



industriales
etsii

**Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial**

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Diseño y análisis de transmisiones de engranajes cilíndricos rectos con alto grado de recubrimiento

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

Autor: María Cristina Gómez Navarro
Director: Ignacio González Pérez



**Universidad
Politécnica
de Cartagena**

Cartagena, 5 de Octubre de 2018

Agradecimientos:

Quiero agradecer a Ignacio González Pérez por su ayuda durante estos meses y a los conocimientos que ha compartido conmigo, ya que sin los cuales no hubiese sido posible el desarrollo de este Trabajo Fin de Grado.

A mi madre por estar siempre apoyándome, a mis cuatro abuelos por todo su amor incondicional y a mi familia en general. Os tengo mucho que agradecer.

A mis amigos de siempre y a los que he ido encontrando por el camino Vero, María José, Kasia, Engui, Carlitos, Mari Paz, Sandra, Mari, Roberto, Celeste, mis crías y a mis compis por todo lo que han aportado en mi vida, y que espero que sigan haciendo.

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Introducción a los engranajes HCR	1
1.2. Objetivos	4
1.3. Estructura del TFG	5
2. Herramientas de análisis	6
2.1. Creación de los modelos de engranaje HCR mediante IGD	6
2.2. Modelo de los elementos finitos basado en restricciones por atadura de superficies . .	10
2.2.1. Descripción del modelo	11
3. Generación analítica del modelo HCR	18
3.1. Definición de la condición para la generación del modelo HCR	18
3.2. Comprobación de la condición necesaria para el modelo HCR	19
3.3. Condición de no penetración para el modelo HCR	21
4. Modelos de engranaje generados y resultados del análisis de elementos finitos	23
4.1. Casos del diseño A	24
4.1.1. Modelo de engranaje HCR del diseño A	24
4.1.2. Modelo de engranaje SCR del diseño A	30
4.1.3. Modelo de engranaje HCR con módulo reducido del diseño A	34
4.1.4. Comparativa de las tensiones en los tres modelos del diseño A	36
4.1.5. Comparativa de la energía disipada para los modelos con fricción del diseño A	42
4.2. Casos del diseño B	42
4.2.1. Modelo de engranaje HCR del diseño B	42
4.2.2. Modelo de engranaje SCR del diseño B	45
4.2.3. Modelo de engranaje HCR con módulo reducido del diseño B	47
4.2.4. Comparativa de las tensiones en los tres modelos del diseño B	48
4.2.5. Comparativa de la energía disipada para los modelos con fricción del diseño B	54
4.3. Casos del diseño C	55

4.3.1. Modelo de engranaje HCR del diseño C	55
4.3.2. Modelo de engranaje SCR del diseño C	57
4.3.3. Modelo de engranaje HCR con módulo reducido del diseño C	60
4.3.4. Comparativa de las tensiones en los tres modelos del diseño C	63
4.3.5. Comparativa de la energía disipada para los modelos con fricción del diseño C	65
5. Conclusiones	68

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Introducción a los engranajes HCR

A todos nos es conocido que uno de los elementos de máquina más comunes para la transmisión de potencia es el engranaje. Dicha transmisión se encuentra basada en al menos un par de ruedas dentadas donde los dientes de una de ellas entran en contacto con los dientes de la otra rueda, transmitiendo un movimiento de rotación continuo.

En el diseño de engranajes, entre otros factores, se buscan perfiles de dientes que sean conjugados cumpliendo la ley fundamental del engrane. Esto significa que para que la relación de velocidades angulares entre dos ruedas dentadas sea constante a lo largo del engrane entre los perfiles de dientes, la normal común a los perfiles, en cada instante a lo largo del engrane, debe cortar a la recta que une los centros de rotación de ambas ruedas en el mismo punto. Teniendo en cuenta lo anterior es el perfil de evolvente el perfil de mayor aceptación y éxito a nivel industrial, y una gran parte del diseño de dientes se basa en dicho tipo de perfil.

A parte del tipo de perfil de diente seleccionado, existen otros parámetros que se deben tener en cuenta, pero que debido a la gran diversidad de posibilidades de diseño que existe para las ruedas dentadas rectas, en la Industria se ha tendido a la normalización, de tal manera que uno de los parámetros característicos de los engranajes, el módulo $m = \frac{p}{\pi}$, el cual define el tamaño de los dientes, ha sido estandarizado por normas como por ejemplo la DIN 780, de tal manera que entre la infinidad de posibilidades de diseño de un engranaje, sólo una serie de módulos están disponibles.

Los valores normalizados de las dimensiones de los dientes y las ruedas dentadas se basan principalmente en diseños estándar (en denominación inglesa Standard Contact Ratio, abreviando de aquí en adelante SCR). De entre los valores más usuales para transmisiones con engranajes SCR y de los cuales se hará uso continuado a lo largo del presente Trabajo Fin de Grado, destacan:

- Altura de cabeza o addendum $h_a = 1 \cdot m$
- Altura de pie o dedendum $h_d = 1,25 \cdot m$

Serie 1	0,05	0,06	0,08	0,10	0,12	0,16	0,20	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,25
	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16	20	25	32	40	50	60
Serie 2	0,055	0,07	0,09	0,11	0,14	0,18	0,22	0,28	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95	1,125	1,375
	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11	14	18	22	28	36	45	55	70

Figura 1.1.1: Módulos normalizados según DIN 780. Fuente en Elementos de Máquinas, Decker, Ed Urmo 1980

- Radio de cabeza $r_{a1} = r_{p1} + h_a$; $r_{a2} = r_{p2} + h_a$
- Radio de pie $r_{d1} = r_{p1} - h_d$; $r_{d2} = r_{p2} - h_d$
- Espesor de diente (sobre circunferencia primitiva) $s_p = \frac{\Pi}{2} (m)$

Otro parámetro que será ajustado durante los distintos casos de estudio es la distancia entre centros C , normalmente mayor que la distancia entre centros nominal, C_{nom} :

$$C_{nom} = \frac{m}{2} (Z_1 + Z_2) \quad (1.1.1)$$

Los diseños de dientes rectos con SCR, tienen grados de recubrimiento inferiores a 2, que suelen ser en torno a 1,3 y 1,8, lo cual supone que como máximo durante el engrane de un par de dientes, existe entre uno y dos dientes en contacto. Este bajo grado de recubrimiento causa un aumento de las cargas en los dientes del engranaje y un aumento del ruido, lo cual supone a priori una menor durabilidad. Debido a las presiones del mercado actual, principalmente en las industrias automovilística y aeronáutica, los nuevos diseños que se requieren deben ser cada vez menos costosos, pero que al mismo tiempo ofrezcan una mayor fiabilidad, capacidad de carga y reducción del ruido. Para ello, los engranajes SCR no cubren completamente estas necesidades, y se requiere de nuevos diseños, cobrando los engranajes con relaciones de contacto altas (en denominación inglesa son High Contact Ratio Gears, que se denominarán de ahora en adelante engranajes HCR) cada vez una mayor relevancia.

Los engranajes HCR, aunque han existido desde principios del siglo pasado, no han sido ampliamente utilizados en comparación con los engranajes SCR. Su mayor uso ha sido en la industria automovilística, y principalmente se emplean engranajes rectos con un addendum extendido respecto al estándar usado en los diseños SCR, y con un grado de recubrimiento superior a 2. Dicho grado de recubrimiento viene dado por la siguiente expresión general:

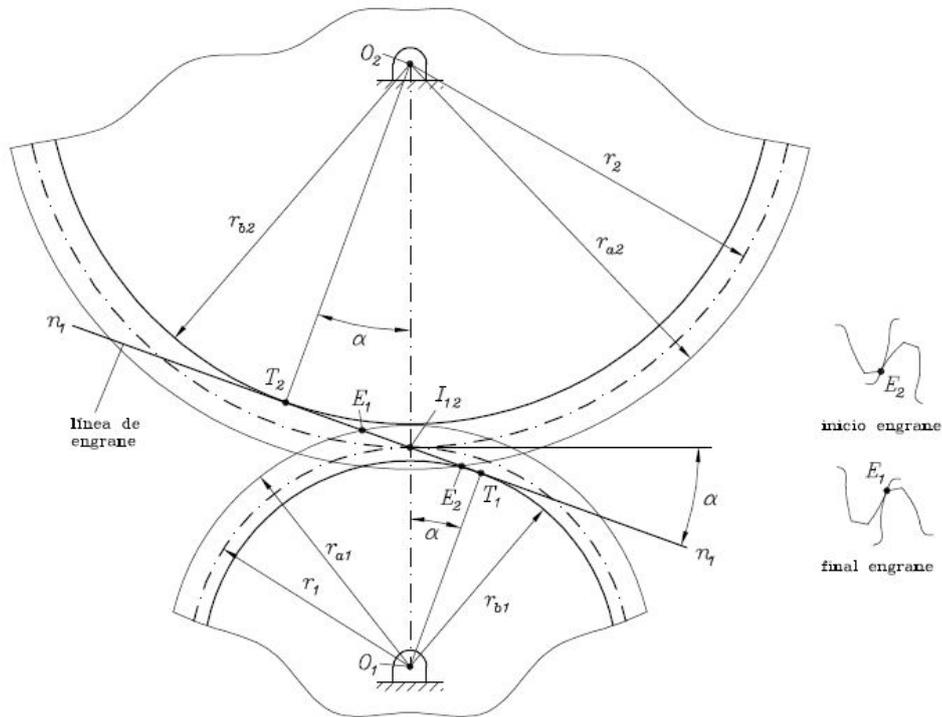


Figura 1.1.2: Variables para el cálculo del Grado de Recubrimiento en el plano

$$\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[Z_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_{a1}}{r_{b1}}\right)^2 - 1} + Z_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_{a2}}{r_{b2}}\right)^2 - 1} - (Z_1 + Z_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha \right] \quad (1.1.2)$$

siendo α el ángulo de presión de funcionamiento de la transmisión.

De la expresión anterior se deduce que se puede obtener un mayor grado de recubrimiento mediante algunas de las siguientes opciones:

- (1) Ruedas dentadas con dientes más pequeños (con módulos inferiores o mayor número de dientes).
- (2) Con ángulo de presión más pequeño.
- (3) Aumentando el addendum del diente (opción seleccionada en nuestro estudio).

Dado que los engranajes HCR tienen grado de recubrimiento superior a 2 durante todo el engrane, la carga es compartida entre dos o más dientes, pues existe entre dos y tres dientes en contacto a lo largo de la línea de engrane, y por lo tanto, el diente se encuentra sometido a una carga de flexión inferior (por lo tanto, se podría aumentar la capacidad de carga del engranaje), se reduce el nivel de ruido y existe un aumento del ciclo de vida de los dientes.

Pese a las ventajas antes mencionadas que ofrecen los engranajes HCR, existe una serie de aspectos negativos tales como un mayor deslizamiento entre dientes que puede conllevar a un aumento de la temperatura a la que se opera, produciéndose fallos en la lubricación que llevan a casos de rayado-picadura en la superficie del flanco del diente (conocido en nomenclatura inglesa scoring y/o micropitting); apuntamiento en la cabeza del diente; limitaciones térmicas de la caja de engranes; interferencias en la base del diente; pérdida de eficiencia en la transmisión derivada de una línea de engrane de mayor longitud comparado con los engranajes SCR; coste del utillaje (herramientas de corte) entre otros.

La pérdida de eficiencia en la transmisión de los engranajes HCR puede verse compensada por el hecho de que para tamaños de diente más pequeños, se puede transmitir la misma potencia y por lo tanto trabajar en mismas eficiencias que engranajes SCR de tamaños superiores. Esta ventaja que surge a partir de una posible desventaja de los engranajes HCR será uno de los objetos de estudio del presente trabajo.

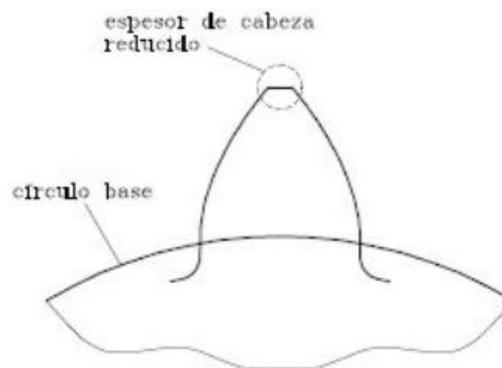


Figura 1.1.3: El apuntamiento en la cabeza del diente debilita dicha zona

1.2. Objetivos

Una vez definido en la sección anterior el concepto de los engranajes HCR, se establece a continuación, los principales objetivos del presente Trabajo de Fin de Grado:

- (1) Analizar y comparar diferentes diseños de engranajes HCR y SCR creados mediante el Software IGD, a través de un nuevo modelo de elementos finitos desarrollado para Abaqus. Para ello se establecerán los parámetros de entrada durante la definición de los distintos diseños de engranajes que se modelarán en IGD, así como las condiciones que se deben dar para que el grado de recubrimiento se encuentre por encima de dos y las distintas restricciones para evitar problemas de penetración y apuntamiento entre otros. Básicamente se analizarán los siguientes parámetros: el calor disipado y las distintas tensiones de interés tales como la

tensión máxima de flexión y la presión máxima de contacto a lo largo del engrane.

- (2) Encontrar a partir de un diseño HCR dado, mediante la reducción del módulo (en base a los estándares industriales) su aproximación a un diseño SCR en términos de presiones máximas y calores disipados. Como se indicó anteriormente, los diseños HCR tienen una mayor densidad de potencia comparado con los diseños SCR. Esto quiere decir que con tamaños de diente inferiores, se puede transmitir la misma potencia que un diseño SCR con dientes de mayor tamaño.

1.3. Estructura del TFG

Para la exposición de los objetivos anteriores, el presente Trabajo Fin de Grado se ha estructurado en los siguientes capítulos:

- Capítulo 1. Introducción y objetivos.
- Capítulo 2. Herramientas de análisis.
- Capítulo 3. Generación analítica del modelo HCR.
- Capítulo 4. Modelos de engranaje generados y resultados del análisis de elementos finitos.
- Capítulo 5. Conclusiones.

-Capítulo 1. En este capítulo, se introducen los diseños de los engranajes HCR definiendo las posibles ventajas de los mismos, así como algunas de sus principales propiedades en comparación con los engranajes SCR.

-Capítulo 2. En este capítulo, se explicará el procedimiento seguido para la creación de los distintos modelos de elementos finitos empleado para el cálculo de las distintas tensiones y calor disipado.

-Capítulo 3. Se analizarán y explicarán las distintas expresiones matemáticas empleadas para crear numéricamente engranajes con grado de recubrimiento iguales o superiores a 2.

-Capítulo 4. Se expondrán los distintos casos estudiados así como los resultados obtenidos de cada análisis.

-Capítulo 5. Mediante la comparación de resultados de los distintos casos expuestos se establecerán las distintas conclusiones tras el estudio realizado.

Capítulo 2

Herramientas de análisis

En el presente capítulo, se expondrá el procedimiento llevado a cabo para la creación de los distintos modelos de engranajes, las variables que se han tenido en cuenta para incluir en el software IGD, así como el tipo de modelo de elementos finitos seleccionado para el estudio de los esfuerzos de interés.

2.1. Creación de los modelos de engranaje HCR mediante IGD

Para modelar engranajes con diseños HCR, tal y como se mencionó en el Capítulo 1, se debe alcanzar un grado de recubrimiento mayor o igual que dos. Conforme también se indicó, existían diferentes opciones para poder cumplir la condición anterior, y para los casos HCR planteados, se escogió la opción de aumentar el addendum y dedendum del diente, a partir de un diseño SCR, y con perfil de diente cuya forma se basa en un curva de evolvente de círculo. El modelo de partida para crear un diseño que cumpliesen las condiciones anteriores, se basó en el modelo de Buckingham usado por Schultz [1] para comparar diseños HCR con SCR. El esquema de la forma de diente quedaría conforme a la figura 2.1.1:

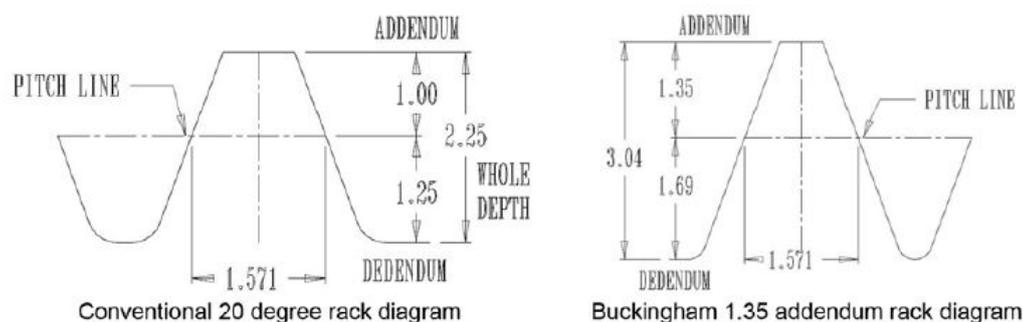


Figura 2.1.1: Addendum y Dedendum seleccionados para HCR (fuente en [1])

Para el estudio que concierne, se partieron de los valores obtenidos para engranajes tipo HCR por Schultz en la tabla 3 de la publicación [1], para tres diseños diferentes, cuyo análisis y resultados serán mostrados en el Capítulo 4 del presente TFG. Los valores de los siguientes parámetros fueron extraídos de la tabla 3 [1] (ver figura 3.1.1 para cada uno de los casos de estudio):

- Dientes del piñón Z_1 .
- Dientes de la rueda Z_2 .
- Módulo m , denominado NDP en la tabla 3 [1] ($m = \frac{25,4}{NDP}$).
- Ancho de la cara del diente, que para todos los casos tendría un valor de 50 mm (1,969 pulgadas).
- Ángulo de presión de la herramienta α_h ($NPA = 20^\circ$ para todos los casos).
- Revoluciones por minuto (1800 r.p.m en todos los casos).
- Potencia expresada en caballos de fuerza HP .
- Coeficiente de Addendum $a = 1,35$.
- Coeficiente de Dedendum $b = 1,69$.

Una vez identificados los valores de los parámetros anteriores para cada caso de estudio, se introdujeron los mismos para el modelado de los distintos engranajes HCR a partir de la opción "Smart Design" del software IGD, mediante el cual se generan distintos modelos de engranajes de interés, para poder llevar a cabo un análisis posterior mediante otros softwares tales como Abaqus, a través del método de los elementos finitos, siendo posible de este modo, simular el comportamiento de una gran cantidad de tipos de engranajes. Esto resulta de vital importancia en un mercado cada vez más competitivo que requiere constantes avances a nivel tecnológico. En todos los casos que nos ocuparon, se seleccionó la opción "spur gear" (dientes rectos), para la creación del piñón y la rueda.

A partir de los valores introducidos para algunos de los parámetros indicados anteriormente, se observa en la figura 2.1.3, que con IGD se obtienen automáticamente los valores que el coeficiente de desplazamiento de herramienta de piñón y rueda, χ_1 y χ_2 , debe alcanzar para generar ruedas dentadas sin problemas de penetración (undercutting en la terminología inglesa) y apuntamiento (pointing en la terminología inglesa) durante el tallado de los dientes. Se deberá seleccionar aquellos valores de χ_1 y χ_2 que se encuentren dentro de los límites indicados. En el ejemplo mostrado en la figura 2.1.3, se tiene que para el piñón el límite inferior de χ_1 viene dado por el valor 0,0048, lo que significa que $0,0048 \cdot m$ es el valor mínimo que debe producirse en el desplazamiento de herramienta para que no se produzca un fallo de penetración en la base del diente por la cuchilla de corte. Por

Table 3 HCR gearing, 1.35 addendum system (2H155 gearbox)					
UNIT RATIO>	6.3076	6.8421	8.1092	8.7579	10.0000
	single helical				
set #	155H1	155H2	155H3	155H4	155H5
Catalog HP	239	216	187	169	154
CENTERS (mm)	109	109	109	109	109
CENTERS (in)	4.291	4.291	4.291	4.291	4.291
GEAR TEETH	59	60	64	74	76
PINION TEETH	32	30	27	29	26
RATIO	1.8438	2.0000	2.3704	2.5517	2.9231
FACE WIDTH	1.969	1.969	1.969	1.969	1.969
NDP	11.2889	11.28890	11.2889	12.7	12.7
NPA	20	20	20	20	20
HELIX ANGLE	20.0789	21.7360	20.0790	19.0991	20.6455
TDP	10.6028	10.4862	10.6028	12.0009	11.8844
PINION PD	3.0181	2.8609	2.5465	2.4165	2.1877
GEAR PD	5.5646	5.7218	6.0362	6.1662	6.3949
Pinion X1	0.1500	0.1650	0.1900	0.1900	0.2200
PINION OD	3.285	3.129	2.819	2.666	2.435
GEAR OD	5.778	5.932	6.242	6.356	6.573
Mp	2.05	2.01	2.02	2.12	2.01
Mf	2.43	2.62	2.43	2.60	2.81
PINION HT	58-62 Rc				
GEAR HT	58-62 Rc				
AGMA Q#	11	11	11	11	11
Cm	1.08	1.08	1.08	1.08	1.08
PINION RPM	1800	1800	1800	1800	1800
PINION DUR. HP	410	382	322	305	258
GEAR DUR. HP	422	394	335	319	271
PINION STR. HP	460	435	379	329	293
GEAR STR. HP	473	449	401	352	309
LS Pinion RPM	976	900	759	705	616
LS Pinion DurHP	320	299	253	236	210
LS Gear DurHP	338	316	268	250	222
LS Pinion Str HP	408	400	338	315	279
LS Gear Str HP	440	431	364	339	300
Unit Dur. HP	320	299	253	236	210
Unit Str. HP	408	400	338	315	279
Dur. SF to Cat	1.34	1.38	1.35	1.40	1.36
Str. SF to Cat	1.71	1.85	1.81	1.86	1.81
NCR dur	249	232	197	184	163
NCR Str	284	274	238	222	196
dur increase	1.29	1.29	1.28	1.28	1.29
strength increase	1.44	1.46	1.42	1.42	1.42

Figura 2.1.2: Imagen de la tabla de valores para la definición de los diseños de engranajes (fuente en [1])

otro lado, se tiene que para χ_1 el valor máximo de coeficiente de desplazamiento de la cuchilla de corte es de 0,0602 para evitar la aparición de apuntamiento en la cabeza del diente. Aparte de los valores para χ_1 y χ_2 , IGD calcula la distancia entre centros sin holgura (tightest center distance en la terminología inglesa) entre la rueda y el piñón, así como considerar una desviación en el espesor del diente ya sea del piñón y la rueda, para obtener una holgura circunferencial (backlash en terminología inglesa) conforme se muestra en la figura 2.1.4. Gracias a todas estas opciones que IGD ofrece, se pudieron obtener diseños de engranajes HCR y SCR sin problemas de apuntamiento y penetración.

