuaciones adicionales siguientes:

$$-\frac{h_1}{3}z_1 - \frac{h_1}{6}z_2 = f'(a) - \frac{y_2 - y_1}{h_1}$$

$$-h_{m-1}z_{m-2} + (h_{m-1} + h_{m-2})z_{m-1} - h_{m-2}z_m = 0$$

Por tanto, la matriz será de la forma:

$$\begin{pmatrix} -\frac{h_1}{3} & -\frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & -h_{m-1} & h_{m-2} + h_{m-1} & -h_{m-2} \end{pmatrix}$$

Si sustituimos la última fila por la penúltima menos la última, obtenemos la matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} -\frac{h_1}{3} & -\frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} - h_{m-1} & h_{m-2} + h_{m-1} & h_{m-2} + h_{m-1} \end{pmatrix}$$

A la columna  $m - 2$  le restamos la columna  $m$ , y a la columna  $m - 1$  le restamos la columna  $m$  multiplicada por un coeficiente  $\mu$ , por lo que obtenemos la matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} -\frac{h_1}{3} & -\frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} - h_{m-1} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) - \mu h_{m-1} & h_{m-1} \\ 0 & \dots & 0 & h_{m-2} - h_{m-1} & (1 - \mu)(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-2} + h_{m-1} \end{pmatrix}$$

Con  $0 < \mu < 1$  esta matriz cumple con el enunciado cuando también  $\mu < \frac{h_{m-2}}{h_{m-1}}$ , ya que:

$$|h_{m-2} + h_{m-1}| = h_{m-2} + h_{m-1} > (1 - \mu)(h_{m-2} + h_{m-1})$$

y

$$|2(h_{m-2} + h_{m-1}) - \mu h_{m-1}| = 2(h_{m-2} + h_{m-1}) - \mu h_{m-1} > h_{m-2} + 2h_{m-1} \quad |h_{m-2} - h_{m-1}| + |h_{m-1}|$$

Así, se observa que es una matriz estrictamente diagonal dominante, y por tanto el sistema tendrá solución única.

CASO CI=3, CD=3

En este caso las ecuaciones adicionales se obtienen considerando que la función a suavizar es periódica de periodo  $T = b - a$ , de modo que, aplicando las condiciones de tercer tipo, se obtienen las ecuaciones:

$$z_1 - z_m = 0$$

$$\frac{h_1}{3} z_1 + \frac{h_1}{6} z_2 + \frac{h_{m-1}}{6} z_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3} z_m = \frac{y_{m-1} - y_m}{h_{m-1}} + \frac{y_2 - y_1}{h_1}$$

Construyendo el sistema con estas ecuaciones obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & \dots & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

Si sustituimos la última columna por su suma con la primera, obtenemos la matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & h_1 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & \dots & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1} + h_1}{3} \end{pmatrix}$$

Finalmente, sustituyendo la última fila por ella misma menos la primera multiplicada por  $h_1/3$ , obtenemos la matriz equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & h_1 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & \frac{h_1}{6} & \dots & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1} + h_1}{3} \end{pmatrix}$$

Matriz que es estrictamente diagonal dominante, por lo que es invertible y por tanto el sistema correspondiente tiene solución única.

#### OTROS CASOS

Hay 6 posibles combinaciones, además de las ya planteadas. Puesto que son las mismas sólo que variando una de las dos ecuaciones frontera, se desarrollan de igual forma, demostrando que son matrices estrictamente diagonales dominantes y, según el enunciado del lema de Hadamard, serán por tanto invertibles, y su sistema tendrá solución compatible determinada.

Concluyendo, utilizando correctamente las condiciones de contorno se puede construir el spline a partir del sistema construido, tal y como se ha planteado.

## 4. SPLINES CÚBICOS SUAVIZANTES

### 4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE SUAVIZACIÓN

Considérese el retículo

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

Y la colección de números

$$y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$$

Puede suceder que los valores  $y_i$  en el arreglo

$$(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, m$$

Contengan cierto error. Esto quiere decir que para todo  $i = 0, 1, \dots, m$  existe un intervalo

$$(c_i, d_i)$$

O bien

$$(y_{i-\delta}, y_{i+\delta})$$

Tal que cualquier número perteneciente a él puede ser tomado como valor de  $y_i$ . Los valores  $y_i$  pueden ser, entre otros, los resultados (conteniendo un error aleatorio) de las mediciones de cierta función  $y(x)$  para los valores dados de la variable  $x$ . No es conveniente utilizar interpolación para construir la función  $y(x)$  a partir de estos valores experimentales, pues la función interpolante reproducirá las oscilaciones condicionadas por la componente aleatoria en el arreglo  $\{z_i\}$ .

En este caso es más apropiado utilizar el método de suavización, uno de cuyos objetivos es disminuir la aleatoriedad en el resultado de las mediciones. Habitualmente, en tales problemas se pide hallar una función cuyos valores para  $x = x_i, i = 1, 2, \dots, m$  pertenezcan a los intervalos correspondientes y que tenga, además, buenas propiedades (derivadas primera y segunda continuas, gráfico no muy encorvado - sin grandes oscilaciones-, etc.).

Un problema similar tiene lugar al construir, a partir de un arreglo (exacto),

$$(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, m$$

Una función que no pase por los puntos dados, sino cerca de ellos y que, además, varíe de manera suficientemente suave. Por decirlo de otro modo, la función buscada suaviza el arreglo sin interpolarlo.

#### 4.2. DEFINICIÓN DEL SPLINE CÚBICO SUAVIZANTE

Considérese un retículo

$$\omega \quad a = x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

Y dos colecciones de números

$$y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$$

Se denomina spline cúbico suavizante en un retículo  $\omega$  a una función  $S(x)$  que:

1.- En todo el intervalo

$$[x_i, x_{i+1}] \quad i = 1, \dots, m - 1$$

Es un polinomio de tercer grado

$$S(x) = S_i(x) = a_0^i + a_1^i(x - x_i) + a_2^i(x - x_i)^2 + a_3^i(x - x_i)^3$$

En todo el intervalo el spline es un polinomio de tercer grado que se define mediante cuatro coeficientes. En total hay  $(m - 1)$  intervalos, por lo que, para definir completamente el spline, es necesario hallar  $4(m - 1)$  números:

$$a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)} \quad i = 1, \dots, m - 1$$

2.- Es dos veces diferenciable con continuidad en el intervalo  $[a, b]$ , es decir, pertenece a la clase  $C^2[a, b]$ .

Esta condición significa continuidad de la función  $S(x)$  y de sus derivadas  $S'(x)$  y  $S''(x)$  en todos los nodos internos del retículo  $w$ . Como el número de nodos internos es  $m - 2$ , entonces tenemos  $3(m - 2)$  condiciones.

3.- En ella alcanza su mínimo el funcional

$$J(f) = \int_a^b (f'(x))^2 dx + \sum_{i=0}^m \frac{1}{\rho_i} (f(x_i) - y_i)^2$$

Donde  $y_i$  y  $\rho_i > 0$  son números dados. A los números  $\rho_i$  se les denomina pesos.

4.- Satisface condiciones de contorno de uno de los tres tipos que se exponen a continuación.

#### 4.3. CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno se dan en forma de restricciones sobre los valores del spline y de sus derivadas en todos los nodos fronterizos del retículo  $\omega$ .

A.- Condiciones de contorno de primer tipo.

Las derivadas primeras de  $S(x)$  son conocidas en los extremos del intervalo  $[a, b]$ :

$$S'(a) = z'_1 \quad S'(b) = z'_m$$

B.- Condiciones de contorno de segundo tipo.

Las derivadas segundas de  $S(x)$  son conocidas en los extremos del intervalo  $[a, b]$ :

$$S''(a) = z''_1 \quad S''(b) = z''_m$$

C.- Condiciones de contorno de tercer tipo.

Denominadas condiciones periódicas:

$$S(a) = S(b), \quad S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b)$$

Teorema:

El spline cúbico  $S(x)$  que minimiza el funcional y satisface las condiciones de contorno de uno de los tres tipos indicados está definido unívocamente.

El spline cúbico que minimiza el funcional  $J(f)$  y satisface las condiciones de contorno de i-ésimo tipo se denomina spline suavizador de i-ésimo tipo.

#### 4.4. ELECCIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

La elección de las condiciones de contorno es uno de los problemas principales en los problemas de interpolación y aproximación mediante splines, y adquiere una importancia especial cuando es necesario garantizar una precisión alta del spline  $S(x)$  en las proximidades de los extremos del intervalo  $[a, b]$ .

El efecto sobre la función spline, en función de las condiciones de contorno elegidas, disminuirá conforme estemos más cerca de los puntos intermedios a interpolar; sin embargo, la función dependerá en los extremos, en gran medida, de las condiciones elegidas. La elección de las condiciones de contorno depende, a menudo, de la existencia de datos adicionales sobre el comportamiento de la función spline.

Si se conocen los valores de la derivada primera  $f'(x)$  en los extremos del intervalo  $[a, b]$ , es decir, se conoce la dirección de la tangente de la curva en los extremos, entonces es lógico utilizar condiciones de

contorno de primer tipo.

Si, por el contrario, lo que se conocen son los valores de la derivada segunda  $f''(x)$ , entonces es lógico utilizar condiciones de contorno de segundo tipo.

Si existe la posibilidad de elegir entre condiciones de primer y segundo tipo, se dará preferencia a las primeras.

Si la función es periódica, se deben elegir condiciones de contorno de tercer tipo.

En caso de no existir información adicional sobre el comportamiento de la función, se pueden utilizar las condiciones naturales de contorno:

$$S'(a) = 0, \quad S'(b) = 0$$

Con estas condiciones, la precisión en la aproximación puede disminuir bruscamente cerca de los extremos del intervalo  $[a, b]$ .

Otra opción es utilizar las condiciones de contorno de primer o segundo tipo con valores aproximados. Esto es, tomar sus aproximaciones en diferencias, en lugar de los valores exactos de sus derivadas.

#### 4.5. ELECCIÓN DE LOS COEFICIENTES DE PESO

La elección de los coeficiente de peso  $\rho_i$  del funcional permite controlar, en cierta medida, las propiedades de los splines suavizantes.

A modo de ilustración de la influencia de este parámetro de peso (o de suavizado) consideraremos una serie de puntos pertenecientes a un retículo, que serán ajustados mediante diferentes valores de  $\rho$ .

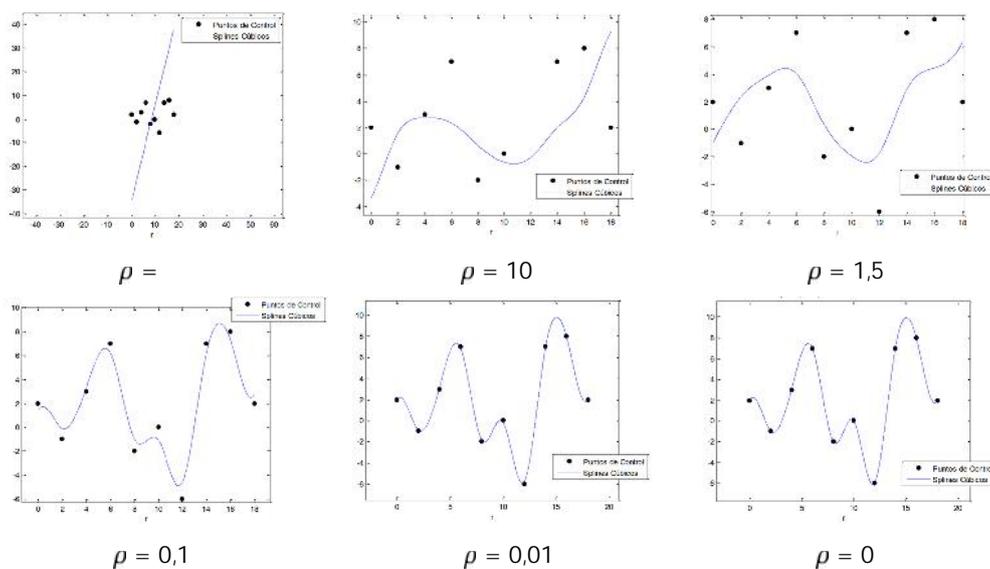


Figura 4.1: gráficas de splines en función del coeficiente de peso

En las figuras anteriores se aprecia como, al disminuir el valor de los pesos (el mismo peso se ha aplicado a todos los puntos), la función spline se acerca más a los puntos de control.

Al cumplirse  $\rho_i = 0$  para todo  $i$ , entonces  $z_i = y_i$ , y el spline suavizador resulta ser un spline interpolante. Esto se traduce en que, cuanto mayor es la precisión con la que están dadas las magnitudes  $y_i$ , tanto menores deben ser los coeficientes de peso respectivos. Si es necesario que el spline pase por el punto  $(x_k, y_k)$ , el coeficiente de peso  $\rho_i$   $i = 1, \dots, m$  correspondiente debe hacerse igual a cero. Sin embargo, si se cumple que  $\rho_i =$  , el ajuste se convierte en una recta de regresión.

En conclusión, la bondad del ajuste depende del parámetro  $\rho$ .

