



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

**DISEÑO, SIMULACIÓN DEL ENGRANE,
ESTUDIO DEL CONTACTO Y ANÁLISIS
TENSIONAL DE ENGRANAJES CILÍNDRICOS
RECTOS Y HELICOIDALES DE BAJO RUIDO Y
CONTACTO MEJORADO**

IGNACIO GONZÁLEZ PÉREZ

2003

TESIS DOCTORAL

Diseño, simulación del engrane, estudio del
contacto y análisis tensional de engranajes
cilíndricos rectos y helicoidales de bajo
ruido y contacto mejorado

por

Ignacio González Pérez
Ingeniero Industrial

presentada en la

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

para la obtención del

GRADO DE DOCTOR

por la

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA



Departamento de Ingeniería Mecánica

Cartagena, noviembre de 2003

A mis padres

Agradecimientos

Quisiera expresar mi gratitud al profesor Dr. Alfonso Fuentes Aznar por la dirección y el conocimiento compartido en el desarrollo de este trabajo. Me gustaría agradecerle igualmente que me haya presentado al profesor emérito Dr. Faydor L. Litvin, director del Gear Research Center de la Universidad de Illinois en Chicago, con el que he trabajado estos dos últimos años. Estoy muy agradecido al profesor Fuentes, al profesor Litvin y a su grupo de investigación, del cual me considero parte, por la cantidad de ideas generadas y que han dado como resultado la presente Tesis Doctoral.

Quisiera también dar las gracias a la Universidad Politécnica de Cartagena y, en particular, al Departamento de Ingeniería Mecánica, por su confianza y apoyo durante mi estancia en la Universidad de Illinois en Chicago, y por haberme permitido vivir una experiencia muy enriquecedora, tanto a nivel personal como académico.

Finalmente, muchas gracias a mi familia y amigos por la paciencia y apoyo en estos años tan lejos de mi tierra, y que han hecho más llevadera mi estancia en Chicago.

Índice general

Agradecimientos	I
Índice general	III
Resumen	VII
Nomenclatura	XI
1. Introducción y objetivos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	15
1.3. Metodología	17
1.4. Estructura y planteamiento	19
2. Fundamentos teóricos	23
2.1. Introducción	23
2.2. Envolvente a una familia de superficies	23
2.3. Condiciones suficientes de existencia de la envolvente a una familia de superficies	27
2.4. Relaciones cinemáticas básicas	29
2.5. Determinación de singularidades en la superficie envolvente	30
2.6. Relación entre las curvaturas de las superficies en contacto	33
2.7. Elipse instantánea de contacto	34
2.8. Generación por doble envolvente	36
2.9. Simulación del engrane y análisis del contacto	37

2.10. Prediseño de una función parabólica de errores de transmisión	41
2.11. Aplicación del método de los elementos finitos en el diseño de engranajes	45
3. Engranajes cilíndricos con perfil de evolvente	53
3.1. Introducción	53
3.2. Superficies de perfil de evolvente	56
3.3. Generación de superficies conjugadas con perfil de evolvente .	60
3.4. Diseño de engranajes cilíndricos con ejes cruzados	66
3.4.1. Diseño canónico	69
3.5. Análisis del contacto. Determinación analítica de las líneas de acción	77
3.5.1. Determinación analítica de las líneas de acción	82
4. Engranajes cilíndricos con geometría modificada. Generación por cremallera	91
4.1. Introducción	91
4.2. Axoides	92
4.3. Perfiles de las cremalleras de referencia	95
4.4. Cremallera de generación del piñón	102
4.5. Cremallera de generación de la rueda	104
4.6. Superficies de los dientes de piñón y rueda con abombamiento simple	105
4.6.1. Generación de la superficie del piñón Σ_σ	105
4.6.2. Condiciones necesarias para la existencia de la envolvente a una familia paramétrica de superficies	109
4.6.3. Representación de la envolvente Σ_σ como función de dos parámetros	110
4.6.4. Representación de la envolvente Σ_2 como función de dos parámetros	110
4.7. Simulación del engrane de piñón y rueda con abombamiento simple	111
4.8. Penetración y apuntamiento	122
4.8.1. Penetración	122

4.8.2. Apuntamiento	125
5. Engranajes cilíndricos con geometría modificada. Generación real por herramienta	129
5.1. Introducción	129
5.2. Generación mediante disco de corte o rectificado	130
5.3. Generación mediante cortador sinfín	143
5.3.1. Generación por cortador del piñón con abombamiento simple	149
5.3.2. Generación por cortador del piñón con abombamiento doble	154
5.4. Simulación del engrane de una transmisión con doble abombamiento en el piñón	157
5.5. Análisis tensional de engranajes cilíndricos con geometría modificada	166
5.5.1. Análisis tensional de engranajes rectos	169
5.5.2. Análisis tensional de engranajes helicoidales	179
6. Aplicación de engranajes cilíndricos en transmisiones con ejes que se intersectan: Engranajes de cara	191
6.1. Introducción	191
6.2. Geometría convencional y geometría propuesta	195
6.2.1. Geometría convencional con perfiles de evolvente	196
6.2.2. Geometría propuesta	198
6.3. Generación del engranaje de cara	200
6.4. Análisis del contacto (TCA)	205
6.5. Diseño del cortador sinfín	211
6.5.1. Ángulo entre ejes del cortador convencional y el cortador sinfín	212
6.5.2. Generación de la superficie del cortador sinfín Σ_w	213
6.6. Singularidades del cortador sinfín	215
6.7. Generación del engranaje de cara a partir del cortador sinfín	217
6.8. Análisis tensional	224
6.8.1. Ejemplo numérico	225

7. Resultados y conclusiones	237
Bibliografía	245
Biografía del autor	253

Resumen

En la presente Tesis Doctoral se han propuesto las bases para el diseño y la fabricación de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales de bajo nivel de ruido y vibración, así como de transmisiones de engranajes de cara que permiten la transmisión de potencia entre ejes que se intersectan con relaciones de transmisión relativamente grandes.

La metodología del desarrollo de este trabajo se ha basado en la modificación de las superficies de contacto de los dientes de los engranajes cilíndricos rectos y helicoidales para localizar el contacto y prediseñar una función parabólica de errores de transmisión, capaz de absorber las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y/o fabricación, y que constituyen la fuente principal de ruido y vibración.

Las ventajas de la aplicación de engranajes cilíndricos con geometría modificada para la reducción de los niveles de ruido y vibración, se han comprobado mediante la simulación del engrane y el análisis del contacto de estas transmisiones frente a posibles errores de alineación y/o fabricación, así como mediante el análisis tensional por el método de los elementos finitos para estudiar la formación del contacto durante el ciclo de engrane y comparar los niveles tensionales de contacto y flexión entre la geometría modificada y la geometría convencional.

Se han estudiado las condiciones del contacto en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente con ejes que se cruzan para considerar el caso más general, y estudiar la sensibilidad del contacto en estas transmisiones frente a la presencia de errores de alineación y fabricación en función del ángulo entre ejes

γ . Se ha introducido el concepto de diseño canónico como aquel que proporciona una disposición óptima de los caminos de contacto. Se ha demostrado que las transmisiones con ejes que se cruzan perpendicularmente son poco sensibles a los errores de alineación y fabricación. Los engranajes cilíndricos rectos o helicoidales con ejes paralelos se han estudiado como un caso particular de los anteriores. Se ha demostrado que la sensibilidad del contacto frente a la presencia de errores de alineación y fabricación en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos o helicoidales con ejes paralelos es máxima y la localización del contacto es imprescindible para poder evitar el contacto en el borde de las superficies de los dientes. Se ha demostrado además que la localización del contacto, no obstante, no es suficiente y se debe acompañar de una modificación adicional de las superficies que permita absorber los errores de transmisión producidos por errores de alineación y/o fabricación.

Se han estudiado y propuesto métodos para la modificación de las superficies de los dientes de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales, siempre considerando como objetivos principales: (i) la localización del contacto y (ii) la absorción de las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y fabricación. Estos métodos de fabricación se basan en la aplicación de herramientas reales de corte o rectificadas. Se han propuesto tres métodos para la generación de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales de bajo nivel de ruido y vibración: (1) mediante disco de corte o rectificado, modificando la distancia entre los ejes del disco y del piñón durante el proceso de generación, (2) mediante cortador sinfín, modificando la distancia entre los ejes del cortador y del piñón durante la generación y (3) mediante cortador sinfín, modificando la relación entre el giro del piñón y el desplazamiento del cortador durante el movimiento de alimentación del cortador según una función parabólica, siendo constante la distancia entre ejes.

Se han desarrollado programas de ordenador para la simulación del engrane y el análisis del contacto (TCA) en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales con geometría modificada.

Se ha realizado el análisis tensional de estas transmisiones mediante el método de los elementos finitos, utilizando para ello un programa de elementos

finitos de uso general. Para la construcción del modelo de elementos finitos se ha desarrollado un programa que permite la total parametrización del modelo, no siendo necesaria la utilización de programas CAD. El estudio de la formación del contacto ha permitido confirmar los resultados obtenidos del análisis del contacto y obtener el verdadero tamaño de las elipses de contacto para el par a transmitir. Los niveles tensionales obtenidos en ambos tipos de geometría han confirmado las ventajas de utilizar las transmisiones con geometría modificada.

Además, se han estudiado las transmisiones de engranajes de cara y se ha propuesto un método de modificación de su geometría para conseguir una trayectoria longitudinal del camino de contacto. Esto permite evitar las zonas de altas tensiones de contacto que se producen en la cabeza del diente de los engranajes de estas transmisiones con geometría convencional. Se ha propuesto un proceso de rectificado en la generación del engranaje de cara basado en la utilización de un cortador sinfín, que permite la utilización de superficies endurecidas por tratamiento térmico y el aumento de la capacidad de transmisión de potencia.

Nomenclatura

α_i ($i = d, c$)	ángulo de presión normal en el lado conductor ($i = d$) o en el lado conducido ($i = c$) de la cremallera
α_{pn}	ángulo de presión normal en una transmisión de diseño convencional
α_{on}	ángulo de presión normal en una transmisión de diseño no convencional
α_{pti} ($i = 1, 2$)	ángulo de presión transversal en una transmisión de diseño convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
α_{oti} ($i = 1, 2$)	ángulo de presión transversal en una transmisión de diseño no convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
β_{bi} ($i = 1, 2$)	ángulo de hélice correspondiente al cilindro base de una transmisión de diseño convencional o no convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
β_{pi}, β , ($i = 1, 2$)	ángulo de hélice correspondiente al cilindro primitivo de una transmisión de diseño convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
β_{oi} ($i = 1, 2$)	ángulo de hélice correspondiente al cilindro de operación de una transmisión de diseño no convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
γ_m	ángulo entre ejes del piñón y del engranaje de cara
γ_p	ángulo de cruce entre ejes en una transmisión de diseño convencional

γ_o	ángulo de cruce entre ejes en una transmisión de diseño no convencional
γ_{Dp}	ángulo de cruce entre los ejes del disco de rectificado y del piñón
γ_{wp}	ángulo de cruce entre los ejes del cortador sinfín y del piñón
γ_{ws}	ángulo de cruce entre los ejes del cortador convencional y del cortador sinfín en la generación del engranaje de cara
δ	parámetro de deformación elástica
λ_c	parámetro de espesor relativo de la cremallera que genera el cortador convencional del engranaje de cara
λ_i ($i = p, w$)	ángulo de carga del piñón ($i = p$) o del cortador sinfín ($i = w$)
λ_{bi} ($i = 1, 2$)	ángulo de carga correspondiente al cilindro base de una transmisión de diseño convencional o no convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
λ_{pi} ($i = 1, 2$)	ángulo de carga correspondiente al cilindro primitivo de una transmisión de diseño convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
λ_{oi} ($i = 1, 2$)	ángulo de carga correspondiente al cilindro de operación de una transmisión de diseño no convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
ρ	radio de cabeza de la cremallera o del cortador convencional del engranaje de cara
ρ_D	radio del disco de corte o rectificado
χ_i ($i = 1, 2$)	coeficiente de desplazamiento de herramienta en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
$\Delta\gamma, \Delta\gamma_h$	error en el ángulo entre ejes responsable de que los ejes de piñón y rueda se crucen
$\Delta\gamma_v$	error en el ángulo entre ejes responsable de que los ejes de piñón y rueda se intersecten

$\Delta\gamma_m$	error en el ángulo entre ejes de piñón y engranaje de cara
$\Delta\lambda$	error en el ángulo de carga
ΔE	error en la distancia entre ejes
Δq	desplazamiento axial del engranaje de cara
a_{di} ($i = a, r$)	coeficiente parabólico del perfil en la sección normal de la cremallera del piñón ($i = a$) o de la rueda ($i = r$) correspondiente al lado conductor
a_i ($i = 1, s$)	coeficiente parabólico del perfil en la sección normal de la cremallera del piñón ($i = 1$) o del cortador convencional ($i = s$) del engranaje de cara
a_f	adendo del engranaje de cara
a_{mr}	coeficiente de la función parabólica utilizada en el movimiento de alimentación del cortador sinfín, en la relación entre el desplazamiento del cortador y el ángulo de giro del piñón
a_{pl}	coeficiente de la función parabólica utilizada en la relación entre el desplazamiento de la herramienta (disco o cortador sinfín) y la distancia entre ejes de herramienta y piñón
h_{ai} ($i = 1, 2$)	altura de adendo en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
h_{di} ($i = 1, 2$)	altura de dedendo en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
l_o, l_{Do}	posicionamiento inicial del disco de corte o rectificado durante la generación del piñón con doble abombamiento de sus superficies
m_{12}	relación de transmisión instantánea entre el piñón y la rueda
m_{wp}	relación de transmisión entre el cortador sinfín y el piñón
m_{pn}, m_n, m	módulo normal en una transmisión de diseño convencional
m_{on}	módulo normal en una transmisión de diseño no convencional

m_{pti} ($i = 1, 2$)	módulo transversal en una transmisión de diseño convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
m_{oti} ($i = 1, 2$)	módulo transversal en una transmisión de diseño no convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
p_i ($i = 1, 2$)	parámetro de helicoide del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$)
p_s	parámetro de helicoide del cortador convencional que genera el engranaje de cara
p_{pn}	paso normal en el cilindro primitivo en una transmisión de diseño convencional
p_{on}	paso normal en el cilindro de operación en una transmisión de diseño no convencional
p_{bti} ($i = 1, 2$)	paso transversal en el cilindro base en una transmisión convencional o no convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
p_{pti} ($i = 1, 2$)	paso transversal en el cilindro primitivo en una transmisión convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
p_{oti} ($i = 1, 2$)	paso transversal en el cilindro de operación en una transmisión no convencional en el piñón ($i = 1$) o en la rueda ($i = 2$)
r_{bi} ($i = 1, 2$)	radio del cilindro base del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$) en una transmisión convencional o no convencional
r_{pi} ($i = 1, 2$)	radio del cilindro primitivo del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$) en una transmisión convencional
r_{oi} ($i = 1, 2$)	radio del cilindro de operación del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$) en una transmisión no convencional
r_{pai} ($i = 1, 2$)	radio del cilindro de adendo del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$) en una transmisión convencional
r_{oai} ($i = 1, 2$)	radio del cilindro de adendo del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$) en una transmisión no convencional

r_{pdi}, r_{di} ($i = 1, 2$)	radio del cilindro de dedendo del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$) en una transmisión convencional
r_{odi} ($i = 1, 2$)	radio del cilindro de dedendo del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$) en una transmisión no convencional
r_{bs}	radio base del cortador convencional que genera el engranaje de cara
r_{ps}	radio primitivo del cortador convencional que genera el engranaje de cara
r_{pw}	radio primitivo del cortador sinfín que genera el engranaje de cara
s_{21}	parámetro de espesor relativo de las cremalleras de piñón y rueda
s_o	posicionamiento inicial del cortador sinfín durante la generación del piñón con doble abombamiento de sus superficies
s_{pni}, s_i ($i = 1, 2$)	espesor de un diente del piñón ($i = 1$) o de un diente de la rueda ($i = 2$) medido en una sección normal sobre el cilindro primitivo en una transmisión convencional
s_{pti} ($i = 1, 2$)	espesor de un diente del piñón ($i = 1$) o de un diente de la rueda ($i = 2$) medido en una sección transversal sobre el cilindro primitivo en una transmisión convencional
s_{oti} ($i = 1, 2$)	espesor de un diente del piñón ($i = 1$) o de un diente de la rueda ($i = 2$) medido en una sección transversal sobre el cilindro de operación en una transmisión no convencional
s_a	ancho de cabeza del diente
s_0, w_0	hueco y espesor de los dientes de la cremallera del cortador convencional que genera el engranaje de cara
u_o	desplazamiento del vértice de la parábola en los perfiles de las cremalleras del piñón y del cortador convencional que genera el engranaje de cara
u_{d0}	desplazamiento del vértice del perfil parabólico del lado conductor de las cremalleras de piñón y rueda

u_{c0}	desplazamiento del vértice del perfil parabólico del lado conducido de las cremalleras de piñón y rueda
E_p	distancia más corta entre ejes en una transmisión convencional
E_o	distancia más corta entre ejes en una transmisión no convencional
E_{Dp}	distancia más corta entre ejes entre el disco de rectificado y el piñón
E_{wp}	distancia más corta entre ejes entre el cortador sinfín y el piñón
E_{ws}	distancia más corta entre los ejes del cortador convencional y el cortador sinfín durante la generación del engranaje de cara
F_i ($i = 1, 2$)	ancho de cara del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$)
L_i ($i = 1, 2$)	radio interior ($i = 1$) o exterior ($i = 2$) del engranaje de cara
N_i ($i = 1, 2$)	número de dientes del piñón ($i = 1$) o de la rueda ($i = 2$)
N_s	número de dientes del cortador convencional de un engranaje de cara
N_w	número de dientes del cortador sinfín
P_d	paso diametral (diametral pitch)

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1. Introducción

Si bien las transmisiones por engranajes son tan antiguas como la palanca, la polea, la rueda y otros mecanismos similares, en realidad no fue hasta mediados del siglo XVIII cuando se empezaron a establecer las bases de la teoría de engranajes y el desarrollo de la tecnología de fabricación y diseño de los mismos.

Los primeros testimonios escritos sobre engranajes datan del año 330 A.C. y corresponden a Aristóteles [Dudley, 1969; Coy *et al.*, 1985]. No obstante, Aristóteles describe ya los engranajes como mecanismos muy conocidos de la época. El testimonio más antiguo data de aproximadamente 2600 A.C. (Fig. 1.1.1) y se trata de un carro chino con funciones de brújula cuyo puntero señala en dirección Sur independientemente de la dirección que siga dicho carro. Analizando dicho mecanismo uno mismo puede llegar a la conclusión de que las primeras transmisiones por engranajes se remontan a una época aún más primitiva.

Durante el siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX se llevaron a cabo numerosas aportaciones a la teoría de engranajes [Dudley, 1969; Litvin, 1998]. El perfil epicycloidal fue analizado matemáticamente por Philip de la Hire hacia el año 1694 y Charles Camus profundizó en la investigación de dicho perfil. Hacia el año 1754, Leonard Euler estableció las bases para el diseño de

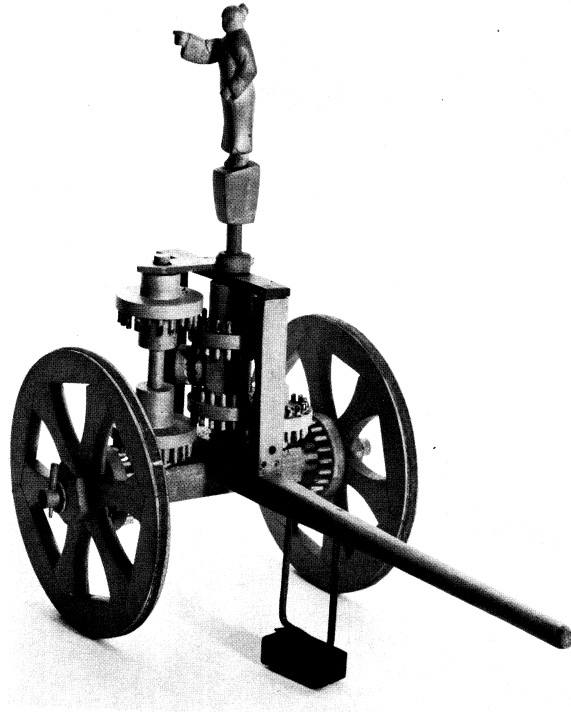


Figura 1.1.1: Carro chino del 2600 A.C., cortesía de la Institución Smithsonian, Washington, D.C.; Fuente en [Dudley, 1969].

superficies conjugadas y muchos lo consideran el padre del perfil de evolvente de círculo. Robert Willis [Willis, 1841] realizó numerosas aportaciones en el campo de los engranajes por el año 1832 entre las que se encuentra la ley del engrane en engranajes rectos, y Edward Sang proporcionó las bases para el diseño de máquinas herramienta por el año 1852.

Durante el siglo XIX aparecieron gran cantidad de diseños de máquinas de corte para la producción en serie de engranajes y fue entonces cuando las ideas de los pioneros del siglo anterior tuvieron su mayor aplicación. La idea básica de estos diseños permanece en las máquinas de corte actuales.

La teoría de engranajes se fue enriqueciendo progresivamente durante el siglo XIX. Olivier [Olivier, 1842] primero a través de la geometría proyectiva, y Gochman [Gochman, 1886] después a través de la geometría analítica,

introdujeron la idea del proceso de envolvente a una familia de curvas como requisito para la acción conjugada y aplicaron el concepto de superficie auxiliar como superficie intermedia generadora.

En las primeras transmisiones, la relación de transmisión dada como cociente de los números de dientes de piñón y rueda se satisface sólo si se considera el cociente de las velocidades angulares medias $\omega_m^{(1)}$ del piñón y $\omega_m^{(2)}$ de la rueda

$$\frac{\omega_m^{(1)}}{\omega_m^{(2)}} = \frac{N_2}{N_1} \quad (1.1.1)$$

donde N_1 y N_2 son los números de dientes del piñón y de la rueda, respectivamente. Esta relación se deduce de la condición de engrane consecutivo de las parejas de dientes. En la Fig. 1.1.1 se observa que los dientes utilizados son palos cortos que entran en contacto de forma consecutiva, satisfaciendo la relación dada en (1.1.1).

Sin embargo, la relación de transmisión instantánea m_{12} dada por el cociente de las velocidades angulares instantáneas $\omega^{(1)}$ del piñón y $\omega^{(2)}$ de la rueda, es decir,

$$m_{12} = \frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(2)}} \quad (1.1.2)$$

es en general distinta de la relación dada por (1.1.1). Tales transmisiones estaban pensadas para transmitir movimiento con potencias muy bajas. Desde entonces hasta el siglo XIX se han utilizado distintos tipos de dientes, con perfiles triangulares, de círculo, etc., pero en todas estas transmisiones la relación de transmisión instantánea m_{12} es en general distinta de la relación dada por (1.1.1), por lo que la transmisión de potencia y movimiento no es uniforme y continua.

Introducido el concepto de superficies conjugadas, las transmisiones por engranajes podían satisfacer el requerimiento de $m_{12} = N_2/N_1$ en cada instante del ciclo de engrane y con ello mejorar considerablemente el funcionamiento de la transmisión. La teoría moderna de engranajes establece las condiciones necesarias y suficientes de existencia de superficies conjugadas. En realidad, la acción conjugada no significa que la relación m_{12} sea constante en cada instante, sino que puede venir dada por una función definida por

el diseñador. Un ejemplo lo constituyen los engranajes no cilíndricos [Litvin, 1994].

En los engranajes cilíndricos rectos y helicoidales, en los cuales se centra el presente trabajo, la generación de superficies conjugadas está basada en el concepto de generación por cremallera y éste constituye la base para la determinación de la geometría de las herramientas de corte. El engrane simultáneo de la cremallera con las superficies a generar del piñón Σ_1 y de la rueda Σ_2 constituye la condición necesaria para la acción conjugada entre Σ_1 y Σ_2 . Para ello, se considera conocida la superficie generadora Σ_c de la cremallera, la cual ha de ser una superficie regular [Litvin, 1994]. Igualmente se conoce la ley del movimiento entre los sistemas de coordenadas $S_c(x_c, y_c, z_c)$, solidario a Σ_c , y $S_i(x_i, y_i, z_i)$, solidario a la superficie a generar Σ_i , donde $i = 1$ en el piñón e $i = 2$ en la rueda. La superficie Σ_i se obtiene entonces en el sistema de coordenadas $S_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2$) como envolvente de la familia de superficies definida por la superficie Σ_c en el movimiento relativo del sistema de coordenadas $S_c(x_c, y_c, z_c)$ respecto al sistema de coordenadas $S_i(x_i, y_i, z_i)$. Dado que, desde un punto de vista teórico, la superficie Σ_c se encuentra simultáneamente en contacto con las superficies a generar Σ_1 del piñón y Σ_2 de la rueda, ambas superficies Σ_1 y Σ_2 reproducirán durante su engrane la misma ley del movimiento que durante la generación simultánea, garantizándose así la acción conjugada.

La variedad de tipos de superficies conjugadas es tan amplia como la imaginación del ser humano. Sin embargo, ha sido la superficie cuya curva base es una evolvente de círculo la que ha tenido más aceptación y uso generalizado en la industria. La investigación desarrollada en el presente trabajo tiene como punto de partida las superficies con perfil de evolvente de círculo (de ahora en adelante perfil de evolvente).

En engranajes rectos y helicoidales con ejes paralelos, el contacto entre las superficies conjugadas con perfil de evolvente es lineal como se observa en las Figuras 1.1.2(a) y (b) para el caso de engranajes rectos y helicoidales, respectivamente. Las líneas de contacto en el caso del engranaje helicoidal son rectas tangentes al cilindro base de la evolvente mientras que en el engranaje recto son paralelas al eje de dicho cilindro. En el caso de engranajes con ejes

crucados el contacto es puntual como se muestra en la Figura 1.1.2(c). Ambos tipos de contacto, el lineal y el puntual, definen un comportamiento diferente de la transmisión frente a posibles errores de alineación y/o fabricación como se mostrará a lo largo del presente trabajo.

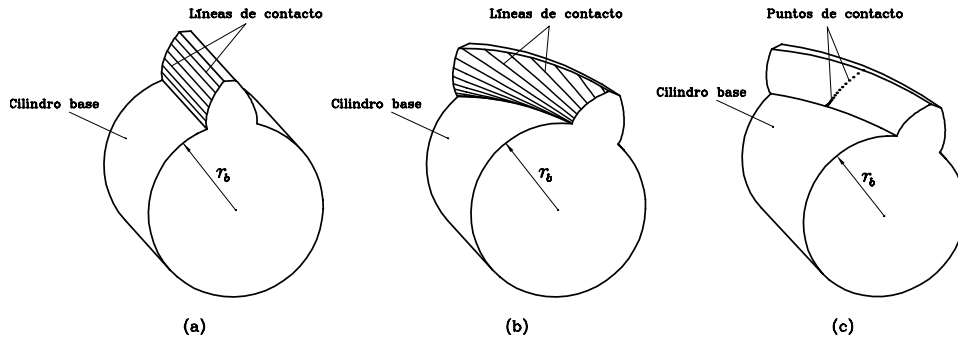


Figura 1.1.2: Tipos de contacto en engranajes: (a) rectos con ejes paralelos, (b) helicoidales con ejes paralelos, y (c) helicoidales con ejes cruzados.

Si bien la acción conjugada representa unas condiciones ideales de funcionamiento, lo cierto es que las condiciones teóricas definidas en la generación de las superficies nunca se dan en el funcionamiento real de la transmisión. Los errores de alineación de la transmisión, de fabricación de las superficies o la propia deformación elástica de las mismas como consecuencia de la carga aplicada, son los responsables de que la acción entre las superficies deje, en la mayoría de los casos, de ser conjugada. La relación m_{12} es entonces distinta de (1.1.1).

Los errores de alineación, fabricación y la deformación elástica de las superficies son los responsables de que la posición angular de la rueda respecto al piñón difiera de la posición teórica que debería tener si existiera acción conjugada. A este error en la posición angular se le denomina error de transmisión. Matemáticamente, el error en la posición angular de la rueda viene dado como

$$\Delta\phi_2(\phi_1) = \left(\phi_2(\phi_1) - \phi_2(\phi_1^{(0)}) \right) - \frac{N_1}{N_2} \left(\phi_1 - \phi_1^{(0)} \right) \quad (1.1.3)$$

donde ϕ_2 indica la posición angular de la rueda, ϕ_1 la posición angular del piñón, y $\phi_1^{(0)}$ un valor inicial de referencia del ángulo de giro del piñón. En

[Welbourn, 1979; Smith, 1983; Townsend, 1991] se suele distinguir entre errores de transmisión sin carga y errores de transmisión con carga. Los primeros consideran un comportamiento rígido de las superficies y tienen en cuenta los errores de alineación y fabricación. Los segundos consideran un comportamiento elástico y tienen en cuenta además la deformación elástica de las superficies. Los errores de transmisión constituyen la fuente principal de ruido y vibración en los engranajes [Townsend, 1991; Smith, 1999], como se ha demostrado en investigaciones recientes [Palmer & Munro, 1995].

En la actualidad se están aplicando distintas modificaciones a los perfiles de los dientes de los engranajes con el fin de reducir los errores de transmisión. Las primeras modificaciones se aplicaron hacia el año 1958 por Harris [Harris, 1958]. Estas modificaciones consisten básicamente en la eliminación de material en los bordes de las superficies y permiten minimizar los errores de transmisión para la carga de diseño (véase [Gregory *et al.*, 1963; Optiz, 1968; Bradley, 1973; Welbourn, 1979; Drago, 1980]). Sin embargo, estas modificaciones no afectan a toda la superficie por lo que la naturaleza del contacto teórico sigue siendo lineal en el caso de engranajes con ejes paralelos.

En el caso de contacto lineal, se ha demostrado analíticamente que dicho tipo de contacto es muy sensible a los errores de alineación y fabricación [Litvin, 1994]. En la Figura 1.1.3 se muestra el efecto de la desalineación angular responsable de que los ejes de piñón y rueda se crucen en el caso de engranajes rectos. Como consecuencia de este error de alineación, las superficies Σ_1 del piñón y Σ_2 de la rueda dejan de contactar a lo largo de la línea L_1L_2 (Fig. 1.1.3(a)) y el contacto se desplaza al punto M en el borde E_1 (Fig. 1.1.3(b)). El camino de contacto tiene lugar entonces a lo largo del borde E_1 , como se muestra en la Figura 1.1.4(a), con lo que es de esperar un aumento considerable de las tensiones de contacto aunque lo más importante es la función resultante de errores de transmisión (Figura 1.1.4(b)). Dicha función es una función discontinua en diente de sierra y es la principal fuente de ruido y vibración en la transmisión.

La localización del contacto en engranajes helicoidales fue propuesta por Novikov [Novikov, 1956], basándose en la utilización de cremalleras con perfiles de círculo distintos y tangentes en un punto para la generación de piñón

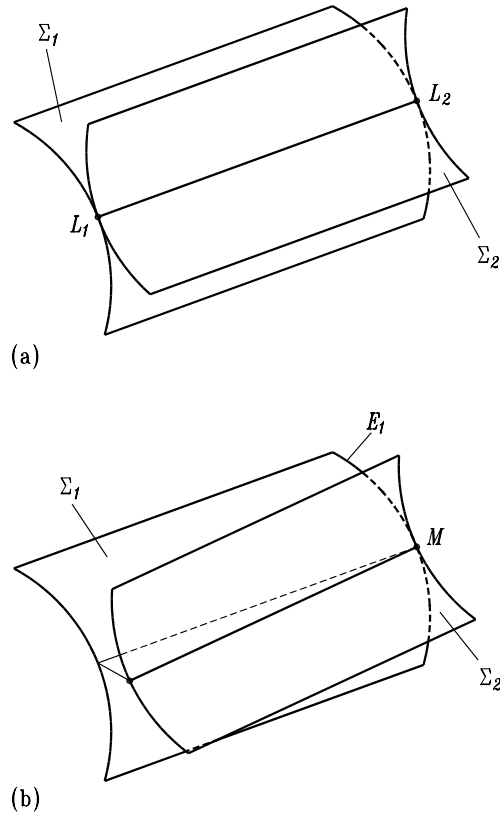
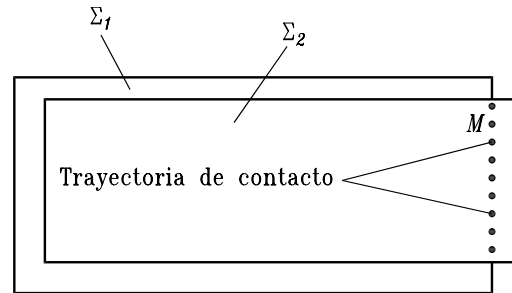
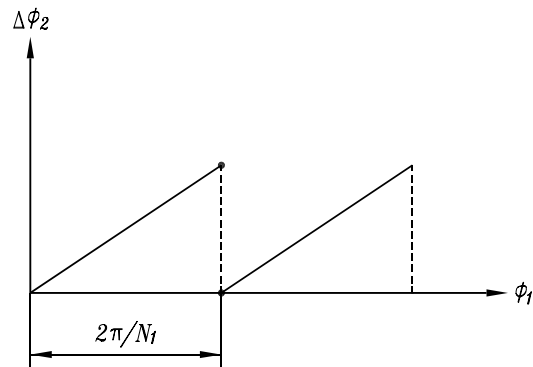


Figura 1.1.3: Superficies de dientes de engranajes rectos en: (a) contacto lineal y (b) contacto en el borde.

y rueda. Aunque el principio de utilización de herramientas de geometría diferente ha sido aplicado en la generación de engranajes cónicos espirales y en transmisiones hipoidales antes de la invención de Novikov, sin embargo éste fue el primero que aplicó esta idea en engranajes helicoidales. Wildhaber [Wildhaber, 1962] propuso igualmente la utilización del perfil de círculo, pero utilizando la misma cremallera en la generación del piñón y de la rueda. La utilización del perfil de círculo permite obtener la tangencia interior entre las superficies del piñón y de la rueda y con ello aumentar el área de contacto respecto al caso de tangencia exterior, reduciendo de esta forma las tensiones de contacto. Esta es la característica principal de las transmisiones del tipo Novikov-Wildhaber (de ahora en adelante transmisiones N-W). La



(a)



(b)

Figura 1.1.4: (a) Trayectoria de contacto y (b) errores de transmisión en una transmisión de engranajes rectos con contacto en el borde.

localización del contacto en la versión propuesta por Novikov permite además estabilizar el contacto frente a los errores de alineación y montaje. Este tipo de transmisiones fueron consideradas en su momento como una gran contribución a los engranajes helicoidales y muchos investigadores han realizado contribuciones al desarrollo de las mismas (véase por ejemplo [Niemann, 1961; Litvin, 1962; Wells & Shotter, 1962; Davidov, 1963; Chironis, 1967]). Kudrjajtsev [Kudrjajtsev, 1966] en Rusia y Winter y Looman [Winter & Looman, 1961] en Alemania propusieron un proceso de fabricación mediante dos cortadores sinfín cuyo diseño está basado en dos cremalleras diferentes. A pesar de la investigación desarrollada, el uso de las transmisiones N-W se ha visto muy limitado debido a las siguientes carencias:

- (1) La función de errores de transmisión cuando aparecen desalineaciones es una función discontinua, por lo que existe una gran aceleración, fuente de ruido y vibración, en la transferencia del engrane entre parejas de dientes consecutivas.
- (2) Las tensiones de flexión son elevadas debido a la localización del contacto.
- (3) Se requieren formas más complicadas de las herramientas de fabricación.

Más tarde se propusieron las transmisiones N-W con dos zonas de engrane, utilizando perfiles más complicados con doble arco de círculo que permiten el contacto simultáneo en dos zonas con el fin de reducir las tensiones de flexión, manteniendo la ventaja de tensiones de contacto bajas. Este tipo de transmisiones han sido normalizadas en Rusia (ver [Kudrjajtsev, 1980]) y en China [Chinese Standard, 1981]. No obstante, las desventajas (1) y (3) comentadas anteriormente siguen existiendo.

Litvin y Tsay estudiaron en [Litvin & Tsay, 1985] la sensibilidad de las transmisiones N-W con perfil de arco de círculo a los errores de alineación, concretamente a los errores en la distancia entre ejes y en el ángulo entre ejes. En dicho trabajo los autores demuestran mediante la simulación del engrane y el análisis del contacto que el error en la distancia entre ejes no produce errores de transmisión, pero sí el desplazamiento del camino de contacto. Igualmente demuestran que el error en el ángulo entre ejes produce el desplazamiento del camino de contacto y, lo que es más importante, errores de transmisión. Se proponen métodos para reducir la sensibilidad del desplazamiento del camino de contacto frente al error en la distancia entre ejes modificando el ángulo de presión de las cremalleras, y al error en el ángulo entre ejes modificando el ángulo de carga. Con la modificación propuesta para el error en el ángulo entre ejes se observa además una reducción de los errores de transmisión, aunque la función de los mismos sigue siendo discontinua.

Litvin y Lu estudiaron en [Litvin & Lu, 1995] el comportamiento de las transmisiones N-W con doble arco de círculo frente a los errores de alineación. El error en la distancia entre ejes no produce errores de transmisión pero el contacto simultáneo en las dos zonas de engrane se ve limitado a un área

menor. Debido al error en el ángulo entre ejes, el contacto sólo tiene lugar en una de las zonas de engrane, aunque el juego en la otra zona de engrane es muy pequeño ($10 \mu\text{m}$ para un error de $3'$ en el ejemplo presentado) por lo que es de esperar que entre en contacto como consecuencia de las deformaciones elásticas. El resultado más importante es la discontinuidad en la función de errores de transmisión, similar a la representada en la Figura 1.1.4(b).

Litvin et al. han propuesto recientemente en el campo de las transmisiones cilíndricas helicoidales y rectas el doble abombamiento de las superficies de los dientes de los engranajes para la localización del contacto y el prediseño de una función parabólica de errores de transmisión que sea capaz de absorber los errores de transmisión producidos por las desalineaciones.

En el trabajo [Litvin *et al.*, 1995] se propone la localización del contacto en las transmisiones helicoidales con perfil de evolvente mediante la utilización de una cremallera con perfiles de círculo en la generación del piñón, mientras que la cremallera que genera la rueda es una convencional con perfiles rectos. Ambas cremalleras presentan perfiles tangentes en un punto. Se propone el abombamiento en la dirección longitudinal de la superficie de la rueda para conseguir una función parabólica de errores de transmisión, tanto en las transmisiones de N-W con doble arco de círculo como en las nuevas transmisiones modificadas de perfil de evolvente con contacto localizado. Para conseguir dicho abombamiento se propone utilizar una función parabólica en la relación entre el desplazamiento de la cremallera y el ángulo de giro de la rueda durante la generación. Se demuestra que la función parabólica de errores de transmisión absorbe las funciones lineales de errores de transmisión debidas a las desalineaciones. Se menciona que la fabricación de las nuevas transmisiones ha de estar basada en la utilización de cortadores sinfín y de máquinas de control numérico, aunque no se facilitan detalles de estos procesos de generación y en particular de cómo proporcionar a la transmisión el abombamiento longitudinal para prediseñar la función parabólica de errores de transmisión utilizando cortadores sinfín.

En el trabajo [Litvin *et al.*, 1996] se describen métodos para la localización del contacto en diferentes tipos de transmisiones como engranajes cilíndricos helicoidales y rectos, engranajes de cara, engranajes cónicos espirales y en-

granajes de tornillo sinfín. En el caso de engranajes rectos se propone la utilización de un disco de rectificado para conseguir la localización del contacto, modificando la distancia entre los ejes del disco y del piñón durante el proceso de generación. Dicha modificación está basada en la utilización de una función parabólica. El prediseño de la función parabólica de errores de transmisión se obtiene en este caso modificando el perfil del disco de rectificado que genera la rueda. Se proponen dos procedimientos para obtener el perfil del disco: (a) a partir de un perfil de evolvente cuyo círculo base es mayor que el círculo base teórico, y (b) a partir de un perfil modificado de evolvente obtenido de la aplicación de una relación no lineal entre el desplazamiento de la cremallera y el ángulo de giro de la rueda. En el caso de engranajes helicoidales, la localización del contacto y el prediseño de la función parabólica de errores de transmisión están basados en las ideas descritas en [Litvin *et al.*, 1995].

En el trabajo [Litvin *et al.*, 1999], se propone la localización del contacto en engranajes helicoidales con perfil de evolvente mediante el uso del perfil parabólico. Mientras la cremallera de la rueda es una cremallera convencional constituida por perfiles rectos, la cremallera del piñón está formada por perfiles parabólicos tangentes a los perfiles rectos de la cremallera de la rueda. En este trabajo se analiza el contacto en el borde en las transmisiones con perfil de evolvente cuando aparecen las desalineaciones y se justifica de esta forma la necesidad de localizar el contacto. Se muestra que la localización del contacto evita el desplazamiento del mismo al borde de las superficies. La localización del contacto, no obstante, es necesaria pero no suficiente, dado que la función de errores de transmisión se convierte, ante la presencia de desalineaciones, en una función cuasilineal discontinua fuente de ruido y vibración. Se justifica por tanto la necesidad de prediseñar una función parabólica de errores de transmisión, tal y como se propone en los trabajos anteriores [Litvin *et al.*, 1995].

En el trabajo [Litvin *et al.*, 2000c] se propone la localización del contacto en engranajes helicoidales utilizando perfiles parabólicos tanto en la cremallera del piñón como en la de la rueda, dando lugar a un tipo de transmisión más general que los autores denominan como nueva versión de las

transmisiones N-W. Los coeficientes parabólicos de ambos perfiles permiten ajustar la curvatura relativa y obtener tangencia interior entre las superficies del piñón y de la rueda, con lo que es posible aumentar la dimensión de la elipses de contacto y con ello reducir las tensiones de contacto y flexión respecto al caso de tangencia exterior. Esta nueva versión de las transmisiones N-W se caracteriza además por incorporar una función parabólica de errores de transmisión capaz de absorber las funciones lineales producidas por las desalineaciones. Se proponen para ello dos métodos de fabricación basados en la utilización de un disco de corte o rectificado y de un cortador sinfín. En ambos procesos la distancia entre los ejes del piñón y de la herramienta se modifica según una función parabólica durante el movimiento helicoidal relativo entre piñón y herramienta. El proceso de generación por cortador sinfín se describe sustituyendo la rotación del cortador por la traslación del mismo en la dirección axial, basándose en la idea de que el cortador y el piñón están simultáneamente engranando con la cremallera del piñón.

En el trabajo [Litvin *et al.*, 2001a] se propone el prediseño de la función parabólica de errores de transmisión utilizando el proceso de fabricación en el que el cortador es similar al engranaje con el que engrana el piñón. El proceso se basa en modificar la distancia entre ejes entre el piñón y el cortador según una función parabólica durante el movimiento de alimentación del cortador, de forma similar al caso de generación por cortador sinfín. El cortador del piñón se obtiene a partir de una cremallera con perfiles parabólicos con el fin de localizar el contacto, mientras que la rueda es generada de forma convencional.

Las ideas desarrolladas por Litvin *et al.* sobre localización del contacto y prediseño de la función parabólica de errores de transmisión en el caso de engranajes helicoidales y rectos con ejes paralelos han sido patentadas [Litvin *et al.*, 2001c].

En el caso de engranajes con ejes cruzados, el contacto está localizado (veáse Fig. 1.1.2(c)). Las desalineaciones angulares producen un desplazamiento del camino de contacto pero no producen errores de transmisión [Litvin, 1994]. No obstante, dependiendo de la sensibilidad de la transmisión a las desalineaciones, se puede obtener contacto en el borde en una o en las

dos superficies en contacto. Los errores de transmisión en este caso son debidos únicamente a la deformación elástica de las superficies bajo carga o a la existencia de contacto en el borde.