En la figura 2.1.5 se muestra el modelo de un piñón generado por IGD, correspondiente a un conjunto piñón rueda con HCR. Obsérvese que los dientes de dicho piñón poseen una altura de diente considerablemente superior, que la mostrada para el modelo SCR en la figura 2.1.6.

SMART DESIGN - Spur Gear Drives

Basic Dimension Definition | Tolerance Selection | Quality Selection

Basic Data

	Pinion	Wheel
Module [mm]:	2	
Pressure angle for left side [deg]:	20	
Pressure angle for right side [deg]:	20	
Number of teeth:	26	76
Addendum coef.:	1.35	1.35
Dedendum coef.:	1.69	1.69
Face width [mm]:	50	50
Root radius coef. for left side:	0.25	0.25
Root radius coef. for right side:	0.25	0.25

Suggested Profile Shift Coefficients

	Sliding balancing LS	Sliding balancing RS	Undercutting	Pointing
Pinion	0.437	0.437	0.0048	0.0602
Wheel	-0.437	-0.437	-2.9197	0.8859

Choose Profile Shift Coefficients

Pinion: 0.06 (dropdown) Fix pinion one
 Wheel: 0.48 (dropdown) Fix wheel one
 Fix both

Tooth side for sliding balancing
 Left side Right side

Calculated Data

Pinion profile shift coefficient: 0.06
 Wheel profile shift coefficient: 0.48
 Tightest center distance [mm]: 103.0412

Buttons: Previous, Next, Export Data to GearSet, Cancel

Figura 2.1.3: Valores de entrada de los parámetros de la rueda y el piñón en la ventana Smart Design del Software IGD

SMART DESIGN - Spur Gear Drives

Basic Dimension Definition | Tolerance Selection | Quality Selection

Tooth Thickness Deviation

	Pinion	Wheel
Deviation:	No backlash	Put own input
Upper allowance [mm]	0.000	-0.100
Lower allowance [mm]	0.000	-0.100
Tolerance [mm]	0.000	0.000

Center Distance Deviation

Center distance [mm]: 101.5676

Deviation: No backlash

Upper allowance [mm]: 0.000
 Lower allowance [mm]: 0.000
 Tolerance [mm]: 0.000

Backlash [mm]

	Maximum	Medium	Minimum
Circumferential	0.099	0.099	0.099
Normal	0.094	0.094	0.094
Radial	0.147	0.147	0.147

Tooth Thickness [mm]

	Maximum	Medium	Minimum
Pinion:	3.8291	3.8291	3.8291
Wheel:	2.5697	2.5697	2.5697

Choose Generating Shift Coefficients

Pinion: 0.1800 (dropdown) Wheel: -0.5889 (dropdown)

Choose Center Distance

Maximum [mm]: 101.5676
 Medium [mm]: 101.5676
 Minimum [mm]: 101.5676

Buttons: Previous, Next, Export Data to GearSet, Cancel

Figura 2.1.4: Valores de entrada para la obtención de las holguras en la ventana Smart Design del Software IGD

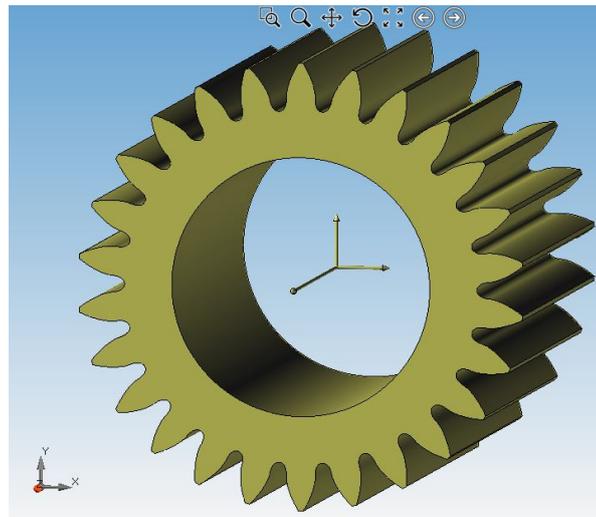


Figura 2.1.5: Piñón con coeficiente de addendum 1.35 para el modelo HCR

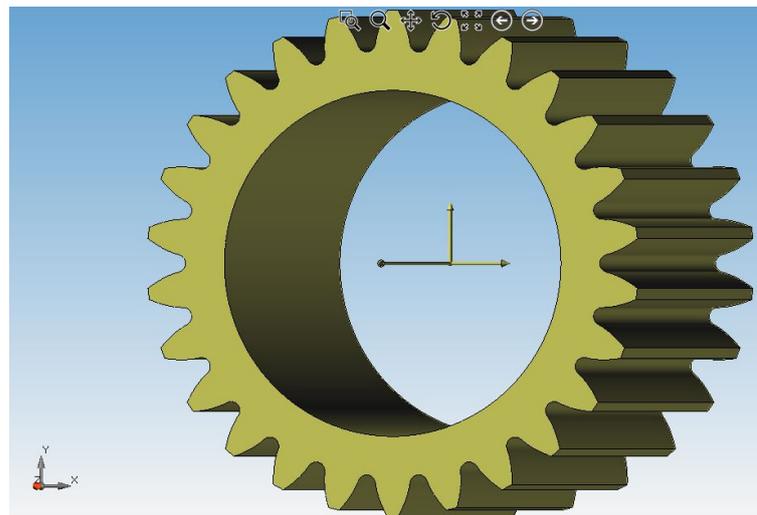


Figura 2.1.6: Piñón con coeficiente de addendum 1 para el modelo SCR

2.2. Modelo de los elementos finitos basado en restricciones por atadura de superficies

A partir de los diseños generados de piñón y rueda correspondientes a los casos de estudio, el siguiente paso que se llevó a cabo fue incluir en IGD los parámetros asociados al análisis de contacto (en terminología anglosajona Tooth Contact Analyses, que se denominará de ahora en adelante TCA), así como el modelo a usar para el cálculo mediante elementos finitos, que se llevaría a cabo a través del software específico, Abaqus. Con el TCA se puede simular el engrane entre las superficies

de los dientes que entran en contacto, permitiendo obtener información sobre la huella de contacto así como errores en la transmisión.

2.2.1. Descripción del modelo

A lo largo del tiempo se han ido desarrollando y probando diferentes opciones de discretización de los engranajes mediante elementos finitos, con el fin de reducir los tiempos de simulación y disminuir los costes durante el diseño, pero siempre tratando de obtener soluciones fidedignas de las tensiones y las huellas de contacto en los dientes, de manera que estén en consonancia con las teorías analíticas.

El modelo de elementos finitos seleccionado para el análisis de las distintas tensiones en los dientes del piñón y rueda, así como las disipaciones de energía, está basado en un nuevo modelo con restricciones de atadura de superficies (Tie-surface constraints), desarrollado por A. Fuentes e I. González de los Departamentos de Ingeniería Mecánica de la UPCT y el Instituto Tecnológico de Rochester (US), (fuente en ref. [3]). Este nuevo modelo reduce el número de elementos finitos comparado con otros modelos anteriores como el que se observa en la fig. 2.2.1, de tal manera que se consigue una reducción en los tiempos de cálculo computacional. Básicamente, la idea es dividir el diente del engranaje en dos mallados diferentes, de manera que la parte cercana a la zona de contacto y la base del diente tendrá un mallado más denso, mientras que un mallado más basto definirá el resto del diente.

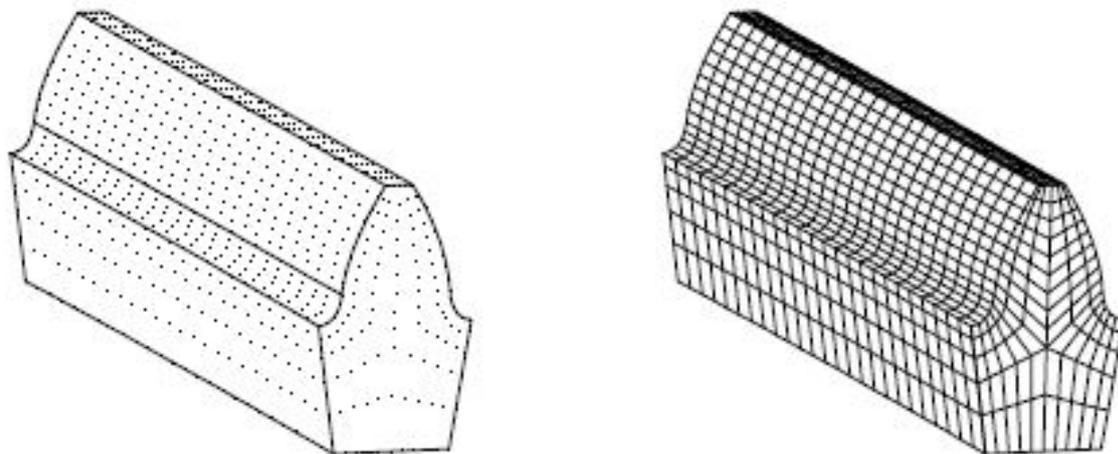


Figura 2.2.1: Nodos y discretización del volumen de un diente en un modelo de elementos finitos anterior, (fuente en [7])

De forma genérica se puede considerar que la elaboración del modelo de elementos finitos requiere establecer un mallado, definir las superficies de contacto en los dientes y establecer las condiciones

de contorno, teniendo en cuenta la geometría de las superficies de los dientes, para que una vez el modelo es generado se proceda al análisis tensional. Teniendo en cuenta lo anterior, las fases de desarrollo del nuevo modelo de elementos finitos empleado en el presente TFG serían:

- (1) A través de la teoría del engranaje (generación de perfiles de dientes) se determinan los puntos de coordenadas en la superficie del diente para la definición del mallado del cuerpo del diente. Dichos puntos de coordenadas son función del número de elementos en la dirección longitudinal, de perfil del diente y en la base. Para el mallado del cuerpo se definen elementos cuadráticos, considerando sólo cuatro elementos en la dirección del perfil y dos en la base. En la fig 2.2.2 se puede observar los puntos de coordenadas obtenidos para el cuerpo del diente.

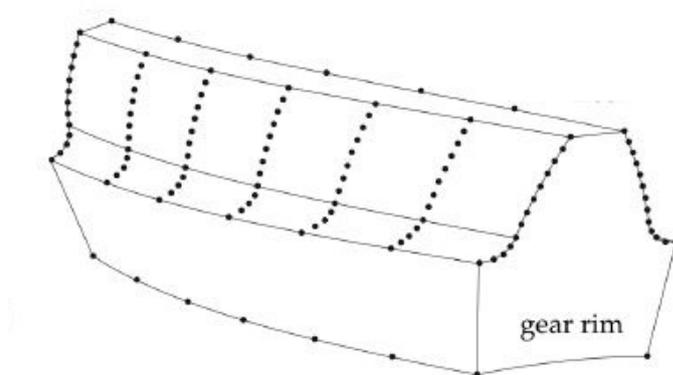


Figura 2.2.2: Puntos de coordenadas en el cuerpo del diente obtenidos mediante la teoría de engranajes (fuente en [3])

- (2) El volumen de diente diseñado es dividido en seis superficies auxiliares y una superficie intermedia S situada paralela a la superficie de contacto en una distancia $c_t m_{ot}$ (donde m_{ot} es el módulo), obtenidas a partir de puntos intermedios que derivan de los puntos de coordenadas definidos en el punto (1). Ver fig 2.2.3.
- (3) A partir de los puntos (1) y (2) se definen los nodos y posteriormente los elementos finitos. Se observa en la figura de ejemplo 2.2.4 el número de elementos en la dirección longitudinal del cuerpo del diente, mientras que en los casos analizados se ha considerado un número de cinco.
- (4) El siguiente paso consiste en la definición de un mallado más denso en la superficie de contacto del diente y en la base. Se define el número de capas que conformarán el espacio entre la superficie auxiliar S y la superficie del diente, el número de elementos tanto en dirección longitudinal, en la base y de perfil de diente y el tipo de elementos finitos, pudiendo elegir entre cuadrático y lineales. En los casos de estudio se seleccionó tipo lineal en base a las

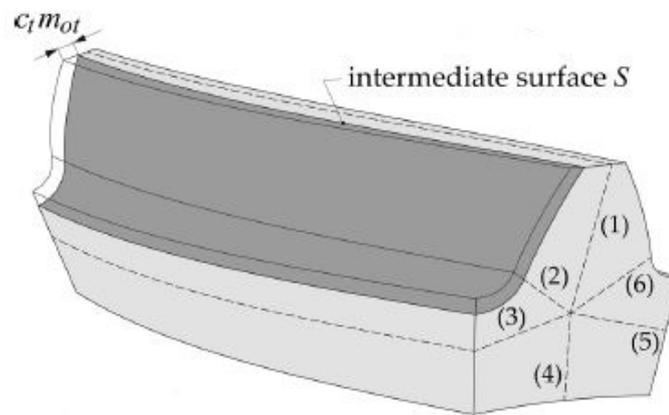


Figura 2.2.3: Superficies auxiliares (fuente en [3])

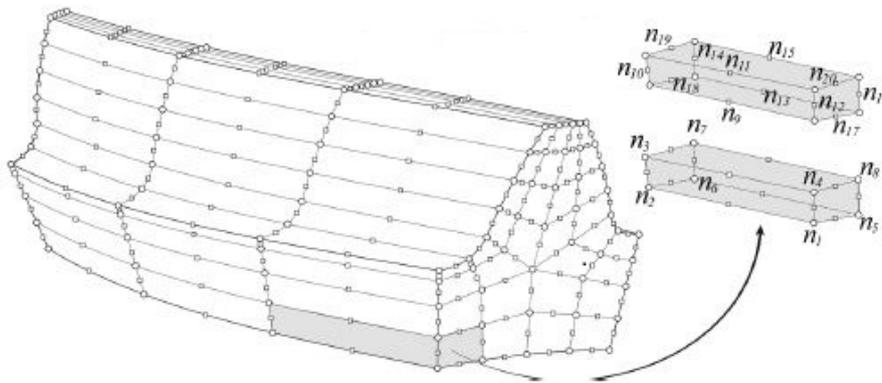


Figura 2.2.4: Elementos finitos en el cuerpo del diente, (fuente en [3])

recomendaciones del trabajo [Implementation of a Finite Element Model for Gear Stress Analysis Based on Tie-Surface Constraints and its Validation through the Hertz's theory], (fuente en [3]). Ver figura de ejemplo 2.2.5.

- (5) Se define una superficie maestra en el cuerpo del diente y una superficie esclava en la región de la superficie de contacto y la base del diente, y se define una restricción tipo atadura de superficie (tie-surface) entre estas dos superficies de manera que los nodos de la superficie esclava están enlazados con la maestra. De esta manera se pueden definir mallados diferentes pero se asegura que los desplazamientos y cargas se transmiten entre los dos mallados. Ver figura 2.2.6.
- (6) El análisis se llevó a cabo para siete pares de dientes. Para ello es necesario definir una restricción de atadura entre superficies entre los distintos dientes. De esta manera se tienen superficies esclavas y maestras, y una superficie intermedia esclava-maestra conforme se mues-

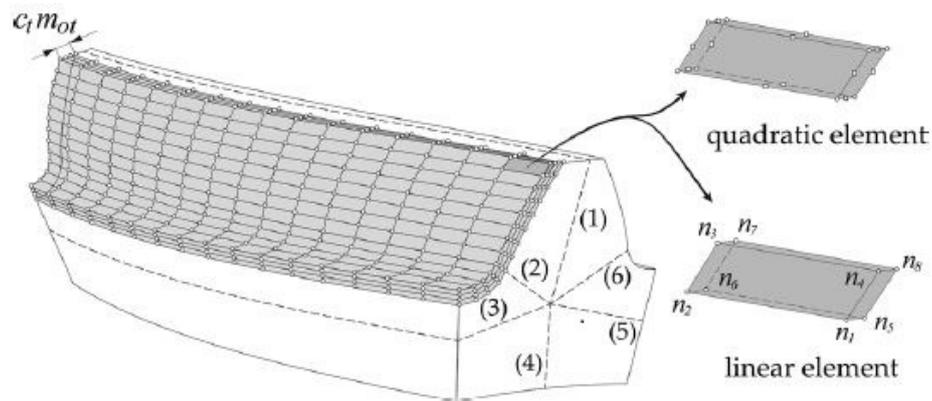


Figura 2.2.5: Mallado de la superficie de contacto del diente (fuente en [3])

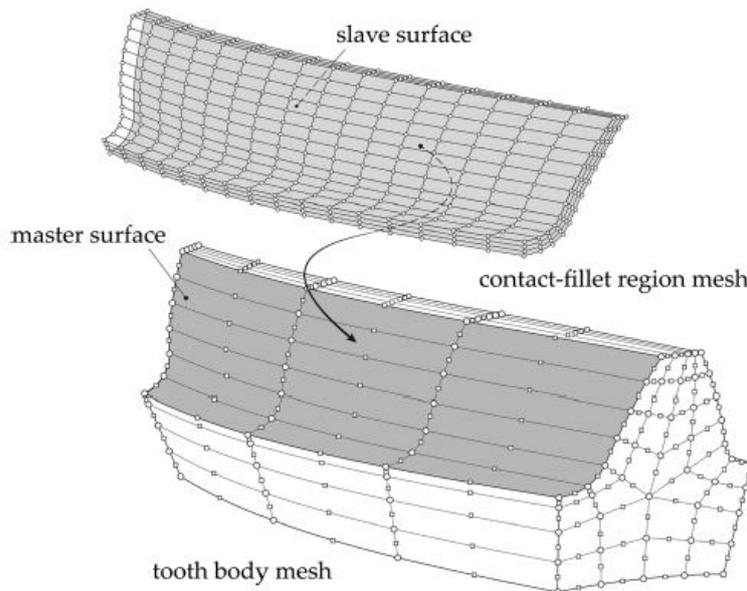


Figura 2.2.6: Superficies maestra y esclava del modelo (fuente en [3])

tra en la figura de ejemplo 2.2.7 para tres pares de dientes. En dicha figura se observa que los nodos de dos superficies esclavas están vinculadas a una superficie maestra. Las condiciones contorno se plantean definiendo una superficie rígida conforme se muestra en la figura 2.2.7, es decir, en la parte inferior e interior, así como en la parte exterior de los dientes extremos. La superficie rígida constituye una parte indeformable tridimensional que rota y/o se traslada como un sólido rígido, y que en el caso particular de estudio de ruedas dentadas, dicha superficie se conecta rigidamente a un nodo de referencia situado en el eje axial de giro del engranaje correspondiente, de manera que se comportan como un sólido rígido. En el caso del

piñón, se tiene un único grado de libertad en dicho nodo, que es el de rotación alrededor de dicho eje axial, de manera que al aplicar un par el mismo es transmitido de igual forma a los dientes del piñón. En el caso de la rueda todos los grados de libertad son restringidos para cada una de las posiciones indicadas durante la definición del TCA en IGD, que en todos los casos estudiados fueron cuarenta y una posiciones de engrane.

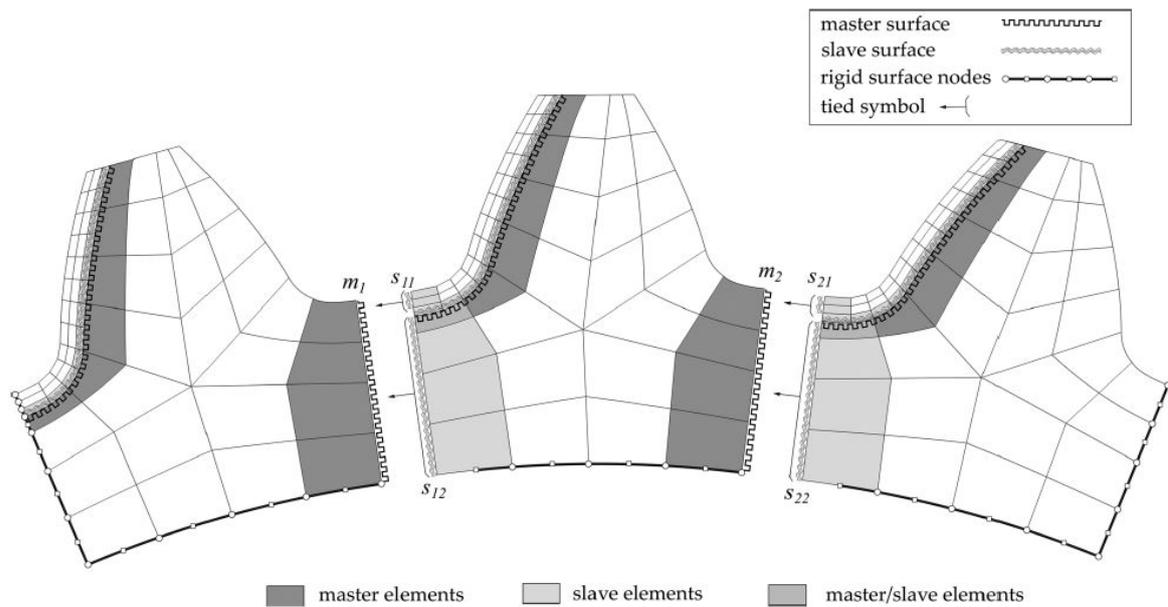


Figura 2.2.7: Superficies maestra y esclava del modelo entre dientes (fuente en [3])

- (7) El contacto entre el piñón y la rueda es definido mediante un algoritmo basado en las interacciones entre una superficie maestra y una esclava. En los casos de estudio al haber siete pares de dientes, se definieron siete interacciones maestra-esclava, considerando la superficie maestra en la rueda y esclava en el piñón, dado que la curvatura del perfil del piñón es superior que en el perfil de la rueda.
- (8) Resumiendo los parámetros considerados para todos los casos en relación al FEM y TCA, tenemos:
- Número de posiciones de contacto (TCA): 41.
 - El modelo de elementos finitos: tie surface constraint.
 - Número de pares de dientes de contacto para el análisis: 7.
 - Superficie maestra en la rueda.
 - Superficie esclava en el piñón.

- Mallado en la superficie de contacto del piñón y de la rueda: 3 capas y elementos de tipo lineal.
- Coeficiente C_t para el espesor de la capa de contacto en piñón y rueda: 0,2.
- Número de elementos en dirección longitudinal para el mallado denso de la superficie de contacto: piñón 60; rueda 55.
- Número de elementos a lo largo del perfil para el mallado denso de la superficie de contacto: piñón 35;rueda 30.
- Número de elementos en la base del diente para el mallado denso de la superficie de contacto: piñón 12; rueda 12.
- Número de elementos en el cuerpo del diente para el mallado del cuerpo del diente en la dirección longitudinal: piñón 5; rueda 5.
- Número de elementos en la sección del diente para el mallado del cuerpo del diente: piñón 32; rueda 32.

El modelo de los siete pares de dientes de la rueda y el piñón se muestra en la figura 2.2.8. Además, en la figura 2.2.9 se observan los dos mallados generados en el piñón, por una lado el mallado denso con las tres capas de elementos en la superficie de contacto del diente, y por otro el mallado generado para el cuerpo del diente con menor número de elementos finitos.