En los cálculos prácticos lo más importante es la elección de los números  $\rho_i$ . Nótese que los pesos pueden ser diferentes para puntos distintos. Así, por ejemplo, puede exigirse que  $\rho_1 = \rho_m = 0$ , con lo que los pesos en los extremos son cero y así la curva pasa por estos puntos, pero que los pesos sean distintos de cero en los demás puntos de control.

Se define  $\epsilon_i$  como el error de medición de la magnitud  $y_i$ . Se exige que:

$$|S(x_i) - y_i| \leq \epsilon_i$$

El caso más sencillo de elección de los coeficientes de peso  $\rho_i$  puede ser:

$$\rho_i = c \cdot \epsilon_i$$

donde  $c$  es cierta constante suficientemente pequeña.

#### 4.6. CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN SPLINE CÚBICA SUAVIZANTE

En cada intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$   $i = 1, \dots, m - 1$ , se busca un polinomio de grado 3 que satisfaga:

$$S_i(x_i) = z_i, \quad S_i(x_{i+1}) = z_{i+1}$$

$$S_i'(x_i) = \eta_i, \quad S_i'(x_{i+1}) = \eta_{i+1}$$

Se requiere también una condición de continuidad en la primera derivada, pero esta será impuesta posteriormente. La expresión

$$S(x) = S_i(x) = z_i(1 - t) + z_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1 - t)[(2 - t)\eta_i + (1 + t)\eta_{i+1}]$$

ofrece un polinomio de grado 3 que cumple con las condiciones planteadas.

Como comprobación, partimos de que la derivada segunda de un polinomio de grado 3 es un polinomio de grado 1, y en este caso debe satisfacer  $S_i'(x_i) = \eta_i$ ,  $S_i'(x_{i+1}) = \eta_{i+1}$ , como ya se ha citado anteriormente. Así, si consideramos que:

$$t = \frac{x-x_i}{h_i} \quad y \quad x_{i+1} = x_i + h_i$$

la derivada segunda del polinomio es:

$$S_i''(x) = (1-t)\eta_i + t\eta_{i+1}$$

Integrando el polinomio anterior y realizando un cambio de variable:

$$\int S_i''(x) dx = \int S_i''(t) h_i dt = h_i \left( -\eta_i \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2} \eta_{i+1} + C \right)$$

donde el cambio de variable ha sido:

$$\frac{x-x_i}{h_i} = t \quad dx = h_i dt$$

Si volvemos a integrar el polinomio:

$$S_i(x) = \int S_i'(x) dx = \int S_i'(t) h_i dt = \frac{h_i^2}{2} \int [(-\eta_i(1-t)^2 + t^2\eta_{i+1}) dt] + h_i t + D$$

$$S_i(x) = \frac{h_i^2}{6} [(1-t)^3\eta_i + t^3\eta_{i+1}] + h_i t + D \quad (\text{ecuación 4.1})$$

Para las condiciones establecidas debe ser:

$$x = x_i \quad S_i(x_i) = z_i \quad \text{con} \quad t = 0$$

$$x = x_{i+1} \quad S_i(x_{i+1}) = z_{i+1} \quad \text{con} \quad t = 1$$

$$\frac{h_i^2}{6} [\eta_i] + D = z_i \quad ; \quad D = z_i - \frac{h_i^2}{6} [\eta_i]$$

al sustituir el valor de D:

$$\frac{h_i^2}{6} [\eta_{i+1}] + h_i C + D = z_{i+1} \quad ; \quad h_i C = z_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} [\eta_{i+1}] + z_i - \frac{h_i^2}{6} [\eta_i]$$

y, por último, C:

$$C = \frac{z_{i+1} - z_i}{h_i} + \frac{h_i}{6}(\eta_i - \eta_{i+1})$$

Sustituyendo los valores de las constantes de integración C y D de la ecuación 4.1:

$$h_i t^i + D = (z_{i+1} - z_i)t + \frac{h_i^2}{6}(\eta_i - \eta_{i+1})t + z_i - \frac{h_i^2}{6}\eta_i$$

El polinomio queda de la forma:

$$S_i(x) = \frac{h_i^2}{6}[(1-t)^3\eta_i + t^3\eta_{i+1}] + (z_{i+1} + z_i)t + \frac{h_i^2}{6}(\eta_i - \eta_{i+1})t + z_i - \frac{h_i^2}{6}\eta_i \quad (\text{ecuación 4.2})$$

La forma lineal se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} h_i t C + D - [z_i(1-t) + z_{i+1}t] + [z_i(1-t) + z_{i+1}t] = \\ = -\eta_{i+1}\frac{h_i^2}{6}t + \frac{h_i^2}{6}\eta_i t - \frac{h_i^2}{6}\eta_i + (1-t)z_i + t(z_i + 1) \end{aligned}$$

Con las siguientes observaciones para los términos que acompañan a  $\eta_i$ :

$$-t(1-t)(2-t) = -(t-t^2)(2-t) = -(2t-2t^2-t^2+t^3) = -2t+3t^3-t^3 \quad (1)$$

$$(1-t)^3 = -t^3+3t^3-3t+1 \quad (2)$$

y la diferencia de (1) y (2):

$$(-2t+3t^3-t^3) - (-t^3+3t^3-3t+1) = -t+1$$

Sustituyendo:

$$(-t+1)\frac{h_i^2}{6}\eta_i \quad (\text{ecuación 4.3})$$

Los términos que acompañan a  $\eta_{i+1}$  son:

$$-t(1-t)(1+t) = -t(1-t^2) = -t+t^3 \quad (1)$$

$$t^3 \quad (2)$$

y la diferencia de (1) y (2):

$$(-t+t^3) - t^3 = -t$$

de nuevo, incluyendo los coeficientes:

$$t \frac{h_i^2}{6} \eta_{i+1} \quad (\text{ecuación 4.4})$$

Volviendo a la ecuación 4.2 y sustituyendo en ella las expresiones 4.3 y 4.4, se obtiene el spline suavizante de la forma:

$$S(x) = S_i(x) = z_i(1 - t) + z_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6} t(1 - t)[(2 - t)\eta_i + (1 + t)\eta_{i+1}] \quad (\text{ecuación 4.5})$$

#### 4.7. OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES

Se trabajará en el intervalo:

$$[x_i, x_{i+1}] \quad i = 1, \dots, m - 1$$

Si se consideran las notaciones:

$$S(x_i) = z_i, \quad S'(x_i) = \eta_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

donde  $z_i$  y  $\eta_i$  son  $2m + 2$  valores desconocidos.

Según demostración anterior, el spline cúbico suavizante se busca de la forma:

$$S(x) = S_i(x) = z_i(1 - t) + z_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6} t(1 - t)[(2 - t)\eta_i + (1 + t)\eta_{i+1}]$$

donde:

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}$$

Y los números  $z_i, \eta_i, i = 0, 1, \dots, m$  son la solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales determinado por las condiciones impuestas.

La función  $S_i(x)$  es continua en todo el intervalo  $[a, b]$ : para los dos primeros nodos,  $t$  toma el valor  $t = 0$  y  $t = 1$  respectivamente. Sustituyendo en la ecuación 4.5 se obtiene:

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= z_i \\ S_i(x_{i+1}) &= z_{i+1} \end{aligned}$$

Así, los números  $z_i$  y  $\eta_i$  deben ser elegidos de acuerdo a que el spline tenga derivada continua en el intervalo  $[a, b]$ . Para ello, se calculará la derivada primera de la función del spline suavizante  $S_i(x)$ .

En el intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ :

$$S'(x) = S'_{i-1}(x) = \frac{-z_{i-1} + z_i}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} [\eta_{i-1} + 2\eta_i]$$

Se calcula la primera derivada del spline en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$S'(x) = S'_i(x) = \frac{-z_i + z_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} [2 - 6t + 3t^2]\eta_i + (1 - 3t^2)\eta_{i+1}]$$

En el punto  $x_i + 0$  (para  $t = 0$ ) se obtiene:

$$S'(x_i + 0) = S'_i(x_i) = \frac{-z_i + z_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2\eta_i + \eta_{i+1})$$

Con la condición de continuidad para la primera derivada del spline en los puntos interiores del retículo  $\omega$ :

$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0) \quad i = 1, \dots, m - 1$$

Se obtienen  $m - 1$  relaciones, tal que:

$$\begin{aligned} \frac{-z_{i-1} + z_i}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} [\eta_{i-1} + 2\eta_i] &= \frac{-z_i + z_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6} (2\eta_i + \eta_{i+1}) \\ \frac{-z_i + z_{i+1}}{h_i} + \frac{z_{i-1} - z_i}{h_{i-1}} &= \frac{h_{i-1}}{6} (\eta_{i-1} + 2\eta_i) + \frac{h_i}{6} (2\eta_i + \eta_{i+1}) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} - \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}} \right) z_i + \frac{z_{i+1}}{h_i} = \frac{1}{6} (h_{i-1}\eta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\eta_i + h_i\eta_{i+1})$$

obteniendo  $m - 1$  ecuaciones.

De la condición de continuidad de la primera derivada del spline en los puntos interiores del retículo  $\omega$ :

$$\frac{z_1}{h_1} - \left( \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1} \right) z_2 + \frac{z_3}{h_2} = \frac{1}{6} [h_1\eta_1 + 2(h_1 + h_2)\eta_2 + h_2\eta_3]$$

$$\frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} - \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}} \right) z_i + \frac{z_{i+1}}{h_i} = \frac{1}{6} [h_{i-1}\eta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\eta_i + h_i\eta_{i+1}]$$

$$\frac{z_{m-2}}{h_{m-2}} - \left( \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}} \right) z_{m-1} + \frac{z_m}{h_{m-1}} = \frac{1}{6} (h_{m-2} \eta_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1}) \eta_{m-1} + h_{m-1} \eta_m)$$

$$i = 2, \dots, m - 1$$

Pudiendo obtenerse la relación matricial:

$$A = 6H$$

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & \left(-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \left(-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_{m-2}} & \left(-\frac{1}{h_{m-2}} - \frac{1}{h_{m-1}}\right) & h_{m-1} \end{pmatrix}$$

Quedando el sistema de ecuaciones incompleto.

Para la condición de minimización del funcional  $J(S) = \int_a^b (S'(x))^2 dx + \sum_{i=0}^m \frac{1}{\rho_i} (S(x_i) - y_i)^2$ , se calcula el primer término:

$$\int_a^b (S'(x))^2 dx = \int_0^1 [(1-t)\eta_i + t\eta_{i+1}]^2 h_i dt$$

$$t = \frac{x - x_i}{h_i} \quad d = h_i dt$$

Habiendo realizado el cambio de variable y desarrollando el binomio:

$$h_i \int_0^1 (1-t)^2 \eta_i^2 + t^2 \eta_{i+1}^2 + 2t(1-t)\eta_i \eta_{i+1} dt$$

Integrando esta expresión:

$$\left[ h_i \left[ -\frac{(1-t)^3}{3} \right]_0^1 \eta_i^2 + \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \eta_{i+1}^2 + \left[ t^2 - \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 \eta_i \eta_{i+1} \right] = h_i \left[ \frac{1}{3} \eta_i^2 + \frac{1}{3} \eta_{i+1}^2 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_{i+1} \right]$$

Así, obtenemos el primer miembro de la expresión del funcional:

$$\int_a^b (S'(x))^2 dx = h_i \left[ \frac{1}{3} \eta_i^2 + \frac{1}{3} \eta_{i+1}^2 + \frac{1}{3} \eta_i \eta_{i+1} \right]$$

Se va a desarrollar el funcional  $J(s)$  mediante los multiplicadores de Lagrange. La variable auxiliar  $\lambda_1$  impondrá que se satisfaga la condición de contorno en el extremo izquierdo. La variable  $\lambda_m$  impondrá que se cumpla la condición de contorno en el extremo derecho. Los valores  $\lambda_i$ ,  $i = 2, \dots, m-1$  impondrán que se satisfagan las condiciones debidas a la continuidad de la primera derivada.

Derivando el funcional respecto de  $\lambda: \frac{dJ_a(s)}{d\lambda}$ , se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\tilde{A}\eta = 6\tilde{H}z + F$$

Donde  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{H}$  y  $F$  dependen de las condiciones de contorno elegidas.

Despejando  $\eta$  en la ecuación anterior:

$$\eta = \tilde{A}^{-1}(6Hz + F) \quad (\text{ecuación 4.6})$$

Donde se requiere que  $\tilde{A}$  sea invertible.

Derivando el funcional auxiliar  $J_u$  respecto de  $\eta: \frac{dJ_a(s)}{d\eta}$ , se obtienen  $m$  ecuaciones más, que expresadas matricialmente quedan:

$$U = V$$

Al despejar  $\lambda$  en la ecuación 4.6:

$$\lambda = V^{-1}U \quad (\text{ecuación 4.7})$$

Donde nuevamente se pide que  $V$  sea invertible.