En el caso de engranajes con ejes paralelos, la localización del contacto puede obtenerse mediante la apropiada modificación de la superficie:

- (1) En dirección longitudinal cuando el camino de contacto sigue la dirección del perfil.
- (2) En dirección del perfil cuando el camino de contacto sigue la dirección longitudinal.

Igualmente, para proporcionar una función parabólica de errores de transmisión se necesita proporcionar un abombamiento a las superficies basado en una función parabólica:

- (1) En dirección del perfil cuando el camino de contacto sigue la dirección del perfil.
- (2) En dirección longitudinal cuando el camino de contacto sigue la dirección longitudinal.

El caso (1) anterior corresponde a los engranajes rectos y el caso (2) se aplica en los engranajes helicoidales. Pero en general, ambos tipos de modificaciones, en dirección del perfil y en dirección longitudinal, contribuyen a la localización del contacto y al prediseño de una función parabólica de errores de transmisión, dependiendo dicha contribución de la dirección del camino de contacto. Las Figuras 1.1.5(a) y 1.1.5(b) muestran, respectivamente, la superficie modificada en la dirección del perfil y la superficie modificada en ambas direcciones. En general es suficiente aplicar estas modificaciones en uno sólo de los elementos de la transmisión, normalmente el piñón por ser el elemento con menor número de dientes.

La Figura 1.1.6 muestra un ejemplo de superficie con doble abombamiento en la que se han representado los valores en micrómetros de material eliminado de la superficie con perfil de evolvente. Esta superficie sirve de referencia y se ha representado en un plano. La eliminación de material puede llevarse a cabo durante la fase final de fabricación, en el rectificado de las superficies.

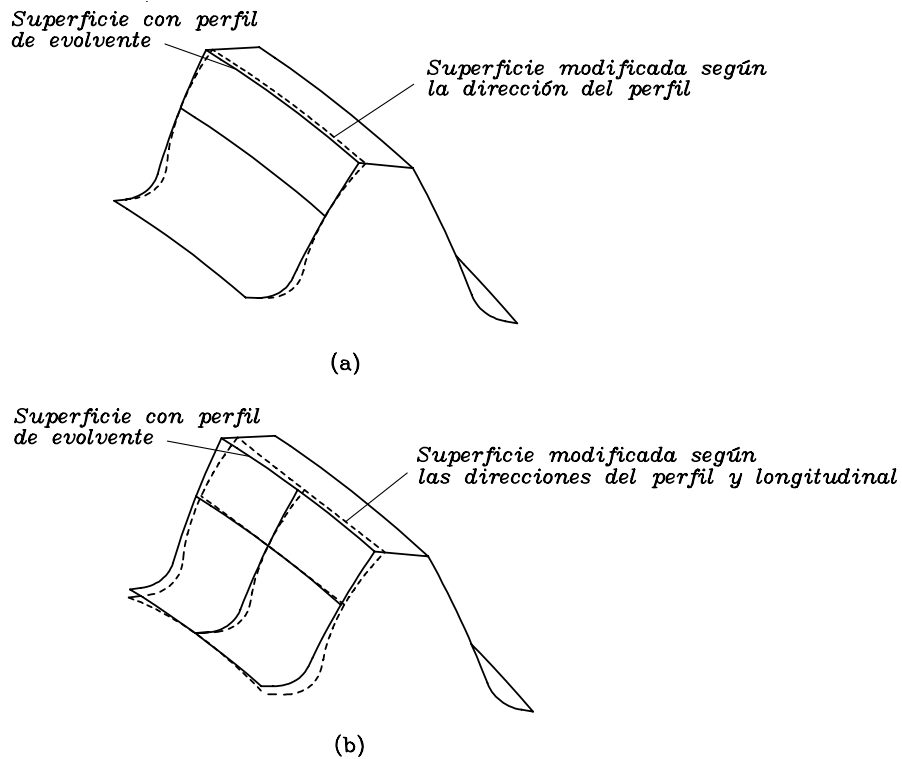


Figura 1.1.5: Superficie modificada: (a) en la dirección del perfil y (b) en direcciones del perfil y longitudinal.

El tipo de proceso de rectificado y las características de la superficie herramienta determinan la topografía de las superficies de contacto. El tipo de acabado superficial constituye otra fuente de ruido en las transmisiones de engranajes. Su optimización requiere un estudio de las superficies a nivel microscópico. En [Amini *et al.*, 1998] se citan algunos trabajos en este área de investigación. El presente trabajo, no obstante, tiene como uno de sus objetivos reducir los errores de transmisión debido a las desalineaciones angulares y esto requiere un tratamiento de las superficies a nivel macroscópico, quedando la optimización a nivel microscópico de la topografía de las superficies fuera de los objetivos de la presente Tesis Doctoral.

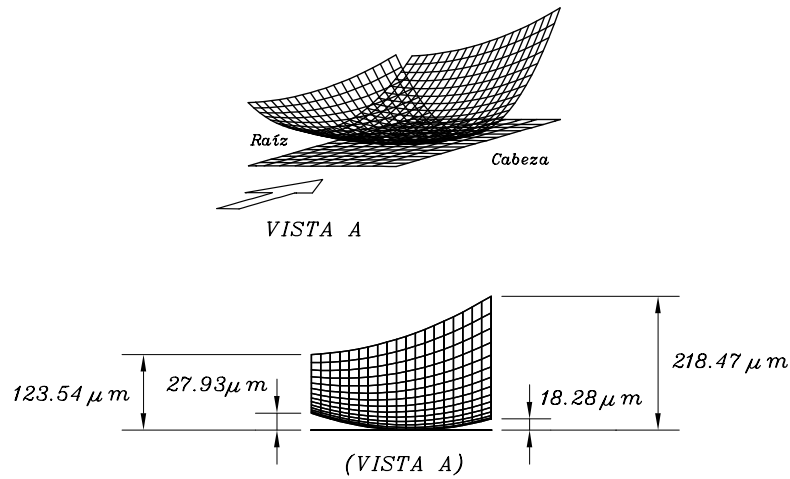


Figura 1.1.6: Ejemplo de superficie con doble abombamiento.

1.2. Objetivos

Los principales objetivos que se pretenden alcanzar con el desarrollo de la presente Tesis Doctoral son los siguientes:

- (1) Reducción del nivel de ruido y vibración en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales, mediante la localización del contacto y el prediseño de una función parabólica de errores de transmisión que sea capaz de absorber las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y/o fabricación.
- (2) Propuesta de métodos de localización del contacto frente a errores de alineación y/o fabricación en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales. Se sustituirá el contacto lineal por el contacto puntual entre superficies. Sin embargo, bajo carga, el contacto puntual entre superficies se extenderá sobre un área elíptica. Mediante la relación entre las curvaturas de las superficies en contacto, la elipse de contacto se diseñará con dimensiones suficientes para soportar la carga transmitida.
- (3) Propuesta de métodos para el prediseño de una función parabólica de

errores de transmisión en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales.

- (4) Mejora del reparto de carga en los extremos del ciclo de engrane. Se utilizarán perfiles parabólicos para las herramientas de generación y se proporcionarán funciones parabólicas a los procesos de fabricación del piñón de la transmisión. Esto permitirá prediseñar una función parabólica de errores de transmisión negativa, de modo que la rueda gire retrasada con respecto al piñón. Las deformaciones elásticas de los dientes de los engranajes en este caso mejorarán el reparto de carga entre pares de dientes en el momento en el que una pareja está terminando el ciclo de engrane y la siguiente pareja está empezando. Estos resultados se comprobarán mediante el análisis por elementos finitos de la transmisión utilizando modelos tridimensionales de tres o cinco pares de dientes.

- (5) Reducción de tensiones. La localización del contacto permitirá evitar el contacto en los bordes de las superficies de los dientes de los engranajes por lo que se espera una reducción de los niveles tensionales, tanto de contacto como de flexión, en engranajes con geometría modificada frente a engranajes con geometría de perfil de evolvente. También se estudiará la posibilidad de reducir las tensiones utilizando perfiles asimétricos en los lados conductor y conducido.

- (6) Desarrollo de programas de ordenador para la simulación del engrane y el contacto así como para la automatización del desarrollo de los modelos de elementos finitos sin la aplicación de programas de CAD. La reducción del tiempo de diseño de la transmisión se reducirá drásticamente y se evitará la pérdida de precisión en la generación del modelo sólido de la transmisión. Este enfoque permitirá la investigación de la formación del contacto y transferencia de engrane, así como detectar la existencia de contactos indeseables en los bordes de la superficie.

1.3. Metodología

La simulación del engrane y el estudio del contacto de las transmisiones de engranajes requiere, por un lado, el desarrollo de programas de ordenador para obtener los puntos teóricos de contacto entre superficies, el tamaño de las elipses de contacto y la función de errores de transmisión y, por otro lado, la aplicación de programas de análisis tensional por el método de los elementos finitos para el estudio de la formación del contacto y la determinación de las tensiones de contacto y flexión a lo largo del ciclo de engrane.

Para la simulación del engrane y el estudio del contacto se utilizan las superficies de los dientes que se obtienen en el proceso de generación a partir de la herramienta de corte. Los errores de fabricación se consideran en la disposición entre herramienta y engranaje y los errores de alineación se consideran en la disposición de la rueda en el sistema fijo de referencia. El punto de contacto entre las superficies de piñón y rueda se determina utilizando el algoritmo descrito en [Litvin, 1994] basado en la coincidencia de los vectores posición y en la colinealidad de las normales. Dicho punto de contacto se extiende sobre un área cuyas dimensiones corresponden aproximadamente a las de una elipse como consecuencia de las deformaciones elásticas [Johnson, 1985]. Según la teoría de Hertz del contacto elástico, la orientación de los ejes de simetría de la elipse y la relación entre los mismos dependen únicamente de las curvaturas y direcciones principales de las superficies en el punto de contacto, y no de la carga aplicada. La forma de las elipses es ligeramente más achatada que la forma de los contornos de separación constante entre las superficies [Johnson, 1985]. Para su determinación se utiliza el algoritmo descrito en [Litvin, 1994], el cual considera que la elipse tiene la misma forma que los contornos de separación constante entre las superficies, despreciándose el pequeño achatamiento que predice la teoría elástica del contacto. El tamaño de la elipse depende del parámetro de deformación elástica δ , que depende de la carga aplicada y del tipo de material. Generalmente, se considera un valor de δ de 0.006 mm, que corresponde a engranajes poco cargados [Litvin, 1994].

Los errores de transmisión obtenidos del análisis del contacto no tienen en

cuenta las deformaciones elásticas dado que la posición angular de la rueda se obtiene a partir de la determinación del punto de contacto entre superficies rígidas en contacto. Cabe preguntarse si las deformaciones elásticas afectan de forma importante al error máximo proporcionado por la función parabólica de errores de transmisión. Para responder a esta pregunta se ha de tener en cuenta que los errores de transmisión debidos a las deformaciones elásticas dependen de la variación del valor de deformación elástica a lo largo del ciclo de engrane y no del valor en sí mismo [Litvin, 1998]. La figura 1.3.1 muestra la función de errores de transmisión para tres ciclos de engrane obtenidos del programa de TCA, es decir, sin considerar las deformaciones elásticas. Si se considera como referencia el piñón, en A la deformación elástica llevará a la rueda a ocupar la posición A', mientras que en B la deformación elástica llevará la rueda a ocupar la posición B'. Es lógico pensar que la magnitud AA' es mayor que la magnitud BB' dado que en A la carga está siendo transmitida por sólo una pareja de dientes mientras que en B habrá dos parejas de dientes compartiendo la carga. Es evidente entonces que el nuevo error máximo A'B' es ligeramente inferior a AB. Por tanto, el error máximo de transmisión como consecuencia de los errores de alineación y de las deformaciones elásticas será similar e incluso inferior al error máximo de transmisión debido únicamente a los errores de alineación. El aumento de carga suaviza la función resultante de errores de transmisión y disminuye el ruido y la vibración de la transmisión con respecto a la misma menos cargada, siempre que no haya un aumento considerable de los errores de alineación como consecuencia del aumento de la carga.

La aplicación de programas de elementos finitos para el análisis tensional de las transmisiones de engranajes permite estudiar la formación del contacto y la determinación de las tensiones de contacto y flexión a lo largo del ciclo de engrane. Los modelos de elementos finitos se desarrollan partiendo de la información obtenida del análisis del contacto para una determinada posición de contacto del piñón y la rueda. Los resultados obtenidos permiten confirmar la orientación de las elipses instantáneas de contacto y determinar el tamaño real de las mismas para la carga real a transmitir. El segundo objetivo es determinar los niveles tensionales de contacto y flexión para comparar

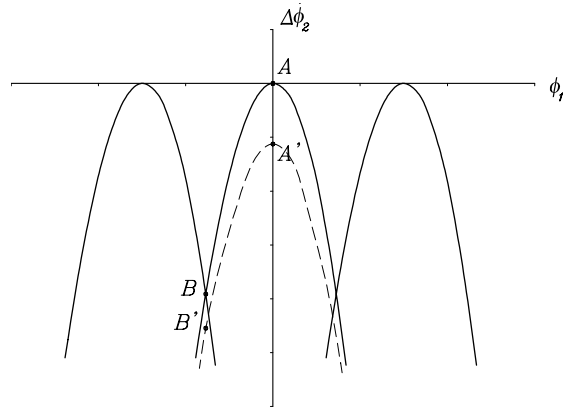


Figura 1.3.1: Función parabólica de errores de transmisión e influencia de las deformaciones elásticas.

las distintas geometrías. El modelo de elementos finitos considera la carga a través de un par torsor que actúa en el eje del piñón mientras la base de la rueda se considera empotrada. Aunque se trata de un modelo de carga cuasi-estático, el hecho de que la formación del contacto sea independiente de las velocidades de giro de los engranajes, y el hecho de que los niveles tensionales se utilicen como referencia para comparar los distintos tipos de geometría, justifican la utilización de dicho modelo. A la hora de comparar las distintas geometrías con el modelo cuasiestático es importante considerar las distintas transmisiones con un mismo nivel de error de transmisión, de manera que los efectos dinámicos sean similares. En el caso de la geometría de perfil de evolvente el modelo cuasiestático de carga arroja valores superiores de tensiones de contacto y flexión como consecuencia del contacto en el borde que las obtenidas en la realidad. Dado que la función de errores de transmisión es además discontinua, los efectos dinámicos serán más perjudiciales en este tipo de transmisión que en aquellas con una función parabólica continua de errores de transmisión.

1.4. Estructura y planteamiento

La presente Tesis Doctoral se ha estructurado en los siguientes capítulos:

- Capítulo 1: Introducción y objetivos.
- Capítulo 2: Fundamentos teóricos.
- Capítulo 3: Engranajes cilíndricos con perfil de evolvente.
- Capítulo 4: Engranajes cilíndricos con geometría modificada. Generación por cremallera.
- Capítulo 5: Engranajes cilíndricos con geometría modificada. Generación real por herramienta.
- Capítulo 6: Aplicación de engranajes cilíndricos en transmisiones con ejes que se intersectan: Engranajes de cara.
- Capítulo 7: Resultados y conclusiones.

En el presente Capítulo se ha realizado una breve reseña histórica de las primeras aportaciones a la teoría de engranajes y a la tecnología de fabricación y diseño de los engranajes. Así mismo, se han descrito las principales aportaciones al problema de la localización del contacto y reducción del ruido y vibración en las transmisiones por engranajes durante los últimos años y que han configurado el estado de la ciencia en el momento del inicio de la investigación que se presenta en este trabajo.

En el Capítulo 2 se presentan las bases teóricas de la teoría de engranajes moderna en las que se ha basado el desarrollo del presente trabajo. Se definen las condiciones necesarias y suficientes de existencia de la envolvente a una familia de superficies. Se formulan las relaciones cinemáticas necesarias para la resolución de los problemas básicos de la teoría de engranajes, tales como la determinación de las singularidades en la envolvente a una familia de superficies, relaciones entre las curvaturas y direcciones principales de curvatura de las superficies en el punto de contacto y determinación de la elipse de contacto entre superficies con contacto localizado. Se establecen las bases del análisis del contacto en engranajes con contacto localizado con el fin de determinar el camino de contacto sobre las superficies y la función de errores de transmisión. Se describe la interacción de la función parabólica con una función lineal, lo que constituye la base para la absorción de las funciones lineales de errores

de transmisión producidas por los errores de alineación y fabricación. Finalmente, se propone una herramienta de análisis de las transmisiones basada en el método de los elementos finitos y que permite la construcción automática y parametrizada del modelo de la transmisión.

En el Capítulo 3 se describen los engranajes cilíndricos de perfil de evolvente. Se consideran en primer lugar los engranajes con ejes cruzados. Su estudio permite analizar las condiciones de contacto en el caso más general y entender cómo dichas condiciones se particularizan en engranajes con ejes paralelos, ya sean helicoidales o rectos. En particular, se estudia la sensibilidad de la transmisión frente a los errores de alineación para diferentes valores del ángulo entre ejes y se relaciona la misma con el desplazamiento de la línea de acción. Se introduce el concepto de diseño canónico de una transmisión con ejes cruzados, el cual constituye la base para el diseño de engranajes no convencionales.

En el Capítulo 4 se describe la generación de los engranajes cilíndricos con ejes paralelos a partir de dos cremalleras con geometría distinta, una para el piñón y otra para la rueda. Mientras que la geometría de perfil de evolvente está basada en la utilización de una cremallera común de perfiles rectos que genera simultáneamente el piñón y la rueda, la modificación propuesta está basada en la utilización de dos cremalleras con perfiles distintos de tipo parabólico. Novikov ya propuso la utilización de cremalleras con perfiles de círculo distintos en engranajes helicoidales con el fin de localizar el contacto. El perfil parabólico, no obstante, incrementa la rigidez del diente con respecto al perfil de círculo y posibilita además la obtención de una función parabólica de errores de transmisión en engranajes rectos. La generación por cremallera presentada en este capítulo constituye la base para la determinación de la geometría de las herramientas de corte.

En el Capítulo 5 se determina la geometría de las herramientas de corte a partir de las superficies modificadas según la dirección del perfil del piñón y/o de la rueda obtenidas en el Capítulo 4. Obtenida la herramienta, se determinan los parámetros del proceso de fabricación con el fin de obtener la modificación de la superficie del piñón y/o de la rueda en la dirección longitudinal. La modificación de las superficies en la dirección del perfil es transmitida di-

rectamente de la geometría de la herramienta. Se han propuesto tres procesos de fabricación basados en la utilización de discos de corte o rectificadas y de cortadores sinfín: (i) mediante disco de corte o rectificadas, modificando la distancia entre los ejes del disco y del piñón durante el proceso de generación, (ii) mediante cortador sinfín, modificando la distancia entre los ejes del cortador y del piñón durante la generación, y (iii) mediante cortador sinfín, modificando la relación entre el giro del piñón y el desplazamiento del cortador durante el movimiento de alimentación del cortador.

Así mismo, se realiza el análisis tensional por el método de los elementos finitos de las transmisiones con geometría modificada y con geometría de perfil de evolvente. Se comparan los niveles tensionales de contacto y flexión y se estudia la formación del contacto frente a posibles errores de alineación. Para ello, se ha desarrollado un algoritmo que posibilita la construcción parametrizada y totalmente automática de los modelos de elementos finitos en cada uno de los puntos de contacto dados por el TCA. El desarrollo de dicho algoritmo permite disponer de una herramienta de análisis muy potente para el diseño de tales transmisiones. Se ha estudiado además la utilización de perfiles asimétricos para la reducción de tensiones.

En el Capítulo 6 se presenta una aplicación específica de los engranajes cilíndricos correspondiente a las transmisiones de engranajes de cara. Éste es un tipo de transmisión donde los ejes se intersectan y uno de los engranajes presenta el dentado sobre la cara del engranaje. Los engranajes de cara, o "face gears", tienen un amplio campo de utilización debido a su sencillez constructiva y precisión de fabricación en comparación con los engranajes cónicos espirales.

En el Capítulo 7 se resumen los resultados obtenidos y se exponen las principales conclusiones de la presente Tesis Doctoral.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1. Introducción

La teoría de engranajes es una rama de la ciencia relacionada con la geometría diferencial, el diseño y la fabricación. A continuación, se exponen los fundamentos teóricos de este trabajo, los cuales están relacionados con la generación de superficies, determinación de singularidades y análisis del contacto, y vienen explicados ampliamente en [Litvin, 1989; Litvin, 1994; Litvin, 1998].

2.2. Envolverte a una familia de superficies

La acción conjugada entre superficies en contacto lineal y la generación de las mismas mediante una superficie herramienta (cremallera, disco, fresa, etc.) están basadas en el concepto de envolvente a una familia de superficies. Zalgaller ha contribuido de forma importante a la teoría de las envolventes y expuso las condiciones necesarias y suficientes de existencia de la envolvente a una familia de superficies [Zalgaller, 1975; Zalgaller & Litvin, 1977].

La determinación de la superficie generada Σ_2 a partir de la superficie generadora Σ_1 requiere la utilización de los sistemas de coordenadas S_1 , S_2 y S_f , rígidamente conectados a Σ_1 , Σ_2 y a la carcasa de la transmisión donde se encuentran montados los ejes de rotación de Σ_1 y Σ_2 , respectivamente.

La determinación de la superficie Σ_2 está basada en el siguiente proceso:

- (i) La superficie Σ_1 se considera conocida y viene representada por

$$\mathbf{r}_1(u, \theta) \in C^1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta} \neq 0, \quad (u, \theta) \in E \quad (2.2.1)$$

donde (u, θ) son los parámetros de superficie, E es el dominio en el que están definidos los parámetros, y C^1 indica que la función vectorial $\mathbf{r}_1(u, \theta)$ tiene derivadas parciales continuas hasta al menos el primer orden. La desigualdad en (2.2.1) indica que Σ_1 es una superficie regular.

- (ii) La localización y orientación de los ejes de la transmisión y la función $\psi_2(\psi_1)$, donde ψ_1 y ψ_2 son los ángulos de rotación de las superficies Σ_1 y Σ_2 , se consideran conocidos.
- (iii) La transformación de coordenadas del sistema S_1 al sistema S_2 permite obtener la familia de superficies de Σ_1 en el sistema S_2 como

$$\mathbf{r}_2(u, \theta, \psi) = \mathbf{M}_{21}(\psi)\mathbf{r}_1(u, \theta) \quad (2.2.2)$$

donde ψ es el parámetro generalizado del movimiento. La matriz $\mathbf{M}_{21}(\psi)$ se expresa como $\mathbf{M}_{21}(\psi) = \mathbf{M}_{2f}(\psi_2)\mathbf{M}_{f1}(\psi_1)$. Normalmente, $\psi = \psi_1$ y $\psi_2 = \psi_2(\psi_1) = \psi_2(\psi)$. Para un valor dado de ψ , la Ec. (2.2.2) representa la superficie Σ_1 en el sistema S_2 .

- (iv) La envolvente Σ_2 resulta tangente a cada una de las superficies de la familia de superficies definida en (2.2.2). La determinación de Σ_2 requiere la consideración simultánea de la ecuación vectorial (2.2.2) y la ecuación

$$f(u, \theta, \psi) = 0 \quad (2.2.3)$$

denominada ecuación de engrane.

Las matrices \mathbf{M} utilizadas son de orden 4×4 ya que se utilizan coordenadas homogéneas. La utilización de coordenadas homogéneas fue propuesta para la transformación de coordenadas en la teoría de mecanismos por [Denavit & Hartenberg, 1955] y [Litvin, 1955].

En la teoría de engranajes se consideran dos procedimientos para la obtención de la Ec. (2.2.3).

Procedimiento 1. Este método fue propuesto en geometría diferencial y está basado en las siguientes consideraciones:

- (1) Consideremos que la ecuación de engrane (2.2.3) se satisface en $P(u^{(0)}, \theta^{(0)}, \psi^{(0)})$. La función $f \in C^1$ es conocida y supongamos que una de sus tres derivadas parciales (f_u, f_θ, f_ψ), por ejemplo f_u , es distinta de cero en P . Entonces, por el teorema de existencia de la función implícita [Korn and Korn, 1968], la Ec. (2.2.3) puede resolverse en las proximidades de $P(u^{(0)}, \theta^{(0)}, \psi^{(0)})$ por la función $u(\theta, \psi)$.
- (2) La superficie Σ_2 puede ser representada entonces como $\mathbf{r}_2(\theta, \psi, u(\theta, \psi))$. Consideremos dos vectores tangentes a Σ_2

$$\mathbf{R}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \mathbf{R}_\psi = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \psi} \quad (2.2.4)$$

- (3) La normal $\mathbf{N}_2^{(1)}$ a la superficie Σ_1 en el sistema S_2 viene dada como

$$\mathbf{N}_2^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} \quad (2.2.5)$$

donde el subíndice “2” en $\mathbf{N}_2^{(1)}$ indica que la normal se representa en el sistema S_2 mientras que el superíndice “(1)” indica que se está considerando la normal a Σ_1 .

- (4) Si la envolvente Σ_2 existe, ésta está en tangencia con Σ_1 . Por lo tanto, Σ_1 y Σ_2 deben tener un plano tangente común. El plano tangente $\Pi_2^{(2)}$ a Σ_2 viene definido por la pareja de vectores \mathbf{R}_θ y \mathbf{R}_ψ . El plano tangente $\Pi_2^{(1)}$ a Σ_1 viene determinado por la pareja de vectores $\partial \mathbf{r}_2 / \partial u$ y $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \theta$. El vector \mathbf{R}_θ pertenece además al plano $\Pi_2^{(1)}$. Las superficies Σ_1 y Σ_2 tendrán un plano tangente común si el vector $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \psi$ pertenece además al plano $\Pi_2^{(1)}$. La condición de que los vectores $\partial \mathbf{r}_2 / \partial u$, $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \theta$ y $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \psi$ pertenezcan al mismo plano viene dada por la ecuación

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \psi} = 0, \quad (2.2.6)$$

la cual representa la condición necesaria de existencia de la envolvente, y se la conoce como *ecuación de engrane*.

Procedimiento 2. Este método está basado en las siguientes consideraciones:

- (1) El producto vectorial en la Ec. (2.2.6) representa en el sistema S_2 la normal a Σ_1 (ver Ec. (2.2.5)).
- (2) El vector $\partial \mathbf{r}_2 / \partial \psi$ es colinear con el vector velocidad $\mathbf{v}_2^{(12)}$, el cual representa la velocidad relativa de un punto de Σ_1 con respecto al punto coincidente en Σ_2 . Por tanto, la Ec. (2.2.6) se puede expresar

$$\mathbf{N}_2^{(1)} \cdot \mathbf{v}_2^{(12)} = f(u, \theta, \psi) = 0 \quad (2.2.7)$$

- (3) El producto escalar en (2.2.7) es independiente del sistema de coordenadas utilizado. Por tanto,

$$\mathbf{N}_i^{(1)} \cdot \mathbf{v}_i^{(12)} = f(u, \theta, \psi) = 0 \quad (i = 1, f, 2) \quad (2.2.8)$$

La determinación de la ecuación de engrane (2.2.8) es más sencilla si se considera el sistema $i = 1$ ó $i = f$. La Ec. (2.2.8) fue propuesta casi simultáneamente por Dudley y Poritsky, Dadidov, Litvin, Shishkov y Saari [Litvin, 1998]. Litvin ha demostrado que la Ec. (2.2.8) es la condición necesaria de existencia de la envolvente a una familia de superficies [Litvin, 1989].

En el caso de engranajes rectos, la ecuación de engrane se puede representar como

$$\mathbf{T}_i^{(1)} \times \mathbf{v}_i^{(12)} = \mathbf{0} \quad (2.2.9)$$

o bien

$$\left(\mathbf{T}_i^{(1)} \times \mathbf{v}_i^{(12)} \right) \cdot \mathbf{k}_i = 0 \quad (i = 1, f, 2) \quad (2.2.10)$$

donde $\mathbf{T}_i^{(1)}$ es el vector tangente al perfil, $\mathbf{v}_i^{(12)}$ es la velocidad de deslizamiento y \mathbf{k}_i es el vector unitario según el eje z (suponiendo que el plano de engrane se encuentra en el plano de los ejes x e y).

En el caso de engranajes rectos, la normal común a los perfiles en el punto de tangencia pasa por el centro instantáneo de rotación [Willis, 1841]. En el caso de engranajes con ejes que se intersectan, la normal común pasa a

través del eje instantáneo de rotación. La ecuación de engrane en el caso de engranajes con ejes que se intersectan viene dada por

$$\frac{X_i - x_i}{\mathbf{N}_{x_i}^{(1)}} = \frac{Y_i - y_i}{\mathbf{N}_{y_i}^{(1)}} = \frac{Z_i - z_i}{\mathbf{N}_{z_i}^{(1)}} \quad (2.2.11)$$

donde (X_i, Y_i, Z_i) son las coordenadas de un punto del eje instantáneo de rotación, (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas de un punto de la superficie generadora o conductora, y $(\mathbf{N}_{x_i}^{(1)}, \mathbf{N}_{y_i}^{(1)}, \mathbf{N}_{z_i}^{(1)})$ son las componentes de la normal a la superficie generadora Σ_1 .

2.3. Condiciones suficientes de existencia de la envolvente a una familia de superficies

Las condiciones suficientes de existencia de la envolvente a una familia de superficies garantizan que la envolvente existe, es una superficie regular y es tangente a cada una de las superficies de la familia a lo largo de una línea. Estas condiciones fueron descritas por Zalgaller [Zalgaller, 1975] en la teoría general de envolventes y adaptadas por Litvin a la teoría de engranajes [Zalgaller & Litvin, 1977; Litvin, 1994]:

- (i) Se considera la familia de superficies $\mathbf{r}(u, \theta, \psi) \in C^2$.
- (ii) Se designa por $M(u^{(0)}, \theta^{(0)}, \psi^{(0)})$ el conjunto de parámetros donde se satisfacen las siguientes condiciones:

- (1) La ecuación de engrane:

$$f(u, \theta, \psi) = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta) \cdot \mathbf{r}_\psi = 0 \quad (2.3.1)$$

- (2) La superficie generadora de la familia, Σ_1 , es una superficie regular:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta \neq 0 \quad (2.3.2)$$

- (3) La desigualdad:

$$|f_u| + |f_\theta| \neq 0 \quad (2.3.3)$$

(4) La desigualdad:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\psi)f_u + (\mathbf{r}_\psi \times \mathbf{r}_u)f_\theta + (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\theta)f_\psi \neq 0 \quad (2.3.4)$$

La verificación de las condiciones de (1) a (4) permiten establecer en el entorno de M que la envolvente Σ_2 a la familia de superficies $\mathbf{r}(u, \theta, \psi)$ existe como una superficie regular, contacta con la superficie Σ_1 a lo largo de una línea de tangencia, y la normal a Σ_2 es colinear con la normal a Σ_1 . La función vectorial $\mathbf{r}(u, \theta, \psi)$ y la ecuación de engrane $f(u, \theta, \psi) = 0$, consideradas simultáneamente, representan en el entorno de M la superficie envolvente Σ_2 a través de tres parámetros relacionados. La existencia de dicha envolvente en el dominio de valores de (u, θ, ψ) requiere que las condiciones de (1) a (4) se verifiquen en todo el dominio.

Demostración. Consideremos que la desigualdad (2.3.3) se satisface porque se verifica $f_u \neq 0$. Entonces, por el teorema de existencia de la función implícita, la Ec. (2.3.1) puede ser resuelta por la función $u(\theta, \psi) \in C^1$. Diferenciando la Ec. (2.3.1), se obtiene

$$f_u u_\theta + f_\theta = 0 \quad f_u u_\psi + f_\psi = 0 \quad (2.3.5)$$

$$u_\theta = -\frac{f_\theta}{f_u} \quad u_\psi = -\frac{f_\psi}{f_u} \quad (2.3.6)$$

De las ecuaciones (2.3.6) y (2.2.4) se obtiene

$$\mathbf{R}_\theta = \mathbf{r}_\theta - \frac{f_\theta}{f_u} \mathbf{r}_u \quad \mathbf{R}_\psi = \mathbf{r}_\psi - \frac{f_\psi}{f_u} \mathbf{r}_u \quad (2.3.7)$$

El producto vectorial $\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\psi$ corresponde a la normal a la envolvente \mathbf{N} , la cual verifica la condición dada en (2.3.4). Por tanto la envolvente es una superficie regular. Por otro lado, dado que se verifica la condición dada en (2.3.1), el plano tangente a la superficie Σ_1 , definido por los vectores \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_θ , coincide con el plano tangente a la envolvente definido por los vectores \mathbf{R}_θ y \mathbf{R}_ψ , por lo que la normal a la envolvente es colinear con la normal a la superficie Σ_1 en el punto de tangencia M . La demostración es similar si se verifica $f_\theta \neq 0$ en vez de $f_u \neq 0$.

Representación de la envolvente Σ_2 en forma biparamétrica. La representación de Σ_2 en función de dos parámetros está basada en las siguientes consideraciones:

- (i) Supóngase que la desigualdad (2.3.3) se satisface porque

$$f_u \neq 0 \quad (2.3.8)$$

- (ii) El teorema de existencia de la función implícita establece que, debido a la observación de la desigualdad (2.3.8), la ecuación de engrane (2.3.1) puede ser resuelta en el entorno del punto M por la función

$$u = u(\theta, \psi) \quad (2.3.9)$$

- (iii) Entonces, la superficie Σ_2 puede ser representada como

$$\mathbf{R}_2(\theta, \psi) = \mathbf{r}_2(u(\theta, \psi), \theta, \psi) \quad (2.3.10)$$

- (iv) La normal a Σ_2 viene dada como

$$\mathbf{N}_2^{(2)} = \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \psi} \quad (2.3.11)$$

Un procedimiento similar es aplicable cuando la desigualdad (2.3.3) se satisface porque $f_\theta \neq 0$ en lugar de verificarse (2.3.8). En este caso la superficie envolvente se obtiene como

$$\mathbf{R}_2(u, \psi) = \mathbf{r}_2(u, \theta(u, \psi), \psi) \quad (2.3.12)$$

y su normal viene dada por

$$\mathbf{N}_2^{(2)} = \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial \psi} \quad (2.3.13)$$

2.4. Relaciones cinemáticas básicas

Las relaciones cinemáticas básicas propuestas por Litvin en [Litvin, 1994] relacionan las velocidades del punto de contacto y del vértice de la normal unitaria de las superficies en engrane.

La velocidad del punto de contacto viene dada por dos componentes: la de arrastre con la superficie y la relativa respecto a la superficie. Considerando la condición continua de tangencia entre las superficies en engrane, se tiene

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)} \quad (2.4.1)$$

donde $\mathbf{v}_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) es la velocidad relativa del punto de contacto sobre la superficie Σ_i . De forma similar, la relación entre las velocidades del vértice de la normal unitaria viene dada por

$$\dot{\mathbf{n}}_r^{(2)} = \dot{\mathbf{n}}_r^{(1)} + (\boldsymbol{\omega}^{(12)} \times \mathbf{n}) \quad (2.4.2)$$

donde $\dot{\mathbf{n}}_r^{(i)}$ ($i = 1, 2$) es la velocidad del vértice de la normal en su movimiento sobre la superficie y $\boldsymbol{\omega}^{(12)}$ es la velocidad angular relativa del engranaje 1 respecto al engranaje 2.

La ventaja de la utilización de las Ecuaciones (2.4.1) y (2.4.2) es que permiten la determinación de $\mathbf{v}_r^{(2)}$ y $\dot{\mathbf{n}}_r^{(2)}$ sin tener que utilizar las ecuaciones, en general muy complicadas, de la envolvente Σ_2 . A partir de (2.4.1) y (2.4.2), es posible resolver los principales problemas que se presentan en la teoría de engranajes: (i) determinación de singularidades en la superficie generada Σ_2 , (ii) determinación de las curvaturas principales en Σ_2 , y (iii) determinación de las dimensiones y orientación de las elipses instantáneas de contacto.

2.5. Determinación de singularidades en la superficie envolvente

La superficie generadora Σ_1 es una superficie regular por definición dado que se satisface la desigualdad $(\partial \mathbf{r}_1 / \partial u) \times (\partial \mathbf{r}_1 / \partial \theta) \neq 0$. La superficie a generar Σ_2 se obtiene como envolvente de la familia de superficies que Σ_1 describe en el sistema S_2 . La envolvente Σ_2 , no obstante, puede presentar singularidades. La aparición de puntos singulares en Σ_2 predice que durante la generación pueda aparecer el problema de la penetración.

La determinación de puntos singulares en Σ_2 puede llevarse a cabo mediante el teorema propuesto por Litvin en 1968 (véase su primera edición

en inglés en [Litvin, 1989]): si un punto M de la superficie Σ_2 es un punto singular, entonces se verifica en M la siguiente condición

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(1)} + \mathbf{v}^{(12)} = \mathbf{0} \quad (2.5.1)$$

La Ec. (2.5.1) y la ecuación diferencial de engrane

$$\frac{d}{dt} [f(u, \theta, \psi)] = 0 \quad (2.5.2)$$

permiten determinar una línea de puntos regulares L en Σ_1 que generan puntos singulares en Σ_2 . Delimitando la superficie Σ_1 con la línea L se evita la aparición de puntos singulares en Σ_2 . La obtención de dicha línea está basada en las siguientes consideraciones:

(i) La Ec. (2.5.1) se puede expresar como

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{v}_1^{(12)} \quad (2.5.3)$$

donde los vectores $\partial \mathbf{r}_1 / \partial u$, $\partial \mathbf{r}_1 / \partial \theta$ y $\mathbf{v}_1^{(12)}$ están representados en S_1 .

(ii) La Ec. (2.5.2) se puede expresar como

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} \quad (2.5.4)$$

(iii) Las Ecs. (2.5.3) y (2.5.4) representan un sistema de cuatro ecuaciones escalares con dos incógnitas: du/dt y $d\theta/dt$. Este sistema tiene solución si la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta} & -\mathbf{v}_1^{(12)} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \theta} & -\frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} \end{bmatrix} \quad (2.5.5)$$

tiene rango $r = 2$. Esto supone que

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & -v_{x_1}^{(12)} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} & -v_{y_1}^{(12)} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \theta} & -\frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.6)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & -v_{x_1}^{(12)} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta} & -v_{z_1}^{(12)} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \theta} & -\frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.7)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} & -v_{y_1}^{(12)} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta} & -v_{z_1}^{(12)} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial \theta} & -\frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.8)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} & -v_{x_1}^{(12)} \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} & -v_{y_1}^{(12)} \\ \frac{\partial z_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta} & -v_{z_1}^{(12)} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.5.9)$$

La ecuación (2.5.9) representa la ecuación de engrane $f(u, \theta, \psi) = 0$ y no se utiliza para la determinación de las singularidades. La condición de que los determinantes Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 sean iguales a cero se puede expresar como

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = F(u, \theta, \psi) = 0 \quad (2.5.10)$$

Con el fin de evitar las singularidades en Σ_2 , las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(u, \theta), \quad f(u, \theta, \psi) = 0, \quad F(u, \theta, \psi) = 0 \quad (2.5.11)$$

permiten determinar la línea L sobre Σ_1 y delimitar dicha superficie.

En la mayoría de los casos, para obtener $F = 0$, es suficiente utilizar cualquiera de las tres siguientes ecuaciones:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0 \quad (2.5.12)$$

2.6. Relación entre las curvaturas de las superficies en contacto

Sean Σ_1 y Σ_2 dos superficies en contacto describiendo un movimiento conocido durante el cual ambas superficies son tangentes. Estas condiciones corresponden a dos casos típicos: (i) la generación de superficies a partir de una superficie herramienta y (ii) la transmisión de movimiento entre las superficies de dos engranajes.

Se deben considerar por tanto dos tipos de tangencia:

- (i) Las superficies Σ_1 y Σ_2 contactan en cada instante en una línea y Σ_2 es la envolvente de la familia de superficies generada por Σ_1 en el sistema S_2 solidario con Σ_2 . Este caso corresponde a la generación de superficies por herramienta.
- (ii) Las superficies Σ_1 y Σ_2 contactan en cada instante en un punto. Este caso corresponde al contacto entre las superficies de los dientes de los engranajes de una transmisión, donde el contacto ha sido localizado.

La determinación de la relación entre las curvaturas de las superficies en contacto es necesaria fundamentalmente para la síntesis local de las superficies y para la determinación de la orientación de las elipses instantáneas de contacto.

El principal inconveniente para resolver este problema es que la superficie generada Σ_2 , al ser la envolvente de una familia de superficies, viene dada por tres parámetros relacionados. La determinación de las curvaturas de Σ_2 es más complicada que en el caso de la superficie generadora Σ_1 , la cual viene dada por dos parámetros independientes. El método propuesto por Litvin [Litvin, 1994] permite simplificar este problema dado que las curvaturas de Σ_2 se pueden expresar como función de las curvaturas de la superficie generadora Σ_1 y de los parámetros del movimiento.

Conocida la superficie Σ_1 , el punto M de tangencia de las superficies (en caso de contacto lineal, M es uno de los puntos de la línea de contacto entre Σ_1 y Σ_2), la función $\psi_2(\psi_1)$ en M y la derivada $\partial\psi_2/\partial\psi_1$ en M , se pueden resolver los siguientes problemas:

- (i) Determinación de las relaciones entre las curvaturas y direcciones principales de las superficies en contacto en M .
- (ii) Determinación de las curvaturas normales en un plano normal al plano tangente común de las superficies en contacto en M .
- (iii) Determinación de las curvaturas normales relativas en el punto M .

La solución de estos problemas está basada en:

- (i) La aplicación de las Ecs. (2.4.1), (2.4.2) y de la ecuación diferencial de engrane

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^{(12)}) = 0 \quad (2.6.1)$$

- (ii) La descomposición del desplazamiento del punto de contacto sobre cada superficie en dos componentes según las direcciones principales de curvatura de las respectivas superficies. Otra posible descomposición del desplazamiento es según dos direcciones perpendiculares cualesquiera contenidas en el plano tangente común, en particular cuando una de estas direcciones es tangente a la línea de contacto en el caso de que la superficie Σ_2 sea la envolvente de Σ_1 .

El desarrollo matemático de la solución de estos problemas viene ampliamente descrita en [Litvin, 1994].

2.7. Elipse instantánea de contacto

En el caso de superficies en contacto puntual, Litvin [1994] ha propuesto un método para la determinación de las dimensiones y orientación de las elipses instantáneas de contacto a partir de las curvaturas y direcciones principales de las superficies, y de la deformación elástica de las mismas.

Debido a la elasticidad de las superficies en contacto, el contacto puntual entre superficies se extiende sobre un área elíptica. El centro de simetría de la elipse instantánea de contacto coincide con el punto teórico de tangencia. La huella de contacto entre las superficies está formada por el conjunto de estas elipses de contacto.

El método propuesto viene desarrollado en [Litvin, 1994] y supone conocido el parámetro de deformación elástica δ de las superficies, que depende de la carga aplicada, la rigidez de los dientes en contacto y el módulo de elasticidad del material de los engranajes. El parámetro δ se ha considerado igual a 0,006 mm (0,00025 in), el cuál es un valor asociado a engranajes poco cargados. Aunque la dimensión de la elipse depende del valor del parámetro δ , la orientación y la relación entre los ejes mayor y menor es independiente de δ y sólo depende de las curvaturas y direcciones principales de las superficies en contacto.

