



Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

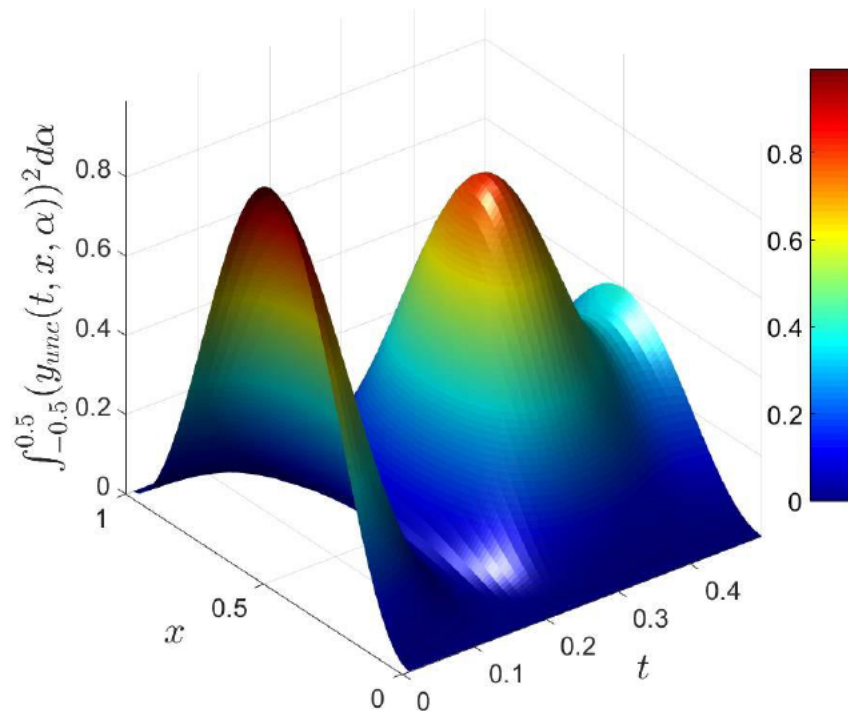


Universidad  
Politécnica  
de Cartagena

Campus  
de Excelencia  
Internacional

## *Control of Vibrating Systems with Random Input Data: a Numerical Study*

*Industrial Technologies PhD Program*



*Author: Francisco Javier Marín Marín*

*Directors: Francisco Periago Esparza  
Jesús Martínez Frutos*

*Cartagena (2018)*





Universidad  
Politécnica  
de Cartagena | Campus  
de Excelencia  
Internacional

*Control of Vibrating Systems with  
Random Input Data: a Numerical Study*

*Industrial Technologies PhD Program*

*Author: Francisco Javier Marín Marín*

*Director: Francisco Periago Esparza*

*Co-director: Jesús Martínez Frutos*

*Cartagena (2018)*





**CONFORMIDAD DE SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN DE DEPÓSITO DE  
TESIS DOCTORAL POR EL/LA DIRECTOR/A DE LA TESIS**

D. FRANCISCO PERIAGO ESPARZA, Director, y D. JESÚS MARTÍNEZ FRUTOS, Codirector, de la Tesis doctoral CONTROL OF VIBRATING SYSTEMS WITH RANDOM INPUT DATA: A NUMERICAL STUDY

**INFORMAN:**

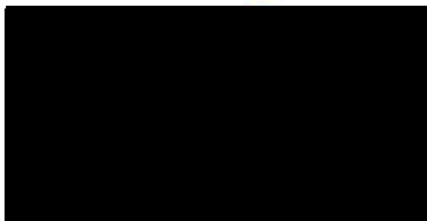
Que la referida Tesis Doctoral, ha sido realizada por D. FRANCISCO JAVIER MARÍN MARÍN, dentro del Programa de Doctorado TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES, dando nuestra conformidad para que sea presentada ante el Comité de Dirección de la Escuela Internacional de Doctorado para ser autorizado su depósito.

La rama de conocimiento en la que esta tesis ha sido desarrollada es:

- Ciencias
- Ciencias Sociales y Jurídicas
- Ingeniería y Arquitectura

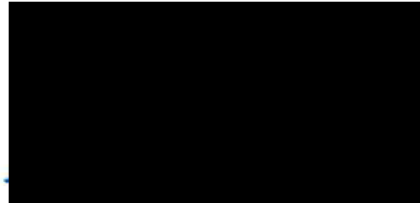
En Cartagena, a 18 de MAYO de 2018

EL DIRECTOR DE LA TESIS



Fdo.: FRANCISCO PERIAGO  
ESPARZA

EL CODIRECTOR DE LA TESIS



Fdo.: JESÚS MARTÍNEZ FRUTOS

**COMITÉ DE DIRECCIÓN ESCUELA INTERNACIONAL DE DOCTORADO**



**CONFORMIDAD DE DEPÓSITO DE TESIS DOCTORAL**  
**POR LA COMISIÓN ACADÉMICA DEL PROGRAMA**

D/D<sup>a</sup>. JUAN SUARDÍAZ MURO, Presidente/a de la Comisión Académica del Programa TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES.

**INFORMA:**

Que la Tesis Doctoral titulada, “CONTROL OF VIBRATING SYSTEMS WITH RANDOM INPUT DATA: A NUMERICAL STUDY”, ha sido realizada, dentro del mencionado Programa de Doctorado, por D. FRANCISCO JAVIER MARÍN MARÍN, bajo la dirección y supervisión del Dr. FRANCISCO PERIAGO ESPARZA y la codirección del Dr. JESÚS MARTÍNEZ FRUTOS.

En reunión de la Comisión Académica, visto que en la misma se acreditan los indicios de calidad correspondientes y la autorización del Director/a de la misma, se acordó dar la conformidad, con la finalidad de que sea autorizado su depósito por el Comité de Dirección de la Escuela Internacional de Doctorado.

La Rama de conocimiento por la que esta tesis ha sido desarrollada es:

- Ciencias
- Ciencias Sociales y Jurídicas
- Ingeniería y Arquitectura

En Cartagena, a 18 de MAYO de 2018

EL PRESIDENTE DE LA COMISIÓN ACADÉMICA

JUAN|  
SUARDIAZ|  
MURO

Firmado  
digitalmente por  
JUAN|SUARDIAZ|  
MURO

Fdo.: JUAN SUARDÍAZ MURO

**COMITÉ DE DIRECCIÓN ESCUELA INTERNACIONAL DE DOCTORADO**





## Agradecimientos

Resulta difícil reconocer en unas cuantas líneas la labor de todas las personas que me han apoyado y han contribuido a que consiga alcanzar la cima de esta nueva etapa académica. Por ello pido que si me olvido de mencionar a alguien, no lo tenga en consideración.

*En primer lugar, me gustaría reconocer la labor de esfuerzo y dedicación de mi director de tesis, Francisco Periago, y de mi codirector Jesús Martínez. Ambos me han transmitido sus conocimientos, tanto a nivel científico como personal, y gracias a ellos he desarrollado este trabajo de tesis.*

*I am also very grateful to professors Arnaud Münch and Nicolae Cîndea, for their kind treatment and dedication in my stay at University of Clermont-Auvergne. I do appreciate all the knowledge that imparted to me.*

*Asimismo, agradezco la acogida de los compañeros del Departamento de Matemática Aplicada y Estadística en la Universidad Politécnica de Cartagena, que me han hecho sentirme muy cómodo desde que comencé.*

*Por supuesto, no podría dejar sin citar a mis padres, a mi hermano, a mi abuela y al resto de mi familia, a mi novia, y a mis amigos y compañeros. No solo por la etapa del doctorado, sino por todos los años previos.*

Por último, decir que me ha sido posible llevar a cabo este trabajo gracias al contrato predoctoral 19744/FPI/15 de la Fundación Séneca, Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia.



# Resumen

Los sistemas físicos están modelados matemáticamente mediante ecuaciones, con unos parámetros que a menudo no se conocen de manera exacta, sino que están sujetos a incertidumbre. Esta incertidumbre puede deberse a diversos factores, tales como imprecisiones en la fabricación, en la medida, condiciones medioambientales, falta de conocimiento, etc.

El objetivo principal de esta tesis es analizar el efecto de la incertidumbre en los problemas de control óptimo de sistemas vibratorios que son modelados por ecuaciones en derivadas parciales. El caso determinista (sin incertidumbre) ha sido ampliamente analizado en la literatura; sin embargo, la presencia de incertidumbre solo se ha comenzado a tener en cuenta en los últimos años.

En particular, se pretende validar la extensión de los métodos de descenso empleados en los problemas de control óptimo deterministas al caso de control óptimo con incertidumbre. Para ello, se utilizan dos enfoques diferentes: control robusto y control de aversión al riesgo. El primero de ellos trata de reducir la media y la varianza de la variable de estado del problema de control en un tiempo final de control. El segundo de ellos plantea la reducción de la probabilidad de que los valores de dicha variable de estado superen un cierto valor umbral en el tiempo final de control.

El marco de trabajo propuesto abarca un amplio rango de las situaciones que se pueden dar en el problema de control óptimo bajo incertidumbre de sistemas vibratorios. En concreto, se trata de controlar las incertidumbres debidas a las variaciones cotidianas y a eventos extremos, las cuales pueden causar tanto mal rendimiento como pérdidas catastróficas.



# Abstract

Physical systems are mathematically modeled by means of equations, with some parameters which are often not exactly known but subject to uncertainty. This uncertainty may be related to various factors, such as inaccuracies in the fabrication, measuring process, environmental conditions, lack of knowledge, etc.

The main objective of this thesis is to analyze the effect of uncertainty in the optimal control problems of vibrating systems which are modeled by partial differential equations. The deterministic case (without uncertainty) has been broadly analyzed in the literature; however, the presence of uncertainty has only been taken into account in recent years.

In particular, the validation of the extension of the descent methods used in the deterministic optimal control problems to the case of optimal control with uncertainty is sought. Thus, two alternative approaches are considered: robust control and risk-averse control. The former tries to reduce the mean and variance of the state variable of the control problem at a final control time. The latter considers the reduction of the probability of the values of that state variable of exceeding a certain threshold value at the final control time.

The proposed framework addresses a wide range of scenarios which may appear in the problem of optimal control under uncertainty of vibrating systems. In particular, the aim is at controlling uncertainties due to everyday fluctuations and extreme events, which may cause both bad performance and catastrophic losses.



# Índice de Contenidos

<b>Resumen</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xv</b>
<b>Principales notaciones y definiciones</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de acrónimos y siglas</b>	<b>xxv</b>
<b>English version: Control of Vibrating Systems with Random Input Data: a Numerical Study</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Motivation . . . . .	3
1.2 Objectives . . . . .	4
1.3 Structure of the thesis . . . . .	5
1.4 Main contributions . . . . .	6
1.5 List of publications, conferences and stays . . . . .	6
1.5.1 Publications in scientific journals . . . . .	6
1.5.2 Book chapters . . . . .	7
1.5.3 Conferences . . . . .	7
1.5.4 Research stays . . . . .	7
<b>2 Setting of the robust and risk-averse control problems</b>	<b>9</b>
2.1 Introduction and state of the art . . . . .	9
2.2 Setting of the control problems . . . . .	10
2.2.1 State law . . . . .	10
2.2.2 Variational formulation of the state law . . . . .	11

2.2.3	Types of control . . . . .	11
2.2.3.1	Generic control . . . . .	12
2.2.3.2	Piezoelectric control . . . . .	12
2.2.4	Location of the uncertainty . . . . .	13
2.3	Optimal control problems . . . . .	14
2.3.1	Robust optimal control problem . . . . .	14
2.3.2	Risk-averse optimal control problem . . . . .	16
2.3.3	Comparison between robust and risk-averse formulations . . . . .	18
2.4	Summary and conclusions . . . . .	19
	References . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Uncertainty Quantification in control problems</b>	<b>23</b>
3.1	Introduction . . . . .	23
3.2	Numerical approximation of random fields . . . . .	24
3.2.1	Karhunen-Loève expansion . . . . .	24
3.2.2	Truncation of Karhunen-Loève expansion . . . . .	25
3.2.3	Transformation of the probability space . . . . .	26
3.2.4	Example of modeling of a random field . . . . .	27
3.3	Discretization on the random domain . . . . .	32
3.4	Summary and conclusions . . . . .	33
	References . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Numerical resolution of robust optimal control problems</b>	<b>35</b>
4.1	Introduction . . . . .	35
4.2	Robust optimal control problem . . . . .	36
4.3	Numerical resolution . . . . .	37
4.3.1	Explicit computation of the descent direction . . . . .	37
4.3.2	Computation of the step-size parameter . . . . .	39
4.3.3	Numerical approximation of statistical quantities of interest	40
4.3.3.1	Spatial discretization . . . . .	40
4.3.3.2	Time discretization . . . . .	43
4.3.3.3	Discretization on the random domain . . . . .	43
4.4	Numerical experiments . . . . .	47
4.4.1	Experiment 1: Uncertainty as a random variable . . . . .	48
4.4.1.1	Qualitative behavior of the control profiles . . . . .	50
4.4.2	Experiment 2: Uncertainty as a random field . . . . .	53
4.5	Summary and conclusions . . . . .	57
	References . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Numerical resolution of risk-averse control problems</b>	<b>59</b>
5.1	Introduction . . . . .	59



5.2	Risk-averse optimal control problem . . . . .	59
5.3	Numerical resolution . . . . .	60
5.3.1	Explicit computation of a descent direction . . . . .	62
5.3.2	Numerical approximation of the cost functional and its gradient . . . . .	63
5.4	Numerical experiments . . . . .	66
5.4.1	Exp. 1: Flexural rigidity modeled as a random variable . . .	66
5.4.2	Exp. 2: Flexural rigidity modeled as a random field . . . .	68
5.4.3	Uncertainty in the location of the piezoelectric actuator . .	70
5.5	Summary and conclusions . . . . .	74
	References . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Averaged controllability of the wave equation</b>	<b>77</b>
6.1	Introduction . . . . .	77
6.2	Setting of the problem . . . . .	77
6.3	Spectral method for the obtention of control of minimum norm . .	78
6.4	Numerical resolution . . . . .	79
	References . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Conclusions</b>	<b>81</b>
7.1	Summary of contents . . . . .	81
7.2	Conclusions of the thesis . . . . .	83
7.3	Future work . . . . .	83
	<b>Versión en español: Control de Sistemas Vibratorios con Datos de Entrada Aleatorios: un Estudio Numérico</b>	<b>85</b>
<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>87</b>
1.1	Motivación . . . . .	87
1.2	Objetivos . . . . .	88
1.3	Organización de la tesis . . . . .	89
1.4	Principales contribuciones . . . . .	90
1.5	Listado de publicaciones, congresos y estancias . . . . .	91
1.5.1	Publicaciones en revistas científicas . . . . .	91
1.5.2	Capítulos de libros . . . . .	91
1.5.3	Ponencias en congresos . . . . .	91
1.5.4	Estancias de investigación . . . . .	92
<b>2</b>	<b>Formulación de los problemas de control óptimo</b>	<b>93</b>
2.1	Introducción y estado del arte . . . . .	93

2.2	Formulación de los problemas de control . . . . .	94
2.2.1	Ecuación de estado . . . . .	94
2.2.2	Formulación variacional de la ecuación de estado . . . . .	95
2.2.3	Tipos de control . . . . .	96
2.2.3.1	Control genérico . . . . .	96
2.2.3.2	Control piezoeléctrico . . . . .	96
2.2.4	Localización de la incertidumbre . . . . .	97
2.3	Problemas de control óptimo . . . . .	98
2.3.1	Problema de control óptimo robusto . . . . .	98
2.3.2	Problema de control óptimo de aversión al riesgo . . . . .	100
2.3.3	Comparación de la formulación robusta y de aversión al riesgo . . . . .	102
2.4	Resumen y conclusiones . . . . .	104
	Referencias . . . . .	104
<b>3</b>	<b>Cuantificación de la Incertidumbre en problemas de control</b>	<b>107</b>
3.1	Introducción . . . . .	107
3.2	Aproximación numérica de campos aleatorios . . . . .	108
3.2.1	Expansión de Karhunen-Loève . . . . .	108
3.2.2	Truncamiento de la expansión de Karhunen-Loève . . . . .	110
3.2.3	Transformación del espacio de probabilidad . . . . .	110
3.2.4	Ejemplo de modelado de un campo aleatorio . . . . .	111
3.3	Discretización en el espacio probabilístico . . . . .	116
3.4	Resumen y conclusiones . . . . .	118
	Referencias . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Resolución numérica de problemas de control óptimo robusto</b>	<b>119</b>
4.1	Introducción . . . . .	119
4.2	El problema de control óptimo robusto . . . . .	120
4.3	Resolución numérica . . . . .	121
4.3.1	Cálculo explícito de la dirección de descenso . . . . .	122
4.3.2	Cálculo del tamaño de paso . . . . .	124
4.3.3	Aproximación numérica de las cantidades estadísticas de interés . . . . .	124
4.3.3.1	Discretización espacial . . . . .	124
4.3.3.2	Discretización en tiempo . . . . .	127
4.3.3.3	Discretización en el dominio aleatorio . . . . .	128
4.4	Experimentos numéricos . . . . .	132
4.4.1	Experimento 1: Incertidumbre en forma de una variable aleatoria . . . . .	133

---

4.4.1.1	Comportamiento cualitativo de los perfiles del control . . . . .	135
4.4.2	Experimento 2: Incertidumbre en forma de un campo aleatorio . . . . .	137
4.5	Resumen y conclusiones . . . . .	140
	Referencias . . . . .	142
<b>5</b>	<b>Resolución numérica del control de aversión al riesgo</b>	<b>145</b>
5.1	Introducción . . . . .	145
5.2	El problema de control óptimo de aversión al riesgo . . . . .	145
5.3	Resolución numérica . . . . .	147
5.3.1	Cálculo explícito de una dirección de descenso . . . . .	149
5.3.2	Aproximación numérica del funcional coste y su gradiente	149
5.4	Experimentos numéricos . . . . .	152
5.4.1	Exp. 1: Rigidez flexural modelada como una variable aleatoria . . . . .	153
5.4.2	Exp. 2: Rigidez flexural modelada como un campo aleatorio	154
5.4.3	Incertidumbre en la localización del actuador piezoeléctrico	157
5.5	Resumen y conclusiones . . . . .	159
	Referencias . . . . .	161
<b>6</b>	<b>Controlabilidad en promedio de la ecuación de ondas</b>	<b>163</b>
6.1	Introducción . . . . .	163
6.2	Planteamiento del problema . . . . .	163
6.3	Método espectral para la obtención del control de mínima norma .	164
6.4	Resolución numérica . . . . .	165
	Referencias . . . . .	166
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>167</b>
7.1	Resumen de contenidos . . . . .	167
7.2	Conclusiones de la tesis . . . . .	169
7.3	Perspectivas futuras . . . . .	169



# Índice de Figuras

<b>English version</b>	<b>1</b>
2.1 Piezoelectric problem: configuration of the problem. . . . .	13
2.2 Different scenarios in optimal control . . . . .	18
2.3 Difference between robustness and risk-aversion. . . . .	19
3.1 Uncertainty Quantification . . . . .	23
3.2 Covariance functions . . . . .	27
3.3 Normalized eigenfunctions of the random field . . . . .	30
3.4 Example of random realizations of the field . . . . .	31
4.1 Hermite shape functions . . . . .	41
4.2 Exp. 1 Robust: Setting of the problem . . . . .	48
4.3 Exp. 1 Robusto: Effect of the regularizing parameter and convergence history . . . . .	49
4.4 Exp. 1 Robust: Results with confidence intervals . . . . .	51
4.5 Exp. 1 Robust: Controls . . . . .	52
4.6 Exp. 1 Robust: Uncontrolled solution . . . . .	53
4.7 Rates of convergence . . . . .	55
4.8 Exp. 2 Robust: Results of controls and solution with confidence intervals . . . . .	56
5.1 Evolution of the PDF along the algorithm . . . . .	62
5.2 Exp. 1 Piezo: Probability distributions . . . . .	68
5.3 Exp. 1 Piezo: Controls . . . . .	69
5.4 Exp. 2 Piezo: Convergence of the Polynomial Chaos expansion . . . . .	70
5.5 Exp. 2 Piezo: Convergence history of the minimization algorithm . . . . .	70
5.6 Exp. 2 Piezo: Controls . . . . .	71
5.7 Exp. 3.1 Piezo: Controls and probability distributions . . . . .	72
5.8 Exp. 3.2 Piezo: Unconstrained control and probability distributions . . . . .	73
5.9 Exp. 3.2 Piezo: Constrained control and probability distributions . . . . .	73
5.10 Exp 3.2 Piezo: Approximation of Heaviside function and error committed . . . . .	74

<b>Versión en español</b>	<b>85</b>
2.1 Control piezoeléctrico: configuración del problema. . . . .	97
2.2 Distintos escenarios en control óptimo . . . . .	103
2.3 Diferencia entre robustez y aversión al riesgo. . . . .	103
3.1 Cuantificación de la incertidumbre . . . . .	108
3.2 Funciones de covarianza . . . . .	112
3.3 Autofunciones normalizadas del campo aleatorio . . . . .	114
3.4 Ejemplo de realizaciones aleatorias de un campo . . . . .	116
4.1 Funciones de forma de Hermite . . . . .	125
4.2 Exp. 1 Robusto: Configuración del problema . . . . .	132
4.3 Exp. 1 Robusto: Efecto del parámetro regularizante e historial de convergencia . . . . .	134
4.4 Exp. 1 Robusto: Resultados con intervalos de confianza . . . . .	136
4.5 Exp. 1 Robusto: Controles . . . . .	137
4.6 Exp. 1 Robusto: Solución no controlada . . . . .	138
4.8 Exp. 2 Robusto: Resultados de controles y solución con intervalos de confianza . . . . .	141
5.1 Evolución de la función de densidad de probabilidad . . . . .	147
5.2 Exp. 1 Piezo: Distribuciones de probabilidad . . . . .	154
5.3 Exp. 1 Piezo: Controles . . . . .	155
5.4 Exp. 2 Piezo: Convergencia de la expansión de Caos Polinomial . . . . .	156
5.5 Exp. 2 Piezo: Historial de convergencia del algoritmo . . . . .	156
5.6 Exp. 2 Piezo: Controles . . . . .	157
5.7 Exp. 3.1 Piezo: Controles y distribuciones de probabilidad . . . . .	158
5.8 Exp. 3.2 Piezo: Control sin restricciones y distribuciones de pro- babilidad . . . . .	160
5.9 Exp. 3.2 Piezo: Control con restricciones y distribuciones de pro- babilidad . . . . .	160
5.10 Exp 3.2 Piezo: Aproximación de la función de Heaviside y error cometido . . . . .	161

# Índice de Tablas

<b>English version</b>	<b>1</b>
4.1 Exp. 1 Robust: Summary of results . . . . .	50
4.2 Exp. 2 Robust: Peak indices . . . . .	54
4.3 Exp. 2 Robust: Summary of results . . . . .	55
5.1 Exp. 1 Piezo: Summary of results . . . . .	67
5.2 Exp. 2 Piezo: Summary of results . . . . .	70
5.3 Exp. 3.1 Piezo: Summary of results . . . . .	72
<b>Versión en español</b>	<b>85</b>
4.1 Exp. 1 Robusto: Resumen de resultados . . . . .	135
4.2 Exp. 2 Robusto: Índices máximos . . . . .	139
4.3 Exp. 2 Robusto: Resumen de resultados . . . . .	140
5.1 Exp. 1 Piezo: Resumen de resultados . . . . .	153
5.2 Exp. 2 Piezo: Resumen de resultados . . . . .	157
5.3 Exp. 3.1 Piezo: Resumen de resultados . . . . .	158





# Principales notaciones y definiciones

## Alfabeto latino

- $a$  rigidez flexural, 95  
flexural rigidity, 10
- $\mathcal{A}_g$  fórmula de cuadratura anisotrópica con vector de pesos  $g$ , 129  
anisotropic quadrature rule with vector of weights  $g$ , 45
- $b_n$  autofunciones, 109  
eigenfunctions, 24
- $\mathcal{B}(\Gamma)$   $\sigma$ -álgebra de Borel, 110  
 $\sigma$ -algebra of Borel, 26
- $C$  función de covarianza, 108  
covariance function, 24
- $D$  dominio espacial, 95  
spatial domain, 10
- $E$  módulo de Young, 95  
Young's modulus, 10
- $E_N$  error de varianza, 110  
variance error, 26
- $\bar{E}_N$  error de varianza promedio, 110

---

	mean variance error, 26
$f$	término de fuerzas, 95 force term, 10
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -álgebra de eventos, 95 $\sigma$ -algebra of events, 10
$F_h$	vector de fuerzas, 126 force vector, 42
$h$	tamaño de los elementos de la malla espacial, 124 size of the elements of the spatial mesh, 40
$H$	función de Heaviside, 101 Heaviside function, 17
$I$	momento de inercia, 95 inertial moment, 10
$I$	coste problema piezoeléctrico para cada evento aleatorio, 101 piezoelectric cost for each random event, 17
$J$	coste problema robusto, 99 cost of robust problem, 15
$J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}$	coste piezoeléctrico, 147 piezoelectric cost, 61
$K_h$	matriz de rigidez, 126 rigidity matrix, 42
$\ell$	nivel de cuadratura, 129 level of quadrature, 45
$\bar{\ell}$	nivel de la solución enriquecida, 131 level of the enriched solution, 46
$\ell_{opt}$	nivel de cuadratura óptimo para aproximar a la solución enriquecida, 131 optimal level of quadrature to approximate to the enriched solution, 46

---

$L_c$	longitud de correlación, 111 correlation length, 27
$L$	longitud de la viga, 95 length of the beam, 10
$\mathcal{L}$	Lagrangiano, 122 Lagrangian, 37
$m$	cota inferior del control, 96 lower bound of the control, 12
$M$	cota superior del control, 96 upper bound of the control, 12
$\mathcal{M}^1$	momento de primer orden, 130 first order moment, 45
$\mathcal{M}^2$	momento de segundo orden, 130 second order moment, 45
$M_h$	matriz de masas, 126 mass matrix, 42
$N$	número de direcciones estocásticas o número de variables aleatorias que intervienen en la expansión de KL, 110 number of stochastic directions or number of random variables involved in KL expansion, 25
$\mathcal{O}$	región donde actúa el control, 96 region where the control acts, 12
$p$	variable del sistema adjunto, 122 adjoint state variable, 37
$\mathbb{P}$	medida de probabilidad, 95 measure of probability, 10
$t$	variable temporal, 95 time variable, 10

---

$T$	tiempo de control, 95 control time, 10
$\mathcal{T}_h$	malla uniforme, 124 uniform mesh, 40
$u$	control, 96 control, 12
$\hat{u}$	error asociado al dispositivo de control piezoeléctrico, 96 error associated to the piezoelectric control device, 12
$\bar{u}$	dirección de descenso, 122 descent direction, 37
$\mathcal{U}_{ad,g}$	región admisible del control genérico, 96 admissible region of the generic control, 12
$\mathcal{U}_{ad,p}$	región admisible del control piezoeléctrico, 97 admissible region of the piezoelectric control, 13
$v$	control piezoeléctrico, 96 piezoelectric control, 12
$V$	espacio de Sobolev, 98 Sobolev space, 14
$V_h$	espacio de Sobolev aproximado, 124 approximated Sobolev space, 40
$x_0$	extremo inferior de $\mathcal{O}$ , 96 lower extreme of $\mathcal{O}$ , 12
$x_1$	extremo superior de $\mathcal{O}$ , 96 upper extreme of $\mathcal{O}$ , 12
$x$	variable espacial, 95 spatial variable, 10
$y_h$	aproximación de $y$ en la malla espacial, 127 approximation of $y$ at the spatial mesh, 42

---

$y_{unc}$	solución sin control, 135 uncontrolled solution, 51
$y^0$	condición inicial de desplazamiento, 95 displacement initial condition, 10
$y^1$	condición inicial de velocidad, 95 velocity initial condition, 10
$y$	desplazamiento de la viga, 95 beam displacement, 10
$y_{h,dt}$	$y$ aproximada en la malla espacial y temporal, 130 $y$ approximated at the spacial and time mesh, 45
$Y_n$	variables aleatorias no relacionadas por pares, 109 pairwise uncorrelated random variables, 25
$z$	parámetro finito dimensional, 110 finite dimensional parameter, 26

### Alfabeto griego

$\alpha$	parámetro de aproximación de Heaviside, 147 parameter for Heaviside approximation, 61
$\alpha_1$	parámetro de peso de la media de $y$ , 99 weight parameter for the mean of $y$ , 15
$\alpha_2$	parámetro de peso para la media de $\partial_t y$ , 99 weight parameter for the mean of $\partial_t y$ , 15
$\beta_1$	parámetro de peso del segundo momento de $y$ , 99 weight parameter for the second moment of $y$ , 15
$\beta_2$	parámetro de peso del segundo momento de $\partial_t y$ , 99

---

	weight parameter for the second moment of $\partial_t y$ , 15
$\gamma$	parámetro regularizante del control $u$ , 99 regularizing parameter for control $u$ , 15
$\Gamma_n$	espacio de imágenes, 110 space of images, 26
$\gamma_1$	parámetro regularizante del control $u$ , 101 regularizing parameter for control $u$ , 17
$\gamma_2$	parámetro regularizante de $\partial_t u$ , 101 regularizing parameter for $\partial_t u$ , 17
$\delta_{x_0}$	masa de Dirac en el punto $x_0$ , 96 Dirac mass at point $x_0$ , 12
$\delta_{x_1}$	masa de Dirac en el punto $x_1$ , 96 Dirac mass at point $x_1$ , 12
$\delta_1$	parámetro del método de Newmark, 127 parameter for the Newmark method, 43
$\delta_2$	parámetro del método de Newmark, 127 parameter for the Newmark method, 43
$\varepsilon$	valor umbral del coste piezoeléctrico, 101 threshold value for piezoelectric cost, 17
$\eta$	factor de localización del campo log-normal, 114 localization factor of log-normal field, 29
$\lambda_n$	autovalores, 109 eigenvalues, 24
$\lambda_k$	parámetro de tamaño de paso, 121 step size parameter, 37
$\xi$	factor de escala del campo log-normal, 114 scale factor of log-normal field, 29

---

$\rho$	densidad de probabilidad conjunta, 110 joint probability density, 26
$\phi_h$	funciones de forma, 125 shape functions, 40
$\omega$	variable aleatoria, 95 random variable, 10
$\Omega$	conjunto de realizaciones, 95 set of realizations, 10

## Números

$1_{\mathcal{O}}$	función característica de $\mathcal{O}$ , 96 characteristic function of $\mathcal{O}$ , 12
-------------------	---

## Otros símbolos

$\partial_x$	derivada c.r. a $x$ , 95 derivative w.r.t. $x$ , 10
$\partial_x^2$	derivada segunda c.r. a $x$ , 95 second derivative w.r.t. $x$ , 10
$\partial_t$	derivada c.r. a $t$ , 95 derivative w.r.t. $t$ , 10
$\partial_t^2$	derivada segunda c.r. a $t$ , 95 second derivative w.r.t. $t$ , 10





## Acrónimos y siglas

<b>Término</b>	<b>Significado</b>
Cap.	Capítulo
CE	Colocación Estocástica
CI	Cuantificación de la Incertidumbre
Cor.	Corolario
CP	Caos Polinomial
c.r.	Con respecto
c.s.	Casi seguro
c.t.p.	Casi en todas partes
EDO	Ecuación diferencial ordinaria
EDP	Ecuación en derivadas parciales
Exp.	Experimento
FDP	Función de densidad de probabilidad
i. e.	<i>Id est</i> (esto es)
i.i.d.	Independientes e idénticamente distribuidas
KL	Karhunen-Loève
MC	Monte Carlo
p.	Página
PCO	Problema de control óptimo
Sec.	Sección
std	Desviación estándar
Teor.	Teorema
var	Varianza

---

<b>Term</b>	<b>Meaning</b>
a.e.	Almost everywhere
a.s.	Almost sure
Chap.	Chapter
Cor.	Corollary
Exp.	Experiment
i. e.	<i>Id est</i> (this is)
i.i.d.	Independent and identically distributed
KL	Karhunen-Loève
MC	Monte Carlo
OCP	Optimal control problem
ODE	Ordinary differential equation
p.	Page
PC	Polynomial Chaos
PDE	Partial differential equation
PDF	Probability density function
Sec.	Section
SC	Stochastic Collocation
std	Standard deviation
Th.	Theorem
UQ	Uncertainty Quantification
var	Variance
w.r.t	With respect to

**English version:**  
**Control of Vibrating Systems with Random  
Input Data: a Numerical Study**



# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Motivation

Due to its important role in a wide variety of applications in Engineering, control of vibrations of flexible structures, such as membranes, beams, plates or shells has been a very active research field, giving rise to numerous works involving the mathematical modeling (in different versions: active, passive, piezoelectric control, etc.) and the implementation of control strategies.

An inherent fact, not only to this kind of vibrating systems, but in general to any physical system, is the presence of uncertainty in the input parameters. These uncertainties can be classified as epistemic and aleatory. The former are due to an incomplete knowledge of the system (data about the material properties, geometry of the structure, initial and/or boundary conditions, etc.) and, hence, they can be reduced by means of additional measurements or an improvement of the measure instruments. The latter are intrinsic to a system (for instance, the Uncertainty Principle in Quantum Mechanics), and they can not be reduced.

In the scientific literature, a great deal of information concerning both the control of vibrating systems with fixed input parameters (deterministic case) and the *Uncertainty Quantification* is found. In this thesis work, it is wanted to combine both parts, in order to deal with the control of vibrations of systems with random input parameters. Since those input parameters of the system equations are random, the solution of them is also going to depend on the random parameters. In essence, the vibrations to be controlled are random. This is an emergent research topic in recent years.

In optimal control theory, an objective or cost functional is defined. The question is how to formulate it in this random framework. Generally, a deterministic cost functional is considered, which contains some statistical quantities of interest, such as mean, variance, etc. (in short, integrals on the random domain), and

it is built from the deterministic version of the problem. This work aims at studying two kinds of problems, concerning their cost functionals: a *robust* optimal control problem (OCP) (which searches to reduce the mean and variance of the output data), and a *risk-averse* OCP (more restrictive, focused on decreasing the probability for the output data of exceeding a certain threshold value).

In this thesis, the control used is deterministic, and its structure depends on the device with which it is applied. In this manner, two cases are also posed: in the first one, the control is a generic function which depends on time and space, in a more academic framework, and allows to obtain a global vision of the problem; in the second one, the control is of piezoelectric type, which transforms electric energy into mechanical energy, a problem of interest in Engineering and for which there is technology available to implement it.

From the mathematical point of view, these control problems of random vibrations of systems modeled by PDEs have a great interest, presenting, at least, two noteworthy difficulties: (1) modeling of the uncertainty in the input parameters, which generally appears shaped like correlated random fields; and (2) computing of the statistical quantities included in the cost functionals, which are usually integrals on the random domain of certain magnitudes of the output data of the equations.

From the computational point of view, it is important to highlight that these problems often involve a significant computational burden, which has also influenced in that they have not been able to be studied up to the recent past. It deserves special attention to try to reduce the execution time of the minimization algorithms of these OCPs, which can be improved with techniques such as parallel computing and/or surrogate models.

As a result of the foregoing, it can be understood the great interest that this kind of OCPs of PDEs with random input data have, and the motivation to embark a thesis work which allows to comprehend them a bit better.

## 1.2 Objectives

Driven by the study of control problems of piezoelectric type, for beams and plates, the evolutionary Bernoulli-Euler beam equation is set as the model work. Notwithstanding, the techniques developed in this thesis can be applied to other evolutionary PDEs of second order in time, such as the wave equation, among others, without needing significant changes.

The objectives can be summarized in the following items:

1. Formulate the robust optimal control problem, including in the cost functional the mean and variance of the state variables at a final control time.

2. Formulate the risk-averse control problem. In the cost functional, the probability of the values of the state variables of exceeding a threshold value is incorporated. A piezoelectric control is used.
3. Model accurately the uncertainty in the input parameters, with Karhunen-Loève (KL) expansion in case of correlated random fields.
4. Select the suitable tools to solve integrals on the random domain: Stochastic Collocation (SC), Galerkin or Polynomial Chaos (PC), Monte Carlo (MC), or a combination of them.
5. Adapt the known descent algorithms of the OCPs with deterministic PDEs to these problems with stochastic PDEs.
6. Compare the results of the optimal controls in this random framework to the optimal controls of the deterministic version of the problems.

### 1.3 Structure of the thesis

In Chapter 2, a brief review on the state of the art of optimal control of PDEs with random parameters is presented. Then, the framework of the problem is set, and the cost functionals of the robust and risk-averse problems are formulated.

In Chapter 3, the numerical approximation of a random field by means of KL expansion is studied. Furthermore, the methods used to solve the integrals on the probabilistic domain are briefly described.

The following two Chapters (4 y 5) contain the main and original part of the thesis.

In Chapter 4, the first of the problems is developed, a robust control for the evolutionary equation of the Bernoulli-Euler beam. The cost functional includes the mean and the statistical second moment of the displacement and the velocity of the beam at a final control time. As the integrands of the integrals which appear in the cost functional are smooth with respect to the random parameter, SC methods may be applied to solve them very efficiently. In this case, a generic control is used, depending on time and space.

In Chapter 5, the second problem is detailed. It consists on a risk-averse control, also for the evolutionary equation of the Bernoulli-Euler beam. The cost functional includes the probability of the displacement and the velocity of the beam of exceeding a certain value at the final time. In this case, the cost functional is not smooth with respect to the random parameter. Because of that, firstly the solution is approximated by means of the PC method, and then, MC is applied on this approximated solution (mitigating in this way the huge computational cost which would result from applying MC directly on the initial PDE). The control used in this case is of piezoelectric type, a model with in real world-applications.

In Chapter 6, the averaged controllability (exact control) problem for the wave equation is introduced. The problem is set and the steps of the numerical resolution are enunciated.

Chapter 7 ends with a summary and the main conclusions achieved after completing this thesis work, and an overview on the ongoing and possible future works.

## 1.4 Main contributions

This PhD thesis aims at developing well suited algorithms for OCPs of vibrating systems under random input data.

The main contributions are summarized in the following items:

- Concerning the robust optimal control problem:
  1. Formulation of the problem for the Bernoulli-Euler beam equation with uncertainty in its input parameters.
  2. Validation of a descent algorithm for the resolution of the problem, with a SC method for the approximation of the integrals on the random domain.
- Regarding the risk-averse optimal control problem:
  1. Formulation of the problem for the evolutionary PDE of Bernoulli-Euler, with a piezoelectric control and uncertainty in its input data.
  2. Design of an adaptive descent algorithm for the resolution of the problem.
  3. Approximation of the integrals on the random domain with a combination of PC and MC.
- Comparative study of deterministic optimal controls to their probabilistic versions of robust and risk-averse controls, proving that in certain cases uncertainty should not be underestimated.

## 1.5 List of publications, conferences and stays

### *1.5.1 Publications in scientific journals*

- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Robust Averaged Control of Vibrations for the Bernoulli-Euler Beam Equation. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 174 (2), 428-454, 2017, ISSN: 1573-2878. <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1128-x>



- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** A Polynomial Chaos-based approach to risk-averse piezoelectric control of random vibrations of beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1-18, 2018. ISSN: 1097-0207. <https://doi.org/10.1002/nme.5823>

### ***1.5.2 Book chapters***

- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Control of Random PDEs: an Overview (Book Chapter). Special Issue SEMA SIMAI Springer Series, Springer, forthcoming, ISSN: 2199-3041.

### ***1.5.3 Conferences***

- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. VI International Conference in Optimization Theory and its Applications (ALEL2016), Cartagena (Spain), 6th-8th June, 2016.
- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Control of Random Vibrations. XXV Partial Differential Equations and Applications Conference and XV Applied Maths Conference (CEDYA+CMA 2017), Cartagena (Spain), 26th-30th June, 2017.
- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. Numerical Methods in Engineering Conference (CMN 2017), Valencia (Spain), 3rd-5th July, 2017.

### ***1.5.4 Research stays***

- **Université de Clermont-Auvergne.** Three-month research stay. Work under the supervision of professors Arnaud Münch and Nicolae Cîndea at the *Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal*, Clermont-Ferrand, France. 16th January - 20th April, 2017.



## Chapter 2

# Setting of the robust and risk-averse control problems

### 2.1 Introduction and state of the art

The topic of optimal control of systems with distributed parameters has aroused a significant interest over the last decades, giving rise to important scientific progresses. Most of the research in this field assumes that the input data of the system under consideration are perfectly known. However, this assumption is not realistic with respect to real-world applications. Indeed, in practice, input data of physical systems such as material properties, applied loads, boundary conditions and geometry are known only in an approximated way. Hence, they are affected by sources of uncertainty, which should be accounted for in more realistic mathematical models.

Among others, the two following approaches to deal with uncertainty in the optimal control problems are used:

- On the one hand, if there is not any a priori available information about uncertainty in the input data, with exception of an upper bound of their magnitudes, then an analysis of worst-case scenario may be used, which is formulated as a min-max optimization problem. The problem is that if the upper bound of the uncertain data is relatively large, the solution obtained will be typically too conservative, resulting in a poor performance of the system in consideration. An example of this case can be found in [2], in the framework of Structural Optimization.
- On the other hand, when there is statistical information about the uncertainty in the input data, it is natural to model the uncertainty using statistical tools, and to include some statistical quantities of interest in the cost functional.

The work in this thesis is focused on this latter case, where there is information about the uncertainty; in particular, it is assumed that the mean and spatial correlation (if there is) of the input data are known, which is something usual in this field, as it is explained in [1].

Concerning the state of the art of OCPs constrained by stochastic PDEs, it might be said that it is a topic which is relatively in its infancy, since the limited works about it have been published in the last decade. On the one hand, there have been published some works [4, 5, 7, 16] which deal with non-evolutionary, i. e., stationary, PDEs. In these papers, the problems are solved numerically by solving the associated optimality system (optimality conditions of first order). On the other hand, in [13] an evolutionary PDE of first order in time is presented, and it is the first time that a descent algorithm is used. In all the work previously mentioned, there is a *robust* cost functional, which aims at controlling the mean and variance of the state variables. There is not, however, any work with an evolutionary PDE of second order in time.

Regarding the presence of uncertainty in beams, there are the following works: in [3], uncertainty is placed at the geometry or at the boundary conditions; in [8], uncertainty is located at the material properties, the external loads and at the structural geometries; in [10], it is placed at the flexural and axial rigidity, the mass density and the foundation of the elastic modulus.

In this thesis, the evolutionary Bernoulli-Euler beam equation is chosen as a model, and all the study is focused on it; notwithstanding, the same techniques are suitable for other PDEs of second order in time, such as the wave equation, among others. The first work deals with using a robust cost functional for the model of the Bernoulli-Euler PDE. A risk-averse cost functional (which has its origin in the field of knowledge of Economy) has not been implemented so far to this kind of OCPs constrained by PDEs, that is why the second work of this thesis has as its objective to apply it in this field.

## 2.2 Setting of the control problems

### 2.2.1 State law

Let  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  be a probability space.  $\Omega$  denotes the set of outcomes,  $\mathcal{F}$  is the  $\sigma$ -algebra of events and  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  is a probability measure.

Under Bernoulli-Euler hypotheses, the small vibrations of a thin uniformed hinged beam, of length  $L$ , governed by a force term, are described by the system:

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) = f, & \text{in } (0, T) \times D \times \Omega \\ y(0) = \partial_x^2 y(0) = y(L) = \partial_x^2 y(L) = 0, & \text{on } (0, T) \times \Omega \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{in } D \times \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

where:

- It is assumed that the flexural rigidity  $a = EI$  depends on both  $x \in D = (0, L)$  and  $\omega \in \Omega$ , i.e.,  $a = a(x, \omega)$ . As usual,  $E$  denotes the Young's modulus, and  $I$  is the moment of inertia of the cross section.
- The random output  $y(t, x, \omega)$  represents the vertical displacement at time  $t$  of the particle of the central line which occupies the position  $x$ , being the displacement in the equilibrium position  $y = 0$ .
- The term  $f$  represents the force term.
- $\partial_t$  and  $\partial_t^2$  indicate first and second derivative with respect to  $t \in (0, T)$ , whereas  $\partial_x$  and  $\partial_x^2$  are first and second derivative w.r.t.  $x \in D$ , respectively.

### 2.2.2 Variational formulation of the state law

The partial differential equation (2.1) can be written in its weak or variational formulation. In order to conduct it, the following formal computations are performed: firstly, (2.1) is multiplied by a test function  $v(x)$  in both sides of the equation:

$$\partial_t^2 y v + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) v = f v. \quad (2.2)$$

Secondly, (2.2) is integrated on both random and spatial domains:

$$\int_{\Omega} \int_D \partial_t^2 y v dx d\mathbb{P}(\omega) + \int_{\Omega} \int_D \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) v dx d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \int_D f v dx d\mathbb{P}(\omega). \quad (2.3)$$

Eventually, integrating by parts twice with respect to  $x$  in the second term of the left hand side of (2.3), it results that  $y(t, x, \omega)$  is a weak solution of (2.1) if and only if

$$\int_{\Omega} \int_D \partial_t^2 y v dx d\mathbb{P}(\omega) + \int_{\Omega} \int_D a \partial_x^2 y \partial_x^2 v dx d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \int_D f v dx d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall v(x). \quad (2.4)$$

In Section 2.3.1 the functional framework in which the previous formulation is encompassed is explained.

### 2.2.3 Types of control

Typically, the control can be applied in the force term (as a distributed control, for instance, in [7]), in the boundary condition term (boundary control, [4]), or in both at the same time ([16]). In this work thesis, the first situation is considered, a control distributed in the force term.

### 2.2.3.1 Generic control

In a first case, a generic control is studied, applied on a certain region of the beam, in the following way:

$$f = 1_{\mathcal{O}}u, \quad (2.5)$$

where  $u(t, x)$  is the control variable and  $1_{\mathcal{O}}$  is the characteristic function of the set

$$\mathcal{O} = [x_0, x_1] \subset (0, L), \quad (2.6)$$

where  $x_0$  and  $x_1$  represent the extremes of the actuator.

In this case, there is not any specification about the kind of actuator, but it is described in a general way its effect in the form of a force term over the beam. Once the resulting control is known, a device capable of producing it might be searched.

As device capacities are limited, it is natural to impose lower and upper bounds on the control function  $u$ . Thus, given  $m, M \in [-\infty, +\infty]$ , with  $m < M$ , the considered set of admissible controls is the following:

$$\mathcal{U}_{ad,g} := \{u \in L^2((0, T) \times \mathcal{O}) : m \leq u(t, x) \leq M, \quad \text{a.e. } (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{O}\}. \quad (2.7)$$

The unconstrained case corresponds to  $m = -\infty$  and  $M = +\infty$ .

### 2.2.3.2 Piezoelectric control

In the case of piezoelectric control:

$$f = v \partial_x (\delta_{x_1} - \delta_{x_0}) \quad (2.8)$$

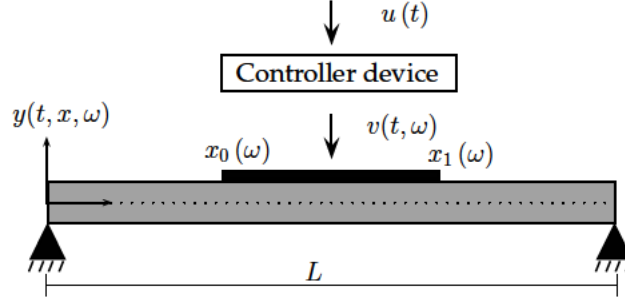
The function  $v : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  represents the variation along time of a voltage which is applied to the actuator, and which is assumed to be affected by some random perturbation.  $x_0(\omega)$  and  $x_1(\omega)$  represent the extremes of the piezoelectric actuator.  $\delta_{x_j} = \delta_{x_j}(x)$  is the Dirac mass at the point  $x_j \in D$ ,  $j = 0, 1$ .

Since physical control devices are affected by uncertainty, it is realistic to decompose the control variable into two parts, one of them deterministic, unknown, and the other random, but known. Moreover, it is reasonable to consider that the random part is modulated by the deterministic one. Then, the function  $v = v(t, \omega)$ , which appears in (2.8), takes the form

$$v = u(1 + \hat{u}), \quad (2.9)$$

where  $u : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  is the (*unknown*) deterministic control, which represents the applied voltage, and  $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  is a (*known*) zero-mean random variable, which re-

presents the uncertainty in the control device. See Figure 2.1 for the configuration of the problem.



**Figure 2.1** Piezoelectric problem: configuration of the problem.

In [16] the control variable is formulated as a sum, instead of product, of an unknown deterministic component and another known random one, in the following way:

$$v = u + \hat{u}, \quad (2.10)$$

which is another possible option for the modeling of the uncertainty in the control device.

Similarly to the previous case, since capacities of the control devices which provide voltage are limited, it is natural to impose upper and lower bounds to the control function  $u$ . Thus, given  $m, M \in [-\infty, +\infty]$ , with  $m < M$ , the considered set of admissible controls is the following:

$$\mathcal{U}_{ad,p} := \{u \in L^2(0, T) : m \leq u(t) \leq M, \quad \text{a.e. } t \in (0, T)\}. \quad (2.11)$$

### 2.2.4 Location of the uncertainty

In this model, uncertainty can be located, mainly, at

- The coefficient of flexural rigidity  $a = EI$ .

It is quite frequent that the properties of the material do not have exactly the same value as the one established in their design, due to variability in the conditions of fabrication or to errors in measurements.

From the mathematical point of view, it is difficult to deal with uncertainty in this coefficient, because it is located at a non-linear term with respect to the solution of the PDE. Hence, the Principle of Superposition can not be applied to solve it.

For that reason, this case is considered the most relevant, and it is studied in the two problems (Chapters 4 and 5) considered in this thesis.

- The actuator.

As mentioned in the previous section, uncertainty may be found both in the amplitude and in the location of the control.

For instance, a common problem is that the actuator is not located in the exact position for which it was designed, due to errors in the measurements or because it is displaced without being noticed. This problem is studied in Subsection 5.4.3, corresponding to the piezoelectric control.

- Initial conditions  $y^0, y^1$ .

A typical case is that of initial conditions in the form:

$$y^0(x, \omega) = y^0(x) + \hat{y}^0(\omega), \quad y^1(x, \omega) = y^1(x) + \hat{y}^1(\omega). \quad (2.12)$$

In this case, the problem can be decomposed by applying the Principle of Superposition, due to linearity, and because of that, it does not involve an additional difficulty.

In other situations, uncertainty may appear in the form of a product, which is more difficult to deal with.

In any case, although uncertainty at the initial conditions has not been studied in the numerical experiments of this thesis, the processing of them can be performed analogously with the techniques developed in the following chapters.

## 2.3 Optimal control problems

### 2.3.1 Robust optimal control problem

In this first case, the generic control (2.5) is considered in the force term  $f$  of (2.1).

The Sobolev space

$$V := H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \quad (2.13)$$

and the Hilbert space

$$H := L^2(0, L), \quad (2.14)$$

are considered, both equipped with their usual norms. From now on, if  $X$  is a vectorial space and  $1 \leq p \leq \infty$ , then  $L_{\mathbb{P}}^p(\Omega; X)$  represents the space composed of all the functions  $v : \Omega \rightarrow X$  whose norm

$$\|v\|_{L_{\mathbb{P}}^p(\Omega; X)} := \begin{cases} \left( \int_{\Omega} \|v(\cdot, \omega)\|_X^p d\mathbb{P}(\omega) \right)^{1/p}, & p < \infty \\ \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} \|v(\cdot, \omega)\|_X, & p = \infty \end{cases} \quad (2.15)$$



is finite. In particular, the Hilbert spaces  $V_{\mathbb{P}} := L_{\mathbb{P}}^2(\Omega; V)$  and  $H_{\mathbb{P}} := L_{\mathbb{P}}^2(\Omega; H)$  are used.  $V_{\mathbb{P}}^* = L_{\mathbb{P}}^2(\Omega; V^*)$  represents the topological dual space of  $V_{\mathbb{P}}$ .

The following hypotheses in the input data are assumed to hold:

- $a \in L_{\mathbb{P}}^{\infty}(\Omega; L^{\infty}(0, L))$  and there exist constants  $a_{min}, a_{max}$  such that

$$0 < a_{min} \leq a(x, \omega) \leq a_{max} < \infty \quad \text{a. s. } \omega \in \Omega \text{ and a. e. } x \in (0, L), \quad (2.16)$$

- $u \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$ ,
- $(y^0, y^1) \in V_{\mathbb{P}} \times H_{\mathbb{P}}$ .