Sustituyendo el valor anterior de  $\eta$  de la ecuación 4.6 en la ecuación 4.7:

$$\lambda = V^{-1}U\tilde{A}^{-1}(6Hz + F)$$

Definiendo  $M = V^{-1}U\tilde{A}^{-1}$  y sustituyendo:

$$\lambda = 6MHZ + M \quad (\text{ecuación 4.8})$$

Derivando el funcional respecto de  $z$  se obtiene:

$$z = Y + \frac{1}{2}\rho.$$

Y al sustituir el valor de  $\lambda$  de la ecuación 4.8:

$$z = Y + \frac{1}{2}\rho. (6MHZ + M) = Y + \frac{1}{2}K_1z + K_2$$

Donde  $K_1$  y  $K_2$  son dos matrices auxiliares, introducidas para simplificar la notación del sistema resultante:

$$K_1 = \rho) \quad 6H$$

$$K_2 = \rho)$$

Definiendo una tercera matriz auxiliar  $C$ :

$$C = I - \frac{1}{2}K_1$$

El sistema resultante queda:

$$Cz = Y + K_2$$

Para resolver este sistema de ecuaciones es necesario definir las matrices anteriores, que vienen dadas en función de las condiciones de contorno elegidas, las cuales se elegirán en función de los datos adicionales que se tengan sobre el comportamiento de la función.

Nótese que este sistema siempre tendrá solución única para cualquier valor de  $\rho$ , salvo para un número finito de valores de  $\rho$  que tienen relación con los valores propios de la matriz  $C$ . En particular, para valores de  $\rho$  suficientemente pequeños (caso que es más interesante en la práctica), siempre hay solución única.

#### 4.8. SISTEMA DE ECUACIONES FINAL EN FUNCIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

A continuación se detalla cuáles son las dos ecuaciones que se pueden obtener en función de las condiciones de contorno, las cuales incluso pueden ser distintas en cada extremo.

En caso de conocer condiciones de primer tipo (valores de la primera derivada de  $S(x)$  en los extremos del intervalo  $[a, b]$ ) se obtienen las dos ecuaciones que faltan para completar el sistema del siguiente modo:

- Se obtiene la derivada del trozo de spline correspondiente al extremo.
- Se evalúa esta ecuación en punto extremo.
- Se iguala al valor conocido de la primera derivada.

1.- Para el extremo izquierdo (a):

$$S_1'(x_1) = \frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_1) = f'(a)$$

$$\frac{-z_1 + z_2}{h_1} = f'(a) + \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_1)$$

2.- Para el extremo derecho (b):

$$S_{m-1}'(x_m) = \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} + \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m] = f'(b)$$

$$\frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} = f'(b) - \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m]$$

Si se utilizan condiciones de segundo tipo (valores de la segunda derivada en los extremos del intervalo  $[a, b]$ ), se han de dar los valores de  $\eta_1$  y  $\eta_m$ :

$$f''(a) = \eta_1 \quad , \quad f''(b) = \eta_m$$

En caso de que la función a suavizar sea periódica o de tercer tipo de periodo  $T = b - a$ , y en particular  $f(a) = f(b)$  y por tanto  $S_1(a) = S_{m-1}(b)$ , se utilizan condiciones de tercer tipo, las cuales darán las ecuaciones:

1.-  $S_1'(t_1) = S_{m-1}'(t_m)$  . Sustituyendo:

$$\frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_1) = \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} + \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m]$$

$$\frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} = \frac{h_{m-1}}{6}[\eta_{m-1} + 2\eta_m] + \frac{h_1}{6}(2\eta_1 + \eta_1)$$

2.-  $S_1''(t_1) = S_{m-1}''(t_m)$  . En el caso de la suavización:

$$\eta_1 - \eta_m = 0$$

No siempre se conocen los mismos datos en ambos extremos del intervalo  $[a, b]$ , por lo que se pueden tener diferentes condiciones en cada extremo, excepto en las condiciones de tercer tipo, que exigen que la función sea periódica de periodo  $T = b - a$ , y en particular  $f(a) = f(b)$ .

Por último, antes de empezar a estudiar los diferentes casos que se pueden encontrar a la hora de aproximar mediante splines suavizantes, se recuerda que las condiciones de primer tipo tienen preferencia sobre las de segundo tipo, pudiendo aproximarse estos valores.

A partir de aquí, se estudiarán los casos más representativos, los cuales necesitan ser estudiados individualmente para poder demostrar que el sistema de ecuaciones resultante tiene solución y, además, es única: se va a demostrar que las matrices son invertibles en todos los casos.

Para estudiar la invertibilidad de dichas matrices se hará uso constantemente de un resultado que asegura que una matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.

#### 4.9. COMPROBACIÓN DEL SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Una vez construido un sistema de ecuaciones es importante comprobar si el sistema es compatible determinado con única solución, pudiendo esta obtenerse, y así poder obtener el spline correspondiente.

Si se construye el sistema completo  $A = B$  para que este tenga solución compatible determinada, solamente habrá que demostrar que la matriz  $A$  es invertible, es decir, que el determinante de  $A$  no es nulo.

En álgebra lineal, una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$  es invertible, no singular, no degenerada o regular si existe otra matriz cuadrada de orden  $n$ , llamada matriz inversa de  $A$  y representada como  $A^{-1}$  tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ , y el producto es el producto de matrices usual.

Existe un resultado que asegura que toda matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.

Formalmente, la matriz  $A$  de orden  $n$  es estrictamente diagonal dominante cuando se satisface:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, \dots, n$$

El resultado, conocido como lema de Hadamard, se prueba de la siguiente manera:

Si la matriz  $A$  no fuese invertible, la ecuación  $Az = 0$  admitiría una solución no nula. Entonces existe:

$$z = [z_1, \dots, z_n]^T$$

Se puede suponer sin pérdida de generalidad que:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |z_i| = 1$$

Sea  $r$  un índice para el que es  $|z_r| = 1$ . Tomando módulos en la ecuación:

$$a_{r1}z_1 + \dots + a_{rr}z_r + \dots + a_{rn}z_n = 0$$

Se concluye entonces:

$$|a_{rr}| \geq \sum_{i \neq r} |a_{ri}| |z_i| \leq \sum_{i \neq r} |a_{ri}|$$

Desigualdad que contradice la hipótesis de que la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante. Esto permite dar por demostrado que una matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.

#### 4.10. SISTEMA DE ECUACIONES FINAL Y COMPROBACIÓN DEL SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

En este último apartado se va a buscar el sistema de ecuaciones final para los casos particulares más representativos (los demás casos se deducen fácilmente a partir de éstos), además de demostrar que cada uno de los sistemas que se forman, incluidas las condiciones de contorno, son compatibles determinados, lo cual garantizará que la función spline se pueda construir.

Para abreviar se utilizarán las siguientes notaciones:

- 1: condiciones de primer tipo (se conoce el valor de la primera derivada en el extremo).
- 2: condiciones de segundo tipo (se conoce el valor de la segunda derivada en el extremo).
- 3: condiciones de tercer tipo (existe periodicidad).
- CI: condición de contorno en el extremo izquierdo.
- CD: condición de contorno en el extremo derecho.

CASO CI=1, CD=1

Las condiciones en los extremos son de primer tipo, por lo que se conocen las primeras derivadas y se tienen las dos siguientes ecuaciones adicionales:

$$\frac{-z_1 + z_2}{h_1} = f'(a) + \frac{h_1}{6} (2\eta_1 + \eta_2)$$

$$\frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} = f'(b) - \frac{h_{m-1}}{6} [\eta_{m-1} + 2\eta_m]$$

Desarrollando el funcional para estas condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} J_a(S) = & h_1 \left[ \frac{1}{3} \eta_1^2 + \frac{1}{3} \eta_2^2 + \frac{1}{3} \eta_1 \eta_2 \right] + \dots + h_{m-1} \left[ \frac{1}{3} \eta_{m-1}^2 + \frac{1}{3} \eta_m^2 + \frac{1}{3} \eta_{m-1} \eta_m \right] + \frac{1}{\rho} (z_1 - y_1)^2 + \dots \\ & + \frac{1}{\rho_m} (z_m - y_m)^2 + \lambda_1 \left( \frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{h_1}{6} (2\eta_1 + \eta_2) - f'(a) \right) \\ & + \lambda_2 \left[ \left( \frac{z_1}{h_1} - \left( \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1} \right) \right) z_2 + \frac{z_3}{h_2} - \frac{1}{6} (h_1 \eta_1 + 2(h_1 + h_2) \eta_2 + h_2 \eta_3) \right] + \dots \\ & + \lambda_i \left[ \left( \frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} - \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}} \right) \right) z_i + \frac{z_{i+1}}{h_i} - \frac{1}{6} (h_{i-1} \eta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) \eta_i + h_i \eta_{i+1}) \right] + \dots \\ & + \lambda_{m-1} \left[ \left( \frac{z_{m-2}}{h_{m-2}} - \left( \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}} \right) \right) z_{m-1} + \frac{z_m}{h_{m-1}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} (h_{m-2} \eta_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1}) \eta_{m-1} + h_{m-1} \eta_m) \right] \\ & + \lambda_m \left[ \left( \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} + \frac{h_{m-1}}{6} [\eta_{m-1} + 2\eta_m] - f'(b) \right) \right] \end{aligned}$$

$$i = 3, \dots, m - 2$$

Operando el funcional  $\frac{dJ_a(S)}{d}$  se obtiene el sistema de ecuaciones inicial ampliado:

$$\tilde{A}\eta = 6\tilde{H}z + F$$

donde las matrices:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h_{m-1}}{6} & -\frac{h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_1} & (-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & 0 & \dots & \\ 0 & \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & 0 & \frac{1}{h_{m-2}} & (-\frac{1}{h_{m-2}} - \frac{1}{h_{m-1}}) & \frac{1}{h_{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h_{m-1}} & \frac{1}{h_{m-1}} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} f(a) \\ 0 \\ 0 \\ f(b) \end{bmatrix}$$

Tal y como puede comprobarse, la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante y, por tanto, será invertible.

Operando con el funcional  $\frac{dJ_G(s)}{ds}$ , obtenemos  $m$  ecuaciones más:

$$\frac{2}{3}h_1\eta_1 + \frac{h_1}{3}\eta_2 - \frac{h_1}{3}\lambda_1 - \frac{h_1}{6}\lambda_2 = 0$$

$$\frac{h_1}{3}\eta_1 + \frac{2}{3}(h_1 + h_2)\eta_2 + \frac{h_2}{3}\eta_3 - \frac{h_1}{6}\lambda_1 - \frac{1}{3}(h_1 + h_2)\lambda_2 - \frac{h_2}{6}\lambda_3 = 0$$

$$\frac{h_i}{3}\eta_{i-1} + \frac{2}{3}(h_{i-1} + h_i)\eta_i + \frac{h_i}{3}\eta_{i+1} - \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)\lambda_i - \frac{h_i}{6}\lambda_{i+1} = 0$$

$$\frac{h_{m-2}}{3}\eta_{m-2} + \frac{2}{3}(h_{m-2} + h_{m-1})\eta_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_m - \frac{1}{3}(h_{m-2} + h_{m-1})\lambda_{m-1} - \frac{h_{m-2}}{6}\lambda_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{6}\lambda_m = 0$$

$$\frac{2}{3}h_{m-1}\eta_m + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3}\lambda_m - \frac{h_{m-1}}{6}\lambda_{m-1} = 0$$

$$i = 3, \dots, m - 1$$

Lo cual también puede notarse matricialmente:

$$U = V$$

donde:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2h_1}{3} & \frac{h_1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_1}{3} & \frac{2(h_1 + h_2)}{3} & \frac{h_2}{3} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{3} & \frac{2(h_{m-2} + h_{m-1})}{3} & \frac{h_{m-1}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{3} & \frac{2h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} \frac{h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{(h_1 + h_2)}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{6} & \frac{2(h_{m-2} + h_{m-1})}{3} & -\frac{h_{m-1}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & -\frac{h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz  $V$  es estrictamente diagonal dominante y, por tanto, es invertible.