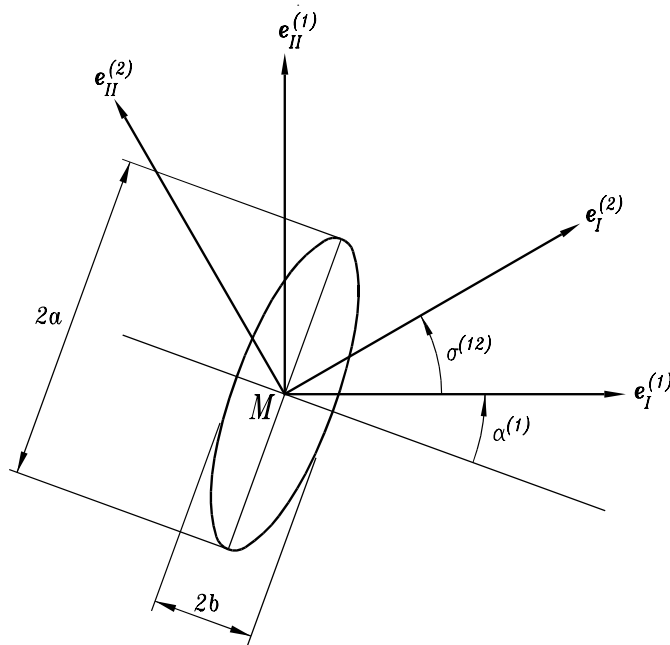


Figura 2.7.1: Elipse instantánea y direcciones principales en el punto de contacto.

La Figura 2.7.1 muestra la elipse instantánea de contacto. Se suponen conocidas las curvaturas principales, $k_I^{(1)}$ y $k_{II}^{(1)}$ en el punto de contacto M , y las direcciones principales de curvatura, $\mathbf{e}_I^{(1)}$ y $\mathbf{e}_{II}^{(1)}$, de Σ_1 . Igualmente se conocen las curvaturas principales, $k_I^{(2)}$ y $k_{II}^{(2)}$, y las direcciones principales, $\mathbf{e}_I^{(2)}$ y $\mathbf{e}_{II}^{(2)}$, de Σ_2 . La dimensión de la elipse, dada por los semiejes a y b , y la

orientación de la misma, dada por el ángulo $\alpha^{(1)}$, vienen dados por

$$a = \left| \frac{\delta}{A} \right|^{1/2} \quad b = \left| \frac{\delta}{B} \right|^{1/2} \quad (2.7.1)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha^{(1)} = \frac{g_2 \operatorname{sen} 2\sigma^{(12)}}{g_1 - g_2 \cos 2\sigma^{(12)}} \quad (2.7.2)$$

donde

$$A = \frac{1}{4} [k_{\Sigma}^{(1)} - k_{\Sigma}^{(2)} - (g_1^2 - 2g_1g_2 \cos 2\sigma^{(12)} + g_2^2)^{1/2}] \quad (2.7.3)$$

$$B = \frac{1}{4} [k_{\Sigma}^{(1)} - k_{\Sigma}^{(2)} + (g_1^2 - 2g_1g_2 \cos 2\sigma^{(12)} + g_2^2)^{1/2}] \quad (2.7.4)$$

$$k_{\Sigma}^{(i)} = k_I^{(i)} + k_{II}^{(ii)}, \quad g_i = k_I^{(i)} - k_{II}^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (2.7.5)$$

siendo $\sigma^{(12)}$ el ángulo entre las direcciones principales $\mathbf{e}_I^{(1)}$ y $\mathbf{e}_I^{(2)}$ (Fig. 2.7.1).

2.8. Generación por doble envolvente

La generación por doble envolvente ha sido investigada en el área de la geometría diferencial. El movimiento de la superficie generadora Σ_1 en el sistema S_2 viene definida en este caso por dos parámetros independientes ϕ y ψ . La familia de superficies Σ_1 generada en S_2 se representa como

$$\mathbf{r}_2(u, \theta, \phi, \psi) = \mathbf{M}_{21}(\phi, \psi) \mathbf{r}_1(u, \theta) \quad (2.8.1)$$

donde $\mathbf{M}_{21}(\phi, \psi)$ es la matriz de transformación de coordenadas del sistema S_2 al sistema S_1 .

La definición de la envolvente Σ_2 requiere, además de la ecuación vectorial (2.8.1), dos ecuaciones de engrane:

$$\mathbf{N}_i^{(1)} \cdot \mathbf{v}_i^{(12, \phi)} = 0 \quad \mathbf{N}_i^{(1)} \cdot \mathbf{v}_i^{(12, \psi)} = 0 \quad (2.8.2)$$

donde $\mathbf{N}_i^{(1)}$ es la normal a Σ_1 , $\mathbf{v}_i^{(12, \phi)}$ representa la velocidad relativa entre Σ_1 y Σ_2 debido al parámetro ϕ cuando el parámetro ψ es constante, y $\mathbf{v}_i^{(12, \psi)}$ representa la velocidad relativa debido al parámetro ψ cuando el parámetro ϕ es constante. Todos los vectores vienen representados en el mismo sistema S_i ($i = 1, 2, f$).

El proceso de doble envolvente tiene su aplicación en la generación de superficies donde la herramienta presenta simultáneamente dos tipos de movimiento, uno de los cuales es conocido como movimiento de alimentación. Por ejemplo, en el rectificado de engranajes rectos y helicoidales mediante cortador sinfín, los dos tipos de movimiento son: (i) movimiento de rotación del engranaje y del cortador, y (ii) movimiento helicoidal relativo entre el engranaje y el cortador. Este segundo tipo de movimiento es el movimiento de alimentación.

En realidad, el proceso de fabricación consistirá en un proceso de simple envolvente debido a la imposibilidad física de que los parámetros del movimiento ϕ y ψ sean independientes. Siempre existirá una relación $\psi(\phi)$ entre ambos parámetros. No obstante, el proceso de generación por doble envolvente permite determinar la superficie ideal Σ_2 para su comparación con la superficie real Σ_2^* . Ésta se puede obtener según un proceso de simple envolvente teniendo en cuenta la relación $\psi(\phi)$.

2.9. Simulación del engrane y análisis del contacto

El análisis del contacto o “Tooth Contact Analysis” (TCA) en la literatura inglesa, tiene como objetivo la simulación del engrane de las superficies de los dientes en contacto y permite:

- (i) Determinar la trayectoria de contacto en cada una de las superficies.
- (ii) Determinar los errores de transmisión debidos a los errores de alineación, fabricación y montaje.
- (iii) Determinar la huella de contacto formada por el conjunto de las elipses instantáneas de contacto, que incluye la orientación y dimensión de las mismas a lo largo del camino de contacto.

Para alcanzar estos objetivos, las superficies de los dientes se consideran conocidas, así como la localización y orientación de los ejes de ambos engranajes considerando los errores de alineación.

Las superficies Σ_1 y Σ_2 vienen dadas en los sistemas coordenados S_1 y S_2 , respectivamente, por las siguientes funciones

$$\mathbf{r}_i(u_i, \theta_i) \in C^2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i} \neq 0, \quad (u_i, \theta_i) \in E_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.9.1)$$

donde las normales unitarias vienen representadas por

$$\mathbf{n}_i = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_i} \right|} \quad (i = 1, 2) \quad (2.9.2)$$

Considerando que el engranaje 1 gira con la superficie Σ_1 alrededor de un eje fijo localizado en el sistema S_f , la familia de superficies generada por Σ_1 en S_f viene dada por

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \mathbf{M}_{f1}(\phi_1) \mathbf{r}_1^{(1)}(u_1, \theta_1) \quad (2.9.3)$$

y la normal unitaria a la superficie Σ_1 se representa en S_f como

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) = \mathbf{L}_{f1}(\phi_1) \mathbf{n}_1^{(1)}(u_1, \theta_1) \quad (2.9.4)$$

donde ϕ_1 es el ángulo de rotación del engranaje 1.

El engranaje 2 gira con la superficie Σ_2 alrededor de otro eje fijo, pero localizado en el sistema S_q . La localización y orientación de S_q simula los errores de alineación de la transmisión. La familia de superficies que genera Σ_2 en el sistema fijo S_f viene dada por

$$\mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{M}_{fq} \mathbf{M}_{q2}(\phi_2) \mathbf{r}_2^{(2)}(u_2, \theta_2) \quad (2.9.5)$$

y la normal unitaria correspondiente por

$$\mathbf{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{L}_{fq} \mathbf{L}_{q2}(\phi_2) \mathbf{n}_2^{(2)}(u_2, \theta_2) \quad (2.9.6)$$

donde ϕ_2 es el ángulo de rotación del engranaje 2.

Las matrices \mathbf{L} son de orden 3×3 y resultan de eliminar la última fila y la última columna de las correspondientes matrices \mathbf{M} .

Las superficies Σ_1 y Σ_2 deben ser tangentes a lo largo del camino de contacto y para ello se debe verificar la igualdad de los vectores de posición y la

colinealidad de las normales unitarias a las superficies en el punto instantáneo de contacto, como se muestra en la Fig. 2.9.1. Por tanto se debe verificar:

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (2.9.7)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(u_1, \theta_1, \phi_1) - \mathbf{n}_f^{(2)}(u_2, \theta_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (2.9.8)$$

La Ec. (2.9.7) representa tres ecuaciones escalares, pero la Ec. (2.9.8) representa sólo dos ecuaciones escalares independientes al ser $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$. Las ecuaciones (2.9.7) y (2.9.8) representan por tanto cinco ecuaciones escalares independientes con seis incógnitas: $u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2$ y ϕ_2 . El sistema de ecuaciones se puede representar como

$$f_i(u_1, \theta_1, \phi_1, u_2, \theta_2, \phi_2) = 0, \quad f_i \in C^1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (2.9.9)$$

El objetivo del análisis es obtener del sistema de ecuaciones representado en (2.9.9) las funciones

$$u_1(\phi_1), \theta_1(\phi_1), u_2(\phi_1), \theta_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1) \in C^1 \quad (2.9.10)$$

De acuerdo con el teorema de existencia de sistemas de funciones implícitas [Korn & Korn, 1968], las funciones (2.9.10) existen en las proximidades del punto

$$P^{(0)} = (u_1^{(0)}, \theta_1^{(0)}, \phi_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \phi_2^{(0)}) \quad (2.9.11)$$

si se verifica: (1) las funciones $[f_1, f_2, f_3, f_4, f_5] \in C^1$ en un entorno de $P^{(0)}$, (2) el sistema de ecuaciones (2.9.9) se satisface en $P^{(0)}$, y (3) el Jacobiano del sistema (2.9.9) en $P^{(0)}$ difiere de cero

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)}{D(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, \phi_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_5}{\partial u_1} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_5}{\partial u_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_5}{\partial \phi_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.9.12)$$

Las funciones dadas en (2.9.10) proporcionan toda la información necesaria sobre el engrane de las superficies en contacto. La función $\phi_2(\phi_1)$ representa la relación entre los ángulos de rotación de los engranajes. Las funciones $u_1(\phi_1)$ y $\theta_1(\phi_1)$ determinan el camino de contacto sobre la superficie

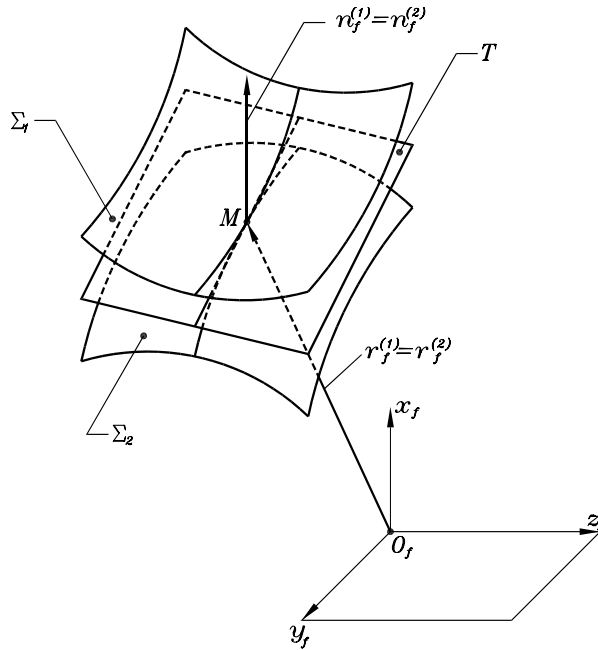


Figura 2.9.1: Condiciones del contacto puntual entre superficies.

Σ_1 mediante la función $\mathbf{r}_1(u_1, \theta_1)$, mientras que las funciones $u_2(\phi_1)$ y $\theta_2(\phi_1)$ determinan el camino de contacto sobre la superficie Σ_2 mediante la función $\mathbf{r}_2(u_2, \theta_2)$. La línea de acción viene dada por la función

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1(\phi_1), \theta_1(\phi_1), \phi_1) \quad (2.9.13)$$

o bien por la función

$$\mathbf{r}_f^{(2)}(u_2(\phi_1), \theta_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1)) \quad (2.9.14)$$

En determinados casos, la superficie de uno de los engranajes puede venir dada como función de tres parámetros relacionados por una ecuación adicional correspondiente a la ecuación de engrane utilizada en la generación. En este caso, el sistema de ecuaciones dado en (2.9.9) presenta una ecuación más y una incógnita más correspondiente al parámetro generalizado del movimiento en el proceso de generación.

2.10. Prediseño de una función parabólica de errores de transmisión

La aplicación de una función parabólica de errores de transmisión permite absorber las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por errores de alineación, fabricación y montaje. El prediseño de una función parabólica de errores de transmisión es la clave para la reducción de ruido y vibración en transmisiones de engranajes. Esta idea está basada en las siguientes consideraciones:

- (i) La función de transmisión de una transmisión ideal de engranajes es una función lineal representada mediante

$$\phi_2 = \frac{N_1}{N_2} \phi_1 \quad (2.10.1)$$

siendo N_i y ϕ_i ($i = 1, 2$), el número de dientes y el ángulo de rotación, respectivamente, de piñón ($i = 1$) y rueda ($i = 2$).

- (ii) Debido a errores de alineación, fabricación o montaje (cambio del ángulo de cruce entre ejes, cambio de la distancia entre centros en el caso de engranajes con geometría modificada, desplazamiento axial de engranajes cónicos espirales, hipoides, tornillo sinfín, etc.), la función de transmisión se convierte en una función cuasilineal y discontinua (Fig. 2.10.1(a)) con periodicidad igual al ciclo de engrane de una pareja de dientes. La función de errores de transmisión correspondiente se muestra en la Figura 2.10.1(b). Este tipo de función de transmisión se ha confirmado mediante la simulación del engrane y análisis del contacto. Debido al salto de la velocidad angular en el inicio y final del ciclo de engrane, la aceleración tiene un valor muy alto que causa grandes vibraciones y ruido en la transmisión.

Está demostrado en [Litvin, 1994] y [Litvin, 1998] que una función parabólica de errores de transmisión puede absorber una función lineal producida por los errores de alineación y fabricación.

La Figura 2.10.2(a) muestra la interacción de la función parabólica prediseñada de errores de transmisión $\Delta\phi_2^{(1)} = -a\phi_1^2$ con la función lineal $\Delta\phi_2^{(2)} =$

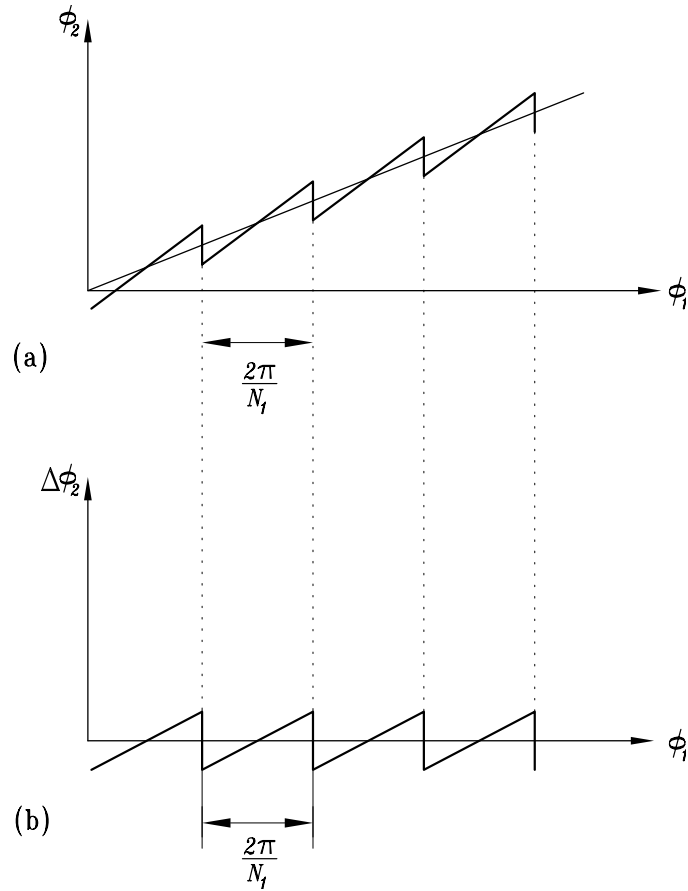


Figura 2.10.1: Relación de transmisión $\phi_2(\phi_1)$ y función $\Delta\phi_2(\phi_1)$ de errores de transmisión de una transmisión desalineada.

$b\phi_1$ provocada por los errores de alineación y fabricación. La función resultante $\Delta\psi_2(\psi_1)$, obtenida mediante la suma de las funciones $(\Delta\phi_2^{(1)} + \Delta\phi_2^{(2)})$, es una función parabólica $\Delta\psi_2 = -a\psi_1^2$ con el mismo coeficiente de parábola. Se puede decir, por tanto, que la función prediseñada de errores de transmisión $\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)$ ha absorbido la función lineal $\Delta\phi_2^{(2)}(\phi_1)$ provocada por las desalineaciones.

La Figura 2.10.2(b) muestra la función resultante de errores de transmisión $\Delta\psi_2(\psi_1)$ para varios ciclos de engrane. Es evidente que la relación de transmisión ya no es una función lineal discontinua sino una función continua

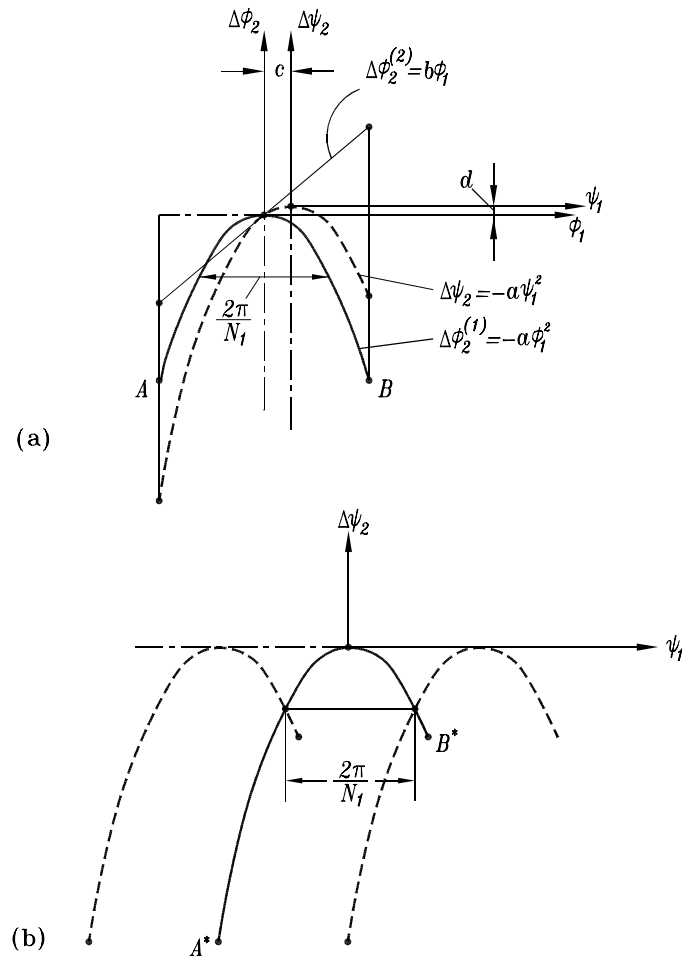


Figura 2.10.2: Interacción de una función parabólica y una lineal de errores de transmisión.

en la que los saltos de velocidad angular en los puntos de transferencia del engrane se han reducido notablemente.

La Figura 2.10.2(a) muestra un cambio en el origen de la función $\Delta\psi_2(\psi_1)$ con respecto al origen de $\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)$. Dicho cambio de origen se determina mediante $c = b/2a$ y $d = b^2/4a$. Los parámetros c y d indican que los puntos iniciales de tangencia entre piñón y rueda se han modificado ligeramente sobre las superficies de contacto.

El coeficiente b caracteriza la sensibilidad de una transmisión por engranajes frente a los errores de transmisión. En el caso de un valor lo suficientemente grande del coeficiente b , la función parabólica $\Delta\psi_2(\psi_1)$ puede ser discontinua en los puntos de transferencia del engrane. Para evitar esto, la función prediseñada $\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)$ debe ser proporcionada en el intervalo dado por

$$\phi_1(A) - \phi_1(B) \geq \frac{2\pi}{N_1} + \frac{b}{a} \quad (2.10.2)$$

donde A y B son los extremos de la función $\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)$ indicados en la Fig. 2.10.2(a). Los correspondientes extremos A^* y B^* en la función resultante $\Delta\psi_2(\psi_1)$ (Fig. 2.10.2(b)) ocupan posiciones asimétricas respecto al eje de la parábola. No obstante, el engrane consecutivo de las parejas de dientes permite que la función resultante de errores de transmisión esté constituida por tramos simétricos como consecuencia del solapamiento de la función $\Delta\psi_2(\psi_1)$, siempre y cuando se cumpla la condición dada por (2.10.2). En la práctica, cuando el valor de b es grande, se debe incrementar el valor máximo $|\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)|_{\max}$ de la función prediseñada de errores de transmisión (mediante el incremento del coeficiente a de la función parabólica) para conseguir una función continua $\Delta\psi_2(\psi_1)$.

La relación de transmisión de una transmisión por engranajes con una función prediseñada de errores de transmisión se muestra en la Figura 2.10.3(a). La función parabólica prediseñada de errores de transmisión se muestra en la Figura 2.10.3(b). Esta función debe ser negativa para que permita que la rueda gire con retraso con respecto al piñón. De este modo, las deformaciones elásticas del elemento conducido con respecto al elemento conductor permitirán suavizar la transferencia del engrane entre las parejas de dientes e incrementar el grado de recubrimiento debido a deformaciones elásticas.

Obviamente, la existencia de una función prediseñada parabólica de errores de transmisión induce tales errores en una transmisión sin desalineaciones estando representados mediante una función parabólica continua y periódica de valor máximo limitado. Sin embargo, esta función será capaz de absorber las funciones lineales de errores de transmisión producidas por los errores de alineación cuando éstos aparezcan.

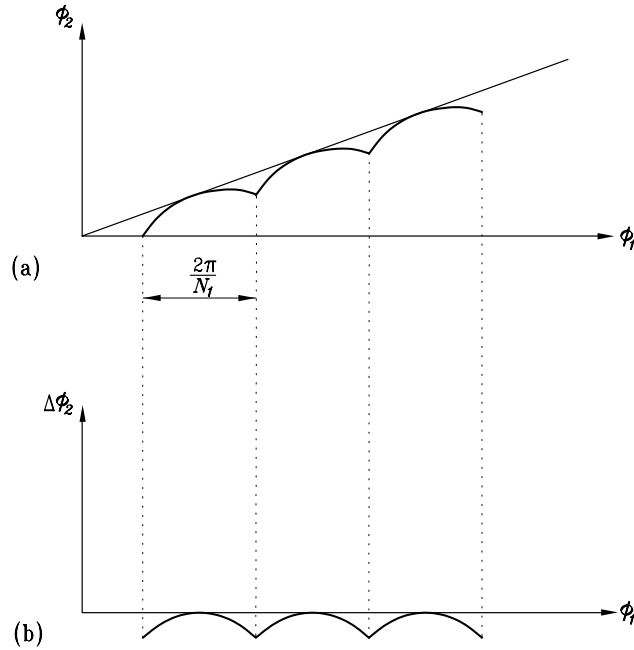


Figura 2.10.3: Relación de transmisión $\phi_2(\phi_1)$ y función $\Delta\phi_2(\phi_1)$ de errores de transmisión de una transmisión con geometría modificada.

Como regla práctica de diseño se puede decir que los errores de transmisión producidos por desalineaciones se pueden absorber por funciones prediseñadas parabólicas de errores de transmisión con el siguiente valor máximo

$$|\Delta\phi_2^{(1)}(\phi_1)|_{\max} = a \left(\frac{\pi}{N_1} \right)^2 = [6 \div 8] \text{ seg. ang.} \quad (2.10.3)$$

2.11. Aplicación del método de los elementos finitos en el diseño de engranajes

En el diseño de engranajes, el análisis de tensiones constituye una etapa importante del mismo. El análisis tensional se ha basado en el método de los elementos finitos [Zienkiewicz & Taylor, 2000] y permite: (i) determinar las tensiones de contacto y flexión, (ii) investigar la formación del contacto y (iii) detectar áreas de contacto severo durante el ciclo de engrane.

El primer paso en el análisis tensional es la construcción del modelo de elementos finitos, el cual requiere: (i) el mallado de los dientes, (ii) la definición de las superficies de contacto y (iii) el establecimiento de las condiciones de contorno. La fase de preproceso o construcción del modelo de elementos finitos se realiza de forma automática y parametrizada, teniendo en cuenta la geometría de las superficies de los dientes. Una vez generado el modelo, se lleva a cabo el análisis por elementos finitos con un programa de uso general [Hibbit, Karlsson & Sirensen, Inc., 1998].

La generación del modelo de elementos finitos se realiza siguiendo los siguientes pasos:

Paso 1. Se determina el modelo geométrico del diente a partir de las ecuaciones de las superficies que lo conforman. La Figura 2.11.1(a) muestra el volumen a modelizar correspondiente a un diente de un engranaje recto.

Paso 2. El volumen a modelizar de cada diente es dividido en seis subvolúmenes utilizando las superficies intermedias auxiliares 1 a 6 según se observa en la Figura 2.11.1(b).

Paso 3. Se determinan analíticamente las coordenadas de los nodos en función del número de elementos previamente definidos en las direcciones longitudinal y del perfil del diente (Figura 2.11.1(c)).

Paso 4. Se discretiza cada uno de los seis subvolúmenes en elementos finitos utilizando los nodos determinados en el paso anterior (Figura 2.11.1(d)).

Paso 5. Las condiciones de contorno (véase Figura 2.11.2 para el caso de un modelo de tres dientes) se establecen conforme a las siguientes ideas:

- (i) Se fijan los nodos a ambos lados y en la parte inferior de la base de la rueda, es decir, se restringen sus seis grados de libertad.
- (ii) Se define una superficie rígida formada por los nodos de ambos lados y de la parte inferior de la base del piñón. Las superficies rígidas son estructuras geométricas tridimensionales que no pueden ser deformadas pero que pueden desplazarse o girar como sólidos rígidos [Hibbit, Karlsson & Sirensen, Inc., 1998]. Además las superficies rígidas disminuyen el tiempo de cálculo dado que las traslaciones y rotaciones están asociadas a las de un solo nodo, llamado nodo de referencia.

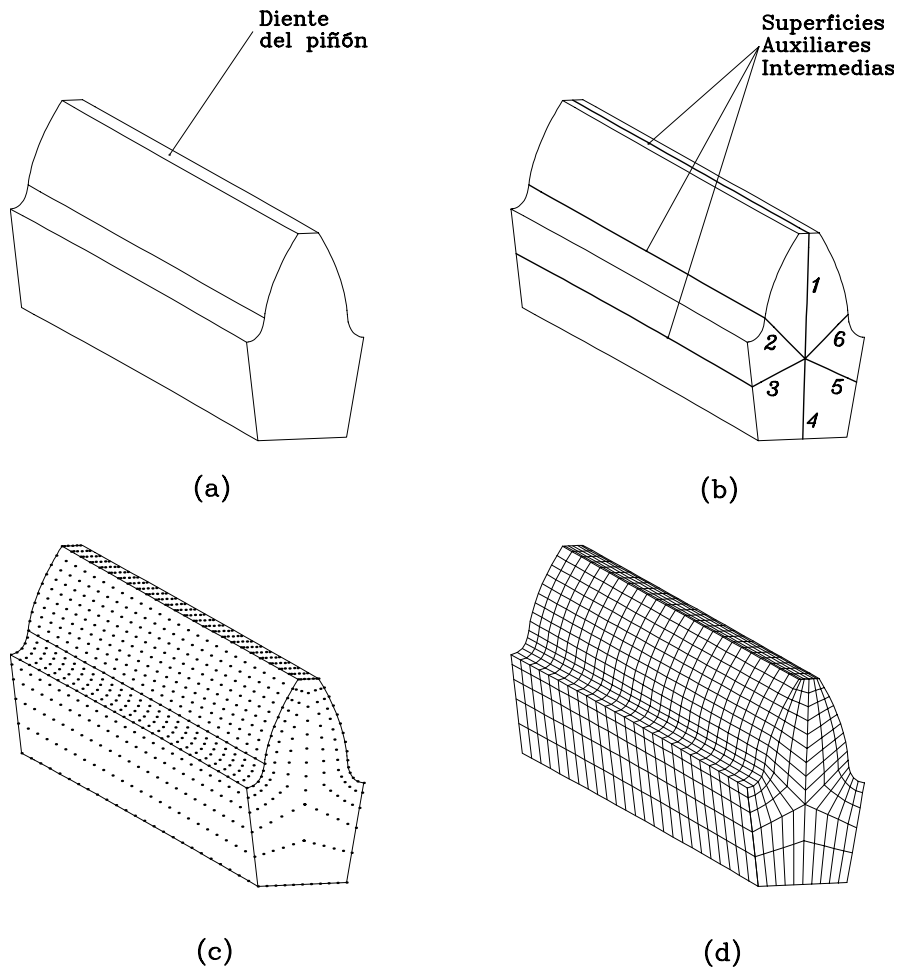


Figura 2.11.1: Ilustración de: (a) volumen del diente a modelizar, (b) superficies auxiliares intermedias, (c) determinación de los nodos, y (d) discretización del volumen por elementos finitos.

- (iii) Se define el nodo N en el eje del piñón como nodo de referencia de la superficie rígida. El nodo de referencia N y la superficie rígida constituyen un cuerpo rígido.
- (iv) Se establece como único grado de libertad del nodo N el giro en torno al eje del piñón, estando los restantes cinco grados de libertad restringidos a cero. La aplicación de un par T según el grado de libertad libre del

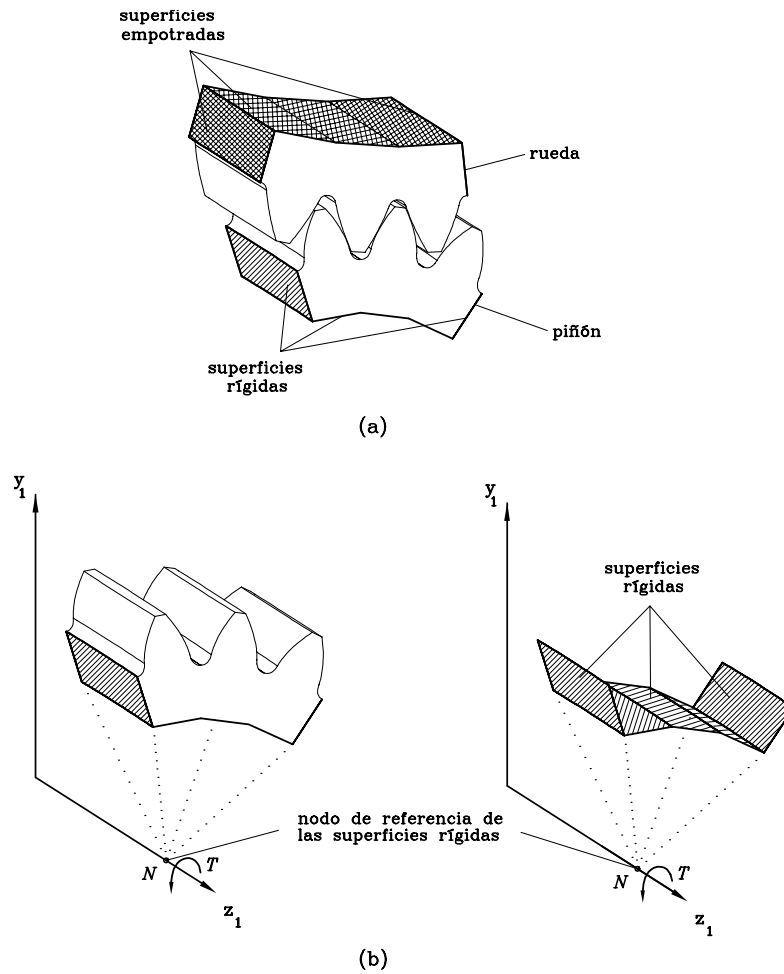


Figura 2.11.2: Ilustración esquemática de: (a) condiciones de contorno en piñón y rueda, y (b) superficies rígidas para la aplicación de las condiciones de contorno en el piñón.

nodo N permite transmitir dicho par al modelo del piñón a través de la superficie rígida.

Paso 6. El algoritmo de contacto del programa de análisis por elementos finitos utilizado requiere la definición de las superficies de contacto. El procedimiento de construcción del modelo permite identificar automáticamente todos los elementos necesarios para la formación de dichas superficies.

Se deben definir dos tipos de superficies [Hibbit, Karlsson & Sirensen, Inc., 1998], la superficie maestra y la superficie esclava. Generalmente la superficie maestra es aquella que pertenece al elemento más rígido o al elemento con el mallado menos denso en caso de que los dos elementos en contacto tengan rigideces similares.

Las principales características del modelo así construido son las siguientes:

- El modelo de elementos finitos se puede determinar automáticamente para cualquier posición del piñón y de la rueda obtenida a través del análisis del contacto o TCA. La convergencia está asegurada porque al menos existe un punto de contacto entre las superficies.
- La suposición de la distribución de la carga sobre la superficie del diente no es necesaria dado que el algoritmo de contacto del programa de análisis por elementos finitos [Hibbit, Karlsson & Sirensen, Inc., 1998] permite obtener el área de contacto y las tensiones de contacto y flexión a partir de la aplicación de un par torsor en el eje de giro del piñón mientras la rueda se mantiene fija. El modelo de elementos finitos considerado tiene en cuenta las superficies reales de piñón y rueda en contacto en un determinado punto como resultado de la aplicación del análisis del contacto (TCA).
- Se pueden obtener modelos de elementos finitos con cualquier número de dientes. Por ejemplo, la Figura 2.11.3 muestra el modelo de elementos finitos de una transmisión helicoidal completa. Modelos de tres o cinco pares de dientes son más adecuados dada la capacidad de los ordenadores utilizados para el análisis tensional. En la Figura 2.11.4 se muestra el modelo de elementos finitos de tres pares de dientes correspondiente a una transmisión de engranajes rectos. La Figura 2.11.5 muestra un modelo de cinco pares de dientes correspondiente a una transmisión helicoidal.

El uso de modelos de elementos finitos de varios pares de dientes tiene las siguientes ventajas:

- (i) Las condiciones de contorno referentes a restricciones en los movimien-

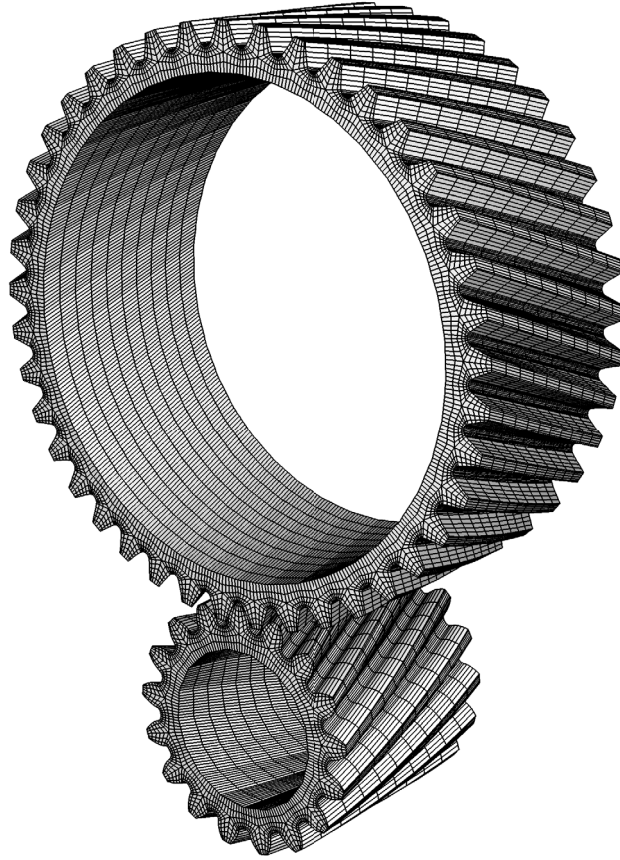


Figura 2.11.3: Modelo de elementos finitos de una transmisión completa de engranajes helicoidales.

tos están lo suficientemente alejadas de las zonas donde están aplicadas las cargas.

- (ii) Debido a la elasticidad de las superficies de los dientes de los engranajes pueden existir varias parejas de dientes en contacto al mismo tiempo. Por tanto, es posible estudiar el reparto de carga entre parejas de dientes en contacto simultáneo, así como detectar contactos en el borde y áreas de contacto severo.

El método tradicional de la construcción del modelo de elementos fini-

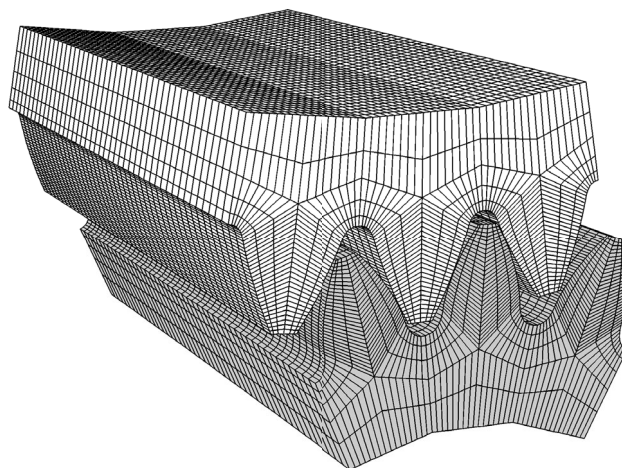


Figura 2.11.4: Modelo de elementos finitos de tres pares de dientes en una transmisión de engranajes rectos.

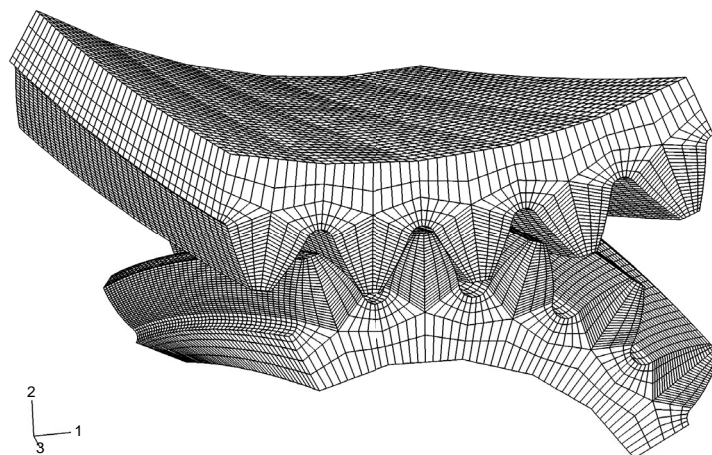


Figura 2.11.5: Modelo de elementos finitos de cinco pares de dientes en una transmisión de engranajes helicoidales.

tos mediante la aplicación de programas CAD presenta, respecto al método propuesto en el presente trabajo, los siguientes inconvenientes:

- (1) La construcción del modelo requiere en primer lugar la determinación numérica del modelo alámbrico mediante curvas espaciales. El modelo alámbrico consiste en secciones planas de los dientes que son utilizadas para la obtención del modelo sólido.
- (2) El mallado requiere la aplicación de programas de diseño asistido por ordenador.
- (3) A continuación se deben definir las condiciones de contorno en el modelo.
- (4) El aumento de las secciones en el modelo alámbrico permite aumentar la precisión del modelo sólido pero requiere tiempo.
- (5) El desarrollo de cada uno de los puntos descritos anteriormente requiere una formación adecuada del usuario del programa CAD, tiempo de elaboración, y tienen que ser realizados para cada tipo de geometría propuesta en el diseño, para cada punto de contacto, y para los distintos casos de investigación considerados.

Capítulo 3

Engranajes cilíndricos con perfil de evolvente

3.1. Introducción

Los engranajes cilíndricos rectos y helicoidales de perfil de evolvente tienen una gran aplicación en la industria debido a sus numerosas ventajas: (i) las herramientas de corte y rectificado se pueden generar con gran precisión, (ii) se pueden utilizar coeficientes de desplazamiento para variar fácilmente el espesor del diente, evitar apuntamiento y penetración, y proporcionar una transmisión satisfactoria a distancias entre centros no nominales, y (iii) el cambio de la distancia entre centros de diseño no produce errores de transmisión.

Uno de los focos principales de investigación actual es cómo mejorar el comportamiento de estas transmisiones frente a la presencia de errores de alineación y fabricación, tales como el error angular entre ejes o el error en el paso de hélice. Los efectos más importantes de estos errores son: (i) desplazamiento del contacto sobre las superficies con la posibilidad de contacto en el borde, y (ii) niveles elevados de ruido y vibración debidos a errores de transmisión.

Los engranajes cilíndricos de perfil de evolvente tienen su principal aplicación en transmisiones con ejes paralelos aunque también encuentran apli-

cación en transmisiones con ejes cruzados. Un caso especial lo constituyen las transmisiones cilíndricas con ejes que se intersectan y que se denominan en la literatura inglesa "face gears" (véase el Capítulo 6).



Figura 3.1.1: Transmisión de engranajes helicoidales con ejes cruzados.

La Figura 3.1.1 muestra una transmisión de engranajes helicoidales con ejes cruzados donde el ángulo entre ejes es $\gamma = 90^\circ$. La Figura 3.1.2 muestra una transmisión de engranajes helicoidales con ejes paralelos. Este segundo tipo de transmisión puede ser considerada como un caso particular de engranajes con ejes cruzados donde $\gamma = 0^\circ$.

En las transmisiones de engranajes helicoidales de perfil de evolvente con ejes cruzados el tipo de contacto es puntual. Sin embargo, en el caso particular de $\gamma = 0^\circ$ el contacto es lineal. Los efectos de los errores de alineación en ambos tipos de transmisiones, con contacto puntual y con contacto lineal,

son claramente diferentes. La Figura 3.1.3 muestra los dos tipos de contacto sobre un piñón helicoidal.

El estudio de los engranajes con ejes cruzados permite analizar las condiciones del contacto en el caso más general y estudiar la sensibilidad de la transmisión frente a los errores de alineación en función del ángulo entre ejes γ . En el caso particular de engranajes con ejes paralelos, dicha sensibilidad es máxima y la localización del contacto es imprescindible para poder evitar el contacto en el borde. La localización del contacto, no obstante, no es suficiente y se debe acompañar de una modificación adicional de las superficies que permita absorber los errores de transmisión.

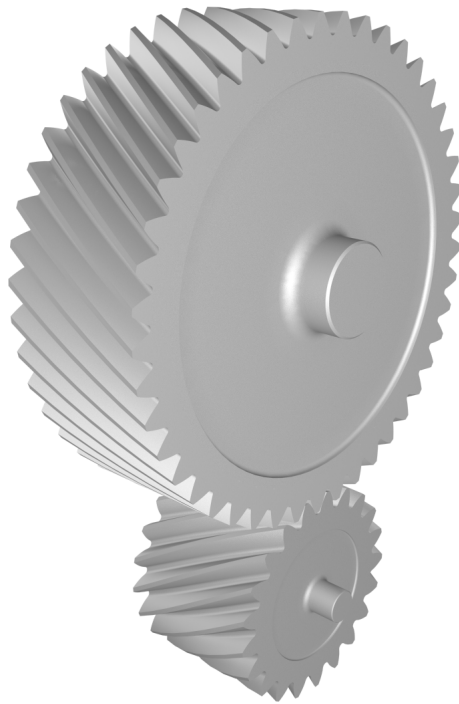


Figura 3.1.2: Transmisión de engranajes helicoidales con ejes paralelos.