*Note 2.1.* Although this thesis is focused on the numerical part, it is stressed that the weak solution of (2.4)-(2.5) is considered to be in the following spaces [12]:

$$y \in L^2(0, T; V_{\mathbb{P}}), \quad \partial_t y \in L^2(0, T; H_{\mathbb{P}}), \quad \partial_t^2 y \in L^2(0, T; V_{\mathbb{P}}^*) \quad (2.17)$$

The cost functional, of robust type, is the following:

$$\begin{aligned} J(u) := & \frac{\alpha_1}{2} \int_0^L \left( \int_{\Omega} y(T) d\mathbb{P}(\omega) \right)^2 dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^L \left( \int_{\Omega} \partial_t y(T) d\mathbb{P}(\omega) \right)^2 dx \\ & + \frac{\beta_1}{2} \int_0^L \int_{\Omega} y^2(T) d\mathbb{P}(\omega) dx + \frac{\beta_2}{2} \int_0^L \int_{\Omega} (\partial_t y)^2(T) d\mathbb{P}(\omega) dx \\ & + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} u^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.18)$$

where  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  and  $\beta_1, \beta_2, \gamma \geq 0$  are weighting parameters.

The aim of the problem is twofold: on the one hand, the first two terms in (2.18) aim at reducing the averaged vibrations of the beam with respect to the random parameter  $\omega$ , as much as possible, at a fixed control time  $T$  given. On the other hand, the third and fourth terms in (2.18) minimize the second moment of  $(y(T), \partial_t y(T))$ , with the objective of reducing the dispersion of the system output at time  $T$  and, due to this fact, it is called *robust control*. The penalty parameter  $\gamma$  allows to regularize the compromise between achieving that the first and second moments of the state variable go to zero and penalizing the tendency of the control  $u$  of getting too large. Taking  $\gamma \rightarrow 0$ , the restriction of control size is relaxed, whereas, when  $\gamma \rightarrow \infty$ , the requirement of forcing the first and second moments of the state variable to approximate to zero is being relaxed. Also, the term of the time derivative might be regularized, in case that the control were very oscillating, as it is formulated in the problem of the following subsection.

It is important to highlight that, instead of minimizing the variance of the random output, so usual in robust optimization (see, for instance, [6, 14, 15]), in the cost functional  $J(u)$  the first two statistical moments of  $y(T)$  and  $\partial_t y(T)$

are included. This allows the optimization problem (P<sub>1</sub>), below formulated, to be convex. From the numerical point of view, convexity avoids the issue of local minima when descent methods are implemented. Moreover, in the case of averaged null controllability, which aims at achieving

$$\int_{\Omega} y(T, x, \omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \partial_t y(T, x, \omega) d\mathbb{P}(\omega) = 0, \quad (2.19)$$

minimizing the second order statistical moment with respect to zero is equivalent to minimizing the variance. In [12, Appendix], the property (2.19) is proved for a concrete example.

In short, the OCP considered in this case is

$$(P_1) \quad \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}_{ad,g}} J(u) \\ \text{subject to } (y, u) \text{ solution of (2.1)-(2.5)} \end{cases}$$

### 2.3.2 Risk-averse optimal control problem

In this case, the piezoelectric control (2.8) is introduced in the force term  $f$  of system (2.1).

The same spaces, (2.13) and (2.14), are considered. The dual space of  $V$ , denoted by  $V^*$ , is also considered, and it is equipped with the norm  $\|f\|_{V^*} = \|u\|_V$ , where  $u \in V$  is solution of

$$\begin{cases} \partial_x^4 u = f, & \text{in } (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0, \\ \partial_x^2 u(0) = \partial_x^2 u(L) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

The following hypotheses in the input data are assumed to hold:

- Ellipticity condition (2.16),
- $v \in L_{\mathbb{P}}^2(\Omega; L^2(0, T))$ ,
- $0 < x_0(\omega) < x_1(\omega) < L$  for all random event  $\omega \in \Omega$ ,
- $(y^0, y^1) \in H_{\mathbb{P}} \times V_{\mathbb{P}}^*$ .

*Note 2.2.* Existence of solution of the system (2.1)-(2.8) is proved by *transposition* (the reader is referred to [5] for more details, which are out of the scope of this thesis).

For each random event  $\omega \in \Omega$  and each control  $u \in \mathcal{U}_{ad,p}$ , the following cost functional is introduced:

$$I(u, \omega) = \frac{1}{2} (\|y(T, \omega)\|_H^2 + \|\partial_t y(T, \omega)\|_{V^*}^2), \quad (2.21)$$

where  $y = y(u)$  is the solution of (2.1)-(2.8) associated to  $u$ , and  $T > 0$  is a fixed control time. The cost functional (2.21) is a measure of the amplitude and velocity of the vibrations of the beam at the final time  $T$ , for a random event  $\omega$ .

For a fixed parameter  $\varepsilon > 0$ , a new cost is considered:

$$J_\varepsilon(u) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : I(u, \omega) > \varepsilon\}. \quad (2.22)$$

$\varepsilon$  is interpreted as the highest acceptable value of the cost  $I(u, \omega)$ .

Using the Heaviside's function

$$H(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

(2.22) is written as

$$J_\varepsilon(u) = \mathbb{E}(H(I(u, \cdot) - \varepsilon)) = \int_\Omega H(I(u, \omega) - \varepsilon) d\mathbb{P}(\omega). \quad (2.24)$$

Eventually, the regularizing terms of the control variable are included and, then, for  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \geq 0$ , the cost functional considered is

$$J_{\varepsilon, \gamma}(u) = \int_\Omega H(I(u, \omega) - \varepsilon) d\mathbb{P}(\omega) + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T (\partial_t u)^2 dt. \quad (2.25)$$

The aim of this problem is at reducing the probability of the displacement and velocity values of the beam of exceeding the value  $\varepsilon$  at the final time  $T$ . Unlike the previous problem, in which only the mean and variance are minimized, in this case all the set of random events  $\Omega$  is controlled, which is reasonably more restrictive. It is called *risk-averse* control, because the cost functional represents the probability of having a failure. Also, the terms of regularization of the control are added,  $\gamma_1$  to control the amplitude, and  $\gamma_2$  to control the oscillatory behavior along time, allowing the designer to establish a trade-off between the requirement of the probability and the amplitude or frequency of the control.

In short, the OCP considered in this case is

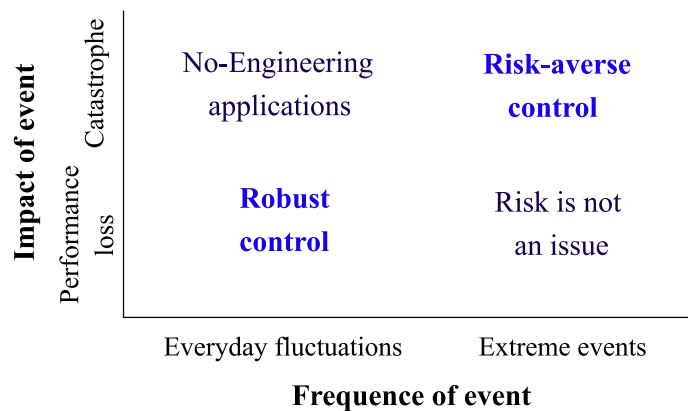
$$(P_2) \quad \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}_{ad,p}} J_{\varepsilon, \gamma}(u) \\ \text{subject to } (y, u) \text{ solution of (2.1)-(2.8)} \end{cases}$$

*Note 2.3.* The choice of the functional spaces of each one of the robust and risk-averse problems previously mentioned ensures the existence of solutions for the Bernoulli-Euler equations associated. These issues, more theoretical, are studied in detail in [5, 12]. The focus of this thesis is placed at the numerical part.

### 2.3.3 Comparison between robust and risk-averse formulations

Although in some situations the optimal control obtained using risk-averse formulation exhibits an increased robustness (see note at the end of this section), these two approaches show fundamental differences in the control objective and the analysis type (in [9], this difference is analyzed for the case of Structural Optimization).

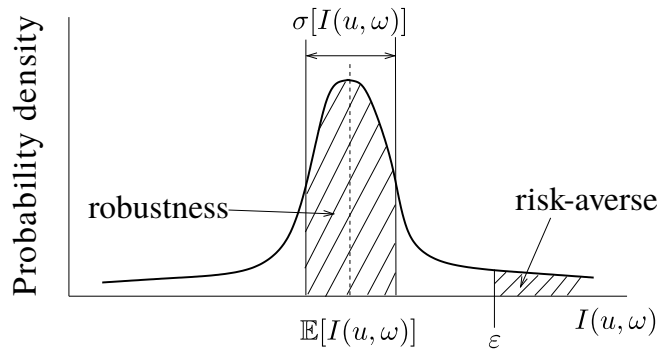
Regarding the control objective, the robust control approach aims at reducing the system variability under unexpected variations in the input data. Conversely, the risk-averse approach is less concerned with the system variability and more with reducing a risk function that quantifies the expected losses related with the damages caused by extreme events. The different scenarios are mapped in Figure 2.2, following the model in [9], but adapted to the case of optimal control.



**Figure 2.2** Different scenarios concerned in robust and risk-averse optimization.

These conceptual differences entail different formulations of the OCPs. On the one hand, the robust control formulation incorporates measurements of the dispersion of the cost functional around its mean value, such as the standard deviation. On the other hand, the risk-averse approach minimizes a risk function, such as the excess probability, that quantifies the expected losses. These differences in formulation are illustrated in Figure 2.3. It may be observed that, whereas in robust control the attention is paid to the regions around the mean value of the probability density function (PDF), the risk-averse approach is focused on the tail of the PDF. As a consequence, the risk-averse approach involves a higher computational burden compared to its robust counterpart, which only requires the estimation of low order statistical moments (mean and standard deviation).

*Note 2.4.* The approaches formulated in this thesis, in Subsections 2.3.1 and 2.3.2, show the following features:



**Figure 2.3** Difference between robustness and risk-aversion.

- The magnitudes intended to be minimized (costs functionals (2.18) and (2.25), respectively) by definition can not take negative values.
- The objective of the robust OCP is to move the mean of the PDF to 0, and to reduce the standard deviation. The aim of the risk-averse formulation is to translate the whole PDF to the left of a threshold value, which is usually small.

These two situations provoke that the objective of both problems is based on accumulating a great amount of values of the PDF close to 0, in essence, a probability distribution with zero mean and standard deviation as small as possible. However, if the threshold value of the risk-averse formulation is not taken very low, they may present more significant differences.

## 2.4 Summary and conclusions

In this chapter, a study of the art about the robust OCP of vibrations of systems modeled by partial differential equations is presented, indicating that there are very few scientific works, which have been published in the last decade, mainly. In these works, the study is performed with stationary PDEs, and with an evolutionary PDE of first order in time; whereas, in this thesis, the work model is the evolutionary Bernoulli-Euler beam equation, which is an example of evolutionary PDE of second order in time. The following problems object of study are formulated: the robust OCP and the risk-averse OCP, setting the cost functionals of them. The differences between them are established: the first one aims at minimizing the mean and variance of the solution, whereas the second one aims at reducing the probability of the values of the solution of exceeding a threshold value. With respect to risk-averse formulation, originated in the field of Economy, it is highlighted that it has not been applied to optimal control of PDEs up to now. These enunciated problems are developed in depth in the following chapters.

## References

- [1] Aitchison, J., Brown, J. A. C.: The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics. Cambridge University Press, (1957)
- [2] Allaire, A., Dapogny, Ch.: A deterministic approximation method in shape optimization under random uncertainties. *SMAI J. Computational Mathematics* 1, 83–143 (2015)
- [3] Boyce, W. E., Goodwin, B. E.: Random transverse vibrations of elastic beams. *J. Soc. Indust. Appl. Mat.* Vol. 12 (3), 613 - 629 (1964).
- [4] Chen, P., Quarteroni, A., Rozza, G.: Stochastic optimal Robin boundary control problems of advection-dominated elliptic equations. *SIAM J. Numer. Anal.* 51 (5), 2700-2722 (2013)
- [5] Gunzburger, M. D., Webster, C., Zhang, G.: Stochastic finite element methods for partial differential equations with random input data. *Acta Numer.* 23, 521–650 (2014)
- [6] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S.: Optimization with PDE Constraints. *Mathematical Modelling: Theory and Applications*, vol. 23, Springer, Berlin (2009)
- [7] Hou, L. S., Lee, J., Manouzi, H.: Finite element approximations of stochastic optimal control problems constrained by stochastic elliptic PDEs. *J. Math. Anal. Appl.* 384, 87-103 (2011)
- [8] Huang, B., Li, Q. S., Tuan, A. Y., Zhu, H.: Recursive approach for random response analysis using non-orthogonal polynomial expansion. *Comput. Mech.* 44, 309 - 320 (2009).
- [9] Kang, Z.: Robust Design Optimization of Structures under Uncertainties. PhD Thesis. University of Stuttgart, (2005).
- [10] Manohar, C. S., Adhikari, S.: Dynamic stiffness of randomly parametered beams. *Prob. Engng. Mech.* Vol. 13 (1) 39 - 51 (1998).
- [11] Marín FJ, Martínez-Frutos J, Periago F: A polynomial chaos-based approach to risk-averse piezoelectric control of random vibrations of beams. *Int J Numer Methods Eng.* 1–18, 2018. <https://doi.org/10.1002/nme.5823>
- [12] Marín, F. J., Martínez-Frutos, J., Periago, F.: Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. *J. Optim. Theory Appl.* 174(2), 428-454 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1128-x>
- [13] Martínez-Frutos, J., Kessler, M., Münch, A., Periago, F.: Robust optimal Robin boundary control for the transient heat equation with random input data. *Internat. J. Numer. Methods Engng.* 108 (2), 116-135 (2016)

- 
- [14] Martínez-Frutos, J., Kessler, M., Periago, F.: Robust optimal shape design for an elliptic PDE with uncertainty in its input data. *ESAIM: COCV*, 21 (4), 901-923 (2015)
  - [15] Rangavajhala, S., Mullur, A. A., Messac, A.: Equality constraints in multiobjective robust design optimization: decision making problem. *J. Optim. Theory Appl.* 140 (2), 315 - 337 (2009).
  - [16] Rosseel, E., Wells, G. N.: Optimal control with stochastic PDE constraints and uncertain controls. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 213/216, 152-167 (2012)





## Chapter 3

# Uncertainty Quantification in control problems

This chapter deals with the uncertainty modeling of the input parameters of the PDE and the uncertainty propagation of the state variable of the PDE. Both stages are necessary to solve the OCPs formulated in the previous chapter, and which are solved in next chapters. Firstly, in Section 3.1, the term *Uncertainty Quantification*, and its use in this thesis, are explained. In Section 3.2, the discretization of the uncertainty in the input parameters of the model is developed, by means of KL expansion, and an example of a random field, which is used in the numerical experiments of next chapters, is set. Then, in Section 3.3, the different techniques to solve the integrals on the random domain are briefly introduced. Eventually, in Section 3.4, the main conclusions of this chapter are presented.

### 3.1 Introduction

The term *Uncertainty Quantification* is broadly used to define a variety of methodologies. In [8, p. 1] it is defined as “the science of identifying, quantifying, and reducing uncertainties associated with models, numerical algorithms, experiments, and predicted outcomes or quantities of interest”. Following [3, p. 525], in this thesis the term Uncertainty Quantification is used to designate “the task of determining information about the uncertainty in an output of interest that depends on the solution of a PDE, given information about the uncertainties in the system inputs”. This idea is illustrated in Figure 3.1.



**Figure 3.1** Uncertainty Quantification in PDE-based mathematical models

Uncertainty in the input parameters of a PDE is mainly given in the form of random field. Firstly, it is important to model the uncertainty correctly; for that, there are some references in the literature, being the most common KL expansion. Secondly, the cost functionals of OCPs contain integrals, on the random domain, of the state variables. To solve these integrals, there are some techniques, such as MC, SC, Galerkin or PC.

## 3.2 Numerical approximation of random fields

### 3.2.1 Karhunen-Loève expansion

KL expansion approximates a random field (with spatial correlation) as a sum of pairwise uncorrelated random variables. In essence, it separates the spatial dependence from the random one.

The starting point is the covariance function,

$$C : \bar{D} \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

of the random field, which is typically estimated from experimental data.

The covariance function (3.1) is called symmetric if it holds

$$C(x, x') = C(x', x), \quad \forall x, x' \in D, \quad (3.2)$$

and it is said non-negative definite if the following inequality holds:

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k C(x_j, x_k) \geq 0, \quad \forall x_j, x_k \in D, \quad \forall \alpha_j, \alpha_k \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

The main results of KL expansion are introduced below.

**Theorem 3.1.** (Mercer) [5, Th. 1.8] *Let  $D \subset \mathbb{R}^d$  be a bounded domain and let  $C : \bar{D} \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous, symmetric and non-negative definite function. Consider the integral operator  $\mathcal{C} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$  defined by*

$$(\mathcal{C}\psi)(x) = \int_D C(x, x') \psi(x') dx'. \quad (3.4)$$

*Then, there exists a sequence of, continuous in  $\bar{D}$ , eigenfunctions  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  of  $\mathcal{C}$ , which can be chosen orthonormal in  $L^2(D)$ , such that the corresponding sequence of eigenvalues  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  is positive. Moreover,*

$$C(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n(x) b_n(x'), \quad x, x' \in \bar{D}, \quad (3.5)$$

*where the series converges absolutely and uniformly on  $\bar{D} \times \bar{D}$ .*

**Theorem 3.2.** (Karhunen-Loève expansion) [5, Thms. 5.28, 5.29, 7.52, 7.53] *Let  $D \subset \mathbb{R}^d$  be a bounded domain and let  $a = a(x, \omega)$  be a random field with continuous covariance function  $\text{Cov}_a : \bar{D} \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Then,  $a(x, \omega)$  admits the KL expansion*

$$a(x, \omega) = \bar{a}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} b_n(x) \xi_n(\omega), \quad (3.6)$$

where the sum converges in  $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega; L^2(D))$ .  $\{\lambda_n, b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  are the eigenpair of the operator  $\mathcal{C}$  defined in Mercer's theorem, with  $C(x, x') = \text{Cov}_a(x, x')$ , and

$$\xi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_D [a(x, \omega) - \bar{a}(x)] b_n(x) dx \quad (3.7)$$

are pairwise uncorrelated random variables with zero mean and unit variance. If the random field  $a(x, \omega)$  is Gaussian, then  $\xi_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  are independent and identically distributed (i.i.d.) standard Gaussian variables.

*Note 3.1.* Note that, thanks to Theorem 3.2, a Gaussian field  $a(x, \omega)$  is completely determined by its expected function  $\bar{a}(x)$  and its covariance function. Indeed, from  $\text{Cov}_a(x, x')$  one computes the eigenpairs  $\{\lambda_n, b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  of the operator (3.4). Thus, if  $\bar{a}(x)$  is known, then the KL expansion (3.6) determines the Gaussian field  $a(x, \omega)$  since the random variables that appear in (3.6) are i.i.d. standard Gaussian variables.

These two theorems are the basis which allows to model uncertainty with KL expansion.

### 3.2.2 Truncation of Karhunen-Loève expansion

For numerical simulation purposes, the expansion (3.6) is always truncated at some large enough term  $N$ , for which the following so-called *finite-dimensional noise assumption* is enunciated:

**Assumption 3.1.** (Finite dimensional noise). The input data of the PDE is assumed to depend on a finite number of pairwise uncorrelated real-valued random variables:

$$Y(\omega) = (Y_1(\omega), \dots, Y_N(\omega)). \quad (3.8)$$

Then, the random field  $a(x, \omega)$  is approximated by

$$a(x, \omega) \approx a_N(x, \omega) = \bar{a}(x) + \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} b_n(x) Y_n(\omega). \quad (3.9)$$

The convergence rate of  $a_N(x, \omega)$  depends on the decay of the eigenvalues  $\lambda_n$ , which in turn depends on the smoothness of its associated covariance function.

A measure of the relative error committed by truncation of a KL expansion is given by the so-called *variance error* [5, 9]:

$$E_N(x) = \frac{\text{Var}_{a-a_N}(x)}{\text{Var}_a(x)} = \frac{C(x,x) - \sum_{n=1}^N \lambda_n b_n^2(x)}{C(x,x)} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n b_n^2(x)}{C(x,x)}, \quad (3.10)$$

where  $C$  is the covariance function of  $a$ . The second equality of (3.10) is easily obtained from Theorems 3.1 and 3.2 (see [5, Cor. 7.54] for more details). A global measure of this relative error, which is called *mean error variance*, is

$$\bar{E}_N = \frac{\int_D \text{Var}_{a-a_N}(x) dx}{\int_D \text{Var}_a(x) dx} = \frac{\int_D C(x,x) dx - \sum_{n=1}^N \lambda_n}{\int_D C(x,x) dx} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n}{\int_D C(x,x) dx}. \quad (3.11)$$

### 3.2.3 Transformation of the probability space

In practice, instead of working with the abstract probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , under Assumption 3.1, the random PDE (2.4) can be transformed into a deterministic PDE with a finite dimensional parameter. In fact, let  $\Gamma_n = Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}$ ,  $1 \leq n \leq N$ , and  $\Gamma = \prod_{n=1}^N \Gamma_n \subset \mathbb{R}^N$ . If  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , then the Variable Change Theorem ([7, p. 21]) gives

$$\int_{\Omega} g(Y(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Gamma} g(z) \rho(z) dz. \quad (3.12)$$

In this way, the abstract probability space  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  has been transformed into  $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \rho(z) dz)$ , where  $\mathcal{B}(\Gamma)$  is the  $\sigma$ -algebra of Borel, and  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\rho = \rho(z)$  is the joint probability density function of (3.8).

With this change of variables, (2.1) is rewritten in its classical form as:

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^2 (a(x,z) \partial_x^2 y) = f, & \text{in } (0,T) \times D \times \Gamma \\ y(0) = \partial_x^2 y(0) = y(L) = \partial_x^2 y(L) = 0, & \text{on } (0,T) \times \Gamma \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{in } D \times \Gamma, \end{cases} \quad (3.13)$$

and the variational formulation proposed in (2.4) is rewritten as:  $y = y(t, x, z)$  is solution of (3.13) if and only if

$$\int_{\Gamma} \rho \int_D \partial_t^2 y v dx dz + \int_{\Gamma} \rho \int_D a \partial_x^2 y \partial_x^2 v dx dz = \int_{\Gamma} \rho \int_D f v dx dz, \quad \forall v(x) \quad (3.14)$$

It is highlighted that (3.14) is a deterministic PDE with a finite dimensional parameter  $z \in \Gamma$ . From now on in this thesis, this transformation is always considered.

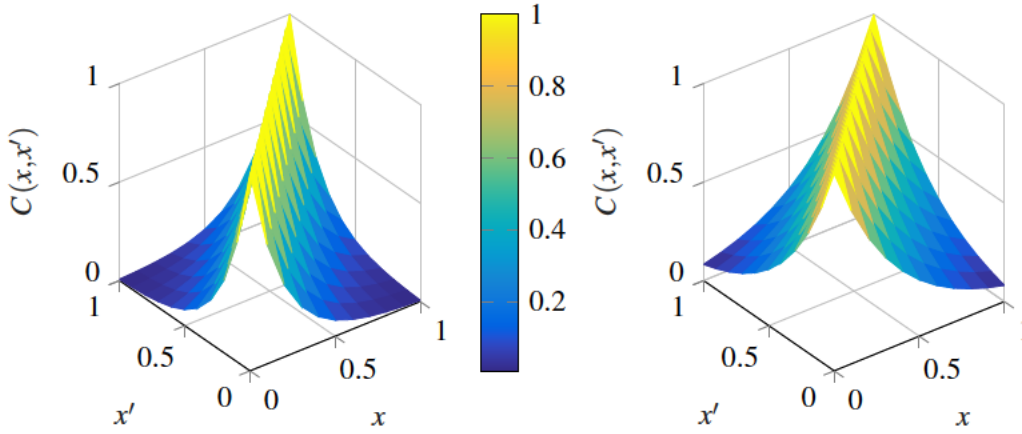
### 3.2.4 Example of modeling of a random field

Below, an example of a random field modeled with KL expansion is conducted. Uncertainty is supposed to be located in the flexural rigidity parameter  $a(x, z)$  of the beam, shaped like a *log-normal* random field, i. e., that its logarithmic is normally distributed.

Consider a Gaussian random field  $U = U(x, z)$  with zero mean, unit variance and having the following exponential covariance function:

$$C(x, x') = e^{-|x-x'|/L_c}, \quad x, x' \in D = (0, L), \quad (3.15)$$

where  $L_c$  is the so called *correlation length*, which in some way links the distance between the points to the relation between their uncertainty. This kind of exponential functions are very used in practice, as it is indicated in [1]. The covariance function (3.15) is plotted in Figure 3.2 for two different values of the correlation length. Its interpretation is that the points which are next each other have a bigger correlation than the points which are far, due to the fast decay of the exponential. The smaller the correlation length is, the more difficult the problem results, since the relation between the points is smaller and, then, uncertainty may take very different values in one point and other.



**Figure 3.2** Covariance functions for two values of correlation length: (a)  $L_c = 0.2$ , (b)  $L_c = 0.4$

The eigenpair  $\{\lambda_n, b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  associated to  $C(x, x')$  is obtained by solving the spectral problem

$$\int_0^x e^{-\frac{x-x'}{L_c}} b(x') dx' + \int_x^L e^{-\frac{x'-x}{L_c}} b(x') dx' = \lambda b(x). \quad (3.16)$$

Differentiating twice and evaluating  $\partial_x b(x)$  in the extremes  $x = 0, L$ , the spectral problem (3.16) takes the form

$$\begin{cases} \partial_x^2 b(x) + \frac{1}{L_c} \left( \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{L_c} \right) b(x) = 0, & 0 < x < L \\ \partial_x b(0) = \frac{1}{L_c} b(0), \quad \partial_x b(L) = -\frac{1}{L_c} b(L). \end{cases} \quad (3.17)$$

Denoting by  $\ell = L/L_c$ , the eigenvalues of (3.17) are given by

$$\lambda_n = \frac{2\ell^2 L_c}{\ell^2 + \gamma_n^2}, \quad (3.18)$$

where  $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$ , are the positive solutions of the trascendental equation

$$\cot(\gamma_n) = \frac{\gamma_n^2 - \ell^2}{2\ell\gamma_n}. \quad (3.19)$$

Its associated normalized eigenfunctions are

$$b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell^2 + \gamma_n^2 + 2\ell}} \left[ \gamma_n \cos\left(\frac{\gamma_n x}{L}\right) + \ell \sin\left(\frac{\gamma_n x}{L}\right) \right], \quad 0 < x < L. \quad (3.20)$$

The energy of  $U$  is given by

$$\|U\|_{L^2_{\mathbb{P}}(\Gamma; L^2(D))}^2 := \int_0^L \text{Var}_U(x) dx = \int_0^L C(x, x) dx = L. \quad (3.21)$$

The  $N$ -term truncation of KL expansion is considered:

$$U(x, z) \cong U_N(x, z) = \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} b_n(x) z_n, \quad (3.22)$$

where the eigenvalues are sorted in decreasing order, this is,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ .

Taking into account that  $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  are orthonormal in  $L^2(D)$  and that  $z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  are independent, the energy of the random field can be calculated as

$$\|U_N\|_{L^2_{\mathbb{P}}(\Gamma; L^2(D))}^2 = \sum_{n=1}^N \lambda_n. \quad (3.23)$$

If 90% of the energy of the field  $U$  is wanted to be captured, then the term  $N$  of truncation must be chosen in a way that it satisfies the condition  $\bar{E}_N \leq \frac{1}{10}$ , with  $\bar{E}_N$  given by (3.11), which corresponds with

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \geq \frac{9}{10} L$$

For  $L = 1$  and  $L_c = 0.4$ , the spectral problem is solved, resulting in the following eigenvalues:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.5147, \\ \lambda_2 = 0.2084, \\ \lambda_3 = 0.0911, \\ \lambda_4 = 0.0478, \\ \lambda_5 = 0.0288, \\ \lambda_6 = 0.0190. \\ \dots \end{cases} \quad (3.24)$$

It is checked that the sum of the first six eigenvalues already exceeds the threshold value of 0.9:

$$\sum_{n=1}^6 \lambda_n = 0.9097 > 0.9, \quad (3.25)$$

hence, this is the number of eigenvalues necessary.

The associated normalized eigenfunctions are calculated, which are the following:

$$b_n(x) = \sqrt{\frac{8}{45 + 4\gamma_n^2}} \left[ \gamma_n \cos(\gamma_n x) + \frac{5}{2} \sin(\gamma_n x) \right], \quad 0 < x < 1. \quad (3.26)$$

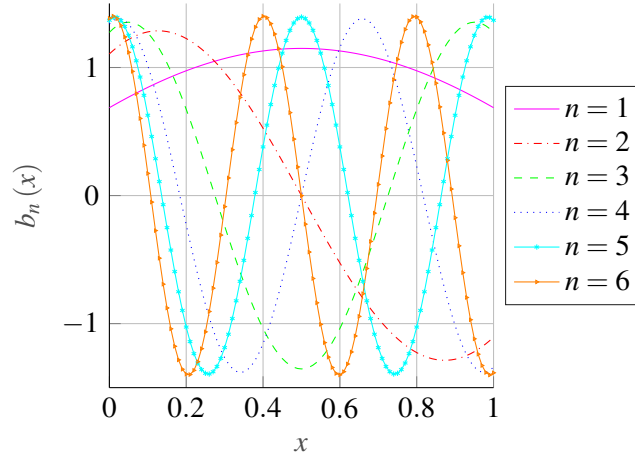
The computation of  $\gamma_n$ ,  $1 \leq n \leq 6$ , is conducted by solving (3.19) with Newton method, resulting in:

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1.8615, \\ \gamma_2 = 4.2128, \\ \gamma_3 = 6.9718, \\ \gamma_4 = 9.9186, \\ \gamma_5 = 12.9478, \\ \gamma_6 = 16.0176. \end{cases} \quad (3.27)$$

In Figure 3.3 the first six eigenfunctions are shown.

The *additive* version of the Central Limit Theorem states that the sum of independent random variables follows a normal distribution. However, random variables which always have positive values, as it is the case of the coefficient of flexural rigidity  $a(x, z)$ , can not adopt a normal distribution, since, in that case, the probability of taking negative values would be positive. The solution to this difficulty lies in the *multiplicative* version of the Central Limit Theorem, which says that the product of random variables follows a log-normal distribution. This is the case of  $a(x, z) = EI$ . Because of that, it is usual to have  $a(x, z)$  expressed in the following way:

$$a(x, z) = \exp(\eta + \xi U_N(x, z)), \quad (3.28)$$



**Figure 3.3** Normalized eigenfunctions  $b_n(x)$  of the random field.

where  $\eta$  and  $\xi$  are, respectively, the location and scale parameters of the log-normal random field. If it is denoted by  $\mu, \sigma^2$  the mean and variance, respectively, of the log-normal field, then it is known [1] that

$$\eta = \ln \left( \frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{(\mu)^2}}} \right), \quad \xi = \ln \left( 1 + \frac{\sigma^2}{(\mu)^2} \right). \quad (3.29)$$

In particular,  $\eta = -0.040$  and  $\xi = 0.283$  are selected in order for the resulting random field  $a(x, z)$  to have mean  $\mu = 1$  and variance  $\sigma^2 = \frac{1}{12}$ .

With this log-normal field, it is ensured that the function  $a(x, z)$  takes always positive values, since it would be of no sense, from the physical point of view, a negative value of the coefficient of flexural rigidity. Notwithstanding, this choice is not completely satisfactory, because as the variables  $z_n$  are Gaussians, they may take any value from  $-\infty$  to  $+\infty$ , hence the function  $a(x, z)$  might value from 0 to  $+\infty$ . An usual way to proceed in these cases is to truncate the Gaussian. In particular,  $z_n$  are truncated at the points  $\mp 3$ , which ensures that the 99.7% of the values of the Gaussians variables are inside this interval. Instead of using the probability density function

$$\hat{\rho}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

it is used:

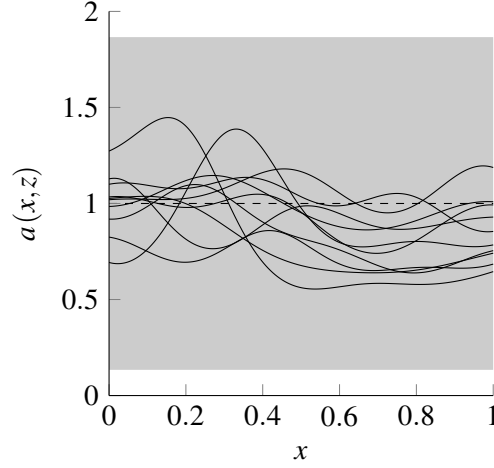
$$\rho(s) = \begin{cases} \frac{\hat{\rho}(s)}{\Phi(3) - \Phi(-3)}, & -3 \leq s \leq 3, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.31)$$



where

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^s \hat{\rho}(s) ds \quad (3.32)$$

is the probability distribution function.



**Figure 3.4** Ten realizations of the random flexural rigidity  $a(x, z)$ ; the shadow region represents the 90% confidence interval for  $a(x, z)$ .

Hence,  $a(x, z)$ , given by (3.28), satisfies the ellipticity condition (2.16). Ten random realizations of  $a(x, z)$  are shown in Figure 3.4. A confidence interval of the random variable is represented, built, from mean and variance, by means of the following inequality.

**Chebyshev's inequality.** Let  $X$  be a random variable of mean  $\mu$  and finite variance  $\sigma^2$ , then, for all real number  $r > 0$ , it holds:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > r\sigma) \leq \frac{1}{r^2}, \quad (3.33)$$

which can also be written as

$$\mathbb{P}(\mu - r\sigma < X < \mu + r\sigma) \leq \frac{1}{r^2}. \quad (3.34)$$

$\frac{1}{r^2}$  represents the probability of the values of being out of the range built from mean and variance. In this case, the field has mean  $\mu = 1$  and variance  $\sigma = \frac{1}{12}$ . If 90% of the values are wanted to be captured, then  $\frac{1}{r^2} = 0.1$  is taken. From here,  $r = \sqrt{10}$  is obtained, which is generally approximated by  $r = \sqrt{10} \cong 3$ , resulting in the following interval:

$$\mathbb{P}(1 - 0.867 < X < 1 + 0.867) \leq \frac{1}{10}. \quad (3.35)$$

The interpretation is that the values of  $X$  are, with a 90% of probability, in the range  $(1 - 0.867, 1 + 0.867)$ .

### 3.3 Discretization on the random domain

As presented in Chapter 2, the problem of optimal control of stochastic PDEs involves the computation of the first two statistical moments of the state variable (robust approach) or the probability of exceeding a prescribed target (risk-averse approach). In both cases, the statistical quantities of interest can be expressed using a multi-dimensional integral in the random domain. Such an integral quite often can not be computed analytically and requires numerical methods for its solution. The main drawback of this approach is that the problem may become computationally unaffordable in two cases: (1) high-dimensional problems or (2) problems involving computationally expensive simulation models. Furthermore, the computational issue is exacerbated in problems involving a large amount of evaluations of integrals such as those appearing in optimal control with random input data. The aforementioned issue has fostered the development of numerical methods which are able to estimate the statistical quantities of interest more efficiently. These methods can be broadly classified into five categories: Simulation methods, Expansion methods, Most Probable Point-Based methods, Surrogate-based methods and Dimension Reduction methods. A deep description of all these methods is out of the scope of this work and the interested reader is referred to [2, 4, 6].

In this thesis, two different strategies to solve the uncertainty propagation stage are proposed. These strategies are especially suited for the robust and risk-averse OCPs. Although the proposed strategies are described in detail in Chapter 4 and Chapter 5, an overview of their main ingredients is presented below:

- **Monte Carlo** . It consists, basically, on evaluating the integrand for a great number of realizations of the random variable, summing them and dividing by the total number of realizations. On the one hand, it has the advantage of its facility to be implemented. However, on the other hand, it involves a too high computational burden, since it needs to solve the PDE for that great number of values of the random parameter. More details are explained in Chapter 5.
- **Stochastic Collocation** . When the integrand is smooth with respect to the uncertain parameter  $z$ , these methods can be applied, which consist on choosing a reduced number of nodes, such that the number of evaluations of the PDE is clearly reduced with respect to MC methods, without losing accuracy in the

approximation. It is important to alleviate the phenomenon known as *curse of dimensionality*, which occurs when the dimension of the problem increases, because the total number of nodes is the product of the number of nodes in each direction. For that, an *anisotropic sparse grid* is used, which establishes a number of nodes in each direction in terms of its importance, reducing very considerably the total number of nodes. It is developed in depth in Chapter 4.

- Galerkin or Polynomial Chaos . When the integrand is not smooth with respect to the random parameter  $z$ , SC methods do not work well in the area where the discontinuity is, and, as MC methods have a high computational burden associated, an alternative method is needed. PC consists on a projection of the solution over a set of orthogonal polynomials, by means of some coefficients which can be calculated with SC. Once the solution is expressed in terms of a linear combination of orthogonal polynomials in the probabilistic space, MC can be applied over those polynomials, which implies a much less computational burden. More details are explained in Chapter 5.

### 3.4 Summary and conclusions

Uncertainty in the input data is discretized by means of KL expansion, and it is indicated that the truncated KL expansion is used in practice, which allows to capture a certain percentage of the random field energy. The transformation of the abstract probability space into the real space of images is explained. By means of this transformation, a stochastic PDE is transformed into a deterministic PDE with a finite dimensional parameter. Moreover, the different techniques to deal with the integrals on the random domain, such as MC, SC and PC are described, emphasizing that the smoothness of the integrand with respect to the random parameter determines which is suitable in each case, and that a combination of them is possible, in order to alleviate the huge computational burden of applying MC directly on the PDE.

### References

- [1] Aitchison, J., Brown, J. A. C.: The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics. Cambridge University Press, (1957)
- [2] Ditlevsen, O. D.; Madsen, H. O. Chichester. Structural Reliability Methods. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [3] Gunzburger, M. D., Webster, C., Zhang, G. Stochastic finite element methods for partial differential equations with random input data. Acta Numer.

- 23, 521–650 (2014)
- [4] Lemaire, M. Structural Reliability. Wiley, 2009
  - [5] Lord, G. L., Powell, C. E., Shardlow, T.: An Introduction to Computational Stochastic PDEs. Cambridge University Press (2014)
  - [6] Melchers, R. E., Beck, A. T. Structural Reliability Analysis and Prediction. Third Edition. John Wiley & Sons, 2018
  - [7] Rao, M. M., Swift, R. J.: Probability Theory with Applications. Second Edition. Springer, New York (2006)
  - [8] Smith, R. C. Uncertainty quantification. Theory, implementation, and applications. Computational Science & Engineering, 12. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, (2014)
  - [9] Sudret, B., Kiureghian, A. D.: Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A State-of-the-Art Report. Technical Report UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, Nov. (2000)

## Chapter 4

# Numerical resolution of robust optimal control problems

In this chapter, the **robust** optimal control is considered. The term robust alludes to controlling, not only the mean of the solution, but also the variance or dispersion which that solution has. The content of this chapter collates the work published in Paper [9].

### 4.1 Introduction

The deterministic control problem of vibrations of a beam which follows the Bernoulli-Euler model has been broadly studied along the years, for instance in [3, 6, 7, 8]. However, although some work have considered uncertainty in the Bernoulli-Euler equation, the robust OCP has not been considered so far.

Uncertainty in the flexural rigidity parameter is considered. The problem is formulated in the framework of optimal control theory and provides a functional setting, which is so general as to include different types of random variables and random fields as sources of uncertainty. The second order statistical moment of the random system response at the control time is incorporated in the cost functional as a measure of robustness.

The numerical resolution method combines a classical descent method with an adaptive anisotropic SC method for the numerical approximation of the statistics of interest. Since the stochastic direct and adjoint systems are uncoupled, the set of decoupled deterministic problems that arises from the SC method is solved in parallel, which reduces the computational burden and permits to solve problems with a relative large number of terms in the truncated KL expansion of a random field.

Eventually, two numerical experiments illustrate both the performance of the proposed method and the significant differences that may occur when uncertainty is incorporated in this type of control problems.

## 4.2 Robust optimal control problem

The Bernoulli-Euler system (2.1) with control (2.5) is considered again, but rewritten with the probability space  $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \rho(z) dz)$ , introduced in Section 3.2.3. In short, the system of equations considered is the following:

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) = 1_{\mathcal{O}} u, & \text{in } (0, T) \times D \times \Gamma \\ y(0) = \partial_x^2 y(0) = y(L) = \partial_x^2 y(L) = 0, & \text{on } (0, T) \times \Gamma \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{in } D \times \Gamma. \end{cases} \quad (4.1)$$

The PDE of system (4.1) can be rewritten in its weak or variational formulation:

$$\int_{\Gamma} \int_D \partial_t^2 y v dx dz + \int_{\Gamma} \int_D a \partial_x^2 y \partial_x^2 v dx dz = \int_{\Gamma} \int_D 1_{\mathcal{O}} u dx dz, \quad \forall v \quad (4.2)$$

Existence and uniqueness of solution for (4.2) is proved in [9].

The objective or cost functional is the following:

$$\begin{aligned} J(u) := & \frac{\alpha_1}{2} \int_0^L \left( \int_{\Gamma} y(T) \rho(z) dz \right)^2 dx \\ & + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^L \left( \int_{\Gamma} \partial_t y(T) \rho(z) dz \right)^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_0^L \int_{\Gamma} y^2(T) \rho(z) dz dx \\ & + \frac{\beta_2}{2} \int_0^L \int_{\Gamma} (\partial_t y)^2(T) \rho(z) dz dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} u^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.3)$$

where  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  and  $\beta_1, \beta_2, \gamma \geq 0$  are weighting parameters.

The robust optimal control problem consists on the minimization problem:

$$(P_1) \quad \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}_{ad,g}} J(u) \\ \text{subject to } (y, u) \text{ solution of (4.1)} \end{cases}$$

where  $\mathcal{U}_{ad,g}$  is given by (2.7).

Regarding the existence of solution, the following theorem holds.

**Theorem 4.1.** *The following assertions hold:*

- (i) *If  $-\infty < m < M < +\infty$ , then  $(P_1)$  has, at least, one solution. If in addition  $\gamma > 0$ , then the solution is unique.*
- (ii) *If  $m = -\infty, M = +\infty$  and  $\gamma > 0$ , then  $(P_1)$  has a unique solution.*

The proof of this theorem is found at [9, Th. 2.1].

### 4.3 Numerical resolution

A gradient-based descent method is proposed for the numerical resolution of problem  $(P_1)$ . In particular, the algorithm is structured as indicated in Algorithm 4.1.

---

#### Algorithm 4.1: Gradient-based descent method

---

**Data:**  $u_0, \theta, N_{max}$   
**Result:**  $u$

```

1 for  $k \leftarrow 0$  to  $N_{max} - 1$  do
2   Choose a descent direction  $\bar{u}_k$  (for which  $\frac{\partial J(u_k)}{\partial u} \cdot \bar{u}_k < 0$ );
3   Choose a step-size parameter  $\lambda_k$  so that  $J(u_k + \lambda_k \bar{u}_k) < J(u_k)$ ;
4   Set  $u_{k+1} = u_k + \lambda_k \bar{u}_k$ ;
5   if Control with restrictions then
6      $u_{k+1} = u_{k+1}^*$  (projected on the region  $\mathcal{U}_{ad,g}$ )
7   if  $k \geq 5$  then
8     if  $\frac{|J(u_{k+1}) - J(u_k)|}{J(u_{k+1})} \leq \theta, \quad i = 1, \dots, 5,$  then
9        $u = u_{k+1}$ ;
10      break

```

---

Algorithm 4.1 obeys the so-called *first optimize, then discretize* scheme. It means that firstly the gradient of  $J(u)$  is explicitly computed. Then, a discretization process is carried out for the numerical computation of the integrals involved in the descent directions and in the step sizes. Since  $(P_1)$  is convex, convergence of the general descent algorithm described above is ensured for every initial guess  $u_0$  (see [4, Th. 2.2]). The main novelty is that descent directions and step sizes depend on integrals of the solution of (4.1) and its associated adjoint state in a random domain.

As it is well-known, descent methods require iterate and are computationally more expensive than one-shot methods (based on the resolution of the optimality system) [11]. Nevertheless, a gradient-type method is well-suited for this problem since the direct and adjoint problems are uncoupled. Hence, parallel computing may be used to reduce significantly the computational time.

#### 4.3.1 Explicit computation of the descent direction

The Lagrangian associated to problem  $(P_1)$  is formally defined by

$$\mathcal{L}(\hat{y}, \hat{u}, \hat{p}) := J(\hat{y}, \hat{u}) + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 \hat{y} + \partial_x^2 (a \partial_x^2 \hat{y}) - 1_{\mathcal{O}} \hat{u}] \hat{p} dt dx \rho dz, \quad (4.4)$$

In expression (4.4), variables  $\hat{y}, \hat{u}, \hat{p}$  are considered to be independent. This Lagrangian method follows the same steps that in the deterministic case, which can be seen in [4, 14].

Denoting by  $(y, u, p)$  a stationary point of  $\mathcal{L}$ , the directional derivatives with respect to  $\hat{y}, \hat{u}$  and  $\hat{p}$ , in directions  $\bar{y}, \bar{u}$  and  $\bar{p}$ , respectively, are computed, providing the following information:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} &\rightarrow \text{adjoint system,} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial u} \cdot \bar{u} &\rightarrow \text{descent direction,} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial p} \cdot \bar{p} &\rightarrow \text{state law (4.1).} \end{aligned} \quad (4.5)$$

The directional derivative with respect to the state variable is computed in the following way

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} (\mathcal{L}(y + h\bar{y}, u, p) - \mathcal{L}(y, u, p)) \right], \quad h \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

These terms can be computed individually:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y + h\bar{y}, u, p) &= J(y + h\bar{y}, u) \\ &+ \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 (y + h\bar{y}) + \partial_x^2 (a \partial_x^2 (y + h\bar{y})) - 1 \circ u] p dt dx \rho dz \\ &= J(y + h\bar{y}, u) + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 y + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) - 1 \circ u] p dt dx \rho dz \\ &\quad + h \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 \bar{y} + \partial_x^2 (a \partial_x^2 \bar{y})] p dt dx \rho dz. \end{aligned} \quad (4.7)$$

When computing the difference, the repeated terms are deleted:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} J(y + h\bar{y}, u) - \frac{1}{h} J(y, u) \right] \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} h \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 \bar{y}] p dt dx \rho dz \right] \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} h \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_x^2 (a \partial_x^2 \bar{y})] p dt dx \rho dz \right], \end{aligned} \quad (4.8)$$

The limits of the two last terms are evaluated:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} J(y + h\bar{y}, u) - \frac{1}{h} J(y, u) \right] \\ &\quad + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 \bar{y}] p dt dx \rho dz + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_x^2 (a \partial_x^2 \bar{y})] p dt dx \rho dz, \end{aligned} \quad (4.9)$$



Then, integrating twice with respect to the time variable, and four times with respect to the spatial variable, it results:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} &= \lim_{h \rightarrow 0} [J(y + h\bar{y}, u) - J(y, u)] \\ &+ \int_0^L \int_{\Gamma} \partial_t \bar{y}(T) p(T) dx \rho dz - \int_0^L \int_{\Gamma} \bar{y}(T) \partial_t p(T) dx \rho dz \\ &+ \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} \bar{y} \partial_t^2 p dt dx \rho dz + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} \bar{y} \partial_x^2 (a \partial_x^2 p) dt dx \rho dz. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Applying the *Localization Lemma*, the following adjoint system is obtained:

$$\begin{cases} \partial_t^2 p(t, x, z) + \partial_x^2 [a(x, z) \partial_x^2 p(t, x, z)] = 0, \\ p(t, 0, z) = \partial_x^2 p(t, 0, z) = p(t, L, z) = \partial_x^2 p(t, L, z) = 0, \\ p(T, x, z) = -\beta_2 \partial_t y(T, x, z) - \alpha_2 \int_{\Gamma} \partial_t y(T, x, z) \rho(z) dz, \\ \partial_t p(T, x, z) = \beta_1 y(T, x, z) + \alpha_1 \int_{\Gamma} y(T, x, z) \rho(z) dz. \end{cases} \quad (4.11)$$

Then, the directional derivative of the Lagrangian with respect to the control  $u$  in the direction  $\bar{u}$  is calculated:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial u} \cdot \bar{u} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} (\mathcal{L}(y, u + h\bar{u}, p) - \mathcal{L}(y, u, p)) \right]. \quad (4.12)$$

Some computations are performed, analogously to the previous case, resulting in

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u} \cdot \bar{u} = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left[ \gamma u - \int_{\Omega} p \rho(z) dz \right] \bar{u} dx dt, \quad (4.13)$$

where  $p$  solves the adjoint problem (4.11).

Consequently, a descent direction for  $J(u)$  is the function

$$\bar{u}(t, x) = - \left( \gamma u(t, x) - \int_{\Gamma} p(t, x, z) \rho(z) dz \right), \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{O}. \quad (4.14)$$

### 4.3.2 Computation of the step-size parameter

For a fixed descent direction  $\bar{u}$ , the function  $\lambda \mapsto J(u + \lambda \bar{u})$  is quadratic since  $J(u + \lambda \bar{u}) = J(u) + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2$ . Denoting by  $\bar{y}(t, x, z)$  the solution of

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{y}(t, x, z) + \partial_x^2 [a(x, z) \partial_x^2 \bar{y}(t, x, z)] = 1_{\mathcal{O}} \bar{u}(t, x), \\ \bar{y}(t, 0, z) = \partial_x^2 \bar{y}(t, 0, z) = \bar{y}(t, L, z) = \partial_x^2 \bar{y}(t, L, z) = 0, \\ \bar{y}(0, x, z) = 0, \quad \partial_t \bar{y}(0, x, z) = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

the coefficients  $a_1$  and  $a_2$  are explicitly given by

$$\begin{aligned} a_1 = & \alpha_1 \int_0^L \int_{\Gamma} y(T) \rho dz \int_{\Gamma} \bar{y}(T) \rho dz dx + \alpha_2 \int_0^L \int_{\Gamma} \partial_t y(T) \rho dz \int_{\Gamma} \partial_t \bar{y}(T) \rho dz dx \\ & + \beta_1 \int_0^L \int_{\Gamma} y(T) \bar{y}(T) \rho dz dx + \beta_2 \int_0^L \int_{\Gamma} \partial_t y(T) \partial_t \bar{y}(T) \rho dz dx \\ & + \gamma \int_0^T \int_{\mathcal{O}} u \bar{u} dx dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

and  $a_2 = J(\bar{u})$ .

Thus, the optimal step size parameter is  $\lambda_{opt} = -a_1/2a_2$ .

### 4.3.3 Numerical approximation of statistical quantities of interest

The gradient method, which is proposed to solve problem (P<sub>1</sub>), requires the computation, at each iteration, of the first and second moments of the state variable  $(y, \partial_t y)$  and the average of the adjoint state  $p$  (solution of (4.11)). Hence, there are three discretization processes involved; namely, discretization with respect to the spatial variable  $x \in (0, L)$ , with respect to  $t \in (0, T)$ , and with respect to the  $N$ -dimensional parameter  $z \in \Gamma$ .

#### 4.3.3.1 Spatial discretization

A uniform mesh  $\mathcal{T}_h$ ,  $h > 0$ , of the spatial domain  $(0, L)$  is considered. Then, the Sobolev space (2.13) is approximated by the cubic Hermite finite element space

$$V_h := \{\phi_h \in C^1([0, L]) : \phi_h|_I \in \mathcal{P}_3(I), \forall I \in \mathcal{T}_h, \phi_h(0) = \phi_h(L) = 0\}, \quad (4.17)$$

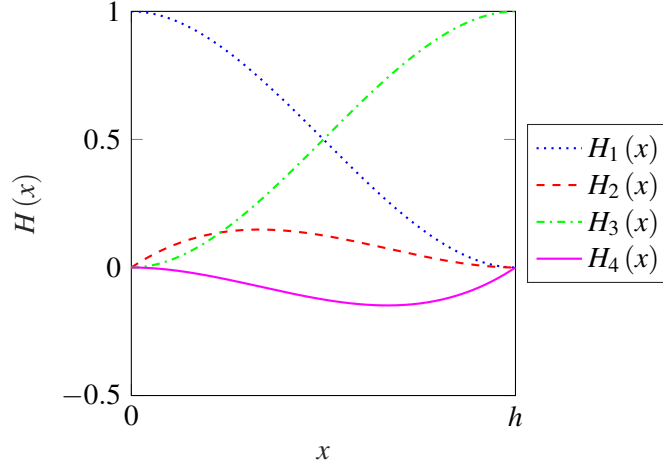
where  $\mathcal{P}_3(I)$  is the space of polynomials of degree less than or equal to 3 on the sub-interval  $I$ .

A basis of (4.17) is built from the Hermite polynomials:

$$\begin{cases} H_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{h^2} + \frac{2x^3}{h^3} \\ H_2(x) = x - \frac{2x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2} \\ H_3(x) = \frac{3x^2}{h^2} - \frac{2x^3}{h^3} \\ H_4(x) = \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2} \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (4.18)$$

where  $h$  is the element size.