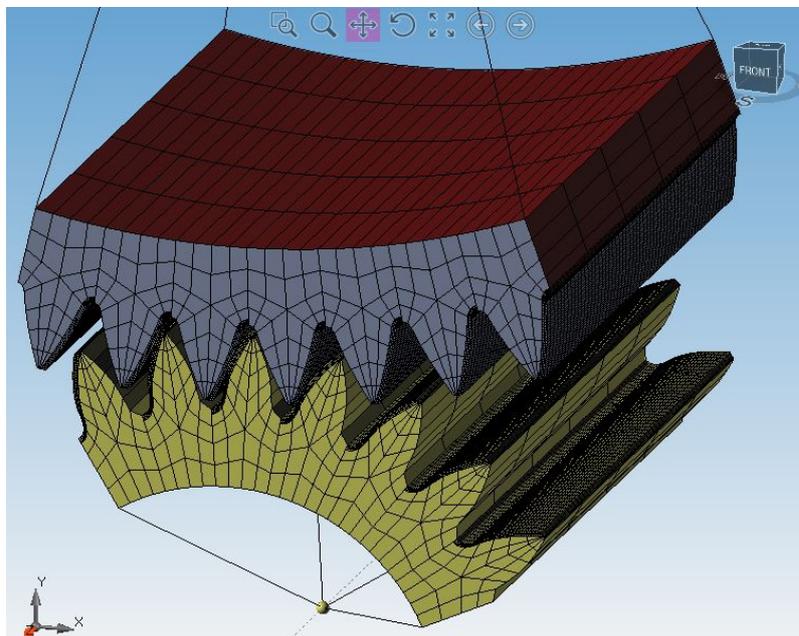


Figura 2.2.8: Modelo de elementos finitos para siete pares de dientes en IGD del conjunto piñón y rueda

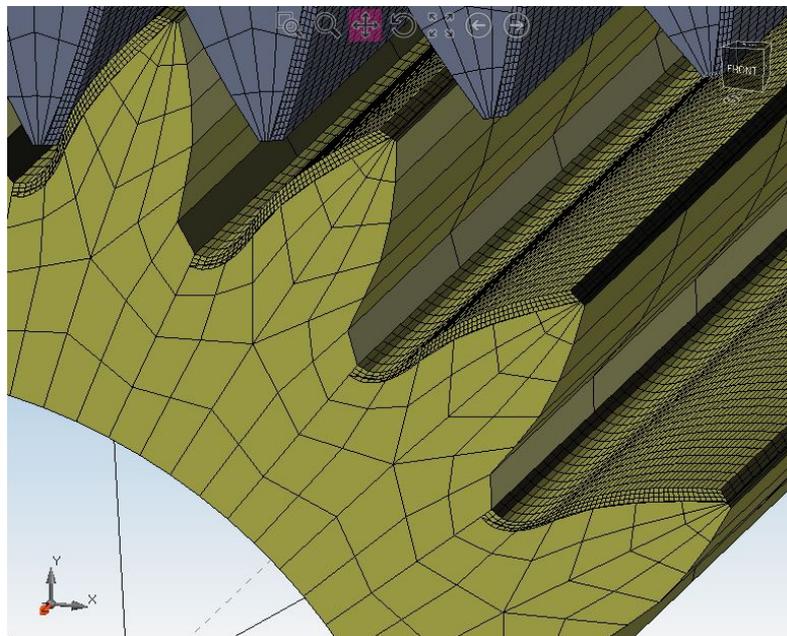


Figura 2.2.9: Mallado del piñón en la superficie de contacto con tres capas de elementos finitos

Capítulo 3

Generación analítica del modelo HCR

3.1. Definición de la condición para la generación del modelo HCR

Conforme se definió previamente, para que un modelo de engranaje se considere HCR es necesario que el grado de recubrimiento sea igual o mayor que dos, de manera tal que siempre exista un mínimo de un par de dientes en contacto. A partir de este concepto, y basándose en la figura 3.1.1, se pudo establecer la relación entre los distintos parámetros que definen la geometría de un engranaje y limitarla a la condición de que $g_a \geq 2 \cdot P_b$, siendo g_a la longitud de la línea de engrane y P_b el paso base, de manera que dicha condición debe cumplirse para asegurar que al menos existe un mínimo de dos pares de dientes en contacto a lo largo del engrane.

$$g_a = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - (r_{b1} + r_{b2}) \cdot \operatorname{tg} \alpha_{wt} \geq 2 \cdot P_b \quad (3.1.1)$$

La ecuación 3.1.1 obtenida a partir de la figura 3.1.1 establece cual es la relación entre los distintos parámetros que definen las geometrías del piñón y la rueda para cumplir con la condición mínima de creación del modelo HCR.

$$P_b = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{b1}}{Z_1} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{b2}}{Z_2} \quad (3.1.2)$$

$$\alpha_{wt} = \arccos \frac{r_{b1} + r_{b2}}{C} \quad (3.1.3)$$

$$r_{a1} = r_{w1} + (C_a + \chi_1) \cdot m \quad (3.1.4)$$

$$r_{a2} = r_{w2} + (C_a + \chi_2) \cdot m \quad (3.1.5)$$

$$r_{w1} = \frac{Z_1 \cdot m}{2} \quad (3.1.6)$$

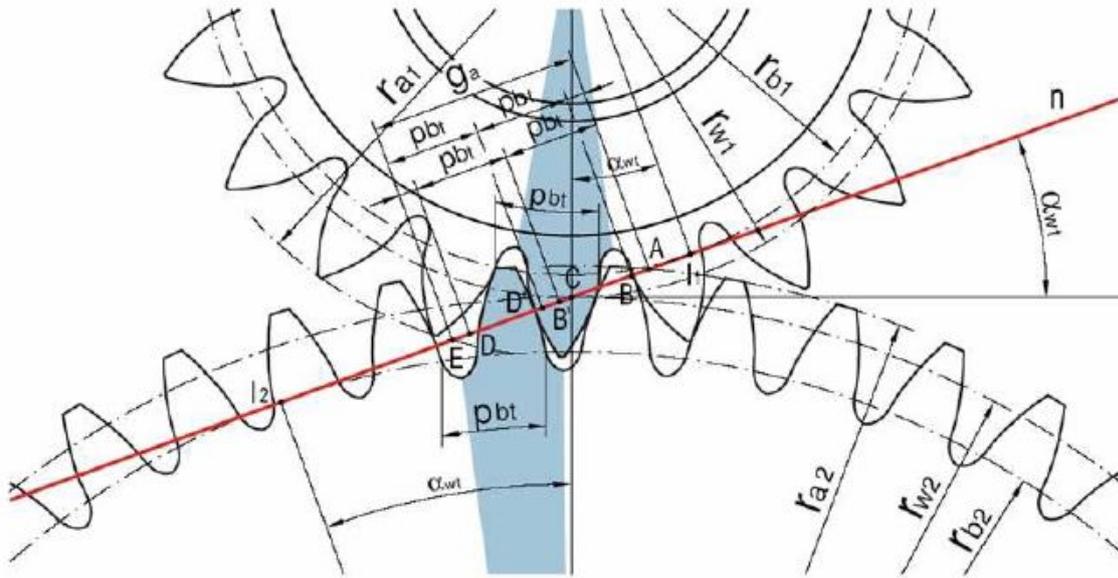


Figura 3.1.1: Geometría de involuta para modelo HCR, fuente [2]

$$r_{w2} = \frac{Z_2 \cdot m}{2} \quad (3.1.7)$$

$$r_{b1} = r_{w1} \cdot \cos \alpha_h \quad (3.1.8)$$

$$r_{b2} = r_{w2} \cdot \cos \alpha_h \quad (3.1.9)$$

Los parámetros que definen la ecuación 3.1.1 se obtienen de las expresiones 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6 y 3.1.7, donde C es la distancia entre centros, r_{w1} y r_{w2} los radios primitivos del piñón y la rueda, C_a el coeficiente de addendum, m es el módulo y α_{wt} el ángulo de presión de funcionamiento.

3.2. Comprobación de la condición necesaria para el modelo HCR

A partir del conjunto de ecuaciones del modelo HCR conforme a la sección anterior, se procedió a la comprobación del mismo a través de unos valores de entrada específicos mostrados en la tabla 3.2.1. Empleando dichos valores se obtuvieron varios parámetros como cálculo directo recogidos en la tabla 3.2.2.

Una vez que se obtuvieron los valores de los parámetros de la tabla 3.2.2, se podía establecer la condición límite para el modelo HCR mostrado en la expresión 3.2.1, que considerando la ecuación

Tabla 3.2.1: Valores de entrada para la creación del modelo HCR analíticamente

Variabes	Valores
Módulo, m	3
Dientes del piñón, Z_1	27
Dientes de la rueda, Z_2	38
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Coefficiente de desplazamiento hta piñón, χ_1 (mm)	0
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2 (mm)	0

Tabla 3.2.2: Parámetros del diseño de la rueda y del piñón obtenidos por cálculo directo de los valores de entrada

Variabes	Valores
Paso base, P_b (mm)	8,86
Distancia entre centros, C (mm)	97,5
Ángulo de presión de funcionamiento, α_{wt} ($^\circ$)	20
Radio primitivo del piñón, r_{w1} (mm)	40,5
Radio primitivo de la rueda, r_{w2} (mm)	57
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	38,06
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	53,56

3.1.1 y completando con los valores de las tablas 3.2.1 y 3.2.2, quedaba como una función del coeficiente de addendum C_a que se obtuvo mediante iteración a través de una hoja de cálculo. Una vez obtenido el C_a , se estaba en disposición de obtener los radios de cabeza tanto para la rueda como el piñón así como el grado de recubrimiento mediante la ecuación 1.1.2. Dichos valores quedan recogidos en la tabla 3.2.3, donde el grado de recubrimiento fue de 2 conforme a lo esperado.

$$g_a \geq 2 \cdot P_b = 17,71 \text{ (mm)} \quad (3.2.1)$$

El último paso consistió en comprobar el modelo anterior introduciendo en IGD los valores mostrados en la tabla 3.2.1 y el coeficiente de addendum mostrado en la tabla 3.2.3. Se observó que los parámetros obtenidos analíticamente coincidían con los generados por IGD tales como el paso base o el diámetro de cabeza conforme se muestra en la figura 3.2.1.

Tabla 3.2.3: Coeficiente de addendum y valores de salida obtenidos por iteración

Variables	Valores
Paso base, P_b (mm)	8,86
Coeficiente de addendum, C_a	1,25
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	44,25
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	60,75
Grado de recubrimiento, ε	2

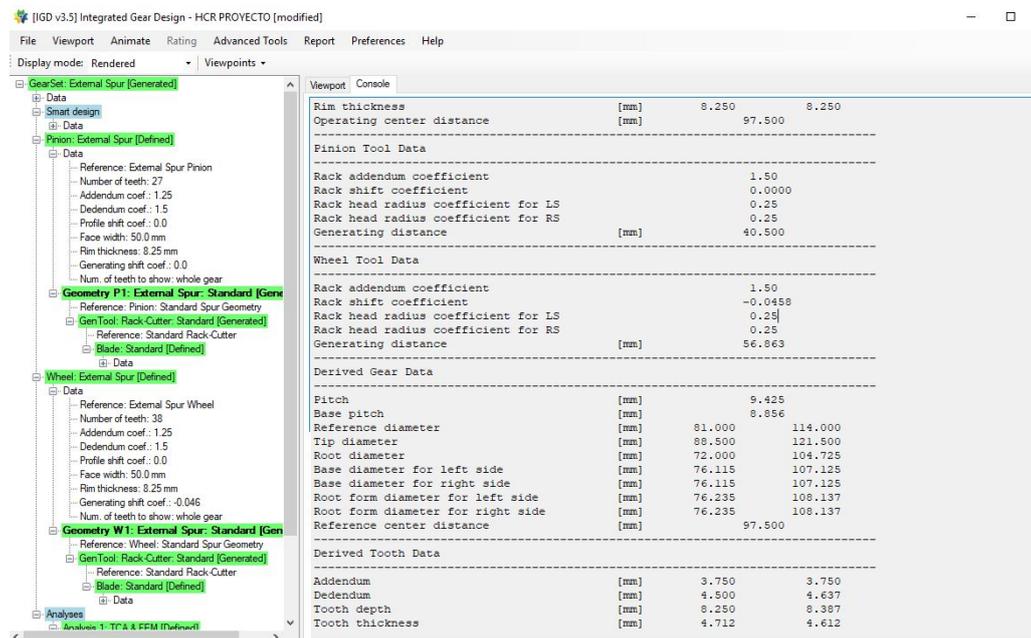


Figura 3.2.1: Valores de geometría de rueda y piñón obtenidos por IGD a través del modelo HCR creado analíticamente

3.3. Condición de no penetración para el modelo HCR

Se define la condición de no penetración conforme a las ecuaciones 3.3.1 y 3.3.2, que indican el número mínimo de dientes que se requiere tanto para el piñón como para la rueda para que no exista penetración en la base. Los valores que se obtuvieron para las mismas se muestran en la tabla 3.3.4, donde claramente se observa que el diseño de HCR considerado no tiene problemas de penetración al tener un número de dientes tanto para el piñón como la rueda superior al límite de 21.12 dientes.

$$Z_{lim} (\text{piñón}) \geq \frac{2 \cdot (C_a - \chi_1)}{\text{sen}^2 \alpha_h} \quad (3.3.1)$$

$$Z_{lim} (\text{rueda}) \geq \frac{2 \cdot (C_a - \chi_2)}{\text{sen}^2 \alpha_h} \quad (3.3.2)$$

Tabla 3.3.4: Dientes límites

Condición	Valores
Z_{lim} (piñón)	21,12
Z_{lim} (rueda)	21,12

Capítulo 4

Modelos de engranaje generados y resultados del análisis de elementos finitos

Para el presente TFG, se han estudiado diferentes geometrías de engranajes rectos clasificadas en tres casos de estudio: A, B y C. Cada uno de estos casos vendría definido por el número de dientes de la rueda y del piñón, un módulo y un par de torsión, cuyos valores fueron extraídos de la tabla 3 del artículo de Schultz [1], usados como datos de entrada en la creación de los modelos de engranaje con IGD. En todos los grupos se llevaría a cabo el análisis tensional (con y sin fricción) de los siguientes casos:

- Modelo de engranaje HCR con módulo m y número de dientes dado para piñón Z_1 y rueda Z_2 .
- Modelo de engranaje SCR con módulo m y número de dientes dado para piñón Z_1 y rueda Z_2 .
- Modelo de engranaje HCR con módulo reducido y número de dientes dado para piñón Z_1 y rueda Z_2 .

De los valores de tensiones que se obtuvieron para los tres casos anteriores, tras el análisis mediante elementos finitos, se consideraron de interés los correspondientes a:

- La presión de contacto y la tensión máxima de Von Mises del piñón y de la rueda. Estos valores resultan de interés para el estudio de falla en engranajes por fatiga superficial, cuya consecuencia directa en caso de fallo es el desgaste en la superficie de la cara del diente, y que se debe tener en cuenta a la hora del diseño de engranajes para su comercialización.

- La tensión principal máxima en la base del diente tanto del piñón como de la rueda. En la raíz del diente es donde tiene lugar los mayores esfuerzos por flexión, y por lo tanto, es el área crítica donde suelen producirse fracturas por fatiga. En consecuencia, estos valores de tensión son de relevancia durante el diseño.

Además, para el modelo de engranaje HCR inicial, se comprobó si existía influencia en las tensiones del rebaje de material en la punta de la cabeza del diente.

Durante el proceso de creación de los modelos mediante IGD, en paralelo se comprobó analíticamente el valor del grado de recubrimiento de todos los casos de estudio y las interferencias entre piñón y rueda durante operación.

4.1. Casos del diseño A

4.1.1. Modelo de engranaje HCR del diseño A

Inicialmente se generó con IGD un modelo de engranaje HCR con los datos de parámetros de geometría mostrados en la tabla 4.1.1. Los coeficiente de herramienta χ_1 y χ_2 se obtienen durante la primera fase de creación de la geometría del piñón y la rueda en IGD para tener cierta holgura circunferencial (en terminología inglesa backlash), de manera tal que los valores obtenidos eviten problemas de apuntamiento y penetración durante la generación del perfil de los dientes de ambos engranajes.

Por otro lado, el valor del par aplicado en el piñón procede de la expresión $T = \frac{P}{\frac{2 \cdot n \cdot \pi}{60}}$, donde P es la potencia y n las revoluciones por minuto. Los valores de ambos parámetros se obtienen de la misma fuente [1] que el resto de datos de entrada.

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

En paralelo a la generación del modelo mediante IGD, se procedió a la comprobación analítica del grado de recubrimiento mediante la ecuación 4.1.1 ya mostrada en el capítulo 1. El objetivo era que efectivamente el valor del grado de recubrimiento daba valores por encima de dos, para los datos de diseño utilizados.

$$\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left[Z_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_{a1}}{r_{b1}}\right)^2 - 1} + Z_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_{a2}}{r_{b2}}\right)^2 - 1} - (Z_1 + Z_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha \right] \quad (4.1.1)$$

Para ello, se calcularon los siguientes parámetros a partir de los datos de entrada mostrados en la tabla 4.1.1:

- Radio primitivo del piñón, r_{p1}

$$r_{p1} = \frac{Z_1 \cdot m}{2} \quad (4.1.2)$$

Tabla 4.1.1: Datos geométricos para modelo de engranaje HCR del caso A.

Variabes	Valores
Módulo, m (mm)	2,25
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	32
Nº de dientes de la rueda, N_2	59
Coefficiente de Addendum, a	1,35
Coefficiente de Dedendum, d	1,69
Coefficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,18
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	-0,528
Distancia entre centros, C (mm)	101,57
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	945900

- Radio primitivo de la rueda, r_{p2}

$$r_{p2} = \frac{Z_2 \cdot m}{2} \quad (4.1.3)$$

- Radio base del piñón, r_{b1}

$$r_{b1} = r_{p1} \cdot \cos \alpha_h \quad (4.1.4)$$

- Radio base de la rueda, r_{b2}

$$r_{b2} = r_{p2} \cdot \cos \alpha_h \quad (4.1.5)$$

- Ángulo de presión de operación, α

$$\alpha = \arccos \frac{r_{b1} + r_{b2}}{C} \quad (4.1.6)$$

- Radio de cabeza del piñón, r_{a1}

$$r_{a1} = r_{p1} + (a + \chi_1) \cdot m \quad (4.1.7)$$

- Radio de cabeza de la rueda, r_{a2}

$$r_{a2} = r_{p2} + (a + \chi_2) \cdot m \quad (4.1.8)$$

Los resultados obtenidos a partir de las expresiones anteriores quedan recogidos en la tabla 4.1.2, donde se observa que el grado de recubrimiento es de 2,31, y por lo tanto, se confirmaba que efectivamente el modelo respondía a un diseño HCR.

Tabla 4.1.2: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo HCR del diseño A

VARIABLES	VALORES
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	36
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	66,37
Ángulo de presión, α ($^{\circ}$)	18,71
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	33,83
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	62,37
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	39,44
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	68,22
Grado de recubrimiento, ε	2,31

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Conforme se comentó en el capítulo dos, mediante el programa IGD los modelos creados correspondían a diseños sin apuntamiento y penetración, lo cual es una condición importante durante la fabricación, ya que la aparición de dichos fenómenos debilita tanto la cabeza como la raíz del diente respectivamente, y aumenta la probabilidad de fallo en operación. Por lo tanto, en ese sentido se podía decir que los diseños generados eran fiables. Pese a lo anterior, quedaba pendiente comprobar mediante el método analítico si se producía interferencia entre la rueda y el piñón durante el engrane. La interferencia ocurre cuando existe superposición entre las curvas de perfil de ambos dientes, o bien al comienzo del engrane la cabeza de la rueda interfiere en la base del piñón por debajo del último punto de la curva de involuta, o al final del engrane, la cabeza del piñón penetra el flanco de la rueda por debajo del perfil de involuta. Para la comprobación de los distintos modelos de piñón y rueda, se hizo uso de la condición de no interferencia de Rackov [2], que desarrolló a partir de la figura 4.1.1 y que queda establecida mediante las expresiones matemáticas 4.1.9, que establece el límite para el radio de cabeza de la rueda, por debajo del cual no se produce interferencia de la rueda sobre el piñón, y 4.1.10, que limita el radio de cabeza del piñón, por debajo del cual no se produce interferencia del piñón sobre la rueda.

$$r_{a2} \leq r_{a2-lim} = \left[C \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha_{at2}} - r_{b1} \cdot \frac{\text{tg } \alpha_h}{\text{sen } \alpha_{at2}} + \frac{m}{\text{sen } \alpha_h \cdot \text{sen } \alpha_{at2}} \cdot (a - \chi_1) \right] \quad (4.1.9)$$

$$r_{a1} \leq r_{a1-lim} = \left[C \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha_{at1}} - r_{b1} \cdot \frac{\text{tg } \alpha_h}{\text{sen } \alpha_{at1}} + \frac{m}{\text{sen } \alpha_h \cdot \text{sen } \alpha_{at1}} \cdot (a - \chi_2) \right] \quad (4.1.10)$$

donde,

$$\alpha_{at1} = \arccos \frac{r_{b1}}{r_{a1}}, \quad \alpha_{at2} = \arccos \frac{r_{b2}}{r_{a2}}.$$

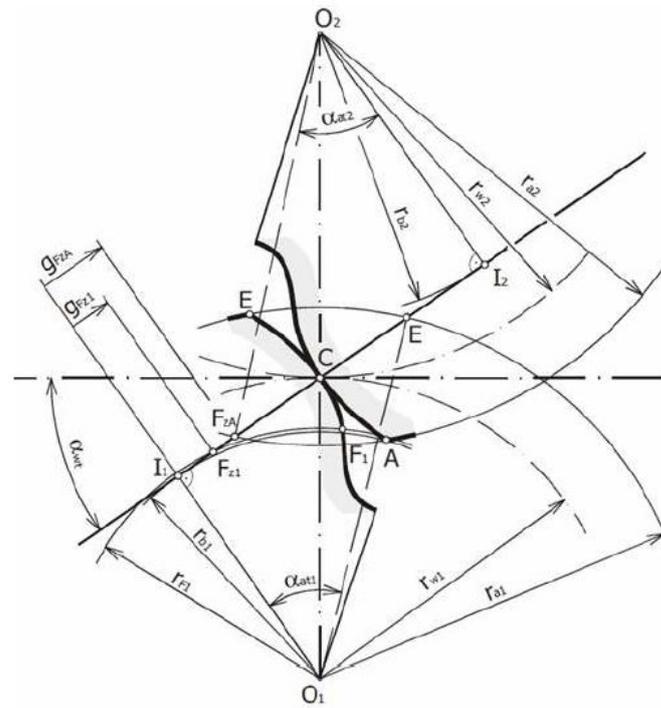


Figura 4.1.1: Fenómeno de interferencia entre piñón y rueda (fuente [2])

De las condiciones anteriores se deduce por tanto que si los radios de cabeza del piñón y rueda del diseño resultan inferiores o iguales a r_{a1-lim} y r_{a2-lim} , el diseño no tiene problemas de interferencia durante el engrane. En la tabla 4.1.3 se recogen los resultados del análisis donde se comprueba que no existe problemas de interferencia en el modelo generado.