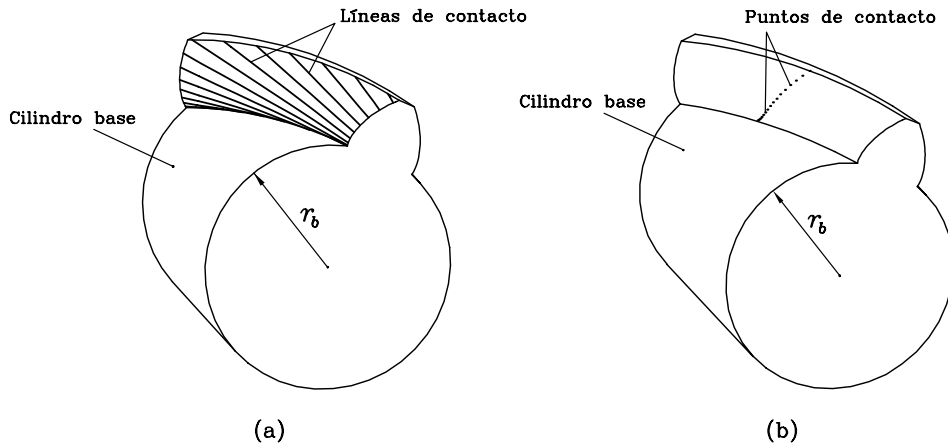


Figura 3.1.3: Tipos de contacto: (a) contacto lineal en una transmisión con ejes paralelos, (b) contacto puntual en una transmisión con ejes cruzados.

3.2. Superficies de perfil de evolvente

Las superficies de perfil de evolvente tienen como curva generatriz una evolvente de círculo y como curva directriz una hélice en el caso de engranajes helicoidales y una recta en el caso de engranajes rectos.

La Figura 3.2.1 muestra la superficie de perfil de evolvente de un engranaje helicoidal. Dicha superficie constituye un helicoides caracterizado por el radio del cilindro base r_{bi} y el paso de hélice p_i . El ángulo de carga λ_{bi} se obtiene como función de r_{bi} y p_i mediante la relación

$$\operatorname{tg} \lambda_{bi} = \frac{p_i}{r_{bi}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.2.1)$$

donde $i = 1$ en el caso del piñón e $i = 2$ en el caso de la rueda. En el caso de engranajes rectos, la relación (3.2.1) es aplicable si se considera la recta como una hélice de paso infinito, con lo que resulta $\lambda_{bi} = 90^\circ$.

El helicoides con perfil de evolvente se puede generar mediante el movimiento helicoidal de la recta MD (Fig. 3.2.1) con la condición de que dicha recta se mantenga tangente a la hélice del cilindro base. Las normales a lo largo de la recta MD tienen la misma dirección por lo que la superficie de dicho helicoides es una superficie *desarrollable* sobre un plano. La Figura 3.1.3(a)

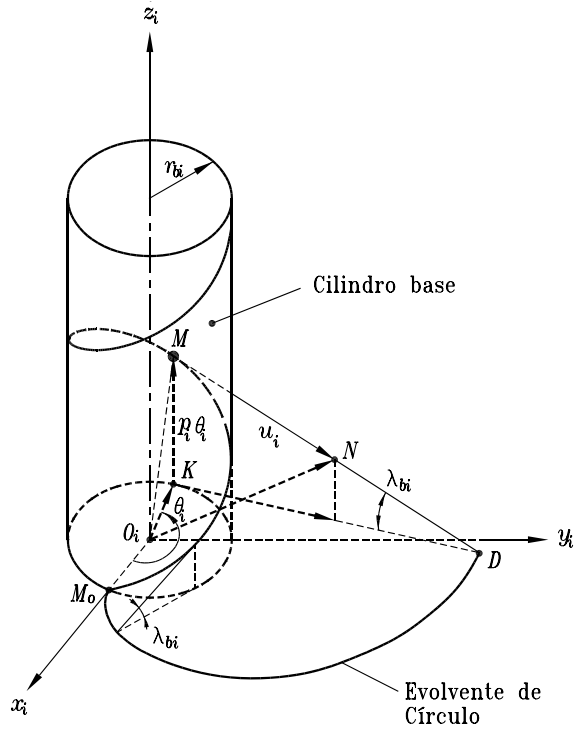
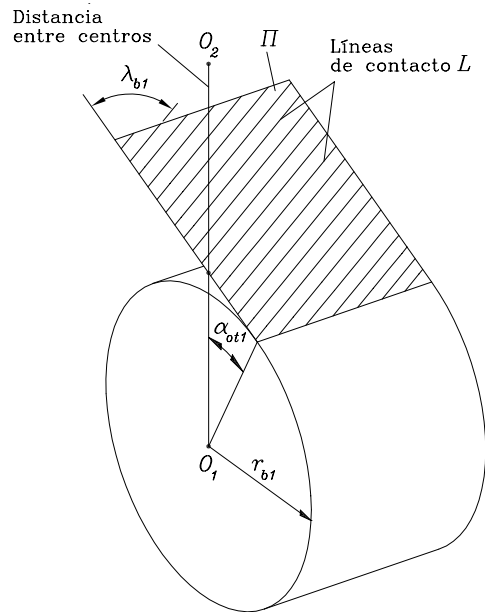


Figura 3.2.1: Helicoides de perfil de evolvente.

muestra que la superficie del helicoides está constituida por la familia de rectas que, al igual que la MD , resultan tangentes a la hélice del cilindro base.

En el caso de transmisiones con ejes paralelos y sin desalineaciones, las rectas como la MD constituyen las líneas de tangencia entre las superficies conjugadas de los engranajes. La representación de las líneas de contacto en un sistema fijo de coordenadas muestra que dichas líneas pertenecen a un mismo plano. La Figura 3.2.2 muestra las líneas de contacto L sobre el plano Π , el cual resulta tangente a los cilindros bases de piñón y rueda.

La orientación del plano Π respecto al piñón viene dada por el ángulo α_{ot1} , que es el ángulo de presión transversal o de funcionamiento del piñón. La orientación respecto a la rueda viene dada por el correspondiente ángulo α_{ot2} (no representado en la Fig. 3.2.2). Las normales a la superficie de evolvente resultan ortogonales a las líneas de tangencia y se encuentran en el plano Π , el cual constituye por tanto el plano de acción. Las líneas de contacto L

Figura 3.2.2: Líneas de contacto sobre el plano de acción Π .

son rectas paralelas y están inclinadas el ángulo $90^\circ - \lambda_{b1}$ respecto al eje del piñón. En el caso de engranajes rectos dichas líneas resultan paralelas a los ejes de piñón y rueda.

La representación en el plano de engrane de las superficies de contacto y del plano de acción en una transmisión con ejes paralelos permite visualizar los perfiles de evolvente de círculo y la línea de acción, la cual coincide con la normal común a los perfiles en el punto de contacto. La Fig. 3.2.3 muestra que la línea de acción $T_1 - T_2$ es tangente a los círculos base de radios r_{b1} y r_{b2} .

Las consideraciones expuestas en el caso de transmisiones con ejes paralelos, en el que el contacto es lineal (Fig. 3.1.3(a)), se pueden extender al caso de transmisiones con ejes cruzados en el que el contacto es puntual (Fig. 3.1.3(b)). Los cilindros base de una transmisión con ejes cruzados presentan una línea tangente común en lugar de un plano tangente común. La Figura 3.2.4 muestra la existencia de dos líneas A_1 y A_2 tangentes a las respectivas hélices base en los cilindros base de piñón y rueda. Las líneas A_1 y A_2 con-

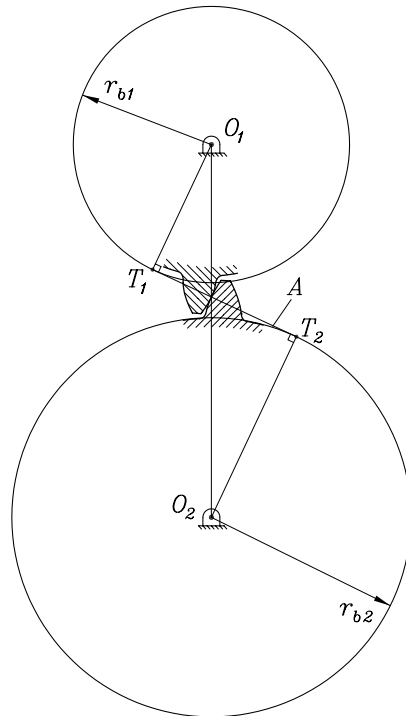


Figura 3.2.3: Línea de acción A en el plano de engrane de engranajes con ejes paralelos.

stituyen las líneas de acción correspondientes al engrane de ambos lados del diente.

El diseño de una transmisión con ejes cruzados debe garantizar cierta relación entre el ángulo entre ejes y la distancia entre ejes con el fin de que las dos líneas de acción se intersecten. Tal diseño recibe el nombre de *diseño canónico*. La Figura 3.2.5 muestra las líneas de acción cuando la condición de diseño canónico no se satisface. En este caso las líneas de acción no se intersectan sino que se cruzan. No obstante, ambas líneas siguen siendo tangentes a las hélices base de ambos cilindros base. El error en el ángulo entre ejes $\Delta\gamma$ o el error en la distancia entre ejes ΔE alteran las condiciones del diseño canónico y producen el desplazamiento de ambas líneas de acción, impidiendo su intersección. Como consecuencia, el camino de contacto se desplaza sobre las superficies de contacto.

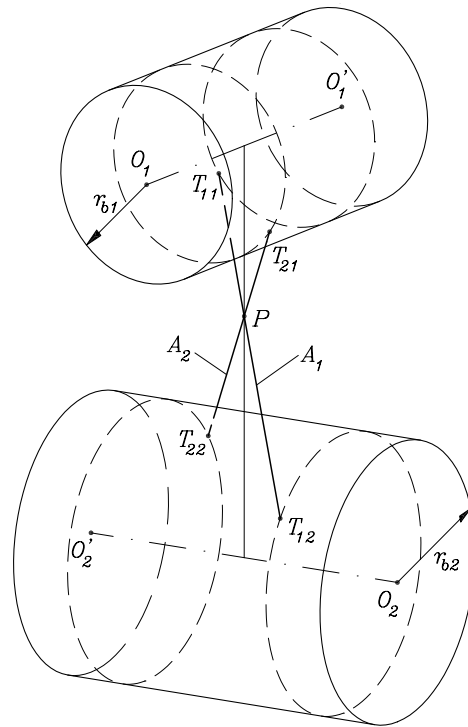


Figura 3.2.4: Líneas de acción en una transmisión alineada con ejes cruzados.

3.3. Generación de superficies conjugadas con perfil de evolvente

Las superficies con perfil de evolvente se generan mediante una cremallera cuya superficie generadora es un plano [Litvin, 1994]. La Figura 3.3.1(a) muestra el plano generador Σ_r de la cremallera. El ángulo β_p es el responsable de la inclinación de los dientes en el engranaje generado y es igual al ángulo de hélice. El subíndice p indica que este ángulo corresponde al cilindro primitivo del engranaje.

La Figura 3.3.1(b) muestra las secciones normal y transversal, donde p_n y p_t indican los pasos normal y transversal, respectivamente. Los ángulos α_{pn} y α_{pt} son los ángulos de presión en las respectivas secciones y están relacionadas

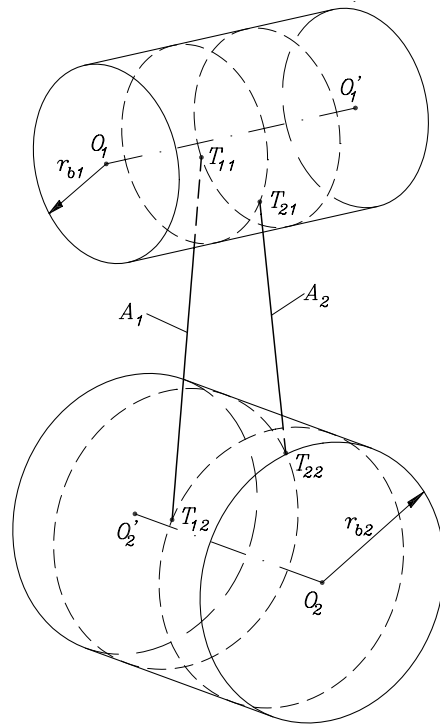


Figura 3.2.5: Líneas de acción en una transmisión desalineada con ejes cruzados.

con el ángulo β_p (o su complementario λ_p) mediante la relación

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_{pn}}{\operatorname{tg} \alpha_{pt}} = \cos \beta_p = \operatorname{sen} \lambda_p \quad (3.3.1)$$

Dicha relación se obtiene considerando que: (i) la altura de los perfiles de las secciones normal y transversal es la misma y (ii) los pasos p_n y p_t están relacionados por el ángulo β_p .

La Figura 3.3.1(c) muestra los espesores del hueco s_{pn1} y del diente s_{pn2} de la cremallera en la sección normal.

Los parámetros de la superficie Σ_r se han designado por u_r (Fig. 3.3.1(c)) y θ_r (Fig. 3.3.1(a)).

En el proceso de generación se utilizan los sistemas de coordenadas S_r y S_i (Fig. 3.3.1(d)) rígidamente conectados a la cremallera y al engranaje a generar, respectivamente. El sistema S_a (Fig. 3.3.1(d)) es un sistema auxiliar

de referencia y es fijo. Durante la generación, el movimiento relativo entre la cremallera y el engranaje es de rodadura sin deslizamiento entre el plano Π_r y el cilindro de radio r_{pi} . El plano Π_r y el cilindro representan los axoides del movimiento.

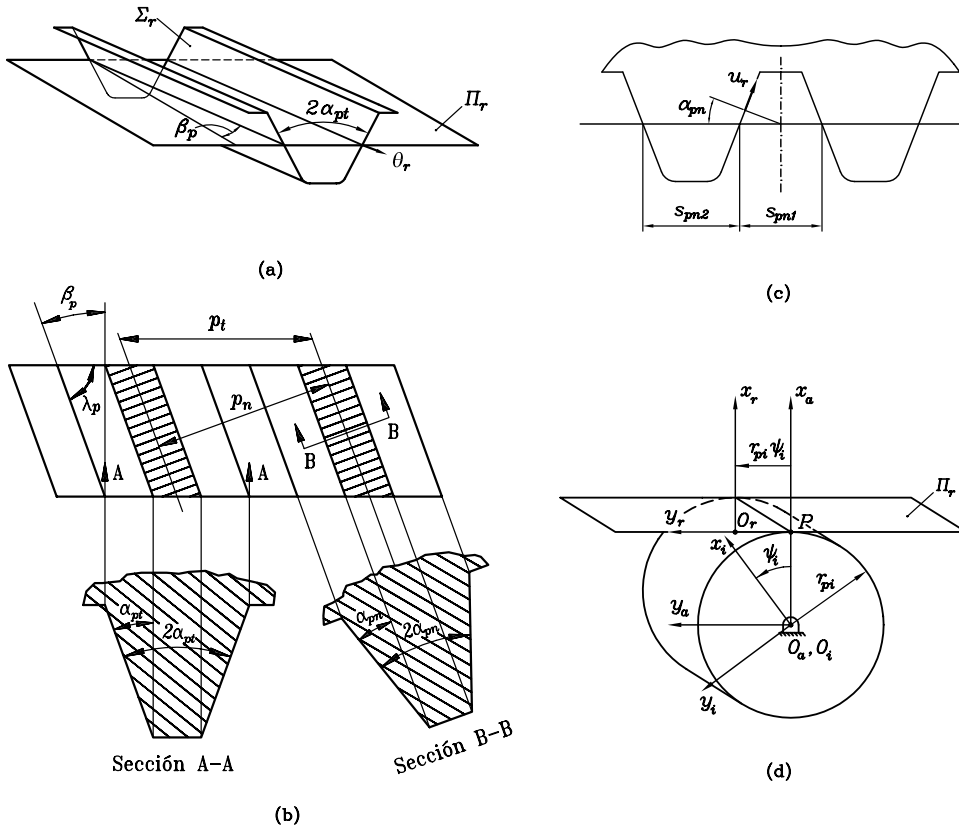


Figura 3.3.1: Representación esquemática de: (a) cremallera; (b) secciones normal y transversal; (c) espesores s_{pn1} y s_{pn2} en la sección normal; (d) sistemas coordenados utilizados en la generación.

Considerando que el plano generador Σ_r es dado y se quiere determinar la superficie Σ_i del engranaje a generar, ésta se determina como la envolvente de la familia de superficies definidas por Σ_r en el sistema S_i . La determinación de Σ_i está basada en las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{r}_i(u_r, \theta_r, \psi_i) = \mathbf{M}_{ir}(\psi_i)\mathbf{r}_r(u_r, \theta_r) \quad (3.3.2)$$

$$f_{ri}(u_r, \theta_r, \psi_i) = 0 \quad (3.3.3)$$

donde ψ_i es el parámetro del movimiento en el proceso de generación (Fig. 3.3.1(d)).

La función vectorial $\mathbf{r}_i(u_r, \theta_r, \psi_i)$ representa la familia de superficies de Σ_r en el sistema S_i . La ecuación de engrane (3.3.3) se puede determinar por cualquiera de los siguientes procedimientos [Litvin, 1994]:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial u_r} \times \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \theta_r} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \psi_i} = 0 \quad (3.3.4)$$

o

$$\mathbf{N}_r \cdot \mathbf{v}_r^{(ri)} = 0 \quad (3.3.5)$$

donde \mathbf{N}_r es la normal al plano generador de la cremallera y $\mathbf{v}_r^{(ri)}$ es la velocidad relativa entre la cremallera y el engranaje que está siendo generado. Los vectores \mathbf{N}_r y $\mathbf{v}_r^{(ri)}$ se han representado en el sistema S_r con el fin de simplificar la ecuación de engrane.

Las ecuaciones (3.3.2) y (3.3.3), consideradas simultáneamente, representan la superficie Σ_i a través de tres parámetros relacionados. No obstante, es posible obtener las siguientes relaciones $u_r(\theta_r, \psi_i)$, $\theta_r(u_r, \psi_i)$ y $\psi_i(u_r, \theta_r)$ de la Ec. (3.3.3), por lo que Σ_i se puede expresar como función de dos parámetros.

La superficie generada Σ_i es un helicoide con perfil de evolvente. Las líneas de contacto entre las superficies Σ_r y Σ_i se pueden representar en el sistema S_r considerando simultáneamente la función vectorial $\mathbf{r}_r(u_r, \theta_r)$ y la ecuación de engrane (3.3.3)

$$\mathbf{r}_r(u_r(\psi_i), \theta_r(\psi_i)) \quad (3.3.6)$$

La representación de las líneas de contacto en el sistema auxiliar fijo S_a viene dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}_a(\psi_i) = \mathbf{M}_{ar} \mathbf{r}_r(u_r(\psi_i), \theta_r(\psi_i)) \quad (3.3.7)$$

Esta función vectorial representa una familia de líneas de contacto paralelas y es similar a la familia de líneas de contacto representada en la Fig. 3.2.2.

La generación de las superficies del piñón 1 y de la rueda 2 como superficies conjugadas está basada en la aplicación de dos cremalleras con sendos

planos generadores $\Sigma_r^{(1)}$ y $\Sigma_r^{(2)}$. Ambas cremalleras deben presentar una sección normal común. Las magnitudes s_{pn1} y s_{pn2} (Fig. 3.3.1(c)) son iguales a los espesores de los dientes de piñón y rueda, respectivamente, medidos en la sección normal común y sobre los correspondientes cilindros primitivos. Ambos espesores verifican la relación

$$s_{pn1} + s_{pn2} = \pi m_{pn} \quad (3.3.8)$$

donde m_{pn} es el módulo normal.

La generación de superficies conjugadas se ha representado de forma esquemática en la Fig. 3.3.2. Los ejes z_1 y z_2 de piñón y rueda están cruzados según el ángulo γ_p . La distancia mínima entre ejes viene dada por

$$E_p = r_{p1} + r_{p2} \quad (3.3.9)$$

donde r_{p1} y r_{p2} son los radios de los cilindros primitivos de piñón y rueda, respectivamente.

Durante el proceso de generación del piñón, éste presenta un movimiento de rotación con velocidad angular $\omega^{(1)}$ en torno al eje z_1 , mientras que la cremallera $\Sigma_r^{(1)}$ se desplaza perpendicularmente al eje z_1 con la velocidad

$$\mathbf{v}_r^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_1^{(1)} \times \overline{O_1P} \quad (3.3.10)$$

De forma análoga, la rueda gira con velocidad angular $\omega^{(2)}$ y la cremallera $\Sigma_r^{(2)}$ se traslada perpendicularmente al eje z_2 con la velocidad

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \boldsymbol{\omega}_2^{(2)} \times \overline{O_2P} \quad (3.3.11)$$

En las Ecs. (3.3.10) y (3.3.11), $\overline{O_1P}$ y $\overline{O_2P}$ son iguales a los radios de los cilindros primitivos de piñón y rueda, respectivamente. El plano Π_1 y el cilindro de radio r_{p1} constituyen los axoides del movimiento en el proceso de generación del piñón. De forma similar, el plano Π_2 y el cilindro de radio r_{p2} constituyen los axoides en el proceso de generación de la rueda.

Durante el proceso de generación se deben verificar las siguientes condiciones:

- (1) Los planos generadores $\Sigma_r^{(1)}$ y $\Sigma_r^{(2)}$ coinciden y el movimiento relativo entre ellos es de deslizamiento el uno respecto al otro.

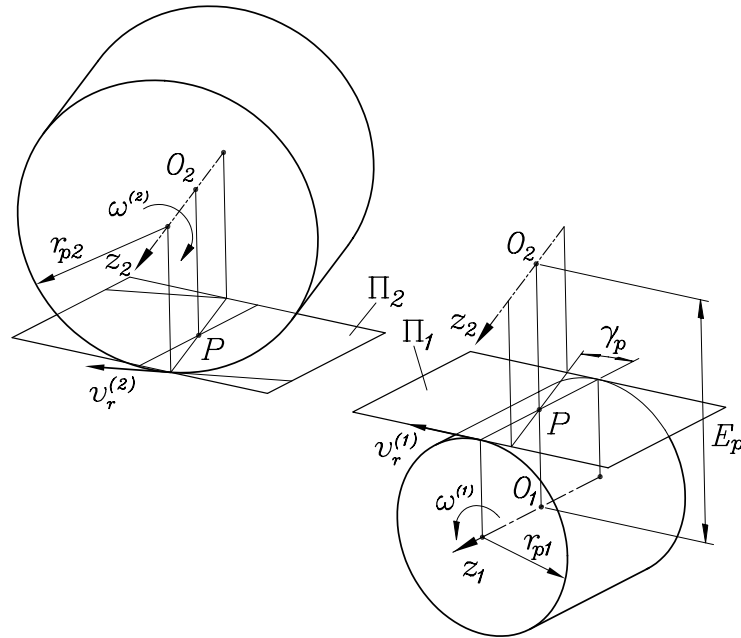


Figura 3.3.2: Generación esquemática de engranajes con ejes cruzados.

- (2) Las velocidades angulares del piñón y de la rueda deben verificar la relación

$$m_{12} = \frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(2)}} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3.3.12)$$

Las superficies generadas Σ_1 y Σ_2 se encuentran en contacto lineal con sus respectivas superficies generadoras $\Sigma_r^{(1)}$ y $\Sigma_r^{(2)}$. Esto se debe a que cada generación está basada en el concepto de envolvente a una familia de superficies. La Figura 3.3.3 muestra dos líneas de contacto, una entre las superficies $\Sigma_r^{(1)}$ y Σ_1 , L_{r1} , y otra entre $\Sigma_r^{(2)}$ y Σ_2 , L_{r2} . Ambas líneas se han obtenido en el mismo instante de generación simultánea y se encuentran sobre el mismo plano siempre que se verifique la condición (1). Ambas líneas se intersectan en el punto N , el cual es el punto común de contacto entre las superficies Σ_1 y Σ_2 . La verificación de la condición (2) garantiza la acción conjugada entre Σ_1 y Σ_2 . En el caso particular en el que $\gamma_p = 0^\circ$, no existe movimiento relativo entre los planos generadores $\Sigma_r^{(1)}$ y $\Sigma_r^{(2)}$, las líneas L_{r1} y L_{r2} coinciden, y las superficies Σ_1 y Σ_2 presentan contacto lineal.

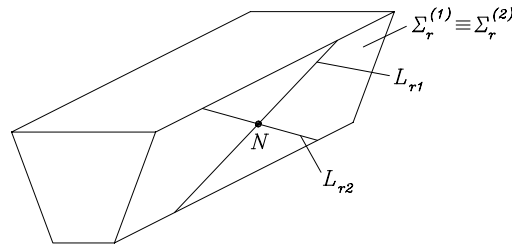


Figura 3.3.3: Punto común N de las líneas de contacto L_{r1} y L_{r2} en el plano generador.

3.4. Diseño de engranajes cilíndricos con ejes cruzados

La generación descrita en el apartado anterior permite obtener una transmisión de engranajes con ejes cruzados nominal o convencional. No obstante, numerosas aplicaciones requieren el uso de transmisiones no convencionales.

Tanto si el diseño es convencional o no convencional, la geometría de las superficies Σ_1 y Σ_2 se puede obtener considerando el concepto de dos cremalleras con una sección normal común y cuyos planos generadores $\Sigma_r^{(1)}$ y $\Sigma_r^{(2)}$ coinciden aunque puedan deslizar el uno respecto al otro.

Considerando el caso más general de diseño no convencional, se tiene:

- (1) Los planos Π_1 y Π_2 de sendas cremalleras (véase Fig. 3.3.2) son tangentes a los cilindros de operación, los cuales difieren de los cilindros primitivos.
- (2) El ángulo de presión α_{on} en la sección común de las cremalleras difiere también del ángulo de presión α_{pn} correspondiente al diseño nominal.
- (3) La distancia mínima entre ejes E_o es igual a la suma de los radios de los cilindros de operación

$$E_o = r_{o1} + r_{o2} \quad (3.4.1)$$

- (4) Los ángulos de hélice en los cilindros de operación β_{o1} y β_{o2} están rela-

cionados con el ángulo entre ejes γ_o mediante

$$\gamma_o = |\beta_{o1} \pm \beta_{o2}| \quad (3.4.2)$$

donde el signo superior corresponde a engranajes con la misma dirección de las hélices (Fig. 3.4.1(a)) y el signo inferior corresponde a engranajes con diferente dirección de las hélices (Fig. 3.4.1(b)).

En el caso particular del diseño convencional, los cilindros de operación coinciden con los cilindros primitivos y las relaciones (3.4.1) y (3.4.2) vienen dadas por $E_p = r_{p1} + r_{p2}$ y $\gamma_p = |\beta_{p1} \pm \beta_{p2}|$, respectivamente.

La obtención de la relación de transmisión m_{12} está basada en los polígonos de velocidad mostrados en la Fig. 3.4.1. Teniendo en cuenta que la velocidad de deslizamiento $\mathbf{v}^{(12)}$ en el punto P de tangencia de los cilindros de operación tiene la misma dirección que la tangente común $t-t$ a las superficies, se obtiene

$$m_{12} = \frac{\omega^{(1)}}{\omega^{(2)}} = \frac{r_{o2} \cos \beta_{o2}}{r_{o1} \cos \beta_{o1}} \quad (3.4.3)$$

La relación de transmisión puede expresarse en términos de los parámetros asociados a los cilindros base. Considerando en (3.4.3) las siguientes relaciones básicas de las superficies de evolvente:

$$\operatorname{tg} \alpha_{oti} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{on}}{\operatorname{sen} \lambda_{oi}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.4)$$

$$r_{oi} \operatorname{tg} \lambda_{oi} = r_{bi} \operatorname{tg} \lambda_{bi} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.5)$$

$$\cos \alpha_{oti} = \frac{r_{bi}}{r_{oi}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.6)$$

se obtiene

$$m_{12} = \frac{r_{b2} \operatorname{sen} \lambda_{b2}}{r_{b1} \operatorname{sen} \lambda_{b1}} \quad (3.4.7)$$

La formulación desarrollada en la obtención de la relación de transmisión m_{12} para el caso general de diseño no convencional es análoga a la del caso particular de diseño convencional, por lo que la relación (3.4.7) se verifica también en este caso. En realidad, la relación (3.4.7) es un invariante de la transmisión, ya que pequeñas modificaciones en el ángulo entre ejes, $\Delta\gamma$, o

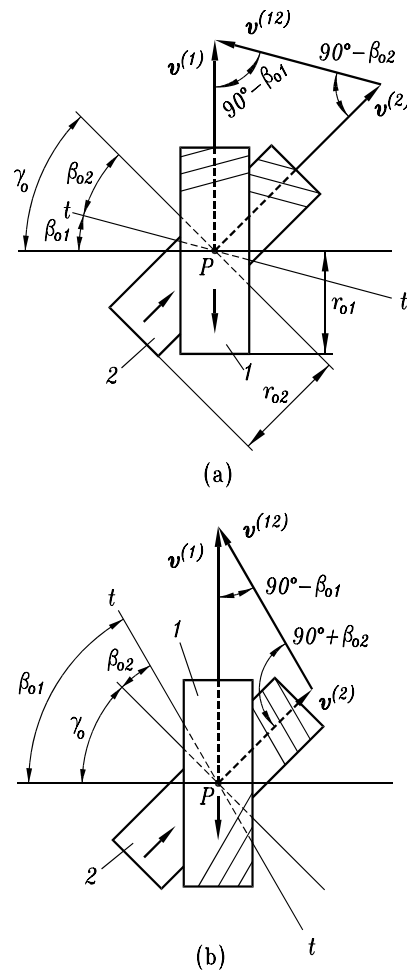


Figura 3.4.1: Polígonos de velocidad en engranajes helicoidales: (a) con las mismas direcciones de hélice y (b) con distintas direcciones de hélice.

en la distancia entre ejes, ΔE , no modifican la relación de transmisión, por lo que ésta se puede seguir expresando como

$$m_{12} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3.4.8)$$

Ésta constituye la propiedad más importante de los engranajes cilíndricos con ejes cruzados y perfil de evolvente: *los errores en el ángulo entre ejes o en la distancia entre ejes no producen errores de transmisión*. No obstante, estos

errores causan el desplazamiento del camino de contacto sobre las superficies y puede aparecer contacto en el borde de las mismas en ciertos casos.

3.4.1. Diseño canónico

El diseño canónico proporciona las relaciones necesarias entre el ángulo entre ejes γ_o y la distancia entre ejes E_o para que las líneas de acción A_1 y A_2 correspondientes a ambos lados del diente se intersecten en el punto de tangencia de los cilindros de operación (Fig. 3.2.4). Dicha disposición de las líneas de acción constituye la localización más favorable para el camino de contacto, permitiendo minimizar las dimensiones de la transmisión.

El diseño canónico establece la relación entre E_o y γ_o a través de los parámetros asociados a los cilindros base, r_{b1} , r_{b2} , λ_{b1} y λ_{b2} , y del ángulo de presión α_{on} en la sección normal común de las cremalleras.

Debido a errores en el ángulo entre ejes o a errores en la distancia entre ejes, la relación entre γ_o y E_o determinada por el diseño canónico deja de verificarse. Las líneas de acción A_1 y A_2 se desplazan entonces respecto a su posición inicial, cruzándose (Fig. 3.2.5), y el camino de contacto aparece desplazado sobre las superficies conjugadas. En el caso de que los engranajes no dispongan de un ancho suficiente, el contacto en el borde es inevitable.

Distancia entre ejes

El objetivo es obtener E_o como función de r_{b1} , r_{b2} , λ_{b1} , λ_{b2} y α_{on} .

Paso 1. Se consideran las relaciones

$$\operatorname{tg} \alpha_{oti} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{on}}{\operatorname{sen} \lambda_{oi}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.9)$$

$$\cos \alpha_{oti} = \frac{\operatorname{tg} \lambda_{oi}}{\operatorname{tg} \lambda_{bi}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.10)$$

La Ec. (3.4.9) corresponde a la relación entre los ángulos de presión de las secciones normal y transversal y es similar a la obtenida en (3.3.1) en el caso del diseño convencional.

La Ec. (3.4.10) es la relación entre los ángulos de carga en una superficie helicoidal con perfil de evolvente y se obtiene considerando las relaciones $r_{oi} \operatorname{tg} \lambda_{oi} = r_{bi} \operatorname{tg} \lambda_{bi}$ y $r_{bi} = r_{oi} \cos \alpha_{oti}$.

Las ecuaciones (3.4.9) y (3.4.10) permiten obtener las siguientes relaciones:

(a)

$$1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_{on}}{\operatorname{sen}^2 \lambda_{oi}} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{oti} = \frac{1}{\cos^2 \alpha_{oti}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \lambda_{bi}}{\operatorname{tg}^2 \lambda_{oi}} \quad (3.4.11)$$

$$1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_{on}}{\operatorname{sen}^2 \lambda_{oi}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \lambda_{bi}}{\operatorname{tg}^2 \lambda_{oi}} \quad (3.4.12)$$

(b) A partir de la Ec. (3.4.12), se deriva

$$\operatorname{sen}^2 \lambda_{oi} + \operatorname{tg}^2 \alpha_{on} = \cos^2 \lambda_{oi} \operatorname{tg}^2 \lambda_{bi} \quad (3.4.13)$$

$$1 - \cos^2 \lambda_{oi} + \operatorname{tg}^2 \alpha_{on} = \cos^2 \lambda_{oi} \operatorname{tg}^2 \lambda_{bi} \quad (3.4.14)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{on} = \cos^2 \lambda_{oi} (1 + \operatorname{tg}^2 \lambda_{bi}) \quad (3.4.15)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_{on}} = \frac{\cos^2 \lambda_{oi}}{\cos^2 \lambda_{bi}} \quad (3.4.16)$$

Finalmente, se obtiene la relación

$$\cos \lambda_{oi} = \frac{\cos \lambda_{bi}}{\cos \alpha_{on}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.17)$$

Paso 2. Considerando la relación básica $r_{oi} \operatorname{tg} \lambda_{oi} = r_{bi} \operatorname{tg} \lambda_{bi}$, se tiene

$$r_{oi} = \frac{r_{bi} \operatorname{tg} \lambda_{bi}}{\operatorname{tg} \lambda_{oi}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.18)$$

y

$$E_o = r_{o1} + r_{o2} = \frac{r_{b1} \operatorname{tg} \lambda_{b1}}{\operatorname{tg} \lambda_{o1}} + \frac{r_{b2} \operatorname{tg} \lambda_{b2}}{\operatorname{tg} \lambda_{o2}} \quad (3.4.19)$$

Teniendo en cuenta la relación obtenida en (3.4.17), se obtiene la siguiente expresión de E_o

$$E_o = \frac{r_{b1} \operatorname{sen} \lambda_{b1}}{(\cos^2 \alpha_{on} - \cos^2 \lambda_{b1})^{0,5}} + \frac{r_{b2} \operatorname{sen} \lambda_{b2}}{(\cos^2 \alpha_{on} - \cos^2 \lambda_{b2})^{0,5}} \quad (3.4.20)$$

Ángulo entre ejes

El objetivo es igualmente obtener γ_o como función de r_{b1} , r_{b2} , λ_{b1} , λ_{b2} y α_{on} .

Paso 1. Se considera la relación

$$\cos \alpha_{on} = \frac{\cos \lambda_{bi}}{\cos \lambda_{oi}} \quad (i = 1, 2) \quad (\text{Ver Ec. (3.4.17)}) \quad (3.4.21)$$

la cual da lugar a

$$\frac{\cos \lambda_{o1}}{\cos \lambda_{o2}} = \frac{\cos \lambda_{b1}}{\cos \lambda_{b2}} \quad (3.4.22)$$

y la relación

$$\gamma_o = |\beta_{o1} \pm \beta_{o2}| \quad (3.4.23)$$

Paso 2. Las funciones $\cos \gamma_o$ y $\sen \gamma_o$, considerando (3.4.23), se expresan como

$$\cos \gamma_o = \cos \beta_{o1} \cos \beta_{o2} \mp \sen \beta_{o1} \sen \beta_{o2} \quad (3.4.24)$$

$$\sen \gamma_o = \sen \beta_{o1} \cos \beta_{o2} \pm \cos \beta_{o1} \sen \beta_{o2} \quad (3.4.25)$$

Paso 3. Teniendo en cuenta $\beta_{oi} = 90^\circ - \lambda_{oi}$, las ecuaciones (3.4.24) y (3.4.25) se pueden expresar como

$$\cos \gamma_o = \sen \lambda_{o1} \sen \lambda_{o2} \mp \cos \lambda_{o1} \cos \lambda_{o2} \quad (3.4.26)$$

$$\sen \gamma_o = \cos \lambda_{o1} \sen \lambda_{o2} \pm \sen \lambda_{o1} \cos \lambda_{o2} \quad (3.4.27)$$

Paso 4. La siguiente relación está basada en la Ec. (3.4.26)

$$\sen \lambda_{o1} \sen \lambda_{o2} = \cos \gamma_o \pm \cos \lambda_{o1} \cos \lambda_{o2} \quad (3.4.28)$$

$$\begin{aligned} & \sen^2 \gamma_o \cos^2 \alpha_{on} = \\ & = \cos^2 \lambda_{b1} \sen^2 \lambda_{o2} \pm 2 \cos \lambda_{b1} \cos \lambda_{b2} \sen \lambda_{o1} \sen \lambda_{o2} + \cos^2 \lambda_{b2} \sen^2 \lambda_{o1} = \\ & = \cos^2 \lambda_{b1} \pm 2 \cos \lambda_{b1} \cos \lambda_{b2} \sen \lambda_{o1} \sen \lambda_{o2} + \cos^2 \lambda_{b2} - \frac{2 \cos^2 \lambda_{b1} \cos^2 \lambda_{b2}}{\cos^2 \alpha_{on}} \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Paso 5. Las Ecs. (3.4.28) y (3.4.29) dan la siguiente expresión final

$$\cos^2 \alpha_{on} \sen^2 \gamma_o = \cos^2 \lambda_{b1} \pm 2 \cos \lambda_{b1} \cos \lambda_{b2} \cos \gamma_o + \cos^2 \lambda_{b2} \quad (3.4.30)$$

Las ecuaciones (3.4.20) y (3.4.30) establecen una relación entre E_o y γ_o a través de α_{on} y los parámetros asociados a los cilindros base.

A continuación se presentan tres ejemplos de diseño en los que se verifican las condiciones del diseño canónico.

Ejemplo 1. Diseño convencional

Datos de la transmisión: $N_1 = 12$; $N_2 = 29$; $\beta_{p1} = 47,5^\circ$; $\beta_{p2} = 42,5^\circ$;
 $\gamma_p = 90^\circ$; $m_{pn} = 4,0$ mm; $\alpha_{pn} = 25^\circ$.

Ángulos de presión transversal:

$$\alpha_{pt1} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_{pn}}{\cos \beta_{p1}} \right) = 34,6143^\circ$$

$$\alpha_{pt2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_{pn}}{\cos \beta_{p2}} \right) = 32,3122^\circ$$

Módulos en la sección transversal:

$$m_{pt1} = \frac{m_{pn}}{\cos \beta_{p1}} = 5,9207 \text{ mm}$$

$$m_{pt2} = \frac{m_{pn}}{\cos \beta_{p2}} = 5,4254 \text{ mm}$$

Radios de los cilindros primitivos:

$$r_{p1} = \frac{m_{pt1} N_1}{2} = 35,5245 \text{ mm}$$

$$r_{p2} = \frac{m_{pt2} N_2}{2} = 78,6678 \text{ mm}$$

Radios de los cilindros de base:

$$r_{b1} = r_{p1} \cos \alpha_{pt1} = 29,2365 \text{ mm}$$

$$r_{b2} = r_{p2} \cos \alpha_{pt2} = 66,4859 \text{ mm}$$

Ángulos de carga en los cilindros de base:

$$\lambda_{b1} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\cos \alpha_{pt1} \operatorname{tg} \beta_{p1}} \right) = 48,0717^\circ$$

$$\lambda_{b2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\cos \alpha_{pt2} \operatorname{tg} \beta_{p2}} \right) = 52,2445^\circ$$

Distancia mínima entre ejes:

$$E_p = r_{p1} + r_{p2} = 114,1923 \text{ mm}$$

Espesores de los dientes en los cilindros primitivos:

$$s_{pt1} = r_{p1} \frac{\pi}{N_1} = 9,3003 \text{ mm}$$

$$s_{pt2} = r_{p2} \frac{\pi}{N_2} = 8,5221 \text{ mm}$$

Radios de los cilindros de adendo y dedendo:

$$r_{pa1} = r_{p1} + m_{pn} = 39,5245 \text{ mm}$$

$$r_{pa2} = r_{p2} + m_{pn} = 82,6678 \text{ mm}$$

$$r_{pd1} = r_{p1} - 1,25m_{pn} = 30,5245 \text{ mm}$$

$$r_{pd2} = r_{p2} - 1,25m_{pn} = 73,6678 \text{ mm}$$

Se puede verificar que las ecuaciones (3.4.20) y (3.4.30) que relacionan E_o y γ_o se satisfacen en el diseño convencional.

Ejemplo 2. Método 1 para el diseño no convencional de engranajes helicoidales con ejes cruzados

Este procedimiento está basado en las siguientes consideraciones:

- (i) Los parámetros λ_{b1} , λ_{b2} , r_{b1} , r_{b2} son los mismos que los considerados en el correspondiente diseño convencional.
- (ii) Los espesores de los dientes s_{pt1} y s_{pt2} de los engranajes a diseñar son conocidos y distintos de los dados en el diseño convencional.
- (iii) El juego circunferencial en los cilindros de operación es nulo, satisfaciéndose la relación

$$s_{ot1} \text{ sen } \lambda_{o1} + s_{ot2} \text{ sen } \lambda_{o2} = p_{on} = \pi m_{on} \quad (3.4.31)$$

donde

$$s_{ot1} = \left[\frac{s_{pt1}}{r_{p1}} + 2(\text{inv}\alpha_{pt1} - \text{inv}\alpha_{ot1}) \right] r_{o1} \quad (3.4.32)$$

$$s_{ot2} = \left[\frac{s_{pt2}}{r_{p2}} + 2(\text{inv}\alpha_{pt2} - \text{inv}\alpha_{ot2}) \right] r_{o2} \quad (3.4.33)$$

$$r_{oi} = \frac{N_i m_{oti}}{2} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.34)$$

$$m_{oti} = \frac{m_{on}}{\text{sen } \lambda_{oi}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.4.35)$$

A continuación se desarrolla el algoritmo del método.

Se consideran los siguientes valores de los espesores de los dientes: $s_{pt1} = 10,9568$ mm y $s_{pt2} = 9,5341$ mm, los cuales corresponden a los desplazamientos de herramienta $\chi_1 = 0,3m_{pn}$ y $\chi_2 = 0,2m_{pn}$ [Litvin, 1994].

Los ángulos de presión transversal están relacionados por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$N_1 \operatorname{inv} \alpha_{ot1} + N_2 \operatorname{inv} \alpha_{ot2} = A \quad (3.4.36)$$

donde

$$A = N_1 \left(\frac{s_{pt1}}{2r_{p1}} + \operatorname{inv} \alpha_{pt1} \right) + N_2 \left(\frac{s_{pt2}}{2r_{p2}} + \operatorname{inv} \alpha_{pt2} \right) - \pi$$

y

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha_{ot1}}{\operatorname{sen} \alpha_{ot2}} = \frac{\operatorname{sen} \lambda_{b2}}{\operatorname{sen} \lambda_{b1}} \quad (3.4.37)$$

La Ec. (3.4.36) se obtiene utilizando las Ecs. (3.4.31) a (3.4.35). La Ec. (3.4.37) se obtiene a partir de las ecuaciones (3.4.4) a (3.4.6).