In Figure 4.1 the Hermite polynomials are plotted, which correspond to the shape functions for the first element. It is observed that the function  $H_1$  takes the



**Figure 4.1** Representation of the four Hermite shape functions for any element of size  $h$ .

value 1 at the left node, and 0 at the right, and at both nodes the slope or velocity takes the value 0; due to that, it is related to the displacement at the left node. With an analogous reasoning, it is observed that  $H_2$  is identified with the slope at the left node;  $H_3$ , with the displacement at the right node; and  $H_4$ , with the slope at the right node. In that way, each node has its two degrees of freedom (displacement and velocity) associated to a shape function.

Then, the solution  $y = y(t, x, z)$  is approximated as a linear combination of the Hermite finite elements:

$$y \cong y_h = \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \phi_{hi}(x), \quad (4.19)$$

where  $2N_h = \dim(V_h)$ , and the shape functions  $\phi_{hi}$  are built in a standard way from the Hermite polynomials.

So that (4.2) remains:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \int_D \partial_t^2 \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \phi_{hi}(x) v dx \rho dz \\ & + \int_{\Gamma} \int_D a \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \partial_x^2 \phi_{hi}(x) \partial_x^2 v dx \rho dz \\ & = \int_{\Gamma} \int_D 1_{\mathcal{O}} u v dx \rho dz \quad (4.20) \end{aligned}$$

If the test functions  $v(x)$  are selected as the shape functions, it results:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \partial_t^2 \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \int_D \phi_{hi}(x) \phi_{hj}(x) dx \rho dz \\
& \quad + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \int_D a(x, z) \partial_x^2 \phi_{hi}(x) \partial_x^2 \phi_{hj}(x) dx \rho dz \\
& \qquad \qquad \qquad = \int_{\Gamma} \int_D f(t, x) \phi_{hj}(x) dx \rho dz. \quad (4.21)
\end{aligned}$$

For any element,

$$(M_h)_{i,j} = \int_D \phi_{hi}(x) \phi_{hj}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.22)$$

are identified as the elements of the *elementary* mass matrix  $[M_h]_e$ ,

$$(K_h(z))_{i,j} = \int_D a(x, z) \partial_x^2 \phi_{hi}(x) \partial_x^2 \phi_{hj}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.23)$$

as the elements of the *elementary* rigidity matrix  $[K_h]_e$ , and

$$(F_h)_j = \int_D f(t, x) \phi_{hj}(x) dx, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.24)$$

as the elements of the *elementary* force vector  $[F_h]_e$ .

They are called *elementary* since they are associated to a particular element. The global matrices  $M_h$ ,  $K_h(z)$  and  $F_h$  are computed by performing the assembling of the elementary matrices (4.22), (4.23), (4.24), respectively.

The integrals which appear in (4.22) can be computed explicitly, since the shape functions are polynomials. However, the integrals of the expressions (4.23) and (4.24), in general, can not be computed explicitly, so that numerical integration using a Gauss-Legendre quadrature rule of level 2 is used. In the case of the rigidity matrix, as the flexural rigidity term  $a(x, z)$  depends also on the random parameter, the values of the random field at the nodes of the Gauss-Legendre are needed.

After this discretization process, (4.1) (and, similarly, the rest of involved random PDEs) reduces to the following parametric linear system of ordinary differential equations (ODE):

$$\begin{cases} M_h \partial_t^2 y_h(t, z) + K_h(z) y_h(t, z) = F_h(t), & (t, z) \in (0, T) \times \Gamma, \\ y_h(0, z) = y_h^0(z), & z \in \Gamma, \\ \partial_t y_h(0, z) = y_h^1(z), & z \in \Gamma, \end{cases} \quad (4.25)$$

where  $y_h(t, z)$  is a vector-valued function approximating  $y(t, x, z)$  at the nodes of the spatial discretization,  $M_h$  is the mass matrix,  $K_h(z)$  is the rigidity matrix, and  $F_h$  is the force vector. In particular,  $y_h^0, y_h^1$  denote the projection of  $y^0(x), y^1(x)$ , respectively, over the finite dimensional space (4.17).

### 4.3.3.2 Time discretization

Following [5], Newmark method is used for time discretization. A uniform mesh of size  $dt$  on  $[0, T]$  is considered. Denoting by  $y_h^m, v_h^m, a_h^m, F_h^m$  approximations of  $y_h, \partial_t y_h, \partial_t^2 y_h$  and  $F_h$ , respectively, at the nodes  $t_m$ , with  $0 \leq m \leq \frac{T}{dt}$ , of the interval  $[0, T]$ .

The Newmark method transforms (4.25) into a parametric algebraic linear system, as it is describen below.

It starts from the initialization:

$$a_h^0 = [M_h]^{-1} (F_h^0 - K_h y_h^0), \quad (4.26)$$

where  $[M_h]^{-1}$  alludes to the inverse matrix of the mass matrix  $M_h$ .

It is performed in two stages. Firstly, the so-called *predictions* of the solution are computed:

$$\begin{aligned} y_h^{m+1}(z) &= y_h^m(z) + dt v_h^m(z) + \frac{(dt)^2}{2} (1 - 2\delta_2) a_h^m(z), \\ v_h^{m+1}(z) &= v_h^m(z) + dt [(1 - \delta_1) a_h^m(z) + \delta_1 a_h^{m+1}(z)], \\ a_h^{m+1}(z) &= [M_h(z) + \delta_2 dt^2 K_h(z)]^{-1} (F_h^{m+1} - K_h(z) y_h^{m+1}(z)), \end{aligned} \quad (4.27)$$

and, then, the *corrections* are conducted:

$$\begin{aligned} y_h^{m+1}(z) &= y_h^{m+1}(z) + \delta_2 dt^2 a_h^{m+1}, \\ v_h^{m+1}(z) &= v_h^{m+1}(z) + \delta_1 dt a_h^{m+1}(z). \end{aligned} \quad (4.28)$$

If  $2\delta_2 \geq \delta_1 \geq 0.5$ , Newmark method is unconditionally stable and, if  $\delta_1 = 0.5, \delta_2 = 0.25$ , it has order of convergence 2 (see [5, Chap. 9]).

### 4.3.3.3 Discretization on the random domain

Along the gradient-based minimization algorithm, the cost functional (4.3) together with the descent direction (5.11) must be evaluated, which contain integrals on the random domain. The difficulty lies in solving these integrals, with a suitable discretization around the random parameter  $z$ . As an example, the following integral is taken:

$$\int_{\Gamma} \left( \int_D y(T, x, z) \right)^2 \rho(z) dz \quad (4.29)$$

In the most simple case, when  $z \in \mathbb{R}$ , arising from a random variable, an one-dimensional quadrature rule is applied, in order to approximate the integral in the following way:

$$\int_{\Gamma} \left( \int_D y(T, x, z) \right)^2 \rho(z) dz \cong \sum_{r=1}^R w^r \left( \int_D y(T, x, z^r) \right)^2, \quad (4.30)$$

where  $w^r, z^r$ ,  $r = 1, \dots, R$ , are, respectively, the weights and nodes associated to the suitable quadrature rule for the distribution  $\rho(z)$  of the parameter  $z$ , and  $R$  is the total number of nodes of the quadrature, which depends on the accuracy level chosen.

In case that the uncertainty is in the form of a correlated random field, the parameter  $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N$ , i. e., has dimension  $N$ .

The first option, more simple, is to apply an one-dimensional quadrature rule in each direction, which is known as *full tensor product*, so that the integral would be approximated in the following way:

$$\int_{\Gamma} \left( \int_D y(T, x, z) \right)^2 \rho(z) dz \cong \sum_{r_1=1}^{R_1} \dots \sum_{r_N=1}^{R_N} w_1^{r_1} \dots w_N^{r_N} \left( \int_D y(T, x, z_1^{r_1}, \dots, z_N^{r_N}) \right)^2, \quad (4.31)$$

where  $w_i^{r_i}, z_i^{r_i}$  are, respectively, the weights and nodes associated to the direction  $i$ , with  $i = 1, \dots, N$ , and  $R_i$  is the number of nodes in the direction  $i$ . The total number of nodes is  $R = \prod_{i=1}^N R_i$ , which results computationally unaffordable when the dimension  $N$  is large. This phenomenon is known in the literature as the *curse of dimensionality*.

Smolyak [13] proposes a *sparse grid*. This grid eliminates some nodes while accuracy is preserved. Moreover, for highly *anisotropic* problems [10], which is the resulting case for KL expansions, in which random variables corresponding to large eigenvalues have more influence than those associated to low eigenvalues, an *anisotropic sparse grid* can be used, reducing the number of nodes of the less relevant directions. The accuracy of the solutions is not affected, and the computational burden is much lower.

The number of nodes in each direction ( $R_1, \dots, R_N$ ) is chosen relying on a *quadrature level*  $\ell$ , which must be adaptively chosen, in order to comply with a prescribed accuracy level in the approximation, as it is described later in Algorithm 4.2.

Then, the *SC method with anisotropic sparse grid* is described in a more formal way. Following [10], for an integer  $\ell$  (called the *level*) and a vector of weights  $g = (g_1, \dots, g_N)$  for the different stochastic directions, the index set

$$X_g(\ell, N) := \left\{ i = (i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}_+^N : \sum_{n=1}^N (i_n - 1) g_n \leq \ell \underline{g} \right\} \quad (4.32)$$

is considered, with  $\underline{g} := \min_{1 \leq n \leq N} g_n$  and  $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Similarly to isotropic Smolyak quadrature rule [13], the anisotropic quadrature formula applied to a generic function  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  is given by

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_g(\ell, N)F &:= \sum_{i \in X_g(\ell, N)} (\Delta^{i_1} \otimes \cdots \otimes \Delta^{i_N}) F \\
&= \sum_{r_1=1}^{R_{i_1}} \cdots \sum_{r_N=1}^{R_{i_N}} F(z_1^{r_1}, \dots, z_N^{r_N}) w_1^{r_1} \cdots w_N^{r_N}, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

where  $\Delta^{i_n} := \mathcal{Q}^{i_n} - \mathcal{Q}^{i_n-1}$ , with  $\mathcal{Q}^0 = 0$ , is a quadrature rule in which the coordinates  $z_n^{r_n}$  of the nodes are the same as those for the one-dimensional quadrature formula  $\mathcal{Q}^{i_n}$ , and, in case that the quadrature rule is *non-nested* (see note in the following paragraph), its associated weights  $w_n^{r_n}$  are the difference between those for the  $i_n$  and  $i_n - 1$  levels.  $R_{i_n}$  denotes the number of collocation points in the  $n$ -th direction.

*Note 4.1.* One-dimensional quadrature rules can be *nested* or *non-nested*. In the former, the nodes of a level  $i_n$  always contain the nodes of the lower level  $i_n - 1$ , apart from some additional own nodes of that level  $i_n$ , which supposes a computational time saving when advancing from one level to the following. In the latter, the nodes of a level may be different to the ones of the lower level. Although it might seem that nested rules are better, some recent studies show a similar behavior for the nested and non-nested cases [10]. In this case, the non-nested quadrature of Hermite is used.

Next, it is analyzed how to choose the vector of weights  $g$  and the integer  $\ell$ . As proved in [10], the optimal choice of  $g$  depends on the analyticity properties of the solution of the PDE w.r.t. the random parameter, which, in turn, depends on the decay rate of the eigenvalues in the expansion (3.9). Hence, stochastic directions corresponding to large eigenvalues have more influence on the solution of the PDE than the ones associated to lower eigenvalues, and thus require more collocation points. Although the regularity of the solution of the beam equation w.r.t. the random parameter has not been analyzed so far, accordingly to the results in [2, 10], for the case of Gaussian random fields it is reasonable to take  $g_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ , where  $\lambda_n$  are the eigenvalues in (3.9).

As for  $\ell$ , first note that given a quadrature level  $\ell$ , the first two statistical moments of  $y(T, x, z)$  and  $\partial_t y(T, x, z)$  are numerically computed by applying (4.33) to  $y_{h,dt}(T, x^j, z)$  and to  $(\partial_t y)_{h,dt}(T, x^j, z)$  (which are obtained by solving (4.28) at the nodes  $x^j$  of the spatial finite element mesh). In this computation, the control function  $u(t, x)$  is taken as the optimal solution of the associated deterministic problem - *deterministic* meaning that the random input data in the PDE are replaced by their mean values-. This leads to

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^1(y(T, x^j, \cdot)) &:= \int_{\Gamma} y(T, x^j, z) \rho(z) dz \\
&\approx \mathcal{A}_g(\ell, N) y_{h,dt}(T, x^j, \cdot) := \mathcal{M}_{g, \ell, N}^1(y_{h,dt}(T, x^j, \cdot)) \quad (4.34)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2(y(T, x^j, \cdot)) &:= \int_{\Gamma} y^2(T, x^j, z) \rho(z) dz \\ &\approx \mathcal{A}_g(\ell, N) y_{h,dt}^2(T, x^j, \cdot) := \mathcal{M}_{g,\ell,N}^2(y_{h,dt}(T, x^j, \cdot)). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Similar expressions are obtained for  $\partial_t y$ , which are omitted for the sake of simplicity. Expressions (4.34) and (4.35) are then used to approximate

$$\left\| \int_{\Gamma} y(T, \cdot, z) \rho(z) dz \right\|_{L^2(0,L)}^2 \quad \text{and} \quad \left\| \int_{\Gamma} y^2(T, \cdot, z) \rho(z) dz \right\|_{L^2(0,L)}^2, \quad (4.36)$$

where numerical integration in  $(0, L)$  is carried out by using the shape functions associated to the finite element mesh. These approximations are denoted by  $\mathcal{M}_{g,\ell,N}^{1,h,dt}(y(T))$  and  $\mathcal{M}_{g,\ell,N}^{2,h,dt}(y(T))$ , respectively, that is,

$$\mathcal{M}_{g,\ell,N}^{1,h,dt}(y(T)) \approx \left\| \int_{\Gamma} y(T, \cdot, z) \rho(z) dz \right\|_{L^2(0,L)}^2 \quad (4.37)$$

and

$$\mathcal{M}_{g,\ell,N}^{2,h,dt}(y(T)) \approx \left\| \int_{\Gamma} y^2(T, \cdot, z) \rho(z) dz \right\|_{L^2(0,L)}^2. \quad (4.38)$$

Then, an adaptive algorithm to find  $\ell$  (Algorithm 4.2) is performed, starting from the level  $\bar{\ell}$  of the enriched solution and a tolerance  $\varepsilon$ .

---

**Algorithm 4.2:** Obtention of the quadrature level  $\ell_{opt}$

---

**Data:**  $\bar{\ell}$  large enough,  $0 < \varepsilon \ll 1$

**Result:**  $\ell_{opt}$

1 Define the vector of weights:

$$\hat{g}_n := \left( \frac{\beta_n(g, \bar{\ell}) - 1}{\beta_n(g, \bar{\ell})} \right) \left( \frac{g_n}{g} \right), \quad \text{with } \beta_n(g, \bar{\ell} + 1) = \max_{i \in X_g(\bar{\ell} + 1, N)} \{i_n\} \cdot;$$

2 Compute (4.37) and (4.38) using the quadrature rule  $\mathcal{A}_{\hat{g}}(\bar{\ell} + 1, N)$ :

$$\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{1,h,dt}, \quad \mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{2,h,dt};$$

3 **for**  $\ell \leftarrow 1$  **to**  $\bar{\ell}$  **do**

4     Compute (4.37) y (4.38) using the quadrature rule  $\mathcal{A}_{\hat{g}}(\ell, N)$ ;

5     **if**  $\max \left\{ \frac{|\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{1,h,dt}(\cdot) - \mathcal{M}_{g, \ell, N}^{1,h,dt}(\cdot)|}{\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{1,h,dt}(\cdot)}, \frac{|\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{2,h,dt}(\cdot) - \mathcal{M}_{g, \ell, N}^{2,h,dt}(\cdot)|}{\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{2,h,dt}(\cdot)} \right\} \leq \varepsilon$ , **then**

6          $\ell_{opt} = \ell$ ;

7         **break**

---

It is observed that the stopping criterion of the algorithm represents the proximity of the statistical moments computed with level  $\ell$  and the ones obtained with the level  $\bar{\ell}$  of the enriched solution, which plays the rol of exact solution.



In problem  $(P_1)$ , the goal is to compute with accuracy the first and second moment of  $(y(T), \partial_t y(T))$ . This justifies the choice of the stopping criterion, which has been selected in accordance with the cost functional of  $(P_1)$  and, in consequence, also in accordance with the stopping criterion of the Algorithm 4.1. Precisely, the tolerance  $\varepsilon$  in the stopping criterion of Algorithm 4.2, which measures accuracy level in analysis (resolution of the state and adjoint state equations) must be chosen less than or equal to  $\theta$  in Algorithm 4.1, which measures the accuracy in the optimization. In short,  $\varepsilon \leq \theta$  must be satisfied.

If the stopping criterion of Algorithm 4.2 is not satisfied, it means that the integer  $\bar{\ell}$  is not large enough to approximate with enough accuracy the exact solution of the problem. In such a case, another  $\bar{\ell}$  greater than the previous one is selected and the whole process is repeated with that new  $\bar{\ell}$ . Convergence results for this type of adaptive algorithms have been obtained in [10, Th. 3.13] and in [2, Sec. 4.1]. Hence, for the prescribed accuracy level  $\varepsilon$ , convergence of the process of computing  $\bar{\ell}$  is ensured.

## 4.4 Numerical experiments

In this section, two numerical examples are considered in order to illustrate the performance of the proposed algorithms. The attention is focused on the effect of uncertainty on the flexural rigidity  $a$ , modeled as a single random variable in the first experiment, and as a random field in the second one. The case where the initial data are affected of uncertainty could be analyzed analogously.

In both experiments the spatial domain is  $D = (0, 1)$ , the control time is  $T = 0.5$ , the control acts on  $\mathcal{O} = (0.2, 0.8)$  and the initial conditions are

$$(y^0(x), y^1(x)) = (\sin(\pi x), 0). \quad (4.39)$$

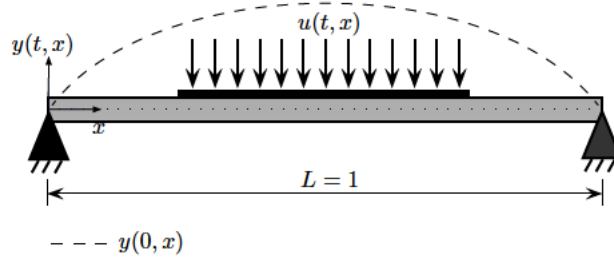
The algorithm is initialized with

$$u_0(t, x) = 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{O}, \quad (4.40)$$

and the tolerance level for Algorithm 4.1 is fixed as  $\theta = 10^{-2}$ . The parameters for Newmark method (Section 4.3.3.2) are  $\delta_1 = 0.6$  and  $\delta_2 = 0.35$ . The geometry, initial and boundary conditions are shown in Figure 4.2.

The numerical results obtained by solving  $(P_1)$  are compared to its deterministic counterpart. Here *deterministic* problem means that the uncertain flexural rigidity is replaced by its mean value, and the cost functional  $J(u)$  by

$$J_d(u) = \frac{1}{2} \|y(T)\|_{L^2(D)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t y(T)\|_{L^2(D)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u\|_{L^2((0,T) \times \mathcal{O})}^2. \quad (4.41)$$



**Figure 4.2** Experiment 1: geometry, initial and boundary conditions

*Note 4.2.* All the numerical experiments in this Chapter and in the following one have been conducted with the software Matlab R2015a.

#### 4.4.1 Experiment 1: Uncertainty as a random variable

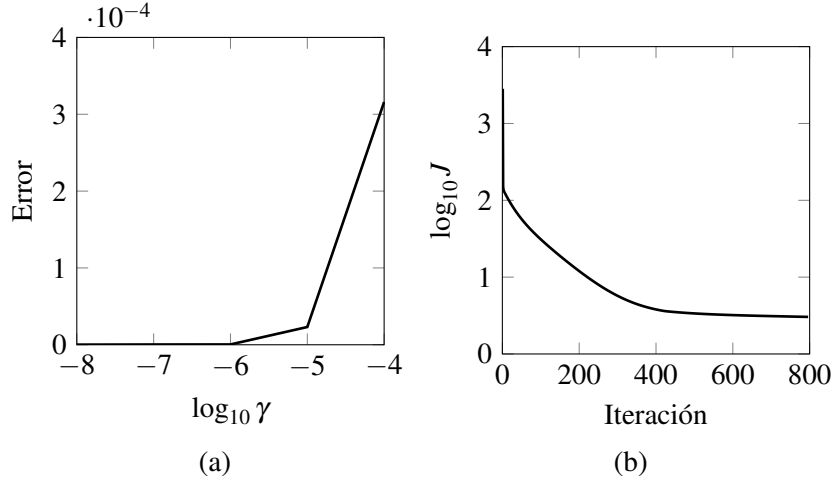
In this experiment, it is assumed that the flexural rigidity  $a$  takes the form  $a = 1 + \alpha$ , where  $\alpha = \alpha(z)$  is a random variable uniformly distributed in the interval  $[-0.5, 0.5]$  with mean equal to 0 and variance equal to  $1/12$ . It is important to highlight that for this configuration, averaged exact controllability (2.19) holds, which is proved in [9, Appendix]. The parameters for time and spatial discretization are  $dt = 0.001$  and  $h = 0.01$ , respectively. An one-dimensional Gauss-Legendre quadrature rule with  $N_{cp} = 4$  collocation points has been used for numerical approximation in the stochastic domain. This number of collocation points has been selected according to the Algorithm 4.2, with parameters' values  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\bar{\ell} = 9$ , resulting  $\ell_{opt} = 4$ . In this case, it is observed that a few nodes are enough to accurately approximate the involved integrals in the probabilistic space. This is due to the fact that for smooth initial data, as in (4.39), the solution  $y(T)$  is  $C^\infty$  with respect to the random parameter  $\alpha$ . This may be proved by using a Fourier representation of  $y(T)$ . Recall that for a function  $f \in C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , the order of the quadrature error is  $N_{cp}^{-k}$  [12].

The effect of the regularizing parameter  $\gamma$  on the first statistical moment of the state variable at time  $T$ , after convergence of the algorithm, is presented in Figure 4.3a. As expected, the goal of getting the quantity

$$\text{error} := \left\| \int_{-0.5}^{0.5} y(T, \cdot, \alpha) d\alpha \right\|_{L^2(D)}^2 + \left\| \int_{-0.5}^{0.5} \partial_t y(T, \cdot, \alpha) d\alpha \right\|_{L^2(D)}^2, \quad (4.42)$$

close to zero is deteriorated for increasing values of  $\gamma$ . A value of  $\gamma = 10^{-6}$  has been used in the numerical experiments. To demonstrate the efficiency of the proposed approach to provide robust solutions, (P<sub>1</sub>) has been solved for different values of the weighting parameters  $\beta_1 = \beta_2 = 0, 1, 10, 100$ . The convergence history

of the optimization algorithm, for  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 100$  and  $\gamma = 10^{-6}$  is shown in log-scale in Figure 4.3b. The computational burden can be defined as the



**Figure 4.3** Experiment 1: (a) effect of the regularizing parameter  $\gamma$  on the first statistical moment of the state variable at time  $T$ , after convergence of the algorithm. The error (4.42) is plotted at the vertical axis. (b) Convergence history of the algorithm for  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 100, \gamma = 10^{-6}$ .

product of the number of times that the PDE is solved by the number of iterations. In this case, at each iteration the systems (4.1), (4.11) and (4.15) must be solved, at 4 nodes, and at 800 iterations. This involves  $3 \times 4 \times 800 = 9,600$  evaluations of a PDE. An advantage of the SC method is the possibility of running in parallel the PDE evaluations at the nodes, since they are independent. Hence, the total number of evaluations may be divided by 4. In practice, the reduction of time is not so high. For instance, this experiment has been performed at a computer with 4 cores, and by means of parallelization, a reduction of time around 2.5 times is observed.

The results for the different values of the weighting parameters  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are presented numerically in Table 4.1. At least three conclusions can be drawn from those results. Firstly, the minimization of the mean value of the state variable ( $y(T), \partial_t y(T)$ ) reduces significantly the impact of random realizations of  $a(x, z)$  at the expected value of the state variable at time  $T$  in comparison with the results obtained using a deterministic approach, as shown in the first two data of the first column in Table 4.1. Thus, considering the first statistical moment in the cost functional is very convenient for control problems which are sensitive to random input data. Secondly, considering only the first moment of the state variable in the cost functional still provides a high standard deviation of the state variable, like

in the deterministic approach. To avoid this issue, statistical parameters reflecting dispersion, such as second statistical moments, need to be included in the cost functional. Eventually, the penalization of the second statistical moment in the cost functional ( $\beta_1 > 0$  and  $\beta_2 > 0$ ) leads to solutions where the value of the variance is significantly decreased. In this case, parameters  $\alpha_j$  and  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2$  permit to find a trade-off between robustness (measured by the second statistical moment) and accuracy in achieving the goal of being the average of the state variable close to zero (measured by the first one).

**Table 4.1** Experiment 1: Summary of results for  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  and  $\gamma = 10^{-6}$ . Here,  $\bar{y}$  and  $\overline{\partial_t y}$  denote the mean of  $y$  and  $\partial_t y$ , respectively.  $\text{std}(\cdot)$  represents the standard deviation.

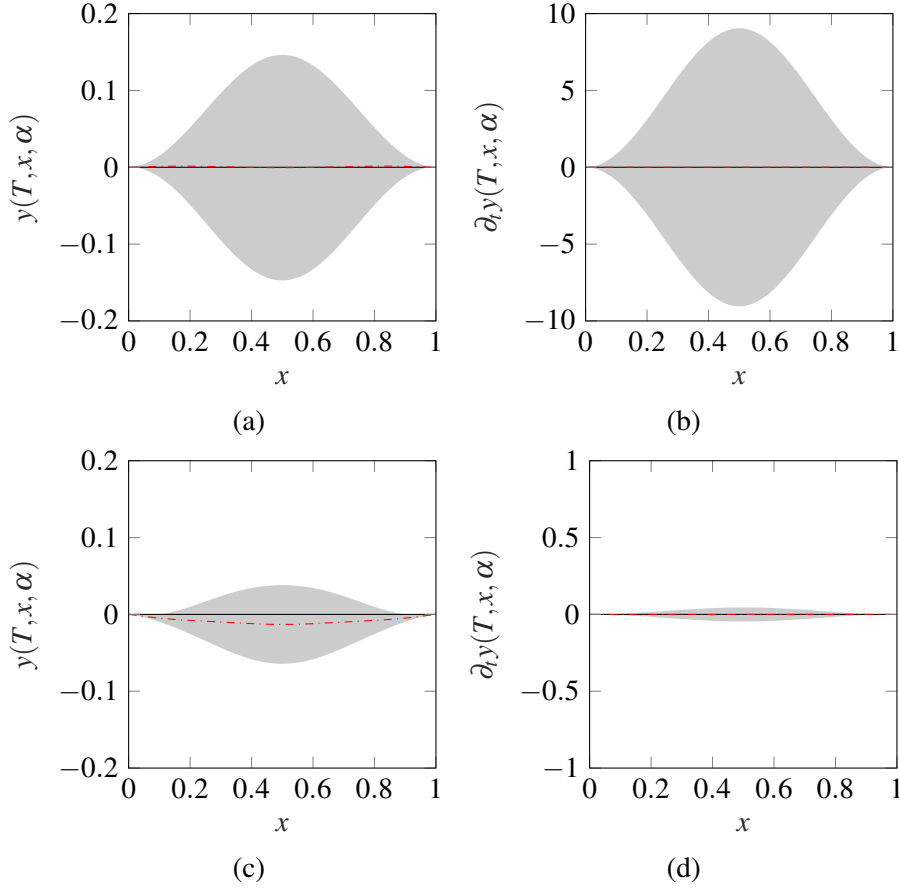
	$\ \bar{y}(T)\ _{L^2(D)}^2 + \ \overline{\partial_t y}(T)\ _{L^2(D)}^2$	$\ \text{std}(y(T))\ _{L^2(D)}^2 + \ \text{std}(\partial_t y(T))\ _{L^2(D)}^2$
Deterministic	$1.60 \times 10^0$	$1.57 \times 10^0$
$\beta_1 = \beta_2 = 0$	$9.35 \times 10^{-7}$	$1.32 \times 10^0$
$\beta_1 = \beta_2 = 1$	$8.25 \times 10^{-5}$	$3.32 \times 10^{-2}$
$\beta_1 = \beta_2 = 10$	$4.24 \times 10^{-4}$	$3.04 \times 10^{-2}$
$\beta_1 = \beta_2 = 100$	$7.18 \times 10^{-4}$	$2.94 \times 10^{-2}$

These conclusions are illustrated in Figure 4.4, where the mean of the state variable (dotted red line) along with the 90% confidence interval (shadow region), which is computed using Chebyshev's inequality (3.33) are depicted. As in Table 4.1, the figures show how the maximum width of the confidence interval is reduced at the cost of increasing the mean of the state variable at  $T$ .

Regarding optimal controls, Figure 4.5 shows the results for the optimal control  $u(t, x)$ , in the cases: (a) deterministic problem, and (b)-(c) solutions of  $(P_1)$  without constraints in the size of the control and for different values of the weighting parameters. It is observed that the optimal control obtained minimizing only the mean of the state variable (Figure 4.5b) is quite similar to the one obtained in the deterministic case (Figure 4.5a). However, the optimal control including the second moment in the cost functional (Figure 4.5c) shows a very different behavior.

#### 4.4.1.1 Qualitative behavior of the control profiles

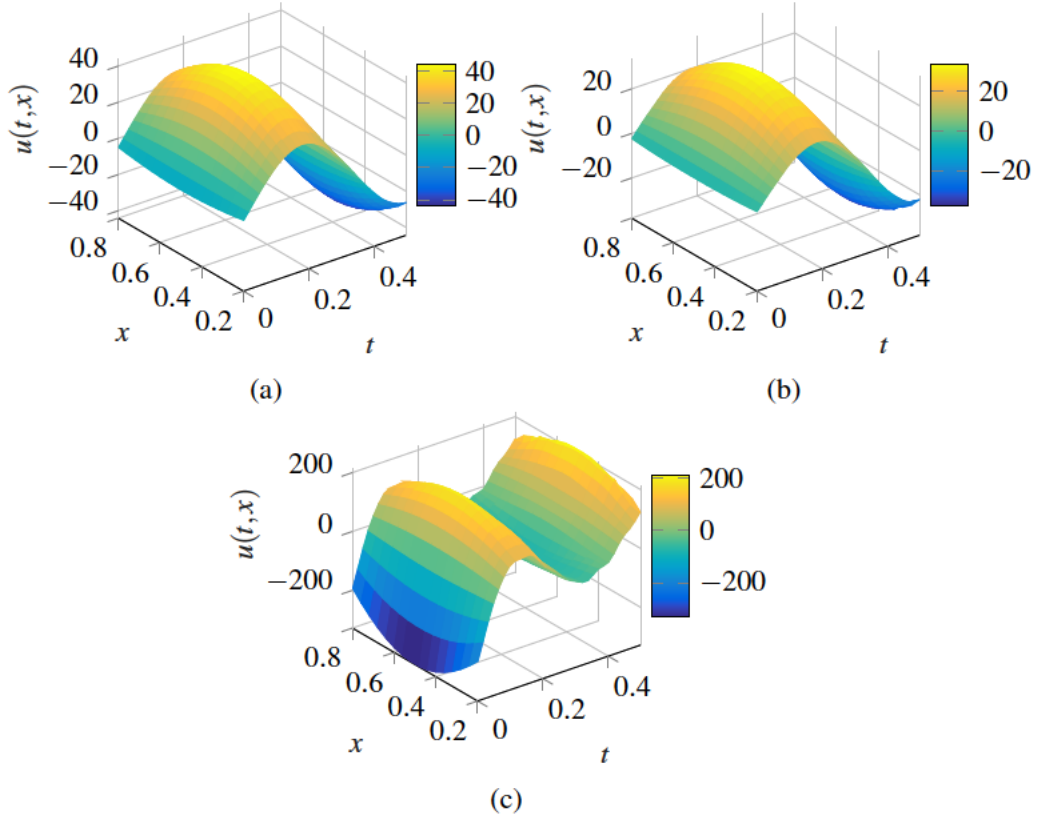
To better understand the qualitative behavior of the control profiles (Figure 4.5) from a physical point of view, the way in which the beam equation propagates uncertainty is analyzed in Figure 4.6. To this end, it is denoted by  $y_{\text{unc}}(t, x, z)$  the solution of the uncontrolled ( $u = 0$ ) beam equation considered in this experiment. It is easy to see that



**Figure 4.4** Experiment 1: Results for  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\gamma = 10^{-6}$ , (a,b)  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  y (c,d)  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . Confidence intervals for the stochastic state variable (left panel) and confidence intervals for the stochastic velocity (right panel).

$$\begin{aligned}
 y_{\text{unc}}(t, x, z) &= \cos\left(\sqrt{1 + \alpha} \pi^2 t\right) \sin(\pi x) \\
 &= \frac{1}{2} \sin\left[\pi\left(x + \pi t \sqrt{1 + \alpha}\right)\right] + \frac{1}{2} \sin\left[\pi\left(x - \pi t \sqrt{1 + \alpha}\right)\right]. \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

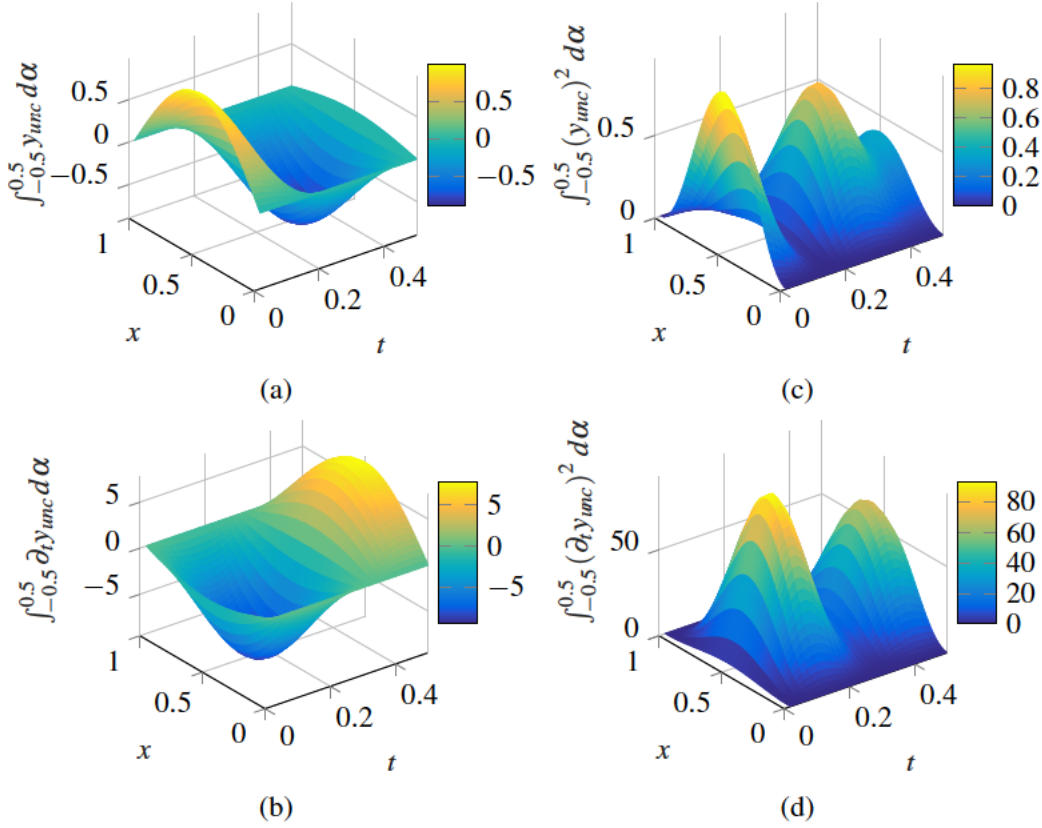
From (4.43) one concludes: (a) the initial condition  $y^0(x) = \sin(\pi x)$  propagates in time as a wave with random amplitude  $\cos(\sqrt{1 + \alpha} \pi^2 t)$ , and (b) each material point  $x$  propagates as the superposition of two waves travelling in opposite directions at a random speed  $\pi\sqrt{1 + \alpha}$ . Moreover, from (4.43) one may explicitly compute the first two moments of  $(y_{\text{unc}}, \partial_t y_{\text{unc}})$ , which are also plotted in Figure 4.6. In particular, by the mean value theorem for integrals,



**Figure 4.5** Experiment 1:  $\gamma = 10^{-6}$ . Optimal controls for: (a) deterministic problem, (b)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 0$  and (c)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 1$ .

$$\bar{y}_{\text{unc}}(t, x) = \int_{-0.5}^{0.5} \cos(\sqrt{1 + \alpha}\pi^2 t) \sin(\pi x) d\alpha = \cos(\sqrt{1 + \alpha^*}\pi^2 t) \sin(\pi x), \quad (4.44)$$

for some  $-0.5 \leq \alpha^*(t) \leq 0.5$ . Thus,  $\bar{y}_{\text{unc}}$  is quite similar to the uncontrolled deterministic solution with  $\alpha = 0$ , which is given by (4.43). This fact explains the similarity between the controls plotted in Figure 4.5a-b. However, the second order moments of  $(y_{\text{unc}}, \partial_t y_{\text{unc}})$ , depicted in Figure 4.6c-d, show a very different qualitative behavior. Precisely, one observes an additional oscillation and there is also a change in amplitude. The control displayed in Figure 4.5c is in accordance with this behavior of the second moment of the uncontrolled random solution.



**Figure 4.6** Experiment 1: Results for  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\gamma = 10^{-6}$ . First column shows the mean of the uncontrolled solution (a)  $y_{\text{unc}}(t, x, z)$ , and (b)  $\partial_t y_{\text{unc}}(t, x, z)$ . Second column represents the second order moment of (c)  $y_{\text{unc}}(t, x, z)$ , and (d)  $\partial_t y_{\text{unc}}(t, x, z)$ .

#### 4.4.2 Experiment 2: Uncertainty as a random field

In this second experiment, a random field is considered to model the uncertainty in the flexural rigidity  $a$ . The goal is twofold: study the efficiency of the proposed approach, and analyze the influence of a spatially-correlated random field on the control. The parameters for time and spatial discretization are  $dt = 0.005$ , and  $h = 0.05$ , respectively.  $a(x, z)$  is the log-normal random field developed in Subsection 3.2.4. It consists on a correlated random field, with exponential covariance function and correlation length  $L_c = 0.4$ . The number of terms  $N$  of (3.9) is 6, which allows to capture 90% of the field energy.

A non-nested quadrature rule, whose collocation nodes are determined by the roots of Hermite polynomials, is used. The optimal quadrature level is adaptively chosen by means of Algorithm 4.2, starting with  $N = 6$ ,  $\bar{\ell} = 12$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ , and resulting in  $\ell_{\text{opt}} = 6$ . The nodes and weights for the anisotropic sparse grid are

computed for this level  $\ell_{opt} = 6$ . Table 4.2 shows the values of the maximum indices  $\mathbf{I}(\mathbf{g}, \ell)$  obtained through the adaptive process of computing  $\mathcal{A}_{\mathbf{g}}(\ell, N)$  as well as the values of the maximum indices  $\hat{\mathbf{I}}(\hat{\mathbf{g}}, \bar{\ell} + 1)$  for computing the enriched solution.

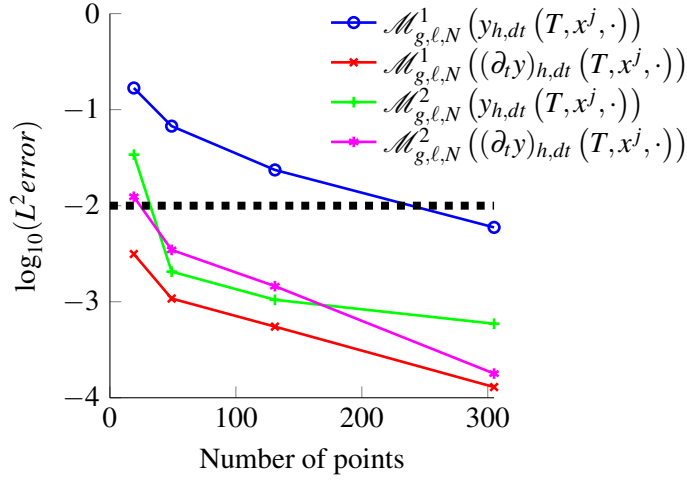
**Table 4.2** Exp. 2 Robust: The  $N = 6$  terms of the peak indices  $\mathbf{I}(\mathbf{g}, \ell)$  and  $\hat{\mathbf{I}}(\hat{\mathbf{g}}, \bar{\ell} + 1)$  used for solving.

$\ell$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$
1	2	1	1	1	1	1
2	3	2	1	1	1	1
3	4	2	2	1	1	1
4	5	3	2	2	1	1
5	6	4	3	2	2	1
6	7	4	3	2	2	2
$\hat{\mathbf{I}}$	14	9	6	4	4	3

The rates of convergence are depicted in Figure 4.7, which reveals, as expected, a (sub)-exponential decay of the error as the number of points increases linearly. It shows that the level (and the number of points) of the anisotropic sparse grid is governed by the *error* of the mean of the vertical displacement at time  $T$ , which has the slowest rate of convergence. It is observed that more than 200 collocation points in the random domain  $\Gamma$  are required to comply with the stopping criterion of Algorithm 4.1. Unlike Experiment 1, in which evaluations were performed only at 4 nodes, here the time saving with parallelization may be much higher, if a computer of more than 200 cores is used.

The results obtained for the different values of the weighting parameters  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are presented in Table 4.3. Similarly to Experiment 1, the case with  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  reduces significantly the impact of critical realizations on the expected value of  $y(T, x, \omega)$  and  $\partial_t y(T, x, \omega)$  in comparison with the deterministic approach. Furthermore, Table 4.3 shows how the weighting parameters  $\beta_1$  and  $\beta_2$  permit to balance the error with respect to the average null controllability property and the robustness. On the one hand, high values of  $\beta$  provide solutions less sensitive to variations in the input data. On the other hand, low values of  $\beta$  provides a better approximation to the average null controllability property (2.19), but with high variance. This effect is detailed in Figure 4.8, which shows the local effects of these optimal controls at each point of the beam. As in Experiment 1, the maximum width of the confidence interval is reduced at the cost of worsening the average null controllability property. However, the largest uncertainty is not necessarily in the center of the beam, due to the spatial correlation of the random field.



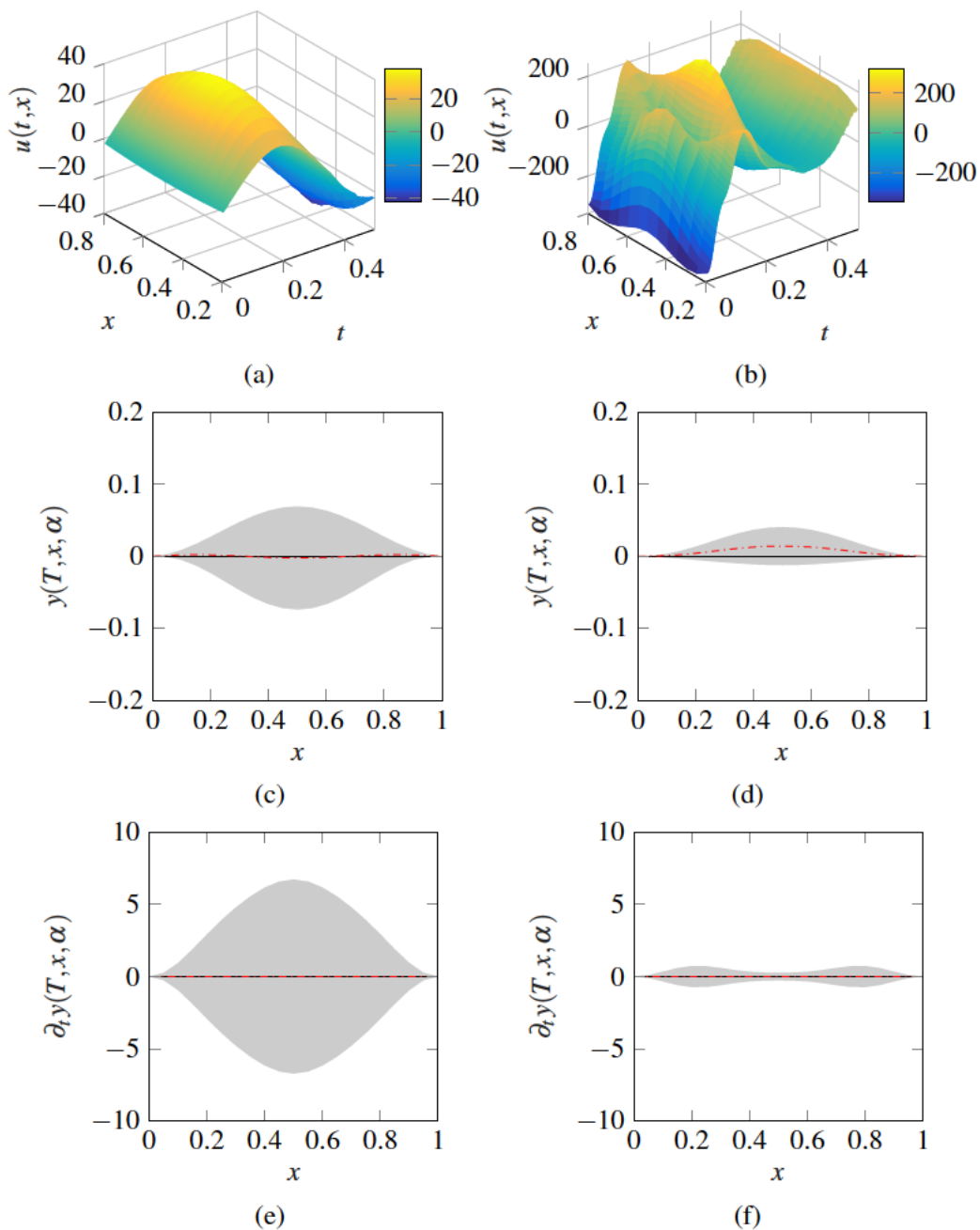


**Figure 4.7** Rates of convergence for the statistical quantities of interest.

In order to analyze the influence of spatially dependent random field on the control, the control profiles for the cases  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  and  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  are shown in Figure 4.8. It is observed that the optimal control obtained minimizing only the mean of the state variable (Figure 4.8a) is very close to the one obtained in Experiment 1 (Figure 4.5b). However, for the case of  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  the spatial dependence makes the control profile (Figure 4.8b) more irregular in shape than the one of the previous experiment (Figure 4.5c), producing significant fluctuations along the spatial domain  $D$ .

**Table 4.3** Experiment 2: Summary of results for  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\gamma = 10^{-6}$  and  $L_c = 0.4$ .  $\bar{y}$  and  $\bar{\partial_t y}$  denote the mean of  $y$  and  $\partial_t y$ , respectively.  $\text{std}(\cdot)$  represents the standard deviation.

	$\ \bar{y}(T)\ _{L^2(D)}^2 + \ \bar{\partial_t y}(T)\ _{L^2(D)}^2$	$\ \text{std}(y(T))\ _{L^2(D)}^2 + \ \text{std}(\partial_t y(T))\ _{L^2(D)}^2$
Deterministic	$6.22 \times 10^{-1}$	$1.89 \times 10^0$
$\beta_1 = \beta_2 = 0$	$1.25 \times 10^{-6}$	$1.36 \times 10^0$
$\beta_1 = \beta_2 = 1$	$8.13 \times 10^{-6}$	$1.54 \times 10^{-1}$
$\beta_1 = \beta_2 = 10$	$1.50 \times 10^{-5}$	$1.08 \times 10^{-1}$
$\beta_1 = \beta_2 = 100$	$1.72 \times 10^{-5}$	$1.08 \times 10^{-1}$



**Figure 4.8** Experiment 2: Results for  $L_c = 0.4$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\gamma = 10^{-6}$ , (a,c,e)  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  and (b,d,f)  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . The following quantities are represented: control variable (top row), confidence intervals for the stochastic state variable of displacement (central row) and confidence intervals for the stochastic velocity (bottom row).

## 4.5 Summary and conclusions

A gradient method for a stochastic optimal control problem constrained by a PDE, which is the Bernoulli-Euler beam equation with random coefficients, is presented. Uncertainty in the flexural rigidity parameter and in the initial conditions is quantified through random variables and random fields. The first-order and second-order statistical moments of the state variable at the final time are included in the cost functional. An adaptive sparse grid SC method is used to efficiently solve the underlying state and adjoint state equations, which are decoupled. The set of decoupled deterministic problems that arises from the SC method is solved in parallel. The use of parallel computing reduces the computational burden and permits to solve problems with a relative large number of terms in the truncated KL expansion of the random fields.

The numerical experiments highlight the importance of considering uncertainty in optimization. Optimal deterministic controls are far from being suitable in the presence of uncertainty and differ significantly from those obtained by means of minimizing the dispersion of the controlled solution at the final time. Concerning the capability of the functional cost to provide robust solutions, the proposed scalarization permits to find a trade-off between robustness of solution and averaged null controllability property, which gives more information to the designer.

As a conclusion, gradient-based optimization algorithms are numerically competitive for solving robust optimal control problems constrained by time-dependent parametric PDEs. Finally, it is important to emphasize that the approach proposed in this paper may be easily extended to spatial dimensions 2 and 3, to the case of averaged *exact* controllability, boundary-type controls, and to other type of random evolution PDEs.

## References

- [1] Aitchison, J., Brown, J. A. C.: The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics. Cambridge University Press, (1957)
- [2] Babuška, Nobile, F., Tempone, R.: A Stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Review* 52 (2), 317-355 (2010).
- [3] Cîndea, N., Micu, S., Tucsnak, M.: An approximation method for exact controls of vibrating systems. *SIAM J. Control Optim.* 49 (3), 1283 - 1305 (2011).
- [4] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S.: Optimization with PDE Constraints. *Mathematical Modelling: Theory and Applications*, vol. 23,

- Springer, Berlin (2009).
- [5] Hughes, T. J. R.: The Finite Element Method. Linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall, New Jersey (1987).
  - [6] Komornik, V.: Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method. Masson (1994).
  - [7] Komornik, V., Loreti, P.: Fourier series in control theory. Springer (2005).
  - [8] Lagnese, J. E., Lions, J. L.: Modelling, analysis and control of thin plates. Masson, Paris (1988).
  - [9] Marín, F. J., Martínez-Frutos, J., Periago, F.: Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. *J. Optim. Theory Appl.* 174(2), 428-454 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1128-x>
  - [10] Nobile, F., Tempone, R., Webster, C. G.: An anisotropic sparse grid stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM J. Numer. Anal.* 46 (5), 2411 - 2442 (2008).
  - [11] Rosseel, E., Wells, G. N.: Optimal control with stochastic PDE constraints and uncertain controls. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 213/216, 152-167 (2012)
  - [12] Smith, R. C.: Uncertainty Quantification. Theory, Implementation and Applications. SIAM Computational Science & Engineering, (2014).
  - [13] Smolyak, S.: Quadrature and interpolation formulas for tensor product of certain classes of functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 4, 240-243 (1963)
  - [14] Tröltzsch, F.: Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics 112. AMS. Providence, Rhode Island (2010).

## Chapter 5

# Numerical resolution of risk-averse optimal control problems

This chapter addresses the numerical resolution of the **risk-averse** control problem formulated in Section 2.3.2, collecting the work performed in Paper [5].

### 5.1 Introduction

The robust control developed in the previous chapter only takes into account the two first statistical moments of solution, this is, mean and variance. For problems where a failure may entail a serious problem, it does not result suitable, because the uncommon random realizations do not have effect in the value of the mean and variance, so that they are not reflected. Thus, this risk-averse control intends to reduce the probability of failure. In Subsection 2.3.3, the main differences with the robust formulation approach are explained.

### 5.2 Risk-averse optimal control problem

The work model is the Bernoulli-Euler system (2.1) with control (2.8), expressed in the probability space  $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \rho(z) dz)$ :

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) = v \partial_x (\delta_{x_1} - \delta_{x_0}), & \text{in } (0, T) \times D \times \Gamma, \\ y(0) = \partial_x^2 y(0) = y(L) = \partial_x^2 y(L) = 0, & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{in } D \times \Gamma, \end{cases} \quad (5.1)$$

where  $\delta_{x_j} = \delta_{x_j(z)}(x)$  is the Dirac mass applied at the point  $x_j$ , with  $j = 0, 1$ , and

$$v = u(1 + \hat{u}), \quad (5.2)$$

being  $u : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  the (*unknown*) deterministic control, which represents the applied voltage, and  $\hat{u}(z)$  the (*known*) error, associated to the control device. Note

that the control  $u$  must belong to the set of admissible controls  $\mathcal{U}_{ad,p}$ , given by (2.11).