Tabla 4.1.3: Valores del radio de cabeza límite y real para comprobación de interferencias durante el engrane

Engranaje	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	43,23	39,44
Rueda	69,01	68,23

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

Una vez realizados todos los pasos anteriores, se procedió al cálculo tensional mediante elementos finitos con Abaqus, exportando los resultados obtenidos de éste a IGD. En la tabla 4.1.4 quedan recogidos los valores máximos de las tensiones para los casos en los que no se consideró el efecto de

la fricción, y para aquellos casos en los que se incluyó un coeficiente de fricción $\mu = 0,05$.

Tabla 4.1.4: Valores máximos tensionales para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	1060,9	1158,77	1347,081	431,58	441,9
Con Fricción $\mu = 0,05$	1051,9	1157,81	1322,24	421,54	449,47

Se observa en la tabla 4.1.4 que la fricción no ha alterado los resultados de las distintas tensiones analizadas.

En la figura 4.1.2 se ven las tres huellas de contacto que ocurren en la posición veintiuna del TCA, lo cual se encuentra en consonancia con los engranajes tipo HCR pues su grado de recubrimiento es superior a dos, y por tanto se tiene en este caso tres pares de dientes en contacto. En el tercer diente está acabando el contacto en la cabeza, mientras que en el diente central se observa una distribución homogénea a lo largo de la cara del diente conforme al comportamiento habitual de dientes rectos, mientras que en el quinto diente el engrane está comenzando en la base (se ve claramente que las tensiones son menores comparadas con las representadas en el diente central).

Efecto en las tensiones a través de rebaje de cabeza del diente

Para este modelo de engranajes HCR, además se analizó el posible efecto del rebaje de cabeza del diente sobre las tensiones.

Para poder llevar a cabo el análisis anterior, se limitó analíticamente el radio a partir del cual comenzaba el abombamiento en la cabeza, así como la máxima longitud de rebaje tanto en la cabeza del piñón como de la rueda, mediante las expresiones 4.1.11, 4.1.12, 4.1.13 y 4.1.14. Estas ecuaciones permiten mantener un grado de recubrimiento mínimo de dos. Los valores que se obtuvieron a través de las mismas, se incluían como datos de entrada en IGD para crear el modelo correspondiente conforme se muestra en la figura 4.1.3. El rebaje que se consideró fue de tipo parabólico y por ambas caras de la cabeza del diente.

$$r_{e1r} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left[(r_{b1} + r_{b2}) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} + 2 \cdot P_b \right]^2} \quad (4.1.11)$$

$$r_{e2r} = \sqrt{r_{b2}^2 + \left[(r_{b1} + r_{b2}) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + 2 \cdot P_b \right]^2} \quad (4.1.12)$$

$$\text{longitud de rebaje}_1 = r_{a1} - r_{e1r} \quad (4.1.13)$$

$$\text{longitud de rebaje}_2 = r_{a2} - r_{e2r} \quad (4.1.14)$$

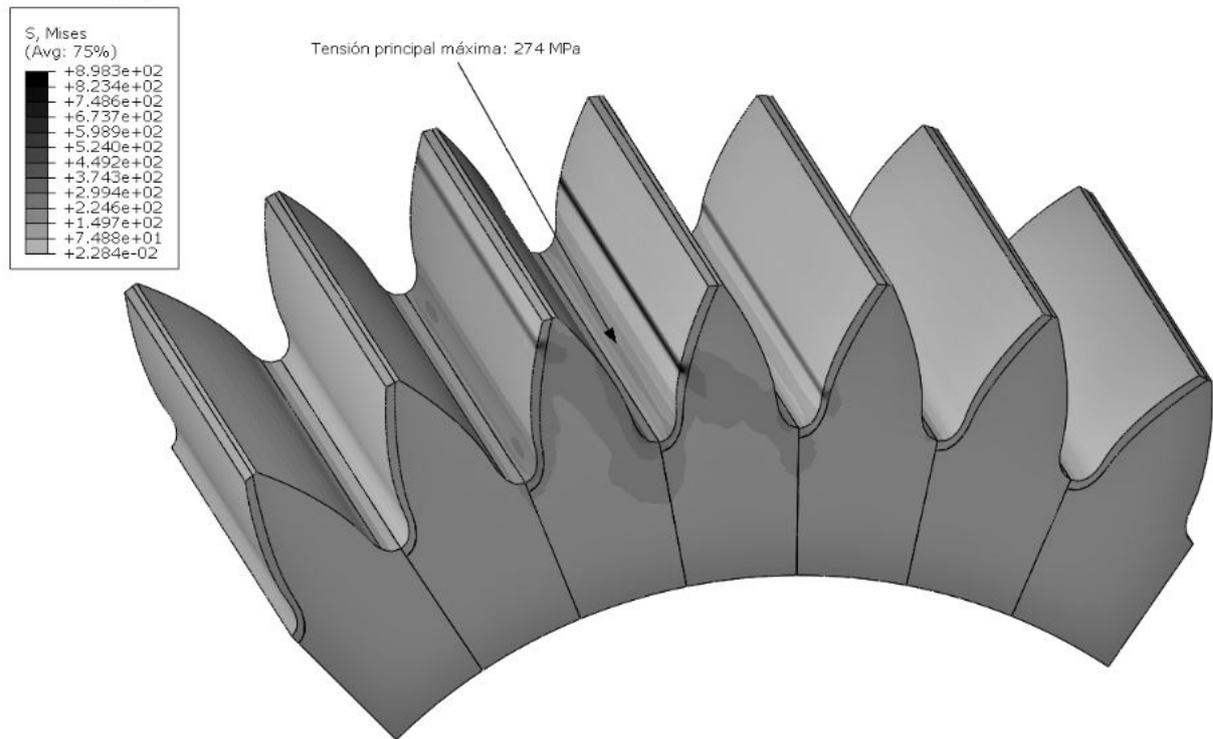


Figura 4.1.2: Figura de engranaje HCR en Abaqus con la huella del contacto

Aquí, P_b representa el paso base y viene dado por $P_b = \frac{2 \cdot \Pi \cdot r_{b1}}{Z_1} = \frac{2 \cdot \Pi \cdot r_{b2}}{Z_2}$, y el subíndice uno corresponde a los parámetros asociados al piñón, mientras que el subíndice dos corresponde a la rueda. Los parámetros r_{er1} y r_{er2} representan los radios del punto del perfil donde se iniciaría el rebaje, alcanzando éste su máxima profundidad en la cabeza del diente. Los valores obtenidos analíticamente para el rebaje permitido en este caso son los recogidos en la tabla 4.1.5. Definido el valor máximo de longitud de rebaje se definieron dos alturas de rebaje de 10 y 20 micras.

Tabla 4.1.5: Rebaje en la cabeza del diente del piñón y de la rueda

Parámetros	Valores (mm)
r_{er1}	38,42
r_{er2}	67,42
<i>longitud de rebaje</i> ₁	1,02
<i>longitud de rebaje</i> ₂	0,81

Una vez que el modelo del piñón y de la rueda se creó en IGD, se pasó a la obtención de las tensiones correspondientes mediante Abaqus, cuyos valores vienen recogidos en la tabla 4.1.6.

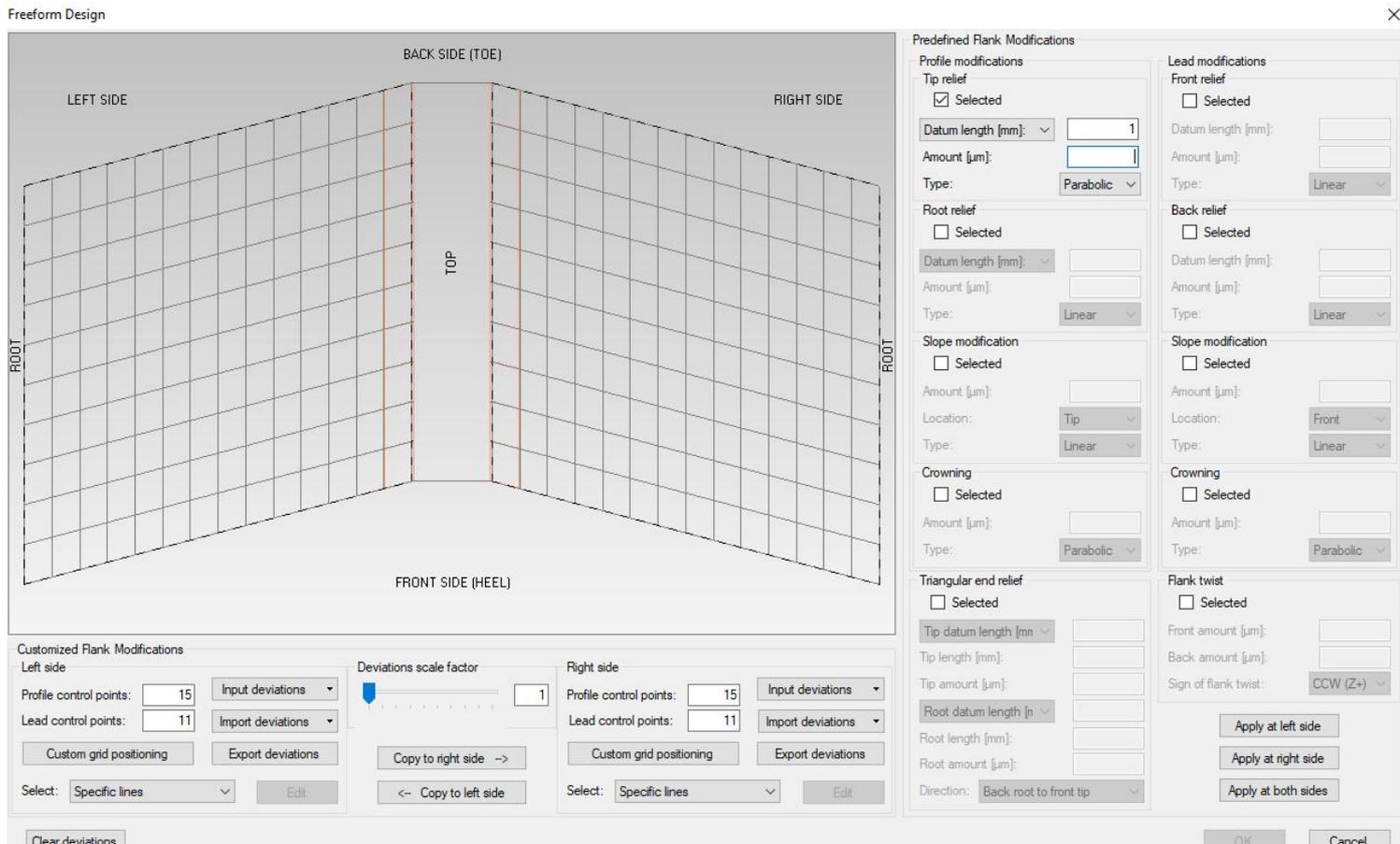


Figura 4.1.3: IGD para la creación de un modelo con rebaje de material en la cabeza del diente

Conforme se puede observar en dicha tabla, el rebaje en la cabeza no influye en la variación de las tensiones del diente, sin embargo, observando los resultados que muestra IGD para los errores de transmisión debidos al retraso de la posición de la rueda en $arc \cdot sec$ respecto al piñón, se puede afirmar que el error es reducido al aumentar el rebaje en la cabeza del diente de piñón y rueda. Aunque el error de transmisión no es del alcance del presente TFG, sí cabe mostrar la representación gráfica de los resultados obtenidos para el error de transmisión en las cuarenta y una posiciones de contacto, observándose que a mayor altura de rebaje en la cabeza del diente se atenúan los saltos en la transmisión tanto en valor como en la distribución en el tiempo, de manera que en el caso de una cabeza de diente más redondeada la transmisión será más suave y continua.

4.1.2. Modelo de engranaje SCR del diseño A

Una vez generado el modelo de engranaje HCR, con el mismo criterio y procedimiento se generó un modelo de engranaje SCR, de manera que se mantuvieron los mismos valores de los parámetros

Tabla 4.1.6: Valores máximos tensionales para las cuarenta y una posiciones de contacto de los casos con rebaje sin fricción

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. rueda	Principal máx. Piñón
Sin rebaje	1060,9	1158,77	1347,081	431,58	441,9
Con rebaje $\iota = 10\mu m$	1088,60	1174,74	1312,46	424,85	444,68
Con rebaje $\iota = 20\mu m$	1094,50	1182,70	1320,26	427,34	444,35

ERROR DE TRANSMISIÓN (ARCSEC)

— Caso 1: Error de transmisión sin rebaje. — Caso 2: Error de transmisión con rebaje 10 μm . — Caso 3: Error de transmisión con rebaje 20 μm .

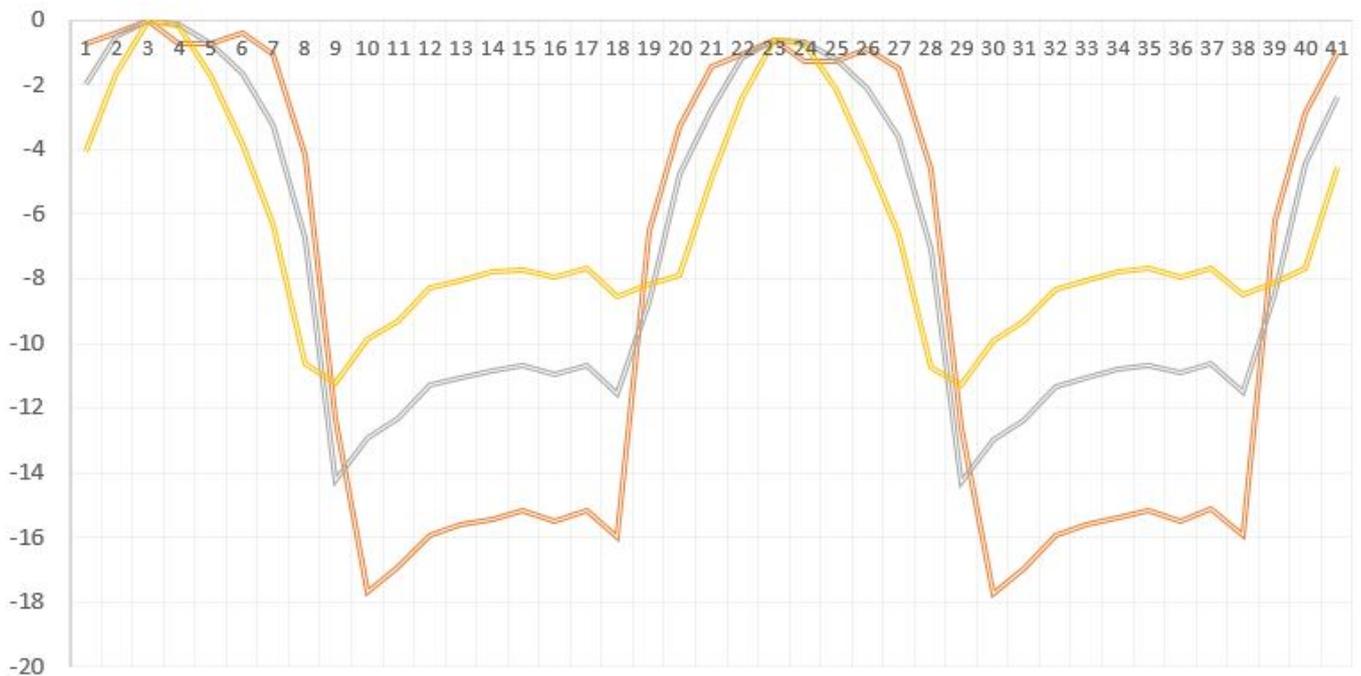


Figura 4.1.4: Influencia del rebaje en cabeza en el error de transmisión del engrane

extraídos de [1] usados en el modelo HCR, con la excepción de los coeficientes de addendum y dedendum, cuyos valores fueron los estándar. Los valores considerados para el modelo SCR se muestran en la tabla 4.1.7.

Tabla 4.1.7: Datos geométricos para modelo de engranaje SCR del diseño A

Variabes	Valores
Módulo, m (mm)	2,25
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	32
Nº de dientes de la rueda, N_2	59
Coficiente de Addendum, a	1
Coficiente de Dedendum, d	1,25
Coficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,153
Coficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	-0,153
Distancia entre centros, C (mm)	102,375
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	945900

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

Conforme se hizo para el modelo HCR, se aplicaron las ecuaciones anteriormente mostradas 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 y 4.1.8 . Los resultados obtenidos a partir de las mismas quedan recogidos en la tabla 4.1.8, siendo el grado de recubrimiento de 1,71, lo cual responde a un modelo SCR, donde a lo largo del engrane hay entre uno y dos pares de dientes en contacto.

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Se aplica la misma metodología que la empleada en el modelo HCR, mediante el uso de las ecuaciones 4.1.9 y 4.1.10. Los resultados obtenidos a partir de las mismas quedan recogidos en la tabla 4.1.9, confirmándose analíticamente que no existe problemas de interferencia en el modelo SCR generado.

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

Del mismo modo que se hizo para el modelo HCR anterior, en la tabla 4.1.10 quedan recogidos los valores máximos de las tensiones para los casos en los que no se consideró el efecto de la fricción, y para aquellos casos en los que se incluyó un coeficiente de fricción $\mu = 0,05$.

Tabla 4.1.8: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo SCR del diseño A

VARIABLES	Valores
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	36
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	66,37
Ángulo de presión, α ($^{\circ}$)	20
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	33,83
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	62,37
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	38,60
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	68,28
Grado de recubrimiento, ε	1,71

Tabla 4.1.9: Valores de radios de cabeza límite y reales del modelo SCR para condición de interferencia

Engranaje	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	41,34	38,59
Rueda	69,48	68,28

Tal y como ocurría para el modelo HCR, se observa en la tabla 4.1.10 que la fricción apenas influye en los resultados de las distintas tensiones analizadas.

En la figura 4.1.5 se muestra la huella de contacto para la posición número veintiuno del modelo SCR. Se ven sólo dos huellas de contacto, lo cual se encuentra acorde con el grado de recubrimiento asociado a los engranajes SCR, que como máximo tienen dos pares de dientes en contacto. En dicha figura se observa pues, que en el tercer diente el contacto está acabando y en el diente central la huella está distribuida uniformemente en la cara del diente como cabía esperar por ser dientes rectos.

Tabla 4.1.10: Valores máximos tensionales para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	1359,44	1572,03	2517,75	455,17	417,42
Con Fricción $\mu = 0,05$	1345,05	1622,82	2450,34	470,37	434,58

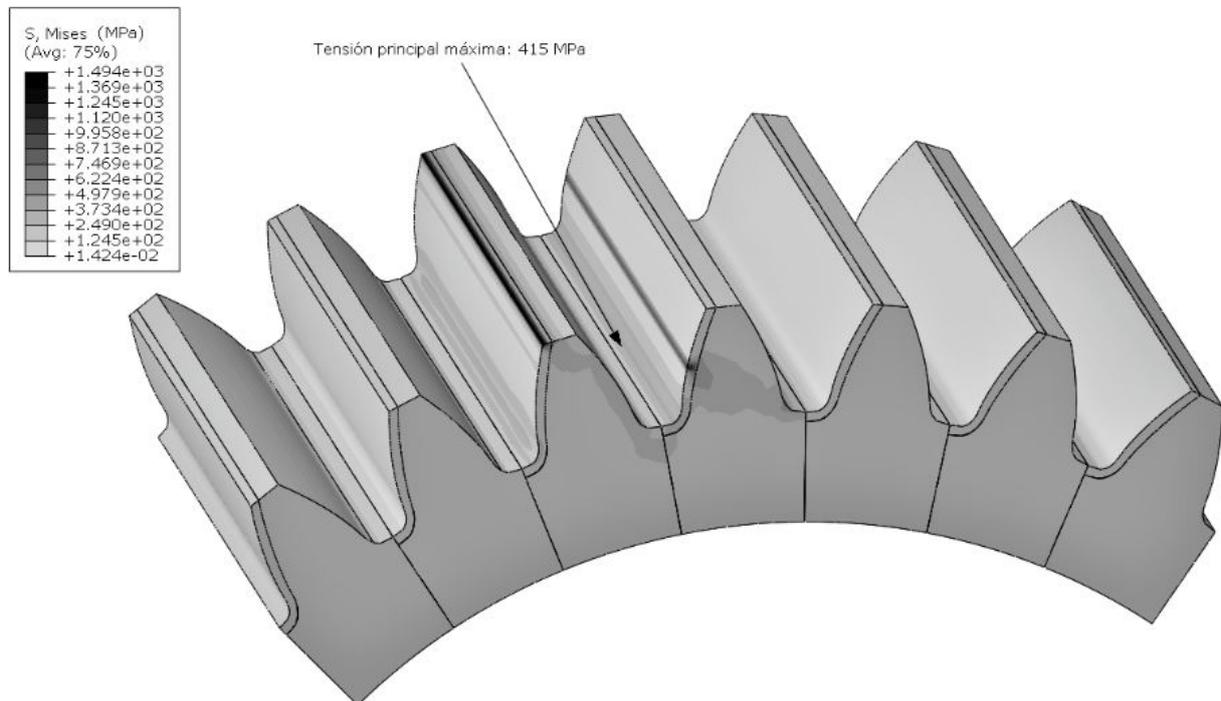


Figura 4.1.5: Figura de engranaje SCR en Abaqus con la huella del contacto

4.1.3. Modelo de engranaje HCR con módulo reducido del diseño A

A partir de los dos casos anteriores, modelos HCR y SCR, se genera un nuevo modelo HCR pero con módulo reducido. Para ello, se procedió a mantener todos los valores de los parámetros del modelo inicial HCR, aplicando el módulo estándar comercial que fuese inmediatamente inferior según norma, conforme a los valores mostrados en la figura 1.1.1 del capítulo uno. El objetivo es analizar si con dientes de tamaño inferior pero con grado de recubrimiento superior a dos, se pueden alcanzar tensiones cuyos valores estuviesen en torno a los valores de tensiones obtenidos para el modelo SCR, de esta manera en caso de fabricación, se podría obtener un diseño menos costoso que respondería en cuanto a valores tensionales de forma similar a un modelo de mayor tamaño. Los parámetros considerados para el modelo HCR con módulo reducido se muestran en la tabla 4.1.11.