Derivando el funcional  $\frac{dJ_a(s)}{d}$  respecto de  $z_i$ :

$$\frac{2}{\rho_1} (z_1 - y_1) - \frac{\lambda_1}{h_1} + \frac{\lambda_2}{h_1} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_2} (z_2 - y_2) - \frac{\lambda_1}{h_1} - \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{h_2} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_{i+1}} (z_i - y_i) - \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_{m-2}} (z_{m-2} - y_{m-2}) - \left( \frac{1}{h_{m-3}} + \frac{1}{h_{m-2}} \right) \lambda_{m-2} + \frac{\lambda_{m-3}}{h_{m-3}} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_{m-1}}(z_{m-1} - y_{m-1}) - \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} - \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right)\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_m}(z_m - y_m) + \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} + \frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} = 0$$

$$i = 3, \dots, m - 1$$

Donde, despejando z:

$$z_1 = y_1 + \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{\lambda_1}{h_1} - \frac{\lambda_2}{h_1} \right)$$

$$z_2 = y_2 + \frac{\rho_2}{2} \left[ -\frac{\lambda_1}{h_1} + \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \lambda_2 - \frac{\lambda_3}{h_2} \right]$$

$$z_i = y_i + \frac{\rho_i}{2} \left[ \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \lambda_i - \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} \right]$$

$$z_{m-2} = y_{m-2} + \frac{\rho_{m-2}}{2} \left[ \left( \frac{1}{h_{m-3}} + \frac{1}{h_{m-2}} \right) \lambda_{m-2} - \frac{\lambda_{m-3}}{h_{m-3}} \right]$$

$$z_{m-1} = y_{m-1} + \frac{\rho_{m-1}}{2} \left[ \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} + \left( \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}} \right) \lambda_{m-1} - \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} \right]$$

$$z_m = y_m + \frac{\rho_m}{2} \left( -\frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} \right)$$

$$i = 3, \dots, m - 1$$

Se puede expresar matricialmente como:

$$Z = Y + \frac{1}{2} \rho.$$

donde:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & \vdots & \vdots & \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{1}{h_{m-2}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\frac{1}{h_{m-2}} & \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}} & \frac{1}{h_{m-1}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{h_{m-1}} & -\frac{1}{h_{m-1}} \end{pmatrix}$$

CASO CI=2, CD=2

Las condiciones en los extremos son de segundo tipo, por lo que se conocen las derivadas segundas y se tienen las dos ecuaciones adicionales:

$$f''(a) = \eta_1$$

$$f''(b) = \eta_m$$

Desarrollando el funcional para las condiciones de contorno establecidas:

$$\begin{aligned} J_\alpha(s) = & h_1 \left( \frac{1}{3} \eta_1^2 + \frac{1}{3} \eta_2^2 + \frac{1}{3} \eta_1 \eta_2 \right) + \dots + h_{m-1} \left( \frac{1}{3} \eta_{m-1}^2 + \frac{1}{3} \eta_m^2 + \frac{1}{3} \eta_{m-1} \eta_m \right) + \frac{1}{\rho_1} (z_1 - y_1)^2 + \dots \\ & + \frac{1}{\rho_m} (z_m - y_m)^2 + \lambda_1 [\eta_1 - f''(a)] + \dots \\ & + \lambda_i \left[ \left( \frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} - \left( \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}} \right) \right) z_i + \frac{z_{i+1}}{h_i} - \frac{1}{6} (h_{i-1} \eta_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) \eta_i + h_i \eta_{i+1}) \right] + \dots \\ & + \lambda_{m-1} \left[ \left( \frac{z_{m-2}}{h_{m-2}} - \left( \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-3}} \right) \right) z_{m-2} + \frac{z_m}{h_{m-1}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} (h_{m-2} \eta_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1}) \eta_{m-1} + h_{m-1} \eta_m) \right] + \lambda_m (\eta_m - f''(b)) \end{aligned}$$

$$i = 2, \dots, m - 1$$

Operando el funcional  $\frac{dJ_\alpha(s)}{ds}$  se obtiene el sistema de ecuaciones ampliado:

$$\tilde{A}\eta = G\tilde{H}z + F$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & 0 & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_1} & (-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & 0 & \dots & \\ 0 & \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & 0 & \frac{1}{h_{m-2}} & (-\frac{1}{h_{m-2}} - \frac{1}{h_{m-1}}) & \frac{1}{h_{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} f(a) \\ 0 \\ 0 \\ f(b) \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz  $A$  es estrictamente diagonal dominante y, por tanto, invertible.

Operando con el funcional  $\frac{dJ_G(s)}{dt}$  se obtienen  $m$  ecuaciones más:

$$\frac{2}{3}h_1\eta_1 + \frac{h_1}{3}\eta_2 + \lambda_1 - \frac{h_1}{6}\lambda_2 = 0$$

$$\frac{h_i}{3}\eta_{i-1} + \frac{2}{3}(h_{i-1} + h_i)\eta_i + \frac{h_i}{3}\eta_{i+1} - \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)\lambda_i - \frac{h_i}{6}\lambda_{i+1} = 0$$

$$\frac{h_i}{3}\eta_{m-2} + \frac{2}{3}(h_{m-2} + h_{m-1})\eta_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_m - \frac{1}{3}(h_{m-2} + h_{m-1})\lambda_{m-1} - \frac{h_{m-2}}{6}\lambda_{m-1} = 0$$

$$\frac{2}{3}h_{m-1}\eta_m + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_{m-1} + \lambda_m - \frac{h_{m-1}}{6}\lambda_{m-1} = 0$$

$$i = 2, \dots, m - 1$$

Se puede expresar matricialmente como:

$$U = V$$

donde:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2h_1}{3} & \frac{h_1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_1}{3} & \frac{2(h_1 + h_2)}{3} & \frac{h_2}{3} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{3} & \frac{2(h_{m-2} + h_{m-1})}{3} & \frac{h_{m-1}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{3} & \frac{2h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -1 & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{(h_1 + h_2)}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \frac{h_2}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{6} & \frac{2(h_{m-2} + h_{m-1})}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & -1 \end{pmatrix}$$

Siendo la matriz  $V$  invertible, pues su determinante es distinto de 0, según puede comprobarse al desarrollar dicho determinante por la primera columna, y después por la última. La matriz resultante es estrictamente diagonal dominante y, por tanto, invertible y con determinante distinto de cero.

Derivando el funcional  $\frac{dJ_a(s)}{d}$  respecto de  $z_i$ :

$$\frac{2}{\rho_1}(z_1 - y_1) + \frac{\lambda_2}{h_1} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_i}(z_i - y_i) - \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_{m-1}}(z_{m-1} - y_{m-1}) - \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right)\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-1}} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_m}(z_m - y_m) + \frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} = 0$$

$$i = 2, \dots, m - 1$$

Donde, despejando  $z$ :

$$z_1 = y_1 + \frac{\rho_1}{2} \left( -\frac{\lambda_2}{h_1} \right)$$

$$z_i = y_i + \frac{\rho_i}{2} \left[ \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \lambda_i - \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} \right]$$

$$z_{m-1} = y_{m-1} + \frac{\rho_{m-1}}{2} \left[ \left( \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}} \right) \lambda_{m-1} - \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} \right]$$

$$z_m = y_m + \frac{\rho_m}{2} \left( -\frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} \right)$$

$$i = 2, \dots, m - 1$$

Se puede expresar matricialmente como:

$$Z = Y + \frac{1}{2} \rho.$$

donde:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{h_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & \ddots & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_{m-2}} & 0 \\ & \ddots & \ddots & \frac{1}{h_{m-2}} & \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{m-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

CASO CI=3, CD=3

En este caso, las ecuaciones adicionales se obtienen considerando que la función a suavizar es periódica de periodo  $T = b - a$ , de modo que, aplicando las condiciones de tercer tipo, se obtiene:

$$\eta_1 - \eta_m = 0$$

$$6 \left( \frac{-z_1 + z_2}{h_1} - \frac{-z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} \right) = h_1(2\eta_1 + \eta_2) + h_{m-1}(\eta_{m-1} + 2\eta_m)$$

Y se requiere que los datos cumplan las condiciones de compatibilidad:

$$\rho_1 = \rho_m$$

$$y_1 = y_m$$

Desarrollando el funcional para estas condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} J_u(s) = & h_1 \left( \frac{1}{3} \eta_1^2 + \frac{1}{3} \eta_2^2 + \frac{1}{3} \eta_1 \eta_2 \right) + \dots + h_{m-1} \left( \frac{1}{3} \eta_{m-1}^2 + \frac{1}{3} \eta_m^2 + \frac{1}{3} \eta_{m-1} \eta_m \right) + \frac{1}{\rho_1} (z_1 - y_1)^2 + \dots \\ & + \frac{1}{\rho_m} (z_m - y_m)^2 + \lambda_1 [\eta_1 - \eta_m] + \dots \\ & + \lambda_2 \left[ \left( \frac{z_1}{h_1} - \left( \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1} \right) \right) z_2 + \frac{z_3}{h_2} - \frac{1}{6} (h_1 \eta_1 + 2(h_1 + h_2) \eta_2 + h_2 \eta_3) \right] + \dots \\ & + \lambda_{i+1} \left[ \left( \frac{z_i}{h_i} - \left( \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{h_i} \right) \right) z_{i+1} + \frac{z_{i+2}}{h_{i+1}} - \frac{1}{6} (h_i \eta_i + 2(h_i + h_{i+1}) \eta_{i+1} + h_{i+1} \eta_{i+2}) \right] + \dots \\ & + \lambda_{m-1} \left[ \left( \frac{z_{m-2}}{h_{m-2}} - \left( \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-3}} \right) \right) z_{m-2} + \frac{z_m}{h_{m-1}} \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} (h_{m-2} \eta_{m-2} + 2(h_{m-2} + h_{m-1}) \eta_{m-1} + h_{m-1} \eta_m) \right] \\ & + \lambda_m \left[ \frac{z_1 + z_2}{h_1} - \frac{z_{m-1} + z_m}{h_{m-1}} - \frac{h_1}{6} (2\eta_1 + \eta_2) - \frac{h_{m-1}}{6} (\eta_{m-1} + 2\eta_m) \right] + \lambda_{m+1} (z_1 - z_m) \end{aligned}$$

$$i = 2, 3, \dots, m - 3$$

Operando el funcional  $\frac{dJ_u(s)}{ds}$  se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\tilde{A}\eta = 6Hz + F$$

donde:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ddots & \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{m-2} & 2(h_{m-2} + h_{m-1}) & h_{m-1} \\ 2h_1 & h_1 & \cdots & 0 & h_{m-1} & 2h_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h_1} & (-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & 0 & \cdots & \\ 0 & \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \frac{1}{h_{m-2}} & (-\frac{1}{h_{m-2}} - \frac{1}{h_{m-1}}) & \frac{1}{h_{m-1}} \\ -\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_{m-1}} & \frac{1}{h_1} & 0 & \cdots & \frac{1}{h_{m-1}} & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz  $\tilde{A}$  es invertible, pues su determinante es distinto de 0. Esto es comprobable sumando a la última columna la primera, y desarrollando el determinante por la primera fila. Se llega así a una matriz estrictamente diagonal dominante, que tiene determinante distinto de 0.

Operando con el funcional  $\frac{dJ_G(s)}{d}$  se obtienen  $m$  ecuaciones más:

$$\frac{2}{3}h_1\eta_1 + \frac{h_1}{3}\eta_2 + \lambda_1 - \frac{h_1}{6}\lambda_2 - \lambda_m \frac{h_1}{3} = 0$$

$$\frac{h_1}{3}\eta_1 + \frac{2}{3}(h_1 + h_2)\eta_2 + \frac{h_2}{3}\eta_3 - \frac{1}{3}(h_1 + h_2)\lambda_2 - \frac{h_2}{6}\lambda_3 - \lambda_m \frac{h_1}{6} = 0$$

$$\frac{h_{i-1}}{3}\eta_{i-1} + \frac{2}{3}(h_{i-1} + h_i)\eta_i + \frac{h_i}{3}\eta_{i+1} - \frac{h_{i-1}}{6}\lambda_{i-1} - \frac{1}{3}(h_{i-1} + h_i)\lambda_i - \frac{h_i}{6}\lambda_{i+1} = 0$$

$$\frac{h_{m-2}}{3}\eta_{m-2} + \frac{2}{3}(h_{m-2} + h_{m-1})\eta_{m-1} + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_m - \frac{h_{m-2}}{6}\lambda_{m-2} - \frac{1}{3}(h_{m-2} + h_{m-1})\lambda_{m-1} - \lambda_m \frac{h_{m-1}}{6} = 0$$

$$-\lambda_1 + \frac{2}{3}h_{m-1}\eta_m + \frac{h_{m-1}}{3}\eta_{m-1} - \frac{h_{m-1}}{6}\lambda_{m-1} - \lambda_m \frac{h_{m-1}}{3} = 0$$

$$i = 3, \dots, m-2$$

Se puede expresar matricialmente como:

$$U = V$$

donde:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2h_1}{3} & \frac{h_1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_1}{3} & \frac{2(h_1 + h_2)}{3} & \frac{h_2}{3} & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{3} & \frac{2(h_{m-2} + h_{m-1})}{3} & \frac{h_{m-1}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{3} & \frac{2h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} -1 & \frac{h_1}{6} & 0 & \dots & 0 & \frac{h_1}{3} \\ 0 & \frac{(h_1 + h_2)}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \ddots & \frac{h_1}{6} \\ \frac{h_2}{6} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \frac{h_{m-2}}{6} & \frac{2(h_{m-2} + h_{m-1})}{3} & \frac{h_{m-1}}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_{m-1}}{6} & \frac{h_{m-1}}{3} \end{pmatrix}$$

Siendo la matriz  $V$  invertible, pues su determinante es distinto de 0, según puede comprobarse sumando a la última fila la primera, y desarrollando el determinante por la primera columna, llegando a una matriz estrictamente diagonal dominante, que tiene determinante distinto de 0.