The variational formulation of this problem is the following:  $y(t, x, z)$  is a solution of (5.1) if and only if

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \int_0^L \partial_t^2 y w dx \rho dz + \int_{\Gamma} \int_0^L a \partial_x^2 y \partial_x^2 w dx \rho dz \\ = \int_{\Gamma} \int_0^L v \partial_x (\delta_{x_1} - \delta_{x_0}) w dx \rho dz, \quad \forall w(x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

At the numerical implementation level, the right hand-side is processed in the following way: taking  $w(x) = \phi_{h_i}$  shape function of the space (4.17), formally it results:

$$\int_{\Gamma} \int_0^L v \partial_x (\delta_{x_1} - \delta_{x_0}) \phi_{h_i} dx \rho dz = - \int_{\Gamma} v \partial_x (\phi_{h_i}(x_1) - \phi_{h_i}(x_0)) \rho dz \quad (5.4)$$

The existence and uniqueness of solution is proved in [5].

Given

$$I(u, z) = \frac{1}{2} (\|y(T, z)\|_H^2 + \|\partial_t y(T, z)\|_{V^*}^2), \quad (5.5)$$

for a fixed  $\varepsilon$ , and adding the regularizing parameters  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \geq 0$ , the considered cost functional is the following:

$$J_{\varepsilon, \gamma}(u) = \int_{\Gamma} H(I(u, z) - \varepsilon) \rho dz + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T (\partial_t u)^2 dt. \quad (5.6)$$

In short, the optimal control problem considered in this case is

$$(P_2) \quad \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}_{ad,p}} J_{\varepsilon, \gamma}(u) \\ \text{subject to } (y, u) \text{ solution of (5.1)} \end{cases}$$

**Theorem 5.1.** *Let be  $\gamma_1 > 0$  in (5.6). Then, the optimal control problem (P<sub>2</sub>) has, at least, one solution.*

The proof of this theorem is found in [5].

### 5.3 Numerical resolution

A gradient-based descent method is proposed for the numerical resolution of problem (P<sub>2</sub>). Since the Heaviside function is not differentiable, the cost functional  $J_{\varepsilon, \gamma}(u)$ , as given by (2.25), is approximated by

$$J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}(u) = \int_{\Gamma} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I-\varepsilon)}\right)^{-1} \rho dz + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T (\partial_t u)^2 dt, \quad (5.7)$$

where  $I = I(u, z)$  is given by (5.5), and  $0 < \alpha < 1$  is the parameter reflecting accuracy in the Heaviside function approximation. In Experiment 3.2 (Subsection 5.4.3), the suitability of this approximation is checked.

The difficulty which arises during a standard descent method is that if parameters  $\varepsilon$  and  $\alpha$  are kept fixed, then at some iteration  $k$  (typically, at the first one) the probability density function (PDF) of  $I(u_k, \cdot)$  could be located in the region where the approximation of the Heaviside function is constant and equal to one (i. e. if  $I(u_k, z) > \varepsilon$  a.s.  $z \in \Gamma$ ); hence not providing a descent direction. To overcome this difficulty, the parameters  $\varepsilon$  and  $\alpha$  are updated at each iteration according to the location of the probability distribution of  $I(u_k, \cdot)$ . Then, the only way a new control finds to reduce the probability of  $I$  of exceeding the adapted parameter  $\varepsilon_k$  is by moving the probability distribution of  $I(u_k, \cdot)$  to the left. At the same time, since  $I$  is non-negative, in addition to this left-shift, the variance of the new  $I$  is lower than the one of the previous iterate (see Figure 5.1 for a graphical illustration). This observation motivates the adaptive optimization algorithm 5.1.

---

**Algorithm 5.1:** Adaptive gradient-based minimization algorithm

---

**Data:**  $u_0, \varepsilon, \delta, N_{max}$

**Result:**  $u, \alpha$

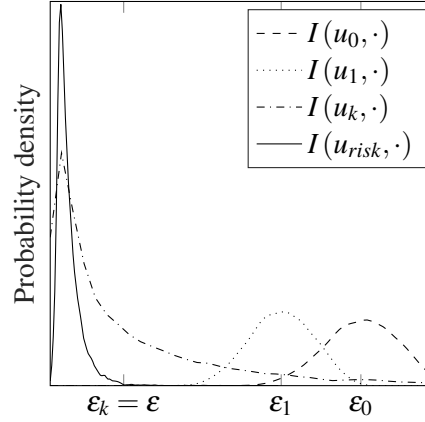
```

1 for  $k \leftarrow 0$  to  $N_{max}$  do
2    $\varepsilon_k \leftarrow \max(\varepsilon, \mathbb{E}[I(u_k, z)]);$ 
3    $\alpha_k \leftarrow 0.1 \cdot \text{Std}[I(u_k, z)];$ 
4   Choose a descent direction  $\bar{u}_k$  (for which  $\frac{\partial J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_k)}{\partial u} \cdot \bar{u}_k < 0$ );
5   Choose a step-size parameter  $\lambda_k$  such that  $J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_k + \lambda_k \bar{u}_k) < J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_k)$ ;
6   Set  $u_{k+1} = u_k + \lambda_k \bar{u}_k$ ;
7   if Control with restrictions then
8      $u_{k+1} = u_{k+1}^*$  (projected on the region  $\mathcal{U}_{ad, p}$ )
9   if  $k \geq 1$  &  $\varepsilon_k = \varepsilon$  then
10    if  $\frac{|J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_{k+1}) - J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_k)|}{J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_{k+1})} \leq \delta$  then
11       $u = u_k$ ;
12       $\alpha = \alpha_k$ ;
13    break

```

---

*Remark 5.1.* Regarding the choice of the parameter  $\varepsilon_k$ , it is taken as the average of the cost, so that the probability to be minimized represents approximately 0.5. In this way, the algorithm translates the distribution to the left, and in the following



**Figure 5.1** Evolution of the probability density function of  $I(u_k, \cdot)$  along the minimization algorithm.  $u_{risk}$  denotes the solution of the risk-averse optimal control problem (P<sub>2</sub>).

iteration, the value of  $\varepsilon_k$  is updated. Thereby,  $\varepsilon_k$  is decreasing from iteration to iteration until it reaches the final value of  $\varepsilon$ . At that moment, the value of  $\varepsilon$  is fixed, and then the traslation of the probability distribution is the only operation performed, up to achieving that the cost be enough small.

With respect to the choice of the parameter  $\alpha_k$ , it is a delicate issue. If the value of  $\alpha_k$  is too high, the accuracy of the Heaviside approximation is degraded. On the contrary, if the value of  $\varepsilon$  is too small, it may not be correctly approximated if there are a few number of sampling points in the transition regions between zero and non-zero probability regions. Following the guidelines indicated in [4], the parameter  $\alpha_k$  is adaptively updated during the optimization in the numerical experiments. This is performed by selecting the value of  $\alpha_k$  as the tenth part of the standard deviation of the cost to be minimized.

*Remark 5.2.* Note that if condition  $\varepsilon_k \leq \varepsilon$  is not satisfied after a given, large enough, number of iterations, then the algorithm stops. This is an indication that the prescribed  $\varepsilon$  is too small to be satisfied with controls  $u \in \mathcal{U}_{ad,p}$ .

### 5.3.1 Explicit computation of a descent direction

By using the Lagrangian method formally, an explicit expression for the derivative of  $J_{\varepsilon,\gamma}^\alpha(u)$  may be obtained, in a similar way to the one developed in Section 4.3.1 (steps are omitted here for the sake of simplicity).

The directional derivative of  $J_{\varepsilon,\gamma}^\alpha(u)$  at each  $u \in \mathcal{U}_{ad,p}$  in the admissible direction  $\bar{u}$  is given by



$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}(u)}{\partial u} \cdot \bar{u} &= \int_0^T (\gamma_1 u \bar{u} + \gamma_2 \partial_t u \partial_t \bar{u}) dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma} \bar{u} (1 + \hat{u}) (\partial_x p(x_1(z)) - \partial_x p(x_0(z))) \rho dz dt, \end{aligned} \quad (5.8)$$

where  $p = p(t, x, z)$  solves the adjoint system

$$\begin{cases} \partial_t^2 p + \partial_x^2 (a(x, z) \partial_x^2 p) = 0, & (t, x, z) \in (0, T) \times (0, L) \times \Gamma \\ p(0) = \partial_x^2(0) = p(L) = \partial_x^2(L) = 0, & (t, z) \in (0, T) \times \Gamma \\ p(T) = -C(z) \partial_t y(T), & (x, z) \in (0, L) \times \Gamma, \\ \partial_t p(T) = C(z) y(T), & (x, z) \in (0, L) \times \Gamma, \end{cases} \quad (5.9)$$

with

$$C(z) = \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u, z) - \varepsilon)} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u, z) - \varepsilon)}\right)^{-2}. \quad (5.10)$$

Consequently, a descent direction for the cost functional (5.7) is

- Case  $\gamma_2 = 0$ :  $\bar{u} \in L^2(0, T)$  that holds

$$\bar{u} = -\gamma_1 u - \int_{\Gamma} [\partial_x p(x_1(z)) - \partial_x p(x_0(z))] \rho dz. \quad (5.11)$$

- Case  $\gamma_2 \neq 0$ :  $\bar{u} \in H_0^1(0, T)$  solution of

$$-\gamma_2 \partial_t^2 \bar{u} + \bar{u} = \gamma_2 \partial_t^2 u - \gamma_1 u - \int_{\Gamma} [\partial_x p(x_1(z)) - \partial_x p(x_0(z))] \rho dz. \quad (5.12)$$

### 5.3.2 Numerical approximation of the cost functional and its gradient

Although the random variable  $C(z)$ , given by (5.10), is (theoretically) smooth with respect to  $z$ , if  $\alpha$  is small, then numerically it is not smooth. The same problem appears when evaluating the cost functional (5.7) at each iteration of the descent algorithm. As a consequence, stochastic collocation methods, which are very efficient for smooth problems, are not a good choice in this situation. On the contrary, the use of a direct Monte Carlo (MC) method requires the numerical resolution of (5.1) and (5.9) at a large number of sampling points  $z_k \in \Gamma$  and at each step of the descent method. This makes MC method unaffordable from a computational point of view. For this reason, in this thesis, the Monte Carlo method is combined with a Polynomial Chaos (PC) approach for the resolution of the state and adjoint equations. More precisely,  $y(t, x, z)$  and  $p(t, x, z)$  are approximated with a PC expansion. Then, MC sampling is applied to those approximations to compute the

cost functional (5.7), the random variable (5.10) and the descent directions (5.11) or (5.12).

The discretization in space and time is performed in the same way as in the problem of previous chapter, hence it is not repeated here (the reader may look up it in Section 4.3.3).

### Non-intrusive anisotropic Polynomial Chaos expansion for uncertainty propagation

Following [2, 3, 4], let  $\{\psi_{r_n}(z_n)\}_{r_n=1}^{\infty}$  be an orthonormal basis of  $L_{\rho_n}^2(\Gamma_n)$  composed of a suitable class of orthonormal polynomials. Since  $L_{\rho}^2(\Gamma) = \bigotimes_{n=1}^N L_{\rho_n}^2(\Gamma_n)$ , an orthonormal polynomial basis of  $L_{\rho}^2(\Gamma)$  is constructed as

$$\left\{ \psi_r(z) = \prod_{n=1}^N \psi_{r_n}(z_n) \right\}_{r=(r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{N}^N}. \quad (5.13)$$

Now, let  $\ell \in \mathbb{N}_+$  be an index indicating the level of approximation in the random space  $L_{\rho}^2(\Gamma)$ . Having in mind a truncated KL expansion for the random inputs parameters of (5.1) and since random variables in a KL expansion do not weight equally, an anisotropic polynomial space is introduced as follows: given a vector of weights  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}_+^N$  for the different stochastic directions, the multi-index set

$$\mathbb{I}_{\beta}(\ell, N) = \left\{ r = (r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{N}^N \quad : \quad \sum_{n=1}^N r_n \beta_n \leq \ell \beta_{min} \right\}, \quad (5.14)$$

with  $\beta_{min} = \min_{1 \leq n \leq N} \beta_n$ , is considered. The optimal choice of  $\beta$  depends on the smoothness properties of the solution of the PDE (5.1) with respect to the parameter  $z \in \Gamma$ . For the case of Gaussian random fields the  $n$ -th term of  $\beta$  is taken as

$$\beta_n = \frac{1}{2\sqrt{2}\gamma_n \|b_n\|_{L^{\infty}(0,L)}}, \quad (5.15)$$

where  $(\gamma_n, b_n(x))$  is the eigenpair in KL expansion (see Section 3.2, or [1, 2] for more details about this passage).

Finally, the anisotropic approximation multivariate polynomial space is

$$\mathcal{P}_{\mathbb{I}_{\beta}(\ell, N)}(\Gamma) = \text{span} \left\{ \psi_r(z), \quad r \in \mathbb{I}_{\beta}(\ell, N) \right\}. \quad (5.16)$$

This choice of  $\mathcal{P}_{\mathbb{I}_{\beta}(\ell, N)}(\Gamma)$  is referred in the literature [2] as to anisotropic total degree polynomial space.

Thus, an approximated solution  $y_\ell(t, x, z) \in L^2((0, T); V) \otimes \mathcal{P}_{\mathbb{I}_\beta(\ell, N)}(\Gamma)$  of (5.1) is expressed in the following way

$$y_\ell(t, x, z) = \sum_{s \in \mathbb{I}_\beta(\ell, N)} \hat{y}_s(t, x) \psi_s(z), \quad \hat{y}_s \in L^2((0, T); V). \quad (5.17)$$

In order to obtain the coefficients  $\hat{y}_s(t, x)$ , the following formal computations are performed.

Multiplying at both sides of (5.17) by a function  $\psi_r(z)$  of the space (5.16) and integrating in  $\Gamma$ , it results

$$\int_\Gamma y_\ell(t, x, z) \psi_r(z) \rho(z) dz = \sum_{s \in \mathbb{I}_\beta(\ell, N)} \hat{y}_s(t, x) \int_\Gamma \psi_s(z) \psi_r(z) \rho(z) dz. \quad (5.18)$$

Due to the orthonormality of  $\{\psi_r(z)\}_{r \in \mathbb{I}_\beta(\ell, N)}$ ,

$$\hat{y}_r(t, x) = \int_\Gamma y_\ell(t, x, z) \psi_r(z) \rho(z) dz \approx \int_\Gamma y(t, x, z) \psi_r(z) \rho(z) dz. \quad (5.19)$$

This latter integral is numerically approximated by using an adaptive, anisotropic sparse grid collocation method as in Chapter 4 and in [? ]. The multi-index set used in the collocation method is  $\mathbb{I}_\beta(\ell + 1, N)$ , which provides enough accuracy to integrate polynomials in  $\mathcal{P}_{\mathbb{I}_\beta(\ell, N)}(\Gamma)$ . All this also requires the knowledge of  $y(t, x, z_k)$ , where  $z_k \in \Gamma$  are sampling nodes. As indicated above, the deterministic function  $y(t, x, z_k)$  is approximated by using the space-time discretization processes described in Sections 4.3.3.1 and 4.3.3.2. A very important advantage of this approach is that the automatic parallelization of the collocation method lets reduce the computational cost in a very significant way.

It remains to analyze how the level of approximation  $\ell$  is chosen. Since, in this problem, the main goal is to minimize the cost functional (5.7), the level of approximation  $\ell$  is adaptively chosen as to comply with the prescribed accuracy level  $\delta$  for that function. This method is described in Algorithm 5.2. A specific control must be fixed from the beginning. A possibility is taking  $u(t)$  as the optimal control of the deterministic version of the problem, where the random input parameters of (5.1) are replaced by their nominal (or averaged) values, and the cost criterion considered is

$$J_{det}(u) = \frac{1}{2} (\|y(T)\|_H^2 + \|\partial_t y(T)\|_{V^*}^2) + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T (\partial_t u)^2 dt. \quad (5.20)$$

If the stopping criterion of Algorithm 5.2 does not hold for any  $\ell < \bar{\ell}$ , then a larger  $\bar{\ell}$  is taken, since it is an indication that, for the prescribed tolerance  $\delta$ , the enriched solution  $y_{\bar{\ell}}(t, x, z)$  is not good enough. The whole process of Algorithm 5.2 is, then, repeated taking the new value of  $\bar{\ell}$  as reference.

---

**Algorithm 5.2:** Obtention of the quadrature level  $\ell = \ell_{opt}$

---

**Data:**  $\bar{\ell}$  large enough,  $0 < \delta \ll 1$ ,  $u(t)$

**Result:**  $\ell_{opt}$

- 1 The vector of weights  $\beta$  is computed in accordance with (5.15);
  - 2 An *enriched* solution  $y_{\bar{\ell}}(t, x, z)$  of (5.1) is computed, following the described method;
  - 3 An approximation  $J_{\varepsilon, \gamma, \bar{\ell}}^{\alpha}(u)$  of  $J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}(u)$  is obtained using Monte Carlo method, where random samplings are applied to  $y_{\bar{\ell}}(t, x, z)$ ;
  - 4 **for**  $\ell \leftarrow 1$  **to**  $\bar{\ell} - 1$  **do**
  - 5     Compute  $J_{\varepsilon, \gamma, \ell}^{\alpha}(u)$ ;
  - 6     **if**  $\frac{|J_{\varepsilon, \gamma, \ell}^{\alpha}(u) - J_{\varepsilon, \gamma, \bar{\ell}}^{\alpha}(u)|}{J_{\varepsilon, \gamma, \bar{\ell}}^{\alpha}(u)} \leq \delta$  **then**
  - 7          $\ell_{opt} = \ell$ ;
  - 8         **break**
- 

## 5.4 Numerical experiments

This section presents the numerical simulation results obtained by following the approach described in the preceding section.

Experiments 1 and 2 focus on the effect of the flexural rigidity  $a(x, z)$ , modeled as a single random variable in Exp. 1 and as a random field in Exp. 2. The influence of random errors in the location of the piezoelectric actuator is analyzed in Exp. 3.

Regarding the step-size parameter  $\lambda_k$  in Algorithm 5.1, its selection is performed with a classical method, in the following way: starting from a fixed value, at each iteration the value of the cost is compared to the one of the previous iteration; in case of increase, then the iteration is repeated with a lower step-size.

In all the experiments that follow, the beam length is  $L = 1$ , the initial conditions are  $y^0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $y^1(x) = 0$ , except in Exp. 3.2, the control time is  $T = 0.5$ , and the control function (5.2) is taken as  $v(t, z) = u(t)$ , i. e., it is assumed that  $\hat{u} = 0$  in (5.2).

### 5.4.1 Experiment 1: Uncertainty in the beam material properties. The case of a random variable

In this experiment, uncertainty appears only in the flexural rigidity  $a(x, z)$ , and it is modeled as

$$a(x, z) = 1 + U(z), \quad (5.21)$$

where  $U(z)$  is a random variable uniformly distributed in  $(-0.2, 0.2)$ . The location of the piezoelectric actuator is  $(0.3, 0.7)$ , i. e.,  $x_0 = 0.3$  and  $x_1 = 0.7$ . The parameters in (5.7) are:  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-4}$  and  $\gamma_1 = 10^{-6}$ . Two cases are considered:  $\gamma_2 = 0$  and  $\gamma_2 = 10^{-8}$ .

The physical domain is discretized with a uniform mesh of size  $h = 0.01$ . A uniform mesh of size  $dt = 0.0025$  is used for time discretization.

The tolerance  $\delta$  in Algorithm 5.2 is taken as  $\delta = 10^{-4}$  and the enriched level  $\bar{\ell} = 15$ , resulting in a level  $\ell = 7$ .

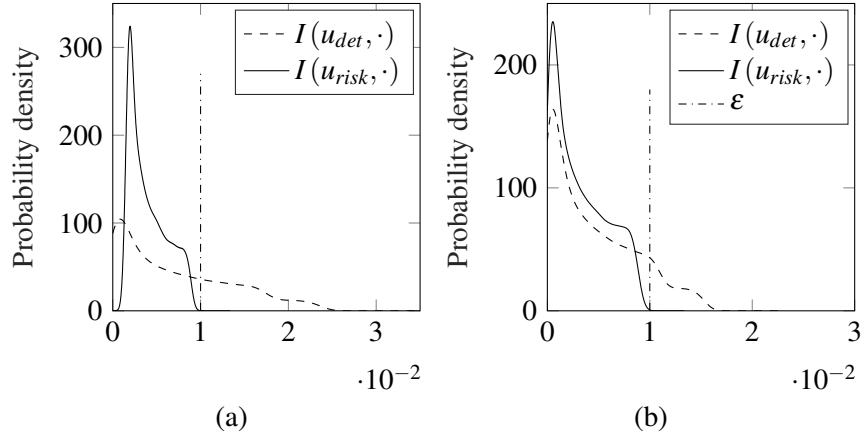
The descent Algorithm 5.1 is initialized with  $u^0(t) = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Numerical results are collected in Table 5.1. Here, deterministic means that the optimal control for the deterministic problem (where  $a = 1$  and the cost functional is (5.20)) is directly used at the cost (5.7). It is observed in the first row of Table 5.1 that the deterministic optimal control is far from being optimal in the risk-averse formulation. This is also observed in Figure 5.2, which displays the probability distributions of  $I(u, \cdot)$  for the optimal deterministic and risk-averse controls.

**Table 5.1** Experiment 1: Summary of results.

	$\gamma_2 = 0$		$\gamma_2 = 10^{-8}$	
	Deterministic	Risk-averse	Deterministic	Risk-averse
$\int_{\Gamma} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u,z)-\varepsilon)}\right)^{-1} \rho dz$	$3.0 \times 10^{-1}$	$1.8 \times 10^{-7}$	$1.2 \times 10^{-1}$	$1.4 \times 10^{-6}$
$\ u\ _{L^2(0,T)}$	$7.1 \times 10^0$	$5.1 \times 10^1$	$9.4 \times 10^0$	$1.4 \times 10^1$
$\ \partial_t u\ _{L^2(0,T)}$	$2.0 \times 10^3$	$7.8 \times 10^7$	$8.6 \times 10^2$	$1.8 \times 10^3$

The computed optimal controls are depicted in Figure 5.3. Due to the large oscillations in case  $\gamma_2 = 0$  (Figure 5.3a-b), it is considered desirable to study the case  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . The regularizing effect of this third term in (5.7) is clearly observed in Figure 5.3c-d. These results are also in agreement with what is observed in Chapter 4 (which is also shown in [6] in a related problem). Indeed, as indicated in Experiment 1 of Chapter 4, the second moment of the uncontrolled solution of equation (5.1), i. e., the solution of (5.1) with zero right-hand side, has larger amplitude and frequency than the uncontrolled solution of the associated deterministic beam equation. This justifies the increase of both the amplitude and frequency of the controls plotted in Figure 5.3b-d.



**Figure 5.2** Experiment 1: Probability distributions of  $I(u, \cdot)$  for the deterministic (dotted lines) and risk-averse (continuous lines) optimal controls in cases (a)  $\gamma_2 = 0$ , and (b)  $\gamma_2 = 10^{-8}$ .

#### 5.4.2 Experiment 2: Uncertainty in the beam material properties. The case of a random field

In this second experiment, a random field is considered in order to model the uncertainty in the flexural rigidity  $a$ . The main goal of this experiment is to analyze the performance of the proposed approach when a relative large number of random variables are used to model uncertainties.

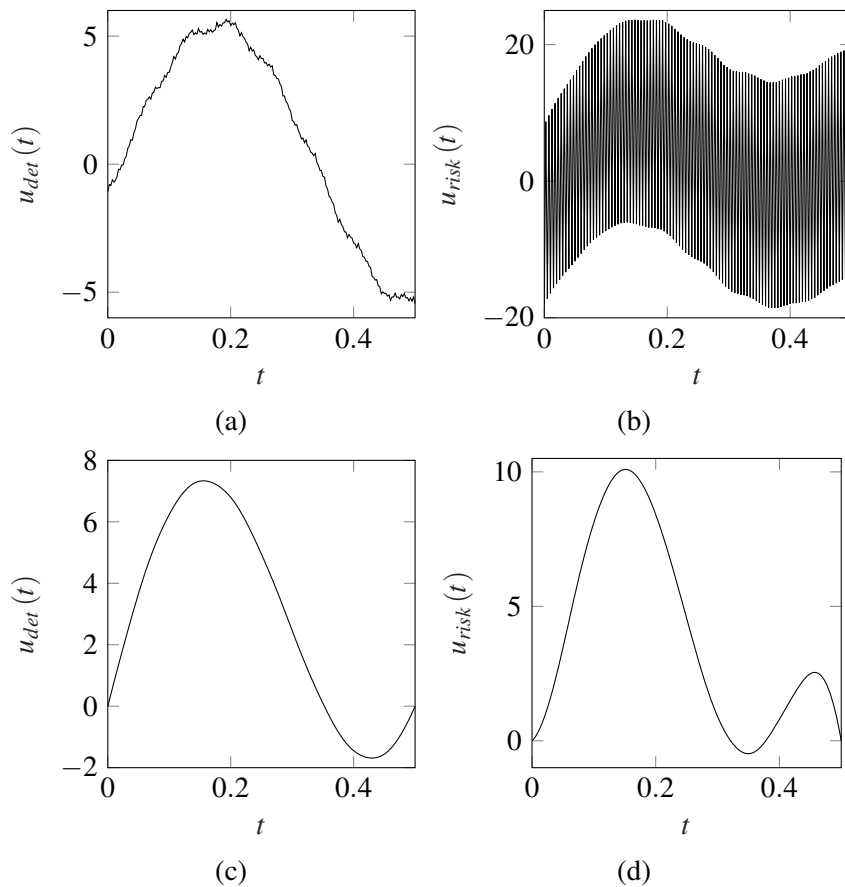
$a(x, z)$  is the random field (3.28), with  $\eta = -0.0066$  and  $\xi = 0.1151$ , so that it has mean  $\mu = 1$  and variance  $\sigma^2 = 0.0133$ .

The location of the piezoelectric actuator is  $(0.25, 0.75)$ , i. e.,  $x_0 = 0.25$  and  $x_1 = 0.75$ . The parameters in (5.7) are  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$  and  $\gamma_2 = 10^{-8}$ .

The physical domain is discretized with a uniform mesh of size  $h = 0.05$ . A uniform mesh of size  $dt = 0.0025$  is used for time discretization. The tolerance  $\delta$  in Algorithm 5.2 is taken as  $\delta = 10^{-2}$  and the enriched level  $\bar{\ell} = 10$ , resulting in a level  $\ell = 4$  for the PC expansion. In Figure 5.4 the rate of convergence of the adaptive Algorithm 5.2 of selection of the level of approximation  $\ell$  of the Polynomial Chaos expansion is represented.

Algorithm 5.1 is initialized with the optimal control for the deterministic problem (where  $a = 1$  and the cost functional is (5.20)).

The convergence history of Algorithm 5.1 is plotted in Figure 5.5. Firstly, the algorithm decreases the  $\varepsilon_0$  up to reach the prescribed value  $\varepsilon$ . Secondly, it reduces the cost functional until the stopping criterion is satisfied. The algorithm takes around 4,000 iterations to converge. In each one of those iterations, the PDE is

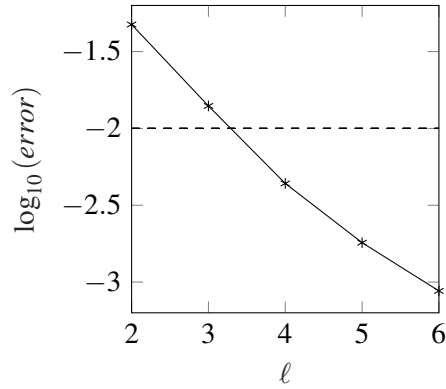


**Figure 5.3** Experiment 1: Results for  $\gamma_2 = 0$  (a,b), and  $\gamma_2 = 10^{-8}$  (c,d). Left panel (a,c) represents the deterministic optimal controls; right panel (b,d), the risk-averse optimal controls.

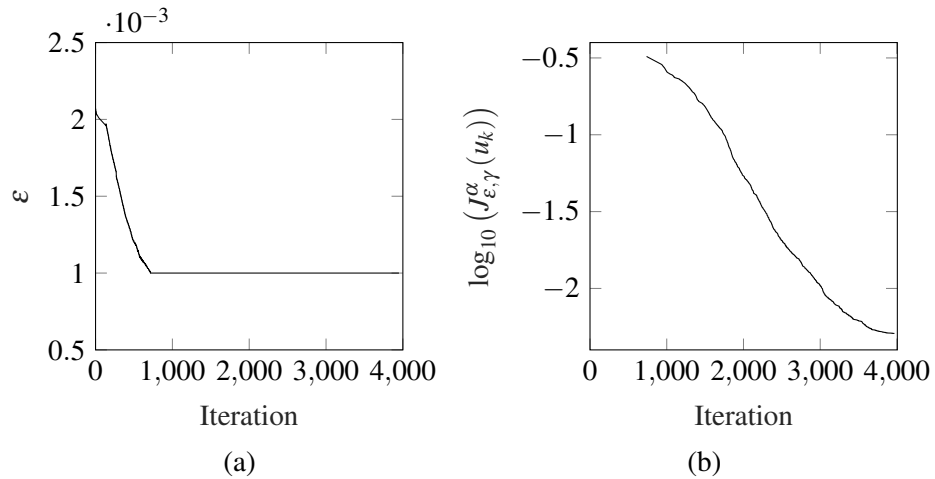
solved forward and backwardly in only 261 stochastic nodes, which is a significant improvement with respect to applying Monte Carlo directly to the PDE. It is also remarkable that the evaluation of the PDE over the 261 nodes can be done in parallel, with the consequent decrease of computational time.

In Figure 5.6, the optimal control of the risk-averse problem ( $P_2$ ) is compared with the optimal control of its deterministic counterpart. There is a significant difference in size and shape, being the risk-averse one larger and having a higher oscillation frequency.

Numerical results are collected in Table 5.2. As in the preceding experiment, deterministic means that the optimal control for the deterministic problem (where  $a = 1$  and the cost functional is (5.20)) is used in (5.7). Notice that, compared to the deterministic control, the risk-averse control reduces 3 orders of magnitude the probability of the cost functional of exceeding  $\varepsilon$ .



**Figure 5.4** Experiment 2: Rate of convergence for the PC expansion. The level of approximation  $\ell$  is represented in the horizontal axis. Vertical axis displays the approximation error, given by the stopping criterion on Algorithm 5.2.



**Figure 5.5** Experiment 2: Convergence history of the minimization algorithm. (a) Evolution of  $\epsilon_k$ . (b) For  $\epsilon$  fixed, evolution of the cost functional.

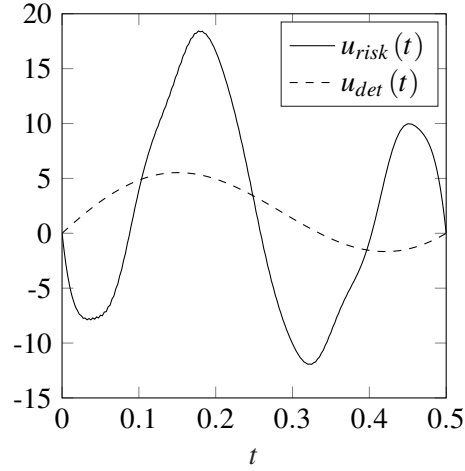
**Table 5.2** Experiment 2.  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . Summary of results.

	Deterministic Risk-averse	
$\int_{\Gamma} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u,z)-\epsilon)}\right)^{-1} \rho(z) dz$	$5.1 \times 10^{-1}$	$4.9 \times 10^{-3}$
$\ u\ _{L^2(0,T)}$	$7.7 \times 10^0$	$4.7 \times 10^1$
$\ \partial_t u\ _{L^2(0,T)}$	$5.4 \times 10^2$	$2.6 \times 10^4$

### 5.4.3 Uncertainty in the location of the piezoelectric actuator

In this experiment, the influence of random errors in the location of the piezoelectric actuator is studied. Two cases are studied: unconstrained and constrained controls. In the latter, new initial conditions are also considered.





**Figure 5.6** Experiment 2:  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . Optimal risk-averse control (continuous line) and optimal control of the deterministic problem (5.20) (dashed line).

### Experiment 3.1: Unconstrained control

The source of uncertainty is modeled as

$$x_j(z) = x_j + U(z), \quad j = 0, 1 \quad (5.22)$$

where  $x_0 = 0.3$ ,  $x_1 = 0.7$  and  $U(z)$  is a random variable uniformly distributed in the interval  $(-0.2, 0.2)$ . The flexural rigidity is taken as  $a = 1$  and the parameters in (5.7) are:  $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha = 3 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$  and  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . The tolerance in Algorithm 5.2 is  $\delta = 10^{-4}$ , and the enriched level  $\bar{\ell} = 15$ , which yields in  $\ell = 7$ .

The descent Algorithm 5.1 is initialized with a control  $u^0(t) = 1$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

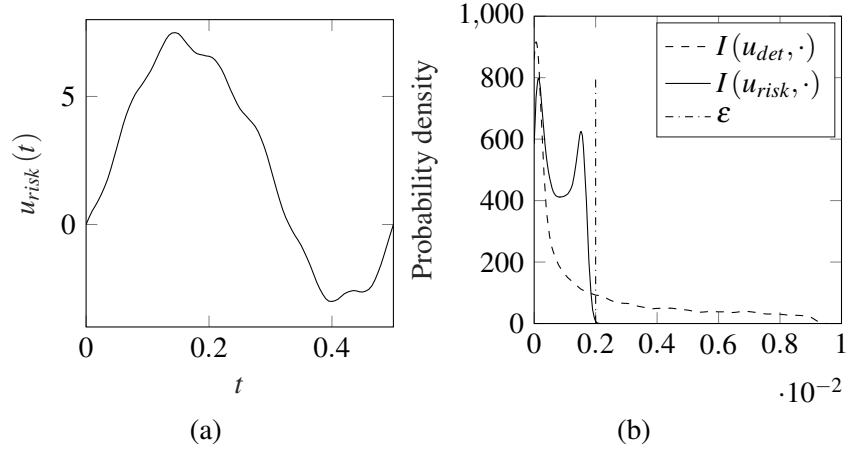
Figure 5.7 displays the computed risk-averse control, and the probability distributions of  $I(u, \cdot)$  for the optimal deterministic and risk-averse controls.

Numerical results are collected in Table 5.3. As observed in Table 5.3 (first row) the risk-averse formulation of the control problem provides very satisfactory controls even in this case, where relatively large uncertainty appears in the location of the piezoelectric actuator.

### Experiment 3.2: Constrained control. Initial conditions in the form of polynomials of degree 3.

In this experiment other initial conditions

$$y^0(x) = x^3(1 - x^3), \quad y^1(x) = 0, \quad (5.23)$$



**Figure 5.7** Experiment 3.1:  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . (a) Picture of the risk-averse control, and (b) probability distributions of  $I(u, \cdot)$  for the optimal deterministic (dashed line) and risk-averse (continuous line) controls.

**Table 5.3** Experiment 3.1:  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . Summary of results.

	Deterministic	Risk-averse
$\int_{\Gamma} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u,z)-\varepsilon)}\right)^{-1} \rho(z) dz$	$3.3 \times 10^{-1}$	$1.5 \times 10^{-4}$
$\ u\ _{L^2(0,T)}$	$1.1 \times 10^1$	$1.2 \times 10^1$
$\ \partial_t u\ _{L^2(0,T)}$	$8.0 \times 10^2$	$1.2 \times 10^3$

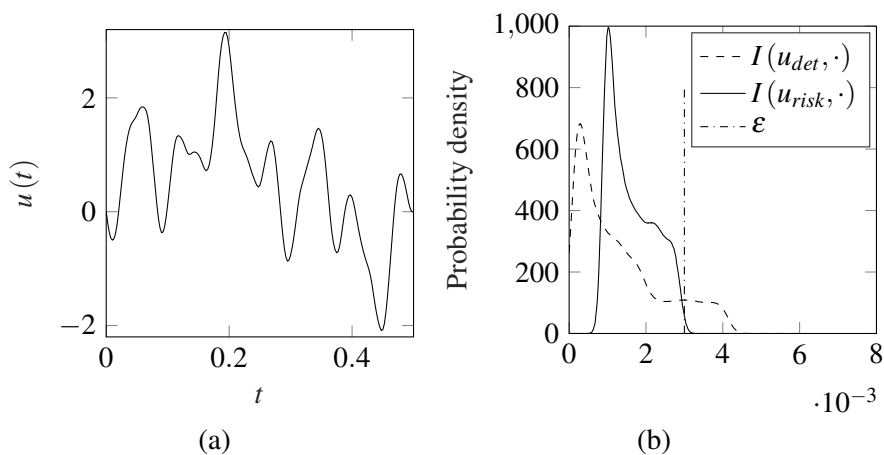
are considered, for which more oscillating controls are expected, and the objective is to find whether the algorithm is suitable to control in this situation.

Moreover, this experiment is solved with two different controls: unconstrained control (taking  $m = -\infty, M = \infty$ , in (2.11)) and constrained control (with  $m = -1, M = 1$ ).

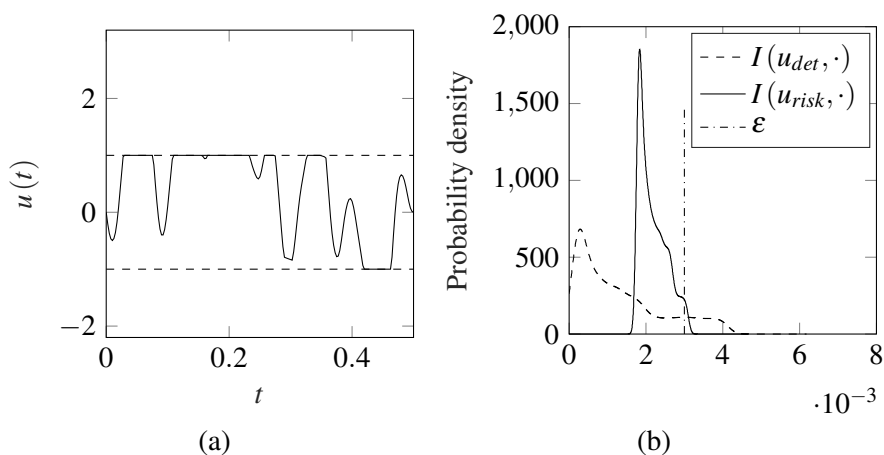
The endpoints of the piezoelectric actuator are given by  $x_j(z) = x_j + U(z)$ , for  $j = 0, 1$ , where  $x_0 = 0.45$ ,  $x_1 = 0.85$  and  $U(z)$  is a random variable uniformly distributed in the interval  $(-0.1, 0.1)$ . The flexural rigidity is taken as  $a = 1$ . The parameters in the cost functional are  $\varepsilon = 3 \times 10^{-3}$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$  and  $\gamma_2 = 10^{-8}$ .

To compare the two cases, Figures 5.8 and 5.9 display the pictures of the risk-averse controls and the evolution of the probability density function of  $I(u, \cdot)$  during the optimization algorithm for the unconstrained case (Figure 5.8) and the constrained one (Figure 5.9). The oscillations due to the initial conditions are observed. The value of the cost functional at convergence is  $4.0 \times 10^{-4}$  in the case of unconstrained controls and  $2.3 \times 10^{-2}$  in the case of constrained controls; hence,

both of them improve the value of the cost functional with the control of the deterministic problem (which is  $1.1 \times 10^{-1}$ ).



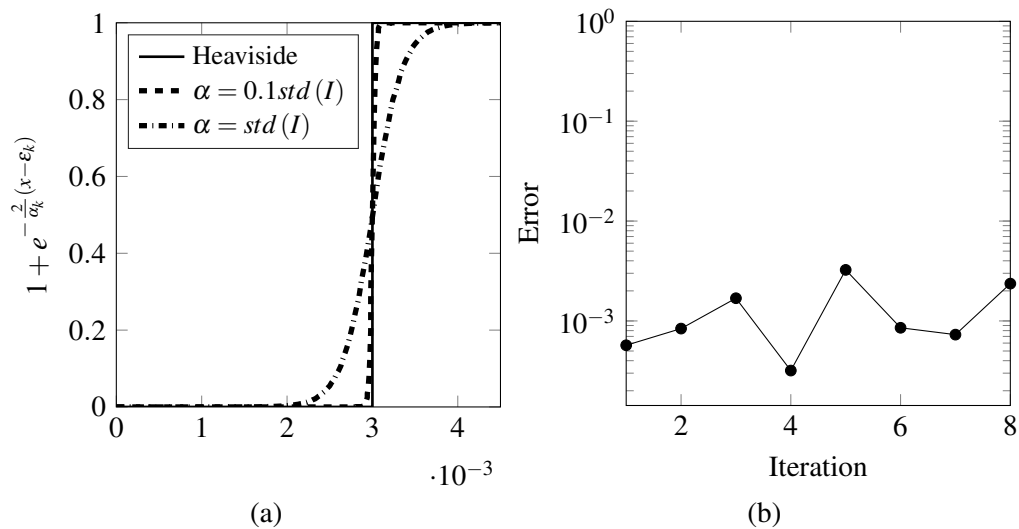
**Figure 5.8** Experiment 3.2: Unconstrained controls.  $m = -\infty$ ,  $M = +\infty$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$ ,  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . (a) Picture of the risk-averse control, and (b) probability distribution of  $I(u, \cdot)$  for the optimal deterministic (dashed line) and risk-averse (continuous line) controls.



**Figure 5.9** Experiment 3.2: Constrained controls.  $m = -\infty$ ,  $M = +\infty$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$ ,  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . (a) Picture of the risk-averse control, and (b) probability distribution of  $I(u, \cdot)$  for the optimal deterministic (dashed line) and risk-averse (continuous line) controls.

Figure 5.10a plots the Heaviside function  $H(x - \varepsilon)$  and its approximation  $H_\alpha(x - \varepsilon) = \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(x - \varepsilon)}\right)^{-1}$  for different values of the parameter  $\alpha$ , at the final iteration. The value of  $\alpha = 0.1 \text{std}(I)$  is considered as a good approximation

(see Remark 5.1). Figure 5.10b shows the absolute error between the Heaviside function and the  $\alpha = 0.1std(I)$  approximation during the iterative process, being always under  $10^{-2}$ .



**Figure 5.10** Experiment 3.2: (a) Heaviside function and its approximation for two different values of  $\alpha$ , at the final iteration. (b) Absolute error between Heaviside function and  $\alpha = 0.1std(I)$  approximation.

## 5.5 Summary and conclusions

Within a probabilistic framework, a risk-averse formulation of the optimal control problem which consists in controlling the random vibrations of a beam by means of a piezoelectric actuator has been introduced in this chapter. This formulation is novel in this field of optimal control of PDEs.

The use of a probability type cost functional as well as the well-known curse of dimensionality phenomenon are serious difficulties for the numerical resolution of the control problem. An adaptive minimization algorithm has been proposed to overcome the probabilistic issue in the cost functional, and a combination of a Polynomial Chaos approach with the Monte Carlo method has been used to reduce the high computational cost associated to this type of problems.

The results of the numerical experiments shown indicate that this formulation works well, since the probability distribution is moved almost completely to the left hand side of the threshold value, thus obtaining very low probabilities. Moreo-

ver, it is able to provide robust controls since the probability distribution narrows, due to the impossibility of the cost of taking negative values. It has been checked out even in the case of relatively large random errors in the input parameters of the model. In essence, the proposed approach has shown an excellent performance in the tested numerical experiments.

Although the interesting problem, from the point of view of its engineering applications, of control of vibrations in a one-dimensional beam model has been studied in this chapter, the proposed approach could also be applied to problems in higher dimensions.

## References

- [1] Babuška, I., Nobile, F., Tempone, R.: A Stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Review* 52 (2), 317-355 (2010)
- [2] Bäck, J., Tempone, R., Nobile, F., Tamellini, L.: On the optimal polynomial approximation of stochastic PDEs by Galerkin and collocation methods. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 22 (9), 1250023 (2012)
- [3] Blatman G., Sudret B.: Anisotropic parsimonious polynomial chaos expansions based on sparsity-off-effects principle. Inter. Conference on Structural Safety and Reliability, Osaka, Japan 2009
- [4] Keshavarzadeh V., Meidani M., Tortorelli A.: Gradient based design optimization under uncertainty via stochastic expansion methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2016; (306), 47-76.
- [5] Marín FJ, Martínez-Frutos J, Periago F.: A polynomial chaos-based approach to risk-averse piezoelectric control of random vibrations of beams. *Int J Numer Methods Eng.* 1–18, 2018. <https://doi.org/10.1002/nme.5823>
- [6] Marín, F. J., Martínez-Frutos, J., Periago, F.: Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. *J. Optim. Theory Appl.* 174(2), 428-454 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1128-x>



## Chapter 6

# Averaged controllability of the wave equation (ongoing work)

### 6.1 Introduction

Controllability of PDEs with random input data (in particular, parameter dependent PDEs) is an emergent research topic. In [6], the concept of averaged control was introduced, where the controlled quantity of interest is the mean of the random system with respect to the random parameter. At a theoretical level, some positive averaged controllability results have been obtained for the heat, wave and Schrödinger equations in [2, 4, 5], but the numerical resolution of this kind of controllability problems has not been considered so far. In [3], some algorithms for the computation of the exact random control of some finite dimensional parameter dependent systems have been used.

### 6.2 Setting of the problem

Let  $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \rho(z) dz)$  be the probability space defined in Subsection 3.2.3. It is considered the problem

$$\begin{cases} \partial_t^2 y - \partial_x(a \partial_x y) = 1_{\mathcal{O}} u, & \text{in } (0, T) \times D \times \Gamma, \\ y(0) = y(L) = 0, & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{in } D \times \Gamma, \end{cases} \quad (6.1)$$

where  $y(t, x, z)$  represents the vertical position of the material point  $x$  of a wave at time  $t$  depending on the random parameter  $z$ ,  $a$  is the coefficient which represents the square of the propagation velocity,  $D = (0, L)$  is the spatial domain of the wave,  $T$  is the time control,  $u(t, x)$  is the applied control, and  $\mathcal{O}$  is the region in which the control acts.

Uncertainty may be located, similarly to the Bernoulli-Euler beam model, at:

- The velocity coefficient  $a(x, z)$ .

- The amplitude or location of the control  $u(t, x)$ .
- The initial conditions  $y^0(x, z), y^1(x, z)$ .

The aim of averaged controllability is to find  $u(t, x)$  so that:

$$\int_{\Gamma} y(T, x, z) \rho(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma} \partial_t y(T, x, z) \rho(z) dz = 0, \quad (6.2)$$

being  $y$  the solution of (6.1) for the control  $u$ .

Then, a robust version of the problem is considered.

The following cost functional is introduced:

$$J(u, y) = \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T \int_D u^2 dx dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T \int_D (\partial_t u)^2 dx dt \\ + \beta_1 \int_D \int_{\Gamma} (y(T))^2 \rho dz dx + \beta_2 \int_D \int_{\Gamma} (\partial_t y(T))^2 \rho dz dx. \quad (6.3)$$

This functional tries to reduce the amplitude of the control and its derivative, and the second statistical moment of the state variables at the time control  $T$ .

In essence, the optimal control problem is enunciated in the following way:

$$(P_c) \quad \begin{cases} \min_u J(u, y) \\ \text{subject to } (y, u) \text{ solution of (6.1)-(6.2)} \end{cases}$$

### 6.3 Spectral method for the obtention of control of minimum norm

For the case  $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ , spectral method can be applied in order to obtain the exact solution, expressed in terms of Fourier series, which provides the control of minimum  $L^2$  norm.

In particular, the solution  $\phi(t, x)$  of problema adjunto:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \phi - \partial_x(a \partial_x \phi) = 0, & \text{in } (0, T) \times D \times \Gamma, \\ \phi(0) = \phi(L) = 0, & \text{on } (0, T) \times \Gamma, \\ \phi(T) = \phi^0, \quad \partial_t \phi(T) = \phi^1, & \text{in } D \times \Gamma, \end{cases} \quad (6.4)$$

can be written as

$$\phi(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} \sqrt{a}) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k} \sqrt{a}} \sin(\sqrt{\lambda_k} \sqrt{a} t) \right] \sin(\sqrt{\lambda_k} x) \quad (6.5)$$



where  $a_k, b_k$  are the Fourier coefficients of  $\phi^0, \phi^1$ , and

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L} \quad (6.6)$$

are the eigenvalues for the wave equation considered.

It is known that the control  $u(t, x)$  of minimum  $L^2$  norm satisfies the following equation:

$$-\int_D \left( y^1 \int_{\Gamma} \phi(0) \rho dz - y^0 \int_{\Gamma} \partial_t \phi(0) \rho dz \right) dx = \int_D \int_0^T 1_{\mathcal{O}} u \phi dt dx. \quad (6.7)$$

This identity allows to compute explicitly the averaged exact control in the case  $\mathcal{O} = (0, L)$ , and with uncertainty at the velocity coefficient  $a$  in the form of random variable. This control may be used as a reference to check the behavior of numerical schemes for the resolution of this kind of problems.

## 6.4 Numerical resolution

The possible extension to the random case of the algorithms for the resolution of problem (6.1)-(6.2) in the deterministic case is intended to be studied. In particular, by means of the following saddle-point formulation.

Firstly, the Lagrangian associated to the problem is formally built, including Lagrange multipliers for the restrictions; in particular,  $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$  for the mean of the state variables, and the adjoint state  $p$  for the PDE:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, \lambda_1, \lambda_2, p) := & J(u, y) + \int_0^L \lambda_1 \int_{\Gamma} y \rho dz dx + \int_0^L \lambda_2 \int_{\Gamma} \partial_t y \rho dz dx \\ & + \int_{\Gamma} \int_0^T \int_D p (\partial_t^2 y - \partial_x(a \partial_x y) - 1_{\mathcal{O}} u) dx dt \rho dz. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Then, the mentioned saddle-point formulation is set in the following way:

$$\sup_{(\lambda_1, \lambda_2)} \min_{(y, u)} \mathcal{L}(y, u, \lambda_1, \lambda_2, p) \quad (6.9)$$

Preliminary numerical simulation results have been obtained in [1].

## References

- [1] Marín, F., Münch, A., Cîndea, N.. In preparation, (2018).

- [2] Lazar, M., Zuazua, E.: Averaged control and observation of parameter-dependent wave equations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 352, 497-502 (2014).
- [3] Lazar, M., Zuazua, E.: Greedy controllability of finite dimensional linear systems. *ArXiv:1601.02817v2* (2016).
- [4] Lohéac, J., Zuazua, E.: Averaged controllability of parameter dependent wave equations. *hal-01122077* (2015).
- [5] Lü, Q., Zuazua, E.: Averaged controllability for Random Evolution Partial Differential Equations. *J. Math. Pures Appl.* 105 (3), 367-414 (2016).
- [6] Zuazua, E.: Averaged control. *Automatica.* 50, 3077-3087 (2014).

# Chapter 7

## Conclusions

### 7.1 Summary of contents

Along this thesis, techniques to solve OCPs of PDEs, with uncertainty in their input parameters, are developed, on the basis of the known descent algorithms for OCPs of deterministic PDEs.

In the following, the main aspects which this thesis involves are summarized:

- Regarding the kind of cost or objective functional used, two main cases are distinguished: robust control and risk-averse control.
  - The robust optimal control of the evolutionary PDE of the Bernoulli-Euler beam model aims at minimizing the mean and variance of the displacement and of the velocity of the beam at a final control time  $T$ . Hence, two statistical quantities of interest are involved, which are mean and variance. The former represents the aim of reaching a null vibration at the final time, whereas the latter intends to reduce the dispersion. This kind of robust optimal control problems are found in the literature, applied to stationary PDEs, and to an evolutionary PDE of first order in time, but the novelty here is that it is applied to an evolutionary PDE of second order in time.
  - The risk-averse optimal control, also for the evolutionary PDE of the Bernoulli-Euler beam, aims at reducing the probability of the displacement and velocity of the beam of exceeding a certain threshold at a final control time  $T$ . The cost functional includes probability, which is more challenging than including mean and variance. This is a much more novel case, because the concept of risk aversion, used in the field of Economy, is brought here to this kind of optimal control problems constrained by PDEs, and it is not found in the literature in the framework of Optimal Control (it has been previously used in Structural Optimization). In this problem, an adaptive algorithm has been developed, in order for the parameters to be adapted to the probability distribution at each iteration.