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

Conforme se hizo para el modelo HCR, se aplicaron de nuevo para el cálculo analítico las ecuaciones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 y 4.1.8. Los resultados obtenidos a partir de las mismas quedan recogidos en la tabla 4.1.12, siendo el grado de recubrimiento de 2,19, lo cual responde a un modelo HCR donde a lo largo del engrane hay entre dos y tres pares de dientes en

Tabla 4.1.11: Datos geométricos para el modelo de engranaje HCR con módulo reducido del diseño A

VARIABLES	Valores
Módulo, m (mm)	2,0
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	32
Nº de dientes de la rueda, N_2	59
Coefficiente de Addendum, a	1,35
Coefficiente de Dedendum, d	1,69
Coefficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,187
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	-0,335
Distancia entre centros, C (mm)	90,84
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	945900

contacto.

Tabla 4.1.12: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo HCR de módulo reducido del diseño A

VARIABLES	Valores
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	32
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	59,00
Ángulo de presión, α ($^\circ$)	19,72
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	30,07
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	55,44
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	35,07
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	61,03
Grado de recubrimiento, ε	2,19

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Se aplica la misma metodología que la empleada en el caso del modelo HCR, mediante el uso de las ecuaciones 4.1.9 y 4.1.10. Los resultados obtenidos a partir de las mismas quedan recogidos en la tabla 4.1.13, confirmándose analíticamente que no existe problemas de interferencia en el modelo HCR generado.

Tabla 4.1.13: Valores de radios de cabeza límite y reales del modelo HCR con m reducido para condición de interferencia

<i>Engranaje</i>	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	39,49	35,07
Rueda	63,42	61,03

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

Del mismo modo que se hizo para los dos modelos anteriores, en la tabla 4.1.14 quedan recogidos los valores máximos de las tensiones para los casos en los que no se consideró el efecto de la fricción, y para aquellos casos en los que se incluyó un coeficiente de fricción $\mu = 0,05$.

Tabla 4.1.14: Valores máximos tensionales del modelo HCR con m reducido para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	1080,85	1447,53	1614,30	546,41	556,57
Con Fricción $\mu = 0,05$	1084,15	1442,54	1619,62	533,25	567,98

Tal y como ocurría para el modelo HCR, se observa en la tabla 4.1.14 que la fricción apenas influye en los resultados de las distintas tensiones analizadas.

En la figura 4.1.6 se ven las tres huellas de contacto que ocurren en la posición veintiuna del TCA. Se observa que en el tercer diente está acabando el contacto en la cabeza y que en el diente central se hay una distribución homogénea de la huella de contacto a lo largo de la cara del diente. Mientras en el quinto diente el engrane está comenzando. Si se compara la intensidad de las huellas del modelo HCR mostrado en la figura 4.1.2 con las mostradas para el modelo HCR con módulo reducido de la figura 4.1.6, se observa que la intensidad en el modelo HCR es ligeramente superior respecto al modelo HCR con m reducido.

4.1.4. Comparativa de las tensiones en los tres modelos del diseño A

Una vez que se obtuvieron los distintos valores tensionales se procedió a la comparación de los distintos modelos de este diseño. Dado que el efecto de la fricción no tiene un efecto considerable en la variación de las tensiones estudiadas, se procede a comparar los valores de las tensiones obtenidos para los casos sin coeficiente de fricción.

En la tabla 4.1.15 se encuentran registrados los valores máximos de las cuarenta y una posiciones

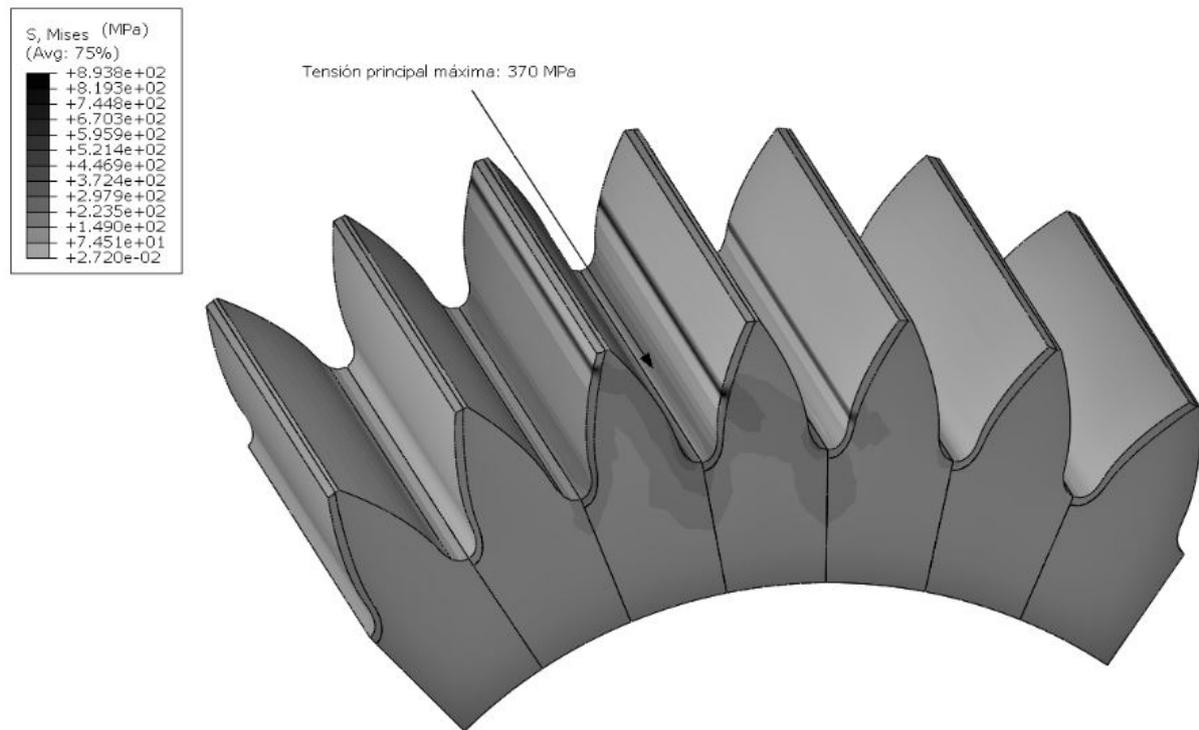


Figura 4.1.6: Figura de engranaje HCR con módulo reducido en Abaqus con la huella del contacto de los modelos de engranaje HCR, SCR y HCR con m reducido para los casos sin fricción de la tensión de Von Mises, Principal máxima en la base del piñón y rueda, así como la presión de contacto en la superficie del diente.

Tabla 4.1.15: Valores máximos tensionales de los modelos HCR, SCR y HCR con m reducido para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
HCR	1060,9	1158,77	1347,081	431,58	441,9
SCR	1359,44	1572,03	2517,75	455,17	417,42
HCR m reducido	1080,85	1447,53	1614,30	546,41	556,57

Si se comparan entre sí los valores de tensiones mostrados en la tabla 4.1.15 para los dos modelos HCR como un porcentaje de variación respecto a los valores correspondientes al modelo SCR, se obtendría los resultados que se muestran en la tabla 4.1.16. Se observa que las tensiones de Von Mises de la rueda en los dos modelos HCR tienen valores cercanos entre sí, siendo ambos inferiores

respecto a los valores de la tensión de Von Mises de la rueda del modelo SCR en torno a un -21% , por lo que cabe pensar que la variación del tamaño del diente de la rueda por una reducción del módulo no afecta tanto como en el caso del piñón, donde sí existe un aumento considerable de la tensión de Von Mises al reducir el módulo, pasando de una diferencia entre el modelo HCR respecto al modelo SCR de $-26,3\%$ a una variación del $-7,9\%$ para el modelo HCR con m reducido.

Tabla 4.1.16: Variación porcentual de las tensiones máximas de los modelos HCR y HCR con m reducido respecto al modelo SCR

Variación en %	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
Valor HCR en % del valor SCR	$-21,9\%$	$-26,3\%$	$-46,5\%$	$-5,2\%$	$5,9\%$
Valor HCR reducido en % del valor SCR	$-20,4\%$	$-7,9\%$	$-35,9\%$	20%	$33,3\%$

Las presiones de contacto de los modelos HCR tienen valores considerablemente inferiores respecto al modelo SCR, lo cual a priori es un resultado lógico, dado que en los modelos HCR las cargas se reparten para entre dos o tres pares de dientes (esto son dos o tres superficies de contacto), mientras que en el modelo SCR la presión se reparte entre una o dos superficies.

Respecto a las tensiones máximas principales de flexión que ocurren en la base del diente, en el modelo HCR de mismo módulo que el modelo SCR, las tensiones principales son superiores para el modelo HCR en el piñón, e inferiores en la rueda, pero los valores arrojados para los dos modelos no están muy alejados entre sí. Sin embargo, al generar un modelo HCR con m reducido, al ser los dientes de menor tamaño las tensiones de flexión en la base tanto en la rueda como en el piñón aumentan en comparación a las tensiones correspondientes al modelo SCR.

En las figuras 4.1.7 y 4.1.8 se observa la distribución de la tensión de Von Mises en la rueda y el piñón respectivamente para las cuarenta y una posiciones de contacto. Los valores de la tensión de Von Mises para los modelos HCR de las dos ruedas dentadas se encuentran por debajo de los valores correspondientes al modelo SCR para la mayoría de las posiciones de contacto. En el modelo SCR existen unos picos donde la tensión crece de forma repentina y pronunciada en las posiciones 5 y 25 para la rueda, y 20 y 40 para el piñón. Esto es debido a que en dichos picos sólo existe un par de dientes en contacto y por lo tanto todos los esfuerzos se concentran en el mismo. Esto implica durante el funcionamiento una transmisión menos uniforme y sometida a saltos de tensiones más acentuados que pueden repercutir en fallos relacionados con la fatiga. Para los dos modelos HCR (con y sin módulo reducido) los saltos de tensión ocurren cuando se tiene sólo dos pares de dientes en contacto en vez de tres, pero dicho salto no es tan pronunciado como en el modelo SCR, por lo que la transmisión de potencia y movimiento se produce de forma más uniforme.

La gráfica de la presión de contacto del diseño A mostrado en la figura 4.1.9 para los tres modelos

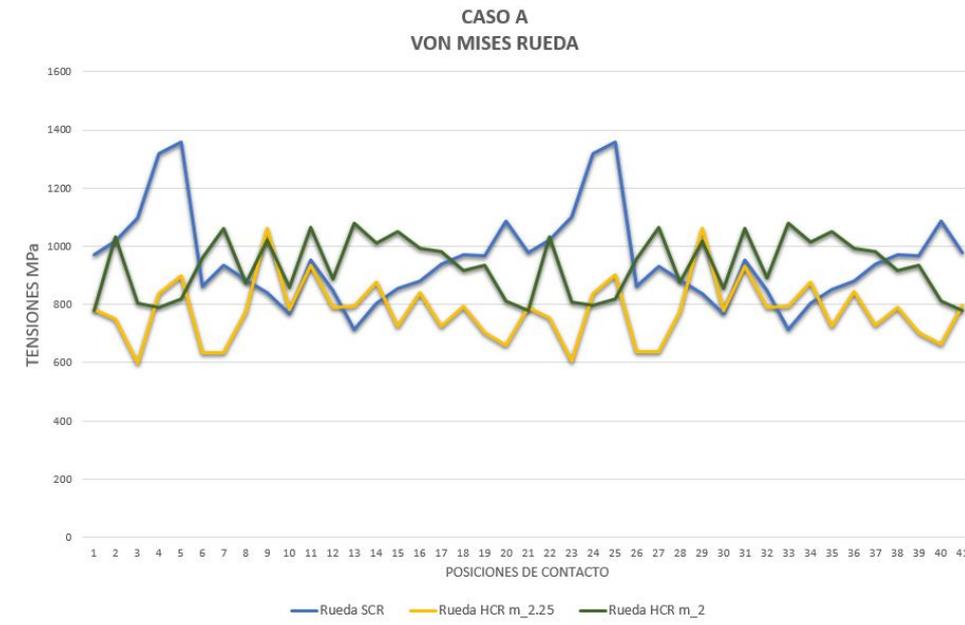


Figura 4.1.7: Tensiones de Von Mises en rueda para los modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño A

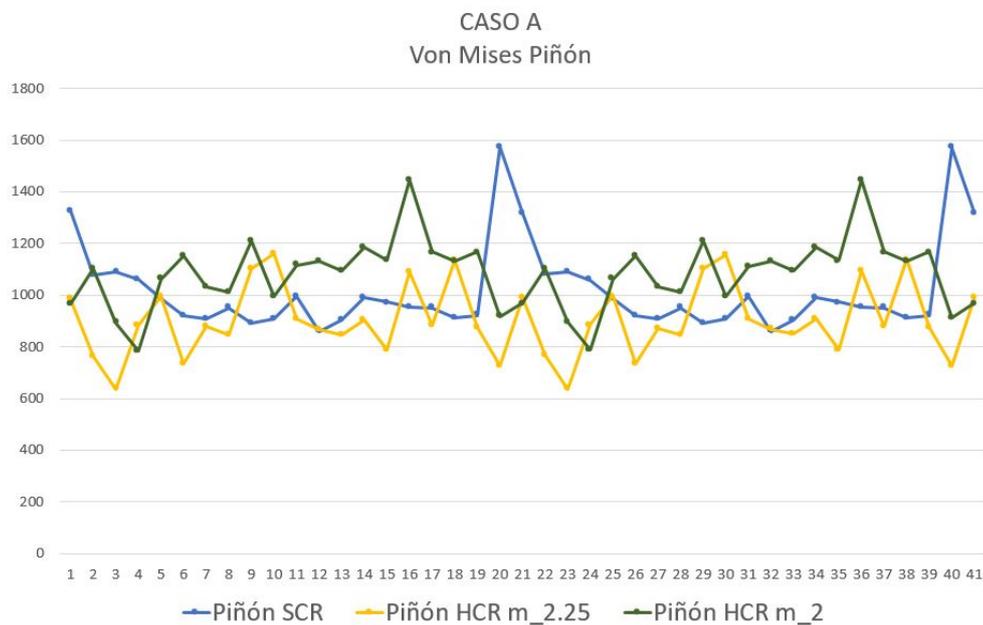


Figura 4.1.8: Tensiones de Von Mises en piñón para los modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño A

HCR, HCR con módulo reducido y SCR, muestra que durante las cuarenta y una posiciones los valores de presión para el modelo HCR se encuentran por debajo de los otros dos modelos. También destaca que la forma de distribución de las presiones del modelo HCR reducido es semejante al modelo HCR aunque con valores superiores. En cuanto a la curva correspondiente al modelo SCR, ésta muestra dos picos en la presión asociados a las posiciones en las que sólo un par de dientes está en contacto entre sí.

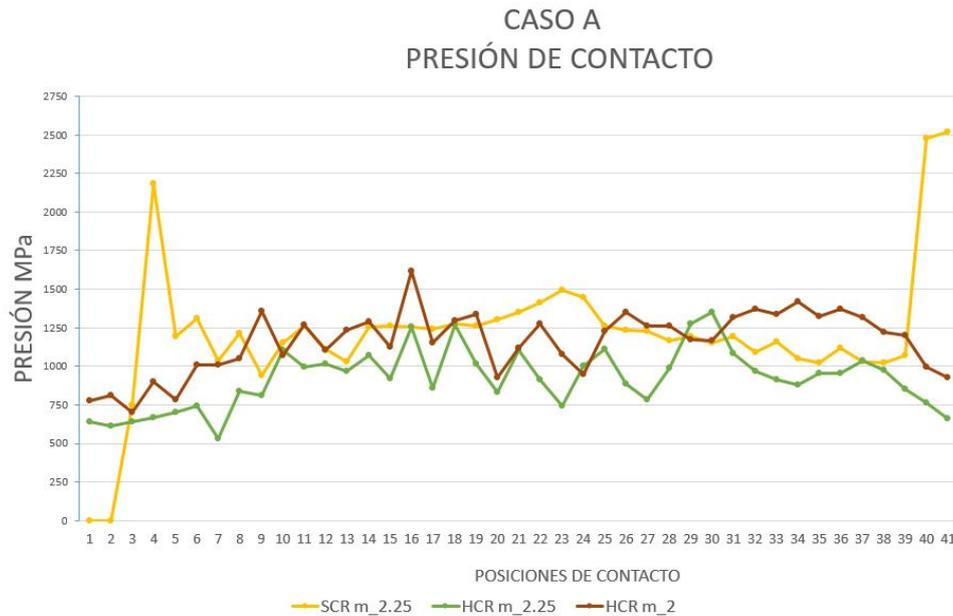


Figura 4.1.9: Presiones de contacto para modelos de engranajes SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño A

En las figuras 4.1.10 y 4.1.11 se muestra la evolución a lo largo de las posiciones de la tensión de flexión máxima en la base del diente. Se observa tanto en el piñón como en la rueda que los valores de tensión correspondientes a los dos modelos HCR tienen una evolución de la curva similar a lo largo de las posiciones, con la diferencia de que los valores mostrados para el modelo HCR de m reducido se encuentran por encima de los valores mostrados para el modelo HCR inicial. Por otro lado, durante la mayor parte de las posiciones de contacto el modelo SCR tiene tensiones de flexión inferiores a los otros dos modelos, lo cual era de esperar al ser dientes de menor altura. Sin embargo, existe un pico en la posición 22 tanto para la rueda como el piñón del modelo SCR que rebasa los valores tensionales de los modelos para esa posición HCR. Este pico en la tensión, es debido a que solamente existe un par de dientes en contacto y por lo tanto, los esfuerzos de flexión impactan a un único par de dientes en una posición dada.

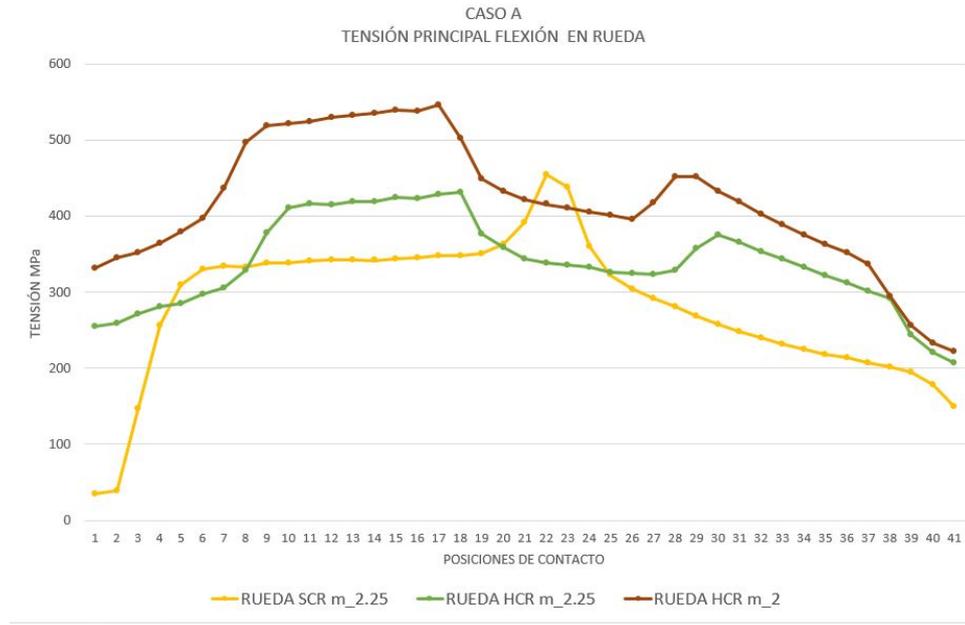


Figura 4.1.10: Tensión máxima principal por esfuerzos de flexión en la base del diente de la rueda para modelos de engranajes SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño A

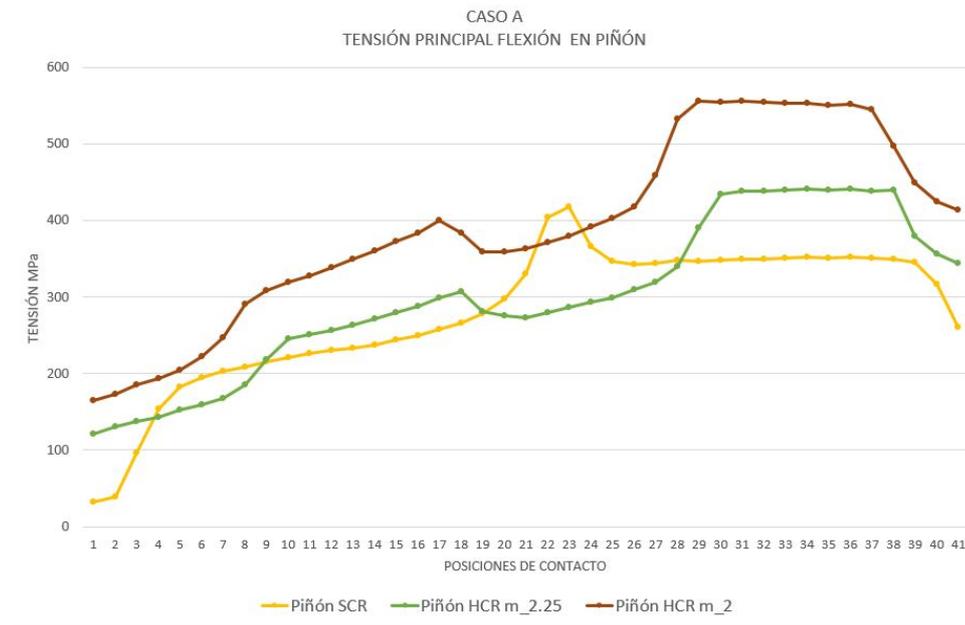


Figura 4.1.11: Tensión máxima principal por esfuerzos de flexión en la base del diente del piñón para modelos de engranajes SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño A

4.1.5. Comparativa de la energía disipada para los modelos con fricción del diseño A

Para terminar con el análisis de los modelos HCR, SCR y HCR con m reducido del diseño A, se calculó la energía disipada a lo largo de las cuarenta y una posiciones cuando la fricción era considerada. La energía disipada máxima para cada modelo se muestra en la tabla 4.1.17.

Tabla 4.1.17: Disipación de energía máxima para los tres modelos del diseño A

Modelo	Energía (J)
HCR	3009,7
SCR	2053,8
HCR m reducido	2628,87

Observando los valores de la tabla 4.1.17 se tiene que la energía disipada para los dos modelos HCR se encuentra por encima de la correspondiente al modelo SCR, lo cual podría tener una explicación en que los modelos HCR tienen siempre en contacto entre dos y tres pares de dientes, y por lo tanto, existe a lo largo del engrane más superficies expuestas al rozamiento durante más tiempo, es decir, una mayor superficie de disipación de energía, lo cual se traduce a una mayor energía disipada acumulada. Por otro lado, a priori cabría pensar que debido a que las presiones de contacto son superiores para el modelo HCR con m reducido, entonces la energía disipada también sería superior, pero ocurre para este diseño en concreto que es el modelo HCR el que disipa mayor energía. Analizando la causa de estos resultados, se comprobaron los grados de recubrimientos para los dos modelos HCR, y se tiene que para el modelo HCR el valor es de 2,31, mientras que para el modelo HCR con m reducido el grado de recubrimiento era de 2,19, lo cual sí está en consonancia con los resultados obtenidos para la energía disipada, pues un mayor grado de recubrimiento es indicativo de que existen durante el tiempo del engrane más superficies en contacto, y por tanto, una mayor área a través de la cual se disipa la energía en forma de calor.