Derivando el funcional  $\frac{dJ_a(s)}{d}$  respecto de  $z_i$ :

$$\frac{2}{\rho_1} (z_1 - y_1) + \frac{\lambda_2}{h_1} - \frac{\lambda_m}{h_1} + \lambda_{m+1} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_2} (z_2 - y_2) - \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{h_2} + \frac{\lambda_m}{h_1} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_i} (z_i - y_i) + \lambda_{i-1} \frac{1}{h_{i-1}} - \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_{m-1}}(z_{m-1} - y_{m-1}) - \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right)\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} + \lambda_m \frac{1}{h_{m-1}} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_m}(z_m - y_m) + \frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} - \lambda_{m+1} = 0$$

$$i = 3, \dots, m-2$$

De la primera y la última ecuación, y de la condición  $z_1 = z_m$  se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\frac{2}{\rho_1}(z_1 - y_1) + \frac{\lambda_2}{h_1} - \frac{\lambda_m}{h_1} + \lambda_{m+1} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_m}(z_m - y_m) + \frac{\lambda_{m-1}}{h_{m-1}} - \frac{\lambda_m}{h_{m-1}} - \lambda_{m+1} = 0$$

$$z_1 = z_m$$

Restando a la primera ecuación la segunda, sustituyendo la tercera y teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad, se obtiene el valor de  $\lambda_{m+1}$ :

$$2\lambda_{m+1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} - \frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}}$$

$$\lambda_{m+1} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}}$$

Sustituyendo el valor de  $\lambda_{m+1}$  en el sistema de ecuaciones anterior:

$$\frac{2}{\rho_1}(z_1 - y_1) + \frac{3}{2} \frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_2}(z_2 - y_2) - \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{h_2} + \frac{\lambda_m}{h_1} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_i}(z_i - y_i) + \lambda_{i-1} \frac{1}{h_{i-1}} - \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)\lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_{m-1}}(z_{m-1} - y_{m-1}) - \left(\frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}}\right)\lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} + \lambda_m \frac{1}{h_{m-1}} = 0$$

$$\frac{2}{\rho_m}(z_m - y_m) + \frac{3}{2} \frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} = 0$$

$$i = 3, \dots, m - 2$$

Despejando  $z$ :

$$z_1 = y_1 - \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{3\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}} \right)$$

$$z_2 = y_2 - \frac{\rho_2}{2} \left[ - \left( \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{h_1} + \frac{\lambda_m}{h_1} \right]$$

$$z_i = y_i - \frac{\rho_i}{2} \left[ - \left( \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) \lambda_i + \frac{\lambda_{i+1}}{h_i} + \frac{\lambda_{i-1}}{h_{i-1}} \right]$$

$$z_{m-1} = y_{m-1} - \frac{\rho_{m-1}}{2} \left[ - \left( \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}} \right) \lambda_{m-1} + \frac{\lambda_{m-2}}{h_{m-2}} + \lambda_m \frac{1}{h_{m-1}} \right]$$

$$z_m = z_1 = y_m - \frac{\rho_m}{2} \left( \frac{3\lambda_{m-1} - \lambda_m}{h_{m-1}} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_2 - \lambda_m}{h_1} \right)$$

$$i = 3, \dots, m - 2$$

Puede expresarse matricialmente:

$$Z = Y + \frac{1}{2} \rho.$$

Donde:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2h_1} & 0 & \dots & -\frac{1}{h_{m-1}} & -\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_{m-1}} \\ 0 & \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_1} \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & \ddots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h_{m-2}} & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{h_{m-2}} & \frac{1}{h_{m-2}} + \frac{1}{h_{m-1}} & -\frac{1}{h_{m-1}} \\ 0 & -\frac{1}{2h_1} & \dots & 0 & -\frac{1}{h_{m-1}} & \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_{m-1}} \end{pmatrix}$$

#### OTROS CASOS

Existen otras posibles combinaciones, además de las ya mostradas, pero puesto que serán las mismas solo que variando una de las dos ecuaciones frontera, se desarrollan de igual modo, demostrando que son matrices estrictamente diagonales dominantes y por tanto, según el lema de Hadamard, serán invertibles y su sistema tendrá solución compatible determinada.

## 5. PROGRAMACIÓN DE SPLINES EN MATLAB

Para la programación de la función Spline se ha elegido MATLAB, que es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M).

Para la resolución de los splines cúbicos suavizantes se ha creado una función capaz de resolver el algoritmo planteado y resuelto anteriormente. Para resolver dicho algoritmo en esta función se deberán proporcionar una serie de inputs, y ésta a su vez devolverá una serie de outputs, la solución al problema planteado.

Para el programa creado, "Splines Cúbicos Suavizantes", se deberán proporcionar las coordenadas, tanto abscisas como ordenadas, de los puntos donde se va a realizar la aproximación. En caso de que se desee evaluar la función spline en unos puntos determinados, habrá que facilitarle las abscisas de dichos puntos al programa.

Pero como no siempre se utilizará esta evaluación, se va a incluir como una opción. Por tanto, como dato de entrada se introducirá  $o = s'/n$  para indicar si se calculan o no, y el retículo  $x$ , que serán puntos donde queremos evaluar la función polinómica a trozos.

Además de los nodos o puntos donde se desee realizar la aproximación y sus respectivos valores de la función, se recuerda que estos datos no eran suficientes para poder llegar a la solución: se necesitaban dos ecuaciones adicionales, las cuales se obtenían de las condiciones de contorno en los extremos.

Para una aproximación mediante splines suavizantes, habrá que proporcionar al programa datos sobre las condiciones en los extremos izquierdo y derecho, CI y CD respectivamente. Por lo tanto se introducirán en el programa los valores de la primera derivada (en caso de condiciones de contorno de primer tipo) de la segunda derivada para segundo tipo, y en caso de ser periódicas no será necesario dar datos adicionales.

Por último, habrá que proporcionar otro input, que será un vector con los coeficientes de peso o de suavizado, también conocido como "weigth parameter",  $w$ . Como ya se sabe, para valores pequeños de  $w$ , la función pasará por los puntos (interpolación) o cerca de éstos. Para valores altos de  $w$ , la función no pasará necesariamente por los nodos.

Este valor del parámetro de suavizado puede ser dado por decisión propia del usuario, el cual podrá probar diferentes valores y decidir cual se ajusta mejor a sus necesidades, o incluso podrá elegirlo en función del grado de error o ruido que contengan sus mediciones de los nodos.

Como datos de salida u outputs se obtienen, aparte de los valores aproximados si es el caso, los polinomios de tercer grado que definirán el spline.

Asimismo, se podrán visualizar las gráficas de la función spline, así como las funciones de la primera y segunda derivada, las cuales tienen un alto interés para verificar la pendiente o giro de la curva y las propiedades de suavidad del spline, pudiendo comprobar visualmente la uniformidad de la curvatura.

### 5.1. SCRIPTS

A continuación se describen los scripts utilizados para definir las matrices de coeficientes necesarias para resolver el sistema de ecuaciones. Se incluye una descripción de los ficheros de datos. El programa con el que se ha realizado la resolución de los splines consiste en una serie de scripts de Matlab, junto con algunos archivos de datos en formato .txt, donde queda reflejada la solución del sistema.

condicion\_derivadasA.m

Este script define la matriz de coeficientes  $A$  que acompaña a las  $\eta_j$  en el sistema de ecuaciones  $\tilde{A}\eta_j = 6Hz + F$ , obtenido de la condición de continuidad de la primera derivada de la función spline.

```
function A=condicion_derivadas_A(h,CI,CD)

% Esta matriz serán los coeficientes que acompañan a los eta para
% condiciones en la frontera CI=1 y CD=1 es decir de segundo primer
% tipo en ambos extremos
% A es el término que acompaña a los eta tal que
%  $\tilde{A}\eta=6Hz+F$ 
% Este sistema de ecuaciones viene de la condición de continuidad de
% la
% primera derivada de la función Spline.
% Variables de entrada:
% h=vector h de distancias entre las abscisas
n=length(h);

% La primera ecuación
if CI==1
    A(1,1)=h(1)/3; A(1,2)=h(1)/6;
elseif CI==2
    A(1,1)=1;
elseif CI==3
    A(1,1)=1; A(1,n+1)=-1;
end

% Definimos el bucle que calculará los términos intermedios
for i=2:n
    A(i,i)=2*(h(i-1)+h(i));
    A(i,i+1)=h(i);
    A(i,i-1)=h(i-1);
end
```

```

% La última ecuación
if CD==1
    A(n+1,n)=-h(n)/6; A(n+1,n+1)=-h(n)/3;
elseif CD==2
    A(n+1,n+1)=1;
elseif CD==3
    A(n+1,1)=2*h(1); A(n+1,2)=h(1); A(n+1,n)=h(n); A(n+1,n+1)=2*h(n);
end

```

condicion\_derivadasH.m

Este script define la matriz de coeficientes  $H$  que acompaña a las  $z$  en el sistema de ecuaciones  $\tilde{A}r_j = 6Hz + F$ , obtenido de la condición de continuidad de la primera derivada de la función spline.

```

function H=condicion_derivadas_H(h,CI,CD)

% Esta matriz serán los coeficientes que acompañan a los z para
% condiciones en la frontera CI=1 y CD=1 es decir de primer tipo en
% ambos
% extremos
% H es el término que acompaña a los Z tal que
%  $\tilde{A}eta=6Hz+F$ 
% Este sistema de ecuaciones viene de la condición de continuidad de
% la
% primera derivada de la función Spline.
% Variables de entrada
% h=vector h de distancias entre las abscisas

n=length(h);
H=zeros(n+1,n+1);

% La primera ecuación
if CI==1
    H(1,1)=-1/(6*h(1)); H(1,2)=1/(6*h(1));
elseif CI==2
    H(1,1)=0; H(1,2)=0;
elseif CI==4
    H(1,1)=1;
end

```

```

% Definimos el bucle que calculará los términos intermedios
for i=2:n
    H(i,i)=-(1/h(i-1)+1/h(i));
    H(i,i+1)=1/h(i);
    H(i,i-1)=1/h(i-1);
end

% Las dos últimas ecuaciones
if CD==1
    H(n+1,n)=-1/(6*h(n)); H(n+1,n+1)=1/(6*h(n));
elseif CD==2
    H(n+1,n)=0; H(n+1,n+1)=0;
elseif CD==3
    H(n,n+1)=0; H(n,1)=1/h(n);
    H(n+1,1)=-1/h(1)-1/h(n); H(n+1,2)=1/h(1); H(n+1,n)=1/h(n);
    H(n+1,n+1)=0;
elseif CD==4
    H(n+1,n+1)=1;
end

```

relacion\_EtaLambda\_U.m

Este script define la matriz de coeficientes  $U$  que acompaña a las  $\eta_j$  en la ecuación  $U = V$ , obtenida de la expresión desarrollada del funcional, al diferenciar respecto de las  $\eta_j$ .

```

function U=relacion_EtaLambda_U(h)

% Matriz coeficientes obtenida de la expresión del funcional,
(dJ(s))/dEta
% U*Eta=V*lambda
% U es la matriz que acompaña a lambda
% Variables de entrada:
% h=vector h de distancias entre las abscisas
% n es la dimensión del vector h
n=length(h);

% Definimos los términos invariantes
U(1,1)=2/3*h(1);
U(1,2)=h(1)/3;
U(n+1,n)=h(n)/3;
U(n+1,n+1)=2/3*h(n);

```

```
% Definimos el bucle que calculará el resto de términos
```

```
for i=2:n
    U(i,i)=2/3*(h(i-1)+h(i));
    U(i,i+1)=h(i)/3;
    U(i,i-1)=h(i-1)/3;
end
```

relacion\_EtaLambda\_V.m

Este script define la matriz de coeficientes  $V$  que acompaña a las  $\lambda$  en la ecuación  $U = V \lambda$ , obtenida de la minimización del funcional, al diferenciar respecto de las  $\eta_j$ .

```
function V=relacion_EtaLambda_V(h,CI,CD)
```

```
% Matriz coeficientes obtenida de la expresión del funcional,
(dJ(s))/dEta)
```

```
% U*Eta=V*lambda
```

```
% V es la matriz q acompaña a lambda
```

```
% Variables de entrada:
```

```
% h=vector h de distancias entre las abscisas
```

```
% n es la dimensión del vector h
```

```
n=length(h);
```

```
% Las 2 primeras ecuaciones
```

```
if CI==1
```

```
    V(1,1)=h(1)/3; V(1,2)=h(1)/6;
```

```
    V(2,1)=h(1)/6; V(2,2)=(h(1)+h(2))/3; V(3,2)=h(2)/6;
```

```
elseif CI==2
```

```
    V(1,1)=-1; V(1,2)=h(1)/6;
```

```
    V(2,1)=0; V(2,2)=(h(1)+h(2))/3; V(3,2)=h(2)/6;
```

```
elseif CI==3
```

```
    V(1,1)=-1; V(1,2)=h(1)/6; V(1,n+1)=h(1)/3;
```

```
    V(2,1)=0; V(2,2)=1/3*(h(1)+h(2)); V(2,3)=h(2)/6; V(2,n+1)=h(1)/6;
```

```
elseif CI==4
```

```
    V(1,1)=0; V(1,2)=h(1)/6; V(1,n+1)=h(1)/3;
```

```
    V(2,1)=0; V(2,2)=1/3*(h(1)+h(2)); V(2,3)=h(2)/6; V(2,n+1)=h(1)/6;
```

```
end
```

```

% Definimos el bucle que calculará los términos intermedios
for i=3:n-1
    V(i,i)=(h(i-1)+h(i))/3;
    V(i-1,i)=h(i-1)/6;
    V(i+1,i)=h(i)/6;
end

% Las dos últimas ecuaciones
if CD==1
    V(n+1,n)=h(n)/6; V(n+1,n+1)=-h(n)/3;
    V(n,n-1)=h(n-1)/6; V(n,n)=(h(n-1)+h(n))/3; V(n,n+1)=-h(n)/6;
elseif CD==2
    V(n+1,n)=h(n)/6; V(n+1,n+1)=-1;
    V(n,n-1)=h(n-1)/6; V(n,n)=(h(n-1)+h(n))/3; V(n,n+1)=0;
elseif CD==3
    V(n+1,1)=1; V(n+1,n)=h(n)/6; V(n+1,n+1)=h(n)/3;
    V(n,n-1)=h(n-1)/6; V(n,n)=1/3*(h(n-1)+h(n)); V(n,n+1)=h(n)/6;
elseif CD==4
    V(n+1,1)=0; V(n+1,n)=h(n)/6; V(n+1,n+1)=0;
    V(n,n-1)=h(n-1)/6; V(n,n)=2/3*(h(n-1)+h(n)); V(n,n+1)=h(n)/6;
end

relacion_EtaLambda_J.m