- Regarding the kind of control, two cases receive attention: a generic control (more academic case), and a piezoelectric control (with direct applications in Engineering).
  - The generic control is, simply, a function depending on time and space. Once this generic control is obtained, the question would be whether there is a device which is able to generate it.
  - The piezoelectric control is a more realistic case. It consists on a material which transforms an applied voltage into a pair of mechanical moments.
- Uncertainty quantification is a very relevant topic in this thesis.
  - For the modeling of the uncertainty in the input data, which appears in the form of correlated random fields, Karhunen-Loève expansion is used. Under the assumption of finite dimensional noise in the input data, this expansion allows to transform a random field into a sum of pairwise uncorrelated random variables. Moreover, a transformation of the probability space is performed, changing a random PDE into a deterministic PDE with an  $N$ -dimensional parameter.
  - For the resolution of the integrals which appear in the cost functional, the following techniques are used, mainly: Stochastic Collocation (SC), Polynomial Chaos (PC) and Monte Carlo (MC). SC can be used when the cost functional is smooth with respect to the random parameter, and allows to reduce considerably the number of nodes on which the PDE has to be evaluated, if compared with the direct application of MC method on the PDE. However, when the cost functional is not smooth with respect to the random parameter, SC techniques do not provide a good result, and the option is to use a PC approximation of the solution of the system, to express it as a linear combination of some orthogonal polynomials, by means of some coefficients which are calculated with SC on the PDE. Once these coefficients have been calculated, MC can be applied over this PC approximation, without having to solve the PDE again. In this way, the computational cost required is not so high.
- Regarding the numerical experiments:
  - Two numerical experiments for the robust control are performed, in which uncertainty appears at the term of flexural rigidity of the beam. In the first of them, shaped like a random variable. In the second one, in the form of a correlated random field.
  - Some numerical experiments for the risk-averse control are conducted. Firstly, two experiments in which uncertainty is located at the flexural rigidity, as in the previous case, in the form of a random variable and of a random

field. Then, uncertainty is placed at the location of the piezoelectric actuator, in the form of a random variable. An experiment with other initial conditions is performed, setting a control with restrictions (upper and lower bound) in its amplitude.

## 7.2 Conclusions of the thesis

- Descent algorithms for optimal control problems of random PDEs have been validated, being built in a similar way to the deterministic case.
- Uncertainty deserves to be taken into account. Depending on the type and magnitude of the uncertainty, the optimal control of the deterministic problem may be far from providing the optimal solution in the random problem, as it is shown in the experiments of this thesis.
- The control which reduces the dispersion of the output data is very different, in size and shape, from the one that only reduces the mean of them. Because of this, it is also necessary to take into account the variance in the cost functional.
- It is observed that the change in size and shape of the control which minimizes the second statistical moment, with respect to the one which minimizes only the mean, is in consonance with the statistical moments of the uncontrolled solution (when the system is allowed to evolve freely).
- The considered problems are summed up as the resolution of the PDEs for a set of values of the random parameters (evaluation on a set of nodes). The evaluation on these nodes can be done in an independent way; hence, parallel computation can be programmed, so that it does not suppose such a high computational time.
- An adaptive descent algorithm for the case of risk-averse optimal control has been proposed and validated.

## 7.3 Future work

The results obtained in this thesis may be the starting point for the study of more realistic problems, among others:

1. In Chapter 6 the controllability (or exact control) problem is introduced. Following the work started, it would be possible to perform the numerical experiments and study this possible extension of the averaged controllability problems to the probabilistic framework.

2. In this thesis the work model is one-dimensional, which is considered enough for validating the algorithms. A following step may be to search the application of piezoelectric control to plates and shells (two-dimensional case).
3. In the work developed here, the hypothesis of small displacements, which lets the beam recuperate its initial shape once the applied force ceases, is introduced. A possible alternative is the piezoelectric control of beams, plates and shells with large displacements (non-linear case), i. e., hyper-elastic structures.
4. Another possible option might be to perform a comparative study of all the methods to deal with uncertainty in control: comparing the techniques developed in this thesis (Stochastic Collocation, Polynomial Chaos and Monte Carlo) with others, such as reduced bases, multi-level Monte Carlo, or high-dimensional model representation (HDMR).
5. Furthermore, the possibility of implementing in a laboratory the piezoelectric material, with a view to test the piezoelectric control developed in this thesis, might be studied.

**Versión en español:**  
**Control de Sistemas Vibratorios con Datos**  
**de Entrada Aleatorios: un Estudio**  
**Numérico**





# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Motivación

Debido a su papel importante en una amplia variedad de aplicaciones en Ingeniería, el control de vibraciones de estructuras flexibles, tales como membranas, vigas, placas o láminas, ha sido un campo de investigación muy activo, dando lugar a numerosos trabajos que incluyen el modelado matemático (en diferentes versiones: control activo, pasivo, piezoeléctrico, etc.) y la implementación de estrategias de control.

Un hecho inherente, no solo a esta clase de sistemas vibratorios, sino en general a cualquier sistema físico, es la presencia de incertidumbres en los parámetros de entrada. Estas incertidumbres se pueden clasificar como epistémicas o aleatorias. Las primeras se deben a un conocimiento incompleto del sistema (datos sobre las propiedades del material, geometría de la estructura, condiciones iniciales y/o de contorno, etc.), y, por tanto, pueden ser reducidas por medio de medidas adicionales o de una mejora de los instrumentos de medida. Las segundas son intrínsecas a un sistema (por ejemplo, el Principio de Incertidumbre de la Mecánica Cuántica), y no pueden ser reducidas.

En la literatura científica, se puede encontrar bastante información relativa tanto al control de sistemas vibratorios con parámetros de entrada fijos (caso determinista) como a la *Cuantificación de la Incertidumbre*. En este trabajo de tesis, se busca combinar ambas partes, para tratar el control de vibraciones de sistemas con parámetros de entrada aleatorios. Como dichos parámetros de entrada de las ecuaciones de los sistemas son aleatorios, la solución de las mismas también va a depender de los parámetros aleatorios. En definitiva, las vibraciones que se trata de controlar son aleatorias. Se trata de un tema emergente en investigación en los últimos años.

En teoría de control óptimo, se define un funcional coste u objetivo. La pregunta es cómo formularlo en este marco aleatorio. Generalmente, se plantea un funcional coste determinista, que contiene cantidades estadísticas de interés, como pueden ser media, varianza, etc. (en resumen, integrales en el dominio aleatorio), y está construido a partir de la versión determinista del problema. En este trabajo, se pretende estudiar dos tipos de problemas atendiendo a sus funcionales coste: un problema de control óptimo (PCO) *robusto* (en el que se trata de reducir la media y la dispersión de los datos de salida), y un PCO de *aversión al riesgo* (más restrictivo, en el que se pretende reducir la probabilidad de que los datos superen un cierto valor umbral).

En esta tesis, el control que se emplea es determinista, y su forma depende del dispositivo con el que se aplique. De esta manera, también se plantean dos casos: en el primero, el control es una función genérica que depende de tiempo y espacio, un entorno más académico, y permite obtener una visión global del problema; en el segundo, el control es de tipo piezoeléctrico, que transforma la energía eléctrica en mecánica, un problema de interés en Ingeniería y del que se dispone de la tecnología para implementarlo.

Desde el punto de vista matemático, estos problemas de control de vibraciones aleatorias de sistemas modelados por EDPs gozan de un gran interés, presentando, al menos, dos dificultades reseñables: (1) el modelado de la incertidumbre en los parámetros de entrada, que generalmente aparece en forma de campos aleatorios correlacionados; y (2) el cálculo de las cantidades estadísticas incluidas en los funcionales coste, que usualmente son integrales en el dominio aleatorio de ciertas magnitudes de los datos de salida de las ecuaciones.

Desde el punto de vista computacional, es importante destacar que estos problemas suelen suponer una gran carga computacional, lo cual ha influido también en que no se hayan podido estudiar hasta el pasado reciente. Merece especial atención tratar de reducir el tiempo de ejecución de los algoritmos de minimización en estos problemas de control óptimo, mejorable con técnicas como resolución en paralelo y/o modelos de sustitución (*surrogate models*, en inglés).

De todo lo anterior se desprende el gran interés que tienen este tipo de PCOs de EDPs con parámetros de entrada aleatorios, y la motivación para emprender un trabajo de tesis que permita entenderlos un poco mejor.

## 1.2 Objetivos

Motivado por el estudio de problemas de control de tipo piezoeléctrico, para vigas y placas, se establece como modelo de trabajo la ecuación evolutiva de la viga de Bernoulli-Euler con incertidumbre en sus parámetros de entrada. No obstante, las

técnicas desarrolladas en esta tesis pueden ser aplicadas a otras EDPs de evolución de segundo orden en tiempo, tales como la de ondas, entre otras, sin necesidad de cambios significativos.

Los objetivos se pueden resumir en los siguientes puntos:

1. Formular el problema de control óptimo robusto, incluyendo en el funcional coste la media y la varianza de las variables de estado en el tiempo final de control.
2. Formular el problema de control óptimo de aversión al riesgo. En el funcional coste se incluye la probabilidad de que los valores de las variables de estado superen un valor umbral. Se emplea un control piezoeléctrico.
3. Modelar la incertidumbre en los parámetros de entrada de forma precisa, con la expansión de Karhunen-Loève (KL) en el caso de campos aleatorios correlacionados.
4. Seleccionar las herramientas adecuadas para resolver las integrales en el dominio aleatorio: Colocación Estocástica (CE), Galerkin o Caos Polinomial (CP), Monte Carlo (MC), o una combinación de ellas.
5. Adaptar los conocidos algoritmos de descenso para problemas de control óptimo con EDPs deterministas a estos problemas con EDPs estocásticas.
6. Comparar los resultados de los controles óptimos en este marco aleatorio con los controles óptimos de las versiones deterministas de los problemas.

### 1.3 Organización de la tesis

En el Capítulo 2, se realiza un breve repaso por el estado de arte del control óptimo de EDPs con parámetros aleatorios. Seguidamente, se establece el marco del problema objeto de estudio y se plantean los funcionales coste de los problemas robusto y de aversión al riesgo.

En el Capítulo 3, se estudia la aproximación numérica de un campo aleatorio mediante la expansión de KL. Además, se describen brevemente los métodos que se utilizan para resolver las integrales en el dominio probabilístico.

Los dos siguientes Capítulos (4 y 5) contienen la parte fundamental y original de la tesis.

En el Capítulo 4, se desarrolla el primero de los problemas planteados, un control robusto para la ecuación evolutiva de la viga de Bernoulli-Euler. El funcional coste incluye la media y el segundo momento estadístico del desplazamiento y de la velocidad de la viga en un tiempo final de control. Como los integrandos de las integrales que aparecen en el funcional coste son suaves respecto del parámetro aleatorio, se pueden aplicar métodos de CE para resolverlas muy eficientemente.

En este caso, se opta por un control genérico, una función dependiente del tiempo y el espacio.

En el Capítulo 5, se detalla el segundo problema, un control de aversión al riesgo, también para la ecuación evolutiva de la viga de Bernoulli-Euler. El funcional coste incluye la probabilidad de que el desplazamiento y la velocidad de la viga en el tiempo final superen un cierto valor. En este caso el funcional coste no es suave con respecto al parámetro aleatorio. Es por ello que primero se aproxima la solución mediante el método de CP, y posteriormente se aplica MC sobre esa solución aproximada (aliviando de esta forma el enorme coste computacional que resultaría de aplicar MC directamente sobre la EDP inicial). El control que se utiliza en este caso es de tipo piezoeléctrico, un modelo con aplicaciones en el mundo real.

En el Capítulo 6, se introduce el problema de controlabilidad (control exacto) en media de la ecuación de ondas. Se plantea el problema y se enuncian los pasos que se van a seguir en la resolución numérica.

En el Capítulo 7, se concluye con un resumen y las principales conclusiones alcanzadas tras realizar esta tesis, y un repaso a los trabajos actuales y futuros que se plantean.

## 1.4 Principales contribuciones

Esta tesis doctoral tiene como objetivo el desarrollo de algoritmos apropiados para problemas de control óptimo de sistemas vibratorios conforme a datos de entrada aleatorios.

Las principales contribuciones se resumen en los siguientes puntos:

- Respecto al problema de control óptimo robusto:
  1. Formulación del problema para la ecuación de la viga de Bernoulli-Euler con incertidumbre en sus parámetros de entrada.
  2. Validación de un algoritmo de descenso para la resolución del problema, con un método de CE para la aproximación de las integrales en el dominio aleatorio.
- Respecto al problema de control óptimo de aversión al riesgo:
  1. Formulación del problema para la EDP de evolución de Bernoulli-Euler, con un control tipo piezoeléctrico e incertidumbre en sus datos de entrada.
  2. Diseño de un algoritmo de descenso adaptativo para la resolución del problema.
  3. Aproximación de las integrales en el dominio aleatorio con una combinación de CP y MC.

- Estudio comparativo de controles óptimos deterministas con los resultantes de sus versiones probabilísticas de control robusto y aversión al riesgo, demostrando que en ciertos casos la incertidumbre no debe despreciarse.

## 1.5 Listado de publicaciones, congresos y estancias

### 1.5.1 Publicaciones en revistas científicas

- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Robust Averaged Control of Vibrations for the Bernoulli-Euler Beam Equation. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 174 (2), 428-454, 2017, ISSN: 1573-2878. <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1128-x>
- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** A polynomial chaos-based approach to risk-averse piezoelectric control of random vibrations of beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1-18, 2018. ISSN: 1097-0207. <https://doi.org/10.1002/nme.5823>

### 1.5.2 Capítulos de libros

- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Control of Random PDEs: an Overview (Book Chapter). Special Issue SEMA SIMAI Springer Series, Springer, próxima publicación, ISSN: 2199-3041.

### 1.5.3 Ponencias en congresos

- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. VI International Conference in Optimization Theory and its Applications (ALEL2016), Cartagena (España), 6 al 8 de junio de 2016.
- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Control of Random Vibrations. XXV Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, y XV Congreso de Matemática Aplicada (CEDYA+CMA 2017), Cartagena (España), 26 al 30 de junio de 2017.

- **F. J. Marín, J. Martínez-Frutos, F. Periago.** Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería (CMN 2017), Valencia (España), 3 al 5 de julio de 2017.

#### ***1.5.4 Estancias de investigación***

- **Université de Clermont-Auvergne.** Estancia predoctoral de tres meses de duración. Trabajo bajo la supervisión de los profesores Arnaud Münch y Nicolae Cîndea en el *Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal*, Clermont-Ferrand, Francia. 16 de enero al 20 de abril de 2017.

## Capítulo 2

# Formulación de los problemas de control óptimo robusto y de aversión al riesgo

### 2.1 Introducción y estado del arte

El tema del control óptimo de sistemas con parámetros distribuidos ha suscitado un interés importante a lo largo de las últimas décadas, dando lugar a relevantes progresos científicos. La mayor parte de la investigación en este campo asume que los datos de entrada del sistema en consideración son perfectamente conocidos. Sin embargo, esta hipótesis no es realista con respecto a las aplicaciones del mundo real. De hecho, en la práctica, los datos de entrada de los sistemas físicos, tales como las propiedades del material, las cargas aplicadas, las condiciones de contorno y la geometría, son conocidos solo de manera aproximada, y, por tanto, están afectados por fuentes de incertidumbre, la cual debería ser tomada en cuenta en modelos matemáticos más realistas.

Entre otros, se utilizan los dos siguientes enfoques para tratar la incertidumbre en los problemas de control óptimo:

- Por un lado, si no se dispone de ninguna información a priori sobre la incertidumbre de los datos de entrada, a excepción de una cota superior de sus magnitudes, entonces se puede emplear un análisis del peor escenario posible, el cual se formula como un problema de optimización de mínimo-máximo. El problema es que si la cota superior de los datos inciertos es relativamente grande, la solución obtenida será típicamente demasiado conservativa, llevando a un rendimiento pobre del sistema en consideración. Un ejemplo de este caso puede verse en [2], en el marco de la Optimización Estructural.
- Por otro lado, cuando se dispone de información estadística acerca de la incertidumbre en los datos de entrada, es natural modelar dicha incertidumbre usando herramientas estadísticas, e incluir en el funcional coste ciertas cantidades estadísticas de interés.

El trabajo de esta tesis se centra en este segundo caso, cuando se dispone de información sobre la incertidumbre; en concreto, se parte de que se conoce la

media y correlación espacial (si la hay) de los datos de entrada, lo cual es algo habitual en este campo, como se explica en [1].

En cuanto al estado del arte de PCOs sujetos a EDPs estocásticas, se puede decir que es un tema que está relativamente en su infancia, ya que los escasos trabajos sobre el mismo han surgido en la última década. Por un lado, se han publicado varios trabajos [4, 5, 7, 16] que conciernen EDPs no evolutivas, es decir, estacionarias, con incertidumbre en forma de campos aleatorios. En estos artículos, se resuelven estos problemas numéricamente resolviendo el sistema de optimalidad (condiciones de optimalidad de primer orden) asociado. Por otro lado, en [13] se presenta una EDP evolutiva de primer orden en tiempo (la ecuación del calor), y por primera vez se emplea un algoritmo de descenso. En todos los trabajos anteriormente citados, se trabaja con un funcional coste *robusto*, que trata de controlar la media y la varianza de las variables de estado. No hay, sin embargo, ningún trabajo con una EDP evolutiva de segundo orden en tiempo.

En cuanto a la presencia de incertidumbre en vigas, se tiene: en [3], se coloca la incertidumbre sobre la geometría o sobre las condiciones de contorno; en [8], se sitúa la incertidumbre en las propiedades de los materiales, las cargas externas y en las geometrías estructurales; en [10], se sitúa sobre la rigidez flexural y axial, la densidad de masa y la fundación del módulo elástico.

En esta tesis, se elige la ecuación evolutiva de la viga de Bernoulli-Euler como modelo, y se versa todo el estudio sobre ella; no obstante, las mismas técnicas son aplicables a otras EDPs de segundo orden, como la de ondas, entre otras. El primer trabajo consiste en utilizar un funcional coste robusto para el modelo de EDP de Bernoulli-Euler. Hasta el momento, no se ha implementado un funcional coste de tipo *aversión al riesgo* (el cual tiene su origen en el campo de conocimiento de la Economía) a este tipo de PCOs sujetos a EDPs, por lo que el segundo trabajo de esta tesis tiene por objeto aplicarlo en este campo.

## 2.2 Formulación de los problemas de control

### 2.2.1 Ecuación de estado

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad.  $\Omega$  denota el conjunto de realizaciones,  $\mathcal{F}$  es la  $\sigma$ -álgebra de eventos y  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad.

Bajo las hipótesis de Bernoulli-Euler, las pequeñas vibraciones de una viga apoyada, uniforme y delgada, de longitud  $L$ , gobernada por un término de fuerzas, se describen mediante el sistema:



$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) = f, & \text{en } (0, T) \times D \times \Omega \\ y(0) = \partial_x^2 y(0) = y(L) = \partial_x^2 y(L) = 0, & \text{sobre } (0, T) \times \Omega \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{en } D \times \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde:

- Se asume que la rigidez flexural  $a = EI$  depende tanto de  $x \in D = (0, L)$  como de  $\omega \in \Omega$ , esto es,  $a = a(x, \omega)$ . Como de costumbre,  $E$  denota el módulo de Young, e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga.
- La salida aleatoria  $y(t, x, \omega)$  representa el desplazamiento vertical en el tiempo  $t$  de la partícula de la línea central que ocupa la posición  $x$ , siendo el desplazamiento en el equilibrio  $y = 0$ .
- El término  $f$  representa el término de fuerzas.
- $\partial_t$  y  $\partial_t^2$  indican primera y segunda derivada con respecto a  $t \in (0, T)$ , mientras que  $\partial_x$  y  $\partial_x^2$  son la primera y segunda derivada c.r. a  $x \in D$ , respectivamente.

### 2.2.2 Formulación variacional de la ecuación de estado

A continuación, la ecuación en derivadas parciales del sistema (2.1) se puede reescribir en forma variacional o débil. Para llevarlo a cabo, se realizan los siguientes cálculos formales: primeramente, se multiplica (2.1) por una función test  $v(x)$  a ambos lados de la ecuación:

$$\partial_t^2 y v + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) v = f v. \quad (2.2)$$

En segundo lugar, (2.2) se integra tanto en el dominio espacial como en el dominio aleatorio:

$$\int_{\Omega} \int_D \partial_t^2 y v dx d\mathbb{P}(\omega) + \int_{\Omega} \int_D \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) v dx d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \int_D f v dx d\mathbb{P}(\omega). \quad (2.3)$$

Finalmente, se integra por partes dos veces respecto de  $x$  en el segundo sumando del primer miembro de (2.3), obteniendo que  $y(t, x, \omega)$  es una solución débil de (2.1) si y solo si

$$\int_{\Omega} \int_D \partial_t^2 y v dx d\mathbb{P}(\omega) + \int_{\Omega} \int_D a \partial_x^2 y \partial_x^2 v dx d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \int_D f v dx d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall v(x). \quad (2.4)$$

En la Sección 2.3.1 se explica el marco funcional en el que se enmarca la formulación anterior.

### 2.2.3 Tipos de control

Típicamente, el control se puede aplicar en el término de fuerzas (en forma de control distribuido, por ejemplo, en [7]), en el término de condiciones de contorno (control en la frontera, [4]), o en ambos a la vez ([16]). En este trabajo de tesis, se considera la primera situación, un control distribuido en el término de fuerzas.

#### 2.2.3.1 Control genérico

En un primer caso, se va a estudiar un control genérico, aplicado sobre una cierta región de la viga, de la siguiente forma:

$$f = 1_{\mathcal{O}}u, \quad (2.5)$$

donde  $u(t, x)$  es la variable de control y  $1_{\mathcal{O}}$  es la función característica del conjunto

$$\mathcal{O} = [x_0, x_1] \subset (0, L), \quad (2.6)$$

donde  $x_0$  y  $x_1$  representan los extremos del actuador.

En este caso no se especifica qué tipo de actuador es, sino que se describe de forma general su efecto en forma de término de fuerzas sobre la viga. Una vez se conoce el control resultante, se puede buscar un dispositivo capaz de producirlo.

Como las capacidades de los dispositivos de control son limitadas, es natural imponer cotas inferiores y superiores en la función de control  $u$ . Así, dados  $m, M \in [-\infty, +\infty]$ , con  $m < M$ , el conjunto de controles admisibles considerado es el siguiente:

$$\mathcal{U}_{ad,g} := \{u \in L^2((0, T) \times \mathcal{O}) : m \leq u(t, x) \leq M, \quad c.t.p. (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{O}\}. \quad (2.7)$$

El caso sin restricciones se corresponde con  $m = -\infty$  y  $M = +\infty$ .

#### 2.2.3.2 Control piezoeléctrico

En el caso del control piezoeléctrico:

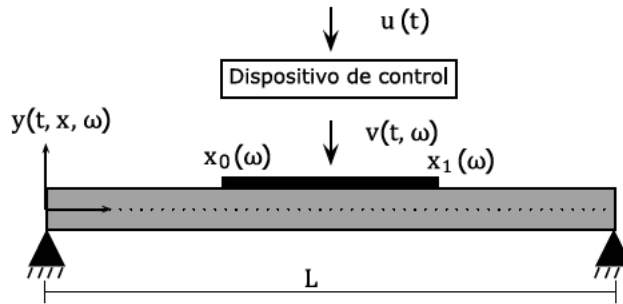
$$f = v \partial_x (\delta_{x_1} - \delta_{x_0}) \quad (2.8)$$

La función  $v : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  representa la variación a lo largo del tiempo de un voltaje que se aplica al actuador, y que se asume que está afectado por cierta perturbación aleatoria.  $x_0(\omega)$  y  $x_1(\omega)$  representan los extremos del actuador piezoeléctrico.  $\delta_{x_j} = \delta_{x_j}(x)$  es la masa de Dirac en el punto  $x_j \in D$ ,  $j = 0, 1$ .

Como los dispositivos de control físicos están afectados de incertidumbre, es realista descomponer la variable de control en dos partes, una de ellas determinista, desconocida, y la otra aleatoria, pero conocida. Además, es razonable considerar que la parte aleatoria está modulada por la determinista. Entonces, la función  $v = v(t, \omega)$ , que aparece en (2.8), toma la forma

$$v = u(1 + \hat{u}), \quad (2.9)$$

donde  $u : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  es el control determinista (*desconocido*), que representa el voltaje que se aplica, y  $\hat{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una variable aleatoria de media cero (*conocida*), la cual representa la incertidumbre en el dispositivo de control. Véase la Figura 2.1 para la configuración del problema.



**Figura 2.1** Control piezoeléctrico: configuración del problema.

En [16] se formula la variable de control como suma, en lugar de producto, de una componente determinista desconocida y otra aleatoria conocida, de la siguiente forma:

$$v = u + \hat{u}, \quad (2.10)$$

la cual es otra opción posible para el modelado de la incertidumbre en el dispositivo de control.

De forma similar al caso anterior, como las capacidades de los dispositivos de control que proporcionan voltaje son limitadas, es natural imponer cotas inferiores y superiores en la función de control  $u$ . Así, dados  $m, M \in [-\infty, +\infty]$ , con  $m < M$ , el conjunto de controles admisibles considerado en este caso es el siguiente:

$$\mathcal{U}_{ad,p} := \{u \in L^2(0, T) : m \leq u(t) \leq M, \quad \text{c.t.p. } t \in (0, T)\}. \quad (2.11)$$

### 2.2.4 Localización de la incertidumbre

En este modelo, la incertidumbre puede estar localizada, principalmente, en:

- El coeficiente de rigidez flexural  $a = EI$ .  
Es bastante frecuente que las propiedades del material no tengan exactamente el mismo valor que se estableció en su diseño, debido a la variabilidad en las condiciones de fabricación o a errores en las medidas.  
Desde el punto de vista matemático, la incertidumbre en este coeficiente es difícil de tratar, pues se encuentra en un término no lineal respecto a la solución de la EDP y, por tanto, no se puede aplicar el Principio de Superposición para resolverlo.  
Es por ello que se considera este caso el más relevante, y es estudiado en los dos problemas (Capítulos 4 y 5) planteados en esta tesis.
- El actuador.  
Como se menciona en la sección anterior, se puede encontrar incertidumbre tanto en la amplitud como en la localización del control.  
Por ejemplo, un problema común es que el actuador no se coloque en la posición exacta para la que fue diseñado, por error en la medida o porque se desplace sin que se aprecie. Este problema se estudia en el Apartado 5.4.3, correspondiente al control piezoeléctrico.
- Las condiciones iniciales  $y^0, y^1$ .  
Un caso típico es el de condiciones iniciales de la forma:

$$y^0(x, \omega) = y^0(x) + \hat{y}^0(\omega), \quad y^1(x, \omega) = y^1(x) + \hat{y}^1(\omega). \quad (2.12)$$

En este caso, el problema se puede descomponer aplicando el Principio de Superposición, gracias a la linealidad y, por ello, no entraña dificultad adicional. En otras situaciones, puede aparecer la incertidumbre en forma de producto, que es más complicado de tratar.  
En cualquier caso, aunque no se ha estudiado la incertidumbre en las condiciones iniciales en los experimentos numéricos de esta tesis, el tratamiento de las mismas se puede hacer mediante técnicas análogas a las que se desarrollan en los próximos capítulos.

## 2.3 Problemas de control óptimo

### 2.3.1 Problema de control óptimo robusto

En este primer caso, se considera el control genérico (2.5) en el término de fuerzas  $f$  de (2.1).

Se considera el espacio de Sobolev

$$V := H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \quad (2.13)$$

y el espacio de Hilbert

$$H := L^2(0, L), \quad (2.14)$$

ambos provistos con sus normas habituales. De ahora en adelante, si  $X$  es un espacio vectorial y  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $L_{\mathbb{P}}^p(\Omega; X)$  representa el espacio compuesto por todas las funciones  $v : \Omega \rightarrow X$  cuya norma

$$\|v\|_{L_{\mathbb{P}}^p(\Omega; X)} := \begin{cases} \left( \int_{\Omega} \|v(\cdot, \omega)\|_X^p d\mathbb{P}(\omega) \right)^{1/p}, & p < \infty \\ \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} \|v(\cdot, \omega)\|_X, & p = \infty \end{cases} \quad (2.15)$$

es finita. En particular, se usan los espacios de Hilbert  $V_{\mathbb{P}} := L_{\mathbb{P}}^2(\Omega; V)$  y  $H_{\mathbb{P}} := L_{\mathbb{P}}^2(\Omega; H)$ .  $V_{\mathbb{P}}^* = L_{\mathbb{P}}^2(\Omega; V^*)$  representa el espacio dual topológico de  $V_{\mathbb{P}}$ .

Se asume que se cumplen las siguientes hipótesis en los datos de entrada:

- $a \in L_{\mathbb{P}}^{\infty}(\Omega; L^{\infty}(0, L))$  y existen constantes  $a_{min}, a_{max}$  tales que

$$0 < a_{min} \leq a(x, \omega) \leq a_{max} < \infty \quad \text{c. s. } \omega \in \Omega \text{ y c. t. p. } x \in (0, L), \quad (2.16)$$

- $u \in L^2(0, T; L^2(\mathcal{O}))$ ,
- $(y^0, y^1) \in V_{\mathbb{P}} \times H_{\mathbb{P}}$ .

*Nota 2.1.* Aunque esta tesis se centra en la parte numérica, se remarca que la solución débil de (2.4)-(2.5) se considera en los siguientes espacios [12]:

$$y \in L^2(0, T; V_{\mathbb{P}}), \quad \partial_t y \in L^2(0, T; H_{\mathbb{P}}), \quad \partial_t^2 y \in L^2(0, T; V_{\mathbb{P}}^*) \quad (2.17)$$

El funcional coste, de tipo robusto, es el siguiente:

$$\begin{aligned} J(u) := & \frac{\alpha_1}{2} \int_0^L \left( \int_{\Omega} y(T) d\mathbb{P}(\omega) \right)^2 dx + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^L \left( \int_{\Omega} \partial_t y(T) d\mathbb{P}(\omega) \right)^2 dx \\ & + \frac{\beta_1}{2} \int_0^L \int_{\Omega} y^2(T) d\mathbb{P}(\omega) dx + \frac{\beta_2}{2} \int_0^L \int_{\Omega} (\partial_t y)^2(T) d\mathbb{P}(\omega) dx \\ & + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} u^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  y  $\beta_1, \beta_2, \gamma \geq 0$  son parámetros de peso.

El objetivo del problema es doble: por un lado, los dos primeros términos en (2.18) pretenden reducir las vibraciones medias de la viga con respecto al parámetro aleatorio  $\omega$ , tanto como sea posible, en cierto tiempo de control  $T$  dado. Por otro lado, los términos tercero y cuarto de (2.18) minimizan el segundo momento de  $(y(T), \partial_t y(T))$ , con el objeto de reducir la dispersión de la respuesta del sistema en el tiempo  $T$  y, por este hecho, se denomina control **robusto** (*robust control*, en

inglés). El parámetro de penalización  $\gamma$  permite regularizar el compromiso entre conseguir la meta de forzar que el primer y segundo momento de la variable de estado se aproximen a cero y penalizar la tendencia del control  $u$  de hacerse demasiado grande. Haciendo  $\gamma \rightarrow 0$ , se relaja la restricción en el tamaño del control, mientras que, cuando  $\gamma \rightarrow \infty$ , se está relajando el requerimiento de forzar que el primer y segundo momento de la variable de estado se acerquen a cero. También se podría regularizar el término de la derivada temporal del control, si fuera necesario, en el caso de que el control fuese muy oscilante, como se formula en el problema del siguiente apartado.

Es importante señalar que, en lugar de minimizar la varianza de la respuesta de salida aleatoria, tan usual en la optimización robusta (véase, por ejemplo, [6, 14, 15]), en el funcional coste  $J(u)$  se incluyen los segundos momentos estándar de  $y(T)$  y  $\partial_t y(T)$ . Esto permite que el problema de optimización (P<sub>1</sub>), formulado más adelante, sea convexo. Desde el punto de vista numérico, la convexidad evita el asunto de los mínimos locales cuando se implementan los métodos de descenso. Además, en el caso de la controlabilidad nula en promedio, que tiene por objetivo conseguir

$$\int_{\Omega} y(T, x, \omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Omega} \partial_t y(T, x, \omega) d\mathbb{P}(\omega) = 0, \quad (2.19)$$

minimizar el momento estadístico de segundo orden respecto de cero es equivalente a minimizar la varianza. En [12], se prueba la propiedad (2.19) para un ejemplo concreto.

En resumen, el problema de control óptimo considerado en este caso es

$$(P_1) \quad \begin{cases} \min_{u \in \mathcal{U}_{ad,g}} J(u) \\ \text{sujeto a } (y, u) \text{ solución de (2.1)-(2.5)} \end{cases}$$

### 2.3.2 Problema de control óptimo de aversión al riesgo

En este caso, se emplea el control piezoeléctrico (2.8) en el término de fuerzas  $f$  del sistema (2.1).

Se consideran los mismos espacios, (2.13) y (2.14). Se añade el espacio dual de  $V$ , que se denota por  $V^*$ , y se equipa con la norma  $\|f\|_{V^*} = \|u\|_V$ , donde  $u \in V$  es solución de

$$\begin{cases} \partial_x^4 u = f, & \text{en } (0, L), \\ u(0) = u(L) = 0, \\ \partial_x^2 u(0) = \partial_x^2 u(L) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Se asume que se cumplen las siguientes hipótesis en los datos de entrada:

- Condición de elipticidad (2.16),
- $v \in L^2_{\mathbb{P}}(\Omega; L^2(0, T))$ ,
- $0 < x_0(\omega) < x_1(\omega) < L$  para todo evento aleatorio  $\omega \in \Omega$ ,
- $(y^0, y^1) \in H_{\mathbb{P}} \times V_{\mathbb{P}}^*$ .

*Nota 2.2.* La existencia de solución del sistema (2.1)-(2.8) se demuestra por transposición (el lector puede consultar [5] para más detalles, que se encuentran fuera del alcance de esta tesis).

Para cada suceso aleatorio  $\omega \in \Omega$  y cada control  $u \in \mathcal{U}_{ad,p}$ , se introduce el siguiente funcional coste:

$$I(u, \omega) = \frac{1}{2} (\|y(T, \omega)\|_H^2 + \|\partial_t y(T, \omega)\|_{V^*}^2), \quad (2.21)$$

donde  $y = y(u)$  es la solución de (2.1)-(2.8) asociada a  $u$ , y  $T > 0$  es un tiempo de control fijado. El funcional coste (2.21) es una medida de la amplitud y velocidad de las vibraciones de la viga en el tiempo final  $T$ , para un suceso aleatorio  $\omega$ .

Para un parámetro umbral fijo  $\varepsilon > 0$ , se considera un nuevo coste

$$J_{\varepsilon}(u) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : I(u, \omega) > \varepsilon\}. \quad (2.22)$$

Se interpreta  $\varepsilon$  como el valor más alto del coste  $I(u, \omega)$  aceptable.

Usando la función de Heaviside

$$H(s) = \begin{cases} 1, & s > 0, \\ 0, & s \leq 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

(2.22) se reescribe como

$$J_{\varepsilon}(u) = \mathbb{E}(H(I(u, \cdot) - \varepsilon)) = \int_{\Omega} H(I(u, \omega) - \varepsilon) d\mathbb{P}(\omega). \quad (2.24)$$

Finalmente, se introducen los términos de regularización de la variable de control y, entonces, para  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \geq 0$ , se considera el funcional coste

$$J_{\varepsilon, \gamma}(u) = \int_{\Omega} H(I(u, \omega) - \varepsilon) d\mathbb{P}(\omega) + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T (\partial_t u)^2 dt. \quad (2.25)$$

El objetivo de este problema es tratar de reducir la probabilidad de que los valores del desplazamiento y de la velocidad de la viga en el tiempo final  $T$  superen el valor umbral  $\varepsilon$ . A diferencia del problema anterior, en el que se minimiza solamente la media y la varianza de esas cantidades, en este caso se trata todo el conjunto de eventos aleatorios  $\Omega$ , lo cual es razonablemente más restrictivo. Se

llama control de **aversión al riesgo** (*risk-averse control*, en inglés) debido a que el funcional coste representa la probabilidad de que haya un fallo. También se añaden los términos de regularización del control,  $\gamma_1$  para controlar la amplitud, y  $\gamma_2$  para controlar el comportamiento oscilatorio a lo largo del tiempo, permitiendo al diseñador establecer un contraste entre el requerimiento de la probabilidad y el de la amplitud o frecuencia del control.

En resumen, el problema de control óptimo considerado en este caso es

$$(P_2) \quad \begin{cases} \text{mín}_{u \in \mathcal{U}_{ad,p}} J_{\varepsilon, \gamma}(u) \\ \text{sujeto a } (y, u) \text{ solución de (2.1)-(2.8)} \end{cases}$$

*Nota 2.3.* La elección de los espacios funcionales en cada uno de los problemas de control robusto y de aversión al riesgo planteados anteriormente garantiza la existencia de soluciones para las ecuaciones de Bernoulli-Euler asociadas. Estas cuestiones, más teóricas, son estudiadas en detalle en [5, 12]. El enfoque de esta tesis se establece en la parte numérica, por lo que no se profundiza en estas cuestiones.

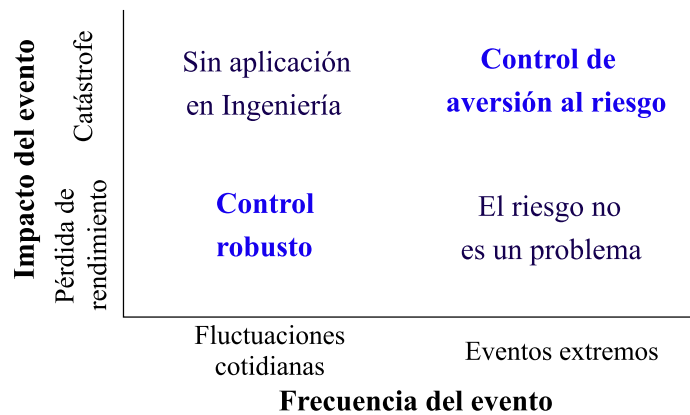
### 2.3.3 Comparación de la formulación robusta y de aversión al riesgo

Aunque en algunas situaciones el control óptimo que se obtiene empleando la formulación de aversión al riesgo exhibe una gran robustez (véase la nota al final de esta sección), estas dos propuestas presentan diferencias significativas en el objetivo de control y en el tipo de análisis (en [9], se analiza esta diferencia para el caso de Optimización Estructural).

Respecto al objetivo de control, la propuesta de control robusto busca reducir la variabilidad del sistema ante alteraciones inesperadas en los datos de entrada. Por el contrario, el enfoque de aversión al riesgo está menos relacionado con la variabilidad del sistema y más con reducir una función riesgo, que cuantifica las pérdidas estimadas relacionadas con los daños causados por eventos extremos. Se esquematizan los diferentes escenarios en la Figura 2.2, siguiendo el modelo de [9], pero adaptado al caso del control óptimo.

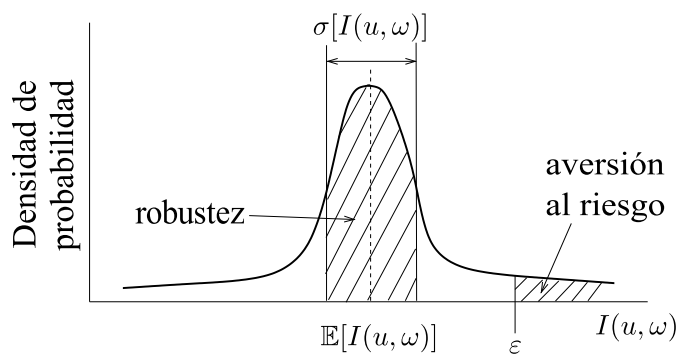
Estas diferencias conceptuales suponen formulaciones diferentes de los problemas de control óptimo. Por un lado, la formulación de control robusto incorpora medidas de la dispersión del funcional coste alrededor de su valor medio, tales como la desviación estándar. Por otro lado, el enfoque de aversión al riesgo minimiza una función riesgo, tal como la probabilidad excedente, que cuantifica las





**Figura 2.2** Distintos escenarios con respecto al control robusto y de aversión al riesgo.

pérdidas estimadas. Estas diferencias en la formulación se ilustran en la Figura 2.3. Se observa que, mientras que en el control robusto la atención se centra en



**Figura 2.3** Diferencia entre robustez y aversión al riesgo.

las regiones alrededor del valor medio de la función de densidad de probabilidad (FDP), el enfoque de aversión al riesgo está orientado a la cola de la probabilidad de la FDP. En consecuencia, el planteamiento de aversión al riesgo conlleva un coste computacional más alto comparado con su homólogo robusto, el cual solamente requiere la estimación de los momentos estadísticos de orden bajo (media y desviación estándar).

*Nota 2.4.* Las formulaciones planteadas en esta tesis, en las Subsecciones 2.3.1 y 2.3.2, presentan las siguientes características:

- Las magnitudes que se pretenden minimizar (los costes (2.18) y (2.25), respectivamente) por definición no pueden tomar valores negativos.
- El objetivo del problema de control robusto es trasladar la media de la FDP a 0, y reducir la desviación estándar. El objetivo de la formulación de aversión al

riesgo es trasladar toda la FDP a la izquierda de un valor umbral, que suele ser pequeño.

Estas dos situaciones provocan que el objetivo de ambos problemas se base en acumular una gran cantidad de valores de la FDP cercanos a 0, en definitiva, una distribución de probabilidad con media cero y desviación estándar lo más pequeña posible. Sin embargo, si el valor umbral de la formulación de aversión al riesgo no se tomase muy pequeño, presentarían diferencias más significativas.

## 2.4 Resumen y conclusiones

En este capítulo, se presenta un estudio del arte acerca de los PCOs robusto de vibraciones de sistemas modelados por ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), indicando que hay escasos trabajos científicos, los cuales se han publicado en la última década principalmente. En esos trabajos se realiza el estudio con EDPs estacionarias, y con una EDP evolutiva de primer orden en tiempo; mientras que, en esta tesis, se trabaja con el modelo de la ecuación evolutiva de la viga de Bernoulli-Euler, que es un ejemplo de EDP evolutiva de segundo orden en tiempo. Se formulan los principales problemas objeto de estudio en esta tesis: el PCO robusto y el PCO de aversión al riesgo, planteando los funcionales coste de ambos. Se establecen las diferencias entre ellos: el primero trata de minimizar la media y la varianza de la solución, mientras que el segundo se encarga de reducir la probabilidad de que los valores de la solución superen un valor umbral. Respecto a la formulación de aversión al riesgo, originada en el marco de la Economía, se destaca que no se ha aplicado en control óptimo de EDPs hasta ahora. Estos problemas enunciados se desarrollan en profundidad en los siguientes capítulos.

## Referencias

- [1] Aitchison, J., Brown, J. A. C.: The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics. Cambridge University Press, (1957)
- [2] Allaire, A., Dapogny, Ch.: A deterministic approximation method in shape optimization under random uncertainties. SMAI J. Computational Mathematics 1, 83–143 (2015)
- [3] Boyce, W. E., Goodwin, B. E.: Random transverse vibrations of elastic beams. J. Soc. Indust. Appl. Mat. Vol. 12 (3), 613 - 629 (1964).
- [4] Chen, P., Quarteroni, A., Rozza, G.: Stochastic optimal Robin boundary control problems of advection-dominated elliptic equations. SIAM J. Nu-

- mer. Anal. 51 (5), 2700-2722 (2013)
- [5] Gunzburger, M. D., Webster, C., Zhang, G.: Stochastic finite element methods for partial differential equations with random input data. *Acta Numer.* 23, 521–650 (2014)
- [6] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S.: Optimization with PDE Constraints. *Mathematical Modelling: Theory and Applications*, vol. 23, Springer, Berlin (2009)
- [7] Hou, L. S., Lee, J., Manouzi, H.: Finite element approximations of stochastic optimal control problems constrained by stochastic elliptic PDEs. *J. Math. Anal. Appl.* 384, 87-103 (2011)
- [8] Huang, B., Li, Q. S., Tuan, A. Y., Zhu, H.: Recursive approach for random response analysis using non-orthogonal polynomial expansion. *Comput. Mech.* 44, 309 - 320 (2009).
- [9] Kang, Z.: Robust Design Optimization of Structures under Uncertainties. Tesis Doctoral. Universidad de Stuttgart, (2005).
- [10] Manohar, C. S., Adhikari, S.: Dynamic stiffness of randomly parametered beams. *Prob. Engng. Mech.* Vol. 13 (1) 39 - 51 (1998).
- [11] Marín FJ, Martínez-Frutos J, Periago F.: A polynomial chaos-based approach to risk-averse piezoelectric control of random vibrations of beams. *Int J Numer Methods Eng.* 1–18, 2018. <https://doi.org/10.1002/nme.5823>
- [12] Marín, F. J., Martínez-Frutos, J., Periago, F.: Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. *J. Optim. Theory Appl.* 174(2), 428-454 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1128-x>
- [13] Martínez-Frutos, J., Kessler, M., Münch, A., Periago, F.: Robust optimal Robin boundary control for the transient heat equation with random input data. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 108 (2), 116-135 (2016)
- [14] Martínez-Frutos, J., Kessler, M., Periago, F.: Robust optimal shape design for an elliptic PDE with uncertainty in its input data. *ESAIM: COCV*, 21 (4), 901-923 (2015)
- [15] Rangavajhala, S., Mullur, A. A., Messac, A.: Equality constraints in multiobjective robust design optimization: decision making problem. *J. Optim. Theory Appl.* 140 (2), 315 - 337 (2009).
- [16] Rosseel, E., Wells, G. N.: Optimal control with stochastic PDE constraints and uncertain controls. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 213/216, 152-167 (2012)



## Capítulo 3

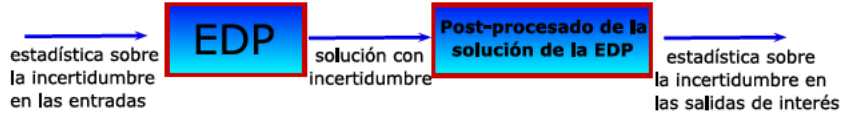
# Cuantificación de la Incertidumbre en problemas de control

Este capítulo trata sobre el modelado de la incertidumbre en los parámetros de entrada del modelo y la propagación de la incertidumbre de la variable de estado de la EDP. Ambas etapas son necesarias para resolver los problemas de control óptimo formulados en el capítulo anterior, y que son resueltos en los siguientes capítulos. Primeramente, en la Sección 3.1, se explica el término *Cuantificación de la Incertidumbre*, y con qué definición del mismo se trabaja en esta tesis. En la Sección 3.2, se desarrolla la discretización de la incertidumbre en los parámetros de entrada del modelo, mediante la aproximación numérica de un campo aleatorio con la expansión de Karhunen-Loève (KL), y se plantea el ejemplo de un campo aleatorio, el cual se usa en los experimentos numéricos de los siguientes capítulos. Seguidamente, en la Sección 3.3, se introducen brevemente las diferentes técnicas para resolver las integrales de las cantidades estadísticas de interés en el espacio aleatorio. Finalmente, en la Sección 3.4, se presentan las principales conclusiones de este capítulo.

### 3.1 Introducción

El término *Cuantificación de la Incertidumbre* se usa ampliamente para definir una variedad de metodologías. En [8, p. 1] se define como “la ciencia de identificar, cuantificar y reducir las incertidumbres asociadas a los modelos, algoritmos numéricos, experimentos y salidas predichas o cantidades de interés”. Siguiendo [3, p. 525], en esta tesis el término Cuantificación de la Incertidumbre se usa para designar “la tarea de determinar información sobre la incertidumbre en una salida de interés que depende de la solución de una EDP, dada información sobre las incertidumbres en las entradas del sistema”. Esta idea se plasma en la Figura 3.1.

La incertidumbre en los parámetros de entrada de una ecuación en derivadas parciales (EDP) viene dada generalmente en forma de campo aleatorio. En primer



**Figura 3.1** Cuantificación de la incertidumbre en los modelos matemáticos basados en EDPs.

lugar, es importante modelar dicha incertidumbre de forma correcta; para ello, hay diversas referencias en la literatura, siendo la más común la de Karhunen-Loève (KL). En segundo lugar, los funcionales coste de los PCOs contienen integrales, en el dominio aleatorio, de las variables de estado. Para resolver dichas integrales se dispone de técnicas como Monte Carlo (MC), Colocación Estocástica (CE), Galerkin o Caos Polinomial (CP).

### 3.2 Aproximación numérica de campos aleatorios

#### 3.2.1 Expansión de Karhunen-Loève

La expansión de KL aproxima un campo aleatorio (con correlación espacial) como una suma de variables aleatorias no relacionadas por pares. En definitiva, se separa la dependencia espacial de la aleatoria.

Se parte de la función de covarianza,

$$C : \bar{D} \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

del campo aleatorio, la cual típicamente se estima a partir de los datos experimentales.

La función de covarianza (3.1) se dice simétrica si se cumple

$$C(x, x') = C(x', x), \quad \forall x, x' \in D, \tag{3.2}$$

y se dice definida no-negativa si se cumple la desigualdad

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k C(x_j, x_k) \geq 0, \quad \forall x_j, x_k \in D, \quad \forall \alpha_j, \alpha_k \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

A continuación, se presentan los principales resultados de la expansión de Karhunen-Loève.

**Teorema 3.1.** (Mercer) [5, Teor. 1.8] *Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un dominio acotado y sea  $C : \bar{D} \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, simétrica (3.2) y definida no-negativa (3.3). Considérese el operador integral  $\mathcal{C} : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$  definido por*

$$(\mathcal{C}\psi)(x) = \int_D C(x, x') \psi(x') dx'. \quad (3.4)$$

Entonces, existe una sucesión de autofunciones  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\mathcal{C}$ , continuas en  $\bar{D}$ , las cuales pueden ser elegidas ortonormales en  $L^2(D)$ , tales que la sucesión correspondiente de autovalores  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  es positiva. Además,

$$C(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n(x) b_n(x'), \quad x, x' \in \bar{D}, \quad (3.5)$$

donde las series convergen absoluta y uniformemente en  $\bar{D} \times \bar{D}$ .

**Teorema 3.2.** (Karhunen-Loève expansion) [5, Teors. 5.28, 5.29, 7.52, 7.53] Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un dominio acotado y  $a = a(x, \omega)$  una función aleatoria con función de covarianza continua  $Cov_a : \bar{D} \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces,  $a(x, \omega)$  admite la expansión de Karhunen-Loève

$$a(x, \omega) = \bar{a}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} b_n(x) Y_n(\omega), \quad (3.6)$$

donde la suma converge en  $L^2_{\mathbb{P}}(\Omega; L^2(D))$ .  $\bar{a}(x)$  es la media y  $\{\lambda_n, b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  son los valores y vectores propios del operador  $\mathcal{C}$  definido en el Teorema de Mercer, con  $C(x, x') = Cov_a(x, x')$ , e

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_D [a(x, \omega) - \bar{a}(x)] b_n(x) dx \quad (3.7)$$

son las variables aleatorias, no relacionadas por pares, con media cero y varianza unitaria. Si la función aleatoria  $a(x, \omega)$  es Gaussiana, entonces  $Y_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  son variables Gaussianas estándar, independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.).

*Nota 3.1.* Notar que, gracias al Teor. 3.2, un campo aleatorio  $a(x, \omega)$  se determina completamente mediante su función de esperanza  $\bar{a}(x)$  y su función de covarianza  $Cov_a(x, x')$ . De hecho, a partir de  $Cov_a(x, x')$  se calculan los valores y vectores propios  $\{\lambda_n, b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  del operador (3.4). Así, si se conoce  $\bar{a}(x)$ , entonces la expansión de KL (3.6) determina el campo aleatorio  $a(x, \omega)$ , porque las variables aleatorias que aparecen en (3.6) son variables Gaussianas estándar i.i.d.

Estos dos teoremas son la base fundamental que permite modelar la incertidumbre con la expansión de Karhunen-Loève.

### 3.2.2 Truncamiento de la expansión de Karhunen-Loève

Para realizar las simulaciones numéricas, siempre se trunca la expansión (3.6) en algún término  $N$  suficientemente grande, para lo cual se enuncia la denominada *hipótesis de ruido finito dimensional*:

**Hipótesis 3.1.** (Ruido finito dimensional). Se asume que los datos de entrada aleatorios de la EDP, dependen de un número finito de variables aleatorias, no relacionadas por pares, de valores reales

$$Y(\omega) = (Y_1(\omega), \dots, Y_N(\omega)). \quad (3.8)$$

Entonces, la función aleatoria  $a(x, \omega)$  se aproxima por

$$a(x, \omega) \approx a_N(x, \omega) = \bar{a}(x) + \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} b_n(x) Y_n(\omega). \quad (3.9)$$

El ratio de convergencia de  $a_N(x, \omega)$  depende del decaimiento de los autovalores  $\lambda_n$ , el cual, a su vez, depende de la suavidad de su función de covarianza asociada.