Resolviendo el sistema anterior, se obtiene:

$$\alpha_{ot1} = 36,1615^\circ, \quad \alpha_{ot2} = 33,7277^\circ$$

Los radios de los cilindros de operación vienen dados por:

$$r_{o1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_{ot1}} = 36,2125 \text{ mm}$$

$$r_{o2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_{ot2}} = 79,9412 \text{ mm}$$

Los ángulos de hélice en los cilindros de operación valen:

$$\beta_{o1} = \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{o1}}{r_{b1} \operatorname{tg} \lambda_{b1}} \right) = 48,0470^\circ$$

$$\beta_{o2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{r_{o2}}{r_{b2} \operatorname{tg} \lambda_{b2}} \right) = 42,9586^\circ$$

Los engranajes con diseño no convencional se generan por dos cremalleras con el mismo valor del ángulo de presión normal α_{on} , el cual se obtiene como

$$\alpha_{on} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha_{oti} \cos \beta_{oi}) = 26,0398^\circ \quad (i = 1, 2)$$

El nuevo módulo normal m_{on} viene dado por

$$m_{on} = \frac{2r_{oi} \cos \beta_{oi}}{N_i} = 4,0348 \text{ mm} \quad (i = 1, 2)$$

La nueva distancia mínima entre ejes es

$$E_o = r_{o1} + r_{o2} = 116,1537 \text{ mm}$$

El nuevo ángulo entre ejes es

$$\gamma_o = \beta_{o1} + \beta_{o2} = 91,0055^\circ$$

Los nuevos radios de los cilindros de adendo y dedendo son:

$$r_{oa1} = r_{o1} + m_{on} = 40,2473 \text{ mm}$$

$$r_{oa2} = r_{o2} + m_{on} = 83,9760 \text{ mm}$$

$$r_{od1} = r_{o1} - 1,25m_{on} = 31,1690 \text{ mm}$$

$$r_{od2} = r_{o2} - 1,25m_{on} = 74,8977 \text{ mm}$$

Se puede comprobar que las relaciones (3.4.20) y (3.4.30) se verifican en este método de diseño por lo que las líneas de acción en la transmisión diseñada se intersectan en el punto de tangencia de los cilindros de operación.

Ejemplo 3. Método 2 para el diseño no convencional de engranajes helicoidales con ejes cruzados

El Método 1 de diseño de engranajes no convencionales expuesto en el Ejemplo 2 muestra que el ángulo entre ejes se ha de modificar ligeramente respecto al dado en el diseño convencional (Ejemplo 1).

El objetivo principal del método 2 propuesto en este ejemplo es mantener el mismo ángulo entre ejes que en el caso del diseño convencional. Este método está basado en las siguientes consideraciones:

- (i) El ángulo entre ejes γ_o es el mismo que el dado en el diseño convencional γ_p .
- (ii) El módulo normal m_{pn} y el ángulo de presión α_{pn} en la sección normal común de las cremalleras son dados.

- (iii) Los desplazamientos de herramienta χ_1 y χ_2 son conocidos y se verifica la condición de juego circunferencial nulo, medido sobre los cilindros de operación.

El algoritmo del método es un proceso iterativo, el cual se inicia asignando valores iniciales a los ángulos de hélice β_{p1} y β_{p2} . Los pasos del algoritmo son los siguientes:

Paso 1. Determinación de los parámetros asociados a los cilindros primitivos en función de β_{p1} y β_{p2} .

$$\begin{aligned} r_{pi} &= \frac{m_{pn} N_i}{2 \cos \beta_{pi}} \quad (i = 1, 2) \\ \alpha_{pti} &= \arctg \frac{\operatorname{tg} \alpha_{pn}}{\cos \beta_{pi}} \quad (i = 1, 2) \\ s_{pti} &= \frac{\pi m_{pn}}{2 \cos \beta_{pi}} + 2\chi_i m_{pn} \operatorname{tg} \alpha_{pti} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Paso 2. Determinación de los parámetros asociados a los cilindros bases.

$$\begin{aligned} r_{bi} &= r_{pi} \cos \alpha_{pti} \quad (i = 1, 2) \\ \lambda_{bi} &= \arctg \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_{pi} \cos \alpha_{pti}} \quad (i = 1, 2) \\ s_{bti} &= r_{bi} \left(\frac{s_{pti}}{r_{pi}} + 2 \operatorname{inv} \alpha_{pti} \right) \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Paso 3. Determinación de los parámetros asociados a los cilindros de operación.

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{on} &= \frac{(\cos^2 \lambda_{b1} \pm 2 \cos \lambda_{b1} \cos \lambda_{b2} \cos \gamma_o + \cos^2 \lambda_{b2})^{0,5}}{\operatorname{sen} \gamma_o} \\ r_{oi} &= \frac{r_{bi} \operatorname{sen} \lambda_{bi}}{\sqrt{\cos^2 \alpha_{on} - \cos^2 \lambda_{bi}}} \quad (i = 1, 2) \\ \lambda_{oi} &= \arctg \frac{r_{bi} \operatorname{tg} \lambda_{bi}}{r_{oi}} \quad (i = 1, 2) \\ \alpha_{oti} &= \operatorname{arc} \cos \frac{r_{bi}}{r_{oi}} \quad (i = 1, 2) \\ s_{oti} &= r_{oi} \left(\frac{s_{bi}}{r_{bi}} - 2 \operatorname{inv} \alpha_{oti} \right) \quad (i = 1, 2) \\ m_{on} &= \frac{2r_{o1} \operatorname{sen} \lambda_{o1}}{N_1} \end{aligned}$$

Paso 4. Determinación de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{r_{b2} \operatorname{sen} \lambda_{b2}}{r_{b1} \operatorname{sen} \lambda_{b1}} - m_{12} \\ f_2 &= s_{ot1} \operatorname{sen} \lambda_{o1} + s_{ot2} \operatorname{sen} \lambda_{o2} - \pi m_{on} \end{aligned}$$

Para la determinación de β_{p1} y β_{p2} se requiere un proceso iterativo hasta que las ecuaciones $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ sean satisfechas. La ecuación $f_1 = 0$ corresponde a la condición dada por la relación de transmisión (véase Ec. (3.4.7)), mientras que la ecuación $f_2 = 0$ corresponde a la condición de juego circunferencial nulo en los cilindros de operación (véase Ec. (3.4.31)). Los valores de β_{p1} y β_{p2} en la primera iteración pueden ser los mismos que en el diseño convencional. No obstante, la solución es diferente e igualmente válida si se consideran valores iniciales diferentes.

Los datos considerados en este ejemplo son los mismos que en el Ejemplo 2. Los desplazamientos de herramienta son $\chi_1 = 0,3m_{pn}$, $\chi_2 = 0,2m_{pn}$. El ángulo entre ejes es $\gamma_o = \gamma_p = 90^\circ$. El proceso iterativo arroja los siguientes valores de los ángulos de hélice:

$$\beta_{p1} = 46,9860^\circ, \quad \beta_{p2} = 42,0010^\circ$$

Una vez determinados β_{p1} y β_{p2} , los parámetros de la transmisión se obtienen utilizando los pasos del 1 al 3. La nueva distancia mínima entre ejes es:

$$E_o = r_{o1} + r_{o2} = 115,1898 \text{ mm.}$$

El ángulo entre ejes $\gamma_o = 90^\circ$ se satisface ya que

$$\gamma_o = 180^\circ - \lambda_{o1} - \lambda_{o2} = 180^\circ - 42,4631^\circ - 47,5369^\circ = 90,0000^\circ$$

Tanto E_o como γ_o satisfacen las relaciones del diseño canónico por lo que las líneas de acción se intersectan en el punto de tangencia de los cilindros de operación.

3.5. Análisis del contacto. Determinación analítica de las líneas de acción

El análisis del contacto o TCA en los engranajes con contacto localizado está basado en la igualdad de los vectores posición y en la colinealidad de las

normales en un sistema fijo de referencia (véase Fig. 2.9.1):

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \psi_1, \phi_1) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (3.5.1)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(\psi_1, \phi_1) - \mathbf{n}_f^{(2)}(\psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (3.5.2)$$

donde (u_i, ψ_i) ($i = 1, 2$) son los parámetros de superficie y ϕ_i ($i = 1, 2$) son los ángulos de rotación.

Las Ecs. (3.5.1) y (3.5.2) proporcionan un sistema de cinco ecuaciones con seis incógnitas (véase Apartado 2.9). Considerando ϕ_1 como variable independiente es posible obtener las funciones

$$\{u_1(\phi_1), \psi_1(\phi_1), u_2(\phi_1), \psi_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1)\} \in C^1 \quad (3.5.3)$$

en el entorno de $P^{(0)}(u_1^{(0)}, \psi_1^{(0)}, \phi_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \psi_2^{(0)}, \phi_2^{(0)})$, siempre que: (i) $P^{(0)}$ sea un conjunto de valores que verifican el sistema de ecuaciones dado por (3.5.1) y (3.5.2); (ii) el Jacobiano del sistema de ecuaciones dado por (3.5.1) y (3.5.2) en $P^{(0)}$ sea distinto de cero.

El análisis del contacto permite obtener los caminos de contacto sobre Σ_1 y Σ_2

$$\mathbf{r}_1(\phi_1) = \mathbf{M}_{1f} \mathbf{r}_f^{(1)}(u_1(\phi_1), \psi_1(\phi_1), \phi_1) \quad (3.5.4)$$

$$\mathbf{r}_2(\phi_1) = \mathbf{M}_{2f} \mathbf{r}_f^{(2)}(u_2(\phi_1), \psi_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1)) \quad (3.5.5)$$

y la función de errores de transmisión

$$\Delta\phi_2 = \phi_2(\phi_1) - \frac{N_1}{N_2} \phi_1 \quad (3.5.6)$$

La línea de acción viene dada por

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \psi_1, \phi_1); \quad u_1(\phi_1); \quad \psi_1(\phi_1) \quad (3.5.7)$$

La aplicación del TCA permite verificar que el diseño canónico garantiza la intersección de las líneas de acción correspondiente a los dos lados del diente en el punto de tangencia de los cilindros de operación (primitivos en el caso del diseño convencional). Igualmente se confirma que los errores en el ángulo entre ejes $\Delta\gamma$ o en la distancia entre ejes ΔE no causan errores de transmisión, aunque sí el desplazamiento del camino de contacto.

La Figura 3.5.1 muestra el desplazamiento del camino de contacto desde la zona I hasta la zona II debido a un error $\Delta\gamma$. El contacto en la zona II se encuentra fuera de los límites de la superficie y los errores de transmisión obtenidos valen cero. Sin embargo, dado que las superficies helicoidales Σ_1 y Σ_2 están delimitadas por el ancho del diente, el contacto entre ambas superficies no puede tener lugar en la zona II sino que tendrá lugar en el borde de las superficies.

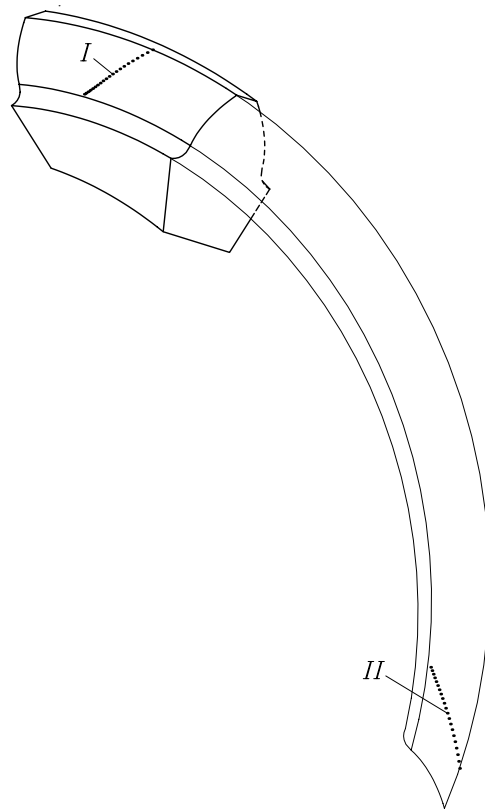


Figura 3.5.1: Zonas de contacto en el caso de una transmisión alineada y otra desalineada: la zona *I* corresponde a $\Delta\gamma = 0$ y la zona *II* corresponde a $\Delta\gamma \neq 0$.

Las condiciones de contacto en el borde de la superficie del diente del

piñón vienen dadas por

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1(\psi_1), \psi_1, \phi_1) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_2, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (3.5.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_f^{(1)}}{\partial \psi_1} \cdot \mathbf{n}_f^{(2)} = 0 \quad (3.5.9)$$

El vector $\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1(\psi_1), \psi_1, \phi_1)$ representa, para un valor de ϕ_1 , una posición instantánea del borde de la superficie del diente del piñón. El vector $\partial \mathbf{r}_f^{(1)} / \partial \psi_1$ representa su tangente.

La Ec. (3.5.8) indica que el borde de la superficie del diente del piñón y la superficie de la rueda están en contacto. La Ec. (3.5.9) indica que la normal a Σ_2 es perpendicular a dicho borde.

En el caso de que el contacto tenga lugar entre la superficie del piñón y el borde de la superficie de la rueda, se obtiene un sistema de ecuaciones similar al anterior. En este caso se tiene:

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, \psi_1, \phi_1) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_2(\psi_2), \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (3.5.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_f^{(2)}}{\partial \psi_2} \cdot \mathbf{n}_f^{(1)} = 0 \quad (3.5.11)$$

donde $\mathbf{r}_f^{(2)}(u_2(\psi_2), \psi_2, \phi_2)$ representa una posición instantánea del borde de la superficie de la rueda y $\partial \mathbf{r}_f^{(2)} / \partial \psi_2$ es un vector tangente a dicho borde.

Para resolver cualquiera de los sistemas anteriores, se considera un mismo valor de ϕ_1 . Cada sistema tiene entonces cuatro ecuaciones escalares y cuatro incógnitas. Resueltos los sistemas independientemente, se pueden obtener las funciones $\phi_2(\phi_1)$ en cada uno de ellos. El sistema de ecuaciones que nos debe proporcionar el punto de contacto es aquel que da un valor menor de ϕ_2 para un mismo valor de ϕ_1 .

La Figura 3.5.2(a) muestra los caminos de contacto sobre los bordes E_1 y E_2 , resultado de aplicar los dos sistemas de ecuaciones mencionados anteriormente. El contacto en el borde impide que éste tenga lugar en la posición correspondiente a la acción conjugada. El contacto correspondiente a la acción conjugada se ha representado sobre una prolongación de las superficies Σ_1 y Σ_2 en la Fig. 3.5.2(a). Para ello se han aplicado las ecuaciones del TCA

entre dos superficies, considerando que no están delimitadas por el ancho del diente.

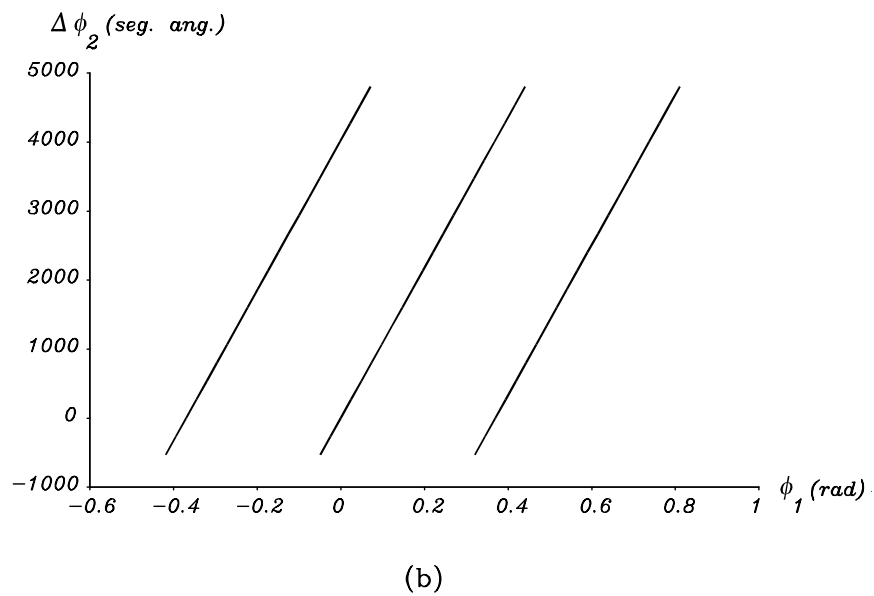
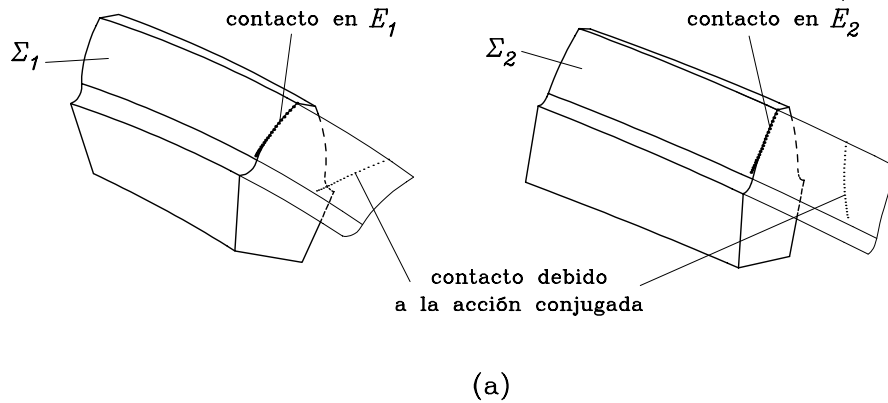


Figura 3.5.2: Contacto en el borde y errores de transmisión: (a) contacto sobre los bordes E_1 y E_2 y contacto debido a la acción conjugada; (b) función de errores de transmisión debido al contacto en el borde.

Como consecuencia del contacto en una zona diferente a la debida a la acción conjugada, es de esperar que aparezcan errores de transmisión. La Fig.

3.5.2(b) muestra los correspondientes errores de transmisión, los cuales vienen dados por una función discontinua, fuente de ruido y vibración. El contacto en el borde causa además tensiones de contacto elevadas.

Siempre que el contacto tenga lugar dentro de los límites de las superficies con perfil de evolvente, los errores de transmisión no existen dado que se garantiza la acción conjugada. Esta situación, no obstante, no siempre es posible, especialmente en transmisiones sensibles a los errores de alineación.

Es importante, por tanto, determinar de forma analítica la líneas de acción y su desplazamiento debido a los errores de alineación. La determinación del desplazamiento de las mismas como función de los errores de alineación, en particular $\Delta\gamma$ y ΔE , permite conocer la sensibilidad de la transmisión frente a dichos errores.

3.5.1. Determinación analítica de las líneas de acción

La determinación analítica de las líneas de acción en una transmisión desalineada es importante para predecir la existencia de contacto en el borde (y de errores de transmisión). Además permite conocer la sensibilidad de la transmisión a los errores de alineación. En las Figs. 3.2.4 y 3.2.5 se representaron las líneas de acción en el caso de una transmisión alineada y otra desalineada, respectivamente. Dicha representación se obtuvo numéricamente utilizando un programa desarrollado para el análisis del contacto (TCA).

La determinación analítica de la línea de acción requiere su representación en el plano tangente al cilindro base de uno de los engranajes de la transmisión, por ejemplo el piñón. Dicha representación exige conocer su orientación y su localización.

En primer lugar se considera una transmisión alineada donde γ_o y E_o representan el ángulo entre ejes y la distancia entre ejes. La Fig. 3.5.3(a) muestra la línea de acción $A_1^{(0)}$ sobre el plano Π_1 tangente al cilindro base del piñón. La orientación del plano Π_1 viene dada por el ángulo de presión transversal de funcionamiento en el piñón α_{ot1} . La orientación de $A_1^{(0)}$ en Π_1 viene dada por la perpendicular a las líneas de contacto L_{r1} entre la superficie Σ_1 y su plano generador Σ_{r1} . El ángulo λ_{b1} determina la orientación de la línea de acción en el plano Π_1 . La localización de $A_1^{(0)}$ viene determinada por

la intersección de la misma con la recta O_1O_2 , correspondiente a la distancia mínima entre ejes. El punto de intersección es el punto P de tangencia de los cilindros de operación de piñón y rueda.

A continuación se considera una transmisión desalineada donde γ_o^* y E_o^* representan el nuevo ángulo entre ejes y la nueva distancia entre ejes debidos a los errores de alineación $\Delta\gamma$ y ΔE , respectivamente. Se tiene entonces

$$\gamma_o^* = \gamma_o + \Delta\gamma \tag{3.5.12}$$

$$E_o^* = E_o + \Delta E \tag{3.5.13}$$

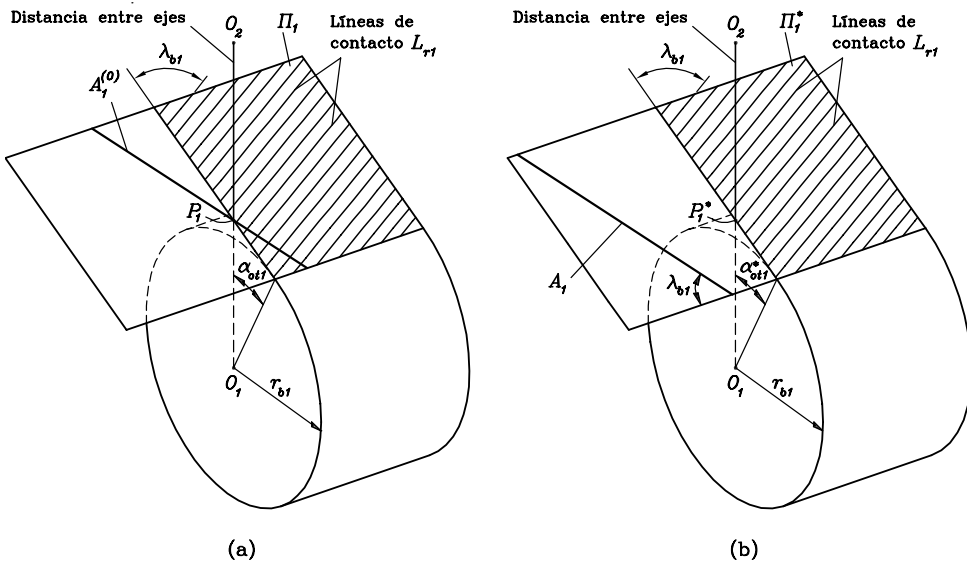


Figura 3.5.3: Localización de la línea de acción en los casos de: (a) transmisión alineada y (b) transmisión desalineada.

La Fig. 3.5.3(b) muestra la nueva localización A_1 de la línea de acción sobre el plano Π_1^* tangente al cilindro de base del piñón. La orientación del plano Π_1^* viene dada por el nuevo ángulo de presión transversal de funcionamiento en el piñón α_{ot1}^* . La orientación de A_1 en el plano Π_1^* viene dada por la perpendicular a las líneas de contacto L_{r1} entre la superficie Σ_1 y la superficie Σ_{r1} . El ángulo λ_{b1} determina la orientación de la línea de acción en el plano Π_1^* . La localización de A_1 se determina a continuación, utilizando como refer-

encia el punto P_1^* correspondiente a la intersección del plano Π_1^* con la recta O_1O_2 .

El procedimiento para obtener la localización de la línea de acción es el siguiente.

Se considera una transmisión con ejes cruzados según el ángulo $\gamma_o^* = \gamma_o + \Delta\gamma$ y distancia entre ejes $E_o^* = E_o + \Delta E$. Los parámetros asociados a los cilindros base r_{b1} , r_{b2} , λ_{b1} y λ_{b2} son conocidos.

Paso 1. El ángulo de presión en la sección normal de las cremalleras se obtiene utilizando la Ec. (3.4.30) como

$$\cos^2 \alpha_{on}^* = \frac{\cos^2 \lambda_{b1} \pm 2 \cos \lambda_{b1} \cos \lambda_{b2} \cos \gamma_o^* + \cos^2 \lambda_{b2}}{\text{sen}^2 \gamma_o^*} \quad (3.5.14)$$

Los signos superior e inferior en la Ec. (3.5.14) corresponden a engranajes con el mismo o diferente sentido de la hélice, respectivamente.

Paso 2. Los ángulos de presión α_{oti}^* ($i = 1, 2$) en las secciones transversales de piñón y rueda se obtienen como

$$\text{sen } \alpha_{oti}^* = \frac{\text{sen } \alpha_{on}^*}{\text{sen } \lambda_{bi}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.5.15)$$

El ángulo α_{ot1}^* determina la orientación del plano Π_1^* en el piñón.

Paso 3. Se determinan los radios r_{oi}^* ($i = 1, 2$) correspondientes a los cilindros axoides del proceso de generación por las cremalleras cuyo ángulo de presión normal es α_{on}^* :

$$r_{oi}^* = \frac{r_{bi}}{\cos \alpha_{oti}^*} \quad (i = 1, 2) \quad (3.5.16)$$

La suma de los radios r_{oi}^* ($i = 1, 2$) en la transmisión desalineada no tiene por qué coincidir con la distancia existente entre ejes E_o^* .

Paso 4. Se determinan los parámetros h_1 y h_2 de desplazamiento de la línea de acción en los respectivos planos Π_1^* y Π_2^* . Los parámetros h_1 y h_2 se miden en dirección perpendicular a la línea de acción y vienen dados por

$$h_1 = \frac{r_{b2} + r_{b1} \frac{\cos \alpha_{ot2}^*}{\cos \alpha_{ot1}^*} - E_o^* \cos \alpha_{ot2}^*}{\text{sen } \alpha_{ot2}^* \text{sen } \gamma_o^*} \text{sen } \lambda_{b1} \quad (3.5.17)$$

$$h_2 = \frac{A}{B} \quad (3.5.18)$$

donde

$$A = r_{b1} + r_{b2} \frac{\cos \alpha_{ot1}^*}{\cos \alpha_{ot2}^*} - E_o^* \cos \alpha_{ot1}^* \quad (3.5.19)$$

$$B = \begin{aligned} & \text{sen } \lambda_{b2} \text{sen } \alpha_{ot1} \text{sen } \gamma_o^* \\ & + \cos \lambda_{b2} (\cos \alpha_{ot1}^* \text{sen } \alpha_{ot2}^* - \cos \alpha_{ot2}^* \text{sen } \alpha_{ot1}^* \cos \gamma_o^*) \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

La obtención de h_1 y h_2 está basada en las siguientes consideraciones:

- (1) La Figura 3.5.4 muestra los sistemas de coordenadas S_f y S_a solidarios al piñón. El plano Π_1^* (Fig. 3.5.4(a)) es tangente al cilindro base de radio r_{b1} . Las líneas de contacto entre las superficies Σ_1 y Σ_{r1} se han representado sobre dicho plano. La orientación de las líneas de contacto viene dada por el ángulo λ_{b1} (Fig. 3.5.4(b)).
- (2) La línea de acción A_1 de la transmisión desalineada se encuentra desplazada la magnitud h_1 respecto al punto P_1^* . La localización de un punto M_1 sobre la línea A_1 viene dada por el parámetro m_1 (Fig. 3.5.4(b)).
- (3) La Figura 3.5.5 muestra los sistemas de coordenadas S_b y S_p solidarios a la rueda. El plano Π_2^* (Fig. 3.5.5(a)) es tangente al cilindro base de radio r_{b2} . Las líneas de contacto entre las superficies Σ_2 y Σ_{r2} se han representado sobre dicho plano. La orientación de las líneas de contacto viene dada por el ángulo λ_{b2} (Fig. 3.5.5(b)).
- (4) La línea de acción A_1 de la transmisión desalineada se encuentra desplazada la magnitud h_2 respecto al punto P_2^* . El punto M_2 se encuentra sobre A_1 y dista de P_2^* la distancia h_2 .
- (5) La Figura 3.5.6 muestra los sistemas de coordenadas S_p y S_f . La determinación de h_1 y h_2 sobre los planos Π_1^* y Π_2^* se basa en:

- (i) El punto M_1 sobre el plano Π_1^* viene dado en el sistema S_f por el vector

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(h_1, m_1, r_{b1}, \lambda_{b1}, \alpha_{ot1}^*) \quad (3.5.21)$$

donde h_1 y m_1 se han de determinar.

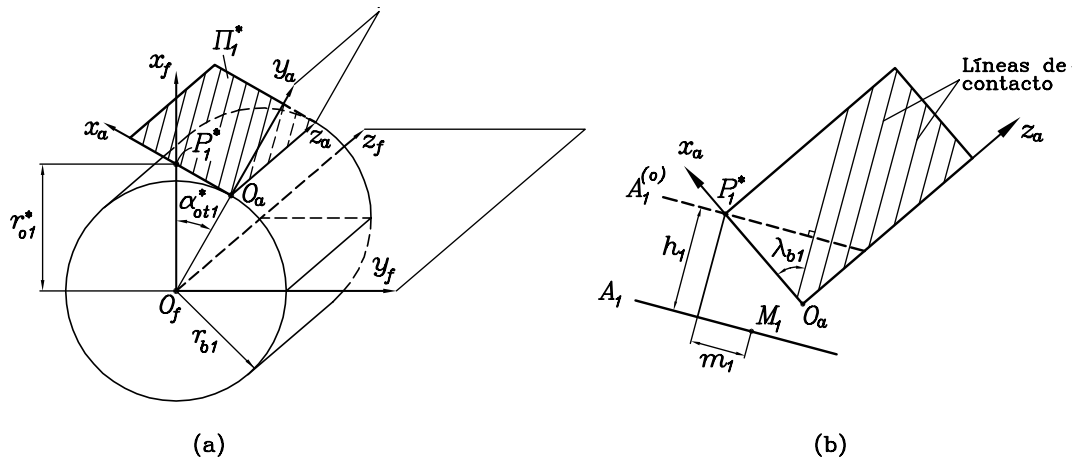


Figura 3.5.4: Representación de: (a) plano Π_1^* y líneas de contacto sobre Π_1^* ; (b) línea de acción A_1 y parámetros h_1 y m_1 .

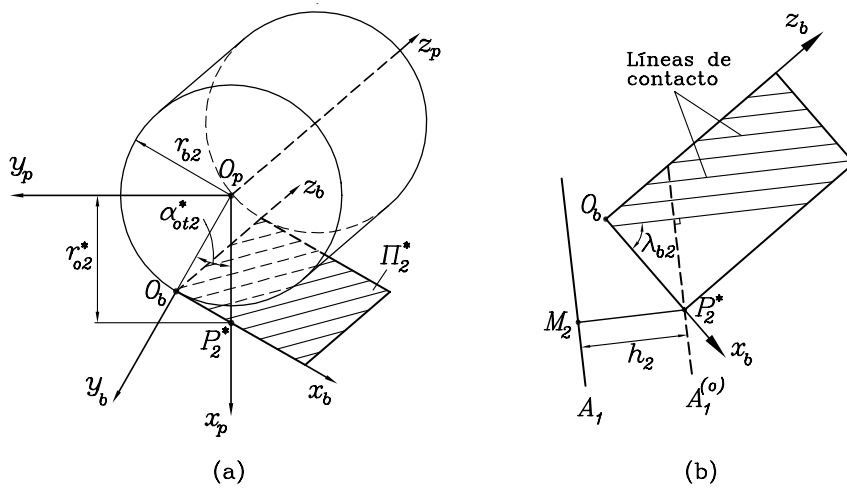
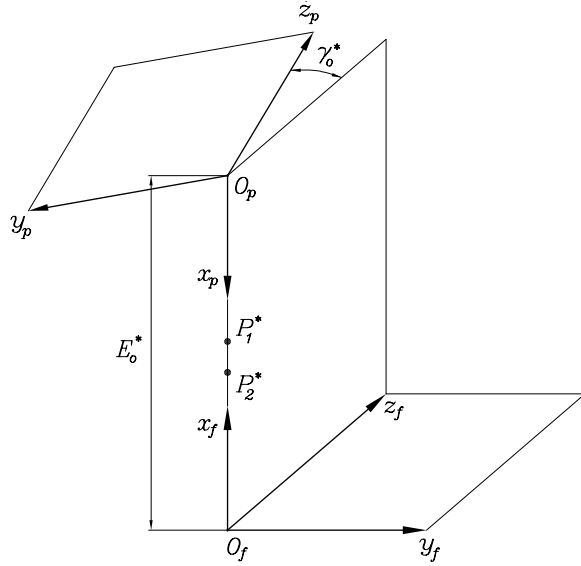


Figura 3.5.5: Representación de: (a) plano Π_2^* y líneas de contacto sobre Π_2^* ; (b) línea de acción A_1 y parámetro h_2 .

Figura 3.5.6: Sistemas de coordenadas fijos S_f y S_p .

- (ii) El vector posición del punto M_2 sobre el plano Π_2^* , usando la transformación de coordenadas del sistema S_b al S_f , viene dado por

$$\mathbf{r}_f^{(2)}(h_2, r_{b2}, \lambda_{b2}, \alpha_{ot2}^*, \gamma_o^*, E_o^*) \quad (3.5.22)$$

- (iii) Teniendo en cuenta que los puntos M_1 y M_2 pertenecen a la misma línea de acción, la ecuación vectorial $\mathbf{r}_f^{(1)}(M_1) = \mathbf{r}_f^{(2)}(M_2)$ proporciona un sistema de tres ecuaciones que permiten determinar h_1 , h_2 y m_1 . Los parámetros h_1 y h_2 vienen dados por las ecuaciones representadas en (3.5.17) y (3.5.18).

Los desplazamientos axiales de la línea de acción, según los ejes del piñón y de la rueda, respecto a los puntos P_1^* y P_2^* respectivamente, se determinan como

$$\Delta Z_1 = \frac{h_1}{\text{sen } \lambda_{b1}} \quad (3.5.23)$$

$$\Delta Z_2 = \frac{h_2}{\text{sen } \lambda_{b2}} \quad (3.5.24)$$

Las Figs. 3.5.7(a) y (b) muestran el desplazamiento ΔZ_1 de la línea de acción en el plano Π_1^* debido a los errores $\Delta\gamma$ y ΔE , respectivamente. Se han considerado diferentes valores del ángulo entre ejes γ_o . Se puede observar que la sensibilidad de la transmisión al desplazamiento de la línea de acción aumenta cuando el ángulo entre ejes disminuye. Para valores pequeños de γ_o el desplazamiento ΔZ_1 puede requerir dimensiones axiales de los engranajes no razonables con el fin de que el contacto tenga lugar dentro de la superficie.

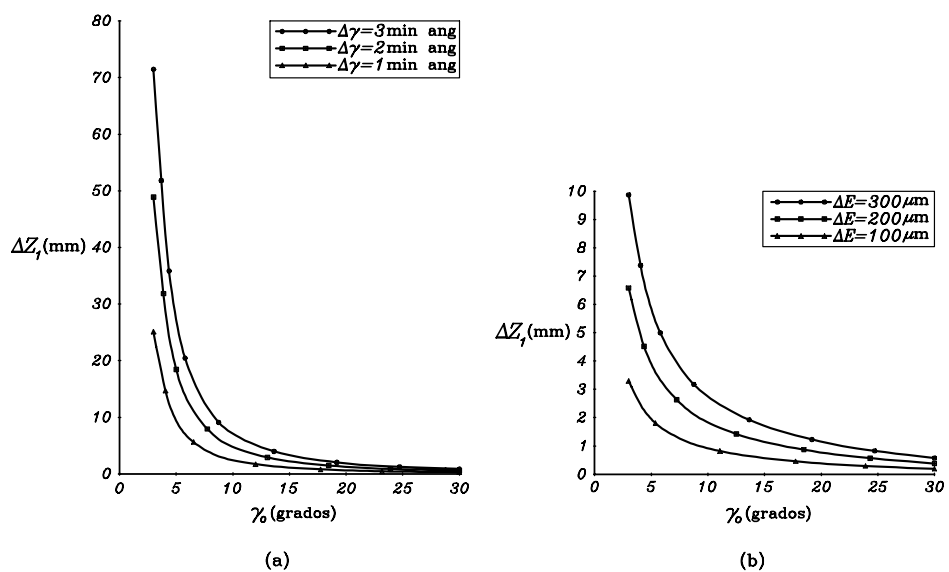


Figura 3.5.7: Representación del desplazamiento axial ΔZ_1 de la línea de acción debido a los errores: (a) $\Delta\gamma$ y (b) ΔE .

En el caso de engranajes con ejes paralelos el valor del ángulo entre ejes es $\gamma_o = 0^\circ$. Algunas ecuaciones desarrolladas para engranajes con ejes cruzados no se pueden aplicar debido a las singularidades producidas cuando $\gamma = 0^\circ$. No obstante, podemos aplicar las ecuaciones desarrolladas para engranajes con ejes cruzados en un entorno de $\gamma_o = 0^\circ$. Se tiene entonces que la sensibilidad de los engranajes con ejes casi paralelos es máxima y el contacto en el borde y los errores de transmisión son inevitables. El análisis del contacto muestra, en el caso de $\gamma_o = 0^\circ$, que la afirmación anterior es cierta cuando se tiene un error $\Delta\gamma$. Sin embargo, en el caso de un error ΔE con $\gamma_o = 0^\circ$, el contacto

teórico sigue siendo lineal y no existen errores de transmisión.

Dado que los errores de alineación $\Delta\gamma$ y ΔE siempre van a existir, por muy pequeños que éstos sean o la tecnología existente nos permita alcanzar, los engranajes con ejes paralelos o bien con ejes cruzados pero con un valor pequeño de γ_o , requieren una modificación de las superficies de perfil de evolvente. Dicha modificación debe ser capaz de evitar el contacto en el borde y absorber los errores de transmisión.

Capítulo 4

Engranajes cilíndricos con geometría modificada. Generación por cremallera

4.1. Introducción

Los engranajes cilíndricos con perfil de evolvente y ejes paralelos requieren, debido a la presencia de errores de alineación y fabricación, la modificación de sus superficies con un doble objetivo: (1) localización del contacto para evitar el desplazamiento del contacto al borde de las superficies de los dientes y (2) absorción de las funciones cuasilineales de errores de transmisión que éstos provocan en la transmisión. Lo anterior también es aplicable a engranajes con ejes cruzados con un valor pequeño del ángulo entre ejes γ_o debido a su gran sensibilidad frente a errores de alineación como se ha visto en el capítulo anterior.

En este capítulo y siguiente se describe cómo se realiza la modificación de las superficies de los dientes de engranajes con perfil de evolvente. La modificación descrita en este capítulo está basada en la utilización de cremalleras diferentes en la generación de piñón y la rueda, mientras que la modificación que se presentará en el siguiente capítulo está basada en la utilización de diferentes herramientas de corte o rectificado como disco y cortador sinfín.

Para la obtención de las cremalleras teóricas de generación de piñón y rueda se consideran en primer lugar los axoides que intervienen en el proceso de generación del engranaje piñón/rueda con su cremallera. Definida la geometría de las cremalleras, se generan las superficies del piñón y de la rueda considerándose un proceso de generación de superficies conjugadas de envolvente simple. Una vez obtenida la geometría del engranaje teórico de referencia, en el capítulo siguiente se determinará la geometría de la herramienta que genera el mismo engranaje que el obtenido mediante la generación teórica con cremallera. Por tanto, las cremalleras no se utilizarán como herramientas en el proceso de fabricación sino que servirán de referencia para la determinación de las herramientas de corte o rectificado.

El análisis del contacto de la transmisión cuya geometría modificada está basada en la generación mediante cremalleras de geometría diferente para piñón y rueda muestra que los objetivos propuestos en el presente capítulo se satisfacen sólo parcialmente. Se tendrán que realizar modificaciones adicionales de la superficie con el fin de conseguir los dos objetivos propuestos, es decir, la localización del contacto y una función continua de errores de transmisión.

4.2. Axoides

La Figura 4.2.1(a) muestra que los engranajes 1 y 2 giran en torno a ejes paralelos con velocidades angulares $\omega^{(1)}$ y $\omega^{(2)}$ con la relación $\omega^{(1)}/\omega^{(2)} = m_{12}$, donde m_{12} representa la relación de transmisión. Los axoides de los engranajes son dos cilindros de radios r_{p1} y r_{p2} y la línea de tangencia de ambos cilindros designada como $P_1 - P_2$ representa el eje instantáneo de rotación en el movimiento relativo.

El plano Π tangente a los axoides de los engranajes representa el axoide de la cremallera en el proceso de generación de cada uno de los engranajes. La cremallera y el engranaje generado describen respectivamente los siguientes movimientos:

- (i) Traslación con velocidad

$$\mathbf{v} = \omega^{(1)} \times \overline{O_1P} = \omega^{(2)} \times \overline{O_2P} \quad (4.2.1)$$

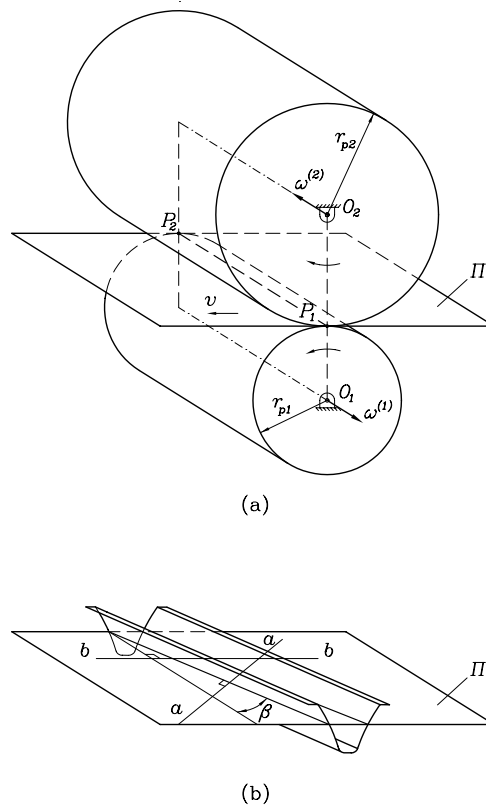


Figura 4.2.1: Axoides de piñón, rueda y cremallera: (a) axoides; (b) superficie del diente de una cremallera con dentadura inclinada según el ángulo β .

donde P pertenece a $P_1 - P_2$.

- (ii) Rotación con velocidad angular $\omega^{(i)}$ ($i = 1, 2$) alrededor del eje del engranaje. El índice $i = 1$ hace referencia al piñón y el índice $i = 2$ hace referencia a la rueda.

La Figura 4.2.1(b) muestra la superficie de un diente de la cremallera utilizada para la generación de engranajes helicoidales. Dicho diente se encuentra inclinado respecto a los ejes de los engranajes según el ángulo β . La inclinación mostrada en la Fig. 4.2.1(b) dará lugar a dentadura a izquierdas en el piñón y a dentadura a derechas en la rueda. En el caso de un ángulo $\beta = 0^\circ$ se obtienen engranajes rectos, los cuales constituyen un caso partic-

ular de los engranajes helicoidales. Esto permite determinar la geometría de las cremalleras en el caso más general de engranajes helicoidales y como caso particular en los engranajes rectos.

En el diseño convencional de engranajes cilíndricos rectos o helicoidales con perfil de evolvente se utiliza una única cremallera con perfil recto para la generación de piñón y rueda. Las superficies de los dientes de piñón y rueda así generados presentan contacto lineal. La Figura 4.2.2(a) muestra las correspondientes líneas de contacto en un engranaje helicoidal con perfil de evolvente. Estas líneas resultan tangentes al cilindro base. En el caso de un engranaje recto las líneas de contacto resultan paralelas al eje del engranaje como se muestra en la Fig. 4.2.2(b).

El contacto lineal es muy sensible a las desalineaciones y da lugar a contacto en el borde de las superficies de los dientes. Es por tanto necesario localizar el contacto para que, debido a la presencia de errores de alineación o fabricación, éste permanezca dentro de las superficies de los dientes en contacto. La disposición de las líneas de contacto en un engranaje helicoidal y en otro recto nos aporta una información muy importante para determinar el método de localización del contacto en cada caso.