```

Este script define la matriz de coeficientes  $J$  que se encuentra en la ecuación obtenida anteriormente  $Z = Y + \frac{1}{2}\rho$ , obtenida de la minimización del funcional, al diferenciar respecto de  $z$ .

```
function J=relacion_ZetaLambda_J(h,CI,CD)
```

```

% Variables de entrada
% h=vector espaciado nodos
% De la minimización del funcional y (dJ(s))/dz
% se obtiene la relación
% Z=Y+1/2*rho*lambda*J
% En este programa definimos la matriz J
% n es la dimensión del vector h

```

```

n=length(h);
J=zeros(n+1,n+1);

```

```

% La primera ecuación
if CI==1
    J(1,1)=1/h(1); J(1,2)=-1/h(1);
    J(2,1)=-1/h(1); J(2,2)=1/h(1)+1/h(2); J(2,3)=-1/h(2);
elseif CI==2
    J(1,1)=0; J(1,2)=-1/h(1);
    J(2,1)=0; J(2,2)=1/h(1)+1/h(2); J(2,3)=-1/h(2);
elseif CI==3
    J(1,1)=0; J(1,2)=-1/2*1/h(1); J(1,n)=-1/2*1/h(n);
    J(1,n+1)=1/2*1/h(1)+1/2*1/h(n);
    J(2,1)=0; J(2,2)=1/h(1)+1/h(2); J(2,3)=-1/h(2); J(2,n+1)=-1/h(1);
elseif CI==4
    J(1,1)=-1; J(1,2)=-1/h(1);
    J(2,1)=0; J(2,2)=1/h(1)+1/h(2); J(2,3)=-1/h(2);
end

% Definimos el bucle que calculará los términos intermedios
for i=3:n-1
    J(i,i)=1/h(i-1)+1/h(i);
    J(i-1,i)=-1/h(i-1);
    J(i+1,i)=-1/h(i);
end

% La última ecuación
if CD==1
    J(n+1,n)=-1/h(n); J(n+1,n+1)=-1/h(n);
    J(n,n-1)=-1/h(n-1); J(n,n)=1/h(n-1)+1/h(n); J(n,n+1)=1/h(n);
elseif CD==2
    J(n+1,n)=-1/h(n); J(n+1,n+1)=0;
    J(n,n-1)=-1/h(n-1); J(n,n)=1/h(n-1)+1/h(n); J(n,n+1)=0;
elseif CD==3
    J(n,n-1)=-1/h(n-1); J(n,n)=1/h(n-1)+1/h(n); J(n,n+1)=-1/h(n);
    J(n+1,2)=-1/2*1/h(1); J(n+1,n)=-1/2*1/h(n);
    J(n+1,n+1)=1/2*1/h(n)+1/2*1/h(1);
elseif CD==4
    J(n,n-1)=-1/h(n-1); J(n,n)=1/h(n-1)+1/h(n);
    J(n+1,n)=1/h(n); J(n+1,n+1)=-1;
end

```

## 5.2. ETAPAS DEL PROGRAMA

El programa Splines Cúbicos Suavizantes ha sido dividido en varias etapas diferenciadas:

Primeramente, es definida la función. En ella se indica el nombre del programa, las variables de entrada y las variables de salida. A continuación, el usuario encontrará una serie de ayudas a las que podrá acceder mediante el comando "help" seguido del nombre del programa, en este caso "splines\_suavizantes".

En una segunda etapa son definidos una serie de errores que el usuario con pocos conocimientos sobre aproximación mediante splines puede encontrar muy útiles. Los errores con los que el usuario podrá encontrarse serán:

- En caso de que el usuario no introduzca, al menos, tres puntos o nodos de aproximación, no se podrá construir la función spline, por lo tanto el usuario será avisado mediante un mensaje de error.
- Si el usuario introdujera como condiciones en la frontera en alguno de los dos extremos condiciones de tercer tipo, implícitamente estará diciendo que en el extremo opuesto también serán de tercer tipo. En caso de que no sea así, el programa no funcionará y mostrará un mensaje de error.

En una tercera fase se definirán las matrices involucradas en los sistemas de ecuaciones lineales a resolver, las cuales dependen de las condiciones de contorno seleccionadas. Se resuelven los sistemas obteniendo los coeficientes necesarios para la definición del spline.

En la cuarta fase del programa se evaluarán los splines en los diferentes segmentos de acuerdo al polinomio obtenido en el capítulo anterior:

$$S(x) = S_i(x) = z_i(1 - t) + z_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1 - t)[(2 - t)\eta_i + (1 + t)\eta_{i+1}]$$

Para concluir, se construirán de una manera simbólica los polinomios a partir de los coeficientes ya obtenidos. El programa dibujará mediante la función plot las diferentes gráficas de la función spline cúbico suavizante, así como su primera y segunda derivada.

## 5.3. CÓDIGO MATLAB PARA RESOLUCIÓN DE SPLINES CÚBICOS SUAVIZANTES

`function`

```
Splines_Suavizantes(t,y,CI,S1a,S2a,CD,S1b,S2b,opx,x,opg1,opg2,opg3,opg4,tol_rho)
```

```
% Esta función busca hallar las ecuaciones que definen los diferentes
% tramos que componen el spline
% suavizante y dibujar las gráficas de la curva, su primera y segunda
% derivada, así como los valores obtenidos al interpolar y su gráfica.
% Creando ficheros que recojan la información.
```

```

% Splines_Suavizantes(t,y,CI,S1a,S2a,CD,S1b,S2b,opx,x,opg1,opg2,opg3,opg
% 4,tol_rho)
% Variables de entrada:
% t: abscisas de la tabla de valores de los nodos
% y: ordenadas de la tabla de valores de los nodos
% CI: condición de contorno en el extremo izquierdo
% CD: condición de contorno en el extremo derecho
% Posibles condiciones de contorno:
% 1- De primer tipo: valores de la primera derivada
% 2- De segundo tipo: valores de la segunda derivada
% 3- De tercer tipo: periódicas de periodo T=b-a
% S'(a)=S'(b); S''(a)=S''(b). Si CI=3->CD=3
% 4- De cuarto tipo: Tres veces diferenciable en los puntos t2 y/o tm-
1
%
% S1a: valor de la primera derivada en el extremo izquierdo
% S2a: valor de la segunda derivada en el extremo izquierdo
% S1b: valor de la primera derivada en el extremo derecho
% S2b: valor de la segunda derivada en el extremo derecho
%
% opx: parámetro que nos indica si debemos calcular o no los valores
interpolados
% 's': se calculan; 'n': no se calculan
% x: retículo de puntos donde queremos evaluar la función polinómica a
trozos
% opg1: parámetro que nos indica se debemos dibujar o no la gráfica de
los valores interpolados
% opg2: parámetro que nos indica se debemos dibujar o no la gráfica de
los splines
% opg3: parámetro que nos indica se debemos dibujar o no la gráfica de
las primeras derivadas
% opg4: parámetro que nos indica se debemos dibujar o no la gráfica de
las segundas derivadas
% si opg1=1 entonces dibujará la gráfica
% tol_rho vector de tolerancias para los pesos del funcional, será el
que determine el
% grado de suavidad de la curva, es decir, que la curva realiza menos
oscilaciones
%
% EJEMPLO:

```

```

% t=[1,3,4,6]
% y=[2,-1,3,1]
% CI=2 ; CD=2
% S1a=0; S1b=0 (no se van a utilizar, da igual el dato)
% S2a=2; S2b=2
% opx='s'
% x=[1:0.2:6]
%
% Splines_Suavizantes([1,3,4,6],[2,-
1,3,1],2,0,0,2,0,0,'s',[1:0.2:6],1,1,1,1,[0.001,0.001,0.001,0.001]);

% Número de puntos en la tabla, longitud del vector nodos
n=length(t);
pe=length(tol_rho);
% Comprobamos que las entradas son correctas.
% El número mínimo de nodos para poder realizar un Spline es 3
if n<3
    uiwait(msgbox('El número de puntos de control debe ser mayor que
2', 'Mensaje de error' ,...
'error' , 'modal' ));
    return ;
% Si no se especifican las condiciones en la frontera, se avisará el
error
elseif CI==0 | CD==0
    uiwait(msgbox('Falta especificar alguna de las condiciones de
frontera' , 'Mensaje de error' ,...
'error' , 'modal' ));
    return ;

% Si se marca condiciones periódicas o 3, va intrínseco que se tienen
% que dar en
% los tres extremos
elseif CI==3 & CD~=3
    uiwait(msgbox('Si CI=3 entonces CD debe ser también 3' , 'Mensaje
de error' ,...
'error' , 'modal' ));
    return ;
elseif CD==3 & CI~=3
    uiwait(msgbox('Si CD=3 entonces CI debe ser también 3' , 'Mensaje
de error' ,...

```



```

% Definimos la matriz Auxiliar K1
K1_aux=6*J*V^(-1)*U*A^(-1)*H;
%rho=min(tol_rho,1./sum(abs(K1_aux)))
K1=diag(tol_rho)*K1_aux;

% Definimos la matriz Auxiliar K2
K2=diag(tol_rho)*J*inv(V)*U*inv(A)*F;

% Resolución del sistema lineal Cz=B
C=eye(n)-1/2*K1;
B=y+K2;
z=C\B;

% Cálculo de los valores de la segunda derivada en los nodos eta
eta=A^(-1)*(6*H*z+F);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Evaluamos los Splines en x %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

if opx=='s'

% Encuentra el trozo polinómico a evaluar según cada entrada de x
if x(1)==t(1)
    Si(1)=z(1);
    minim=Si; maxim=Si;
else
    ind=find((x(1)>t)==0);
    ind=ind(1)-1;
    ind=ind(1);
    % Aplica la fórmula para calcular S_ind(x)
    tn=(x(1)-t(ind))/h(ind);
    Si(1)=z(ind)*(1-tn)+z(ind+1)*tn-h(ind)^2/6*tn*(1-tn)*((2-
    tn)*eta(ind)+(1+tn)*eta(ind+1));
    minim=Si; maxim=Si;
end
for i=2:length(x)
    ind=find((x(i)>t)==0);
    ind=ind(1)-1;
    ind=ind(1);
    % Aplica la fórmula para calcular S_ind(x)

```

```

    tn=(x(i)-t(ind))/h(ind);
    Si(i)=z(ind)*(1-tn)+z(ind+1)*tn-h(ind)^2/6*tn*(1-tn)*((2-
    tn)*eta(ind)+(1+tn)*eta(ind+1));
if Si(i)<minim
    minim=Si(i);
elseif Si(i)>maxim
    maxim=Si(i);
end
end

if opg1==1
    figure(1);
    %Dibuja los puntos de control en la gráfica
    b1=plot(t,y,'ko','MarkerSize',2,'LineWidth',3);
    hold on ;
    %Dibuja los valores interpolados en la gráfica
    b2=plot(x,Si,'ro','MarkerSize',3);
    hold on ;
    axis([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
    0.1*(t(2)-t(1)) min(min(y),minim)-...
    0.1*(max(y)-min(y)) max(max(y),maxim)+0.1*(max(y)-
    min(y))]);
    axis equal ;
    legend([b1,b2],'Puntos de Control','Valores Interpolados');
end
end

    % Construimos los polinomios de la interpolación %
    % Segmentaria %

syms r ;

%% %% %% Establecemos una variable simbólica %% %% %%

for i=1:n-1
    S(i)=z(i)*(1-(r-t(i))/h(i))+z(i+1)*(r-t(i))/h(i)-...
    h(i)^2/6*(r-t(i))/h(i)*(1-(r-t(i))/h(i))*...
    ((2-(r-t(i))/h(i))*eta(i)+(1+(r-t(i))/h(i))*eta(i+1));
end
if opg2==1