4.2. Casos del diseño B

4.2.1. Modelo de engranaje HCR del diseño B

Para la obtención de dicho modelo se siguió el mismo procedimiento que para todos los casos del diseño A, y los valores de los parámetros que generaron la geometría del modelo quedan recogidos en la tabla 4.2.18.

Tabla 4.2.18: Datos geométricos para modelo de engranaje HCR del diseño B

Variabes	Valores
Módulo, m (mm)	2,25
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	27
Nº de dientes de la rueda, N_2	64
Coefficiente de Addendum, a	1,35
Coefficiente de Dedendum, d	1,69
Coefficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,00
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	0,5
Distancia entre centros, C (mm)	103,46
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	739780

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

Con el objetivo de comprobar que efectivamente el grado de recubrimiento daba valores por encima de dos, se llevó a cabo el mismo análisis realizado para los modelos del diseño A.

Los resultados obtenidos a partir de las expresiones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 y 4.1.8 quedan recogidos en la tabla 4.2.19, siendo el grado de recubrimiento 2,15, y por lo tanto, se confirmaba que efectivamente el modelo respondía a un diseño de engranaje HCR.

Tabla 4.2.19: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo HCR del diseño B

Variabes	Valores
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	30,38
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	72
Ángulo de presión, α ($^\circ$)	21,59
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	28,54
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	67,66
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	33,41
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	76,16
Grado de recubrimiento, ε	2,15

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Conforme se hizo para el diseño A, se usaron las ecuaciones ya descritas 4.1.9 y 4.1.10 para comprobar si existía interferencia en operación. La condición era que si los radios de cabeza del piñón y rueda del diseño resultaban inferiores o iguales a r_{a1-lim} y r_{a2-lim} , el diseño no tendría problemas de interferencia durante el engrane. En la tabla 4.2.20 se recogen los resultados del análisis donde se comprueba que no existe problemas de interferencia en el modelo generado.

Tabla 4.2.20: Valores del radio de cabeza límite y real para comprobación de interferencias durante el engrane

<i>Engranaje</i>	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	36,61	33,41
Rueda	79,61	76,16

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

Tal y como se procedió para el diseño A, se hizo el cálculo tensional mediante elementos finitos con Abaqus, exportando los resultados obtenidos de éste a IGD. En la tabla 4.2.21 se muestran los valores máximos de las tensiones para los casos sin fricción, y para aquellos en los que se incluyó un coeficiente de fricción $\mu = 0,05$.

Tabla 4.2.21: Valores máximos tensionales para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	933,59	1131,48	1357,26	400,47	439,29
Con Fricción $\mu = 0,05$	953,07	1130,26	1379,04	388,27	446,11

Tal y como ocurrió para el diseño A, de la tabla 4.2.21 se extrae la misma conclusión de que la fricción no influye en la variación de los valores tensionales.

En la figura 4.2.1 se ven sólo dos huellas de contacto que ocurren en la posición veintiuna del TCA, se tienen por tanto dos pares de dientes en contacto para esta posición. En el diente central se observa una distribución homogénea a lo largo de la cara del diente, mientras que en el quinto diente el engrane está comenzando dado el color menos intenso de la huella de contacto.

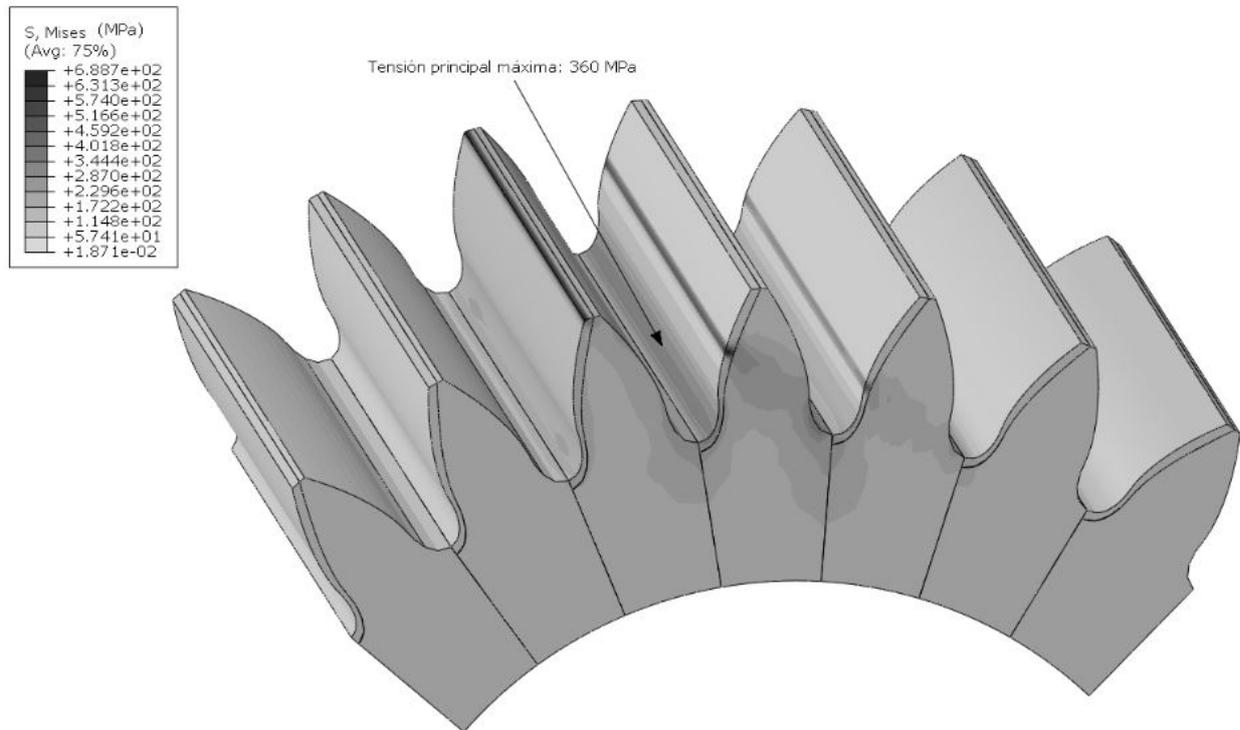


Figura 4.2.1: Figura de engranaje HCR en Abaqus con la huella de contacto

4.2.2. Modelo de engranaje SCR del diseño B

Conforme al mismo criterio empleado para el diseño A, se generó un modelo de engranaje SCR de manera que se mantuvieron los mismos valores de los parámetros extraídos de [1] usados en el modelo HCR, con la excepción de los coeficientes de addendum y dedendum, cuyos valores fueron los correspondientes a engranajes estándar. Los valores considerados para el modelo SCR se muestran en la tabla 4.2.22.

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

Aplicando las ecuaciones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 y 4.1.8, los resultados obtenidos a partir de las mismas quedan recogidos en la tabla 4.2.23, siendo el grado de recubrimiento de 1,68, lo cual responde a un diseño SCR donde a lo largo del engrane hay entre uno y dos pares de dientes en contacto.

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Mediante el uso de las ecuaciones 4.1.9 y 4.1.10, se obtuvieron los valores en la tabla 4.2.24, confirmándose analíticamente que no existe problemas de interferencia en el modelo SCR generado.

Tabla 4.2.22: Datos geométricos para modelo de engranaje SCR del diseño B

Variabes	Valores
Módulo, m (mm)	2,25
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	27
Nº de dientes de la rueda, N_2	64
Coefficiente de Addendum, a	1
Coefficiente de Dedendum, d	1,25
Coefficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,22
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	-0,22
Distancia entre centros, C (mm)	102,375
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	739780

Tabla 4.2.23: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo SCR del diseño B

Variabes	Valores
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	30,38
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	72
Ángulo de presión, α ($^\circ$)	20
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	28,54
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	67,66
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	33,12
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	73,75
Grado de recubrimiento, ε	1,68

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

Tras la generación del modelo de engranaje y la aplicación del cálculo por elementos finitos, se obtuvieron los valores máximos de las tensiones para los casos sin fricción, y para aquellos casos en los que se incluyó un coeficiente de fricción $\mu = 0,05$, mostrados en la tabla 4.2.25, donde se observa que la fricción apenas a los valores de las tensiones.

En la figura 4.2.2 se muestra la huella de contacto para la posición número veintiuno del modelo SCR. Se ven sólo dos huellas de contacto, lo cual se encuentra acorde con el grado de recubrimiento asociado a los engranajes SCR, que como máximo tienen dos pares de dientes en contacto. En dicha

Tabla 4.2.24: Valores de radios de cabeza límite y reales del modelo SCR para condición de interferencia

<i>Engranaje</i>	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	36,31	33,12
Rueda	74,74	73,75

Tabla 4.2.25: Valores máximos tensionales para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	1435,70	1313,09	2662,73	508,50	4151,69
Con Fricción $\mu = 0,05$	1417,86	1327,27	2718,7	526,64	471,59

figura se observa pues, que en el tercer diente termina el contacto cerca de la cabeza del diente con una huella de poca intensidad, mientras que en el diente central la huella está distribuida uniformemente en la cara del diente con unos valores tensionales superiores (se muestra una mayor intensidad en el color de la huella).

4.2.3. Modelo de engranaje HCR con módulo reducido del diseño B

Los parámetros considerados para el modelo HCR con módulo reducido se muestran en la tabla 4.2.26.

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

Aplicando las ecuaciones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 y 4.1.8, se obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 4.2.27, siendo el grado de recubrimiento de 2,23, lo cual responde a un diseño HCR donde a lo largo del engrane hay entre dos y tres pares de dientes en contacto.

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Se aplicaron las ecuaciones 4.1.9 y 4.1.10 conforme se realizó en todos los modelos anteriores. Los resultados obtenidos quedan recogidos en la tabla 4.2.28, confirmándose analíticamente que no existe problemas de interferencia en el modelo HCR generado.

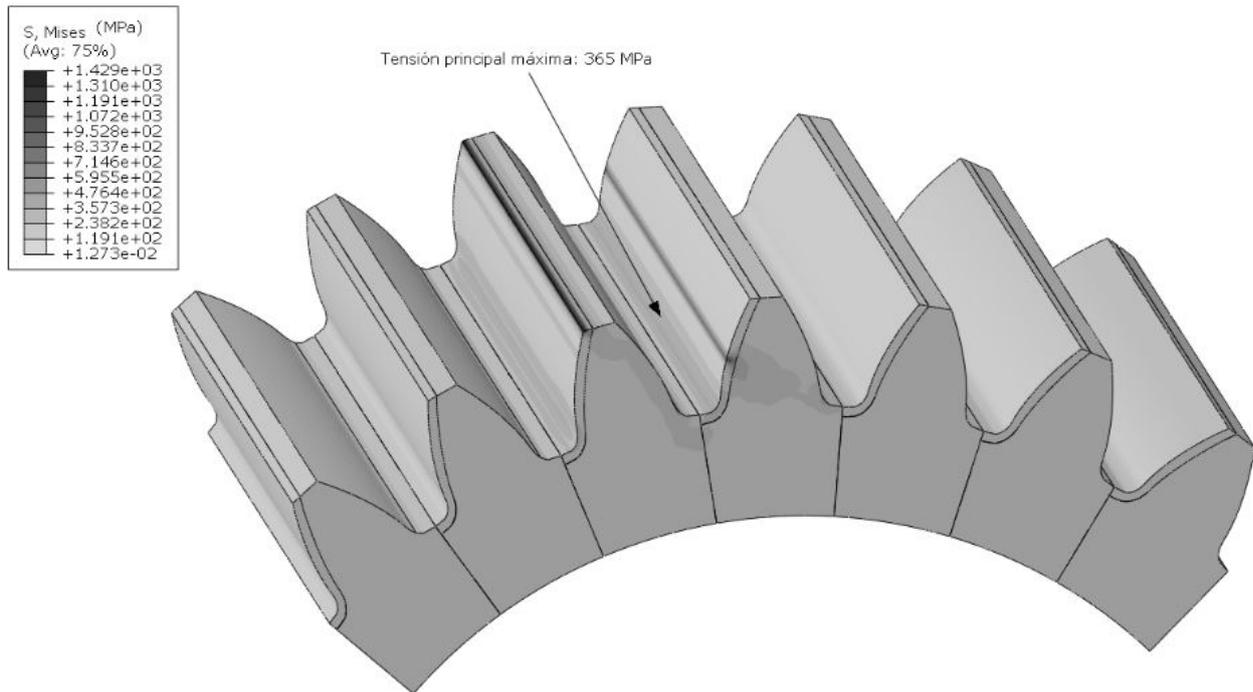


Figura 4.2.2: Figura de engranaje SCR en Abaqus con la huella de contacto

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

En la tabla 4.2.29 quedan recogidos los valores máximos de las tensiones para los casos en los que no se consideró el efecto de la fricción, y para aquellos casos en los que se incluyó un coeficiente de fricción $\mu = 0,05$.

Tal y como ocurría para el modelo HCR con m reducido, se observa en la tabla 4.2.29 que la fricción apenas influye en los resultados de las distintas tensiones analizadas.

En la figura 4.2.3 se ven las tres huellas de contacto que ocurren en la posición veintiuna del TCA. En el tercer diente acaba contacto en la cabeza, mientras que en el diente central se observa una distribución homogénea a lo largo de la cara del diente conforme al comportamiento habitual de dientes rectos, mientras que en el quinto diente el engrane está comenzando.

4.2.4. Comparativa de las tensiones en los tres modelos del diseño B

En la tabla 4.2.30 se muestran los valores máximos de las cuarenta y una posiciones de los modelos HCR, SCR y HCR con m reducido sin fricción de la tensión de Von Mises, principal máxima en la base del piñón y rueda, así como de la presión de contacto en la superficie del diente.

Comparando los valores de tensiones mostrados en la tabla 4.2.30 de los dos modelos HCR

Tabla 4.2.26: Datos geométricos para el modelo de engranaje HCR con módulo reducido del diseño B

VARIABLES	Valores
Módulo, m (mm)	2,0
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	27
Nº de dientes de la rueda, N_2	64
Coefficiente de Addendum, a	1,35
Coefficiente de Dedendum, d	1,69
Coefficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,08
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	-0,447
Distancia entre centros, C (mm)	90,39
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	739780

Tabla 4.2.27: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo HCR de módulo reducido del diseño B

VARIABLES	Valores
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	27
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	64
Ángulo de presión, α ($^\circ$)	18,91
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	25,37
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	60,14
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	29,86
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	65,81
Grado de recubrimiento, ε	2,23

expresados como un porcentaje de variación respecto a los valores correspondientes del modelo SCR, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 4.2.31.

Se observa que las tensiones máximas de Von Mises tanto del piñón como de la rueda en los dos modelos HCR difieren entre sí en torno a 15,33% y 16,62% respectivamente, siendo los valores de tensión de Von Mises del modelo HCR inferiores a las correspondientes al modelo de módulo reducido, como era de esperar. Además, en el caso de la tensión en el piñón el valor obtenido para el modelo HCR de m reducido es equiparable al que se obtiene para el modelo SCR, sin embargo, para la rueda el modelo SCR tiene un valor de tensión de Von Mises superior a los obtenidos para

Tabla 4.2.28: Valores de radios de cabeza límite y reales del modelo HCR con m reducido para condición de interferencia

<i>Engranaje</i>	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	33,97	29,86
Rueda	67,69	65,81

Tabla 4.2.29: Valores máximos tensionales del modelo HCR con m reducido para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	1172,25	1333,21	1616,08	502,12	534,35
Con Fricción $\mu = 0,05$	1190,98	1351,91	1629,21	489,88	543,79

los dos modelos HCR.

Las presiones máximas de contacto de los modelos HCR tienen valores considerablemente inferiores respecto al modelo SCR, lo cual es lógico dado que en los engranajes HCR las cargas se reparten para dos o tres superficies de contacto, mientras que para el engranaje SCR el contacto se produce entre una o dos superficies como máximo. Por lo tanto, el modelo SCR tiene presiones de contacto superiores en un 39,3% respecto al modelo HCR de m reducido, y en 49,03% en comparación con el modelo HCR de igual módulo.

Respecto a las tensiones principales máximas de flexión en la base del diente y conforme ocurría en los casos del diseño A, en los dos modelos HCR las tensiones de flexión en el piñón son algo superiores a las obtenidas para la rueda. Por otro lado, al reducir el módulo para el modelo HCR, se consigue aumentar la tensiones en aproximadamente un 20% tanto para la rueda como el piñón en comparación con el modelo inicial HCR, con el objetivo de aproximarse a los valores de tensiones

Tabla 4.2.30: Valores máximos tensionales de los modelos HCR, SCR y HCR con m reducido para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
HCR	933,59	1131,5	1357,26	400,47	439,29
SCR	1435,7	1313,09	2662,73	508,49	451,69
HCR m reducido	1172,25	1333,21	1616,09	502,12	534,35

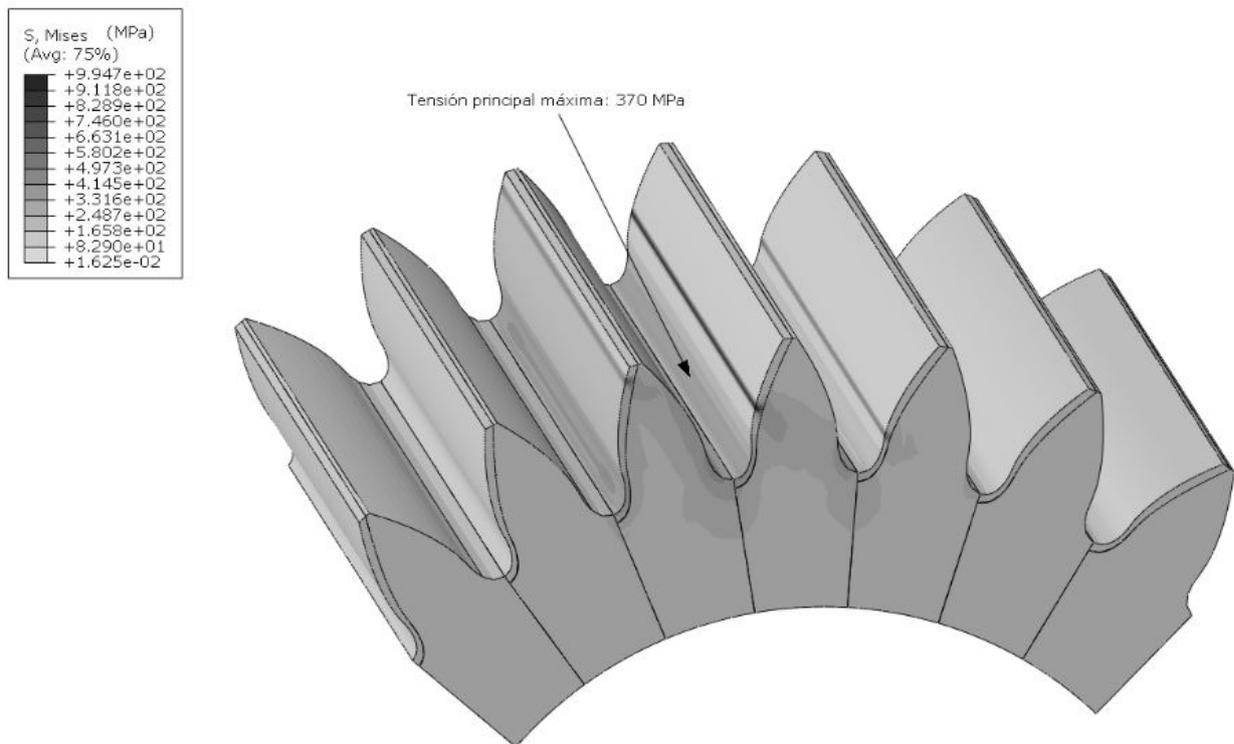


Figura 4.2.3: Figura de engranaje HCR con módulo reducido en Abaqus con la huella del contacto correspondientes al modelo SCR, lo cual sólo se consigue para la tensión máxima principal de la rueda.

Tabla 4.2.31: Variación porcentual de las tensiones máximas de los modelos de engranaje HCR, SCR y HCR con m reducido del diseño B para las cuarenta y una posiciones de contacto

Variación en %	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
Valor HCR en % del valor SCR	-34,97 %	-13,83 %	-49,03 %	-21,24 %	-2,75 %
Valor HCR reducido en % del valor SCR	-18,35 %	+1,5 %	-39,3 %	-1,25 %	+18,3 %

En la figura 4.2.4 se observa la distribución de la tensión de Von Mises en la rueda para las cuarenta y una posiciones de contacto. Los valores de la tensión de Von Mises para el modelo HCR se encuentran en la mayoría de las posiciones por debajo de los valores mostrados para el modelo SCR, para el cual existen dos picos tensión muy acentuados en las posiciones 6 y 26, debido a que en dichas posiciones sólo existe un par de dientes en contacto.

Las tensiones de Von Mises del piñón se muestran en la figura 4.2.5, y se observa que para el modelo HCR de módulo reducido se obtienen valores para la tensión cercanos a los valores que se muestran para el modelo SCR a lo largo de las distintas posiciones, mientras que para el modelo HCR los valores se encuentran en una gran parte de las posiciones por debajo de los valores del modelo estándar. Sin embargo, sobre todo para el modelo HCR con m reducido las tensiones muestran picos bastante acentuados al pasar de una posición, aunque menos pronunciados que los dos picos de tensión mostrados del modelo SCR en las posiciones 20 y 40.