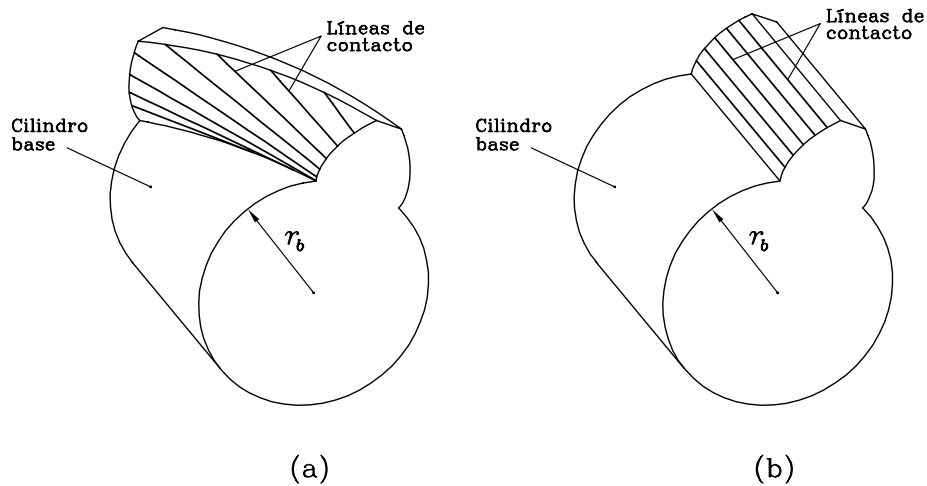


Figura 4.2.2: Líneas de contacto sobre superficies con perfil de evolvente en el caso de (a) engranaje helicoidal y (b) engranaje recto.

La localización del contacto en una transmisión de engranajes helicoidales requiere simplemente la generación de las superficies de los dientes de piñón y rueda con dos cremalleras con perfiles distintos según se describe en el siguiente apartado. No obstante, ambas cremalleras deben tener el mismo plano Π (Fig. 4.2.1) como axoide en los respectivos procesos de generación de piñón y rueda, debiéndose verificar la relación dada por la Ec. (4.2.1). Este método aporta a uno o a los dos engranajes de la transmisión un abombamiento en la dirección del perfil respecto al perfil de evolvente.

En una transmisión con engranajes rectos, el abombamiento en la dirección del perfil de uno o de los dos engranajes no localiza el contacto. Esto es debido a la disposición de las líneas de contacto perpendiculares al perfil. En este caso es necesario abombar una de las superficies de contacto en la dirección longitudinal. No obstante, la generación de engranajes rectos basada en cremalleras distintas es útil para proporcionar a la transmisión una función continua de errores de transmisión.

4.3. Perfiles de las cremalleras de referencia

La sección normal de las cremalleras de referencia viene dada por la sección $a - a$ (Fig. 4.2.1(b)) obtenida por un plano perpendicular al plano Π y cuya orientación está determinada por el ángulo β . La sección transversal está determinada por un plano perpendicular al plano Π y con la orientación de $b - b$ (Fig. 4.2.1(b)).

La Figura 4.3.1 muestra las secciones normales de dos cremalleras distintas que generan separadamente piñón y rueda. La Figura 4.3.1(a) muestra que los perfiles del lado conductor son tangentes en el punto Q mientras que los del lado conducido lo son en el punto Q^* . Las normales a ambos perfiles en los puntos de tangencia coinciden y contienen al punto P perteneciente al eje instantáneo de rotación $P_1 - P_2$. Las Figuras 4.3.1(b) y 4.3.1(c) representan las secciones normales de las cremalleras de piñón y rueda, respectivamente.

A continuación se define una tercera cremallera con perfiles rectos (Fig. 4.3.2(a)) que es utilizada como referencia para definir las cremalleras de piñón (Fig. 4.3.2(b)) y rueda (Fig. 4.3.2(c)). La cremallera de referencia se define

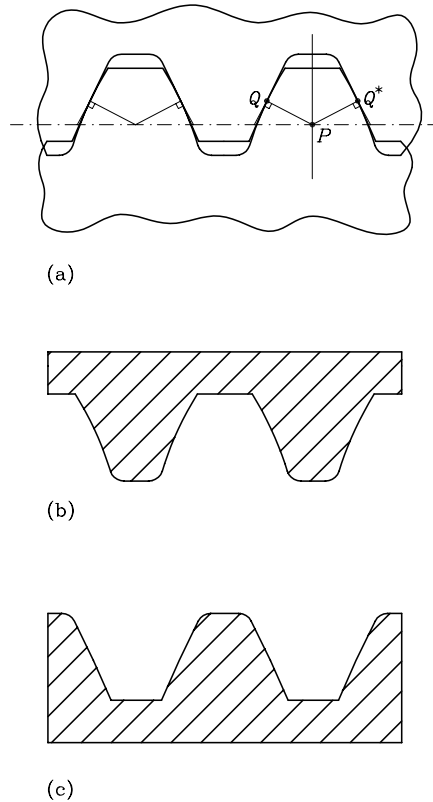


Figura 4.3.1: Secciones normales de las cremalleras de piñón y rueda: (a) perfiles tangentes; (b) sección normal de la cremallera del piñón; (c) sección normal de la cremallera de la rueda.

en el sistema S_j (Fig. 4.3.2(a)), cuyo origen O_j coincide con P (Fig. 4.3.1(a)). Para definir los perfiles de cada lado de la cremallera se utilizan los sistemas S_i y S_k . Los correspondientes orígenes, O_i y O_k , están situados sobre los perfiles rectos de forma que los segmentos $\overline{O_j O_i}$ y $\overline{O_j O_k}$ resultan perpendiculares a sendos perfiles. Los orígenes O_i y O_k coinciden con Q y Q^* , respectivamente.

Los ángulos α_d y α_c (Fig. 4.3.2) representan los ángulos de presión normal del lado conductor y conducido del diente. Las dimensiones s_1 y s_2 (Fig. 4.3.2) coinciden con los espesores de los dientes medidos en una sección normal sobre los axoides de piñón y rueda, respectivamente, y están relacionadas con el módulo normal m y el coeficiente de espesor de la cremallera s_{21} a través de

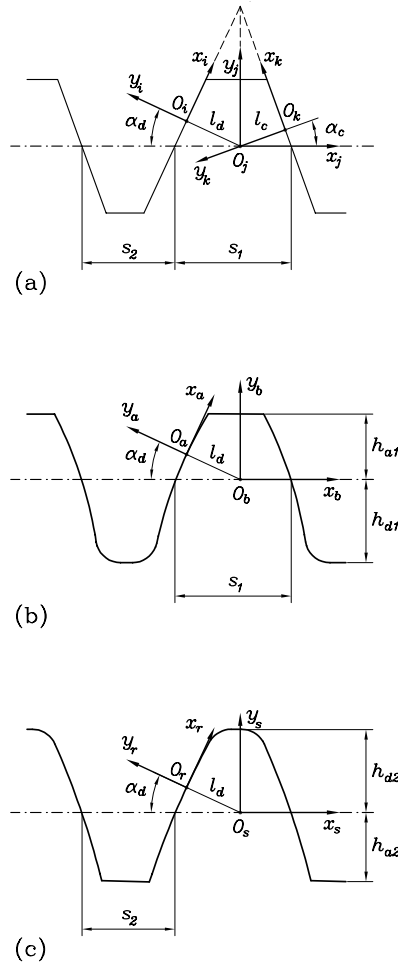


Figura 4.3.2: Perfiles de las cremalleras (a) base, (b) del piñón y (c) de la rueda.

las siguientes expresiones:

$$s_1 + s_2 = \pi m \quad (4.3.1)$$

$$s_{21} = \frac{s_2}{s_1} \quad (4.3.2)$$

El coeficiente s_{21} permite modificar la relación entre los espesores del diente de piñón y rueda. El subíndice pn que indica que la variable considerada se mide en el plano primitivo y en la sección normal se ha omitido con el objeto

de simplificar.

Los segmentos $l_d = |\overline{O_j O_i}|$ y $l_c = |\overline{O_j O_k}|$ (Fig. 4.3.2(a)) vienen dados por

$$l_d = \frac{\pi m}{1 + s_{21}} \cdot \frac{\text{sen } \alpha_d \cos \alpha_d \cos \alpha_c}{\text{sen}(\alpha_d + \alpha_c)} \quad (4.3.3)$$

$$l_c = \frac{\pi m}{1 + s_{21}} \cdot \frac{\text{sen } \alpha_c \cos \alpha_c \cos \alpha_d}{\text{sen}(\alpha_d + \alpha_c)} \quad (4.3.4)$$

En las Figuras 4.3.2(b) y 4.3.2(c) se representan los perfiles en una sección normal de las cremalleras de piñón y rueda, respectivamente. Cada uno de los perfiles está constituido por un perfil parabólico que genera el perfil activo del diente y un perfil de arco de circunferencia que genera el perfil de base del diente.

Para la definición de los perfiles parabólicos del lado conductor de las cremalleras de piñón y rueda se utilizan los sistemas S_a (Fig. 4.3.2(b)) y S_r (Fig. 4.3.2(c)), respectivamente. Ambos sistemas coinciden con el sistema S_i de la cremallera de referencia. Para la definición de los perfiles de arco de circunferencia se utilizan los sistemas S_b y S_s , que coinciden con el sistema S_j de la cremallera de referencia. La definición de los perfiles del lado conducido es análoga a la del lado conductor. Es por ello por lo que se ha decidido presentar sólo la formulación de las ecuaciones correspondientes al lado conductor.

La Figura 4.3.3 muestra el perfil parabólico del lado conductor definido en la cremallera de referencia. El máximo de la parábola coincide con el punto de tangencia Q y puede ser desplazado sobre el perfil recto de la cremallera de referencia con el parámetro u_{d0} . Por tanto, el punto de tangencia Q de los perfiles de las cremalleras de piñón y rueda no tiene por qué coincidir con O_i ($i = a, r$). El desplazamiento del máximo de los perfiles parabólicos en el lado conducido se designa como u_{c0} .

El parámetro a_{di} ($i = a, r$) (Fig. 4.3.3) es el coeficiente parabólico del perfil del lado conductor, utilizándose a_{ci} para el lado conducido. Un punto cualquiera M (Fig. 4.3.3) del perfil viene determinado respecto al origen O_i ($i = a, r$) por el parámetro u_i ($i = a, r$). El perfil parabólico viene definido en

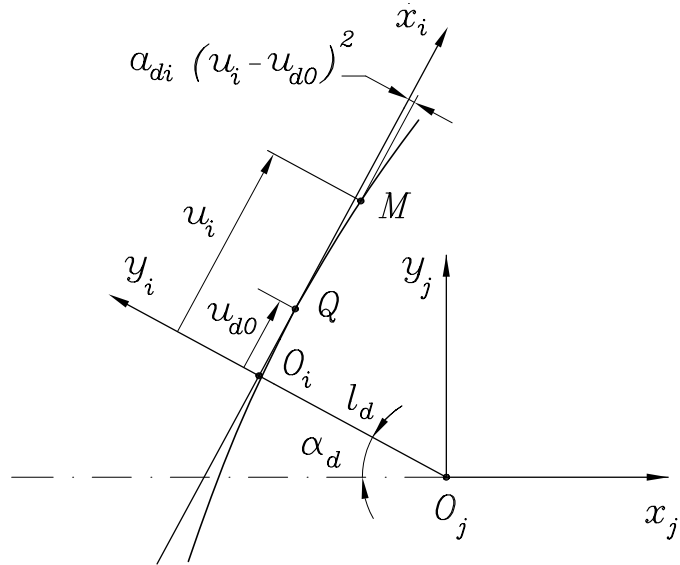


Figura 4.3.3: Definición del perfil parabólico.

el sistema S_i ($i = a, r$) como

$$\mathbf{r}_i^{(p)} = \begin{bmatrix} u_i \\ -a_{di}(u_i - u_{d0})^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (i = a, r) \quad (4.3.5)$$

El superíndice (p) en la Ec. (4.3.5) hace referencia al perfil activo, utilizándose posteriormente el superíndice (f) para definir el perfil de la base del diente.

La normal unitaria al perfil parabólico viene dada en S_i ($i = a, r$) como

$$\mathbf{n}_i^{(p)} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_i^{(p)}}{\partial u_i} \times \mathbf{k}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}_i^{(p)}}{\partial u_i} \times \mathbf{k} \right|} = \begin{bmatrix} -2a_{di}(u_i - u_{d0}) \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + 4a_{di}^2(u_i - u_{d0})^2}} \quad (4.3.6)$$

El perfil parabólico y su normal unitaria en el sistema solidario a la cremallera S_j ($j = b, s$) vienen dados por $\mathbf{r}_j^{(p)} = \mathbf{M}_{ji}\mathbf{r}_i^{(p)}$ y $\mathbf{n}_j^{(p)} = \mathbf{L}_{ji}\mathbf{n}_i^{(p)}$, siendo \mathbf{M}_{ji} la matriz de transformación de coordenadas entre los sistemas S_i

($i = a, r$) y S_j ($j = b, s$),

$$\mathbf{M}_{ji} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \alpha_d & -\operatorname{cos} \alpha_d & 0 & -l_d \operatorname{cos} \alpha_d \\ \operatorname{cos} \alpha_d & \operatorname{sen} \alpha_d & 0 & l_d \operatorname{sen} \alpha_d \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

y \mathbf{L}_{ji} la submatriz 3×3 que se obtiene eliminando la última fila y la última columna de la matriz \mathbf{M}_{ji} . Se tiene entonces

$$\mathbf{r}_j^{(p)}(u_i) = \begin{bmatrix} u_i \operatorname{sen} \alpha_d + a_{di}(u_i - u_{d0})^2 \operatorname{cos} \alpha_d - l_d \operatorname{cos} \alpha_d \\ u_i \operatorname{cos} \alpha_d - a_{di}(u_i - u_{d0})^2 \operatorname{sen} \alpha_d + l_d \operatorname{sen} \alpha_d \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

$$\mathbf{n}_j^{(p)}(u_i) = \begin{bmatrix} -2a_{di}(u_i - u_{d0}) \operatorname{sen} \alpha_d + \operatorname{cos} \alpha_d \\ -2a_{di}(u_i - u_{d0}) \operatorname{cos} \alpha_d - \operatorname{sen} \alpha_d \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + 4a_{di}^2(u_i - u_{d0})^2}} \quad (4.3.9)$$

La definición de los perfiles de arco de circunferencia en ambas cremalleras que generan el perfil de trocoide de la base del diente es muy similar. La Figura 4.3.4 muestra el perfil de arco de circunferencia correspondiente al lado conductor de la cremallera del piñón. A continuación se define la geometría de dicho perfil conjuntamente con el perfil del lado conductor de la cremallera de la rueda. La Figura 4.3.4 muestra que un punto cualquiera N de los perfiles viene determinado por el parámetro λ_i ($i = a, r$), medido desde la recta horizontal que contiene el centro de curvatura C . Utilizando el sistema S_j ($j = b, s$) se tiene

$$\mathbf{r}_j^{(f)}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} x_C \pm \rho \operatorname{cos} \lambda_i \\ y_C \mp \rho \operatorname{sen} \lambda_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

donde ρ es el radio del arco de circunferencia y (x_C, y_C) son las coordenadas del centro C en el sistema S_j . El signo superior es utilizado en la cremallera del piñón y el signo inferior en la cremallera de la rueda.

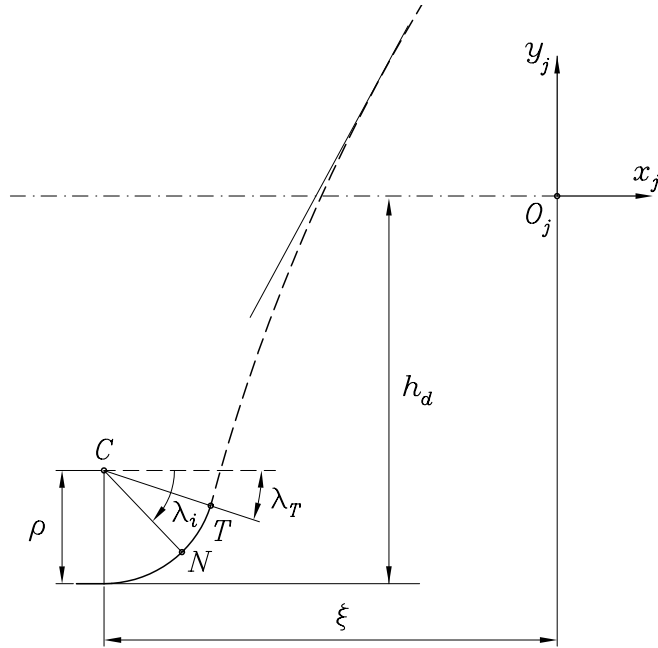


Figura 4.3.4: Definición del perfil de arco de circunferencia en la cremallera del piñón.

La normal unitaria viene dada en el sistema S_j por

$$\mathbf{n}_j^{(f)}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \cos \lambda_i \\ -\text{sen } \lambda_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

Las coordenadas del centro de curvatura vienen definidas como $x_C = -\xi$, $y_C = \mp h_d \pm \rho$ (Fig. 4.3.4), siendo ξ el parámetro que debe garantizar la tangencia del perfil parabólico y del perfil de circunferencia, y h_d la altura de dedendo. Planteando el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_j^{(p)} \mathbf{i} &= \mathbf{r}_j^{(f)} \mathbf{i} \\ \mathbf{r}_j^{(p)} \mathbf{j} &= \mathbf{r}_j^{(f)} \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_j^{(p)}}{\partial u_i} \mathbf{j} &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}_j^{(p)}}{\partial u_i} \right| \cos \lambda_T \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

se pueden obtener los valores de ξ , λ_T y u_T correspondientes al lado conductor de cada cremallera, siendo λ_T y u_T los valores de los parámetros λ_i y u_i , respectivamente, en el punto de entronque T (Fig. 4.3.4) con el perfil parabólico.

Definidos los perfiles en la sección normal de las cremalleras de piñón y rueda se procede a la determinación de las correspondientes superficies.

4.4. Cremallera de generación del piñón

La superficie de la cremallera del piñón Σ_c se determina en el sistema S_c (Fig. 4.4.1) a partir de la traslación del perfil normal según la dirección $c - c$, definida por el ángulo de hélice β . El parámetro de traslación es θ_a . Dado que el perfil normal está constituido por el perfil parabólico y el perfil de arco de circunferencia, la superficie Σ_c está constituida por las superficies $\Sigma_c^{(p)}$ y $\Sigma_c^{(f)}$, definidas como

$$\mathbf{r}_c^{(p)}(u_a, \theta_a) = \mathbf{M}_{cb}(\theta_a) \mathbf{r}_b^{(p)}(u_a) \quad (4.4.1)$$

$$\mathbf{r}_c^{(f)}(\lambda_a, \theta_a) = \mathbf{M}_{cb}(\theta_a) \mathbf{r}_b^{(f)}(\lambda_a) \quad (4.4.2)$$

donde \mathbf{M}_{cb} viene dada por

$$\mathbf{M}_{cb} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \text{sen } \beta & \theta_a \text{ sen } \beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \beta & 0 & \cos \beta & \theta_a \cos \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

Las normales unitarias correspondientes vienen dadas por

$$\mathbf{n}_c^{(p)}(u_a) = \mathbf{L}_{cb} \mathbf{n}_b^{(p)}(u_a) \quad (4.4.4)$$

$$\mathbf{n}_c^{(f)}(\lambda_a) = \mathbf{L}_{cb} \mathbf{n}_b^{(f)}(\lambda_a) \quad (4.4.5)$$

donde \mathbf{L}_{cb} es la submatriz de orden 3×3 que se obtiene eliminando la última fila y la última columna de la matriz \mathbf{M}_{cb} .

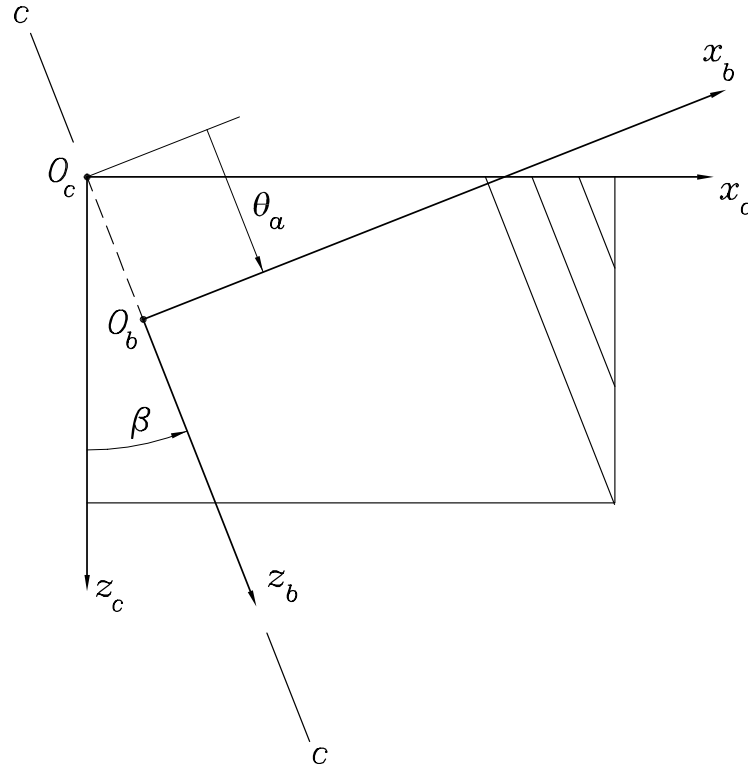


Figura 4.4.1: Para la determinación de las superficies de las cremalleras.

Aplicando la transformación del sistema S_b al S_c , se tiene

$$\mathbf{r}_c^{(p)} = \begin{bmatrix} [u_a \operatorname{sen} \alpha_d + a_{da}(u_a - u_{d0})^2 \cos \alpha_d - l_d \cos \alpha_d] \cos \beta + \theta_a \operatorname{sen} \beta \\ u_a \cos \alpha_d - a_{da}(u_a - u_{d0})^2 \operatorname{sen} \alpha_d + l_d \operatorname{sen} \alpha_d \\ -[u_a \operatorname{sen} \alpha_d + a_{da}(u_a - u_{d0})^2 \cos \alpha_d - l_d \cos \alpha_d] \operatorname{sen} \beta + \theta_a \cos \beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

$$\mathbf{r}_c^{(f)} = \begin{bmatrix} (x_C + \rho \cos \lambda_a) \cos \beta + \theta_a \operatorname{sen} \beta \\ y_C - \rho \operatorname{sen} \lambda_a \\ -(x_C + \rho \cos \lambda_a) \operatorname{sen} \beta + \theta_a \cos \beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

$$\mathbf{n}_c^{(p)} = \begin{bmatrix} [-2a_{da}(u_a - u_{d0}) \operatorname{sen} \alpha_d + \cos \alpha_d] \cos \beta \\ -2a_{da}(u_a - u_{d0}) \cos \alpha_d - \operatorname{sen} \alpha_d \\ -[-2a_{da}(u_a - u_{d0}) \operatorname{sen} \alpha_d + \cos \alpha_d] \operatorname{sen} \beta \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + 4a_{da}^2(u_a - u_{d0})^2}} \quad (4.4.8)$$

$$\mathbf{n}_c^{(f)} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_a \cos \beta \\ -\operatorname{sen} \lambda_a \\ -\cos \lambda_a \operatorname{sen} \beta \end{bmatrix} \quad (4.4.9)$$

4.5. Cremallera de generación de la rueda

La superficie de la cremallera de la rueda Σ_t se determina en el sistema S_t , que coincide con el sistema S_c definido en la Fig. 4.4.1. La superficie Σ_t está constituida por las superficies $\Sigma_t^{(p)}$ y $\Sigma_t^{(f)}$ correspondientes a los perfiles parabólico y de arco de circunferencia, respectivamente. Ambas superficies vienen dadas por

$$\mathbf{r}_t^{(p)}(u_r, \theta_r) = \mathbf{M}_{ts}(\theta_r) \mathbf{r}_s^{(p)}(u_r) \quad (4.5.1)$$

$$\mathbf{r}_t^{(f)}(\lambda_r, \theta_r) = \mathbf{M}_{ts}(\theta_r) \mathbf{r}_s^{(f)}(\lambda_r) \quad (4.5.2)$$

donde (u_r, θ_r) son los parámetros de la superficie $\Sigma_t^{(p)}$, (λ_r, θ_r) son los parámetros de la superficie $\Sigma_t^{(f)}$, y \mathbf{M}_{ts} es la matriz de transformación de coordenadas entre los sistemas S_s (Fig. 4.3.2(c)) y S_t . Dado que dicha transformación coincide con la transformación del sistema S_b al sistema S_c (Fig. 4.4.1), se tiene que $\mathbf{M}_{ts} = \mathbf{M}_{cb}$ (ver Ecuación 4.4.3). Las normales unitarias correspondientes vienen dadas por

$$\mathbf{n}_t^{(p)}(u_r) = \mathbf{L}_{ts} \mathbf{n}_s^{(p)}(u_r) \quad (4.5.3)$$

$$\mathbf{n}_t^{(f)}(\lambda_r) = \mathbf{L}_{ts} \mathbf{n}_s^{(f)}(\lambda_r) \quad (4.5.4)$$

donde \mathbf{L}_{ts} coincide con \mathbf{L}_{cb} .

Aplicando la transformación del sistema S_s al S_t , se tiene

$$\mathbf{r}_t^{(p)} = \begin{bmatrix} [u_r \operatorname{sen} \alpha_d + a_{dr}(u_r - u_{d0})^2 \cos \alpha_d - l_d \cos \alpha_d] \cos \beta + \theta_r \operatorname{sen} \beta \\ u_r \cos \alpha_d - a_{dr}(u_r - u_{d0})^2 \operatorname{sen} \alpha_d + l_d \operatorname{sen} \alpha_d \\ -[u_r \operatorname{sen} \alpha_d + a_{dr}(u_r - u_{d0})^2 \cos \alpha_d - l_d \cos \alpha_d] \operatorname{sen} \beta + \theta_r \cos \beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.5)$$

$$\mathbf{r}_t^{(f)} = \begin{bmatrix} (x_C - \rho \cos \lambda_r) \cos \beta + \theta_r \operatorname{sen} \beta \\ y_C + \rho \operatorname{sen} \lambda_r \\ -(x_C - \rho \cos \lambda_r) \operatorname{sen} \beta + \theta_r \cos \beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.6)$$

$$\mathbf{n}_t^{(p)} = \begin{bmatrix} [-2a_{dr}(u_r - u_{d0}) \operatorname{sen} \alpha_d + \cos \alpha_d] \cos \beta \\ -2a_{dr}(u_r - u_{d0}) \cos \alpha_d - \operatorname{sen} \alpha_d \\ -[-2a_{dr}(u_r - u_{d0}) \operatorname{sen} \alpha_d + \cos \alpha_d] \operatorname{sen} \beta \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + 4a_{dr}^2(u_r - u_{d0})^2}} \quad (4.5.7)$$

$$\mathbf{n}_t^{(f)} = \begin{bmatrix} -\cos \lambda_r \cos \beta \\ \operatorname{sen} \lambda_r \\ \cos \lambda_r \operatorname{sen} \beta \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

4.6. Superficies de los dientes de piñón y rueda con abombamiento simple

Las superficies de los dientes de piñón y rueda con abombamiento simple, es decir, con abombamiento en la dirección del perfil, se designan como Σ_σ y Σ_2 , respectivamente, y se obtienen según un proceso de generación de superficies conjugadas de envolvente simple a partir de sus correspondientes cremalleras. La superficie del diente del piñón con doble abombamiento se designa como Σ_1 y se obtendrá en el siguiente capítulo.

4.6.1. Generación de la superficie del piñón Σ_σ

La superficie del diente del piñón con abombamiento en la dirección del perfil Σ_σ se obtiene como envolvente de la familia de superficies de la cre-

mallera de generación del piñón Σ_c en un sistema de coordenadas fijo al mismo. La generación de Σ_σ está basada en las siguientes consideraciones:

- (i) Los sistemas de coordenadas $S_c(x_c, y_c)$ y $S_\sigma(x_\sigma, y_\sigma)$ son sistemas móviles solidarios a la cremallera y al piñón a generar, respectivamente (Fig. 4.6.1(a)). El sistema de coordenadas S_m es un sistema fijo. El coeficiente χ_1 en la Fig. 4.6.1(a) indica el coeficiente de desplazamiento de la herramienta en la generación del piñón.

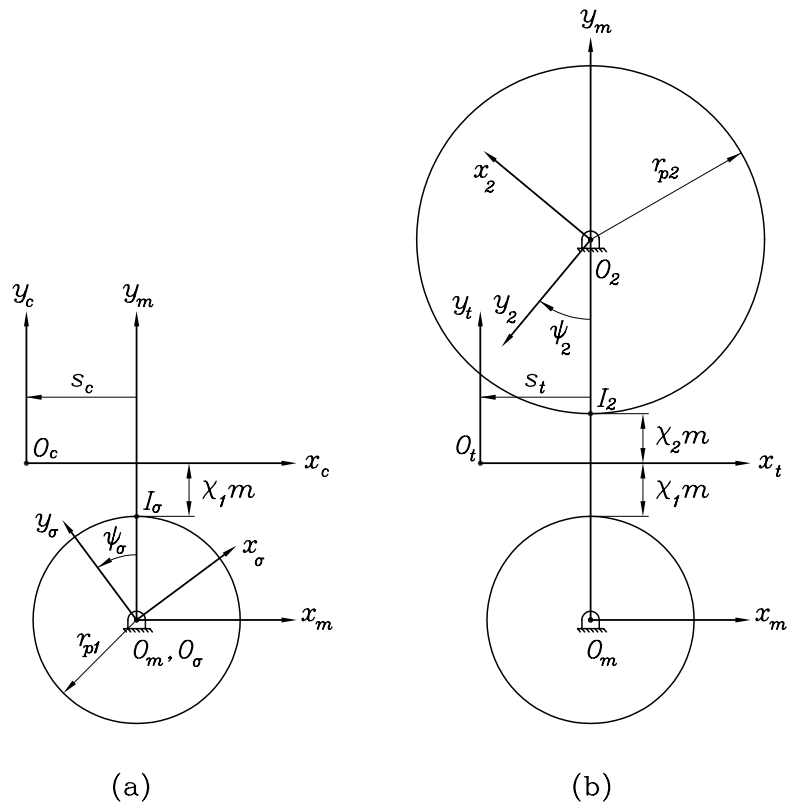


Figura 4.6.1: Sistemas coordenados utilizados en la generación de piñón y rueda.

- (ii) La cremallera y el piñón realizan movimientos de traslación y rotación, respectivamente, según se muestra en Fig. 4.6.1(a). Ambos movimientos

están ligados por la condición de rodadura sin deslizamiento según

$$\frac{s_c}{\psi_\sigma} = r_{p1} \quad (4.6.1)$$

donde s_c es la traslación de la cremallera y ψ_σ el ángulo de rotación del piñón. El desplazamiento de herramienta no afecta a los axoides del movimiento (Fig. 4.2.1(a)).

- (iii) La familia de superficies correspondiente a las distintas posiciones de la superficie de la cremallera Σ_c en el sistema de coordenadas S_σ se expresa mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{r}_\sigma = \mathbf{M}_{\sigma c}(\psi_\sigma)\mathbf{r}_c \quad (4.6.2)$$

donde

$$\mathbf{M}_{\sigma c} = \begin{bmatrix} \cos \psi_\sigma & \text{sen } \psi_\sigma & 0 & (r_{p1} + \chi_1 m) \text{sen } \psi_\sigma - r_{p1} \psi_\sigma \cos \psi_\sigma \\ -\text{sen } \psi_\sigma & \cos \psi_\sigma & 0 & (r_{p1} + \chi_1 m) \cos \psi_\sigma + r_{p1} \psi_\sigma \text{sen } \psi_\sigma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6.3)$$

- (iv) La superficie del diente del piñón Σ_σ se determina como la envolvente a la familia de superficies \mathbf{r}_σ y se representa considerando simultáneamente el vector \mathbf{r}_σ y la ecuación de engrane

$$f_{c\sigma} = 0 \quad (4.6.4)$$

La ecuación $f_{c\sigma} = 0$ se puede obtener de dos formas:

- (a) Considerando que la normal común a las superficies Σ_c y Σ_σ en la línea de tangencia de ambas superficies intersecta al eje instantáneo de rotación $P_1 - P_2$ (Fig. 4.2.1) [Litvin, 1994].
- (b) Considerando la ecuación de engrane

$$\mathbf{n}_c \cdot \mathbf{v}_c^{(c\sigma)} = 0 \quad (4.6.5)$$

donde \mathbf{n}_c es la normal unitaria a Σ_c representada en S_c y $\mathbf{v}_c^{(c\sigma)}$ es la velocidad relativa representada en S_c .

Las ecuaciones de engrane correspondientes a las superficies del perfil activo del diente del piñón, (p), y al perfil de trocoide de la base del diente, (f), vienen dadas por

$$\begin{aligned} f_{c\sigma}^{(p)} = & -[u_a + 2a_{da}^2(u_a - u_{d0})^3 - 2a_{da}l_d(u_a - u_{d0})] \cos \beta \\ & + [2a_{da}(u_a - u_{d0}) \cos \alpha_d + \text{sen } \alpha_d](r_{p1}\psi_\sigma - \theta_a \text{sen } \beta) \\ & + [2a_{da}(u_a - u_{d0}) \text{sen } \alpha_d - \cos \alpha_d] \chi_1 m \cos \beta = 0 \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

$$\begin{aligned} f_{c\sigma}^{(f)} = & (x_C \cos \beta + \theta_a \text{sen } \beta - r_{p1}\psi_\sigma) \text{sen } \lambda_a \\ & + (y_C + \chi_1 m) \cos \beta \cos \lambda_a = 0 \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

Generación de Σ_2 . La generación de la superficie del diente de la rueda Σ_2 se representa en la Figura 4.6.1(b) y viene dada por la consideración simultánea de las dos ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{M}_{2t}(\psi_2)\mathbf{r}_t \quad (4.6.8)$$

$$f_{t2} = 0 \quad (4.6.9)$$

La Ec. (4.6.8) representa la familia de superficies de la cremallera de la rueda en el sistema S_2 , la Ec. (4.6.9) representa la ecuación de engrane y ψ_2 es el parámetro del movimiento. La matriz $\mathbf{M}_{2t}(\psi_2)$ representa la transformación de coordenadas del sistema S_t al S_2 y viene dada por

$$\mathbf{M}_{2t} = \begin{bmatrix} -\cos \psi_2 & \text{sen } \psi_2 & 0 & -(r_{p2} + \chi_2 m) \text{sen } \psi_2 + r_{p2}\psi_2 \cos \psi_2 \\ -\text{sen } \psi_2 & -\cos \psi_2 & 0 & (r_{p2} + \chi_2 m) \cos \psi_2 + r_{p2}\psi_2 \text{sen } \psi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6.10)$$

siendo χ_2 el coeficiente de desplazamiento de la cremallera de la rueda.

Las ecuaciones de engrane correspondientes a cada uno de los perfiles vienen dadas por:

$$\begin{aligned} f_{t2}^{(p)} = & -[u_r + 2a_{dr}^2(u_r - u_{d0})^3 - 2a_{dr}l_d(u_r - u_{d0})] \cos \beta \\ & + [2a_{dr}(u_r - u_{d0}) \cos \alpha_d + \text{sen } \alpha_d](-r_{p2}\psi_2 + \theta_r \text{sen } \beta) \\ & + [2a_{dr}(u_r - u_{d0}) \text{sen } \alpha_d - \cos \alpha_d] \chi_2 m \cos \beta = 0 \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

$$f_{t2}^{(f)} = (x_C \cos \beta + \theta_r \operatorname{sen} \beta - r_{p2} \psi_2) \operatorname{sen} \lambda_r \\ + (y_C - \chi_2 m) \cos \beta \cos \lambda_r = 0 \quad (4.6.12)$$

4.6.2. Condiciones necesarias para la existencia de la envolvente a una familia paramétrica de superficies

Tales condiciones en el caso de la superficie Σ_σ del piñón con abombamiento simple se formulan de la siguiente manera:

- (i) La función vectorial $\mathbf{r}_\sigma(u_a, \theta_a, \psi_\sigma)$ de clase C^2 es dada.
- (ii) Se designa por $M(u_a^{(0)}, \theta_a^{(0)}, \psi_\sigma^{(0)})$ el conjunto de parámetros que satisfacen la ecuación de engrane (4.6.4) y las siguientes condiciones.
- (iii) La superficie generadora Σ_c de la cremallera es una superficie *regular* y satisface en M la siguiente desigualdad:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial u_a} \times \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \theta_a} \neq 0 \quad (4.6.13)$$

Los vectores $\partial \mathbf{r}_c / \partial u_a$ y $\partial \mathbf{r}_c / \partial \theta_a$ resultan tangentes a las líneas coordenadas de la superficie Σ_c en el sistema de coordenadas S_σ . La desigualdad (4.6.13) significa que la normal $\mathbf{N}_\sigma^{(c)}$ a la superficie Σ_c es distinta de cero. La designación $\mathbf{N}_\sigma^{(c)}$ indica que la normal a Σ_c se representa en el sistema S_σ .

- (iv) Las derivadas parciales de la ecuación de engrane (4.6.4) satisfacen en M la desigualdad

$$\left| \frac{\partial f_{c\sigma}}{\partial u_a} \right| + \left| \frac{\partial f_{c\sigma}}{\partial \theta_a} \right| \neq 0 \quad (4.6.14)$$

- (v) Las singularidades de la superficie Σ_σ se evitan mediante el procedimiento descrito en el Apartado 4.8.1.

Considerando las condiciones (i)-(v), la envolvente Σ_σ es una superficie *regular*, contacta con la superficie generadora Σ_c en una línea y la normal a Σ_σ es colinear con la normal a Σ_c . La función vectorial $\mathbf{r}_\sigma(u_a, \theta_a, \psi_\sigma)$ y la ecuación de engrane (4.6.4) consideradas simultáneamente representan la envolvente Σ_σ como función de tres parámetros $(u_a, \theta_a, \psi_\sigma)$ relacionados entre sí.

4.6.3. Representación de la envolvente Σ_σ como función de dos parámetros

La representación de Σ_σ en forma biparamétrica está basada en las siguientes consideraciones:

- (i) Supóngase que se satisface la desigualdad (4.6.14) porque

$$\frac{\partial f_{c\sigma}}{\partial \theta_a} \neq 0 \quad (4.6.15)$$

- (ii) El teorema de existencia de la función implícita [Korn & Korn, 1968] establece que, debido a que se verifica la desigualdad (4.6.15), la solución a la ecuación de engrane (4.6.4) viene dada en el entorno del punto M por la función

$$\theta_a = \theta_a(u_a, \psi_\sigma) \quad (4.6.16)$$

- (iii) Se tiene entonces que la superficie Σ_σ se puede representar como

$$\mathbf{R}_\sigma(u_a, \psi_\sigma) = \mathbf{r}_\sigma(u_a, \theta_a(u_a, \psi_\sigma), \psi_\sigma) \quad (4.6.17)$$

El razonamiento para obtener la superficie Σ_σ como función de dos parámetros también es aplicable cuando se satisface la desigualdad $\partial f_{c\sigma}/\partial u_c \neq 0$ en lugar de (4.6.15). En este caso, la superficie Σ_σ vendría dada como

$$\mathbf{R}_\sigma(\theta_a, \psi_\sigma) = \mathbf{r}_\sigma(u_a(\theta_a, \psi_\sigma), \theta_a, \psi_\sigma) \quad (4.6.18)$$

4.6.4. Representación de la envolvente Σ_2 como función de dos parámetros

El procedimiento para obtener la superficie del diente de la rueda con abombamiento simple en la dirección del perfil en forma biparamétrica es similar al caso expuesto anteriormente. La envolvente a la familia de superficies de la cremallera Σ_t en el sistema S_2 viene dada por la consideración simultánea de la función vectorial $\mathbf{r}_2(u_r, \theta_r, \psi_2)$ y la ecuación de engrane $f_{t2} = 0$. Consideraciones análogas a las expuestas en el apartado anterior nos permiten obtener Σ_2 como $\mathbf{R}_2(u_r, \psi_2)$ o como $\mathbf{R}_2(\theta_r, \psi_2)$.

4.7. Simulación del engrane de piñón y rueda con abombamiento simple

Las superficies de los dientes de piñón y rueda obtenidas como envolventes de sus correspondientes cremalleras, definidas en el Apartado 4.3, presentan contacto puntual en el caso de engranajes helicoidales. No obstante, debido a la deformación elástica, dicho contacto se extiende sobre una elipse de dimensiones suficientes para soportar la carga transmitida. La simulación del engrane y el análisis del contacto permite la determinación de las elipses instantáneas de contacto y la función de errores de transmisión.

En el caso de engranajes rectos, la modificación de la geometría producida por la generación de piñón y rueda mediante las cremalleras definidas en el Apartado 4.3, no permite localizar el contacto. Por tanto, para poder aplicar el algoritmo aquí presentado se debe determinar el contacto en una sección perpendicular al eje del engranaje, obteniéndose el punto intersección de la línea de contacto con dicha sección normal.

El algoritmo de análisis del contacto está basado en la tangencia de las superficies a lo largo del camino de contacto mediante la condición de igualdad de los vectores de posición y de la colinealidad de las normales a las superficies en el punto instantáneo de contacto representados en un sistema fijo de coordenadas [Litvin, 1994]. La Figura 4.7.1 muestra la tangencia de las superficies Σ_σ y Σ_2 en el punto de contacto M . Ambas superficies están representadas en el sistema de referencia fijo S_f .

La simulación del engrane y análisis del contacto de ambas superficies Σ_σ y Σ_2 exige la representación de las mismas en un mismo sistema de referencia fijo S_f con el fin de considerar errores en el montaje o instalación (Fig. 4.7.2).

La Figura 4.7.2(a) muestra los sistemas S_σ y S_f en la que los ejes z_σ y z_f coinciden. El ángulo ϕ_σ representa la rotación del piñón. La Figura 4.7.2(b) muestra los sistemas auxiliares S_u , S_v y S_w que simulan los errores de montaje, todos ellos referidos a la rueda. Los errores de montaje tenidos en cuenta son:

- (i) ΔE simula el error en la distancia entre centros de forma que $E + \Delta E$ localiza la posición del sistema S_u respecto del S_f .

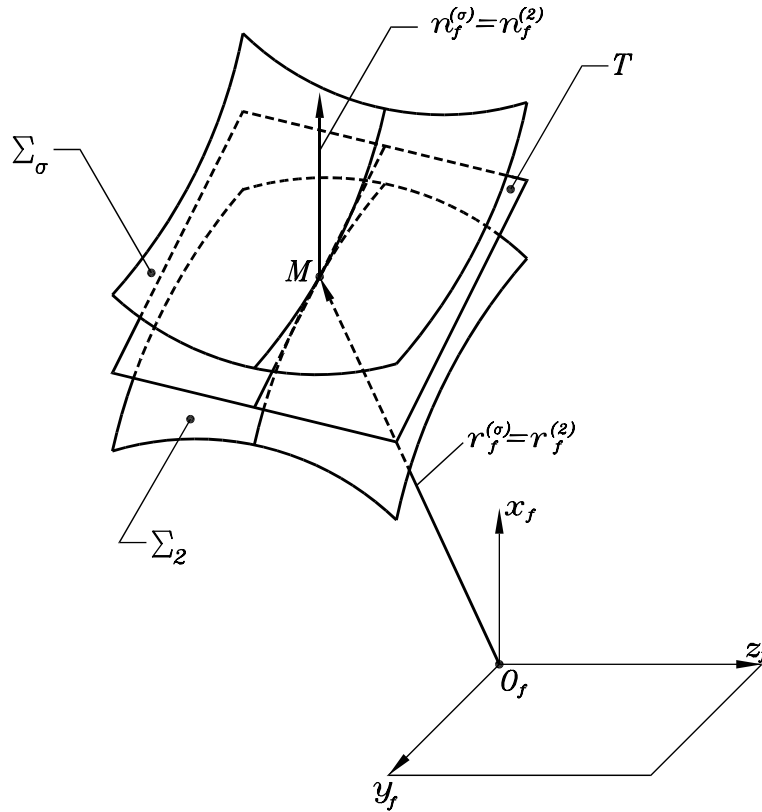


Figura 4.7.1: Condiciones de tangencia de las superficies de contacto Σ_σ y Σ_2 .