```

```

% Dibuja los puntos de control en la gráfica
figure(2);
b1=plot(t,y,'ko','MarkerSize',2,'LineWidth',3);
hold on ;

                                % Dibuja cada uno de los polinomios%

Ms=0;
ms=0;
for i=1:n-1
    b3=ezplot(S(i),[t(i),t(i+1)]);
    auxX=t(i):(t(i+1)-t(i))/10:t(i+1);
    auxY=subs(S(i),auxX); MauxY=max(auxY); mauxY=min(auxY);
    if MauxY>Ms
        Ms=MauxY;
    end
    if mauxY<ms
        ms=mauxY;
    end
end
axis([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
      0.1*(t(2)-t(1)) ms-0.1*(Ms-ms) Ms+0.1*(Ms-ms)]);
axis equal ;
legend([b1,b3],'Puntos de Control','Splines Cúbicos');
title('Ajuste por Splines Cúbicos Suavizantes');

% dibuja los polinomio splines también en la interfaz gráfica
axes(handles.grafica);

b1=plot(t,y,'ko','MarkerSize',2,'LineWidth',3);
hold on ;

                                % Dibuja cada uno de los polinomios%

for i=1:n-1
    b3=ezplot(S(i),[t(i),t(i+1)]);
end

axis([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
      0.1*(t(2)-t(1)) ms-0.1*(Ms-ms) Ms+0.1*(Ms-ms)]);
axis equal ;
legend([b1,b3],'Puntos de Control','Splines Cúbicos');
title('Ajuste por Splines Cúbicos Suavizantes');

```

```

        hold off
end

if opg3==1
    %Dibuja cada una de las primeras derivadas
    figure(3);
    hold on
    Ms=0;
    ms=0;

    % Diferenciamos el polinomio construido, para obtener el polinomio de la
    % primera derivada.
    S1=diff(S,1);
    for i=1:n-1
        b4=ezplot(S1(i),[t(i),t(i+1)]);
        auxX=t(i):(t(i+1)-t(i))/10:t(i+1);
        auxY=subs(S1(i),auxX); MauxY=max(auxY); mauxY=min(auxY);
    if MauxY>Ms
        Ms=MauxY;
    end
    if mauxY<ms
        ms=mauxY;
    end
    end
    axis([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
        0.1*(t(2)-t(1)) ms-0.1*(Ms-ms) Ms+0.1*(Ms-ms)]);
    legend(b4,'Primera Derivada Splines Cúbicos' );
    title('Primera Derivada de los Splines Cúbicos Suavizantes' );
end

if opg4==1
    %Dibuja cada una de las segundas derivadas
    figure(4)
    hold on

    % Diferenciamos el polinomio construido dos veces, para obtener el
    polinomio de la
    % segunda derivada.
    S2=diff(S,2);
    Msd=subs(S2(1),t(1));
    msd=subs(S2(1),t(1));

```

```

for i=1:n-1
    b5=ezplot(S2(i),[t(i),t(i+1)]);
    aux=subs(S2(i),t(i+1));
if aux>Msd
    Msd=aux;
elseif aux<msd
    msd=aux;
end
end
axis([t(1)-0.1*(t(2)-t(1)) t(length(t))+...
    0.1*(t(2)-t(1)) msd-0.1*(Msd-msd) Msd+0.1*(Msd-msd)]);
legend(b5,'Segunda Derivada Splines Cúbicos ');
title('Segunda Derivada de los Splines Cúbicos Suavizantes ');
end

% Salida de los polinomio a un fichero

% Se abre o crea un archivo y se escribe en él para los resultados de
valores aproximados
if opx=='s'
    fid=fopen('resul_valores_aproximados.txt','w');
fprintf(fid,'*****\n');
    hora=clock;
    fprintf(fid,'Resultado ejecutado el dia %d-%d-%d a las %d : %d :
%d\n',...
        hora(3),hora(2),hora(1),hora(4),hora(5),fix(hora(6)));
fprintf(fid,'*****\n\n');
for i=1:length(x)
    fprintf(fid,'%f %f\n',x(i),Si(i));
end
fclose(fid);
end

% Se abre o crea un archivo y se escribe en él para los resultados delos polinomios del Spline
fid=fopen('polinomios_splines.txt','w');
fprintf(fid,'*****\n');
    hora=clock;

```

```

fprintf(fid,'Resultado ejecutado el dia %d-%d-%d a las %d : %d :
%d\n' ,...
        hora(3),hora(2),hora(1),hora(4),hora(5),fix(hora(6)));
fprintf(fid,'*****
*****\n\n');
signos='----' ;

for i=1:length(t)-1
    coefi=sym2poly(expand(S(i)));
for j=1:4
    if coefi(j)>=0
        signos(j)='+' ;
    end
end
fprintf(fid,' %c %f x^3 %c %f x^2 %c %f x %c %f\n' ,...
        signos(1),abs(coefi(1)),signos(2),abs(coefi(2)),signos(3),...
        abs(coefi(3)),signos(4),abs(coefi(4)));
end
fprintf(fid,'\n');
fclose(fid);

```

## 7. TUTORIAL DE LA INTERFAZ GRÁFICA

### 7.1. LA INTERFAZ GRÁFICA

Para el desarrollo de la interfaz gráfica utilizada se ha elegido el entorno de trabajo de Matlab Guide (GUI), suficientemente gráfico e intuitivo como para permitir la obtención de resultados aceptables a problemas de aproximación a cualquier usuario, sin necesidad de conocimientos de programación o un profundo dominio de las bases matemáticas expuestas anteriormente, según se expone a continuación.

### 7.2. EJECUCIÓN DE LA INTERFAZ GRÁFICA

A continuación se exponen los pasos necesarios para ejecutar la interfaz gráfica, así como imágenes de las pantallas que se van presentando con la ejecución del programa.

Al abrir el programa Matlab, aparece la pantalla de principal desde donde se ejecuta el script.

El primer paso es seleccionar la carpeta donde esté guardada la programación a ejecutar, desde la pantalla de la izquierda, y que aparecerá en la línea superior.

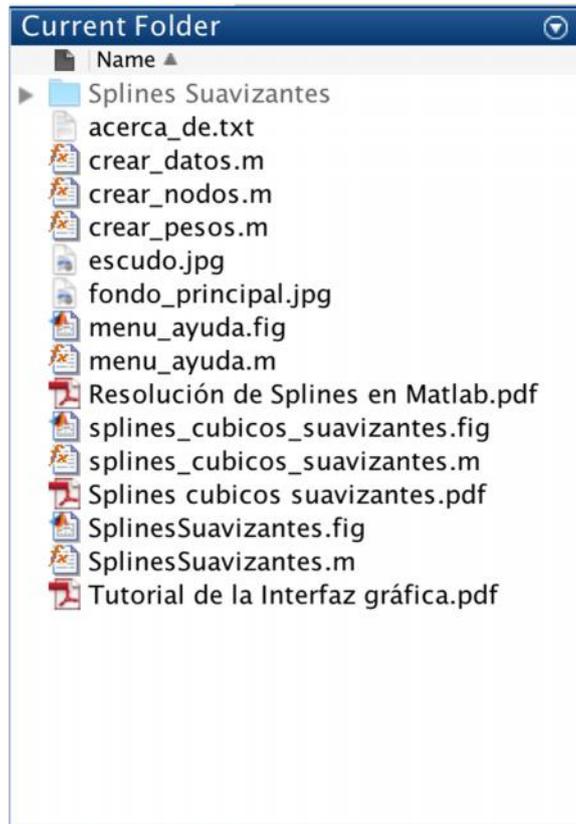


Figura 7.1: Ventana de selección de carpeta



Figura 7.2: Ruta de la carpeta seleccionada

Antes de ejecutar el script, debe añadirse la carpeta con todos sus archivos y subcarpetas a la ruta de trabajo de Matlab. Para ello, se abre el desplegable de opciones de la carpeta en cuestión y se selecciona la siguiente opción:

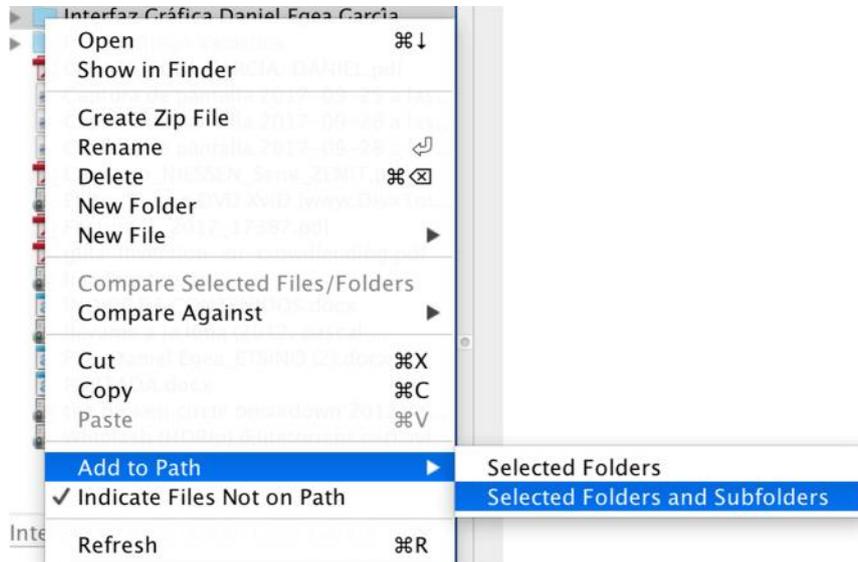


Figura 7.3: Selección de la ruta de trabajo

Hecho esto, y ya dentro de la carpeta seleccionada, abrir el archivo “SplinesSuavizantes.fig”. Esto ejecutará la interfaz en el programa.



Figura 7.4: Pantalla principal de la interfaz

### **7.2.1. MENÚ “COMENZAR”**

Esta pantalla se divide en varias secciones, donde se deben introducir los datos de entrada para el cálculo del spline aproximante.

### **7.2.2. PANEL DE DATOS INICIALES**

Nodos: deben introducirse los nodos o puntos donde se desea hacer la aproximación. Existen dos modos de introducir datos:

    Crear: se abre un archivo editable donde se pueden modificar las coordenadas de los puntos predefinidos

    Cargar: se selecciona un archivo preexistente con nodos ya definidos

Datos: se introducen los valores de las abscisas donde interpolar el spline construido. De la misma forma que en el caso de los nodos, existen las opciones de crear o cargar datos.

Coefficientes de peso: en este apartado se definen los valores de los pesos a aplicar a cada nodo. Igual que en los dos campos precedentes, es posible crear o cargar valores predefinidos.

### **7.2.3. PANEL DE CONDICIONES DE CONTORNO**

Primera derivada: en el caso de condiciones de contorno de primer tipo. De seleccionarse, se pedirá introducir el valor de la primera derivada en ese extremo.

Segunda derivada: para condiciones de contorno de segundo tipo. Análogamente, se solicita la introducción del valor de la segunda derivada en el extremo.

Periódica: en caso de condiciones de contorno de tercer tipo. De seleccionarse, dicha opción se activa para ambos extremos.

### **7.2.4. PANEL DE SELECCIÓN DE GRÁFICAS**

Da la opción de seleccionar las gráficas que se desea obtener.

Valores aproximados: muestra los valores del spline para las abscisas de aproximación introducidas.

Splines cúbicos suavizantes: muestra el spline construido junto con los nodos definidos.

Primera derivada: devuelve la curva de la primera derivada del spline obtenido.

Segunda derivada: devuelve la curva de la segunda derivada.

### 7.2.5. MENÚ OPCIONES

Aplicar: ejecuta el programa de construcción de Splines, resolviendo el sistema, dibujando las gráficas seleccionadas y escribiendo los datos de los resultados obtenidos en dos archivos de texto creados a tal efecto ("polinomios\_splines.txt" y "resul\_valores\_aproximados.txt").

Abrir ficheros: abre en el editor los archivos de texto citados, que contienen los resultados obtenidos.

Cerrar gráficas: cierra las ventanas abiertas con la generación de gráficas.

Reset: borra todos los datos introducidos (excepto las variables definidas anteriormente).

Ayuda: abre la sección correspondiente del documento, en .pdf.

Volver: vuelve a la pantalla inicial del programa.

### 7.2.6. MENÚ AYUDA

En la pantalla de ayuda se pueden seleccionar varias opciones:



Figura 7.5: Pantalla del menú ayuda

Acerca de Splines Cúbicos Suavizantes: abre un archivo .pdf con toda la información relativa a los splines suavizantes.

Programación de Splines Cúbicos Suavizantes en Matlab: abre un archivo .pdf con información acerca de la programación de dichas curvas en el programa.

Cómo utilizar esta interfaz: abre un archivo .pdf con los pasos a seguir para el uso de la interfaz del programa.