Una medida del error relativo cometido por el truncamiento de una expansión de KL se da por el llamado *error de varianza* [5, 9]:

$$E_N(x) = \frac{\text{Var}_{a-a_N}(x)}{\text{Var}_a(x)} = \frac{C(x, x) - \sum_{n=1}^N \lambda_n b_n^2(x)}{C(x, x)} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n b_n^2(x)}{C(x, x)}, \quad (3.10)$$

donde  $C$  es la función de covarianza de  $a$ . La segunda igualdad de (3.10) se obtiene fácilmente a partir de los Teoremas 3.1 y 3.2 (véase [5, Cor. 7.54] para más detalles). Una medida global de este error relativo, el cual es llamado *error de varianza promedio*, es

$$\bar{E}_N = \frac{\int_D \text{Var}_{a-a_N}(x) dx}{\int_D \text{Var}_a(x) dx} = \frac{\int_D C(x, x) dx - \sum_{n=1}^N \lambda_n}{\int_D C(x, x) dx} = 1 - \frac{\sum_{n=1}^N \lambda_n}{\int_D C(x, x) dx}. \quad (3.11)$$

### 3.2.3 Transformación del espacio de probabilidad

En la práctica, no se trabaja con el espacio de probabilidad abstracto  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sino que, bajo la Hipótesis 3.1, se puede transformar la EDP aleatoria (2.4) en una EDP determinista con un parámetro finito dimensional. En efecto, sea  $\Gamma_n = Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}$ ,  $1 \leq n \leq N$ , y  $\Gamma = \prod_{n=1}^N \Gamma_n \subset \mathbb{R}^N$ . Si  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces el Teorema del Cambio de Variable ([7, p. 21]) lleva a

$$\int_{\Omega} g(Y(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\Gamma} g(z) \rho(z) dz. \quad (3.12)$$



De esta forma, el espacio de probabilidad abstracto  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  se ha transformado en  $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \rho(z) dz)$ , donde  $\mathcal{B}(\Gamma)$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel, y  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\rho = \rho(z)$  es la función de densidad de probabilidad conjunta de (3.8).

Con este cambio de variables, (2.1) se reescribe en su forma clásica como:

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^2 (a(x, z) \partial_x^2 y) = f, & \text{en } (0, T) \times D \times \Gamma \\ y(0) = \partial_x^2 y(0) = y(L) = \partial_x^2 y(L) = 0, & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{en } D \times \Gamma, \end{cases} \quad (3.13)$$

y la formulación variacional propuesta en (2.4) se reescribe entonces como:  $y = y(t, x, z)$  es solución de (3.13) si y solo si

$$\int_{\Gamma} \rho \int_D \partial_t^2 y v dx dz + \int_{\Gamma} \rho \int_D a \partial_x^2 y \partial_x^2 v dx dz = \int_{\Gamma} \rho \int_D f v dx dz, \quad \forall v(x) \quad (3.14)$$

Se destaca que (3.14) es una EDP determinista con un parámetro de dimensión finita  $z \in \Gamma$ . De ahora en adelante en esta tesis, siempre se considera esta transformación.

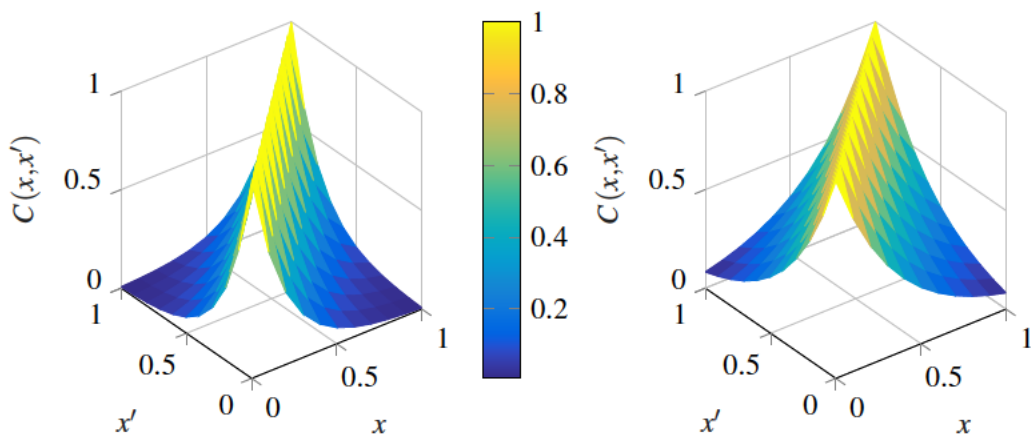
### 3.2.4 Ejemplo de modelado de un campo aleatorio

A continuación, se procede con un ejemplo de campo aleatorio modelado con la expansión de Karhunen-Loève, que es el que se utiliza en los experimentos de esta tesis. Se supone la incertidumbre localizada en el parámetro de rigidez flexural  $a(x, z)$  de la viga, en forma de campo aleatorio *log-normal*, i. e., que su logaritmo sigue una distribución normal.

Considérese un campo aleatorio Gaussiano  $U = U(x, z)$  con media cero, varianza unidad y teniendo la siguiente función de covarianza exponencial:

$$C(x, x') = e^{-|x-x'|/L_c}, \quad x, x' \in D = (0, L), \quad (3.15)$$

donde  $L_c$  es la llamada *longitud de correlación*, la cual de alguna forma vincula la distancia entre los puntos con la relación entre su incertidumbre. Este tipo de funciones exponenciales son muy utilizadas en la práctica, como se indica en [1]. La función de covarianza (3.15) se dibuja en la Figura 3.2 para dos valores diferentes de la longitud de correlación. La interpretación de la misma es que los puntos que están próximos entre sí tienen una correlación grande, mientras que los puntos más alejados entre sí apenas tienen correlación, debido al rápido decaimiento de la exponencial. Cuanto menor es la longitud de correlación, el problema se complica, ya que la relación entre los puntos es menor y, entonces, la incertidumbre puede tomar valores muy diferentes en un punto y en otro.



**Figura 3.2** Funciones de covarianza para dos valores de longitud de correlación: (a)  $L_c = 0.2$ , (b)  $L_c = 0.4$

Los valores y vectores propios  $\{\lambda_n, b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  asociados a  $C(x, x')$  se obtienen resolviendo el problema espectral

$$\int_0^x e^{-\frac{x-x'}{L_c}} b(x') dx' + \int_x^L e^{-\frac{x'-x}{L_c}} b(x') dx' = \lambda b(x). \quad (3.16)$$

Derivando dos veces y evaluando  $\partial_x b(x)$  en los extremos  $x = 0, L$ , el problema espectral (3.16) toma la forma

$$\begin{cases} \partial_x^2 b(x) + \frac{1}{L_c} \left( \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{L_c} \right) b(x) = 0, & 0 < x < L \\ \partial_x b(0) = \frac{1}{L_c} b(0), \quad \partial_x b(L) = -\frac{1}{L_c} b(L). \end{cases} \quad (3.17)$$

Denotando por  $\ell = L/L_c$ , los autovalores de (3.17) vienen dados por

$$\lambda_n = \frac{2\ell^2 L_c}{\ell^2 + \gamma_n^2}, \quad (3.18)$$

donde  $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$ , son las soluciones positivas de la ecuación trascendental

$$\cot(\gamma_n) = \frac{\gamma_n^2 - \ell^2}{2\ell\gamma_n}. \quad (3.19)$$

Sus autofunciones normalizadas asociadas son

$$b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell^2 + \gamma_n^2 + 2\ell}} \left[ \gamma_n \cos\left(\frac{\gamma_n x}{L}\right) + \ell \sin\left(\frac{\gamma_n x}{L}\right) \right], \quad 0 < x < L. \quad (3.20)$$

La *energía* de  $U$  viene dada por

$$\|U\|_{L^2_{\mathbb{P}}(\Gamma;L^2(D))}^2 := \int_0^L \text{Var}_U(x) dx = \int_0^L C(x,x) dx = L. \quad (3.21)$$

Se considera el truncamiento de  $N$  términos de la expansión de Karhunen-Loève

$$U(x,z) \cong U_N(x,z) = \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} b_n(x) z_n, \quad (3.22)$$

donde los autovalores se ordenan en orden decreciente, esto es,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ .

Teniendo en cuenta que  $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  son ortonormales en  $L^2(D)$  y que  $z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$  son independientes, se puede calcular la energía del campo como

$$\|U_N\|_{L^2_{\mathbb{P}}(\Gamma;L^2(D))}^2 = \sum_{n=1}^N \lambda_n. \quad (3.23)$$

Si se quiere capturar el 90% de dicha energía del campo  $U$ , entonces el término de truncamiento  $N$  debe ser elegido de forma que satisfaga la condición  $\bar{E}_N \leq \frac{1}{10}$ , con  $\bar{E}_N$  dado por (3.11), lo cual se corresponde con

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n \geq \frac{9}{10}L$$

Para  $L = 1$  y  $L_c = 0.4$ , se obtienen los siguientes autovalores:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.5147, \\ \lambda_2 = 0.2084, \\ \lambda_3 = 0.0911, \\ \lambda_4 = 0.0478, \\ \lambda_5 = 0.0288, \\ \lambda_6 = 0.0190. \\ \dots \end{cases} \quad (3.24)$$

Se comprueba que la suma de los seis primeros autovalores ya supera el valor umbral de 0.9:

$$\sum_{n=1}^6 \lambda_n = 0.9097 > 0.9, \quad (3.25)$$

por tanto, éste es el número de autovalores necesario.

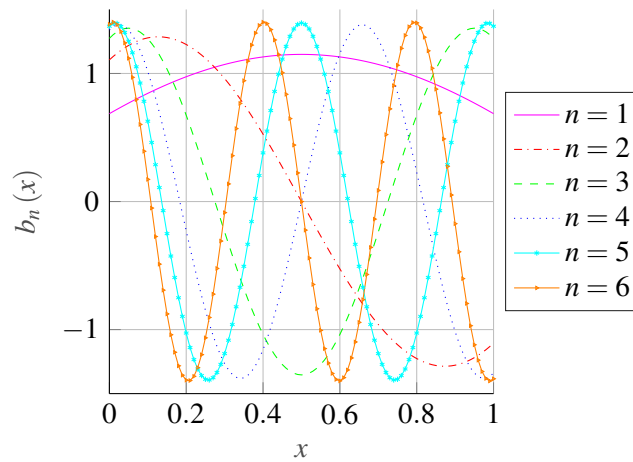
Se calculan las autofunciones normalizadas asociadas, que son las siguientes:

$$b_n(x) = \sqrt{\frac{8}{45 + 4\gamma_n^2}} \left[ \gamma_n \cos(\gamma_n x) + \frac{5}{2} \sin(\gamma_n x) \right], \quad 0 < x < 1. \quad (3.26)$$

El cálculo de  $\gamma_n, 1 \leq n \leq 6$ , se realiza resolviendo (3.19) con el método de Newton, y se obtiene:

$$\begin{cases} \gamma_1 = 1.8615, \\ \gamma_2 = 4.2128, \\ \gamma_3 = 6.9718, \\ \gamma_4 = 9.9186, \\ \gamma_5 = 12.9478, \\ \gamma_6 = 16.0176. \end{cases} \quad (3.27)$$

En la Figura 3.3 se muestran las primeras 6 autofunciones.



**Figura 3.3** Autofunciones normalizadas  $b_n(x)$  del campo aleatorio.

La versión *aditiva* del Teorema Central del Límite establece que la suma de variables aleatorias independientes cualesquiera sigue una distribución normal. Sin embargo, variables aleatorias que toman siempre valores positivos, como es el caso del coeficiente de rigidez flexural  $a(x, z)$ , no pueden adoptar una distribución normal, pues, en este caso, la probabilidad de tomar valores negativos sería positiva. La solución a esta dificultad se encuentra en la versión *multiplicativa* del Teorema Central del Límite, que establece que el producto de variables aleatorias independientes cualesquiera sigue una distribución log-normal. Este es el caso de  $a(x, z) = EI$ . Por este motivo, es habitual expresar  $a(x, z)$  en la forma siguiente:

$$a(x, z) = \exp(\eta + \xi U_N(x, z)), \quad (3.28)$$

donde  $\eta$  y  $\xi$  son, respectivamente, los parámetros de localización y escala del campo aleatorio log-normal. Si se denota por  $\mu, \sigma^2$  la media y varianza, respectivamente, del campo log-normal, entonces es conocido [1] que

$$\eta = \ln \left( \frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{(\mu)^2}}} \right), \quad \xi = \ln \left( 1 + \frac{\sigma^2}{(\mu)^2} \right). \quad (3.29)$$

En este caso concreto, se seleccionan  $\eta = -0.040$  y  $\xi = 0.283$  para que el campo aleatorio resultante  $a(x, z)$  tenga media  $\mu = 1$  y varianza  $\sigma^2 = \frac{1}{12}$ .

Con este campo log-normal, se asegura que la función  $a(x, z)$  tome siempre valores positivos, pues no tendría sentido, desde el punto de vista físico, un valor negativo del coeficiente de rigidez flexural. Sin embargo, esta elección no es completamente satisfactoria, porque como las variables  $z_n$  son Gaussianas, pueden tomar cualquier valor de  $-\infty$  a  $+\infty$ , con lo cual la función  $a(x, z)$  podría valer desde 0 a  $+\infty$ . Una forma habitual de proceder en estos casos es truncar la Gaussiana. En este caso concreto,  $z_n$  se truncan en los puntos  $\mp 3$ , lo cual asegura que el 99.7% de los valores de las variables Gaussianas están dentro de este intervalo. En lugar de usar la distribución de densidad

$$\hat{\rho}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (3.30)$$

se emplea:

$$\rho(s) = \begin{cases} \frac{\hat{\rho}(s)}{\Phi(3) - \Phi(-3)}, & -3 \leq s \leq 3, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.31)$$

donde

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^s \hat{\rho}(s) ds \quad (3.32)$$

es la función de distribución.

Por tanto,  $a(x, z)$ , dada por (3.28), satisface la condición de elipticidad (2.16). Diez realizaciones aleatorias de  $a(x, z)$  se muestran en la Figura 3.4. Se representa un intervalo de confianza del campo aleatorio, construido, a partir de la media y la varianza, mediante la siguiente desigualdad.

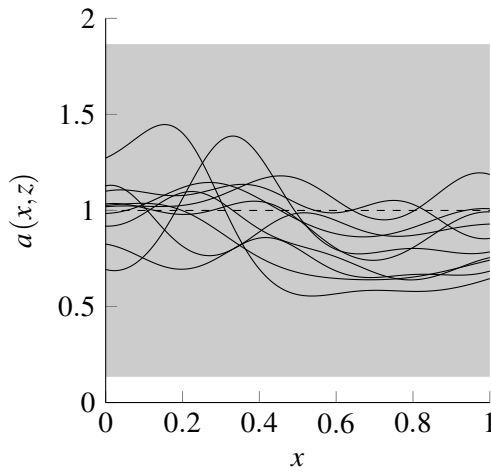
**Desigualdad de Chebyshev.** Sea una variable aleatoria  $X$  de media  $\mu$  y varianza finita  $\sigma^2$ , entonces, para todo número real  $r > 0$  se cumple

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > r\sigma) \leq \frac{1}{r^2}, \quad (3.33)$$

lo que también se puede escribir como

$$\mathbb{P}(\mu - r\sigma < X < \mu + r\sigma) \leq \frac{1}{r^2} \quad (3.34)$$

Se entiende que  $\frac{1}{r^2}$  es la probabilidad de que los valores se salgan del rango construido a partir de la media y la varianza. En este caso, el campo tiene media  $\mu = 1$



**Figura 3.4** Diez realizaciones de la rigidez flexural aleatoria  $a(x, z)$ ; la región sombreada representa el intervalo de confianza del 90% para  $a(x, z)$ .

y varianza  $\sigma = \frac{1}{12}$ . Si se quiere capturar el 90% de los valores, entonces se toma  $\frac{1}{r^2} = 0.1$ . De aquí se obtiene  $r = \sqrt{10}$ , que generalmente se aproxima por  $r = \sqrt{10} \cong 3$ , resultando así en el siguiente intervalo:

$$\mathbb{P}(1 - 0.867 < X < 1 + 0.867) \leq \frac{1}{10}. \quad (3.35)$$

Se interpreta de manera que los valores de  $X$  estarán, con un 90% de probabilidad, en el rango  $(1 - 0.867, 1 + 0.867)$ .

### 3.3 Discretización en el espacio probabilístico

Como se presenta en el Capítulo 2, el problema de control óptimo de EDPs estocásticas supone el cálculo de los dos primeros momentos estadísticos de la variable de estado (enfoque robusto) o la probabilidad de exceder un objetivo prescrito (enfoque de aversión al riesgo). En ambos casos, las cantidades estadísticas de interés pueden expresarse usando integrales multidimensionales en el dominio aleatorio. Tales integrales no suelen poder resolverse analíticamente, requiriendo métodos numéricos para su resolución. El principal inconveniente de esta propuesta es que el problema puede volverse computacionalmente inabordable en los casos: (1) problemas de alta dimensionalidad, o (2) problemas que contienen modelos de simulación computacionalmente costosos. Además, el tema computacional se empeora en los problemas que implican una gran cantidad de evaluaciones de las integrales, tales como aquellos que aparecen en el control óptimo

con datos de entrada aleatorios. El problema mencionado ha alentado el desarrollo de métodos numéricos que sean capaces de estimar las cantidades estadísticas de interés más eficientemente. Estos métodos pueden ser clasificados en general dentro de cinco categorías: Métodos de Simulación, Métodos de Expansión, Métodos basados en el Punto Más Probable, Métodos basados en Sustitutos y Métodos de Reducción de Dimensión. Una descripción profunda de todos estos métodos está fuera del ámbito de este trabajo, y se remite al lector interesado a [2, 4, 6].

En esta tesis, se proponen dos estrategias diferentes para resolver la fase de propagación de la incertidumbre. Dichas estrategias son especialmente adecuadas para los PCOs robusto y de aversión al riesgo. Aunque las estrategias propuestas se describen en detalle en los Capítulos 4 y 5, una perspectiva de los principales componentes de las mismas se presenta a continuación:

- Monte Carlo (MC) . Consiste, básicamente, en evaluar el integrando para un gran número de realizaciones de la variable aleatoria, sumarlas y dividir por el número total de realizaciones. Por una parte, tiene la ventaja de su facilidad para ser implementado. Pero, por otra, tiene un coste computacional demasiado alto, al tener que resolver la EDP para ese gran número de valores del parámetro aleatorio. Más detalles se explican en el Cap. 5.
- Colocación estocástica (CE) . Cuando el integrando es suave respecto del parámetro incierto  $z$ , se pueden aplicar estos métodos, que consisten en escoger un número reducido de nodos, con sus correspondientes pesos, de forma que el número de evaluaciones de la EDP se ve claramente reducido con respecto a los métodos de MC, sin perder precisión en la aproximación. Es importante aliviar el fenómeno conocido como *maldición de la dimensionalidad*, que sucede cuando la dimensión del problema aumenta, porque el número total de nodos es el producto del número de nodos en cada dirección. Para ello se utiliza una *malla dispersa anisotrópica*, que establece un número de nodos para cada dirección en función de su importancia, reduciendo muy considerablemente el número de nodos total. Se desarrolla en profundidad en el Cap. 4.
- Galerkin o Caos Polinomial (CP) . Cuando el integrando no es suave respecto del parámetro aleatorio  $z$ , los métodos de Colocación Estocástica no funcionan bien en la zona en que se encuentra la discontinuidad, y, como los métodos de MC tienen un coste computacional alto, se debe recurrir a un método alternativo. La expansión de Caos Polinomial consiste en una proyección de la solución sobre un conjunto de polinomios ortogonales, por medio de unos coeficientes que sí se pueden calcular con CE. Una vez que se tiene expresada la solución de la EDP como combinación lineal de polinomios ortogonales en el espacio probabilístico, se puede aplicar MC sobre dichos polinomios, lo que supone un coste computacional mucho menor. Se explican más detalles en el Capítulo 5.

### 3.4 Resumen y conclusiones

Se discretiza la incertidumbre de los datos de entrada mediante la expansión de Karhunen-Loève, y se indica que en la práctica se trabaja con la expansión de Karhunen-Loève truncada, que permite capturar un cierto porcentaje de energía del campo. Se explica la transformación del espacio de probabilidad abstracto en el espacio real de imágenes. Por medio de esta transformación, se transforma una EDP estocástica en una EDP determinista que contiene un parámetro finito dimensional. Asimismo, se describen las diferentes técnicas para tratar las integrales en el dominio aleatorio, como son Monte Carlo, Colocación Estocástica y Caos Polinomial, haciendo hincapié en que la suavidad del integrando respecto al parámetro aleatorio determina cuál es adecuada en cada caso, y que una combinación de ellas es posible, para aliviar el enorme coste computacional de aplicar Monte Carlo directamente sobre la EDP.

### Referencias

- [1] Aitchison, J., Brown, J. A. C.: The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics. Cambridge University Press, (1957)
- [2] Ditlevsen, O. D.; Madsen, H. O. Chichester. Structural Reliability Methods. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [3] Gunzburger, M. D., Webster, C., Zhang, G. Stochastic finite element methods for partial differential equations with random input data. *Acta Numer.* **23**, 521–650 (2014)
- [4] Lemaire, M. Structural Reliability. Wiley, 2009
- [5] Lord, G. L., Powell, C. E., Shardlow, T.: An Introduction to Computational Stochastic PDEs. Cambridge University Press (2014)
- [6] Melchers, R. E., Beck, A. T. Structural Reliability Analysis and Prediction. Third Edition. John Wiley & Sons, 2018
- [7] Rao, M. M., Swift, R. J.: Probability Theory with Applications. Second Edition. Springer, New York (2006)
- [8] Smith, R. C. Uncertainty quantification. Theory, implementation, and applications. Computational Science & Engineering, 12. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, (2014)
- [9] Sudret, B., Kiureghian, A. D.: Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A State-of-the-Art Report. Technical Report UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, Nov. (2000)



## Capítulo 4

# Resolución numérica de problemas de control óptimo robusto

En este capítulo, se estudia el control óptimo **robusto**. El término robusto hace referencia a controlar, no solo la media de la solución, sino también la varianza o dispersión que tiene dicha solución. El contenido de este capítulo recopila el trabajo publicado en el Artículo [9].

### 4.1 Introducción

El problema determinista de control de las vibraciones de una viga que sigue el modelo de Bernoulli-Euler se ha estudiado ampliamente a lo largo de los años, por ejemplo en [3, 6, 7, 8]. Sin embargo, aunque algunos trabajos han considerado incertidumbre en la ecuación de Bernoulli-Euler, el problema de control óptimo robusto no ha sido estudiado hasta la fecha.

Se considera incertidumbre en el parámetro de rigidez flexural. El problema es formulado en el marco de la teoría del control óptimo y proporciona un marco funcional, el cual es tan general como para incluir diferentes tipos de variables aleatorias y campos aleatorios como fuentes de incertidumbre. El momento estadístico de segundo orden de la respuesta aleatoria del sistema en el tiempo de control es incorporado en el funcional coste como una medida de robustez.

El método de resolución numérica del PCO combina un método clásico de descenso con un método de Colocación Estocástica adaptativo de malla dispersa anisotrópica para la aproximación numérica de los estadísticos de interés. Como los sistemas estocásticos directo y adjunto están desacoplados, el conjunto de problemas deterministas desacoplados que emerge del método de Colocación Estocástica se puede resolver en paralelo, lo cual reduce el coste computacional y permite resolver problemas con un relativo gran número de términos en la expansión truncada de Karhunen-Loève de un campo aleatorio.

Finalmente, dos experimentos numéricos ilustran tanto el comportamiento del método propuesto como las diferencias significativas que pueden aparecer cuando la incertidumbre se incorpora en este tipo de problemas de control.

## 4.2 El problema de control óptimo robusto

Se considera de nuevo el sistema de Bernoulli-Euler (2.1) con el control (2.5), pero reescrito en el espacio de probabilidad  $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \rho(z) dz)$ , introducido en la Sección 3.2.3. En definitiva, el sistema de ecuaciones planteado es el siguiente:

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) = 1_{\mathcal{O}} u, & \text{en } (0, T) \times D \times \Gamma \\ y(0) = \partial_x^2 y(0) = y(L) = \partial_x^2 y(L) = 0, & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{en } D \times \Gamma. \end{cases} \quad (4.1)$$

La ecuación en derivadas parciales del sistema (4.1) se puede reescribir en forma variacional o débil:

$$\int_{\Gamma} \int_D \partial_t^2 y v dx dz + \int_{\Gamma} \int_D a \partial_x^2 y \partial_x^2 v dx dz = \int_{\Gamma} \int_D 1_{\mathcal{O}} u dx dz, \quad \forall v \quad (4.2)$$

La existencia y unicidad de solución para (4.2) se ha probado en [9].

El funcional coste u objetivo es el siguiente:

$$\begin{aligned} J(u) := & \frac{\alpha_1}{2} \int_0^L \left( \int_{\Gamma} y(T) \rho(z) dz \right)^2 dx \\ & + \frac{\alpha_2}{2} \int_0^L \left( \int_{\Gamma} \partial_t y(T) \rho(z) dz \right)^2 dx + \frac{\beta_1}{2} \int_0^L \int_{\Gamma} y^2(T) \rho(z) dz dx \\ & + \frac{\beta_2}{2} \int_0^L \int_{\Gamma} (\partial_t y)^2(T) \rho(z) dz dx + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \int_{\mathcal{O}} u^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  y  $\beta_1, \beta_2, \gamma \geq 0$  son parámetros de peso.

El problema de control óptimo robusto consiste en el problema de minimización:

$$(P_1) \quad \begin{cases} \text{mín}_{u \in \mathcal{U}_{ad,g}} J(u) \\ \text{sujeto a } (y, u) \text{ solución de (4.1)} \end{cases}$$

donde  $\mathcal{U}_{ad,g}$  viene definido por (2.7).

En cuanto a la existencia de solución, se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.** *Se cumplen las siguientes aseveraciones:*

- (i) Si  $-\infty < m < M < +\infty$ , entonces  $(P_1)$  tiene, al menos, una solución. Si, además,  $\gamma > 0$ , entonces la solución es única.
- (ii) Si  $m = -\infty$ ,  $M = +\infty$  y  $\gamma > 0$ , entonces  $(P_1)$  tiene una única solución.

La prueba de este teorema se encuentra en [9, Teor. 2.1].

### 4.3 Resolución numérica

Se propone un método de descenso basado en el gradiente para la resolución numérica del problema  $(P_1)$ . En concreto, el algoritmo se estructura como se indica en el Algoritmo 4.1.

---

#### Algoritmo 4.1: Método de descenso basado en el gradiente

---

**Datos:**  $u_0, \theta, N_{max}$

**Resultado:**  $u$

```

1 desde  $k \leftarrow 0$  a  $N_{max} - 1$  hacer
2   Elegir una dirección de descenso  $\bar{u}_k$  (para la cual  $\frac{\partial J(u_k)}{\partial u} \cdot \bar{u}_k < 0$ );
3   Elegir un tamaño de paso  $\lambda_k$  tal que  $J(u_k + \lambda_k \bar{u}_k) < J(u_k)$ ;
4   Establecer  $u_{k+1} = u_k + \lambda_k \bar{u}_k$ ;
5   si Control con restricciones entonces
6      $u_{k+1} = u_{k+1}^*$  (proyectado en la región  $\mathcal{U}_{ad,g}$ )
7   si  $k \geq 5$  entonces
8     si  $\frac{|J(u_{k+1}) - J(u_k)|}{J(u_{k+1})} \leq \theta$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , entonces
9        $u = u_{k+1}$ ;
10    salir

```

---

El Algoritmo 4.1 obedece al esquema llamado *primero optimizar, después discretizar*. Esto significa que el gradiente de  $J(u)$  es calculado explícitamente. Después, se lleva a cabo un proceso de discretización para el cálculo numérico de las integrales involucradas en las direcciones de descenso y en los tamaños de paso. Como  $(P_1)$  es convexo, la convergencia del algoritmo de descenso general descrito anteriormente está asegurada para toda inicialización  $u_0$  (véase [4, Teor. 2.2]). La principal novedad es que las direcciones de descenso y tamaños de paso dependen de las integrales de la solución de (4.1), y su estado adjunto asociado, en un dominio aleatorio.

Como es bien conocido, los métodos de descenso requieren iterar y son computacionalmente más costosos que los métodos basados en la resolución del sistema de optimalidad [11]. Sin embargo, un método de tipo gradiente es adecuado para

este problema, porque los problemas directo y adjunto están desacoplados. Por tanto, se puede usar computación en paralelo para reducir significativamente el tiempo computacional.

### 4.3.1 Cálculo explícito de la dirección de descenso

El Lagrangiano asociado al problema  $(P_1)$  se define formalmente por

$$\mathcal{L}(\hat{y}, \hat{u}, \hat{p}) := J(\hat{y}, \hat{u}) + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 \hat{y} + \partial_x^2 (a \partial_x^2 \hat{y}) - 1_{\mathcal{O}} \hat{u}] \hat{p} dt dx \rho dz, \quad (4.4)$$

En la expresión (4.4), las variables  $\hat{y}, \hat{u}, \hat{p}$  se tratan como variables independientes. Este método del Lagrangiano formal sigue los mismos pasos que en el caso determinista (sin aleatoriedad), que se puede ver en [4, 14].

Denotando por  $(y, u, p)$  un punto estacionario de  $\mathcal{L}$ , se calculan las derivadas direccionales respecto a  $\hat{y}, \hat{u}$  y  $\hat{p}$ , en las direcciones  $\bar{y}, \bar{u}$  y  $\bar{p}$ , respectivamente, proporcionando la siguiente información:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} &\rightarrow \text{sistema adjunto,} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial u} \cdot \bar{u} &\rightarrow \text{dirección de descenso,} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial p} \cdot \bar{p} &\rightarrow \text{ley de estado (4.1).} \end{aligned} \quad (4.5)$$

La derivada direccional con respecto a la variable de estado se calcula de la siguiente forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} (\mathcal{L}(y + h\bar{y}, u, p) - \mathcal{L}(y, u, p)) \right], \quad h \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

Se pueden calcular esos términos individualmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y + h\bar{y}, u, p) &= J(y + h\bar{y}, u) \\ &+ \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 (y + h\bar{y}) + \partial_x^2 (a \partial_x^2 (y + h\bar{y})) - 1_{\mathcal{O}} u] p dt dx \rho dz \\ &= J(y + h\bar{y}, u) + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 y + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) - 1_{\mathcal{O}} u] p dt dx \rho dz \\ &\quad + h \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 \bar{y} + \partial_x^2 (a \partial_x^2 \bar{y})] p dt dx \rho dz. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Al calcular la diferencia, se eliminan los términos repetidos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} J(y + h\bar{y}, u) - \frac{1}{h} J(y, u) \right] \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} h \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 \bar{y}] p dt dx \rho dz \right] \\ &+ \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} h \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_x^2 (a \partial_x^2 \bar{y})] p dt dx \rho dz \right], \quad (4.8) \end{aligned}$$

Se evalúan los límites de los dos últimos términos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} J(y + h\bar{y}, u) - \frac{1}{h} J(y, u) \right] \\ &+ \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_t^2 \bar{y}] p dt dx \rho dz + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} [\partial_x^2 (a \partial_x^2 \bar{y})] p dt dx \rho dz, \quad (4.9) \end{aligned}$$

A continuación, se integra dos veces con respecto a la variable temporal, y cuatro veces con respecto a la variable espacial, obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial y} \cdot \bar{y} &= \lim_{h \rightarrow 0} [J(y + h\bar{y}, u) - J(y, u)] \\ &+ \int_0^L \int_{\Gamma} \partial_t \bar{y}(T) p(T) dx \rho dz - \int_0^L \int_{\Gamma} \bar{y}(T) \partial_t p(T) dx \rho dz \\ &+ \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} \bar{y} \partial_t^2 p dt dx \rho dz + \int_0^T \int_0^L \int_{\Gamma} \bar{y} \partial_x^2 (a \partial_x^2 p) dt dx \rho dz. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Aplicando el *Lema de Localización*, se obtiene el sistema adjunto siguiente

$$\begin{cases} \partial_t^2 p(t, x, z) + \partial_x^2 [a(x, z) \partial_x^2 p(t, x, z)] = 0, \\ p(t, 0, z) = \partial_x^2 p(t, 0, z) = p(t, L, z) = \partial_x^2 p(t, L, z) = 0, \\ p(T, x, z) = -\beta_2 \partial_t y(T, x, z) - \alpha_2 \int_{\Gamma} \partial_t y(T, x, z) \rho(z) dz, \\ \partial_t p(T, x, z) = \beta_1 y(T, x, z) + \alpha_1 \int_{\Gamma} y(T, x, z) \rho(z) dz. \end{cases} \quad (4.11)$$

A continuación, se calcula la derivada direccional del Lagrangiano respecto del control  $u$  en la dirección  $\bar{u}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y, u, p)}{\partial u} \cdot \bar{u} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} (\mathcal{L}(y, u + h\bar{u}, p) - \mathcal{L}(y, u, p)) \right]. \quad (4.12)$$

Se realizan algunos cálculos de manera análoga al caso anterior, proporcionando el resultado

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u} \cdot \bar{u} = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} \left[ \gamma u - \int_{\Omega} p \rho(z) dz \right] \bar{u} dx dt, \quad (4.13)$$

donde  $p$  resuelve el problema adjunto (4.11).

Consecuentemente, una dirección de descenso para  $J(u)$  es la función

$$\bar{u}(t, x) = - \left( \gamma u(t, x) - \int_{\Gamma} p(t, x, z) \rho(z) dz \right), \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{O}. \quad (4.14)$$

### 4.3.2 Cálculo del tamaño de paso

Para una dirección de descenso  $\bar{u}$  fija, la función  $\lambda \mapsto J(u + \lambda \bar{u})$  es cuadrática, ya que puede expresarse  $J(u + \lambda \bar{u}) = J(u) + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2$ . Denotando por  $\bar{y}(t, x, z)$  la solución de

$$\begin{cases} \partial_t^2 \bar{y}(t, x, z) + \partial_x^2 [a(x, z) \partial_x^2 \bar{y}(t, x, z)] = 1_{\mathcal{O}} \bar{u}(t, x), \\ \bar{y}(t, 0, z) = \partial_x^2 \bar{y}(t, 0, z) = \bar{y}(t, L, z) = \partial_x^2 \bar{y}(t, L, z) = 0, \\ \bar{y}(0, x, z) = 0, \quad \partial_t \bar{y}(0, x, z) = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  vienen dados explícitamente por

$$\begin{aligned} a_1 = & \alpha_1 \int_0^L \int_{\Gamma} y(T) \rho dz \int_{\Gamma} \bar{y}(T) \rho dz dx + \alpha_2 \int_0^L \int_{\Gamma} \partial_t y(T) \rho dz \int_{\Gamma} \partial_t \bar{y}(T) \rho dz dx \\ & + \beta_1 \int_0^L \int_{\Gamma} y(T) \bar{y}(T) \rho dz dx + \beta_2 \int_0^L \int_{\Gamma} \partial_t y(T) \partial_t \bar{y}(T) \rho dz dx \\ & + \gamma \int_0^T \int_{\mathcal{O}} u \bar{u} dx dt \quad (4.16) \end{aligned}$$

y  $a_2 = J(\bar{u})$ .

Así, el tamaño de parámetro de paso óptimo es  $\lambda_{opt} = -a_1/2a_2$ .

### 4.3.3 Aproximación numérica de las cantidades estadísticas de interés

El método de gradiente, el cual se propone para resolver el problema  $(P_1)$ , requiere el cálculo, en cada iteración, del primer y el segundo momento de la variable de estado  $(y, \partial_t y)$  y de la media del estado adjunto  $p$  (solución de (4.11)). En total, hay tres procesos de discretización envueltos; específicamente: discretización con respecto a la variable espacial  $x \in (0, L)$ , con respecto a  $t \in (0, T)$ , y con respecto al parámetro  $N$ -dimensional  $z \in \Gamma$ .

#### 4.3.3.1 Discretización espacial

Se considera una malla uniforme  $\mathcal{T}_h$ ,  $h > 0$ , del dominio espacial  $(0, L)$ . Entonces, se aproxima el espacio de Sobolev (2.13) por el espacio de elementos finitos cúbicos de Hermite

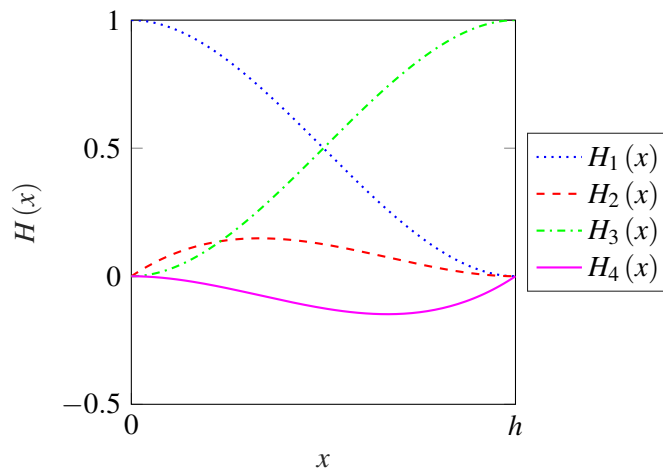
$$V_h := \{\phi_h \in C^1([0, L]) : \phi_h|_I \in \mathcal{P}_3(I), \forall I \in \mathcal{T}_h, \phi_h(0) = \phi_h(L) = 0\}, \quad (4.17)$$

donde  $\mathcal{P}_3(I)$  es el espacio de polinomios de grado menor o igual que 3 en el sub-intervalo  $I$ .

Una base de (4.17) se construye a partir de los polinomios de Hermite:

$$\begin{cases} H_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{h^2} + \frac{2x^3}{h^3} \\ H_2(x) = x - \frac{2x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2} \\ H_3(x) = \frac{3x^2}{h^2} - \frac{2x^3}{h^3} \\ H_4(x) = \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{h^2} \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (4.18)$$

donde  $h$  es el tamaño de un elemento.



**Figura 4.1** Representación de las cuatro funciones de forma de Hermite para un elemento cualquiera de tamaño  $h$ .

En la Figura 4.1 se representan los polinomios de Hermite, que se corresponden con las funciones de forma para el primer elemento. Se observa que la función  $H_1$  toma el valor 1 en el nodo izquierdo, y 0 en el derecho, y en ambos nodos su pendiente o velocidad toma el valor 0; por ello, está relacionada con el desplazamiento en el nodo izquierdo. Con un razonamiento análogo, se ve que  $H_2$  se identifica con la pendiente en el nodo izquierdo;  $H_3$ , con el desplazamiento en el nodo derecho; y  $H_4$ , con la pendiente en el nodo derecho. De esa forma, cada nodo tiene sus dos grados de libertad (desplazamiento y velocidad) asociados a una función de forma.

A continuación, se aproxima la solución  $y = y(t, x, z)$  como combinación lineal de los elementos finitos de Hermite:

$$y = \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \phi_{h_i}(x), \quad (4.19)$$

donde  $2N_h = \dim(V_h)$ , y las funciones de forma  $\phi_{hi}$  se construyen de forma estándar a partir de los polinomios de Hermite.

De manera que (4.2) queda:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \int_D \partial_t^2 \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \phi_{hi}(x) v dx \rho dz \\ + \int_{\Gamma} \int_D a \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \partial_x^2 \phi_{hi}(x) \partial_x^2 v dx \rho dz \\ = \int_{\Gamma} \int_D f v dx \rho dz \quad (4.20) \end{aligned}$$

Si se seleccionan las funciones test  $v(x)$  como las funciones de forma, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \partial_t^2 \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \int_D \phi_{hi}(x) \phi_{hj}(x) dx \rho dz \\ + \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{2N_h} y_i(t, z) \int_D a(x, z) \partial_x^2 \phi_{hi}(x) \partial_x^2 \phi_{hj}(x) dx \rho dz \\ = \int_{\Gamma} \int_D f(t, x) \phi_{hj}(x) dx \rho dz. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Para un elemento cualquiera, se identifica

$$(M_h)_{i,j} = \int_D \phi_{hi}(x) \phi_{hj}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.22)$$

como los elementos de la matriz de masas *elemental*  $[M_h]_e$ ,

$$(K_h(z))_{i,j} = \int_D a(x, z) \partial_x^2 \phi_{hi}(x) \partial_x^2 \phi_{hj}(x) dx, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.23)$$

como los elementos de la matriz de rigidez *elemental*  $[K_h]_e$ , y

$$(F_h)_j = \int_D f(t, x) \phi_{hj}(x) dx, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (4.24)$$

como los elementos del vector de fuerzas *elemental*  $[F_h]_e$ .

Se dicen *elementales* porque están asociadas a un elemento. Las matrices globales  $M_h$ ,  $K_h(z)$  y  $F_h$  se calculan realizando el ensamblado de las matrices elementales (4.22), (4.23), (4.24), respectivamente.

Las integrales que aparecen en (4.22) se pueden calcular de forma explícita, ya que las funciones de forma son polinomios. Sin embargo, las integrales de las expresiones (4.23) y (4.24), en general, no se pueden calcular explícitamente, por



lo que se realiza la integración numérica utilizando una fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre, de nivel 2. En el caso de la matriz de rigidez, como el término de rigidez flexural  $a(x, z)$  depende también del parámetro aleatorio, se necesita el valor del campo aleatorio en los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre.

Después de este proceso de discretización, (4.1) (y, similarmente, el resto de EDPs aleatorias) se reduce al sistema lineal paramétrico de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) siguiente:

$$\begin{cases} M_h \partial_t^2 y_h(t, z) + K_h(z) y_h(t, z) = F_h(t), & (t, z) \in (0, T) \times \Gamma, \\ y_h(0, z) = y_h^0(z), & z \in \Gamma, \\ \partial_t y_h(0, z) = y_h^1(z), & z \in \Gamma, \end{cases} \quad (4.25)$$

donde  $y_h(t, z)$  es una función vectorial aproximando  $y(t, x, z)$  en los nodos de la discretización espacial,  $M_h$  es la matriz de masas,  $K_h(z)$  es la matriz de rigidez, y  $F_h$  es el vector de fuerzas. En particular,  $y_h^0, y_h^1$  denotan la proyección de  $y^0(x), y^1(x)$ , respectivamente, sobre el espacio finito dimensional (4.17).

#### 4.3.3.2 Discretización en tiempo

Siguiendo [5], se usa el método de Newmark para la discretización en la variable temporal. Se considera una malla uniforme de tamaño de elemento  $dt$  en  $[0, T]$ . Se denota por  $y_h^m, v_h^m, a_h^m, F_h^m$  a las aproximaciones de  $y_h, \partial_t y_h, \partial_t^2 y_h$  y  $F_h$ , respectivamente, en los nodos  $t_m$ , con  $0 \leq m \leq \frac{T}{dt}$ , del intervalo  $[0, T]$ .

El método de Newmark transforma (4.25) en un sistema paramétrico de ecuaciones lineales algebraico, como se describe a continuación.

Se parte de la inicialización:

$$a_h^0 = [M_h]^{-1} (F_h^0 - K_h y_h^0), \quad (4.26)$$

donde  $[M_h]^{-1}$  hace referencia a la matriz inversa de la matriz de masas  $M_h$ .

Se realiza en dos etapas. En primer lugar, se calculan las llamadas *predicciones* de la solución:

$$\begin{aligned} y_h^{m+1}(z) &= y_h^m(z) + dt v_h^m(z) + \frac{(dt)^2}{2} (1 - 2\delta_2) a_h^m(z), \\ v_h^{m+1}(z) &= v_h^m(z) + dt [(1 - \delta_1) a_h^m(z) + \delta_1 a_h^{m+1}(z)], \\ a_h^{m+1}(z) &= [M_h(z) + \delta_2 dt^2 K_h(z)]^{-1} (F_h^{m+1} - K_h(z) y_h^{m+1}(z)), \end{aligned} \quad (4.27)$$

y, a continuación, se realizan las *correcciones*:

$$\begin{aligned} y_h^{m+1}(z) &= y_h^{m+1}(z) + \delta_2 dt^2 a_h^{m+1}, \\ v_h^{m+1}(z) &= v_h^{m+1}(z) + \delta_1 dt a_h^{m+1}(z). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Si  $2\delta_2 \geq \delta_1 \geq 0.5$ , entonces el método de Newmark es incondicionalmente estable y, si  $\delta_1 = 0.5, \delta_2 = 0.25$ , tiene orden de convergencia 2 (véase [5, Cap. 9]).

#### 4.3.3.3 Discretización en el dominio aleatorio

A lo largo del algoritmo de minimización basado en el gradiente, se debe evaluar el funcional coste (4.3) junto con la dirección de descenso (5.11), el cual contiene integrales en el dominio aleatorio. La dificultad radica en resolver estas integrales, con una discretización adecuada en torno al parámetro aleatorio  $z$ . Se toma como ejemplo la siguiente integral:

$$\int_{\Gamma} \left( \int_D y(T, x, z) \right)^2 \rho(z) dz \quad (4.29)$$

En el caso más simple, cuando  $z \in \mathbb{R}$ , procedente de una variable aleatoria, se aplica una regla de cuadratura unidimensional, para aproximar la integral de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma} \left( \int_D y(T, x, z) \right)^2 \rho(z) dz \cong \sum_{r=1}^R w^r \left( \int_D y(T, x, z^r) \right)^2, \quad (4.30)$$

donde  $w^r, z^r, \quad r = 1, \dots, R$ , son, respectivamente, los pesos y nodos asociados a la regla de cuadratura adecuada para la distribución  $\rho(z)$  del parámetro  $z$ , y  $R$  es el número total de nodos de la cuadratura, que depende del nivel de precisión de la aproximación elegido.

En el caso de que la incertidumbre esté presente en forma de campo aleatorio correlacionado, el parámetro  $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N$ , es decir, tiene dimensión  $N$ .

La primera opción, más sencilla, es aplicar una regla de cuadratura unidimensional en cada dirección, lo que se conoce como el *producto tensorial completo* (en inglés, *full tensor product*), de manera que la integral se aproximaría de la siguiente forma:

$$\int_{\Gamma} \left( \int_D y(T, x, z) \right)^2 \rho(z) dz \cong \sum_{r_1=1}^{R_1} \dots \sum_{r_N=1}^{R_N} w_1^{r_1} \dots w_N^{r_N} \left( \int_D y(T, x, z_1^{r_1}, \dots, z_N^{r_N}) \right)^2, \quad (4.31)$$

donde  $w_i^{r_i}, z_i^{r_i}$  son, respectivamente, los pesos y nodos asociados a la dirección  $i$ , con  $i = 1, \dots, N$ , y  $R_i$  es el número de nodos en la dirección  $i$ . El número de nodos total es  $R = \prod_{i=1}^N R_i$ , el cual resulta inabordable computacionalmente cuando la dimensión  $N$  es grande. Es lo que se conoce en la literatura como *maldición de la dimensionalidad*.

Smolyak [13] propone una *malla de cuadratura dispersa* (en inglés, *sparse grid*). Esta malla elimina algunos nodos mientras que la precisión se conserva.

Además, para problemas altamente *anisotrópicos* [10], como es el caso resultante de las expansiones de Karhunen-Loève, en las cuales las variables aleatorias correspondientes a autovalores grandes tienen más influencia que aquellas asociadas a los autovalores bajos, se puede utilizar una *mallada de cuadratura dispersa anisotrópica* (en inglés, *anisotropic sparse grid*), reduciendo en mayor medida el número de nodos de las direcciones menos relevantes. La precisión de las soluciones no se ve afectada, y el coste computacional es mucho menor.

El número de nodos en cada dirección  $(R_1, \dots, R_N)$  se elige en base a un *nivel de cuadratura*  $\ell$ , que debe escogerse adaptativamente, para cumplir con un nivel de precisión en la aproximación prescrito, como se describe más adelante en el Algoritmo 4.2.

A continuación, se describe el *método de Colocación Estocástica adaptativo de mallada dispersa anisotrópica*, de una manera más formal. Siguiendo [10], para un entero  $\ell$  (llamado *nivel*) y un vector de pesos  $g = (g_1, \dots, g_N)$  para las diferentes direcciones estocásticas, se considera el conjunto de índices

$$X_g(\ell, N) := \left\{ i = (i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}_+^N : \sum_{n=1}^N (i_n - 1) g_n \leq \ell \underline{g} \right\} \quad (4.32)$$

con  $g := \min_{1 \leq n \leq N} g_n$  y  $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ . De forma similar a la regla de cuadratura isotrópica de Smolyak [13], la fórmula de cuadratura anisotrópica aplicada a una función genérica  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  viene dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_g(\ell, N) F &:= \sum_{i \in X_g(\ell, N)} (\Delta^{i_1} \otimes \dots \otimes \Delta^{i_N}) F \\ &= \sum_{r_1=1}^{R_{i_1}} \dots \sum_{r_N=1}^{R_{i_N}} F(z_1^{r_1}, \dots, z_N^{r_N}) w_1^{r_1} \dots w_N^{r_N}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde  $\Delta^{i_n} := \mathcal{Q}^{i_n} - \mathcal{Q}^{i_n-1}$ , con  $\mathcal{Q}^0 = 0$ , es una regla de cuadratura en la que las coordenadas  $z_n^{r_n}$  de los nodos son las mismas que aquellas de la fórmula de cuadratura unidimensional  $\mathcal{Q}^{i_n}$ , y, en el caso de que la regla de cuadratura sea *no-anidada* (véase nota en el siguiente párrafo), sus pesos asociados  $w_n^{r_n}$  son la diferencia entre aquellos de los niveles  $i_n$  e  $i_n - 1$ .  $R_{i_n}$  denota el número de puntos de colocación en la dirección  $n$ -ésima.

*Nota 4.1.* Las reglas de cuadratura unidimensionales pueden ser *anidadas* (*nested quadrature rules*, en inglés), o *no-anidadas* (*non-nested*). En las primeras, los nodos de un nivel  $i_n$  contienen siempre los nodos del nivel inferior  $i_n - 1$ , además de unos nodos adicionales propios de dicho nivel  $i_n$ , lo cual supone un ahorro de tiempo de cálculo al avanzar de un nivel al siguiente. En las segundas, sin embargo, los nodos de un nivel pueden ser diferentes a los del nivel inferior. Aunque

pueda parecer que las reglas de cuadratura anidadas sean mejores, algunos estudios recientes muestran un comportamiento similar para los casos de regla anidada y no-anidada [10]. En este caso, se emplea la regla de cuadratura no-anidada de Hermite.

Seguidamente, se analiza cómo elegir el vector de pesos  $g$  y el entero  $\ell$ . Como se prueba en [10], la elección óptima de  $g$  depende de las propiedades de analiticidad de la solución de la EDP con respecto al parámetro aleatorio, lo cual, a su vez, depende del ratio de decaimiento de los autovalores en la expansión (3.9). Por tanto, las direcciones estocásticas correspondientes a autovalores grandes tienen más influencia en la solución de la EDP que las asociadas a autovalores más bajos, y así requieren más puntos de colocación. Aunque la regularidad de la solución de la ecuación de las vigas con respecto al parámetro aleatorio no ha sido analizada hasta ahora, de acuerdo con los resultados en [2, 10], para el caso de campos aleatorios Gaussianos es razonable tomar  $g_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ , donde  $\lambda_n$  son los autovalores en (3.9).

En cuanto a  $\ell$ , primero notar que, dado un nivel de cuadratura  $\ell$ , los dos primeros momentos estadísticos de  $y(T, x, z)$  y  $\partial_t y(T, x, z)$  se calculan numéricamente aplicando la regla de cuadratura (4.33) a  $y_{h,dt}(T, x^j, z)$  y a  $(\partial_t y)_{h,dt}(T, x^j, z)$  (los cuales se obtienen resolviendo (4.28)) en los nodos  $x^j$  de la malla de elementos finitos espacial). En este cálculo, se toma la función de control  $u(t, x)$  como la solución óptima del problema determinista asociado - *determinista* significa que los datos de entrada aleatorios de la EDP son reemplazados por sus valores medios-. Esto lleva a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^1(y(T, x^j, \cdot)) &:= \int_{\Gamma} y(T, x^j, z) \rho(z) dz \\ &\approx \mathcal{A}_g(\ell, N) y_{h,dt}(T, x^j, \cdot) := \mathcal{M}_{g,\ell,N}^1(y_{h,dt}(T, x^j, \cdot)) \end{aligned} \quad (4.34)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2(y(T, x^j, \cdot)) &:= \int_{\Gamma} y^2(T, x^j, z) \rho(z) dz \\ &\approx \mathcal{A}_g(\ell, N) y_{h,dt}^2(T, x^j, \cdot) := \mathcal{M}_{g,\ell,N}^2(y_{h,dt}(T, x^j, \cdot)). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Expresiones similares se obtienen para  $\partial_t y$ , las cuales se omiten por simplicidad. Las expresiones (4.34) y (4.35) se usan entonces para aproximar

$$\left\| \int_{\Gamma} y(T, \cdot, z) \rho(z) dz \right\|_{L^2(0,L)}^2 \text{ y } \left\| \int_{\Gamma} y^2(T, \cdot, z) \rho(z) dz \right\|_{L^2(0,L)}^2, \quad (4.36)$$

donde la integración numérica en  $(0, L)$  se lleva a cabo usando las funciones de forma asociadas a la malla de elementos finitos. Estas aproximaciones se denotan por  $\mathcal{M}_{g,\ell,N}^{1,h,dt}(y(T))$  y  $\mathcal{M}_{g,\ell,N}^{2,h,dt}(y(T))$ , respectivamente, esto es,

$$\mathcal{M}_{g,\ell,N}^{1,h,dt}(y(T)) \approx \left\| \int_{\Gamma} y(T, \cdot, z) \rho(z) dz \right\|_{L^2(0,L)}^2 \quad (4.37)$$

y

$$\mathcal{M}_{g,\ell,N}^{2,h,dt}(y(T)) \approx \left\| \int_{\Gamma} y^2(T, \cdot, z) \rho(z) dz \right\|_{L^2(0,L)}^2. \quad (4.38)$$

Entonces, se realiza un algoritmo adaptativo para seleccionar  $\ell$  (Algoritmo 4.2), partiendo del nivel  $\bar{\ell}$  de la solución enriquecida y una tolerancia  $\varepsilon$ .