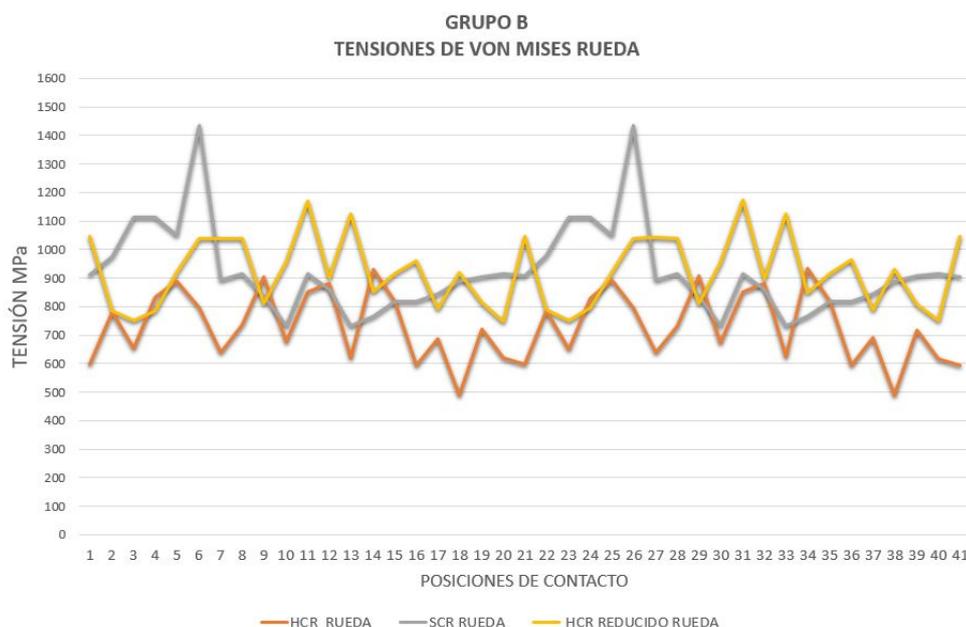


Figura 4.2.4: Tensiones de Von Mises en rueda para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño B

La gráfica 4.2.6 muestra la presión de contacto de los tres modelos del diseño B. Se observa que durante gran parte de las cuarenta y una posiciones los valores de presión de contacto para el modelo HCR se encuentran por debajo de los valores obtenidos para los dos modelos. Comparando esta curva con la correspondiente al modelo HCR de m reducido, la forma de distribución de las presiones es bastante parecida pero con valores superiores respecto a los correspondientes al diseño HCR, y con más picos de tensiones entre una posición y otra. En cuanto a la curva del modelo SCR, se muestran dos picos muy acentuados en las posiciones 6 y 40 debido a la existencia de un sólo par de dientes en contacto.

En las figuras 4.2.7 y 4.2.8 se muestra la evolución a lo largo de las posiciones de contacto de la tensión de flexión máxima en la base del diente. Las tensiones tanto del piñón como de la rueda de los dos modelos HCR tienen una curva de las tensiones similar a lo largo de todas las posiciones tal y como ocurría en los casos del diseño A, con la diferencia de que los valores mostrados para

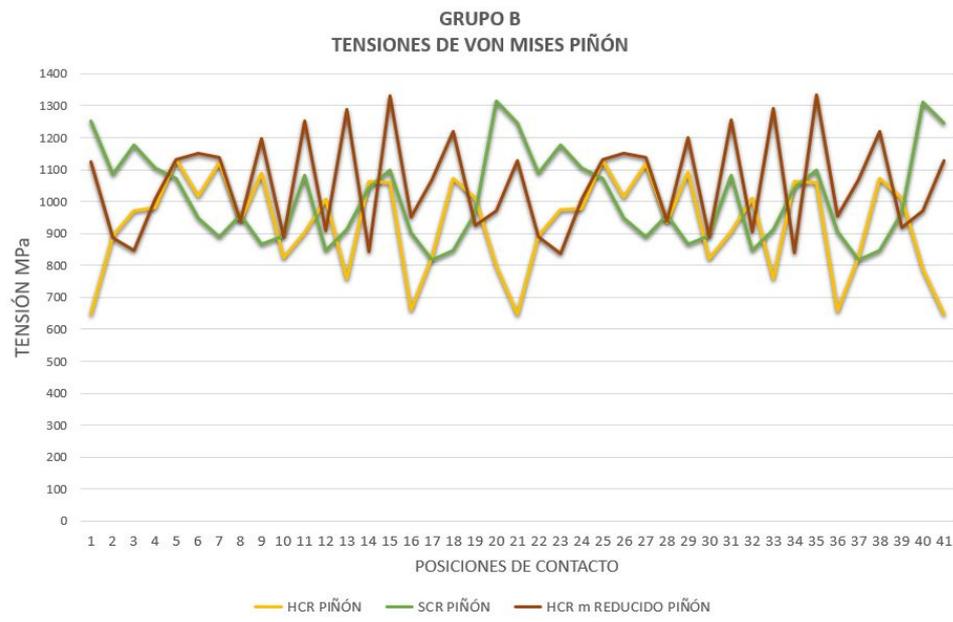


Figura 4.2.5: Tensiones de Von Mises en piñón para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño B

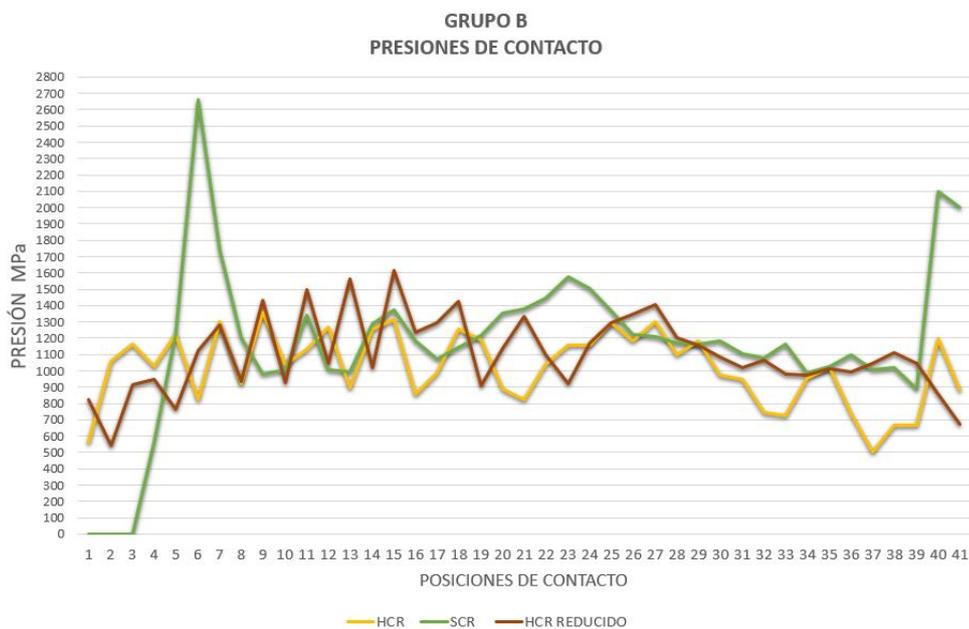


Figura 4.2.6: Presiones de contacto para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño B

el modelo HCR de m reducido se encuentran por encima de los valores mostrados para el modelo HCR. Se observa que para el modelo SCR existen picos que distorsionan la continuidad de la curva, tanto en el piñón como en la rueda.

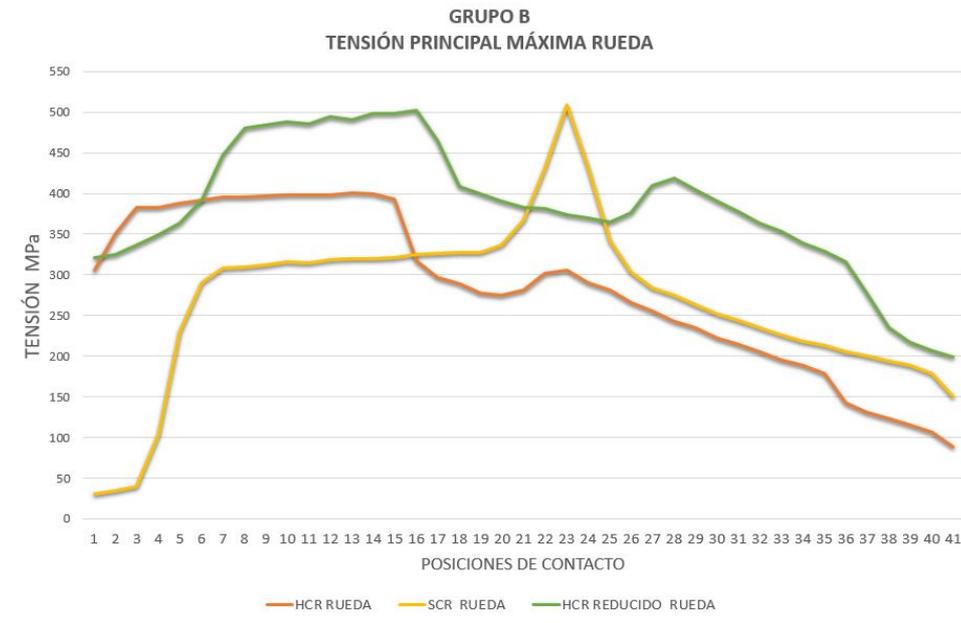


Figura 4.2.7: Tensión máxima principal por esfuerzos de flexión en la base del diente de la rueda para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño B

4.2.5. Comparativa de la energía disipada para los modelos con fricción del diseño B

Conforme se hizo para el diseño A, se registra en la tabla 4.2.32 la energía disipada para cada modelo de engranaje.

Tabla 4.2.32: Disipación de energía máxima de los modelos HCR, SCR y HCR reducido del diseño B

Modelo	Energía (J)
HCR	2300,52
SCR	1926,59
HCR m reducido	2503,08

De los valores de la tabla 4.2.32 se extrae que la energía disipada de los dos modelos HCR se encuentra por encima de la energía correspondiente al modelo SCR. A diferencia de los valores



Figura 4.2.8: Tensión máxima principal por esfuerzos de flexión en la base del diente del piñón para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño B

obtenidos para los modelos HCR del diseño A, la energía disipada acumulada para el modelo con módulo reducido es superior, y esto es debido a que el grado de recubrimiento del modelo HCR con m reducido es 2,23, superior al valor obtenido para el modelo HCR que fue de 2,15.

4.3. Casos del diseño C

4.3.1. Modelo de engranaje HCR del diseño C

Para la obtención de dicho modelo se siguió el mismo procedimiento que para todos los casos de los diseños A y B, siendo los valores de los parámetros que generaron la geometría del modelo los recogidos en la tabla 4.3.33.

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

Con el objetivo de comprobar que efectivamente el valor del grado de recubrimiento daba valores por encima de dos, se llevó a cabo un análisis para este modelo conforme se hizo para los modelos de los diseños A y B.

Los resultados obtenidos a partir de las expresiones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 y 4.1.8 se muestran en la tabla 4.3.34, siendo el grado de recubrimiento de 2,11, y por lo tanto, el modelo respondía a un diseño HCR.

Tabla 4.3.33: Datos geométricos para el modelo HCR del diseño C

VARIABLES	Valores
Módulo, m (mm)	2
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	26
Nº de dientes de la rueda, N_2	76
Coefficiente de Addendum, a	1,35
Coefficiente de Dedendum, d	1,69
Coefficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,06
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	0,41
Distancia entre centros, C (mm)	103,04
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	609500

Tabla 4.3.34: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo HCR del diseño C

VARIABLES	Valores
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	26,00
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	76,00
Ángulo de presión, α ($^\circ$)	21,53
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	24,43
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	71,42
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	28,82
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	79,52
Grado de recubrimiento, ε	2,11

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Se emplearon nuevamente las ecuaciones 4.1.9 y 4.1.10 cuyos resultados se muestran en la tabla 4.3.35, de los que se observa que no existía problemas de interferencia en el modelo generado.

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

Procediendo del mismo modo que en los todos los casos anteriores, se recogen en la tabla 4.3.36 los valores máximos de las tensiones para los casos sin fricción, y para aquellos casos con coeficiente de fricción $\mu = 0,05$.

Tabla 4.3.35: Valores del radio de cabeza límite y real para comprobación de interferencias durante el engrane

<i>Engranaje</i>	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	32,65	28,82
Rueda	82,92	79,52

Tabla 4.3.36: Valores máximos tensionales para las cuarenta y una posiciones de contacto para el modelo HCR del diseño C

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	971,18	1176,35	1432,22	433,93	472,03
Con Fricción $\mu = 0,05$	991,66	1192,65	1451,39	421,17	479,69

Se observa en la tabla 4.3.36 que la fricción no ha alterado los resultados de las distintas tensiones analizadas.

En la figura 4.3.1 se ven sólo dos huellas de contacto que ocurren en la posición veintiuna del TCA, se tienen por tanto dos pares de dientes en contacto para esta posición (sería el mínimo número de pares de dientes que se encuentran en contacto según el grado de recubrimiento calculado anteriormente y la definición de engranajes HCR). En el diente central se observa una distribución homogénea a lo largo de la cara del diente, mientras que en el quinto diente se muestra un color menos intenso de la huella de contacto que explica el inicio del contacto.

4.3.2. Modelo de engranaje SCR del diseño C

Los criterios de generación de este modelo son los definidos para los diseños A y B. Los valores considerados para el modelo SCR se muestran en la tabla 4.3.37.

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

Se aplicaron las ecuaciones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 y 4.1.8 conforme se hizo en los casos anteriores. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.3.38 y se observa que el grado de recubrimiento es de 1,67, respondiendo así a un diseño SCR donde a lo largo del engrane hay entre uno y dos pares de dientes en contacto.

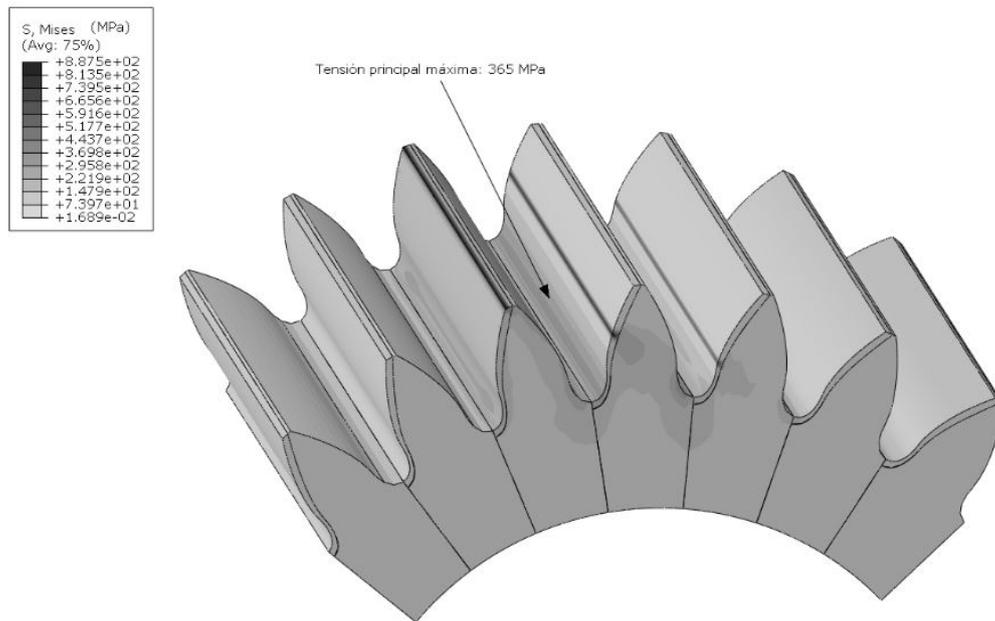


Figura 4.3.1: Figura de engranaje HCR en Abaqus con la huella del contacto

Tabla 4.3.37: Datos geométricos para modelo de engranaje SCR del diseño C

Variabes	Valores
Módulo, m (mm)	2
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	26
Nº de dientes de la rueda, N_2	76
Coefficiente de Addendum, a	1
Coefficiente de Dedendum, d	1,25
Coefficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,26
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	-0,26
Distancia entre centros, C (mm)	102
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	609500

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Aplicando las ecuaciones 4.1.9 y 4.1.10 en la tabla 4.3.39 se muestran los resultados obtenidos, extrayéndose de los mismos que no hay problemas de interferencia en el modelo SCR generado.

Tabla 4.3.38: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo SCR del diseño C

VARIABLES	Valores
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	26
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	76
Ángulo de presión, α ($^{\circ}$)	20
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	24,43
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	71,42
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	28,52
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	77,48
Grado de recubrimiento, ε	1,67

Tabla 4.3.39: Valores de radios de cabeza límite y reales del modelo SCR para la condición de interferencia

Engranaje	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	31,51	28,52
Rueda	78,19	77,48

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

Procediendo del mismo modo que en todos los casos anteriores, se calcularon las tensiones para los casos sin fricción y para los casos con un coeficiente de fricción $\mu = 0,05$. Los resultados que se obtuvieron se muestran en la tabla 4.3.40.

Tabla 4.3.40: Valores máximos tensionales para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	1692,24	1475,4	2636,75	514,05	454,81
Con Fricción $\mu = 0,05$	1650,53	1499,56	2674,06	531,05	473,98

Como en los casos anteriores se observa en la tabla 4.3.40 que la fricción apenas influye en los resultados de las tensiones analizadas.

En la figura 4.3.2 se muestra la huella de contacto para la posición número veintiuno del modelo SCR. En la misma se observa que en el diente tercero está terminando el contacto pues hay una huella lineal al comienzo de la cara del diente con un sombreado claro, por lo que la tensión no

es muy alta y el giro del piñón es contrario a las agujas del reloj (en terminología inglesa counter clockwise). En el diente central se ve una huella de contacto de mayor intensidad y repartida uniformemente a lo largo del ancho de la cara del diente.

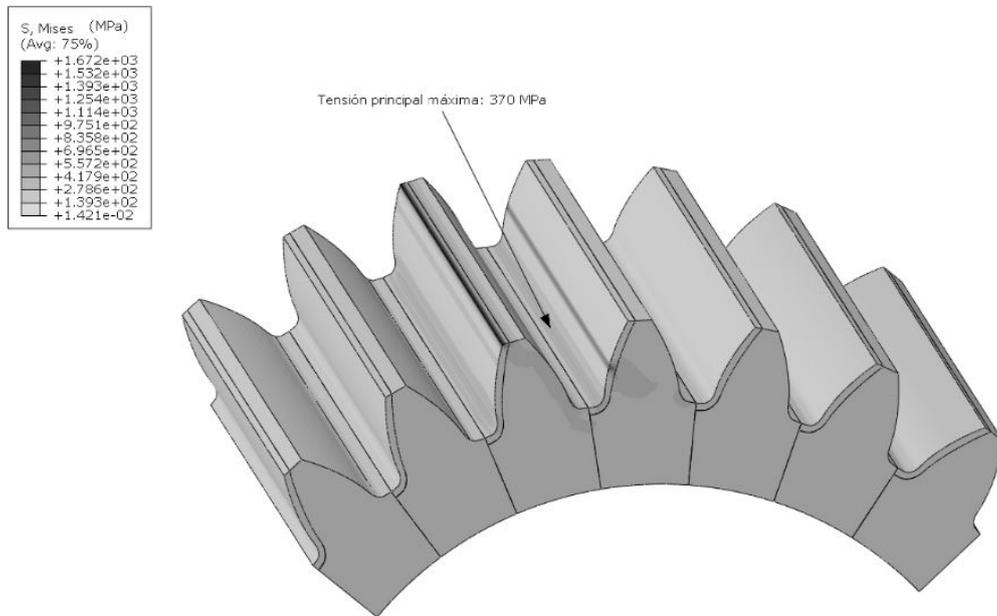


Figura 4.3.2: Figura de engranaje SCR en Abaqus con la huella de contacto

4.3.3. Modelo de engranaje HCR con módulo reducido del diseño C

Los valores de los parámetros para la generación del modelo HCR con módulo reducido se muestran en la tabla 4.3.41.

Comprobación analítica del grado de recubrimiento

Aplicando nuevamente las ecuaciones 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7 y 4.1.8 se obtuvieron los resultados mostrados en la tabla 4.3.42. Conforme se observa el grado de recubrimiento es 2,24, lo cual responde a un diseño HCR donde hay entre dos y tres pares de dientes en contacto a lo largo del engrane.

Análisis de interferencia entre piñón y rueda en operación

Se aplica la misma metodología que la empleada en los modelos HCR y SCR usando las ecuaciones 4.1.9 y 4.1.10. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.3.43, confirmándose que no existe problemas de interferencia en el modelo HCR generado.

Tabla 4.3.41: Datos geométricos para el modelo HCR con módulo reducido del diseño C

VARIABLES	Valores
Módulo, m (mm)	1,75
Ancho de la cara del diente, b (mm)	50
Ángulo de presión de herramienta, α_h ($^\circ$)	20
Nº de dientes del piñón, N_1	26
Nº de dientes de la rueda, N_2	76
Coefficiente de Addendum, a	1,35
Coefficiente de Dedendum, d	1,69
Coefficiente de desplazamiento de hta piñón, χ_1	0,06
Coefficiente de desplazamiento de hta rueda, χ_2	-0,52
Distancia entre centros, C (mm)	88,57
Par aplicado al piñón, T (N.mm)	609500

Tabla 4.3.42: Resultados de parámetros mediante procedimiento analítico del modelo HCR de módulo reducido del diseño C

VARIABLES	Valores
Radio primitivo del piñón, r_{p1} (mm)	22,75
Radio primitivo de la rueda, r_{p2} (mm)	66,5
Ángulo de presión, α ($^\circ$)	18,75
Radio base del piñón, r_{b1} (mm)	21,38
Radio base de la rueda, r_{b2} (mm)	62,49
Radio de cabeza del piñón, r_{a1} (mm)	25,22
Radio de cabeza de la rueda, r_{a2} (mm)	67,96
Grado de recubrimiento, ε	2,24

Resultados de las tensiones por análisis de elementos finitos

Del mismo modo que se hizo para los dos modelos anteriores, en la tabla 4.3.44 se muestran los valores máximos de las tensiones para los casos sin fricción, y para aquellos casos en los que se incluyó un coeficiente de fricción $\mu = 0,05$.

Conforme se observó de los resultados para el resto de los modelos estudiados, se deduce que la fricción apenas influye en los resultados de las distintas tensiones analizadas, tal y como se muestra en la tabla 4.3.44.

En la figura 4.3.3 se ven las tres huellas de contacto que tienen lugar en la posición veintiuna

Tabla 4.3.43: Valores de radios de cabeza límite y reales del modelo HCR con m reducido para condición de interferencia

<i>Engranaje</i>	r_{a-lim} (mm)	r_a (mm)
Piñón	28,80	25,22
Rueda	69,44	67,96

Tabla 4.3.44: Valores máximos tensionales del modelo HCR con m reducido para las cuarenta y una posiciones de contacto

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
Sin Fricción	1132,13	1457,63	1766,01	553,04	605,01
Con Fricción $\mu = 0,05$	1156,04	1478,17	1783,94	539,99	614,80

del TCA. En el tercer diente el contacto está terminando en la cabeza, mientras que en el diente central se observa una distribución homogénea a lo largo de la cara del diente. En el quinto diente el engrane está comenzando.