### 7.2.7. MENÚ ACERCA DE

Esta opción abre un cuadro de texto que contiene información sobre la aplicación y su desarrollo:

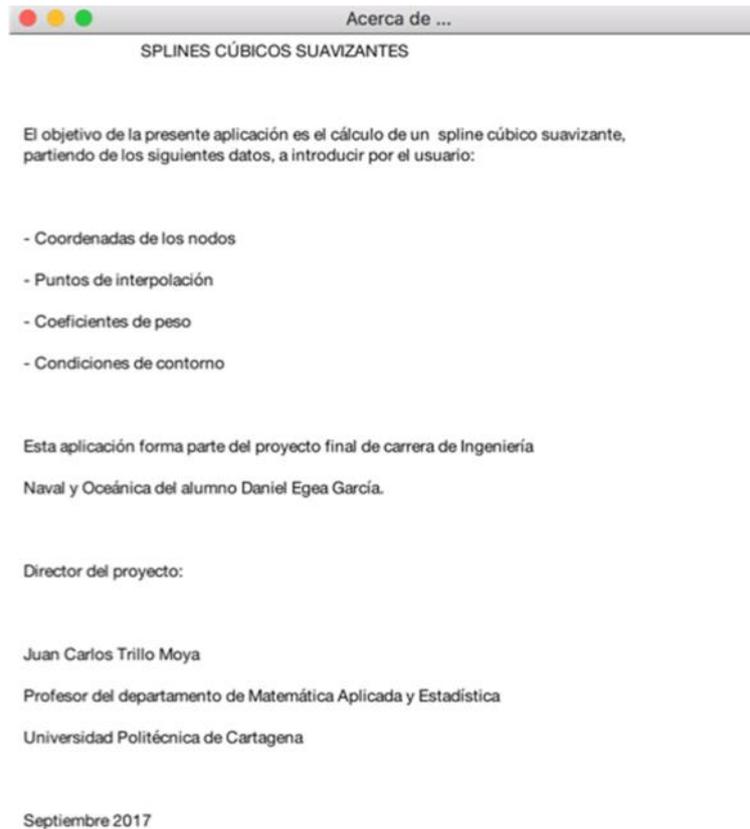


Figura 7.6: pantalla del menú acerca de

## 8. ANÁLISIS DE CASO PRÁCTICO

Teniendo en cuenta las características de los splines interpolantes y suavizantes estudiados hasta ahora, y para el caso que nos ocupa del control de una grúa de carga y descarga de buques, según lo expuesto al principio del proyecto, es fácil deducir que la aplicación más útil de estos dos tipos de curvas son los splines suavizantes.

Mediante el uso de disposiciones generales de los buques y de mediciones realizadas in situ, se pueden obtener los puntos de control necesarios para el desarrollo de la curva que guíe la grúa de manera suave y continua entre los puntos a tratar (bodega del barco y silo de descarga en muelle). Dichos puntos de control, dado que se obtienen de manera experimental, tendrán inherentemente un cierto ruido asociado, que como bien se ha podido comprobar anteriormente, se puede compensar mediante el uso de los splines suavizantes y el ajuste del peso de cada uno de los puntos, haciendo que la curva no sufra curvaturas bruscas que empeorarían sensiblemente el funcionamiento de la maquinaria a utilizar.

Ajustando los coeficientes de suavizado en función de estructuras o maquinaria presentes en la zona de la descarga, puede lograrse un recorrido óptimo entre ambos extremos, que programándose en el sistema de control de la grúa, puede ofrecer un guiado preciso y efectivo, reduciendo así el tiempo de estancia del buque en puerto y por tanto maximizando los beneficios obtenidos en sus desplazamientos, ya que se eliminan los errores humanos en la manipulación de la maquinaria, y se asegura un funcionamiento continuo y sin desvíos de la cuchara.

En la siguiente figura puede verse un ejemplo de la aplicación comentada:



Figura 8.1: contexto para la creación del spline

En la imagen puede apreciarse cómo un carguero está en proceso de descarga de granel en puerto, que en este caso se realiza directamente a muelle, desde donde los transportes terrestres lo recogerán para llevarlo al punto de destino.

Tomando como referencia la grúa de la parte central de la imagen, se ha realizado una simulación de recorrido entre las bodegas del barco y el punto de descarga en el muelle.

La línea roja indica el spline que se crearía para dicho recorrido, tomando en consideración los puntos marcados del 1 al 5, que constituirían los nodos a introducir:

- 1: punto de carga del granel.
- 2: punto más alto de la compuerta de la bodega en su posición abierta.
- 3: punto más alto y extremo de la amurada.
- 4: extremo de la base de la grúa.
- 5: punto de descarga del granel.

Como puede observarse, estos 5 puntos constituyen los nodos a tener en cuenta al generar una curva de movimiento para la grúa. Los puntos 1 y 5 (carga y descarga) son puntos a los que la cuchara de la grúa debe llegar, pues constituyen los lugares exactos para la carga y descarga.

Por ello, a estos dos nodos se les aplicaría un coeficiente de peso  $\rho = 0$ , de forma que se obtendría una interpolación y de esta manera se forzaría el paso de la cuchara por esos puntos exactos.

Los nodos intermedios 2, 3 y 4 constituyen puntos que, si bien condicionan el movimiento de la grúa, deben ser evitados por el paso de la cuchara durante el trayecto entre los nodos 1 y 5.

Por este motivo, el coeficiente de peso a aplicar será  $\rho > 0$ , de forma que se cree una suavización en esos puntos y por lo tanto el paso de la grúa se alejará de ellos, creando de esta forma una curva suave y continua pero evitando los obstáculos que, en este caso, interfieren en la maniobra.

A modo de ejemplo, y para mostrar de forma visual la distribución de pesos explicada anteriormente, se tomará la serie de nodos:

```
function [t,y]=crear_nodos()

% completar vector de abscisas

t=[-57.0541,-54.0604,-51.3927,-48.8637,-46.411,-42.521,-34.8182,-
33.2787,-25.8184,-21.4086,-18.284,-15.4722,-12.3096,-8.45192];

% completar vector de ordenadas

y=[0.609,1,2,3,4,6,5.54861,5.54861,6,4,3,2,1,0.609];
```

Aplicando los siguientes coeficientes de peso:

```
function p=crear_pesos()

% completar vector de pesos

p=[0,0,0,0,0,100,0,0,100,0,0,0,0,0];
```

Obteniendo así las siguientes gráficas:

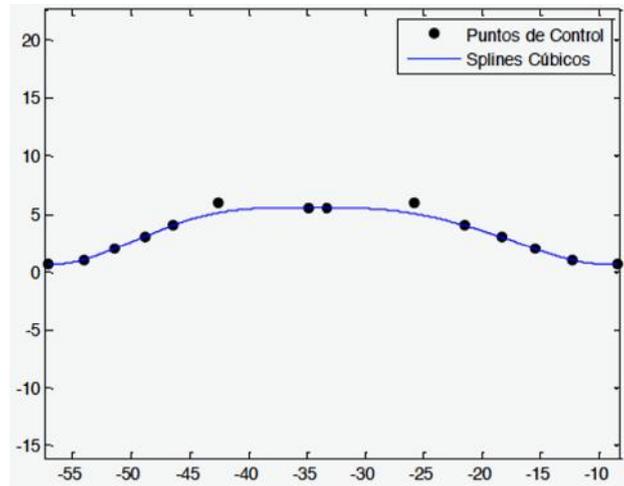


Figura 8.2: Spline cúbico

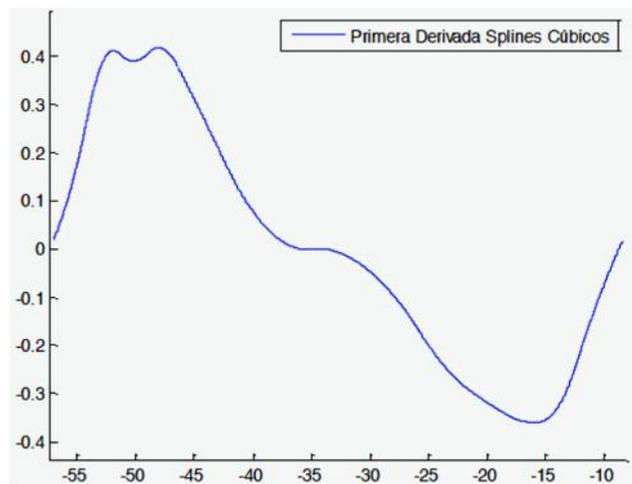


Figura 8.3: Primera derivada

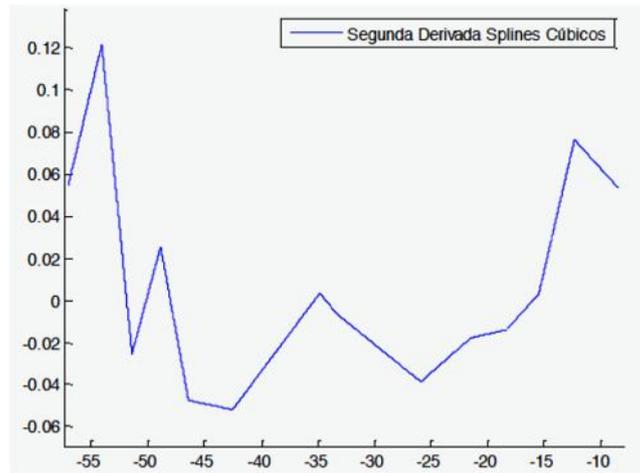


Figura 8.4: Segunda derivada

Tal y como queda plasmado, mediante el ajuste de los coeficientes de peso de los nodos (en este caso los nodos 6 y 9), se obtiene una curva más o menos alejada de los puntos, pues la influencia de éstos es menor sobre el recorrido del spline obtenido.

Gracias a la obtención de las curvas de la primera y segunda derivadas, observamos que el spline que se ha obtenido mediante la aplicación es, efectivamente, continuo, suave y sin giros abruptos que puedan poner en peligro la seguridad de la maniobra de la grúa, o de los objetos o personas que se encuentren alrededor en ese momento.

## CONCLUSIONES

A través de la definición matemática de los splines se ha podido entender y construir este tipo de curvas suaves. A lo largo de este Proyecto Fin de Carrera se ha presentado una visión global de las diferentes herramientas que existen para el diseño de curvas suaves. Además, el desarrollo realizado permite seleccionar el tipo de condiciones de contorno a aplicar y los datos de salida a obtener, aportando una gran versatilidad a la hora de utilizar tanto el programa base como la interfaz gráfica.

Después de desarrollar el algoritmo de cálculo de los splines cúbicos suavizantes se ha observado que estos dan muy buenos resultados a la hora de definir geometrías complejas, realizando una aproximación que se ajusta a la realidad a pesar de que las mediciones contengan cierto grado de ruido. Este tipo de ajuste no podría realizarse con otros métodos numéricos como puede ser la interpolación segmentaria de Lagrange o los splines cúbicos interpolantes también analizados.

Asimismo, este algoritmo presenta la ventaja de poder ser adaptado a la función spline cúbico interpolante siempre que las mediciones realizadas fueran exactas, con el simple hecho de indicarlo mediante el ajuste de los coeficientes de suavizado.

Dentro del campo de la ingeniería naval es habitual la aplicación del spline al análisis y suavizado de líneas de casco durante la etapa de diseño, por lo que en este proyecto se ha tratado de buscar otro tipo de aplicación como es el recorrido a realizar por una grúa de carga y descarga de buques, de forma que su trayectoria sea suave y sin giros bruscos. Del mismo modo, dentro del campo del diseño el uso de las curvas suaves está muy extendido, tanto para ofrecer productos con el aspecto y los acabados deseados como para obtener formas aerodinámicas o hidrodinámicas necesarias.

Actualmente el uso interactivo de las curvas spline es el más extendido, por la facilidad que supone modificarlas hasta conseguir las superficies deseadas. No obstante, a la hora de analizar la suavidad de las mismas se sigue utilizando la representación gráfica de la curvatura o los renderizados, cuando, a pesar de ser un método menos extendido, el análisis de la segunda derivada es más útil y objetivo.

A lo largo de este proyecto se han ampliado los conocimientos en programación, en matemáticas y en especial en la construcción de curvas spline, incluyendo la creación de una interfaz gráfica posibilitando a cualquier usuario la resolución de ciertos problemas haciendo uso solamente de los datos de entrada.

## BIBLIOGRAFÍA

- Manual básico de Matlab. M<sup>a</sup> Cristina Casado Fernández. Servicios informáticos U.C.M. <http://pendientedemigracion.ucm.es/centros/cont/descargas/documento11541.pdf>.
- Transportes marítimos especiales y estiba. Francisco J. Correa Ruiz. Open Course Ware. Universidad de Cantabria, 2010. [http://ocw.unican.es/enseñanzas-tecnicas/transportes-maritimos-especiales-y-estiba/material-de-clase-2/v2010\\_311\\_Tema11\\_TE.pdf](http://ocw.unican.es/enseñanzas-tecnicas/transportes-maritimos-especiales-y-estiba/material-de-clase-2/v2010_311_Tema11_TE.pdf).
- Splines cúbicos interpolantes en el diseño naval. Irene Gallego Valdellós. Universidad Politécnica de Cartagena, 2012.
- Apuntes de la asignatura “Fundamentos de la construcción naval”. Dr. Mohamed Redda Chakkor. Facultad de Náutica de Barcelona, UPC, 2009.
- Splines cúbicos suavizantes en el diseño naval. Blanca Roncero Peña. Universidad Politécnica de Cartagena, 2013.
- BLU-Code. Code of practice for the safe loading and unloading of bulk carriers - Res. A.862(20). [https://puc.overheid.nl/nsi/doc/PUC\\_2406\\_14/3/](https://puc.overheid.nl/nsi/doc/PUC_2406_14/3/)
- Directive 2001/96/EC. <http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=CONSLEG:2001L0096:20081211:EN:PDF>
- Matlab Primer. Mathworks. [https://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/matlab/getstart.pdf](https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf).
- Ship sizes. Maritime Connector. <http://maritime-connector.com/wiki/ship-sizes/>.
- Understanding design of bulk carriers. Marine Insight. <http://www.marineinsight.com/naval-architecture/understanding-design-bulk-carriers/>. Consulta 28/07/2017.