- (ii) $\Delta\gamma_v$ simula el error angular responsable de que los ejes de piñón y rueda se corten y determina la posición del sistema S_v respecto del S_u .
- (iii) $\Delta\gamma_h$ simula el error angular responsable de que los ejes de piñón y rueda se crucen y determina la posición del sistema S_w respecto del S_v .

La Figura 4.7.2(c) muestra los sistemas S_w y S_2 . El eje de giro de la rueda es el eje z_w y ϕ_2 su ángulo de giro.

Además de los errores de montaje se considera el error de fabricación en el ángulo de hélice. Este error también está referido a la rueda y significa que su cremallera Σ_t genera la rueda con un error angular $\Delta\lambda$ (véase Fig. 4.7.3).

Por tanto, la matriz $\mathbf{M}_{2t}(\psi_2)$ expresada en (4.6.10) se debe modificar para tener en cuenta el error $\Delta\lambda$. Esto supone sustituir la matriz expresada

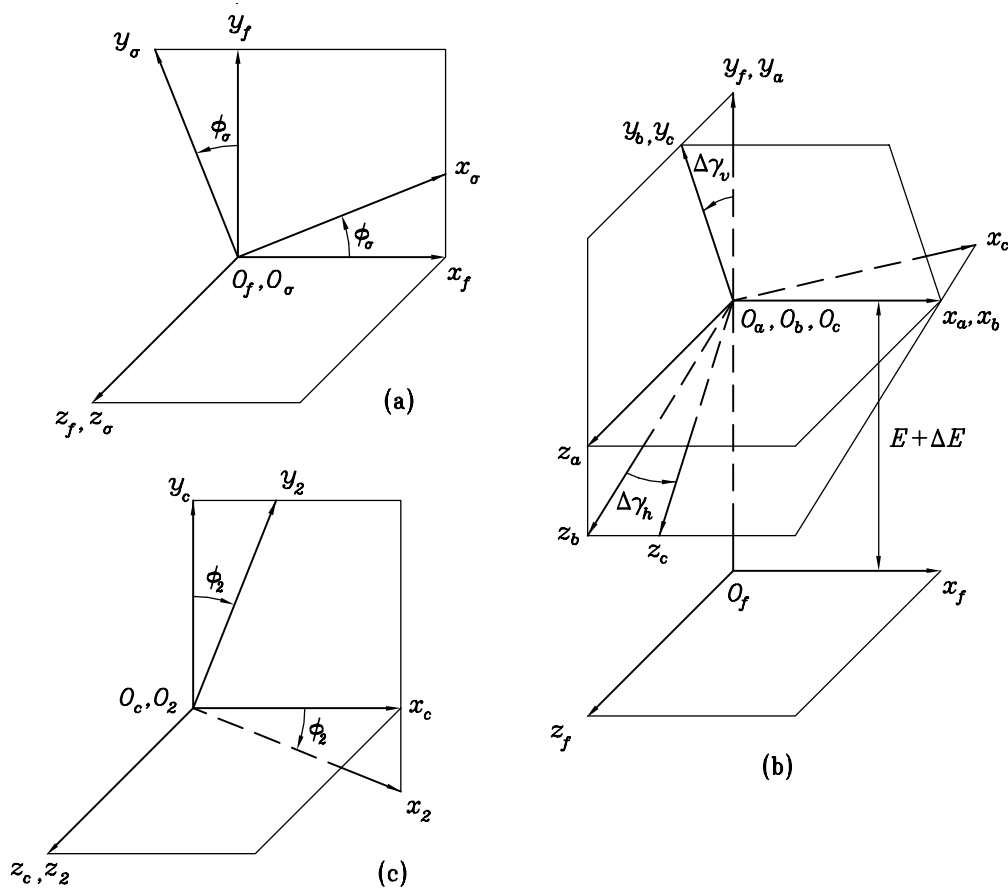


Figura 4.7.2: Sistemas de coordenadas para la simulación del engrane y análisis del contacto.

en (4.6.10) por la siguiente matriz

$$\mathbf{M}'_{2t}(\psi_2, \Delta\lambda) = \mathbf{M}_{2t}(\psi_2) \begin{bmatrix} \cos \Delta\lambda & 0 & \text{sen } \Delta\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \Delta\lambda & 0 & \cos \Delta\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7.1)$$

Igualmente la ecuación de engrane $f_{t2} = 0$ difiere de la expresada en (4.6.11) y (4.6.12), debiéndose sustituir β por $\beta + \Delta\lambda$.

Una vez definidos los errores de montaje y fabricación, se han de definir

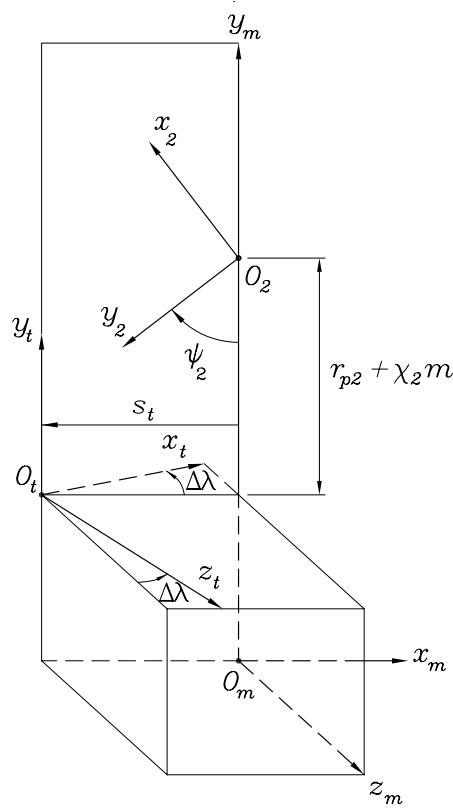


Figura 4.7.3: Definición del error de fabricación $\Delta\lambda$ durante la generación de la rueda.

cada una de las superficies Σ_σ y Σ_2 en el mismo sistema de referencia fijo S_f con el fin de establecer las condiciones de contacto.

La superficie del piñón Σ_σ y su normal unitaria en el sistema S_σ vienen dadas por:

$$\mathbf{r}_\sigma^{(\sigma)} = \mathbf{r}_\sigma^{(\sigma)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma), \quad f_{c\sigma}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) = 0 \quad (4.7.2)$$

$$\mathbf{n}_\sigma^{(\sigma)} = \mathbf{n}_\sigma^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma) \quad (4.7.3)$$

donde $f_{c\sigma} = 0$ es la ecuación de engrane del piñón con su cremallera Σ_c .

La superficie de la rueda Σ_2 y su normal unitaria en el sistema S_2 vienen dadas por:

$$\mathbf{r}_2^{(2)} = \mathbf{r}_2^{(2)}(u_r, \theta_r, \psi_2), \quad f_{t2}(u_r, \theta_r, \psi_2) = 0 \quad (4.7.4)$$

$$\mathbf{n}_2^{(2)} = \mathbf{n}_2^{(2)}(u_r, \psi_2) \quad (4.7.5)$$

donde $f_{t2} = 0$ es la ecuación de engrane de la rueda con su cremallera Σ_t y el error $\Delta\lambda$ es considerado.

Las superficies Σ_σ y Σ_2 en el sistema fijo S_f vienen dadas por los vectores $\mathbf{r}_f^{(\sigma)}$ y $\mathbf{r}_f^{(2)}$ y las correspondientes ecuaciones de engrane $f_{c\sigma} = 0$ y $f_{t2} = 0$. Ambos vectores vienen dados a partir de las siguientes transformaciones matriciales

$$\mathbf{r}_f^{(\sigma)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma, \phi_\sigma) = \mathbf{M}_{f\sigma}(\phi_\sigma)\mathbf{r}_\sigma^{(\sigma)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) \quad (4.7.6)$$

$$\mathbf{r}_f^{(2)}(u_r, \theta_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{M}_{f2}(\phi_2)\mathbf{r}_2^{(2)}(u_r, \theta_r, \psi_2) \quad (4.7.7)$$

donde

$$\mathbf{M}_{f\sigma}(\phi_\sigma) = \begin{bmatrix} \cos \phi_\sigma & -\text{sen } \phi_\sigma & 0 & 0 \\ \text{sen } \phi_\sigma & \cos \phi_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7.8)$$

y

$$\mathbf{M}_{f2} = \mathbf{M}_{fu}(\Delta E)\mathbf{M}_{uv}(\Delta\gamma_v)\mathbf{M}_{vw}(\Delta\gamma_h)\mathbf{M}_{w2}(\phi_2) \quad (4.7.9)$$

siendo

$$\mathbf{M}_{fu}(\Delta E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E + \Delta E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7.10)$$

$$\mathbf{M}_{uv}(\Delta\gamma_v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta\gamma_v & -\text{sen } \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & \text{sen } \Delta\gamma_v & \cos \Delta\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7.11)$$

$$\mathbf{M}_{vw}(\Delta\gamma_h) = \begin{bmatrix} \cos \Delta\gamma_h & 0 & \text{sen } \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \Delta\gamma_h & 0 & \cos \Delta\gamma_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7.12)$$

$$\mathbf{M}_{w2}(\phi_2) = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \text{sen } \phi_2 & 0 & 0 \\ -\text{sen } \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7.13)$$

Las normales unitarias a las superficies de piñón y rueda en el mismo sistema S_f vienen dadas por los vectores $\mathbf{n}_f^{(\sigma)}$ y $\mathbf{n}_f^{(2)}$ respectivamente

$$\mathbf{n}_f^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma, \phi_\sigma) = \mathbf{L}_{f\sigma}(\phi_\sigma) \mathbf{n}_\sigma^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma) \quad (4.7.14)$$

$$\mathbf{n}_f^{(2)}(u_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{L}_{f2}(\phi_2) \mathbf{n}_2^{(2)}(u_r, \psi_2) \quad (4.7.15)$$

donde $\mathbf{L}_{f\sigma}$ y \mathbf{L}_{f2} son las submatrices de orden 3×3 que resultan de eliminar la última fila y la última columna de las matrices $\mathbf{M}_{f\sigma}$ y \mathbf{M}_{f2} , respectivamente.

En el caso de engranajes helicoidales donde el contacto está localizado, la tangencia de las superficies Σ_σ y Σ_2 se obtiene en el sistema S_f mediante el siguiente sistema de ecuaciones no lineales,

$$\mathbf{r}_f^{(\sigma)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma, \phi_\sigma) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_r, \theta_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (4.7.16)$$

$$\mathbf{n}_f^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma, \phi_\sigma) - \mathbf{n}_f^{(2)}(u_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (4.7.17)$$

$$f_{c\sigma}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) = 0 \quad (4.7.18)$$

$$f_{t2}(u_r, \theta_r, \psi_2) = 0 \quad (4.7.19)$$

La ecuación vectorial (4.7.16) proporciona tres ecuaciones escalares independientes. La ecuación vectorial (4.7.17) proporciona solamente dos ecuaciones escalares independientes al ser $|\mathbf{n}_f^{(\sigma)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$.

Las ecuaciones vectoriales (4.7.16) y (4.7.17) con las ecuaciones de engrane (4.7.18) y (4.7.19) constituyen un sistema de siete ecuaciones escalares $f_i = 0$, ($i = 1, \dots, 7$) y ocho incógnitas. Fijando una de las incógnitas, por ejemplo ϕ_σ , se pueden determinar las siguientes funciones,

$$\{u_a(\phi_\sigma), \theta_a(\phi_\sigma), \psi_\sigma(\phi_\sigma), u_r(\phi_\sigma), \theta_r(\phi_\sigma), \psi_2(\phi_\sigma), \phi_2(\phi_\sigma)\} \in C^1 \quad (4.7.20)$$

El proceso de cálculo es iterativo y se debe partir de un valor inicial

$$P^{(0)}(u_a^{(0)}, \theta_a^{(0)}, \psi_\sigma^{(0)}, u_r^{(0)}, \theta_r^{(0)}, \psi_2^{(0)}, \phi_2^{(0)}) \quad (4.7.21)$$

que debe satisfacer el sistema de ecuaciones $f_i = 0$ ($i = 1, \dots, 7$) y además verificar que el Jacobiano del sistema en $P^{(0)}$ sea distinto de cero,

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)}{D(u_a, \theta_a, \psi_\sigma, u_r, \theta_r, \psi_2, \phi_2)} \neq 0 \quad (4.7.22)$$

En el caso de engranajes rectos, la tangencia de las superficies Σ_σ y Σ_2 tiene lugar a lo largo de una línea siempre que no se presenten errores de montaje y/o fabricación. En este caso, el algoritmo anteriormente explicado es aplicable para determinar el punto intersección de la línea de contacto con una sección normal cualquiera. El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\mathbf{r}_f^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma, \phi_\sigma) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (4.7.23)$$

$$\mathbf{n}_f^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma, \phi_\sigma) - \mathbf{n}_f^{(2)}(u_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (4.7.24)$$

$$f_{c\sigma}(u_a, \psi_\sigma) = 0 \quad (4.7.25)$$

$$f_{t2}(u_r, \psi_2) = 0 \quad (4.7.26)$$

Los parámetros θ_a y θ_r no aparecen en este sistema porque son constantes e iguales. En este caso, la ecuación vectorial (4.7.23) proporciona dos ecuaciones escalares independientes al ser $\mathbf{r}_{fz}^{(\sigma)} = \mathbf{r}_{fz}^{(2)}$. La ecuación vectorial (4.7.24) proporciona solamente una ecuación escalar independiente al ser $\mathbf{n}_{fz}^{(\sigma)} = \mathbf{n}_{fz}^{(2)} = 0$ y $|\mathbf{n}_f^{(\sigma)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$. Junto con las dos ecuaciones de engrane se tiene un sistema de cinco ecuaciones escalares con seis incógnitas. Por tanto, es posible aplicar el algoritmo anterior.

Determinación de la función de errores de transmisión. La función de errores de transmisión viene dada por la diferencia entre el valor de la función $\phi_2(\phi_\sigma)$ obtenida del análisis del contacto y el que teóricamente debería tener, esto es, $(N_1/N_2)\phi_\sigma$. La función de errores de transmisión $\Delta\phi_2(\phi_\sigma)$ viene dada por:

$$\Delta\phi_2(\phi_\sigma) = \left(\phi_2(\phi_\sigma) - \phi_2(\phi_\sigma^{(0)}) \right) - \frac{N_1}{N_2} \left(\phi_\sigma - \phi_\sigma^{(0)} \right) \quad (4.7.27)$$

donde $\phi_\sigma^{(0)}$ es un valor inicial de referencia del ángulo de giro del piñón.

Determinación de las elipses instantáneas de contacto. Las dimensiones y orientación de las elipses instantáneas de contacto se obtienen a partir de las curvaturas principales y direcciones principales de curvatura de las superficies de los dientes en el punto de contacto [Litvin, 1994], así como en función del parámetro de deformación elástica, δ (Apartado 2.7). Este parámetro, obtenido experimentalmente para transmisiones por engranajes cargadas ligeramente, se ha considerado igual a 0,006 mm para la determinación aproximada de las elipses de contacto. Este parámetro depende de las propiedades mecánicas del material, el par aplicado y las curvaturas de las superficies.

Ejemplo numérico 4.7.1. La transmisión considerada está constituida por un piñón y una rueda helicoidales con simple abombamiento. Los datos son los siguientes: $N_1 = 17$ dientes, $N_2 = 77$ dientes, $m = 5,08$ mm, $s_{21} = 0,7$, $\beta = 20^\circ$, $\alpha_d = \alpha_c = 25^\circ$, $a_{da} = 0,016739$ mm⁻¹, $a_{dr} = 0,0155$ mm⁻¹. Se han considerado los siguientes errores de montaje y fabricación: (i) error en la distancia entre centros $\Delta E = 70$ μ m, (ii) error en el ángulo de carga $\Delta\lambda = 2$ min. ang., (iii) error en el ángulo entre ejes $\Delta\gamma_h = 2$ min. ang.

Los resultados obtenidos del análisis del contacto son los siguientes:

- (i) El camino de contacto está orientado longitudinalmente (Figs. 4.7.4(a) y 4.7.4(b)). Las elipses de contacto se han representado considerando el centro de simetría y el eje mayor.
- (ii) El error ΔE en la distancia entre centros no produce errores de transmisión pero desplaza el camino de contacto.
- (iii) El error de alineación $\Delta\gamma_h$ y el error de fabricación $\Delta\lambda$ dan lugar a errores de transmisión, representados mediante una función discontinua como se puede observar en la Fig. 4.7.4(c). Por tanto, la transición del engrane de una pareja de dientes a la siguiente tiene lugar con una gran aceleración, siendo ésta una de las fuentes principales de vibración y ruido en la transmisión.

Ésta es la razón por la que en engranajes helicoidales el abombamiento en la dirección del perfil de una de las superficies, del piñón o de la rueda, o bien

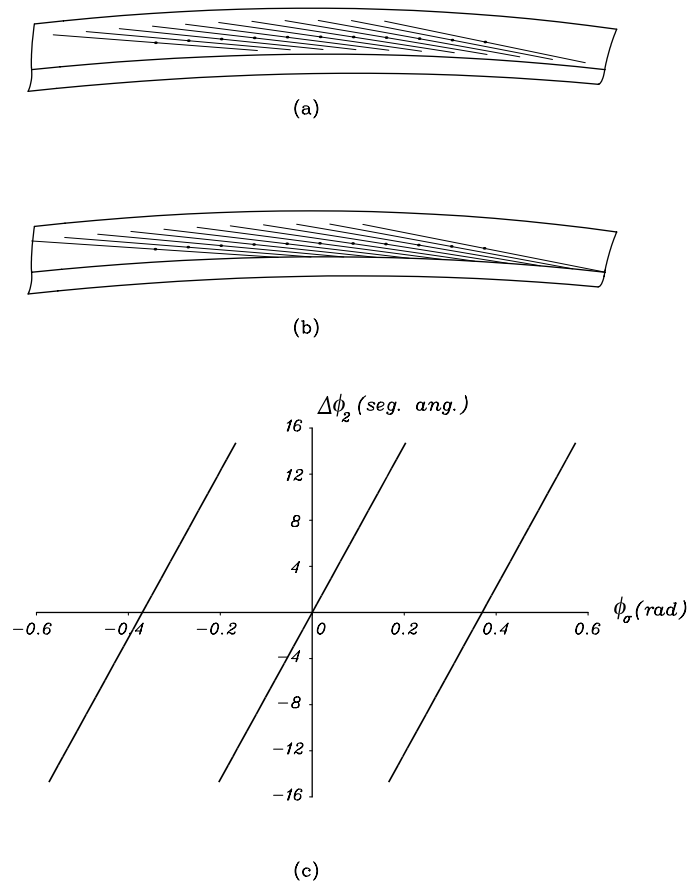


Figura 4.7.4: Resultados del TCA en una transmisión de engranajes helicoidales con simple abombamiento: (a) camino de contacto con un error ΔE [$70 \mu\text{m}$]; (b) camino de contacto con un error $\Delta \gamma_h$ [2 min.ang.]; (c) función de errores de transmisión con un error $\Delta \gamma_h$ [2 min.ang.].

las dos, como en el ejemplo presentado, aunque localiza el contacto, produce una función discontinua de errores de transmisión cuando aparecen errores de montaje y/o fabricación. Es por tanto necesario proporcionar a una de las superficies, el piñón por ejemplo por ser el elemento de la transmisión con menor número de dientes, un segundo abombamiento en la dirección longitudinal. Este abombamiento debe proporcionar a la transmisión una función parabólica de errores de transmisión capaz de absorber las funciones discontinuas de

errores de transmisión producidas por errores de alineación y montaje. Dado que el camino de contacto es predominantemente longitudinal como se muestra en la Figura 4.7.4, se deduce que el abombamiento de la superficie responsable de modificar los errores de transmisión debe ser aplicado en la dirección longitudinal.

Ejemplo numérico 4.7.2. En este ejemplo la transmisión considerada está constituida por engranajes rectos. Los datos son los siguientes: $N_1 = 21$ dientes, $N_2 = 50$ dientes, $m = 4,0$ mm, $s_{21} = 1,0$, $\beta = 0^\circ$, $\alpha_d = \alpha_c = 25^\circ$, $a_{da} = 0,0005$ mm⁻¹, $a_{dr} = 0,0$ mm⁻¹. En este caso el piñón presenta abombamiento en la dirección del perfil pero la rueda tiene geometría convencional con perfil de evolvente al ser el coeficiente parabólico a_{dr} nulo. No se han considerado errores de montaje y/o fabricación con el fin de que el algoritmo anteriormente explicado para el caso de engranajes rectos sea aplicable.

Los resultados obtenidos son los siguientes:

- (i) El camino de contacto está constituido por el conjunto de puntos intersección de las líneas de contacto con la sección central como se muestra en la Figura 4.7.5(a). Las líneas de contacto correspondientes también se han representado.
- (ii) La función resultante de errores de transmisión es una función parabólica como se muestra en la Figura 4.7.5(b) para tres ciclos de engrane. Se observa que la función obtenida es continua con un valor máximo del error de 8 seg. ang.

El abombamiento en la dirección del perfil del piñón es el responsable de la función parabólica de errores de transmisión. El prediseño de esta función a través del coeficiente a_{da} induce errores en una transmisión sin desalineaciones como la presentada en el ejemplo. Sin embargo, esta función de errores será capaz de absorber las funciones cuasilineales de errores de transmisión producidas por desalineaciones cuando éstas aparezcan, estando tales errores representados por una función continua y periódica de valor máximo limitado. Normalmente se recomienda un diseño con un valor máximo del error en torno a $6 \div 8$ seg. ang.

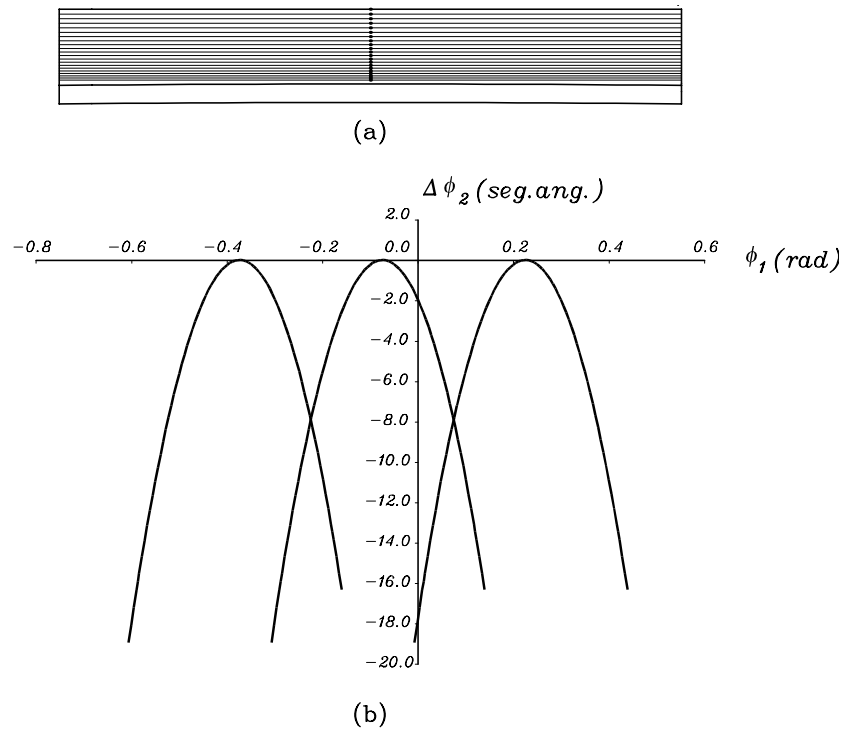


Figura 4.7.5: Resultados del TCA en una transmisión de engranajes rectos con simple abombamiento: (a) camino de contacto, (b) función de errores de transmisión.

Aunque la transmisión analizada presenta una función de errores de transmisión favorable, sin embargo el contacto no está localizado y ciertas desalineaciones pueden producir contacto en el borde, con el consiguiente aumento de las tensiones de contacto y flexión. Es por tanto necesario la localización del contacto mediante el abombamiento longitudinal de las superficies de los dientes.

Los ejemplos numéricos presentados muestran que la generación de las transmisiones helicoidales y rectas basada en la utilización de cremalleras diferentes proporciona un abombamiento en la dirección del perfil a uno o a los dos engranajes. Este abombamiento permite:

- (1) La localización del contacto en engranajes helicoidales.

- (2) El prediseño de una función parabólica de errores de transmisión en engranajes rectos.

En el siguiente capítulo se exponen los diferentes métodos para conseguir el abombamiento longitudinal con dos objetivos principales:

- (1) El prediseño de una función parabólica de errores de transmisión en engranajes helicoidales.
- (2) La localización del contacto en engranajes rectos.

Para ello, se considera conocida la superficie del piñón con abombamiento simple Σ_σ presentada anteriormente. A partir de Σ_σ , se determina la geometría de la herramienta de corte o rectificado. Esta herramienta es capaz de generar la misma superficie Σ_σ que la obtenida por cremallera cuando los parámetros del proceso de fabricación son los convencionales. Tales parámetros se habrán de modificar con el fin de aportar al piñón un segundo abombamiento en la dirección longitudinal.

Es importante garantizar que la superficie del piñón Σ_σ esté libre de singularidades y no presente apuntamiento. La presencia de un perfil parabólico en la cremallera constituye una condición más desfavorable tanto en el problema de la penetración como en el del apuntamiento respecto al perfil recto.

4.8. Penetración y apuntamiento

La penetración y el apuntamiento constituyen dos problemas que delimitan la superficie de los dientes. En este apartado se estudian ambos problemas en la superficie del piñón con abombamiento en la dirección del perfil Σ_σ . Su estudio en la superficie Σ_2 es análogo por lo que no se considera necesaria su exposición.

4.8.1. Penetración

Para evitar la penetración en la superficie Σ_σ se deben considerar las siguientes ideas:

- (i) La aparición de puntos singulares en la superficie generada Σ_σ puede significar que la superficie ha sido penetrada en el proceso de generación.
- (ii) Los puntos singulares de la superficie Σ_σ son generados por puntos regulares en la superficie generadora Σ_c cuando la velocidad del punto de contacto en su movimiento sobre Σ_σ es igual a cero:

$$\mathbf{v}_r^{(\sigma)} = \mathbf{v}_r^{(c)} + \mathbf{v}^{(c\sigma)} = 0 \quad (4.8.1)$$

- (iii) La ecuación (4.8.1) y la ecuación diferencial de engrane

$$\frac{d}{dt}[f(u_a, \theta_a, \psi_\sigma)] = 0 \quad (4.8.2)$$

permiten determinar sobre la superficie Σ_c la línea L que genera puntos singulares sobre Σ_σ . Limitando Σ_c con la línea L se evita la aparición de puntos singulares en la superficie Σ_σ .

La obtención de la línea L está basada en las siguientes consideraciones:

- (1) La ecuación (4.8.1) se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial u_a} \frac{du_a}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \theta_a} \frac{d\theta_a}{dt} = -\mathbf{v}_c^{(c\sigma)} \quad (4.8.3)$$

donde $\partial \mathbf{r}_c / \partial u_a$, $\partial \mathbf{r}_c / \partial \theta_a$ y $\mathbf{v}_c^{(c\sigma)}$ son tres vectores representados en el sistema S_c de la cremallera del piñón.

- (2) De la ecuación (4.8.2) se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial u_a} \frac{du_a}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \theta_a} \frac{d\theta_a}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial \psi_\sigma} \frac{d\psi_\sigma}{dt} \quad (4.8.4)$$

- (3) Las ecuaciones (4.8.3) y (4.8.4) representan un sistema de cuatro ecuaciones lineales y dos incógnitas: du_a/dt and $d\theta_a/dt$. Este sistema tiene solución si la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial u_a} & \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \theta_a} & -\mathbf{v}_c^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial f}{\partial u_a} & \frac{\partial f}{\partial \theta_a} & -\frac{\partial f}{\partial \psi_\sigma} \frac{d\psi_\sigma}{dt} \end{bmatrix} \quad (4.8.5)$$

tiene rango $r = 2$. Esto supone que

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial u_a} & \frac{\partial x_c}{\partial \theta_a} & -v_{xc}^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial y_c}{\partial u_a} & \frac{\partial y_c}{\partial \theta_a} & -v_{yc}^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial f}{\partial u_a} & \frac{\partial f}{\partial \theta_a} & -\frac{\partial f}{\partial \psi_\sigma} \frac{d\psi_\sigma}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8.6)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial u_a} & \frac{\partial x_c}{\partial \theta_a} & -v_{xc}^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial z_c}{\partial u_a} & \frac{\partial z_c}{\partial \theta_a} & -v_{zc}^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial f}{\partial u_a} & \frac{\partial f}{\partial \theta_a} & -\frac{\partial f}{\partial \psi_\sigma} \frac{d\psi_\sigma}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8.7)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_c}{\partial u_a} & \frac{\partial y_c}{\partial \theta_a} & -v_{yc}^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial z_c}{\partial u_a} & \frac{\partial z_c}{\partial \theta_a} & -v_{zc}^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial f}{\partial u_a} & \frac{\partial f}{\partial \theta_a} & -\frac{\partial f}{\partial \psi_\sigma} \frac{d\psi_\sigma}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8.8)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c}{\partial u_a} & \frac{\partial x_c}{\partial \theta_a} & -v_{xc}^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial y_c}{\partial u_a} & \frac{\partial y_c}{\partial \theta_a} & -v_{yc}^{(c\sigma)} \\ \frac{\partial z_c}{\partial u_a} & \frac{\partial z_c}{\partial \theta_a} & -v_{zc}^{(c\sigma)} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.8.9)$$

La ecuación (4.8.9) representa la ecuación de engrane $f(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) = 0$ y no se utiliza para la determinación de las singularidades. La condición de que los determinantes Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 sean iguales a cero se puede expresar como

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = 0 \quad (4.8.10)$$

La ecuación (4.8.10) nos permite determinar singularidades y se puede escribir en la forma

$$F(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) = 0 \quad (4.8.11)$$

En la mayoría de los casos, para obtener $F = 0$, es suficiente utilizar cualquiera de las tres siguientes ecuaciones:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0 \quad (4.8.12)$$

Las singularidades en el piñón se pueden evitar limitando la superficie de su cremallera Σ_c con la línea L . La determinación de L se basa en el siguiente procedimiento:

- (1) Utilizando la ecuación de engrane $f_{c\sigma} = 0$ se puede obtener en el plano de parámetros (u_a, θ_a) la familia de líneas de contacto entre el piñón y su cremallera. Cada línea de contacto se determina para un valor fijo del parámetro del movimiento ψ_σ .
- (ii) La línea límite L se determina en el espacio de parámetros (u_a, θ_a) mediante la consideración simultánea de las ecuaciones $f_{c\sigma} = 0$ y $F = 0$ (Fig. 4.8.1(a)). Igualmente se puede obtener la línea límite L sobre la superficie de la cremallera (Fig. 4.8.1(b)). La línea límite L sobre la superficie de la cremallera está constituida por puntos regulares que generan puntos singulares en la superficie del piñón.

Limitando la superficie de la cremallera con la línea L nos permite evitar los puntos singulares sobre la superficie del piñón.

Los puntos singulares sobre la superficie del piñón se pueden obtener por transformación de coordenadas desde la línea L sobre la superficie Σ_c a la superficie Σ_σ .

4.8.2. Apuntamiento

Existirá apuntamiento cuando los perfiles de los dos lados del diente de un engranaje se intersectan en el radio de cabeza, es decir, cuando el ancho de cabeza del engranaje es cero.

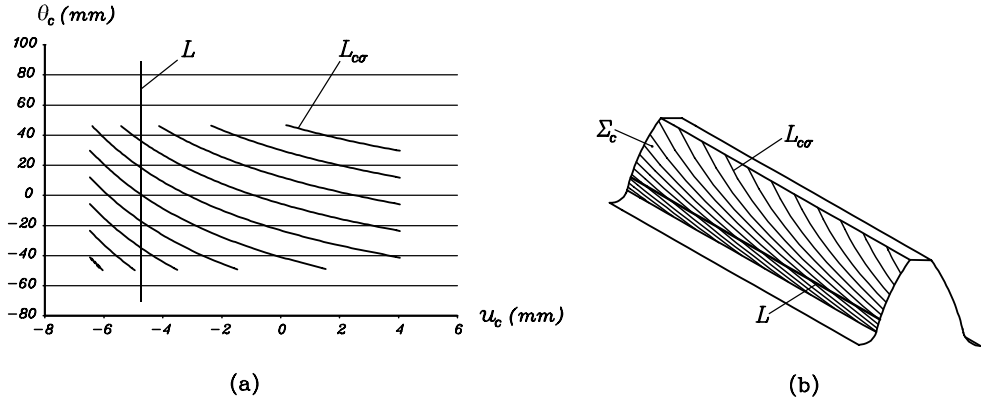


Figura 4.8.1: Líneas de contacto $L_{c\sigma}$ y línea límite L : (a) en el plano de parámetros (u_a, θ_a) ; (b) sobre la superficie Σ_c .

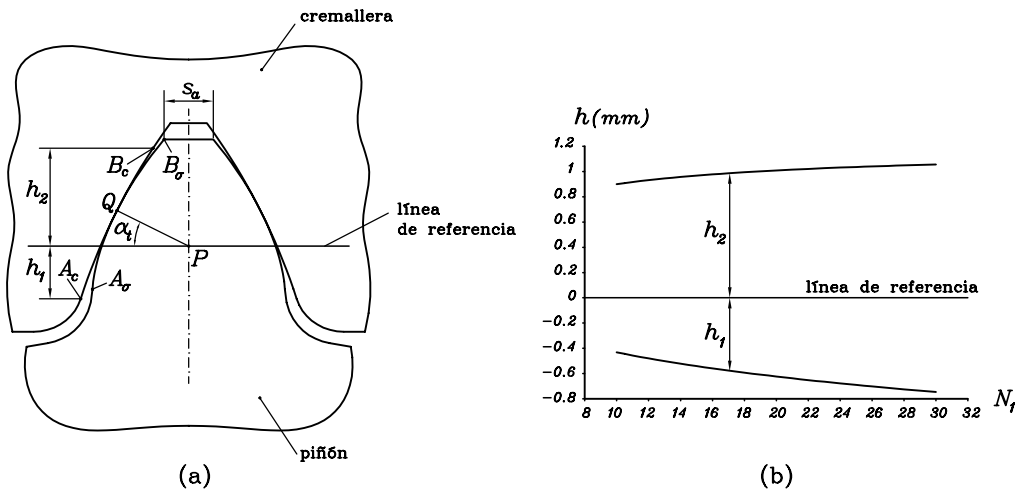


Figura 4.8.2: Dimensiones límite h_1 y h_2 de la cremallera: (a) sección transversal del piñón y la cremallera; (b) funciones $h_1(N_1)$ y $h_2(N_1)$.

La Figura 4.8.2(a) muestra las secciones transversales del piñón y de su cremallera. El punto A_c de la cremallera genera el punto límite A_σ en el piñón donde la singularidad todavía no se produce. El punto B_c de la cremallera genera el punto B_σ en el piñón. El parámetro s_a constituye el espesor elegido en la cabeza del piñón. El parámetro α_t constituye el ángulo de presión

transversal en el punto Q . Los parámetros h_1 y h_2 localizan los puntos límites A_c y B_c respectivamente sobre la cremallera. La Figura 4.8.2(b) muestra las funciones $h_1(N_1)$ y $h_2(N_1)$ donde N_1 es el número de dientes del piñón. Los datos utilizados son $\alpha_d = 25^\circ$, $\beta = 20^\circ$, coeficiente de abombado del perfil $a_{da} = 0,016739 \text{ mm}^{-1}$, $s_a = 0,3m$, parámetro $s_{21} = 1$ (ver Ec. (4.3.2)) y módulo $m = 1 \text{ mm}$.

Capítulo 5

Engranajes cilíndricos con geometría modificada. Generación real por herramienta

5.1. Introducción

La generación de engranajes cilíndricos basada en la utilización de cremalleras con distinto perfil para el piñón y la rueda proporciona un abombamiento en la dirección del perfil a uno o a los dos miembros de la transmisión. Este abombamiento es el responsable de la localización del contacto en engranajes helicoidales y del prediseño de una función parabólica de errores de transmisión en engranajes rectos.

El problema de localización del contacto y prediseño de una función parabólica de errores de transmisión está entonces resuelto sólo parcialmente en cada tipo de transmisión ya que, como se ha visto en el capítulo anterior, desalineaciones tales como un error en el ángulo entre ejes producen una función discontinua de errores de transmisión en engranajes helicoidales. En engranajes rectos, dichos errores se pueden absorber por la función prediseñada de errores de transmisión (como se verá más adelante), pero el contacto no

estará localizado, siendo inevitable el contacto en el borde de las superficies de los dientes cuando las desalineaciones estén presentes.

Un segundo abombamiento en la dirección longitudinal es por tanto necesario. En este capítulo se presentan tres métodos para conseguir dicho objetivo. Dichos métodos parten de la geometría del piñón abombado en la dirección del perfil, cuya geometría se representó en el capítulo anterior. En primer lugar se determina la geometría de la herramienta de corte o rectificado de tal forma que la aplicación de la herramienta en un proceso de generación normal genere la misma superficie que la obtenida a partir de la cremallera. Finalmente se aplicarán las modificaciones necesarias en el proceso de generación con el fin de conseguir el abombamiento longitudinal.

Las herramientas de corte o rectificado que se han considerado son dos, disco y cortador sinfín ("hob" en la literatura inglesa). Los tres métodos propuestos son:

- (1) Mediante disco de corte o rectificado, modificando la distancia entre los ejes del disco y del piñón durante el proceso de generación.
- (2) Mediante cortador sinfín, modificando la distancia entre los ejes del cortador y del piñón durante la generación.
- (3) Mediante cortador sinfín, modificando la relación entre el giro del piñón y el desplazamiento del cortador durante el movimiento de alimentación del cortador.

Las Figuras 5.1.1 y 5.1.2 muestran los modelos en tres dimensiones de la generación de un piñón helicoidal mediante un disco de corte o rectificado y un cortador sinfín, respectivamente.

5.2. Generación mediante disco de corte o rectificado

La generación del piñón mediante disco de corte o rectificado exige determinar en primer lugar la superficie del disco que genera la misma superficie del piñón Σ_σ que la obtenida a partir de su cremallera. A continuación se

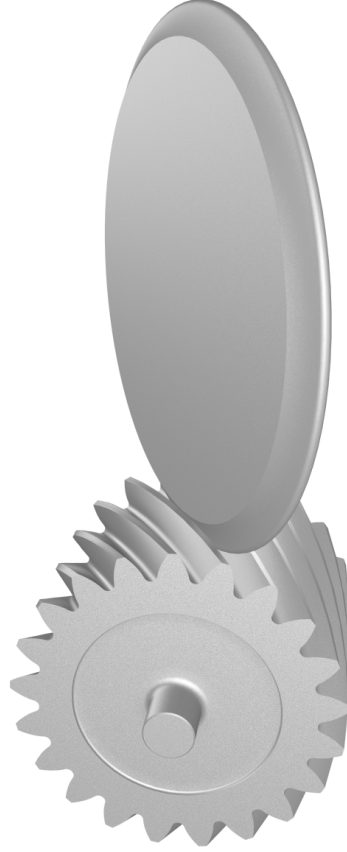


Figura 5.1.1: Generación de un piñón helicoidal mediante disco de corte o rectificado.

presenta el procedimiento para determinar la superficie del disco Σ_D cuando la superficie a generar Σ_σ es conocida:

- (i) La superficie del piñón con abombamiento simple Σ_σ y su normal unitaria vienen definidas en el sistema S_σ (Fig. 5.2.1(a)) como

$$\mathbf{r}_\sigma^{(\sigma)} = \mathbf{r}_\sigma^{(\sigma)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma), \quad f_{c\sigma}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) = 0 \quad (5.2.1)$$

$$\mathbf{n}_\sigma^{(\sigma)} = \mathbf{n}_\sigma^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma) \quad (5.2.2)$$

- (ii) Dado que el disco ha de generar el hueco entre dientes del piñón, cada uno de los lados conductor y conducido de la superficie Σ_σ han de

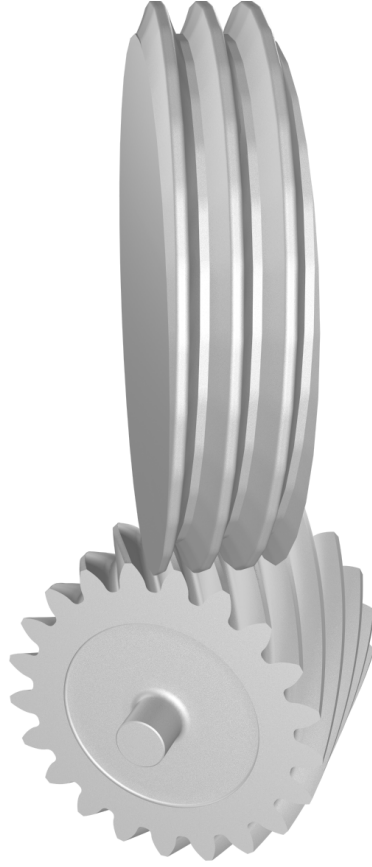


Figura 5.1.2: Generación de un piñón helicoidal mediante cortador sinfín.

girar en sentido contrario el ángulo correspondiente a la mitad del paso angular del piñón, π/N_1 , según se observa en la Fig. 5.2.1(b) para el lado conductor, $\Sigma_\sigma^{(a)}$, y en la Fig. 5.2.1(c) para el lado conducido, $\Sigma_\sigma^{(b)}$. La superficie del piñón Σ_σ y su normal unitaria se consideran entonces en el sistema S_m como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_m^{(\sigma)} &= [r_{mx} \quad r_{my} \quad r_{mz} \quad 1]^T = \mathbf{M}_{m\sigma} \mathbf{r}_\sigma^{(\sigma)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) \\ f_{c\sigma}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{n}_m^{(\sigma)} = [n_{mx} \quad n_{my} \quad n_{mz}]^T = \mathbf{L}_{m\sigma} \mathbf{n}_\sigma^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma) \quad (5.2.4)$$

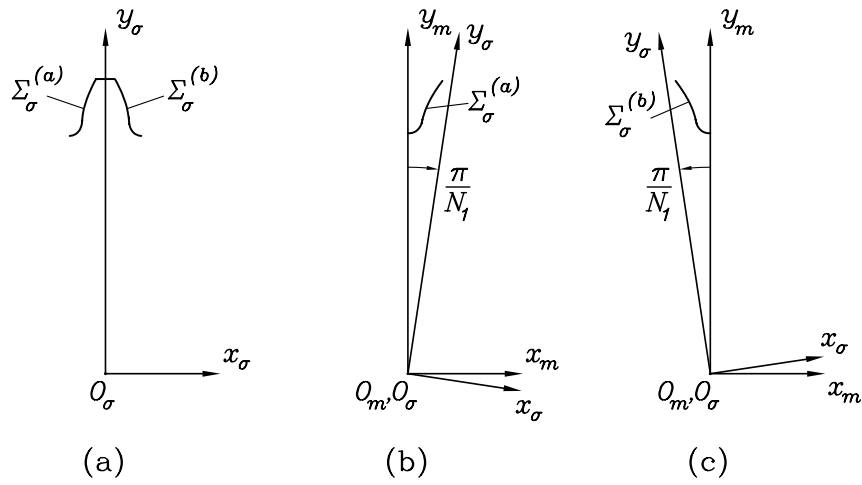


Figura 5.2.1: Disposición de los perfiles conductor y conducido de la superficie del piñón Σ_σ para la determinación de la superficie del disco Σ_D : (a) sección transversal del diente del piñón; (b) giro del perfil conductor; (c) giro del perfil conducido.

donde $\mathbf{M}_{m\sigma}$ viene dada por

$$\mathbf{M}_{m\sigma} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{N_1} & \pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{N_1} & 0 & 0 \\ \mp \operatorname{sen} \frac{\pi}{N_1} & \cos \frac{\pi}{N_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.5)$$

utilizándose el signo superior para el lado conductor y el signo inferior para el lado conducido. La matriz $\mathbf{L}_{m\sigma}$ se obtiene de eliminar la última fila y la última columna de la matriz $\mathbf{M}_{m\sigma}$.