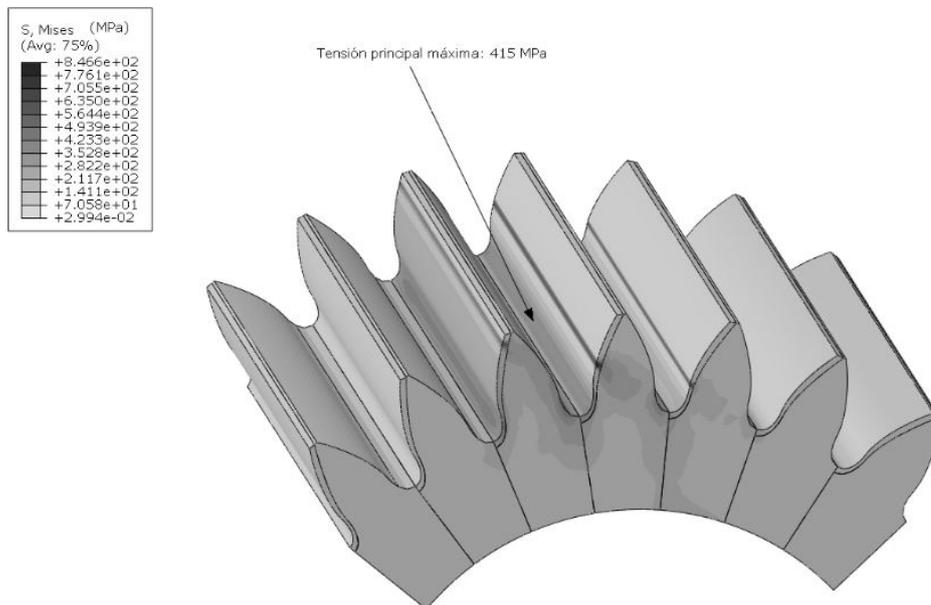


Figura 4.3.3: Figura de engranaje HCR con módulo reducido en Abaqus con la huella del contacto

4.3.4. Comparativa de las tensiones en los tres modelos del diseño C

En la tabla 4.3.45 se muestran los valores máximos de las cuarenta y una posiciones de los modelos HCR, SCR y HCR con m reducido para los casos sin fricción de la tensión de Von Mises, la tensión principal máxima en la base del piñón y rueda, así como la presión de contacto en la superficie del diente.

Tabla 4.3.45: Valores máximos tensionales de los modelos HCR, SCR y HCR con m reducido para las cuarenta y una posiciones de contacto del diseño C

Tensiones (MPa)	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
HCR	971,18	1176,35	1432,22	433,93	472,03
SCR	1692,24	1475,4	2636,75	514,05	454,81
HCR m reducido	1132,13	1457,63	1766,01	553,04	605,01

Comparando los valores de tensiones de los dos modelos HCR mostrados en la tabla 4.3.45 como un porcentaje de variación respecto a los valores del modelo SCR, se obtienen los resultados de la tabla 4.3.46. Se observa que las tensiones máximas de Von Mises de la rueda y el piñón con modelo HCR son considerablemente inferiores a las tensiones correspondientes a la rueda y el piñón con modelo SCR. Dicha variación viene dada en torno a un 42,6 % para la rueda, y un 20,26 % para el piñón. La tensión de Von Mises máxima del piñón con modelo HCR de m reducido se aproxima a la tensión máxima de Von Mises del piñón con modelo SCR, mientras que para la rueda tiene un valor inferior en un 33,1 % .

En el caso de las presiones de contacto las diferencias de los valores máximos entre los modelos HCR y SCR son considerables, siendo la presión máxima de contacto del modelo HCR inferior en un 45,7 % respecto al valor máximo de la presión correspondiente al modelo SCR. En cuanto al modelo HCR con m reducido la diferencia es de en un 33,02 % tal y como se muestra en la tabla 4.3.46.

En cuanto a los valores máximos obtenidos para tensiones principales de flexión, la tendencia es que los valores de los modelos HCR sean superiores al modelo SCR. Es un resultado aparentemente lógico dado que en los modelos HCR las alturas de diente son superiores comparadas con las correspondientes a los modelos SCR, y por tanto los momentos en la base del diente por flexión son superiores en los modelos HCR. Esta diferencia entre tensiones principal máxima de flexión se muestra más acentuada en el caso del piñón si se compara con los resultados tensionales obtenidos para la rueda.

En la figura 4.3.4 se observa la distribución de la tensión de Von Mises en la rueda y el piñón respectivamente para las cuarenta y una posiciones de contacto. Los valores de la tensión de Von

Tabla 4.3.46: Variación porcentual de las tensiones máximas de los modelos HCR, SCR y HCR con m reducido del diseño C

Variación en %	Von Mises Rueda	Von Mises Piñón	Press. Contacto	Principal máx. Rueda	Principal máx. Piñón
HCR % de SCR	-42,6 %	-20,26 %	-45,7 %	-15,58 %	3,78 %
HCR m reducido % de SCR	-33,1 %	-1,2 %	-33,02 %	7,58 %	33,02 %

Mises para el modelo HCR se encuentran por debajo de los valores mostrados para el modelo SCR en la mayoría de las posiciones, apareciendo en éste último dos saltos en la tensión muy acentuados en las posiciones 6 y 26 en el caso de la rueda, y en las posiciones 1,21 y 41 en el piñón. También hay que añadir que los valores obtenidos para el modelo HCR con módulo reducido se sitúan aproximadamente en el rango de los valores tensionales del modelo SCR, pero con constantes fluctuaciones de tensiones de una posición a otra.

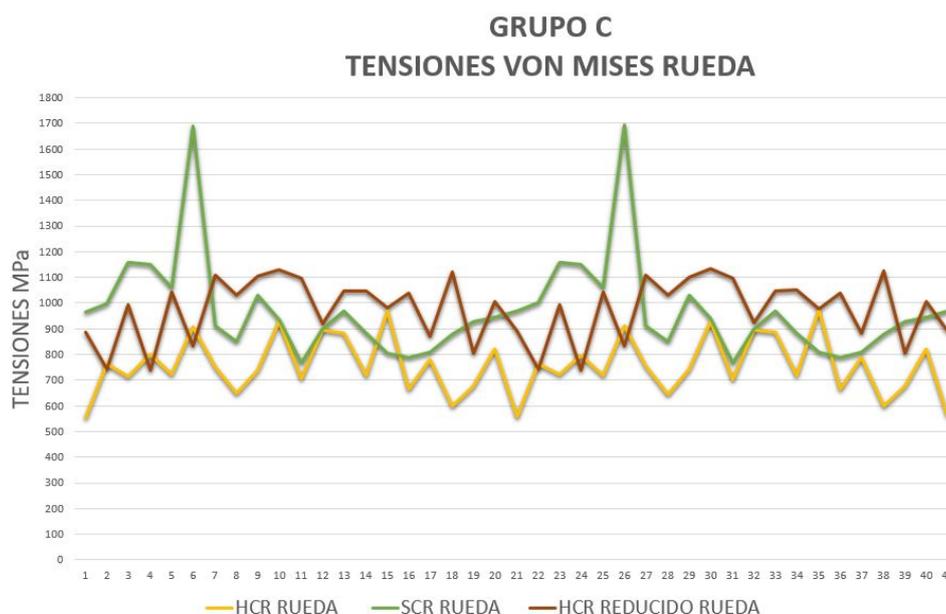


Figura 4.3.4: Tensiones de Von Mises en rueda para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño C

Al observar el patrón de la presión de contacto de los modelos pertenecientes al diseño C mostrado en la figura 4.3.6, se observa que en la mayoría de las cuarenta y una posiciones de contacto los valores de presión para el modelo HCR se encuentran por debajo de las tensiones de los otros dos modelos. Comparando la curva del modelo HCR con la correspondiente al modelo

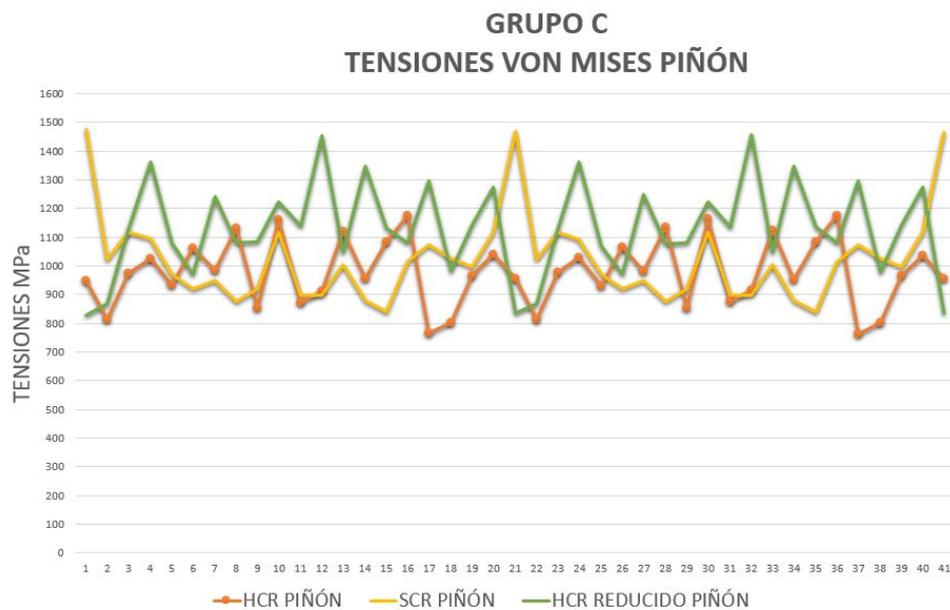


Figura 4.3.5: Tensiones de Von Mises en piñón para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño C

HCR de m reducido, se observa una distribución de las presiones bastante parecida pero con valores de presión superiores respecto al diseño HCR, y con fluctuaciones de tensiones más frecuentes de unas posiciones a otras si se compara con el modelo SCR. En cuanto a la curva correspondiente al modelo SCR muestra dos picos de tensiones en las posiciones 7 y 41, debidos a la existencia de un sólo par de dientes en contacto en esas dos posiciones.

En las figuras 4.3.7 y 4.3.8 se muestra la evolución de la tensión principal de flexión a lo largo de las posiciones de contacto en la rueda y el piñón. Se observa tanto en el piñón como en la rueda que los valores correspondientes a los dos modelos HCR tienen una evolución de la curva similar en cuanto a la forma a lo largo de las posiciones, pero los valores mostrados para el modelo HCR de m reducido se encuentran por encima de los valores mostrados para los otros dos modelos HCR y SCR. Por otro lado, se observa que las curvas correspondientes a los modelos HCR son bastante continuas y sólo tienen una pequeña caída de tensión que se debe a la existencia de tres pares de dientes en contacto, mientras que para el modelo SCR aparece un salto en la tensión que corresponde al momento en el que sólo existe un par de dientes en contacto.

4.3.5. Comparativa de la energía disipada para los modelos con fricción del diseño C

Conforme se hizo para los casos de los diseños anteriores se obtuvo la energía disipada acumulada, la cual se muestra en la tabla 4.3.47 para los tres modelos.

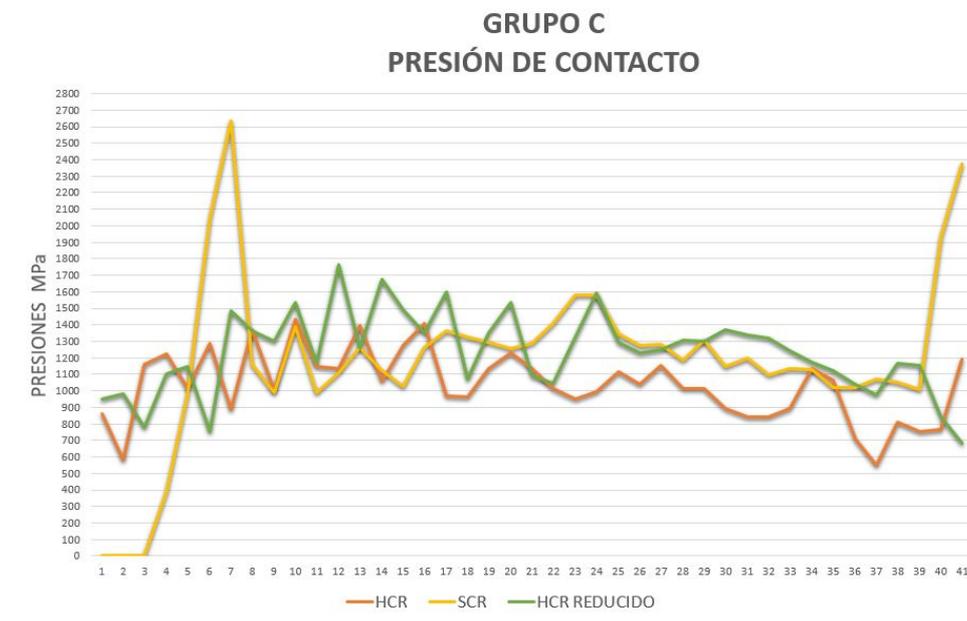


Figura 4.3.6: Presiones de contacto para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño C

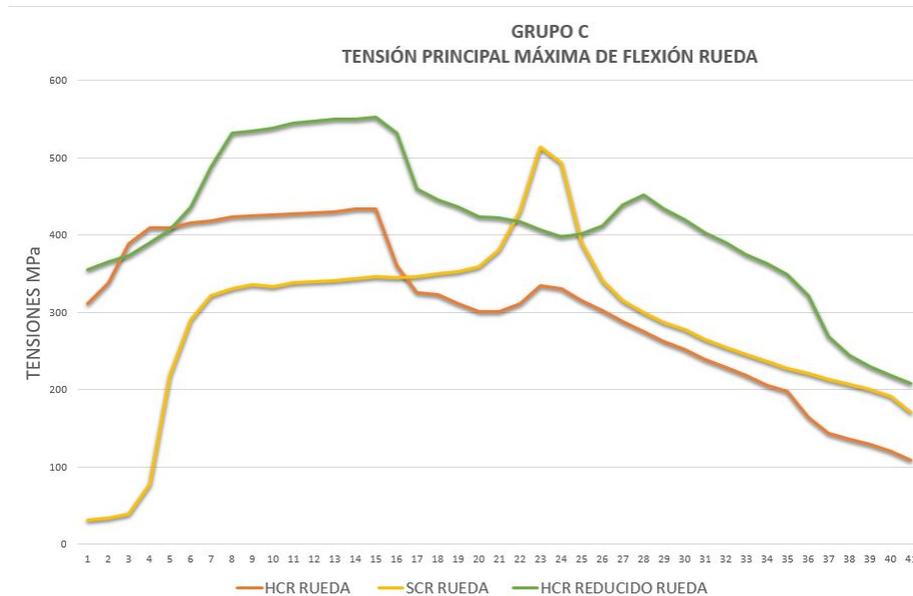


Figura 4.3.7: Tensión máxima principal por esfuerzos de flexión en la base del diente de la rueda para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño C

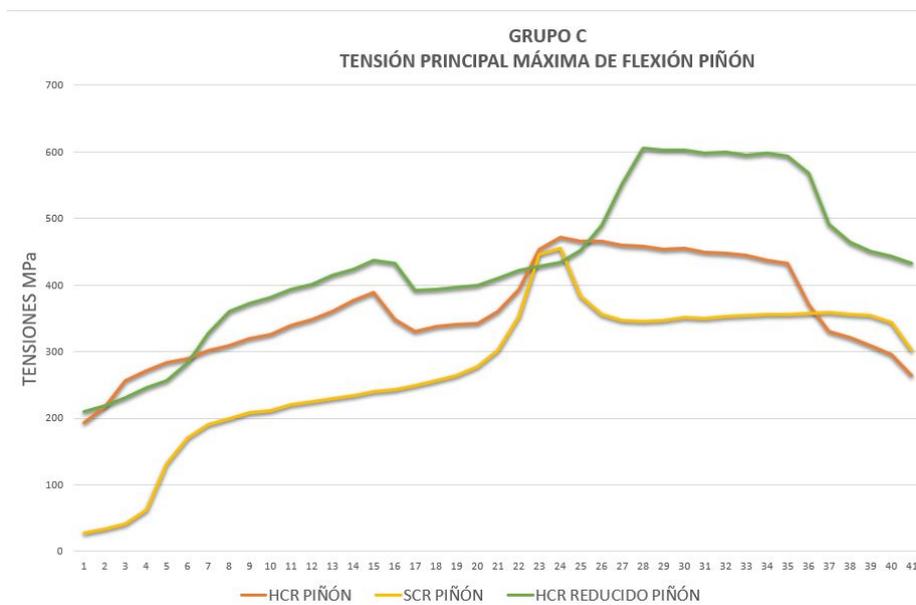


Figura 4.3.8: Tensión máxima principal por esfuerzos de flexión en la base del diente del piñón para modelos SCR, HCR y HCR con m reducido del diseño C

Tabla 4.3.47: Disipación de energía máxima acumulada para los tres modelos del diseño C

Modelo	Energía (J)
HCR	2010,92
SCR	1687,62
HCR m reducido	2160,25

Conforme ocurría en los otros dos diseños, se observa de la tabla 4.3.47 que la energía disipada para los dos modelos HCR se encuentra por encima de la obtenida para el modelo SCR. En el diseño C la energía disipada para el modelo HCR es inferior a la correspondiente al modelo HCR con m . Tal y como se indicó para los otros dos diseños A y B, este fenómeno puede ser debido a que el grado de recubrimiento en este caso es de 2,11 para el modelo HCR y 2,24 para el modelo HCR con m reducido, y por lo tanto, a mayor superficie en contacto a lo largo del tiempo de engrane, mayor energía disipada acumulada.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente Trabajo Fin de Grado se ha analizado el comportamiento tensional de modelos HCR de tres diseños de engranajes A, B, C para su comparación con modelos homólogos SCR, dado el potencial comercial de los engranajes HCR y las ventajas técnicas que pueden aportar a la industria automovilística. A continuación, se muestran las conclusiones del análisis efectuado:

- El valor máximo obtenido para la tensión de Von Mises para la rueda en los tres diseños alcanza su valor inferior en el modelo HCR seguido del modelo HCR con m reducido, y alcanzando un valor superior para el modelo SCR. Pese a que a partir del modelo HCR se disminuyó el tamaño del diente mediante una reducción del módulo para tratar de obtener los valores tensionales similares a los del modelo SCR, los valores correspondientes al modelo HCR seguían estando por debajo de su engranaje homólogo SCR entre un rango del -18% y -33% de los diseños B y C respectivamente.
- El valor máximo obtenido para la tensión de Von Mises para el piñón de modelo HCR es en los tres diseños inferior a los modelos SCR. Al reducir el módulo en todos los modelos HCR sí se logran tensiones cercanas a los valores obtenidos para los modelos SCR.
- Es en los valores máximos obtenidos para la presión de contacto de los tres diseños donde existe una mayor diferencia en $\%$ entre los modelos HCR y SCR. Aproximadamente en torno a un -33% y -39% para los HCR con m reducido y entre un -45% y -49% para los modelos HCR. La explicación a esta gran diferencia en los valores de las presiones es que en los modelos HCR se tiene como mínimo dos pares de dientes en contacto, mientras que en el modelo SCR hay momentos en los que sólo un par de dientes se encuentran en contacto, por lo que se debe repartir todos los esfuerzos derivados de la transmisión a menos superficies. Se observa además en los gráficos de la presión de contacto una transmisión más continuada y con menos fluctuaciones entre máximos y mínimos para las curvas asociadas a los modelos HCR, habiendo dos picos con un salto de tensión considerable para la transmisión del modelo

SCR.

- De las gráficas de la tensión máxima principal de flexión para los tres diseños se extrae que en la mayoría de las posiciones de contacto el valor de la misma para el modelo SCR se encuentra por debajo de los dos modelos HCR, más pronunciado este hecho en el piñón. Por otro lado, la curva de la tensión a lo largo de las distintas posiciones tiene forma similar para los dos modelos HCR en los tres diseños, siendo los valores asociados al modelo HCR con m reducido superiores. Además, para el modelo SCR aparece en todos los modelos un incremento pronunciado de la tensión que coincide con la posición en la que sólo un par de dientes están en contacto.
- La energía disipada acumulada correspondiente a los modelos SCR siempre era inferior que la obtenida para los dos modelos HCR, lo cual puede tener su explicación a que el grado de recubrimiento es inferior, y esto se traduce a que durante el engrane hay una menor superficie en contacto donde tiene lugar la fricción, y por lo tanto existe una menor área a través de la cual se pueda disipar la energía en forma de calor. Por otro lado, para los diseños B y C la energía disipada de los modelos HCR con m reducido era superior si se comparaba con la correspondiente a los modelos HCR del diseño B y C, lo cual iba en consonancia a que el grado de recubrimiento de los primeros era superior a los segundos. En el diseño A ocurría todo lo contrario, pues el grado de recubrimiento fue superior para el modelo HCR, y se obtuvo por tanto una mayor energía disipada en este modelo comparada con la obtenida para el modelo HCR de m reducido.
- Para la obtención analítica del modelo HCR se establece como condición mínima para que exista un grado de recubrimiento mayor o igual a dos, que la longitud del engrane sea mayor o igual a dos veces al paso base. Mediante dicha condición era posible obtener el coeficiente de addendum mínimo para definir la geometría del diente a partir de unos parámetros de entrada dados como el número de dientes de la rueda y el piñón, el ángulo de presión de herramienta, un módulo estándar y los coeficientes de desplazamiento de herramientas.
- Sólo para el diseño A se comprobó el efecto de rebaje de cabeza del diente en las tensiones. Se dedujo que dicho rebaje no producía efecto alguno en el valore de la tensión de Von Mises, la presión de contacto y las tensiones principales máximas. Sin embargo, dicho rebaje produce mejoras en los errores de transmisión, de manera tal que dentro de unos límites para el rebaje calculados analíticamente se tiene que a mayor rebaje de cabeza menor es el error de transmisión.
- Se analizó el efecto de la fricción mediante el uso de un coeficiente de rozamiento $\mu = 0,05$ en las tensiones de los modelos HCR, SCR y HCR de m reducido en los tres diseños A, B y C, y se observó que apenas había variación en los resultados con y sin fricción para las tensiones

de Von Mises, las presiones de contacto y tensiones de flexión principales máximas de ambas ruedas dentadas.

Bibliografía

- [1] Charles D. Schultz High Contact Ratio Gearing: a technology ready for implementation, *Power Transmission Engineering*, pp. 60-68, April 2015.
- [2] M. Rackov, M. Veres, Z. Kanovic, S. Kuzmanovic, HCR gearing and optimization of its geometry, *Advanced Materials Research*, pp. 117-132, Vol. 633 (2013) .
- [3] I. González-Pérez, A. Fuentes-Aznar, Implementation of a Finite Element Model for Gear Stress Analysis Based on Tie-Surface Constraints and its Validation through the Hertz's theory, *Journal of Mechanical Design, Transaction of the Asme*, Vol. 140, February 2018.
- [4] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., ABAQUS/Standard User's Manual, 1080 Main Street, Pawtucket, RI 02860-4847, 1998.
- [5] A. Fuentes-Aznar, Project-based Learning IGD, Tutorial 1, March 2018.
- [6] Neil E. Anderson, Sturat H. Loewenthal, Efficiency of Nonstandard and High Contact Ratio Involute Spur Gears, *American Society of Mechanical Engineers, Cambridge*, October 1984.
- [7] I. Gonzalez, Diseño, Simulación del engrane, estudio del contacto y análisis tensional de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales de bajo ruido y contacto mejorado, *Departamento de Ingeniería Mecánica, UPCT*, 2003.