---

**Algoritmo 4.2:** Obtención del nivel de cuadratura  $\ell_{opt}$ 


---

**Datos:**  $\bar{\ell}$  suficientemente grande,  $0 < \varepsilon \ll 1$

**Resultado:**  $\ell_{opt}$

1 Definir el vector de pesos:

$$\hat{g}_n := \left( \frac{\beta_n(g, \bar{\ell}) - 1}{\beta_n(g, \bar{\ell})} \right) \left( \frac{g_n}{g} \right), \quad \text{con } \beta_n(g, \bar{\ell} + 1) = \max_{i \in X_g(\bar{\ell} + 1, N)} \{i_n\} .;$$

2 Calcular (4.37) y (4.38) usando la regla de cuadratura  $\mathcal{A}_{\hat{g}}(\bar{\ell} + 1, N)$ :

$$\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{1,h,dt}, \quad \mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{2,h,dt} .$$

3 desde  $\ell \leftarrow 1$  a  $\bar{\ell}$  hacer

4     Calcular (4.37) y (4.38) usando la regla de cuadratura  $\mathcal{A}_{\hat{g}}(\ell, N)$ ;

5     **si**  $\max \left\{ \frac{|\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{1,h,dt}(\cdot) - \mathcal{M}_{g, \ell, N}^{1,h,dt}(\cdot)|}{\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{1,h,dt}(\cdot)}, \frac{|\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{2,h,dt}(\cdot) - \mathcal{M}_{g, \ell, N}^{2,h,dt}(\cdot)|}{\mathcal{M}_{\hat{g}, \bar{\ell} + 1, N}^{2,h,dt}(\cdot)} \right\} \leq \varepsilon$ , **entonces**

6          $\ell_{opt} = \ell$ ;

7         **salir**

---

Se observa que el criterio de parada del algoritmo representa la cercanía de los momentos estadísticos calculados con el nivel  $\ell$  y los obtenidos con el nivel  $\bar{\ell}$  de la solución enriquecida, la cual juega el rol de solución exacta.

En el problema  $(P_1)$ , el objetivo es calcular con precisión el primer y segundo momento de  $(y(T), \partial_t y(T))$ . Esto justifica la elección del criterio de parada, que ha sido elegido de acuerdo con el funcional coste de  $(P_1)$  y, en consecuencia, también de acuerdo con el criterio de parada del Algoritmo 4.1. Precisamente, la tolerancia  $\varepsilon$  en el criterio de parada del Algoritmo 4.2, la cual mide el nivel de precisión en el análisis (resolución de las ecuaciones de estado y estado adjunto), debe ser elegida menor o igual que  $\theta$  en el Algoritmo 4.1, que mide la precisión en la optimización. En resumen, se debe cumplir  $\varepsilon \leq \theta$ .

Si el criterio de parada del Algoritmo 4.2 no se satisface, significa que el entero  $\bar{\ell}$  no es *suficientemente grande* para aproximar con aceptable precisión la solución exacta del problema. En tal caso, otro  $\bar{\ell}$  más grande que el anterior es seleccionado, y el proceso completo del Algoritmo 4.2 se repite con ese nuevo  $\bar{\ell}$ . Resultados de convergencia para este tipo de algoritmo adaptativo se han obtenido en [10,

Teor. 3.13], y en [2, Sec. 4.1]. Por tanto, para el nivel de precisión  $\varepsilon$  prescrito, la convergencia del proceso de calcular  $\bar{\ell}$  está asegurada.

#### 4.4 Experimentos numéricos

En esta sección, se consideran dos ejemplos numéricos para ilustrar el comportamiento de los algoritmos propuestos. La atención se centra en el efecto de la incertidumbre en la rigidez flexural  $a$ , modelada como una sola variable aleatoria en el primer experimento, y como un campo aleatorio en el segundo. El caso en el cual los datos iniciales estén afectados por la incertidumbre podría ser analizado análogamente.

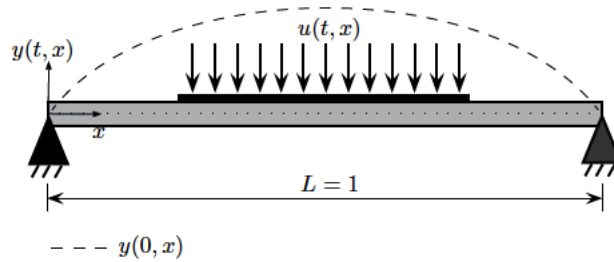
En ambos experimentos, el dominio espacial es  $D = (0, 1)$ , el tiempo de control es  $T = 0.5$ , el control actúa en  $\mathcal{O} = (0.2, 0.8)$  y las condiciones iniciales son

$$(y^0(x), y^1(x)) = (\sin(\pi x), 0). \quad (4.39)$$

El algoritmo se inicializa con

$$u_0(t, x) = 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{O}, \quad (4.40)$$

y el nivel de tolerancia para el Algoritmo 4.1 se fija en  $\theta = 10^{-2}$ . Los parámetros para el método de Newmark (Sección 4.3.3.2) son  $\delta_1 = 0.6$  y  $\delta_2 = 0.35$ . La geometría, condiciones iniciales y de contorno se muestran en la Figura 4.2.



**Figura 4.2** Experimento 1: geometría, condiciones iniciales y de contorno.

Los resultados numéricos obtenidos resolviendo  $(P_1)$  se comparan con su homólogo determinista. Aquí, problema *determinista* significa que la rigidez flexural incierta se reemplaza por su valor medio, y el funcional coste  $J(u)$  por

$$J_d(u) = \frac{1}{2} \|y(T)\|_{L^2(D)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_t y(T)\|_{L^2(D)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|u\|_{L^2((0,T) \times \mathcal{O})}^2. \quad (4.41)$$

*Nota 4.2.* Todos los experimentos numéricos de este capítulo y del próximo se han llevado a cabo con el programa Matlab R2015a.

### 4.4.1 Experimento 1: Incertidumbre en forma de una variable aleatoria

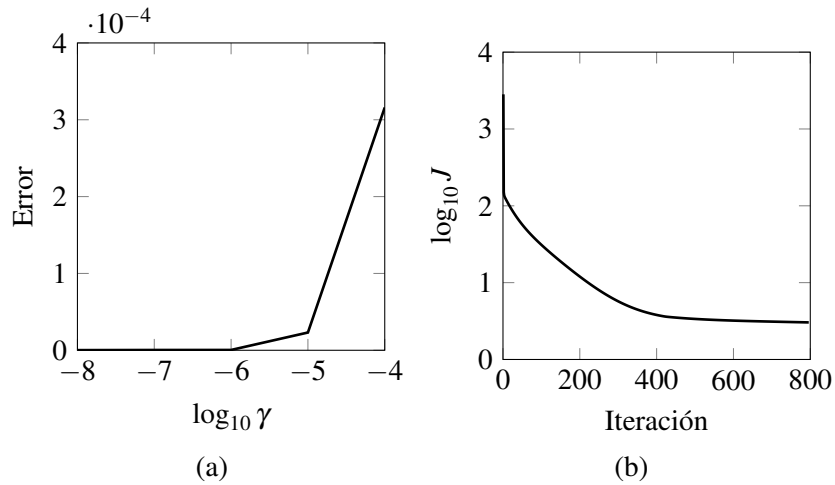
En este experimento, se asume que la rigidez flexural  $a$  toma la forma  $a = 1 + \alpha$ , donde  $\alpha = \alpha(z)$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo  $[-0.5, 0.5]$ , con media igual a 0 y varianza igual a  $\frac{1}{12}$ . Es importante destacar que, para esta configuración, se cumple la controlabilidad exacta en media (2.19), la cual se prueba en [9, Apéndice]. Los parámetros para la discretización temporal y espacial son  $dt = 0.001$  y  $h = 0.01$ , respectivamente. Una regla de cuadratura unidimensional de Gauss-Legendre con  $N_{cp} = 4$  puntos de colocación se usa para la aproximación numérica en el dominio estocástico. Este número de puntos de colocación se selecciona de acuerdo con el Algoritmo 4.2, con valores de los parámetros  $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$ ,  $\bar{\ell} = 9$ , y se obtiene  $\ell_{opt} = 4$ . En este caso, se observa que unos pocos nodos son suficientes para aproximar de forma precisa las integrales involucradas en el espacio probabilístico. Esto es debido al hecho de que para los datos iniciales suaves, como en (4.39), la solución  $y(T)$  es  $C^\infty$  con respecto al parámetro aleatorio  $\alpha$ . Esto se puede probar usando una representación de Fourier de  $y(T)$ . Se recuerda que para una función  $f \in C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , el orden del error de cuadratura es  $N_{cp}^{-k}$  [12].

El efecto del parámetro regularizante  $\gamma$  en el primer momento estadístico de la variable de estado en el tiempo  $T$ , después de la convergencia del algoritmo, se presenta en la Figura 4.3a. Como se espera, el objetivo de obtener la cantidad

$$\text{error} := \left\| \int_{-0.5}^{0.5} y(T, \cdot, \alpha) d\alpha \right\|_{L^2(D)}^2 + \left\| \int_{-0.5}^{0.5} \partial_t y(T, \cdot, \alpha) d\alpha \right\|_{L^2(D)}^2, \quad (4.42)$$

cercana a cero se deteriora para valores altos de  $\gamma$ . Se usa un valor de  $\gamma = 10^{-6}$  en los experimentos numéricos. Para demostrar la eficiencia del enfoque propuesto para proporcionar resultados robustos, se ha resuelto (P<sub>1</sub>) para diferentes valores de los parámetros de peso  $\beta_1 = \beta_2 = 0, 1, 10, 100$ . El historial de convergencia para el algoritmo de optimización, para  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 100$  y  $\gamma = 10^{-6}$ , se muestra en escala logarítmica en la Figura 4.3b.

Se puede definir el coste computacional como el producto del número de veces que se resuelve la EDP en cada iteración por el número de iteraciones. En este caso, en cada iteración se tienen que resolver los sistemas (4.1), (4.11) y (4.15), en 4 nodos, y en 800 iteraciones. Esto supone  $3 \times 4 \times 800 = 9,600$  evaluaciones de una EDP. Una ventaja del método de colocación estocástica es la posibilidad de ejecutar las evaluaciones en los nodos en paralelo, ya que son independientes. Se puede dividir, por tanto, el número de evaluaciones total entre 4. En la práctica, la reducción de tiempo no es tan elevada. Por ejemplo, en este experimento se ha



**Figura 4.3** Experimento 1: (a) efecto del parámetro regularizante  $\gamma$  en el primer momento estadístico de la variable de estado en el tiempo  $T$ , después de la convergencia del algoritmo. El error (4.42) se representa en el eje vertical. (b) Historial de convergencia del algoritmo para  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta_1 = \beta_2 = 100, \gamma = 10^{-6}$ .

llevado a cabo en un ordenador con 4 núcleos, y con la paralelización se observa una reducción de tiempo en torno a 2.5 veces.

Los resultados para los diferentes valores de los parámetros de peso  $\beta_1$  y  $\beta_2$  se presentan numéricamente en la Tabla 4.1. Al menos tres conclusiones pueden extraerse de esos resultados. Primeramente, la minimización del valor de la media de la variable de estado ( $y(T), \partial_t y(T)$ ) reduce significativamente el impacto de las realizaciones aleatorias de  $a(x, z)$  en el valor medio de la variable de estado en el tiempo  $T$ , en comparación con los resultados obtenidos usando un enfoque determinista, como se muestra en los dos primeros datos de la primera columna de la Tabla 4.1. Así, considerar el primer momento estadístico en el funcional coste es muy conveniente para problemas de control que son sensibles a los datos de entrada aleatorios. En segundo lugar, considerar solo el primer momento de la variable de estado en el funcional coste sigue proporcionando una desviación estándar de la variable de estado elevada, al igual que en la versión determinista. Para evitar este tema, se necesitan incluir parámetros estadísticos reflejando la dispersión, tales como segundos momentos estadísticos, en el funcional coste. Finalmente, la penalización del segundo momento estadístico en el funcional coste ( $\beta_1 > 0$  y  $\beta_2 > 0$ ) lleva a soluciones donde el valor de la varianza disminuye significativamente-. En este caso, los parámetros  $\alpha_j$  y  $\beta_j, j = 1, 2$  permiten encontrar un contraste entre robustez (medida por el segundo momento estadístico) y precisión en lograr la meta de que la media de la variable de estado sea cercana a cero (medida por el primero).



**Tabla 4.1** Experimento 1: Resumen de resultados para  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  y  $\gamma = 10^{-6}$ . Aquí,  $\bar{y}$  y  $\overline{\partial_t y}$  denotan la media de  $y$  y  $\partial_t y$ , respectivamente.  $\text{std}(\cdot)$  representa la desviación estándar.

	$\ \bar{y}(T)\ _{L^2(D)}^2 + \ \overline{\partial_t y}(T)\ _{L^2(D)}^2$	$\ \text{std}(y(T))\ _{L^2(D)}^2 + \ \text{std}(\partial_t y(T))\ _{L^2(D)}^2$
Determinista	$1.60 \times 10^0$	$1.57 \times 10^0$
$\beta_1 = \beta_2 = 0$	$9.35 \times 10^{-7}$	$1.32 \times 10^0$
$\beta_1 = \beta_2 = 1$	$8.25 \times 10^{-5}$	$3.32 \times 10^{-2}$
$\beta_1 = \beta_2 = 10$	$4.24 \times 10^{-4}$	$3.04 \times 10^{-2}$
$\beta_1 = \beta_2 = 100$	$7.18 \times 10^{-4}$	$2.94 \times 10^{-2}$

Estas conclusiones se ilustran en la Figura 4.4, donde se dibuja la media de la variable de estado (línea roja punteada) a lo largo del intervalo de confianza del 90% (región sombreada), el cual se calcula usando la desigualdad de Chebyshev (3.33). Como en la Tabla 4.1, las cifras muestran cómo la máxima amplitud del intervalo de confianza se reduce a costa de incrementar la media de la variable de estado en el tiempo  $T$ .

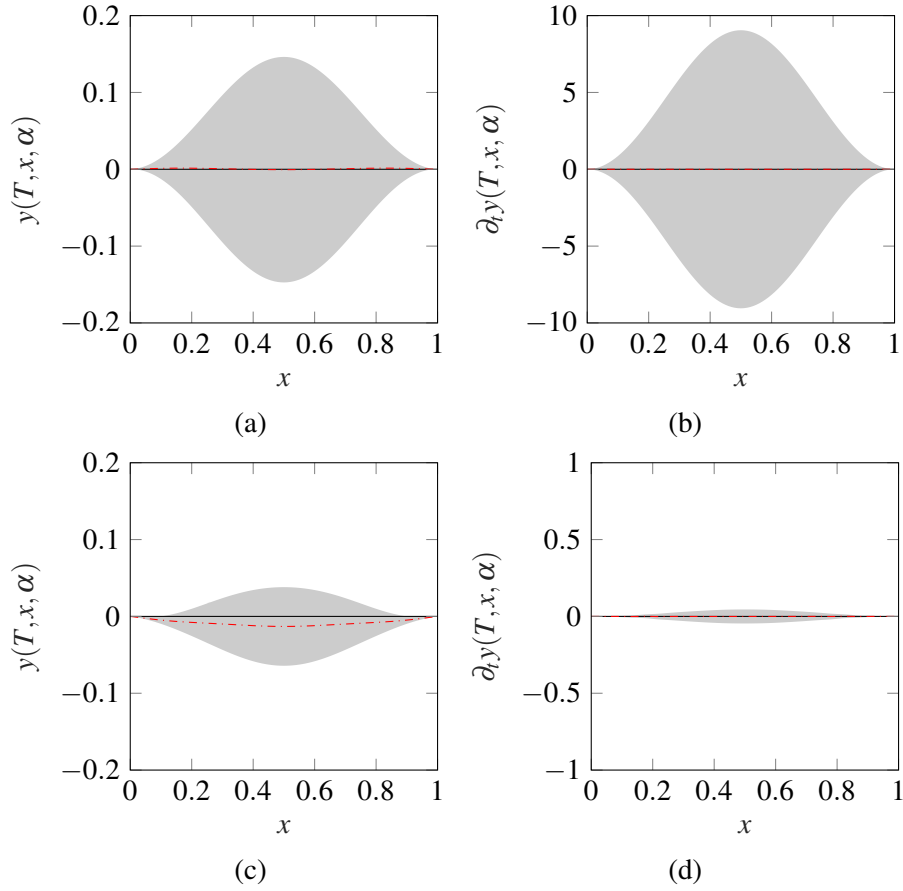
Respecto a los controles óptimos, la Figura 4.5 muestra los resultados para el control óptimo  $u(t, x)$ , en los casos: (a) problema determinista, y (b)-(c) soluciones de  $(P_1)$  sin restricciones en el tamaño del control y para diferentes valores de los parámetros de peso. Se observa que el control óptimo obtenido minimizando solamente la media de la variable de estado (Figura 4.5b) es bastante similar al que se obtiene en el caso determinista (Figura 4.5a), en cuanto a forma y tamaño. Sin embargo, el control óptimo incluyendo el segundo momento en el funcional coste (Figura 4.5c) muestra un comportamiento muy diferente.

#### 4.4.1.1 Comportamiento cualitativo de los perfiles del control

Para entender mejor el comportamiento cualitativo de los perfiles del control (Figura 4.5) desde un punto de vista físico, en la Figura 4.6 se analiza la forma en la que la ecuación de la viga propaga la incertidumbre. Para este fin, se denota por  $y_{\text{unc}}(t, x, z)$  la solución de la ecuación de la viga (4.1) considerada en este experimento, pero sin control ( $u = 0$ ). Es fácil ver que

$$\begin{aligned}
 y_{\text{unc}}(t, x, z) &= \cos\left(\sqrt{1 + \alpha} \pi^2 t\right) \sin(\pi x) \\
 &= \frac{1}{2} \sin\left[\pi\left(x + \pi t \sqrt{1 + \alpha}\right)\right] + \frac{1}{2} \sin\left[\pi\left(x - \pi t \sqrt{1 + \alpha}\right)\right]. \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

De (4.43) se concluye: (a) la condición inicial  $y^0(x) = \sin(\pi x)$  se propaga en el tiempo como una onda con una amplitud de valor  $\cos(\sqrt{1 + \alpha} \pi^2 t)$ , y (b) cada

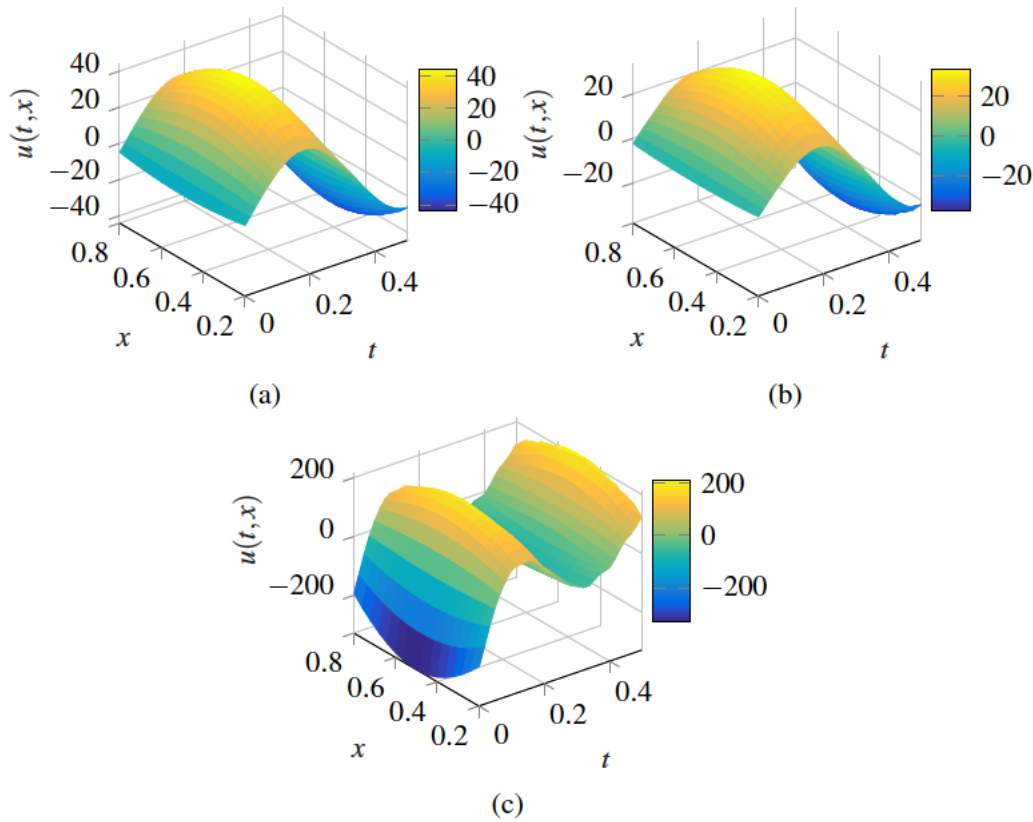


**Figura 4.4** Experimento 1: Resultados para  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\gamma = 10^{-6}$ , (a,b)  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  y (c,d)  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . Intervalos de confianza para la variable de estado del desplazamiento estocástica (panel izquierdo) y para la velocidad estocástica (panel derecho).

punto material  $x$  se propaga como la superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas a una velocidad aleatoria  $\pi\sqrt{1+\alpha}$ . Además, a partir de (4.43), se pueden calcular explícitamente los dos primeros momentos de  $(y_{\text{unc}}, \partial_t y_{\text{unc}})$ , los cuales se dibujan también en la Figura 4.6. En particular, por el teorema del valor medio para integrales,

$$\bar{y}_{\text{unc}}(t, x) = \int_{-0.5}^{0.5} \cos(\sqrt{1+\alpha}\pi^2 t) \sin(\pi x) d\alpha = \cos(\sqrt{1+\alpha^*}\pi^2 t) \sin(\pi x), \quad (4.44)$$

para algún  $-0.5 \leq \alpha^*(t) \leq 0.5$ . Así,  $\bar{y}_{\text{unc}}$  es bastante similar a la solución determinista sin control con  $\alpha = 0$ , la cual viene dada por (4.43). Este hecho explica la similitud entre los controles dibujados en la Figura 4.5a-b. Sin embargo, los momentos de segundo orden de  $(y_{\text{unc}}, \partial_t y_{\text{unc}})$ , representados en la Figura 4.6c-d,

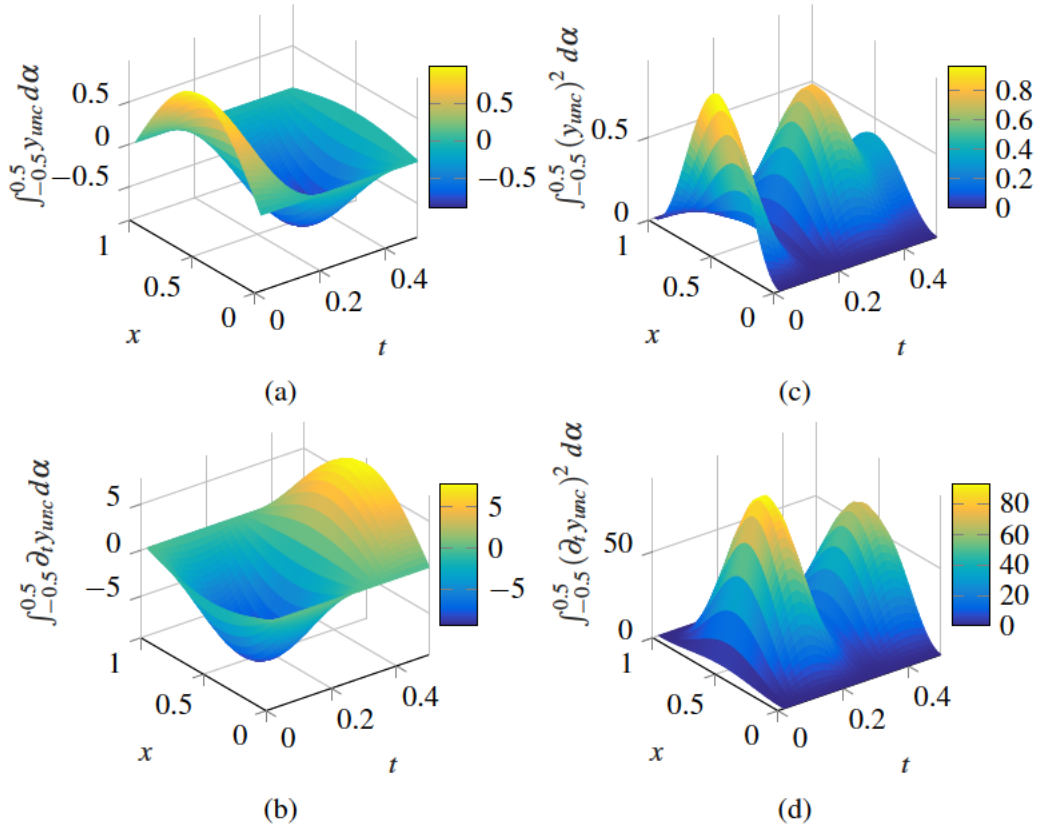


**Figura 4.5** Experimento 1:  $\gamma = 10^{-6}$ . Controles óptimos para: (a) problema determinista, (b)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  y (c)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ .

muestran un comportamiento cualitativo muy diferente. Concretamente, se observa una oscilación adicional y hay también un cambio en la amplitud. El control mostrado en la Figura 4.5c está en concordancia con este comportamiento del segundo momento de la solución aleatoria sin control.

#### 4.4.2 Experimento 2: Incertidumbre en forma de un campo aleatorio

En este segundo experimento, se considera un campo aleatorio para modelar la incertidumbre en la rigidez flexural  $a$ . La meta es doble: estudiar la eficiencia del enfoque propuesto, y analizar la influencia de un campo aleatorio correlacionado espacialmente en el control. Los parámetros para la discretización espacial y temporal son  $dt = 0.005$ , y  $h = 0.05$ , respectivamente.



**Figura 4.6** Experimento 1: Resultados para  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\gamma = 10^{-6}$ . La primera columna muestra la media de la solución no controlada (a)  $y_{\text{unc}}(t, x, z)$ , y (b)  $\partial_t y_{\text{unc}}(t, x, z)$ . La segunda columna muestra el segundo momento de (c)  $y_{\text{unc}}(t, x, z)$ , y (d)  $\partial_t y_{\text{unc}}(t, x, z)$ .

$a(x, z)$  es el campo aleatorio log-normal desarrollado en el Apartado 3.2.4. Se trata de un campo aleatorio correlacionado, con función de covarianza exponencial y longitud de correlación  $L_c = 0.4$ . El número  $N$  de términos en (3.9) es de 6, lo que permite capturar el 90% de la energía del campo.

Se usa una regla de cuadratura Gaussiana, cuyos nodos de colocación están determinados por las raíces de los polinomios de Hermite. El nivel de cuadratura óptimo se escoge adaptativamente empleando el Algoritmo 4.2, comenzando con  $N = 6$ ,  $\bar{\ell} = 12$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ , y se obtiene  $\ell_{opt} = 6$ . Los nodos y pesos para la malla dispersa anisotrópica se calculan para este nivel  $\ell_{opt} = 6$ . La tabla 4.2 muestra los valores de los índices máximos  $\mathbf{I}(\mathbf{g}, \ell)$  obtenidos a través del proceso adaptativo de calcular  $\mathcal{A}_{\mathbf{g}}(\ell, N)$  así como los valores de los índices máximos  $\hat{\mathbf{I}}(\hat{\mathbf{g}}, \bar{\ell} + 1)$  para calcular la solución enriquecida.

Los ratios de convergencia de las cantidades estadísticas de interés se dibujan en la Figura ??, la cual revela, como se esperaba, un decaimiento (sub)-exponencial

**Tabla 4.2** Experimento 2: Los  $N = 6$  términos de los máximos índices  $\mathbf{I}(\mathbf{g}, \ell)$  e  $\hat{\mathbf{I}}(\hat{\mathbf{g}}, \bar{\ell} + 1)$  usados en la resolución.

$\ell$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$
1	2	1	1	1	1	1
2	3	2	1	1	1	1
3	4	2	2	1	1	1
4	5	3	2	2	1	1
5	6	4	3	2	2	1
6	7	4	3	2	2	2
$\hat{\mathbf{I}}$	14	9	6	4	4	3

del error a medida que el número de puntos aumenta linealmente. Se muestra que el nivel (y el número de puntos) de la malla dispersa anisotrópica está gobernado por el error de la media del desplazamiento vertical en el tiempo  $T$ , que es el que tiene el ratio de convergencia más bajo. Se observa que se requieren más de 200 puntos de colocación en el dominio aleatorio  $\Gamma$  para cumplir con el criterio de parada del Algoritmo 4.1. A diferencia del Experimento 1, en el que solo se realizaban evaluaciones en 4 nodos, aquí el ahorro de tiempo computacional con la paralelización puede ser mucho mayor, si se emplea un ordenador de más de 200 núcleos.

Los resultados obtenidos para los diferentes valores de los parámetros de peso  $\beta_1$  y  $\beta_2$  se presentan en la Tabla 4.3. Similarmente al Experimento 1, el caso con  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  reduce significativamente el impacto de realizaciones críticas en el valor medio de  $y(T, x, z)$  y  $\partial_t y(T, x, z)$  en comparación con la versión determinista. Además, la Tabla 4.3 muestra cómo los parámetros de peso  $\beta_1$  y  $\beta_2$  permiten hacer un balance de error entre la controlabilidad nula en promedio y la robustez. Por un lado, valores altos de  $\beta$  proporcionan soluciones menos sensibles a variaciones en los datos de entrada. Por otro lado, valores bajos de  $\beta$  proporcionan una aproximación mejor a la propiedad de controlabilidad nula (2.19), pero con alta varianza. Este efecto se detalla en la Figura 4.8, que muestra los efectos locales de estos controles óptimos en cada punto de la viga. Como en el Experimento 1, la amplitud máxima del intervalo de confianza se reduce a costa de empeorar la propiedad de controlabilidad nula. Sin embargo, la incertidumbre más grande no está necesariamente en el centro de la viga, debido a la correlación espacial del campo aleatorio.

Para analizar la influencia de los campos aleatorios dependientes del espacio en el control, se muestran los perfiles del control para los casos  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  y  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  en la Figura 4.8. Se observa que el control óptimo obtenido minimizando solo la media de la variable de estado (Figura 4.8a) es muy cercano al obte-

nido en el Experimento 1 (Figura 4.5b). Sin embargo, para el caso de  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  la dependencia espacial hace que el perfil del control sea más irregular en forma (Figura 4.8b) que el del anterior experimento (Figura 4.5c), produciendo fluctuaciones significativas a lo largo del dominio espacial  $D$ .

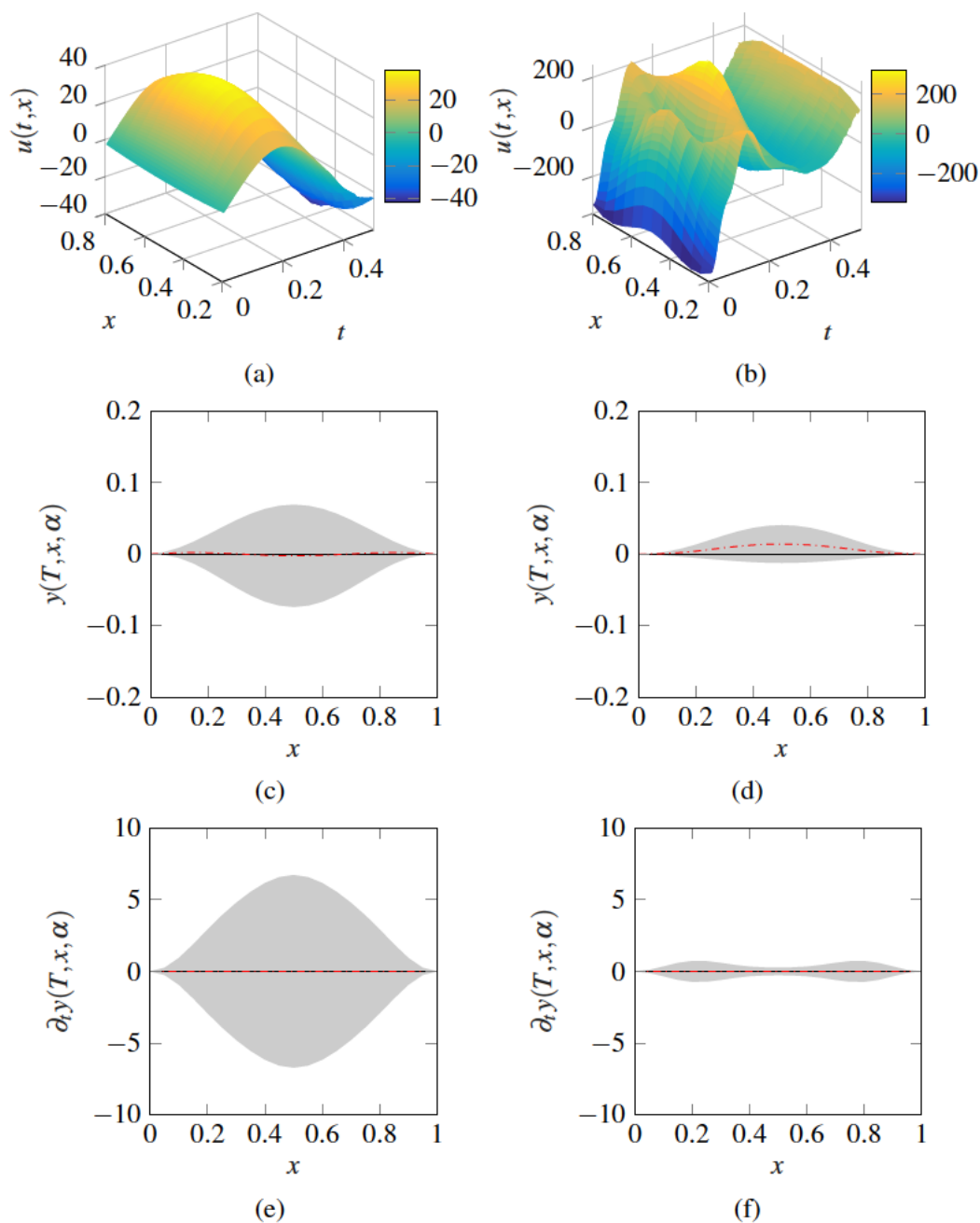
**Tabla 4.3** Experimento 2: Resumen de resultados para  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\gamma = 10^{-6}$  y  $L_c = 0.4$ .  $\bar{y}$  y  $\bar{\partial_t y}$  denotan la media de  $y$  y  $\partial_t y$ , respectivamente.  $\text{std}(\cdot)$  representa la desviación estándar.

	$\ \bar{y}(T)\ _{L^2(D)}^2 + \ \bar{\partial_t y}(T)\ _{L^2(D)}^2$	$\ \text{std}(y(T))\ _{L^2(D)}^2 + \ \text{std}(\partial_t y(T))\ _{L^2(D)}^2$
Determinista	$6.22 \times 10^{-1}$	$1.89 \times 10^0$
$\beta_1 = \beta_2 = 0$	$1.25 \times 10^{-6}$	$1.36 \times 10^0$
$\beta_1 = \beta_2 = 1$	$8.13 \times 10^{-6}$	$1.54 \times 10^{-1}$
$\beta_1 = \beta_2 = 10$	$1.50 \times 10^{-5}$	$1.08 \times 10^{-1}$
$\beta_1 = \beta_2 = 100$	$1.72 \times 10^{-5}$	$1.08 \times 10^{-1}$

## 4.5 Resumen y conclusiones

Se presenta un método de gradiente para un problema de control óptimo de una EDP estocástica, que es la ecuación de la viga de Bernoulli-Euler con coeficientes aleatorios. La incertidumbre en el parámetro de rigidez flexural y en las condiciones iniciales se cuantifica a través de variables aleatorias y campos aleatorios. Los momentos estadísticos de primer y segundo orden de la variable de estado en el tiempo final se incluyen en el funcional coste. Un método adaptativo de Colocación Estocástica de malla dispersa se usa para resolver eficientemente las ecuaciones de estado y adjunta subyacentes, que están desacopladas. El conjunto de problemas deterministas desacoplados que surge del método de Colocación Estocástica se resuelve en paralelo. El uso de computación en paralelo reduce la carga computacional y permite resolver problemas con un número de términos relativamente grande en la expansión de Karhunen-Loève de los campos aleatorios.

Los experimentos numéricos subrayan la importancia de considerar la incertidumbre en optimización. Los controles deterministas óptimos están lejos de ser adecuados en presencia de incertidumbre y difieren significativamente de aquellos obtenidos minimizando la dispersión de la solución controlada en el tiempo final. Concerniente a la capacidad del funcional coste para proveer soluciones robustas, la escalarización propuesta permite encontrar un término medio entre robustez de la solución y la propiedad de controlabilidad nula, lo cual proporciona más información al diseñador.



**Figura 4.8** Experimento 2: Resultados para  $L_c = 0.4$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\gamma = 10^{-6}$ , (a,c,e)  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  y (b,d,f)  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . Se representan las siguientes cantidades: variable de control (fila superior), intervalos de confianza para la variable de estado estocástica del desplazamiento (fila central) e intervalos de confianza para la velocidad estocástica (fila inferior).

Como conclusión, los algoritmos de optimización basados en el gradiente son numéricamente competitivos par resolver problemas de control óptimo robusto restringidos por EDPs paramétricas dependientes del tiempo. Finalmente, es importante enfatizar que el enfoque propuesto en este artículo puede ser extendido fácilmente a las dimensiones espaciales 2 y 3, al caso de controlabilidad *exacta* en media, controles de tipo frontera, y a otro tipo de EDPs evolutivas aleatorias.

## Referencias

- [1] Aitchison, J., Brown, J. A. C.: The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics. Cambridge University Press, (1957)
- [2] Babuška, Nobile, F., Tempone, R.: A Stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Review* 52 (2), 317-355 (2010).
- [3] Cîndea, N., Micu, S., Tucsnak, M.: An approximation method for exact controls of vibrating systems. *SIAM J. Control Optim.* 49 (3), 1283 - 1305 (2011).
- [4] Hinze, M., Pinnau, R., Ulbrich, M., Ulbrich, S.: Optimization with PDE Constraints. *Mathematical Modelling: Theory and Applications*, vol. 23, Springer, Berlin (2009).
- [5] Hughes, T. J. R.: The Finite Element Method. Linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall, New Jersey (1987).
- [6] Komornik, V.: Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method. Masson (1994).
- [7] Komornik, V., Loreti, P.: Fourier series in control theory. Springer (2005).
- [8] Lagnese, J. E., Lions, J. L.: Modelling, analysis and control of thin plates. Masson, Paris (1988).
- [9] Marín, F. J., Martínez-Frutos, J., Periago, F.: Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. *J. Optim. Theory Appl.* 174(2), 428-454 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1128-x>
- [10] Nobile, F., Tempone, R., Webster, C. G.: An anisotropic sparse grid stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM J. Numer. Anal.* 46 (5), 2411 - 2442 (2008).
- [11] Rosseel, E., Wells, G. N.: Optimal control with stochastic PDE constraints and uncertain controls. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 213/216, 152-167 (2012)
- [12] Smith, R. C.: Uncertainty Quantification. Theory, Implementation and Applications. SIAM Computational Science & Engineering, (2014).



- 
- [13] Smolyak, S.: Quadrature and interpolation formulas for tensor product of certain classes of functions. Doklady Akademii Nauk SSSR, 4, 240-243 (1963)
- [14] Tröltzsch, F.: Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics 112. AMS. Providence, Rhode Island (2010).



## Capítulo 5

# Resolución numérica de problemas de control óptimo de aversión al riesgo

Este capítulo aborda la resolución numérica del problema de control óptimo de **aversión al riesgo** formulado en la Sección 2.3.2, recopilando el trabajo realizado en el Artículo [5].

### 5.1 Introducción

El control robusto desarrollado en el capítulo anterior solo tiene en cuenta los dos primeros momentos estadísticos de la solución, esto es, media y varianza. Para problemas donde un fallo puede suponer un problema grave, no resulta adecuado utilizarlo, ya que las realizaciones aleatorias que están fuera de lo común no tienen prácticamente efecto en el valor de la media y la varianza, por tanto, no quedan reflejados en ellas. Por eso, este control de aversión al riesgo lo que busca es reducir la probabilidad de fallo. En el Apartado 2.3.3 se explican las diferencias con el planteamiento de formulación robusta.

### 5.2 El problema de control óptimo de aversión al riesgo

Se trabaja con el sistema de Bernoulli-Euler (2.1) con el control (2.8), expresado en el espacio de probabilidad de  $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \rho(z) dz)$ :

$$\begin{cases} \partial_t^2 y + \partial_x^2 (a \partial_x^2 y) = v \partial_x (\delta_{x_1} - \delta_{x_0}), & \text{en } (0, T) \times D \times \Gamma, \\ y(0) = \partial_x^2 y(0) = y(L) = \partial_x^2 y(L) = 0, & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{en } D \times \Gamma, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $\delta_{x_j} = \delta_{x_j(z)}(x)$  es la masa de Dirac aplicada en el punto  $x_j$ , con  $j = 0, 1$ , y

$$v = u(1 + \hat{u}), \quad (5.2)$$

siendo  $u : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  el control determinista (*desconocido*), que representa el voltaje que se aplica, y  $\hat{u}(z)$  el error (*conocido*) asociado al dispositivo de control. Notar que el control  $u$  debe pertenecer al conjunto de controles admisibles  $\mathcal{U}_{ad,p}$ , dado por (2.11).

La formulación variacional de este problema es la siguiente:  $y(t, x, z)$  es solución de (5.1) si y solo si

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \int_0^L \partial_t^2 y w dx \rho dz + \int_{\Gamma} \int_0^L a \partial_x^2 y \partial_x^2 w dx \rho dz \\ = \int_{\Gamma} \int_0^L v \partial_x (\delta_{x_1} - \delta_{x_0}) w dx \rho dz, \quad \forall w(x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

A nivel de implementación numérica, el término del lado derecho se trata de la siguiente manera: tomando  $w(x) = \phi_{h_i}$  función de forma del espacio (4.17), formalmente se tiene:

$$\int_{\Gamma} \int_0^L v \partial_x (\delta_{x_1} - \delta_{x_0}) \phi_{h_i} dx \rho dz = - \int_{\Gamma} v \partial_x (\phi_{h_i}(x_1) - \phi_{h_i}(x_0)) \rho dz \quad (5.4)$$

La existencia y unicidad de solución se prueba en [5].

Dado

$$I(u, z) = \frac{1}{2} (\|y(T, z)\|_H^2 + \|\partial_t y(T, z)\|_{V^*}^2), \quad (5.5)$$

para un  $\varepsilon$  fijo, y añadiendo los parámetros regularizantes  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \geq 0$ , el funcional coste considerado es el siguiente:

$$J_{\varepsilon, \gamma}(u) = \int_{\Gamma} H(J(u, z) - \varepsilon) \rho dz + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T (\partial_t u)^2 dt. \quad (5.6)$$

En resumen, el problema de control óptimo considerado en este caso es

$$(P_2) \quad \begin{cases} \text{mín}_{u \in \mathcal{U}_{ad,p}} J_{\varepsilon, \gamma}(u) \\ \text{sujeto a } (y, u) \text{ solución de (5.1)} \end{cases}$$

**Teorema 5.1.** *Sea  $\gamma_1 > 0$  en (5.6). Entonces, el problema de control óptimo  $(P_2)$  tiene, al menos, una solución.*

La prueba de este teorema se encuentra en [5].

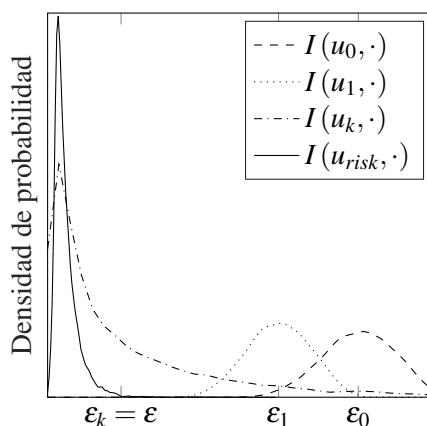
### 5.3 Resolución numérica

Se propone un método de descenso basado en el gradiente para la resolución numérica del problema (P<sub>2</sub>). Como la función de Heaviside no es diferenciable, el funcional coste  $J_{\varepsilon, \gamma}(u)$ , dado por (5.6), se aproxima por

$$J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}(u) = \int_{\Gamma} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I-\varepsilon)}\right)^{-1} \rho dz + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T (\partial_t u)^2 dt, \quad (5.7)$$

donde  $I = I(u, z)$  viene dado por (5.5), y  $0 < \alpha < 1$  es el parámetro que refleja la precisión en la aproximación de la función de Heaviside. En el Experimento 3.2 (Subsección 5.4.3), se comprueba la idoneidad de esta aproximación.

La dificultad que surge durante un método de descenso estándar es que si los parámetros  $\varepsilon$  y  $\alpha$  se mantienen fijos, entonces en alguna iteración  $k$  (típicamente, la primera) la función de densidad de probabilidad (FDP) de  $I(u_k, \cdot)$  podría estar localizada en la región donde la aproximación de la función de Heaviside es constante e igual a uno (esto es, si  $I(u_k, z) > \varepsilon$ , c.s.  $z \in \Gamma$ ); por tanto, no proporcionando una dirección de descenso. Para superar esta dificultad, los parámetros  $\varepsilon$  y  $\alpha$  se actualizan en cada iteración de acuerdo a la localización de la distribución de probabilidad de  $I(u_k, \cdot)$ . Entonces, la única forma que el control encuentra de reducir la probabilidad de que  $I$  exceda el parámetro adaptativo  $\varepsilon_k$  es moviendo la distribución de probabilidad de  $I(u_k, \cdot)$  hacia la izquierda. Al mismo tiempo, como  $I$  es no-negativo, además de este movimiento a la izquierda, la varianza del nuevo  $I$  es más baja que la del de la iteración previa (véase Figura 5.1 para una ilustración gráfica). Esta observación motiva el Algoritmo adaptativo 5.1.



**Figura 5.1** Evolución de la función de densidad de probabilidad de  $I(u_k, \cdot)$  a lo largo del algoritmo de minimización.  $u_{risk}$  denota la solución del problema de control de aversión al riesgo (P<sub>2</sub>).

---

**Algoritmo 5.1:** Algoritmo *adaptativo* de minimización basado en el gradiente

---

**Datos:**  $u_0, \varepsilon, \delta, N_{max}$

**Resultado:**  $u, \alpha$

```

1 desde  $k \leftarrow 0$  a  $N_{max}$  hacer
2    $\varepsilon_k \leftarrow \max(\varepsilon, \mathbb{E}[I(u_k, z)]);$ 
3    $\alpha_k \leftarrow 0.1 \cdot \text{Std}[I(u_k, z)];$ 
4   Elegir una dirección de descenso  $\bar{u}_k$  (para la cual  $\frac{\partial J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_k)}{\partial u} \cdot \bar{u}_k < 0$ );
5   Elegir un tamaño de paso  $\lambda_k$  tal que  $J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_k + \lambda_k \bar{u}_k) < J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_k)$ ;
6   Establecer  $u_{k+1} = u_k + \lambda_k \bar{u}_k$ ;
7   si Control con restricciones entonces
8      $u_{k+1} = u_{k+1}^*$  (proyectado en la región  $\mathcal{U}_{ad,p}$ )
9   si  $k \geq 1$  &  $\varepsilon_k = \varepsilon$  entonces
10     si  $\frac{|J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_{k+1}) - J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_k)|}{J_{\varepsilon_k, \gamma}^{\alpha_k}(u_{k+1})} \leq \delta$  entonces
11        $u = u_k$ ;
12        $\alpha = \alpha_k$ ;
13     salir

```

---

*Nota 5.1.* En cuanto a la elección del parámetro  $\varepsilon_k$ , se toma como la media del coste, de manera que la probabilidad a minimizar valga aproximadamente 0.5. De esta forma, el algoritmo traslada la distribución a la izquierda, y en la siguiente iteración se actualiza el valor de  $\varepsilon_k$ . De esta forma,  $\varepsilon_k$  va disminuyendo de iteración a iteración hasta alcanzar el valor final de  $\varepsilon$ . En ese momento, se fija el valor de  $\varepsilon$ , y ya solo se realiza el traslado de la distribución, hasta conseguir que el coste sea suficientemente pequeño.

Respecto a la elección del parámetro  $\alpha_k$ , es un tema delicado. Si el valor de  $\alpha_k$  es demasiado alto, la precisión de la aproximación de Heaviside se degrada. Por el contrario, si el valor de  $\alpha_k$  es demasiado pequeño, puede no aproximarse correctamente si hay pocos puntos en la zona de transición entre las zonas de probabilidad nula y no-nula. Siguiendo las directrices indicadas en [4], el parámetro se actualiza adaptativamente durante la optimización en los experimentos numéricos. Esto se hace seleccionando el parámetro  $\alpha_k$  como la décima parte de la desviación estándar del coste a minimizar.

*Nota 5.2.* Notar que si la condición  $\varepsilon_k \leq \varepsilon$  no se satisface después de un número suficientemente grande de iteraciones dado, entonces el algoritmo para. Esto es una indicación de que el  $\varepsilon$  prescrito es demasiado pequeño para satisfacerse con controles  $u \in \mathcal{U}_{ad,p}$ .

### 5.3.1 Cálculo explícito de una dirección de descenso

Usando formalmente el método del Lagrangiano, se puede obtener una expresión explícita para la derivada de  $J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}(u)$ , de manera similar a la desarrollada en la Sección 4.3.1 (se omiten los pasos, por simplicidad).

La derivada direccional de  $J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}(u)$ , para cada  $u \in \mathcal{U}_{ad, p}$ , en la dirección  $\bar{u}$ , viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}(u)}{\partial u} \cdot \bar{u} &= \int_0^T (\gamma_1 u \bar{u} + \gamma_2 \partial_t u \partial_t \bar{u}) dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma} \bar{u} (1 + \hat{u}) (\partial_x p(x_1(z)) - \partial_x p(x_0(z))) \rho dz dt, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde  $p = p(t, x, z)$  resuelve el sistema adjunto

$$\begin{cases} \partial_t^2 p + \partial_x^2 (a(x, z) \partial_x^2 p) = 0, & (t, x, z) \in (0, T) \times (0, L) \times \Gamma \\ p(0) = \partial_x^2(0) = p(L) = \partial_x^2(L) = 0, & (t, z) \in (0, T) \times \Gamma \\ p(T) = -C(z) \partial_t y(T), & (x, z) \in (0, L) \times \Gamma, \\ \partial_t p(T) = C(z) y(T), & (x, z) \in (0, L) \times \Gamma, \end{cases} \quad (5.9)$$

con

$$C(z) = \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u, z) - \varepsilon)} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u, z) - \varepsilon)}\right)^{-2}. \quad (5.10)$$

Consecuentemente, una dirección de descenso para el funcional coste (5.7) es:

- Caso  $\gamma_2 = 0$ :  $\bar{u} \in L^2(0, T)$  que cumple

$$\bar{u} = -\gamma_1 u - \int_{\Gamma} [\partial_x p(x_1(z)) - \partial_x p(x_0(z))] \rho dz. \quad (5.11)$$

- Caso  $\gamma_2 \neq 0$ :  $\bar{u} \in H_0^1(0, T)$  solución de

$$-\gamma_2 \partial_t^2 \bar{u} + \bar{u} = \gamma_2 \partial_t^2 u - \gamma_1 u - \int_{\Gamma} [\partial_x p(x_1(z)) - \partial_x p(x_0(z))] \rho dz. \quad (5.12)$$

### 5.3.2 Aproximación numérica del funcional coste y su gradiente

Aunque la variable aleatoria  $C(z)$ , dada por (5.10), es suave (teóricamente) respecto de  $z$ , numéricamente no lo es para un valor de  $\alpha$  pequeño. El mismo problema aparece cuando se evalúa el funcional coste (5.7) en cada iteración del algoritmo de descenso. En consecuencia, los métodos de colocación estocástica, que son muy eficientes para problemas suaves respecto del parámetro aleatorio, no son una

buena opción en esta situación. Por el contrario, el uso de un método de Monte Carlo (MC) directo, requiere la resolución numérica de (5.1) y (5.9) en un gran número de puntos de muestreo  $z_k \in \Gamma$  y en cada paso del método de descenso. Esto hace el método de MC inabordable desde un punto de vista computacional. Por esta razón, en esta tesis, el método de MC se combina con una aproximación de CP para la resolución de las ecuaciones de estado y adjuntas. Más concretamente,  $y(t, x, z)$  y  $p(t, x, z)$  se aproximan con una expansión de CP. Entonces, el muestreo de MC se aplica a estas aproximaciones para calcular el funcional coste (5.7), la variable aleatoria (5.10) y las direcciones de descenso (5.11) o (5.12).

La discretización en el espacio y tiempo se realiza igual que en el problema del capítulo anterior, por ello no se repite aquí (el lector puede consultarla en la Sección 4.3.3).

### Expansión de Caos Polinomial anisotrópica no-intrusiva para la propagación de la incertidumbre.

Siguiendo [2, 3, 4], sea  $\{\psi_{r_n}(z_n)\}_{r_n=1}^{\infty}$  una base ortonormal de  $L^2_{\rho_n}(\Gamma_n)$  compuesta de una clase adecuada de polinomios ortogonales. Como  $L^2_{\rho}(\Gamma) = \bigotimes_{n=1}^N L^2_{\rho_n}(\Gamma_n)$ , una base de polinomios ortonormales de  $L^2_{\rho}(\Gamma)$  se construye como

$$\left\{ \psi_r(z) = \prod_{n=1}^N \psi_{r_n}(z_n) \right\}_{r=(r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{N}^N}. \quad (5.13)$$

Ahora, sea  $\ell \in \mathbb{N}_+$  un índice indicando el nivel de aproximación en el espacio aleatorio  $L^2_{\rho}(\Gamma)$ . Teniendo en mente una expansión truncada de KL para los parámetros de entrada aleatorios de (5.1) y como las variables aleatorias en una expansión de KL no pesan lo mismo, se introduce un espacio de polinomios anisotrópico como sigue: dado un vector de pesos  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in \mathbb{R}_+^N$  para las diferentes direcciones estocásticas, se considera el conjunto de multi-índices

$$\mathbb{I}_{\beta}(\ell, N) = \left\{ r = (r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{N}^N \quad : \quad \sum_{n=1}^N r_n \beta_n \leq \ell \beta_{min} \right\}, \quad (5.14)$$

con  $\beta_{min} = \min_{1 \leq n \leq N} \beta_n$ . La elección óptima de  $\beta$  depende de las propiedades de suavidad de la solución de la EDP (5.1) con respecto al parámetro  $z \in \Gamma$ . Para el caso de campos aleatorios Gaussianos, el término  $n$ -ésimo  $\beta$  se toma como

$$\beta_n = \frac{1}{2\sqrt{2\gamma_n} \|b_n\|_{L^{\infty}(0,L)}}, \quad (5.15)$$

donde  $(\gamma_n, b_n(x))$  son los autovalores y autofunciones de la expansión de KL (véase la sección 3.2, o [1, 2] para más detalles acerca de este tema).



Finalmente, el espacio de polinomios anisotrópico aproximado es

$$\mathcal{P}_{\mathbb{I}_\beta(\ell, N)}(\Gamma) = \text{span} \{ \psi_r(z), \quad r \in \mathbb{I}_\beta(\ell, N) \}. \quad (5.16)$$

Esta elección de  $\mathcal{P}_{\mathbb{I}_\beta(\ell, N)}(\Gamma)$  es referida en la literatura [2] como espacio de polinomios anisotrópico de grado total.

De esta forma, una solución aproximada  $y_\ell(t, x, z) \in L^2((0, T); V) \otimes \mathcal{P}_{\mathbb{I}_\beta(\ell, N)}(\Gamma)$  de (5.1) se expresa de la siguiente manera

$$y_\ell(t, x, z) = \sum_{s \in \mathbb{I}_\beta(\ell, N)} \hat{y}_s(t, x) \psi_s(z), \quad \hat{y}_s \in L^2((0, T); V). \quad (5.17)$$

Con objeto de obtener los coeficientes  $\hat{y}_s(t, x)$ , se realizan los siguientes cálculos formales.

Multiplicando en ambos lados de (5.17) por una función  $\psi_r(z)$  del espacio (5.16) e integrando en  $\Gamma$ , se tiene:

$$\int_{\Gamma} y_\ell(t, x, z) \psi_r(z) \rho(z) dz = \sum_{s \in \mathbb{I}_\beta(\ell, N)} \hat{y}_s(t, x) \int_{\Gamma} \psi_s(z) \psi_r(z) \rho(z) dz. \quad (5.18)$$

Debido a la ortonormalidad de  $\{ \psi_r(z) \}_{r \in \mathbb{I}_\beta(\ell, N)}$ , se tiene

$$\hat{y}_r(t, x) = \int_{\Gamma} y_\ell(t, x, z) \psi_r(z) \rho(z) dz \approx \int_{\Gamma} y(t, x, z) \psi_r(z) \rho(z) dz. \quad (5.19)$$

Esta última integral se aproxima numéricamente usando un método de colocación adaptativo de malla dispersa anisotrópica como en el Capítulo 4 y en [1]. El conjunto de multi-índices usado en el método de colocación es  $\mathbb{I}_\beta(\ell + 1, N)$ , el cual proporciona suficiente precisión para integrar polinomios en  $\mathcal{P}_{\mathbb{I}_\beta(\ell, N)}(\Gamma)$ . Todo esto requiere, también, el conocimiento de  $y(t, x, z_k)$ , donde  $z_k \in \Gamma$  son los nodos de muestreo. Como se indica anteriormente, la función determinista  $y(t, x, z_k)$  se aproxima usando los procesos de discretización espacio-tiempo descritos en las secciones 4.3.3.1 y 4.3.3.2. Una ventaja muy importante de este enfoque es que la paralelización automática del método de colocación permite reducir el coste computacional de forma muy significativa.

Queda analizar cómo se escoge el nivel de aproximación  $\ell$ . Como en este problema el principal objetivo es minimizar el funcional coste (5.7), el nivel de aproximación  $\ell$  se elige adaptativamente para cumplir con el nivel de precisión prescrito  $\delta$ . Se describe este método en el Algoritmo 5.2. Se debe fijar un control específico desde el inicio. Una posibilidad es tomar  $u(t)$  como el control óptimo de la versión determinista del problema, donde los parámetros de entrada aleatorios de (5.1) se reemplazan por sus valores nominales (o medios) y el criterio del coste considerado es

**Algoritmo 5.2:** Obtención del nivel de cuadratura  $\ell = \ell_{opt}$ **Datos:**  $\bar{\ell}$  suficientemente grande,  $0 < \delta \ll 1$ ,  $u(t)$ **Resultado:**  $\ell_{opt}$ 

- 1 Se calcula el vector de pesos  $\beta$  de acuerdo con (5.15);
- 2 Se calcula una solución *enriquecida*  $y_{\bar{\ell}}(t, x, z)$  de (5.1) siguiendo el método descrito;
- 3 Se obtiene una aproximación  $J_{\varepsilon, \gamma, \bar{\ell}}^{\alpha}(u)$  de  $J_{\varepsilon, \gamma}^{\alpha}(u)$  usando el método de Monte Carlo, donde se aplican muestreos aleatorios a  $y_{\bar{\ell}}(t, x, z)$ ;
- 4 **desde**  $\ell \leftarrow 1$  **a**  $\bar{\ell} - 1$  **hacer**
- 5     Calcular  $J_{\varepsilon, \gamma, \ell}^{\alpha}(u)$ ;
- 6     **si**  $\frac{|J_{\varepsilon, \gamma, \ell}^{\alpha}(u) - J_{\varepsilon, \gamma, \bar{\ell}}^{\alpha}(u)|}{J_{\varepsilon, \gamma, \bar{\ell}}^{\alpha}(u)} \leq \delta$  **entonces**
- 7          $\ell_{opt} = \ell$ ;
- 8     **salir**

$$J_{det}(u) = \frac{1}{2} (\|y(T)\|_H^2 + \|\partial_t y(T)\|_{V^*}^2) + \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T u^2 dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T (\partial_t u)^2 dt. \quad (5.20)$$

Si el criterio de parada del Algoritmo 5.2 no se cumple para ningún  $\ell < \bar{\ell}$ , entonces se toma un  $\bar{\ell}$  mayor, ya que es una indicación de que, para la tolerancia prescrita  $\delta$ , la solución enriquecida  $y_{\bar{\ell}}(t, x, z)$  no está suficientemente cerca de la solución exacta. El proceso completo del Algoritmo 5.2 se repite, entonces, tomando el nuevo valor de  $\bar{\ell}$  como referencia.

## 5.4 Experimentos numéricos

Esta sección presenta los resultados de simulación numérica obtenidos siguiendo la metodología descrita en la sección precedente.

Los Experimentos 1 y 2 se focalizan en el efecto de la rigidez flexural  $a(x, z)$ , modelada como una variable aleatoria en el Experimento 1 y como un campo aleatorio en el Experimento 2. La influencia de errores aleatorios en la localización del actuador piezoeléctrico se analiza en el Experimento 3.

Con respecto al parámetro de tamaño de paso  $\lambda_k$  del Algoritmo 5.1, su elección se realiza con un método clásico, de la siguiente manera: se parte de un valor fijo, y en cada iteración se comprueba el valor del coste con respecto a la iteración anterior; en caso de que éste aumente, se repite la iteración con un tamaño de paso menor.

En todos los experimentos que siguen, la longitud de la viga es  $L = 1$ , las condiciones iniciales son  $y^0(x) = \sin(\pi x)$ ,  $y^1(x) = 0$ , excepto en el Experimento

3.2, el tiempo de control es  $T = 0.5$ , y la función de control (5.2) se toma como  $v(t, z) = u(t)$ , esto es, se asume que  $\hat{u} = 0$  en (5.2).

### 5.4.1 Experimento 1: Incertidumbre en las propiedades del material de la viga. El caso de una variable aleatoria

En este experimento, la incertidumbre aparece solamente en la rigidez flexural  $a(x, z)$ , y se modela como

$$a(x, z) = 1 + U(z), \quad (5.21)$$

donde  $U(z)$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en  $(-0.2, 0.2)$ . La localización del actuador piezoeléctrico es  $(0.3, 0.7)$ , esto es,  $x_0 = 0.3$  y  $x_1 = 0.7$ . Los parámetros en (5.7) son:  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-4}$  y  $\gamma_1 = 10^{-6}$ . Se consideran dos casos:  $\gamma_2 = 0$  y  $\gamma_2 = 10^{-8}$ .

El dominio físico se discretiza con una malla uniforme de tamaño  $h = 0.01$ . Para la discretización en el tiempo se usa una malla uniforme de tamaño  $dt = 0.0025$ .

La tolerancia  $\delta$  en el Algoritmo 5.2 se toma como  $\delta = 10^{-4}$ , y el nivel enriquecido  $\bar{\ell} = 15$ , resultando en un nivel  $\ell = 7$ .

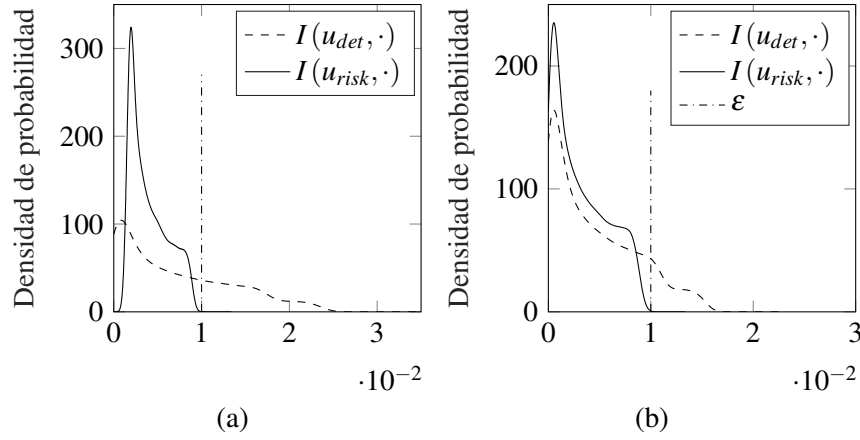
El Algoritmo de descenso 5.1 se inicializa con  $u^0(t) = 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Los resultados numéricos se recogen en la Tabla 5.1. Aquí, *determinista* significa que el control óptimo para el problema determinista (donde  $a = 1$  y el funcional coste es (5.20)) se usa directamente en el coste (5.7). Se observa en la primera fila de la Tabla 5.1 que el control óptimo determinista está lejos de ser óptimo en la formulación de aversión al riesgo. Esto también se visualiza en la Figura 5.2, la cual muestra las distribuciones de probabilidad de  $I(u, \cdot)$  para los controles óptimos determinista y de aversión al riesgo.

**Tabla 5.1** Experimento 1: Resumen de resultados.

	$\gamma_2 = 0$		$\gamma_2 = 10^{-8}$	
	Determinista	Aversión al riesgo	Determinista	Aversión al riesgo
$\int_{\Gamma} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u,z)-\varepsilon)}\right)^{-1} \rho dz$	$3.0 \times 10^{-1}$	$1.8 \times 10^{-7}$	$1.2 \times 10^{-1}$	$1.4 \times 10^{-6}$
$\ u\ _{L^2(0,T)}$	$7.1 \times 10^0$	$5.1 \times 10^1$	$9.4 \times 10^0$	$1.4 \times 10^1$
$\ \partial_t u\ _{L^2(0,T)}$	$2.0 \times 10^3$	$7.8 \times 10^7$	$8.6 \times 10^2$	$1.8 \times 10^3$

Los controles óptimos calculados se dibujan en la Figura 5.3. Debido a las grandes oscilaciones en el caso  $\gamma_2 = 0$  (Figura 5.3a-b), se considera conveniente estu-



**Figura 5.2** Experimento 1: Distribuciones de probabilidad de  $I(u, \cdot)$  para los controles óptimos determinista (líneas discontinuas) y de aversión al riesgo (líneas continuas) en los casos (a)  $\gamma_2 = 0$ , y (b)  $\gamma_2 = 10^{-8}$ .

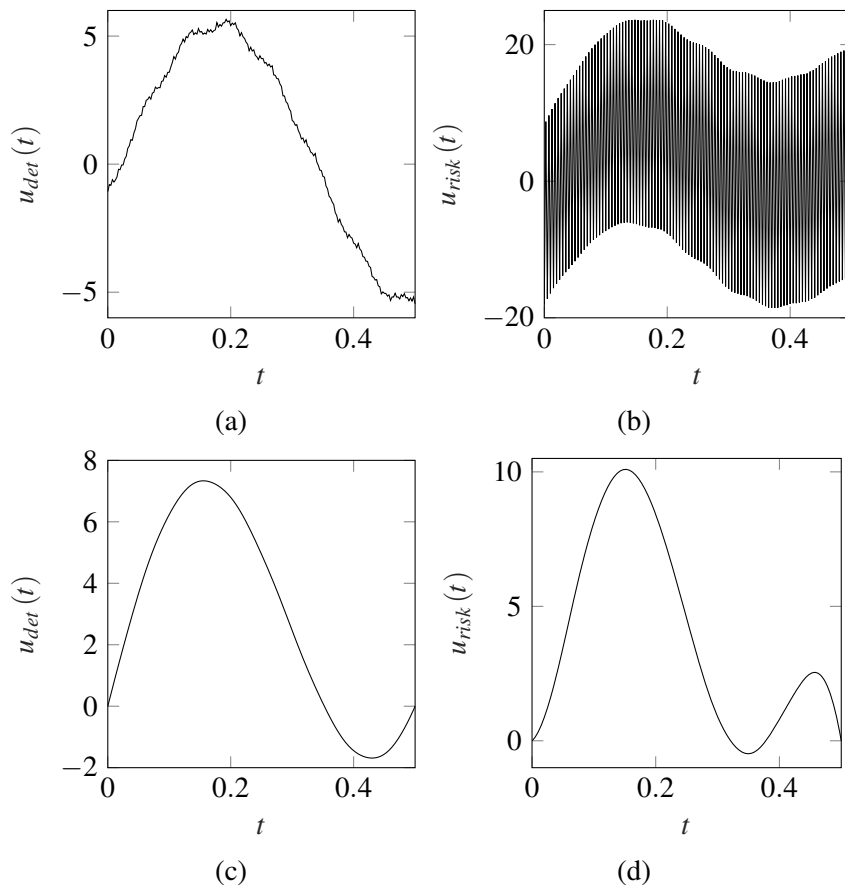
diar el caso  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . El efecto regularizante de este tercer término en (5.7) se observa claramente en la Figura 5.3c-d. Estos resultados también están de acuerdo con lo que se observa en el Capítulo 4 (que también se puede ver en [6] en un problema relacionado). De hecho, como se indica en el Experimento 1 del Capítulo 4, el segundo momento de la solución sin control de la ecuación (5.1), esto es, la solución de (5.1) con el lado derecho igual a cero, tiene una amplitud y frecuencia más grandes que la solución sin control de la ecuación de la viga determinista asociada. Esto justifica el incremento, tanto en la amplitud como en la frecuencia, de los controles mostrados en la Figura 5.3b-d.

#### 5.4.2 Experimento 2: Incertidumbre en las propiedades del material de la viga. El caso de un campo aleatorio

En este segundo experimento, se considera un campo aleatorio para modelar la incertidumbre en la rigidez flexural  $a$ . El principal objetivo de este experimento es analizar el comportamiento del enfoque propuesto cuando se usa un número relativamente grande de variables aleatorias para modelar las incertidumbres.

$a(x, z)$  es el campo aleatorio (3.28), con  $\eta = -0.0066$  y  $\xi = 0.1151$ , de forma que tiene media  $\mu = 1$  y varianza  $\sigma^2 = 0.0133$ .

La localización del actuador piezoeléctrico es  $(0.25, 0.75)$ , esto es,  $x_0 = 0.25$  y  $x_1 = 0.75$ . Los parámetros en (5.7) son  $\varepsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 2 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$  y  $\gamma_2 = 10^{-8}$ .

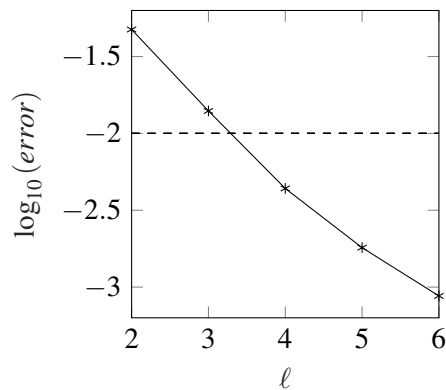


**Figura 5.3** Experimento 1: Resultados para  $\gamma_2 = 0$  (a,b), y  $\gamma_2 = 10^{-8}$  (c,d). El panel izquierdo (a,c) representa los controles óptimos deterministas; el panel derecho (b,d), los controles óptimos de aversión al riesgo.

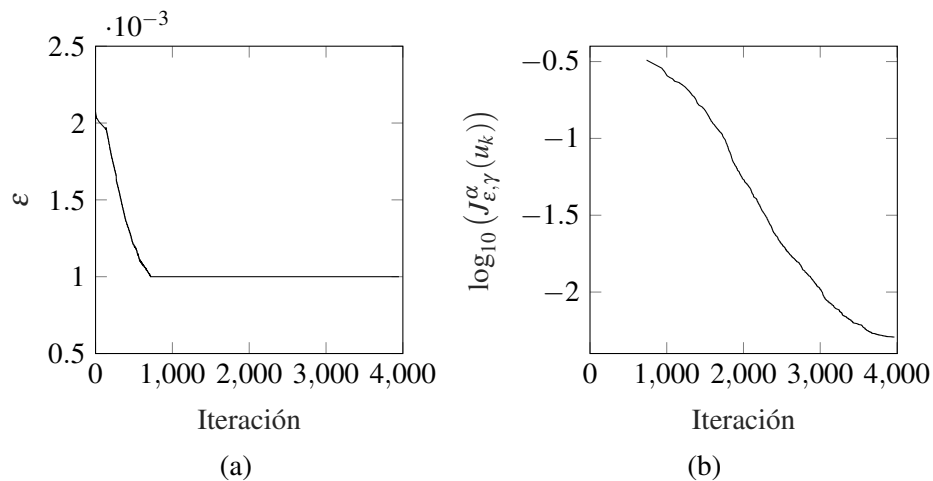
El dominio físico se discretiza con una malla uniforme de tamaño  $h = 0.05$ . Una malla uniforme de tamaño  $dt = 0.0025$  se usa para la discretización temporal. La tolerancia  $\delta$  del Algoritmo 5.2 se toma como  $\delta = 10^{-2}$  y el nivel enriquecido  $\bar{\ell} = 10$ , resultando en un nivel  $\ell = 4$  para la expansión de CP. En la Figura 5.4 se representa el ratio de convergencia del Algoritmo adaptativo 5.2 de selección del nivel de aproximación  $\ell$  de la expansión de Caos Polinomial.

El Algoritmo 5.1 se inicializa con el control óptimo del problema determinista (donde  $a = 1$  y el funcional coste es (5.20)).

El historial de convergencia del Algoritmo 5.1 se dibuja en la Figura 5.5. Primeramente, el algoritmo disminuye el  $\varepsilon_0$  hasta alcanzar el valor prescrito  $\varepsilon$ . En segundo lugar, reduce el funcional coste hasta que el criterio de parada se satisfaca. El algoritmo tarda alrededor de 4,000 iteraciones en converger. En cada una de esas iteraciones, la EDP se resuelve hacia adelante y hacia atrás en solo 261



**Figura 5.4** Experimento 2: Ratio de convergencia para la expansión de CP. El nivel de aproximación  $\ell$  se representa en el eje horizontal. El eje vertical muestra el error de aproximación, dado por el criterio de parada del Algoritmo 5.2.

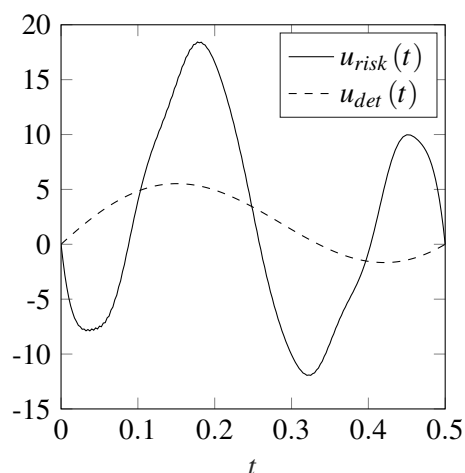


**Figura 5.5** Experimento 2: Historial de convergencia del algoritmo de minimización. (a) Evolución de  $\varepsilon_k$ . (b) Para  $\varepsilon$  fijo, evolución del funcional coste.

nodos estocásticos, lo cual es una mejora significativa con respecto a aplicar Monte Carlo directamente a la EDP. Es remarcable, además, que la evaluación de la EDP en los 261 nodos puede hacerse en paralelo, con la consecuente disminución de tiempo computacional.

En la Figura 5.6, se compara el control óptimo del problema de aversión al riesgo ( $P_2$ ) con el control óptimo de su homólogo determinista. Hay una diferencia significativa en tamaño y forma, siendo el de aversión al riesgo más amplio, y teniendo una frecuencia de oscilación mayor.

Los resultados numéricos se recogen en la Tabla 5.2. Como en el experimento precedente, determinista significa que se usa el control óptimo para el problema



**Figura 5.6** Experimento 2:  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . Control óptimo de aversión al riesgo (línea continua) y control óptimo del problema determinista (5.20) (línea discontinua).

**Tabla 5.2** Experimento 2.  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . Resumen de resultados.

	Determinista	Aversión al riesgo
$\int_{\Gamma} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u,z)-\varepsilon)}\right)^{-1} \rho(z) dz$	$5.1 \times 10^{-1}$	$4.9 \times 10^{-3}$
$\ u\ _{L^2(0,T)}$	$7.7 \times 10^0$	$4.7 \times 10^1$
$\ \partial_t u\ _{L^2(0,T)}$	$5.4 \times 10^2$	$2.6 \times 10^4$

determinista (donde  $a = 1$  y el funcional coste es (5.20)) en (5.7). Se observa que, comparado con el control determinista, el control de aversión al riesgo reduce 3 órdenes de magnitud la probabilidad de que el funcional coste exceda  $\varepsilon$ .

### 5.4.3 Incertidumbre en la localización del actuador piezoeléctrico

En este experimento, se estudia la influencia de errores aleatorios en la localización del piezoeléctrico. Se estudian dos casos: control sin restricciones y con restricciones. En este último, además, se emplean unas condiciones iniciales diferentes.

#### Experimento 3.1: Control sin restricciones

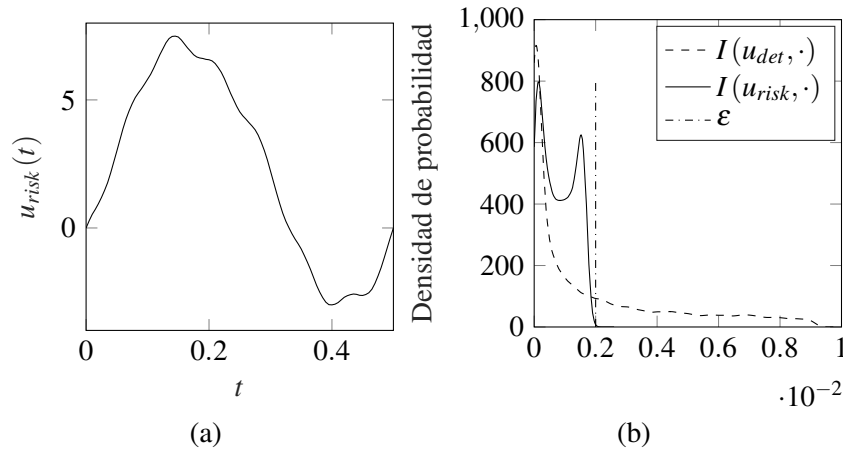
La fuente de incertidumbre se modela como

$$x_j(z) = x_j + U(z), \quad j = 0, 1 \quad (5.22)$$

donde  $x_0 = 0.3$ ,  $x_1 = 0.7$ , y  $U(z)$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo  $(-0.2, 0.2)$ . La rigidez flexural se toma como  $a = 1$ , y los parámetros en (5.7) son:  $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha = 3 \times 10^{-5}$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$  y  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . La tolerancia del algoritmo 5.2 es  $\delta = 10^{-4}$ , y el nivel enriquecido  $\bar{\ell} = 15$ , lo cual lleva a  $\ell = 7$ .

El Algoritmo de descenso 5.1 se inicializa con un control  $u^0(t) = 1$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

La Figura 5.7 muestra el control de aversión al riesgo calculado, y las distribuciones de probabilidad de  $I(u, \cdot)$  para los controles determinista y de aversión al riesgo.



**Figura 5.7** Experimento 3.1:  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . (a) Dibujo del control de aversión al riesgo, y (b) distribuciones de probabilidad de  $I(u, \cdot)$  para el control óptimo determinista (línea discontinua) y de aversión al riesgo (línea continua).

Los resultados numéricos se recogen en la Tabla 5.3. Como se observa en dicha tabla (primera fila), la formulación de aversión al riesgo del problema de control proporciona controles muy satisfactorios incluso para este caso, donde incertidumbre relativamente grande aparece en la localización del actuador piezoeléctrico.

**Tabla 5.3** Experimento 3.1:  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . Resumen de resultados.

	Determinista	Aversión al riesgo
$\int_{\Gamma} \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(I(u,z)-\varepsilon)}\right)^{-1} \rho(z) dz$	$3.3 \times 10^{-1}$	$1.5 \times 10^{-4}$
$\ u\ _{L^2(0,T)}$	$1.1 \times 10^1$	$1.2 \times 10^1$
$\ \partial_t u\ _{L^2(0,T)}$	$8.0 \times 10^2$	$1.2 \times 10^3$



### Experimento 3.2: Control con restricciones. Condiciones iniciales polinomiales de grado 3.

En este experimento, se consideran otras condiciones iniciales:

$$y^0(x) = x^3(1 - x^3), \quad y^1(x) = 0, \quad (5.23)$$

para las cuales se esperan controles más oscilantes, y el objetivo es comprobar si el algoritmo es adecuado para controlar esta situación.

Además, este experimento se resuelve con dos controles diferentes: control sin restricciones (tomando  $m = -\infty, M = \infty$ , en (2.11)) y control con restricciones (con  $m = -1, M = 1$ ).

Los extremos del actuador piezoeléctrico vienen dados por  $x_j(z) = x_j + U(z)$ , para  $j = 0, 1$ , donde  $x_0 = 0.45$ ,  $x_1 = 0.85$ , y  $U(z)$  es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo  $(-0.1, 0.1)$ . La rigidez flexural se toma como  $a = 1$ . Los parámetros del funcional coste son  $\varepsilon = 3 \times 10^{-3}$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$  y  $\gamma_2 = 10^{-8}$ .

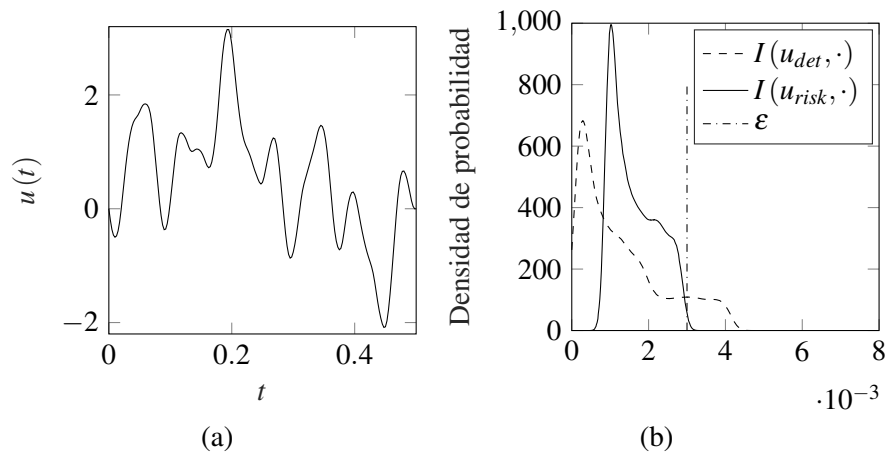
Para comparar los dos casos, las Figuras 5.8 y 5.9 muestran los dibujos de los controles de aversión al riesgo y la evolución de la función de densidad de probabilidad de  $I(u, \cdot)$  durante el algoritmo de optimización para el caso sin restricciones (Figura 5.8) y con restricciones (Figura 5.9). Se observan las oscilaciones debidas a las condiciones iniciales. El valor del funcional coste en la convergencia es  $4.0 \times 10^{-4}$  en el caso de control sin restricciones y  $2.3 \times 10^{-2}$  en el caso de control con restricciones; por tanto, ambos mejoran el valor del funcional coste con el control del problema determinista (el cual es  $1.1 \times 10^{-1}$ ).

La Figura 5.10a muestra la función de Heaviside  $H(x - \varepsilon)$  y su aproximación  $H_\alpha(x - \varepsilon) = \left(1 + e^{-\frac{2}{\alpha}(x - \varepsilon)}\right)^{-1}$  para diferentes valores del parámetro  $\alpha$ , en la iteración final. Se considera el valor de  $\alpha = 0.1 \text{std}(I)$  como una buena aproximación (véase la Nota 5.1). La Figura 5.10b muestra el error absoluto entre la función de Heaviside y la aproximación con  $\alpha = 0.1 \text{std}(I)$  durante el proceso iterativo, estando siempre por debajo de  $10^{-2}$ .

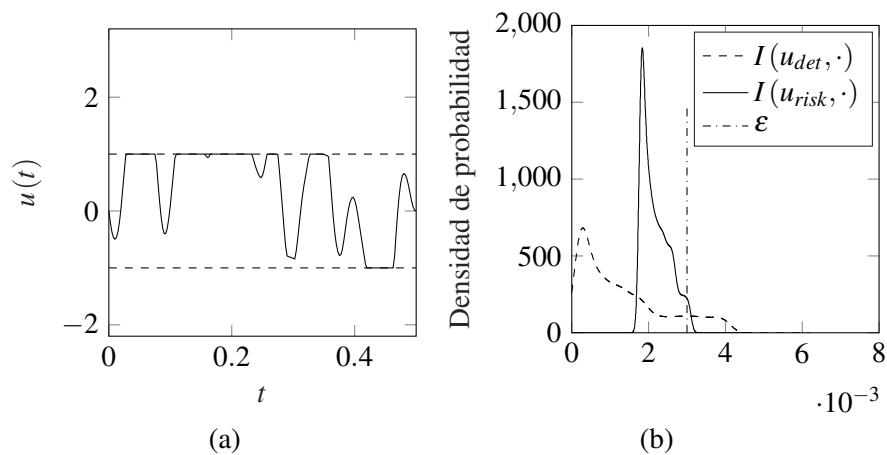
## 5.5 Resumen y conclusiones

En este capítulo se introduce, dentro de un marco probabilístico, una formulación de aversión al riesgo para el problema de control óptimo que consiste en controlar las vibraciones aleatorias de una viga por medio de un actuador piezoeléctrico. Esta formulación es novedosa en este campo de control óptimo de EDPs.

El uso de un funcional coste de tipo probabilístico, así como el famoso fenómeno de la maldición de la dimensionalidad, son serias dificultades para la resolución



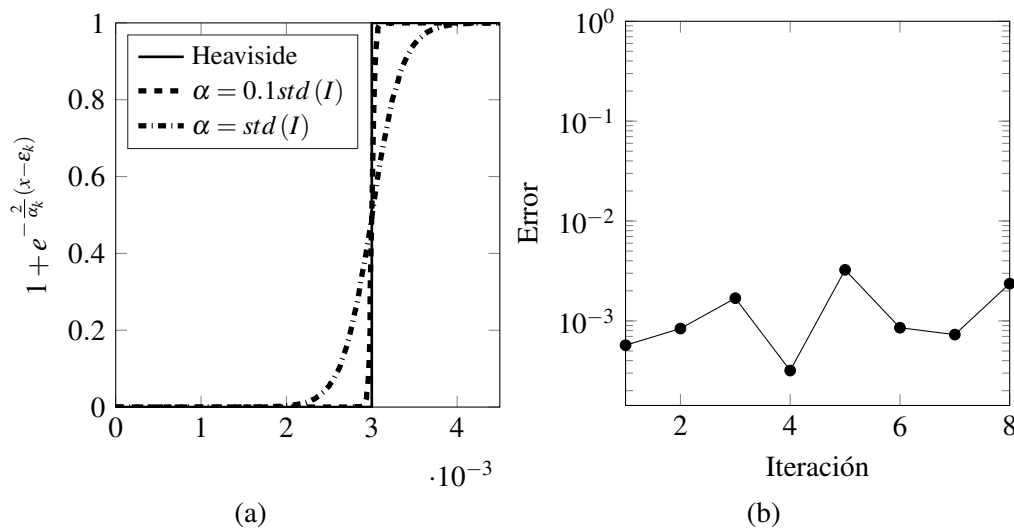
**Figura 5.8** Experimento 3.2: Control sin restricciones.  $m = -\infty$ ,  $M = +\infty$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$ ,  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . (a) Dibujo del control de aversión al riesgo, y (b) distribución de probabilidad de  $I(u, \cdot)$  para los controles óptimo determinista (línea discontinua) y de aversión al riesgo (línea continua).



**Figura 5.9** Experimento 3.2: Control con restricciones.  $m = -\infty$ ,  $M = +\infty$ ,  $\gamma_1 = 10^{-6}$ ,  $\gamma_2 = 10^{-8}$ . (a) Dibujo del control de aversión al riesgo, y (b) distribución de probabilidad de  $I(u, \cdot)$  para los controles óptimo determinista (línea discontinua) y de aversión al riesgo (línea continua).

numérica del problema de control. Un algoritmo de minimización *adaptativo* se propone para superar el tema probabilístico en el funcional coste, y se usa una combinación de una estrategia de Caos Polinomial con el método de Monte Carlo para reducir el alto coste computacional asociado a este tipo de problemas.

Los resultados de los experimentos numéricos que se muestran indican que esta formulación funciona, pues la distribución de probabilidad es trasladada casi



**Figura 5.10** Experimento 3.2: (a) Función de Heaviside y su aproximación para dos valores diferentes de  $\alpha$ , en la iteración final. (b) Error absoluto entre la función de Heaviside y la aproximación con  $\alpha = 0.1std(I)$ .

por completo a la izquierda del valor umbral, obteniendo así probabilidades muy bajas. Además, es capaz de proveer controles robustos porque la distribución de probabilidad se hace más estrecha, debido a que el coste no puede tomar valores negativos. Se ha constatado, incluso, en el caso de errores aleatorios relativamente grandes en los parámetros de entrada del modelo. En definitiva, la estrategia propuesta muestra un excelente comportamiento en los experimentos numéricos chequeados.

Aunque en este capítulo se ha estudiado el problema, interesante desde el punto de vista de sus aplicaciones de ingeniería, de las vibraciones en un modelo de viga unidimensional, la estrategia propuesta se podría aplicar a problemas de mayores dimensiones.

## Referencias

- [1] Babuška, I., Nobile, F., Tempone, R.: A Stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. *SIAM Review* 52 (2), 317-355 (2010)
- [2] Bäck, J., Tempone, R., Nobile, F., Tamellini, L.: On the optimal polynomial approximation of stochastic PDEs by Galerkin and collocation methods. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 22 (9), 1250023 (2012)

- [3] Blatman G., Sudret B.: Anisotropic parsimonious polynomial chaos expansions based on sparsity-off-effects principle. Inter. Conference on Structural Safety and Reliability, Osaka, Japan 2009
- [4] Keshavarzadeh V., Meidani M., Tortorelli A.: Gradient based design optimization under uncertainty via stochastic expansion methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2016; (306), 47-76.
- [5] Marín FJ, Martínez-Frutos J, Periago F: A polynomial chaos-based approach to risk-averse piezoelectric control of random vibrations of beams. *Int J Numer Methods Eng.* 1–18, 2018. <https://doi.org/10.1002/nme.5823>
- [6] Marín, F. J., Martínez-Frutos, J., Periago, F.: Robust averaged control of vibrations for the Bernoulli-Euler beam equation. *J. Optim. Theory Appl.* 174(2), 428-454 (2017). <https://doi.org/10.1007/s10957-017-1128-x>

## Capítulo 6

# Controlabilidad en promedio de la ecuación de ondas (trabajo en curso)

### 6.1 Introducción

La controlabilidad de las EDPs con datos de entrada aleatorios (en concreto, EDPs dependientes de parámetros) es un tema de investigación emergente. En [6] se introduce el concepto de control en media, donde la cantidad de interés que es controlada exactamente es la media de la respuesta del sistema con respecto al parámetro aleatorio. A nivel teórico, algunos resultados positivos de controlabilidad en media se han obtenido para las ecuaciones del calor, ondas y Schrödinger en [2, 4, 5], pero la resolución numérica de este tipo de problemas de controlabilidad no se ha considerado hasta ahora. En [3] se emplean algunos algoritmos para el cálculo del control exacto aleatorio de algunos sistemas finito dimensionales dependientes de parámetros.

### 6.2 Planteamiento del problema

Sea  $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \rho(z) dz)$  el espacio de probabilidad definido en el Apartado 3.2.3. Se considera el problema:

$$\begin{cases} \partial_t^2 y - \partial_x(a \partial_x y) = 1_{\mathcal{O}} u, & \text{en } (0, T) \times D \times \Gamma, \\ y(0) = y(L) = 0, & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ y(0) = y^0, \quad \partial_t y(0) = y^1, & \text{en } D \times \Gamma, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde  $y(t, x, z)$  representa la posición vertical del punto material  $x$  de una onda en el tiempo  $t$  en función del evento aleatorio  $z$ ,  $a$  es el coeficiente que representa el cuadrado de la velocidad de propagación de la onda,  $D = (0, L)$  es el dominio espacial de la onda,  $T$  es el tiempo de control,  $u(t, x)$  es el control que se aplica,  $\mathcal{O}$  es la región en la que actúa el control.

La incertidumbre puede localizarse, de forma similar al modelo de la viga de Bernoulli-Euler, en:

- El coeficiente de velocidad  $a(x, z)$ .
- La amplitud o la localización del control  $u(t, x)$ .
- Las condiciones iniciales  $y^0(x, z), y^1(x, z)$ .

El objetivo de la controlabilidad en media es encontrar  $u(t, x)$  de modo que:

$$\int_{\Gamma} y(T, x, z) \rho(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma} \partial_t y(T, x, z) \rho(z) dz = 0, \quad (6.2)$$

siendo  $y$  la solución de (6.1) para el control  $u$ .

A continuación, se considera una versión robusta del problema.

Se introduce el funcional coste siguiente:

$$J(u, y) = \frac{\gamma_1}{2} \int_0^T \int_D u^2 dx dt + \frac{\gamma_2}{2} \int_0^T \int_D (\partial_t u)^2 dx dt \\ + \beta_1 \int_D \int_{\Gamma} (y(T))^2 \rho dz dx + \beta_2 \int_D \int_{\Gamma} (\partial_t y(T))^2 \rho dz dx. \quad (6.3)$$

Este funcional trata de reducir la amplitud del control y su derivada, y el segundo momento estadístico de las variables de estado en el tiempo de control  $T$ .

En definitiva, el problema de control óptimo se enuncia de la siguiente forma:

$$(P_c) \quad \begin{cases} \text{mín}_u J(u, y) \\ \text{sujeto a } (y, u) \text{ solución de (6.1)-(6.2)} \end{cases}$$

### 6.3 Método espectral para la obtención del control de mínima norma

Para el caso de  $\beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ , se puede aplicar el método espectral para obtener la solución exacta, expresada en series de Fourier, que proporciona el control de mínima norma  $L^2$ .

De manera más precisa, la solución  $\phi(t, x)$  del problema adjunto:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \phi - \partial_x (a \partial_x \phi) = 0, & \text{en } (0, T) \times D \times \Gamma, \\ \phi(0) = \phi(L) = 0, & \text{sobre } (0, T) \times \Gamma, \\ \phi(T) = \phi^0, \quad \partial_t \phi(T) = \phi^1, & \text{en } D \times \Gamma, \end{cases} \quad (6.4)$$

se puede expresar como

$$\phi(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} \sqrt{a}) + \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k} \sqrt{at}} \sin(\sqrt{\lambda_k} \sqrt{at}) \right] \sin(\sqrt{\lambda_k} x) \quad (6.5)$$

donde  $a_k, b_k$  son los coeficientes de Fourier de  $\phi^0, \phi^1$ , y

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L} \quad (6.6)$$

son los autovalores para la ecuación de ondas planteada.

Es conocido que el control de mínima norma  $u(t, x)$  cumple la siguiente ecuación:

$$- \int_D \left( y^1 \int_{\Gamma} \phi(0) \rho dz - y^0 \int_{\Gamma} \partial_t \phi(0) \rho dz \right) dx = \int_D \int_0^T 1_{\mathcal{O}} u \phi dt dx. \quad (6.7)$$

Esta identidad permite calcular de manera explícita el control exacto en promedio en el caso  $\mathcal{O} = (0, L)$ , y con incertidumbre sobre el coeficiente de velocidad  $a$  en forma de variable aleatoria. Dicho control puede servir de referencia para chequear el comportamiento de esquemas numéricos para la resolución de este tipo de problemas.

## 6.4 Resolución numérica

Se pretende estudiar la posible extensión al caso aleatorio de los algoritmos para la resolución del problema (6.1)-(6.2) en el caso determinista. En particular, a través de la siguiente formulación de punto de silla.

Primeramente, se construye formalmente el Lagrangiano asociado al problema, incluyendo multiplicadores de Lagrange para las restricciones; en concreto,  $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$  para la media de las variables de estado, y el estado adjunto  $p$  para la EDP:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, \lambda_1, \lambda_2, p) := & J(u, y) + \int_0^L \lambda_1(x) \int_{\Gamma} y(T) \rho dz dx \\ & + \int_0^L \lambda_2(x) \int_{\Gamma} \partial_t y(T) \rho dz dx + \int_{\Gamma} \int_0^T \int_D p (\partial_t^2 y - \partial_x(a \partial_x y) - 1_{\mathcal{O}} u) dx dt \rho dz. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Seguidamente, la mencionada formulación de punto de silla se establece de la siguiente forma:

$$\sup_{(\lambda_1, \lambda_2)} \min_{(y, u)} \mathcal{L}(y, u, \lambda_1, \lambda_2, p) \quad (6.9)$$

Resultados preliminares de simulación numérica se han obtenido en [1].

## Referencias

- [1] Marín, F., Münch, A, Cîndea, N.. En preparación, (2018).
- [2] Lazar, M., Zuazua, E.: Averaged control and observation of parameter-dependent wave equations. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 352, 497-502 (2014).
- [3] Lazar, M., Zuazua, E.: Greedy controllability of finite dimensional linear systems. *ArXiv:1601.02817v2* (2016).
- [4] Lohéac, J., Zuazua, E.: Averaged controllability of parameter dependent wave equations. *hal-01122077* (2015).
- [5] Lü, Q., Zuazua, E.: Averaged controllability for Random Evolution Partial Differential Equations. *J. Math. Pures Appl.* 105 (3), 367-414 (2016).
- [6] Zuazua, E.: Averaged control. *Automatica.* 50, 3077-3087 (2014).



# Capítulo 7

## Conclusiones

### 7.1 Resumen de contenidos

A lo largo de esta tesis, se desarrollan técnicas para resolver PCOs de EDPs con incertidumbre en sus parámetros de entrada, partiendo de los conocidos algoritmos de descenso para PCOs de EDPs deterministas.

A continuación, se resumen los aspectos fundamentales que recoge esta tesis:

- En cuanto al tipo de funcional coste u objetivo empleado, se distinguen dos casos principales: control robusto y control de tipo aversión al riesgo.
  - El control óptimo robusto de la EDP evolutiva de la viga de Bernoulli-Euler, trata de minimizar la media y la varianza del desplazamiento y de la velocidad de la viga en un tiempo final de control  $T$ . Se trabaja, por tanto, con dos cantidades estadísticas de interés, que son la media y la varianza. La primera de ellas representa el objetivo de alcanzar una vibración nula en el tiempo final, mientras que la segunda trata de reducir la dispersión. Este tipo de problemas de control óptimo robusto se encuentran en la literatura, aplicados a EDPs estacionarias, y a una EDP evolutiva de primer orden en tiempo, pero la novedad aquí es que se aplica a una EDP evolutiva de segundo orden en tiempo.
  - El control óptimo de tipo aversión al riesgo, también para la EDP evolutiva de la viga de Bernoulli-Euler, trata de reducir la probabilidad de que el desplazamiento y la velocidad de la viga superen un cierto valor en un tiempo final de control  $T$ . El funcional coste incluye la probabilidad, que supone un reto mayor que incluir media y varianza. Este es un caso más novedoso, ya que el concepto de aversión al riesgo, empleado en el campo de la Economía, se traslada aquí a este tipo de problemas de control óptimo con EDPs, y no se encuentra en la literatura en el marco del Control Óptimo (se ha usado previamente en Optimización Estructural). En este problema, se ha desarrollado

un algoritmo adaptativo para que los parámetros se adapten a la distribución de probabilidad en cada iteración.

- En cuanto al tipo de control empleado, se diferencian dos casos: un control genérico (caso más académico), y un control de tipo piezoeléctrico (con aplicaciones directas en Ingeniería).
  - El control genérico es, simplemente, una función que depende de tiempo y espacio. Una vez que se obtiene este control genérico, cabría preguntarse si se dispone de algún dispositivo capaz de generarlo.
  - El control piezoeléctrico es un caso más realista. Se trata de un material que transforma un voltaje aplicado en un par de momentos mecánicos.
- La Cuantificación de la Incertidumbre es un tema muy importante en esta tesis.
  - Para el modelado de la incertidumbre de los datos de entrada, que aparece en forma de campos aleatorios correlacionados, se emplea la expansión de Karhunen-Loève. Bajo la hipótesis de que la incertidumbre de los datos de entrada es un ruido finito dimensional, esta expansión permite transformar un campo aleatorio en una suma de variables aleatorias, no relacionadas por pares. Asimismo, se realiza una transformación del espacio de probabilidad, cambiando una EDP aleatoria por una EDP determinista con un parámetro  $N$ -dimensional.
  - Para la resolución de las integrales que aparecen en el funcional coste, se utilizan, principalmente, las siguientes técnicas: Colocación Estocástica (CE), Caos Polinomial (CP) y Monte Carlo (MC). La CE se puede emplear cuando el funcional coste es suave respecto del parámetro aleatorio, y permite reducir considerablemente el número de nodos sobre el que hay que evaluar la EDP, si se compara con la aplicación directa del método de MC sobre la EDP. Sin embargo, cuando el funcional coste no es suave respecto del parámetro aleatorio, las técnicas de CE no arrojan un buen resultado, y se opta por recurrir a una aproximación de CP de la solución del sistema, para expresarla como combinación lineal de unos polinomios ortogonales, mediante unos coeficientes que sí se calculan aplicando CE sobre la EDP. Una vez que estos coeficientes están calculados, ya se puede aplicar MC sobre esta aproximación de CP, sin tener que resolver la EDP. De esta forma, no se requiere un coste computacional muy elevado.
- En cuanto a los experimentos numéricos realizados:
  - Se realizan dos experimentos numéricos para el control robusto, en los cuales la incertidumbre aparece sobre el término de la rigidez flexural de la viga. En el primero de ellos, en forma de variable aleatoria. En el segundo, de campo aleatorio correlacionado.

- Se realizan varios experimentos numéricos para el control de aversión al riesgo. Primeramente, dos experimentos en los cuales la incertidumbre está localizada sobre la rigidez flexural, al igual que el caso anterior, en forma de variable aleatoria y de campo aleatorio. A continuación, se sitúa la incertidumbre sobre la localización del actuador piezoeléctrico, en forma de variable aleatoria. Se hace un experimento con otras condiciones iniciales diferentes, y estableciendo un control con restricciones (cota inferior y cota superior) en su amplitud.

## 7.2 Conclusiones de la tesis

- Se han validado los algoritmos de descenso para problemas de control óptimo de EDPs aleatorias, los cuales se han construido de manera similar al caso determinista.
- La incertidumbre merece tenerse en cuenta. Dependiendo del tipo y la magnitud de la incertidumbre, el control óptimo del problema determinista puede estar lejos de proveer la solución óptima en el problema aleatorio, como se muestra en los experimentos de esta tesis.
- El control que reduce la dispersión de los datos de salida es muy diferente, en tamaño y forma, al que solo reduce la media de los mismos. Por ello, también es necesario tener en cuenta la varianza en el funcional coste.
- Se observa que el cambio de tamaño y forma del control que minimiza el segundo momento estadístico, con respecto al que minimiza solo la media, está en consonancia con los momentos estadísticos de la solución sin control (cuando el sistema se deja evolucionar libremente).
- Los problemas planteados se reducen a la resolución de las EDPs para una serie de valores de los parámetros aleatorios (evaluación en una serie de nodos). La evaluación en estos nodos se puede hacer de manera independiente, por lo tanto se puede programar el cálculo en paralelo, de manera que no supone un tiempo computacional demasiado elevado.
- Se ha propuesto y validado un algoritmo de descenso adaptativo para el caso del problema de control óptimo de aversión al riesgo.

## 7.3 Perspectivas futuras

Los resultados obtenidos en esta tesis pueden servir de punto de partida para el estudio de problemas más realistas, entre otros:

1. En el Capítulo 6, se introduce el problema de controlabilidad (o control exacto). Continuando con el trabajo comenzado, sería posible realizar los experimentos numéricos y estudiar esta posible extensión al marco probabilístico de los problemas de controlabilidad en media.
2. En esta tesis se ha trabajado con un modelo unidimensional, el cual se considera suficiente para validar los algoritmos. Un siguiente paso puede ser buscar la aplicación del control piezoeléctrico a placas y láminas (caso bidimensional).
3. En el trabajo aquí desarrollado, se tiene en cuenta la hipótesis de pequeños desplazamientos, que permite recuperar la estructura inicial una vez cesa la fuerza aplicada sobre ella. Una alternativa posible sería el control piezoeléctrico de vigas, placas y láminas con grandes desplazamientos (caso no lineal), es decir, estructuras hiperelásticas.
4. Otra posible opción podría ser llevar a cabo un estudio comparativo de todos los métodos para tratar la incertidumbre en control: comparar las técnicas desarrolladas en esta tesis (Colocación Estocástica, Caos Polinomial y Monte Carlo) con otras, tales como bases reducidas, Monte Carlo multi-nivel, o representación de modelos de alta dimensionalidad (conocido por sus siglas en inglés, HDMR).
5. Asimismo, se podría estudiar la posibilidad de implementar en un laboratorio el material piezoeléctrico, con el fin de probar el control piezoeléctrico desarrollado en esta tesis.