(iii) La superficie del disco de corte o rectificando Σ_D se obtiene en el sistema S_D a partir de la superficie Σ_σ definida en el sistema S_m (Fig. 5.2.2) según el siguiente procedimiento [Litvin, 1994]:

- (1) El radio del disco ρ_D se considera conocido (Fig. 5.2.2(a)). Los ejes del disco y del piñón están cruzados según el ángulo γ_{Dp} , igual al ángulo de carga λ_p del piñón (Fig. 5.2.2(b)). La distancia entre

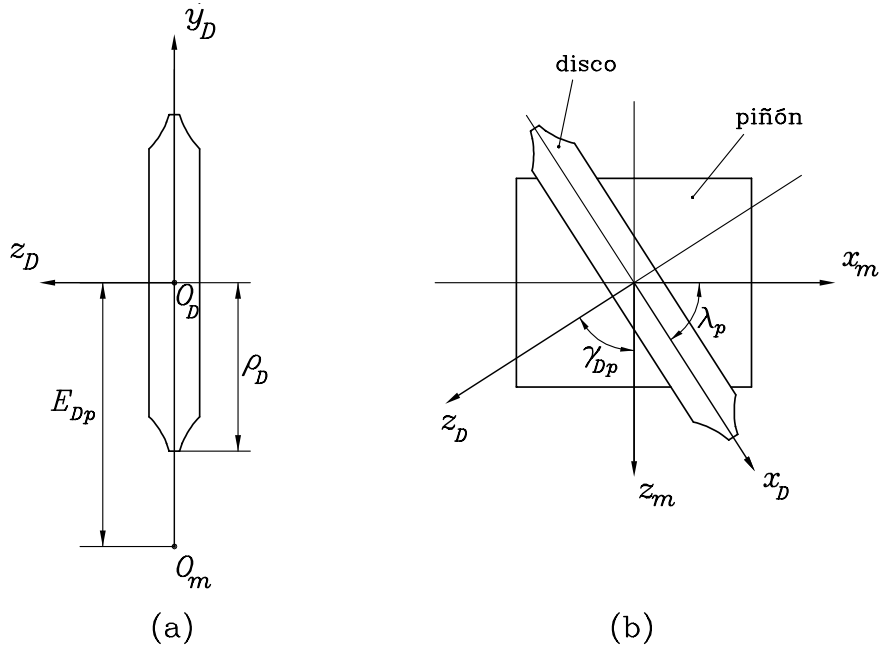


Figura 5.2.2: Disposición del disco de corte respecto al piñón: (a) distancia entre ejes; (b) ángulo entre ejes.

ejes E_{Dp} viene definida como

$$E_{Dp} = r_{d1} + \rho_D \quad (5.2.6)$$

donde r_{d1} es el radio del piñón correspondiente al dedendo y viene dado por $r_{d1} = r_{p1} - h_{d1}$.

En el caso particular de un piñón recto, el ángulo de carga es de 90° . Por tanto los ejes del disco y del piñón están cruzados según el ángulo $\gamma_{Dp} = 90^\circ$.

- (2) La superficie Σ_D es una superficie de revolución y la condición de tangencia con la superficie Σ_σ se define a partir del teorema propuesto por Litvin [Litvin, 1994], según el cual la línea de tangencia entre la superficie conocida Σ_σ y la superficie por conocer Σ_D es la línea en la que las normales a Σ_σ intersectan el eje de rotación de la superficie de revolución Σ_D . Esta condición se puede expresar

mediante la siguiente ecuación

$$\frac{X_m - r_{mx}}{n_{mx}} = \frac{Y_m - r_{my}}{n_{my}} = \frac{Z_m - r_{mz}}{n_{mz}} \quad (5.2.7)$$

donde X_m, Y_m y Z_m representan las coordenadas en el sistema S_m del punto I de intersección de la normal a la superficie Σ_σ y del eje de rotación del disco. Las coordenadas de I en el sistema S_D vienen dadas por X_D, Y_D y Z_D , donde $X_D = 0$ e $Y_D = 0$, dado que I pertenece al eje de rotación z_D . Las coordenadas X_m, Y_m y Z_m vienen dadas entonces por

$$\begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{mD} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_D \end{bmatrix} \quad (5.2.8)$$

donde \mathbf{M}_{mD} viene dada como

$$\mathbf{M}_{mD} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{Dp} & 0 & -\text{sen } \gamma_{Dp} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E_{Dp} \\ \text{sen } \gamma_{Dp} & 0 & \cos \gamma_{Dp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.9)$$

Sustituyendo el valor de las coordenadas X_m, Y_m y Z_m dadas por (5.2.8) en la ecuación (5.2.7), es posible eliminar el valor de Z_D de dicha ecuación y obtener

$$\begin{aligned} f_{\sigma D}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= (E_{Dp} - r_{my})(n_{mx} \cos \gamma_{Dp} + n_{mz} \text{sen } \gamma_{Dp}) \\ &\quad + r_{mx} n_{my} \cos \gamma_{Dp} + r_{mz} n_{my} \text{sen } \gamma_{Dp} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

La ecuación $f_{\sigma D} = 0$ representa la condición de tangencia entre las superficies Σ_σ y Σ_D y permite determinar la línea de tangencia $L_{\sigma D}$ (Fig. 5.2.3(a)). En el sistema S_D , la línea $L_{\sigma D}$ viene dada por la consideración simultánea del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_D^{(L)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= \mathbf{M}_{Dm} \mathbf{r}_m^{(\sigma)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) \\ f_{c\sigma}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= 0 \\ f_{\sigma D}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

donde \mathbf{M}_{Dm} viene dada por

$$\mathbf{M}_{Dm} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{Dp} & 0 & \text{sen } \gamma_{Dp} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -E_{Dp} \\ -\text{sen } \gamma_{Dp} & 0 & \cos \gamma_{Dp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.12)$$

La rotación de la línea $L_{\sigma D}$ alrededor del eje del disco permite representar Σ_D como la familia de líneas $L_{\sigma D}$. El parámetro de rotación utilizado es θ_D (Fig. 5.2.3(a)) y la superficie Σ_D viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_D^{(D)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma, \theta_D) &= \mathbf{M}_L(\theta_D) \mathbf{M}_{Dm} \mathbf{r}_m^{(\sigma)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) \\ f_{c\sigma}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= 0 \\ f_{\sigma D}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

donde $\mathbf{M}_L(\theta_D)$ es la matriz de rotación de la línea de tangencia $L_{\sigma D}$ en el sistema S_D . Dicha matriz viene representada por

$$\mathbf{M}_L(\theta_D) = \begin{bmatrix} \cos \theta_D & \text{sen } \theta_D & 0 & 0 \\ -\text{sen } \theta_D & \cos \theta_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.14)$$

La normal unitaria correspondiente a Σ_D viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_D^{(D)}(u_a, \psi_\sigma, \theta_D) &= \mathbf{L}_L(\theta_D) \mathbf{L}_{Dm} \mathbf{n}_m^{(\sigma)}(u_a, \psi_\sigma) \\ f_{c\sigma}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= 0 \\ f_{\sigma D}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

donde $\mathbf{L}_L(\theta_D)$ y \mathbf{L}_{Dm} son las submatrices 3×3 que resultan de eliminar la última fila y la última columna de las matrices $\mathbf{M}_L(\theta_D)$ y \mathbf{M}_{Dm} , respectivamente.

- (iv) Si la superficie Σ_D describe un movimiento relativo helicoidal respecto al piñón con el parámetro de helicoides p_1 del piñón, Σ_D generará una superficie Σ_τ (Fig. 5.2.3(b)) que coincide con la superficie Σ_σ del piñón definida en el sistema S_m .

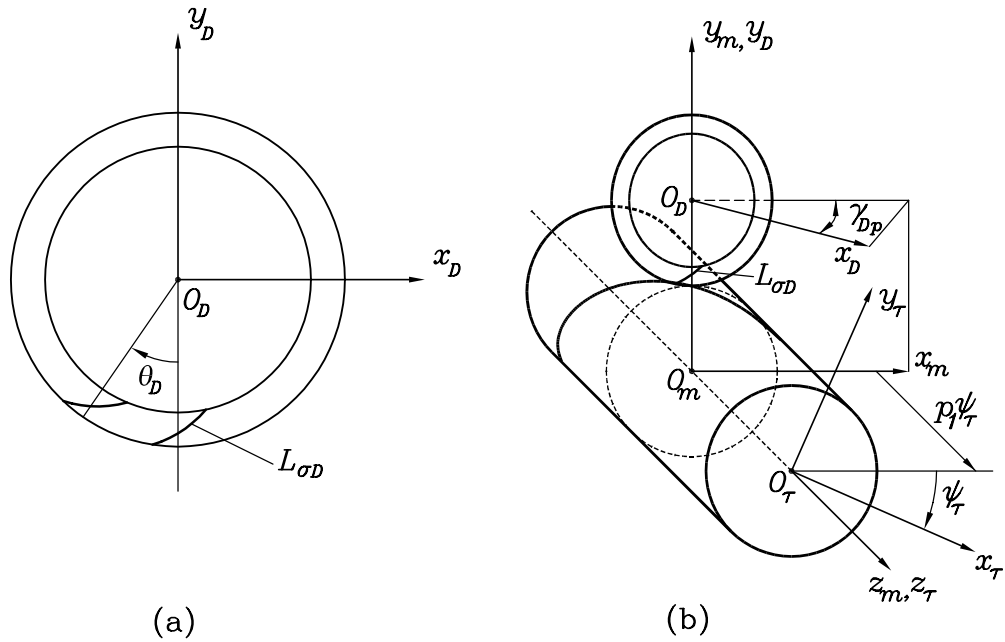


Figura 5.2.3: Determinación de la superficie del disco Σ_D : (a) línea $L_{\sigma D}$ de tangencia entre las superficies Σ_σ y Σ_D ; (b) determinación de la superficie Σ_τ a partir de la superficie Σ_D .

En el caso particular de un piñón recto, la línea de tangencia entre la superficie del disco Σ_D y la del piñón Σ_σ se obtiene como caso particular de un engranaje helicoidal. La condición de tangencia dada por la Ec. (5.2.10) se expresa entonces como

$$f_{\sigma D}(u_a, \psi_\sigma) = (E_{Dp} - r_{my})n_{mz} + r_{mz}n_{my} = 0 \quad (5.2.16)$$

Esta ecuación no depende del parámetro θ_a , lo cual significa que la línea de tangencia $L_{\sigma D}$ entre la superficie del disco y la del piñón está contenida en una sección normal del piñón. El procedimiento para obtener la línea de tangencia $L_{\sigma D}$ es el mismo que el explicado anteriormente (ver el sistema de ecuaciones (5.2.11)). Dicha línea coincide con el perfil de la sección normal del piñón como se muestra en la Figura 5.2.4(a).

La rotación de la línea $L_{\sigma D}$ alrededor del eje del disco permite representar Σ_D como la familia de líneas $L_{\sigma D}$. El parámetro de rotación utilizado es

θ_D (Fig. 5.2.4(b)) y la superficie Σ_D viene dada por el mismo sistema de ecuaciones expresado en (5.2.13).

Es evidente que un desplazamiento del disco según la dirección del eje del piñón generará la misma superficie Σ_σ definida en el sistema S_m para el caso de un piñón recto.

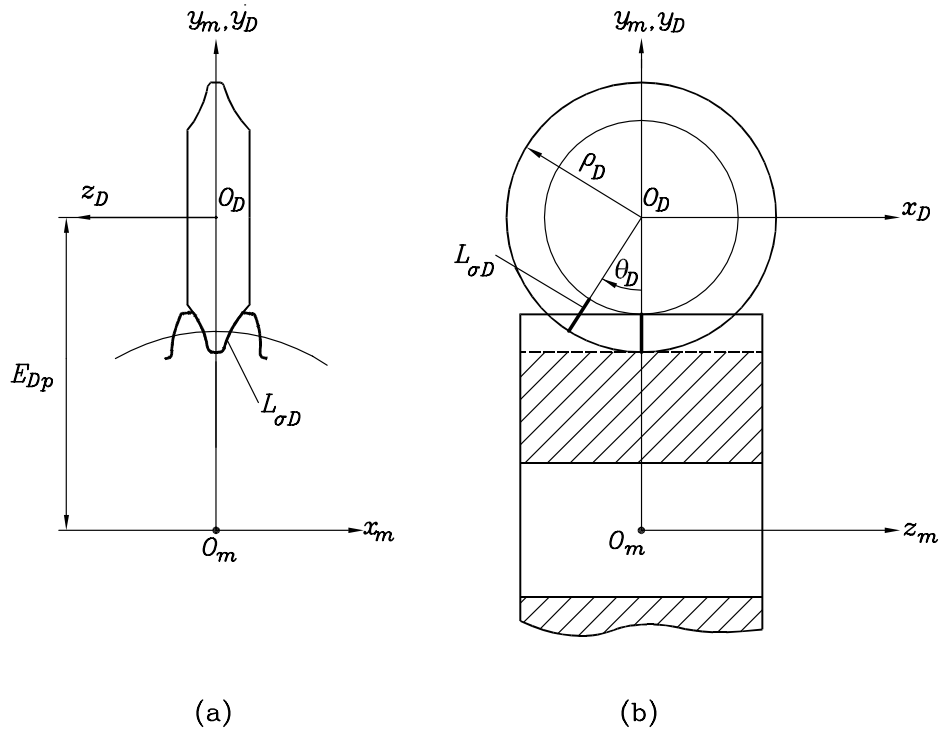


Figura 5.2.4: Definición de la geometría del disco de rectificado en el caso particular de un piñón recto: (a) disposición del disco y del piñón; (b) determinación de Σ_D .

Una vez que la superficie Σ_D es conocida, el objetivo ahora es proporcionar un abombamiento a la superficie del piñón en la dirección longitudinal. La generación de la superficie del piñón con doble abombamiento Σ_1 se muestra en la Figura 5.2.5 para el caso general de un engranaje helicoidal. La generación aquí presentada considera el movimiento relativo del piñón respecto al disco, sin que por ello se condicione el proceso de fabricación.

La generación del piñón está basada en las siguientes ideas:

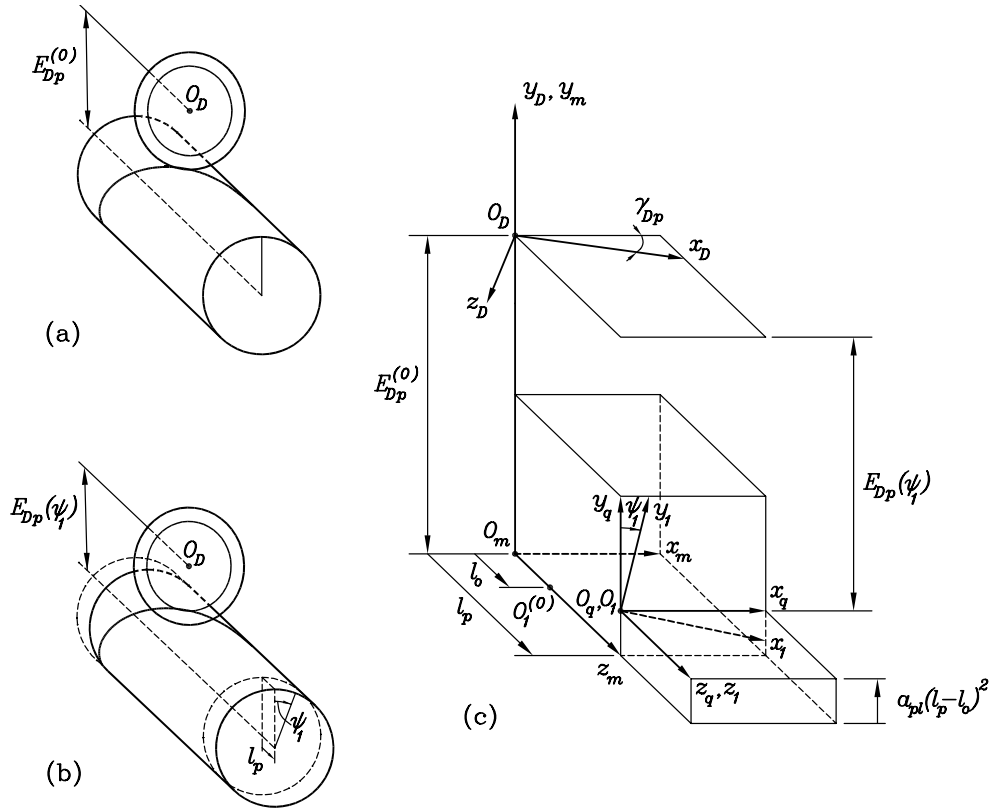


Figura 5.2.5: Generación por disco de corte de la superficie del piñón con doble abombamiento Σ_1 : (a) posiciones iniciales del disco y el piñón; (b) generación; (c) sistemas de coordenadas aplicados.

- (i) Las Figuras 5.2.5(a) y 5.2.5(b) muestran dos posiciones del piñón a generar con respecto al disco. Una de las posiciones con la distancia entre ejes $E_{Dp}^{(0)}$ representa la posición inicial, mientras que la otra posición con $E_{Dp}(\psi_1)$ es la posición actual. La distancia $E_{Dp}^{(0)}$ viene dada por la Ec. (5.2.6).
- (ii) El sistema de coordenadas S_D es solidario al disco herramienta (Fig. 5.2.5(c)) y se considera fijo.
- (iii) El sistema de coordenadas S_1 es solidario al piñón y describe un movimiento helicoidal respecto al disco y de aproximación hacia el disco. Los sis-

temas de coordenadas S_m y S_q se utilizan en la Fig. 5.2.5(c) para una mejor comprensión de dichos movimientos. Ambos movimientos están caracterizados por:

- (1) El movimiento helicoidal presenta dos componentes: (a) traslación l_p colinear con el eje del piñón, y (b) rotación ψ_1 alrededor del eje del piñón (Figs. 5.2.5(b) y 5.2.5(c)). Las magnitudes l_p y ψ_1 están relacionadas a través del parámetro del helicoides del piñón p_1 como

$$l_p = p_1 \psi_1 \quad (5.2.17)$$

- (2) El movimiento de aproximación al disco consiste en una traslación según una función parabólica $a_{pl}(l_p - l_o)^2$, donde a_{pl} es el coeficiente parabólico y l_o es el parámetro que representa la posición inicial del piñón respecto al disco. Este movimiento permite definir la distancia entre ejes E_{Dp} (Figs. 5.2.5(b) y 5.2.5(c)) como

$$E_{Dp} = E_{Dp}^{(0)} - a_{pl}(l_p - l_o)^2 \quad (5.2.18)$$

Los movimientos de traslación l_p y $a_{pl}(l_p - l_o)^2$ se representan como desplazamientos del sistema S_q respecto al sistema S_m . El mismo desplazamiento es realizado por el sistema S_1 que además gira un ángulo ψ_1 respecto al sistema S_q .

- (iv) La superficie Σ_1 se determina en el sistema S_1 como envolvente de la familia de superficies del disco Σ_D que se origina en el movimiento relativo entre el disco y el piñón. La determinación de Σ_1 está basada en las siguientes ideas:

- (1) La familia de superficies del disco Σ_D viene dada en el sistema S_1 por la siguiente ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_1(u_a, \theta_a, \psi_\sigma, \theta_D, \psi_1) = \mathbf{M}_{1D}(\psi_1) \mathbf{r}_D^{(D)}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma, \theta_D) \quad (5.2.19)$$

y las dos ecuaciones escalares previamente obtenidas

$$f_{c\sigma}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) = 0 \quad (5.2.20)$$

$$f_{\sigma D}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma) = 0 \quad (5.2.21)$$

\mathbf{M}_{1D} es la matriz de transformación de coordenadas del sistema S_D al sistema S_1 . Se considera como variable del movimiento de la superficie Σ_D en S_1 la magnitud ψ_1 , siendo l_p función de ψ_1 a través de la relación (5.2.17). La matriz \mathbf{M}_{1D} viene dada como $\mathbf{M}_{1D}(\psi_1) = \mathbf{M}_{1q}(\psi_1)\mathbf{M}_{qm}(l_p(\psi_1))\mathbf{M}_{mD}$ donde

$$\mathbf{M}_{1q} = \begin{bmatrix} \cos \psi_1 & -\operatorname{sen} \psi_1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.22)$$

$$\mathbf{M}_{qm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_{pl}(l_p(\psi_1) - l_o)^2 \\ 0 & 0 & 1 & -l_p(\psi_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.23)$$

y \mathbf{M}_{mD} viene dada por la Ec. (5.2.9).

- (2) La envolvente Σ_1 a la familia de superficies Σ_D se determina considerando simultáneamente la ecuación vectorial (5.2.19), las dos ecuaciones escalares (5.2.20) y (5.2.21), y la condición de envolvente según la cual

$$\mathbf{n}^{(D)} \cdot \mathbf{v}^{(D1)} = 0 \quad (5.2.24)$$

donde $\mathbf{n}^{(D)}$ es la normal unitaria a la superficie Σ_D en un punto que pertenece a la envolvente y $\mathbf{v}^{(D1)}$ es la velocidad relativa entre el disco y el piñón en dicho punto. Dado que el disco se considera fijo, se tiene que $\mathbf{v}^{(D1)} = -\mathbf{v}^{(1)}$. La Ec. (5.2.24), expresada en el sistema S_1 , viene dada por

$$\begin{aligned} f_{D1}(u_a, \theta_a, \psi_\sigma, \theta_D, \psi_1) &= n_{1x}[2a_{pl}p_1(l_p - l_o) \operatorname{sen} \psi_1 - r_{1y}] \\ &+ n_{1y}[-2a_{pl}p_1(l_p - l_o) \cos \psi_1 + r_{1x}] - p_1 n_{1z} = 0 \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

En esta ecuación (r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}) son las componentes de \mathbf{r}_1 y (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}) son las componentes de \mathbf{n}_1 . El vector \mathbf{r}_1 se obtiene de la ecuación vectorial (5.2.19) como función de \mathbf{r}_D mientras que el

vector \mathbf{n}_1 se obtiene de la ecuación $\mathbf{n}_1 = \mathbf{L}_{1D}\mathbf{n}_D$ como función de \mathbf{n}_D . La matriz \mathbf{L}_{1D} es una submatriz 3×3 que se obtiene de eliminar la última fila y la última columna de la matriz \mathbf{M}_{1D} .

- (3) La ecuación vectorial (5.2.19) representa la superficie Σ_1 a través de cinco parámetros $(u_a, \theta_a, \psi_\sigma, \theta_D, \psi_1)$ relacionados por las ecuaciones escalares (5.2.20), (5.2.21) y (5.2.25). Dicha superficie corresponde al hueco entre dientes. Si se quiere obtener el diente habrá que girar cada lado del hueco el ángulo π/N_1 en sentido contrario a como se hizo anteriormente para generar la superficie del disco. La matriz de giro será la traspuesta de la expresada en (5.2.5).

En el caso particular de un piñón recto, los dos movimientos que definen el movimiento relativo del piñón respecto al disco (definidos en el punto (iii) para el caso más general de un engranaje helicoidal) presentan las siguientes particularidades:

- (1) El movimiento helicoidal presenta en este caso un paso p_1 infinito, es decir, se convierte en un desplazamiento de magnitud l_p finita y rotación ψ_1 nula.
- (2) El movimiento de aproximación viene definido por la misma ecuación que la expresada en (5.2.18).

En la Figura 5.2.6 se ha representado el movimiento relativo del disco respecto a un piñón recto. En este caso, el desplazamiento del disco se designa por l_D y es de la misma magnitud y de signo contrario al desplazamiento l_p definido en el movimiento relativo del piñón respecto al disco. La posición inicial del disco se designa en la Fig. 5.2.6 por l_{Do} y es igualmente de la misma magnitud y de signo contrario que l_o . La condición de envolvente se puede obtener como caso particular de la expresada en (5.2.25) y viene dada como

$$2a_{pl}(l_p - l_o)n_{y1} + n_{z1} = 0 \quad (5.2.26)$$

o bien en función de los parámetros l_D y l_{Do} como

$$2a_{pl}(l_D - l_{Do})n_{y1} - n_{z1} = 0 \quad (5.2.27)$$

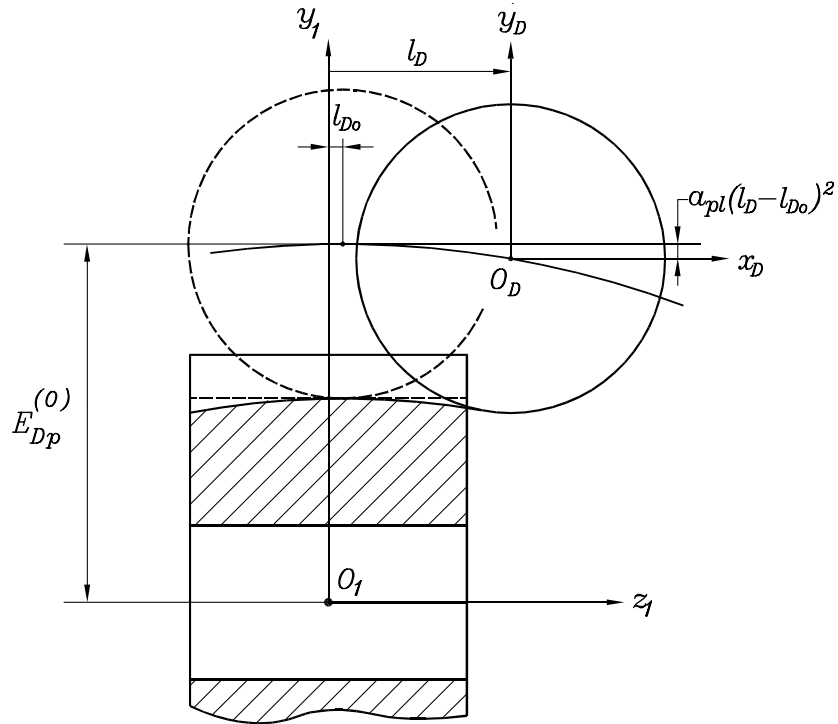


Figura 5.2.6: Definición de la trayectoria longitudinal parabólica del disco de rectificación en un piñón recto.

5.3. Generación mediante cortador sinfín

En este método se utiliza una fresa o cortador sinfín (de ahora en adelante cortador) con el fin de proporcionar un abombamiento longitudinal al piñón. La disposición del cortador respecto del piñón a generar está basada en el engrane de dos helicoides. La Figura 5.3.1 muestra dos helicoides a izquierdas que representan el cortador y el piñón a generar. La Fig. 5.3.1 muestra que el ángulo entre ejes es

$$\gamma_{wp} = \lambda_p + \lambda_w \quad (5.3.1)$$

donde λ_p y λ_w son los ángulos de carga definidos en los cilindros primitivos del piñón y del cortador, respectivamente. En el caso de un engranaje recto, $\lambda_p = \pi/2$.

La Figura 5.3.1 muestra que los cilindros primitivos del cortador y del

piñón son tangentes en el punto M , perteneciente a la recta más corta entre ejes. El polígono de velocidades en M satisface la relación

$$\mathbf{v}^{(w)} - \mathbf{v}^{(p)} = \mu \mathbf{i}_t \quad (5.3.2)$$

donde $\mathbf{v}^{(w)}$ y $\mathbf{v}^{(p)}$ son las velocidades del cortador y del piñón en M , \mathbf{i}_t es un vector unitario según la tangente común a las hélices y μ un factor escalar. La Ec. (5.3.2) indica que la velocidad relativa en M es colineal con el vector \mathbf{i}_t .

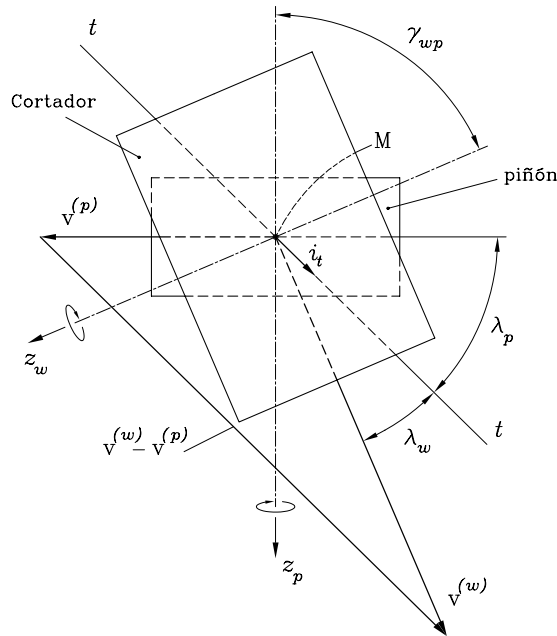


Figura 5.3.1: Disposición del cortador respecto al piñón.

Con el fin de obtener la misma superficie del diente del piñón con simple abombamiento Σ_σ que la obtenida con su cremallera Σ_c (ver Capítulo 4), la determinación de la superficie del cortador Σ_w ha de estar basada en el engrane simultáneo de las superficies Σ_c , Σ_σ y Σ_w . La Figura 5.3.2 muestra los axoides de estas tres superficies, siendo Π el axoide de la cremallera. La distancia entre ejes se ha aumentado para una mejor representación.

La superficie Σ_w se obtiene mediante el siguiente procedimiento:

Paso 1. La superficie de la cremallera Σ_c es dada, así como la dirección $t - t$, y los radios primitivos r_{p1} y r_{pw} del piñón y del cortador.

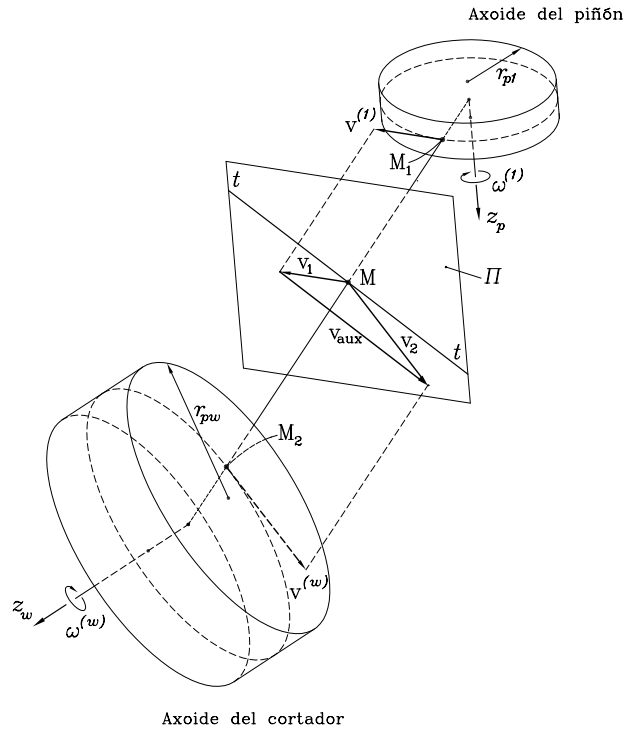


Figura 5.3.2: Axoides del cortador, piñón y cremallera.

Paso 2. La traslación de la superficie Σ_c en dirección perpendicular al eje del piñón y la rotación de éste permite obtener la superficie Σ_σ como envolvente de la familia de superficies de Σ_c . La cremallera se desplaza con la velocidad \mathbf{v}_1 (Fig. 5.3.2) mientras que el piñón gira con la velocidad $\omega^{(1)}$. La relación entre v_1 y $\omega^{(1)}$ viene dada por

$$v_1 = \omega^{(1)} r_{p1} \tag{5.3.3}$$

Paso 3. Si al desplazamiento anterior de la cremallera se le añade un segundo desplazamiento con velocidad \mathbf{v}_{aux} según la dirección $t - t$ tangente a las hélices, dicho desplazamiento no afecta a la superficie Σ_σ . No obstante,

la ecuación vectorial $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{aux}$ nos permite obtener el vector velocidad \mathbf{v}_2 de tal forma que resulta perpendicular al eje del cortador. Es posible entonces generar la superficie Σ_w a partir de la superficie Σ_c considerando que la cremallera se desplaza con la velocidad \mathbf{v}_2 mientras el cortador gira con la velocidad angular $\omega^{(w)}$. La relación entre v_2 y $\omega^{(w)}$ viene dada por

$$v_2 = \omega^{(w)} r_{pw} \quad (5.3.4)$$

La superficie del cortador Σ_w se puede obtener entonces como envolvente de la familia de superficies Σ_c siguiendo el procedimiento descrito a continuación (Fig. 5.3.3):

- (1) Se definen dos sistemas de referencia fijos S_g y S_h donde se definen los movimientos de la cremallera y del cortador, respectivamente.
- (2) El sistema S_w solidario al cortador gira respecto al sistema S_h la magnitud ψ_w . El eje de giro es el eje z_h , el cual coincide con el eje z_w .
- (3) El sistema S_c solidario a la cremallera se desplaza respecto al sistema S_g la magnitud s_c según la dirección de \mathbf{v}_2 (Fig. 5.3.3(b)). La magnitud s_c está relacionada con ψ_w por la condición de rodadura sin deslizamiento de los axoides de cortador y cremallera:

$$s_c = r_{pw} \psi_w \quad (5.3.5)$$

- (4) Considerando ψ_w como variable del movimiento, la superficie Σ_w se determina como envolvente de la familia de superficies Σ_c en el sistema S_w mediante la consideración simultánea de la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_w(u_a, \theta_a, \psi_w) = \mathbf{M}_{wc}(\psi_w) \mathbf{r}_c(u_a, \theta_a) \quad (5.3.6)$$

y la ecuación de engrane

$$f_{cw}(u_a, \theta_a, \psi_w) = \mathbf{n}^{(c)} \cdot \mathbf{v}^{(cw)} = 0 \quad (5.3.7)$$

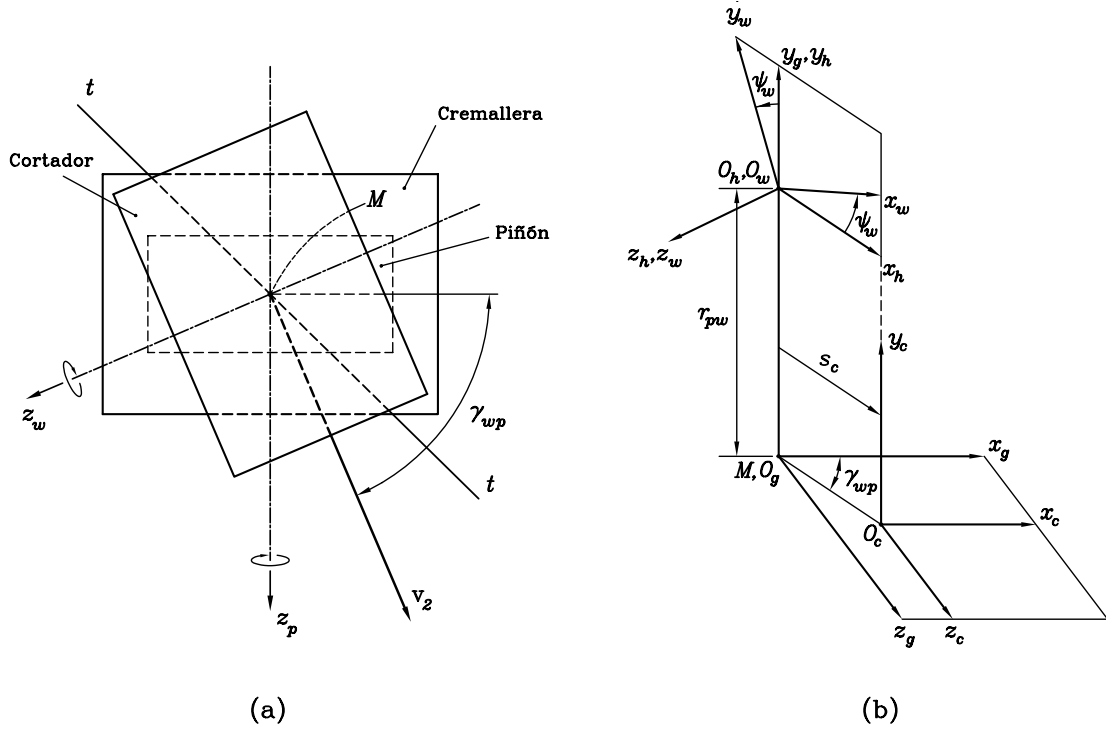


Figura 5.3.3: Determinación del cortador: (a) Esquema de generación; (b) sistemas de coordenadas utilizados.

La matriz \mathbf{M}_{wc} en (5.3.6) está determinada por $\mathbf{M}_{wc} = \mathbf{M}_{wh}\mathbf{M}_{hg}\mathbf{M}_{gc}$ donde

$$\mathbf{M}_{gc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_{pw}\psi_w \cos \gamma_{wp} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_{pw}\psi_w \sin \gamma_{wp} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.8)$$

$$\mathbf{M}_{hg} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{wp} & 0 & \sin \gamma_{wp} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r_{pw} \\ -\sin \gamma_{wp} & 0 & \cos \gamma_{wp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.9)$$

$$\mathbf{M}_{wh} = \begin{bmatrix} \cos \psi_w & \text{sen } \psi_w & 0 & 0 \\ -\text{sen } \psi_w & \cos \psi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.10)$$

El vector $\mathbf{v}^{(cw)}$ en (5.3.7) representa la velocidad relativa entre la cremallera y el cortador en el punto de la envolvente. La ecuación de engrane $f_{cw} = 0$ en el sistema S_c viene dada por

$$\begin{aligned} f_{cw} &= (n_{cx} \cos \gamma_{wp} + n_{cz} \text{sen } \gamma_{wp}) r_{cy} \\ -n_{cy} (r_{cx} \cos \gamma_{wp} + r_{cz} \text{sen } \gamma_{wp} + r_{pw} \psi_w) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

- (5) La ecuación vectorial (5.3.6) representa la superficie Σ_w a través de tres parámetros (u_a, θ_a, ψ_w) relacionados por la ecuación escalar (5.3.11).

La normal unitaria a Σ_w viene dada por

$$\mathbf{n}_w(u_a, \psi_w) = \mathbf{L}_{wc}(\psi_w) \mathbf{n}_c(u_a) \quad (5.3.12)$$

donde \mathbf{L}_{wc} es la submatriz de orden 3×3 que resulta de eliminar la última fila y la última columna de la matriz \mathbf{M}_{wc} .

Paso 4. Se obtiene entonces que ambas superficies Σ_σ y Σ_w se pueden generar por la misma cremallera Σ_c . Cada una de las superficies generadas Σ_σ y Σ_w presentan contacto lineal con la superficie de la cremallera Σ_c . Se designa por $L_{c\sigma}$ una de las líneas de contacto entre Σ_c y Σ_σ y por L_{cw} una de las líneas de contacto entre Σ_c y Σ_w . Las líneas $L_{c\sigma}$ y L_{cw} se han representado sobre la superficie Σ_c en la Fig. 5.3.4 utilizando un determinado valor de las variables del movimiento de Σ_c , Σ_σ y Σ_w , que están relacionadas entre sí a través del polígono de velocidades (Fig. 5.3.1). Las líneas de contacto $L_{c\sigma}$ y L_{cw} no coinciden pero se intersectan como se muestra en la Fig. 5.3.4. El punto N de intersección de las líneas $L_{c\sigma}$ y L_{cw} es el punto común de tangencia de las superficies Σ_c , Σ_σ y Σ_w .

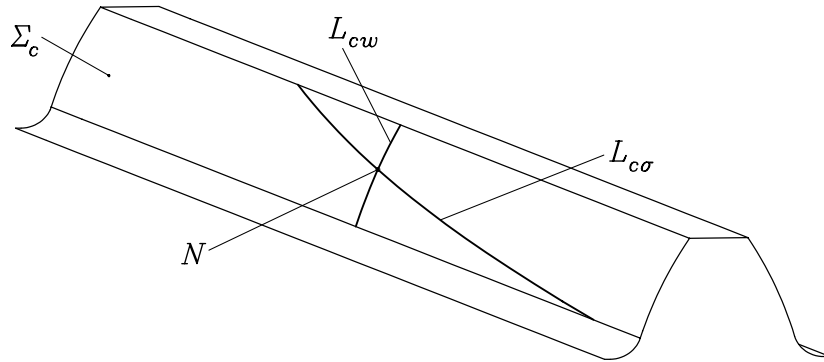


Figura 5.3.4: Líneas de contacto $L_{c\sigma}$ y L_{cw} correspondientes al engrane de la superficie de la cremallera Σ_c con las superficies del piñón y del cortador Σ_σ y Σ_w , respectivamente.

5.3.1. Generación por cortador del piñón con abombamiento simple

La superficie del piñón con abombamiento simple Σ_σ se ha obtenido en el capítulo anterior utilizando la superficie Σ_c de la cremallera del piñón. El objetivo ahora es utilizar la superficie del cortador Σ_w para generar directamente la superficie del piñón Σ_σ . Este proceso está basado en las siguientes ideas:

- (a) La superficie del cortador Σ_w y la del piñón a generar Σ_σ giran en torno a sus respectivos ejes con las velocidades angulares $\omega^{(w)}$ y $\omega^{(1)}$. Como se ha expuesto anteriormente, las superficies Σ_w y Σ_σ presentan contacto puntual, siendo N (Fig. 5.3.4) uno de los puntos instantáneos de contacto entre Σ_w y Σ_σ . Por tanto, la rotación del cortador y la del piñón no genera una superficie sino una línea formada por puntos como el N .
- (b) La generación directa de Σ_σ por Σ_w ha de estar basada necesariamente en un proceso de doble envolvente [Litvin, 1994] constituido por dos conjuntos independientes de variables de movimiento:
 - (i) El primer conjunto de variables lo forman los ángulos de giro del

cortador y del piñón, relacionados por

$$\frac{\phi_w}{\psi_1} = \frac{N_1}{N_w} \quad (5.3.13)$$

donde N_1 es el número de dientes del piñón a generar y N_w el número de filetes del cortador. Normalmente se considera $N_w = 1$.

- (ii) El segundo conjunto de variables lo forman: (1) el desplazamiento s_w del cortador colinear con el eje del piñón (Fig. 5.3.5(a)), (2) el ángulo adicional $\Delta\psi_1$ de giro del piñón en torno a su eje de rotación con el fin de mantener la tangencia entre las superficies del cortador y del piñón. Ambas variables s_w y $\Delta\psi_1$ están relacionadas por el parámetro de helicoides del piñón p_1 como:

$$\frac{s_w}{\Delta\psi_1} = p_1 \quad (5.3.14)$$

- (c) La determinación de Σ_σ como doble envolvente de la familia de superficies Σ_w está basada en el siguiente procedimiento (Fig. 5.3.5(b)):

- (i) Se consideran los sistemas de coordenadas S_m y S_h como sistemas fijos donde se definen los movimientos del piñón y del cortador, respectivamente. El eje z_m coincide con el eje del piñón z_1 . El eje z_h coincide con el eje del cortador cuando $s_w = 0$. La distancia $\overline{O_m O_h}$ es igual a la distancia más corta entre ejes dada por

$$E_{wp} = r_{p1} + r_{pw} + \chi_1 m \quad (5.3.15)$$

- (ii) La traslación del cortador viene definida por el sistema S_n cuyo eje z_n coincide siempre con el eje del cortador. El desplazamiento s_w se mide en la dirección del eje del piñón z_1 .
- (iii) El sistema S_w solidario al cortador se traslada con S_n y además gira respecto al sistema S_n la magnitud ϕ_w .
- (iv) El sistema S_1 solidario al piñón gira la magnitud $\psi_1 + \Delta\psi_1$ donde ψ_1 es función de ϕ_w a través de la Ec. (5.3.13) y $\Delta\psi_1$ es función de s_w a través de la Ec. (5.3.14).

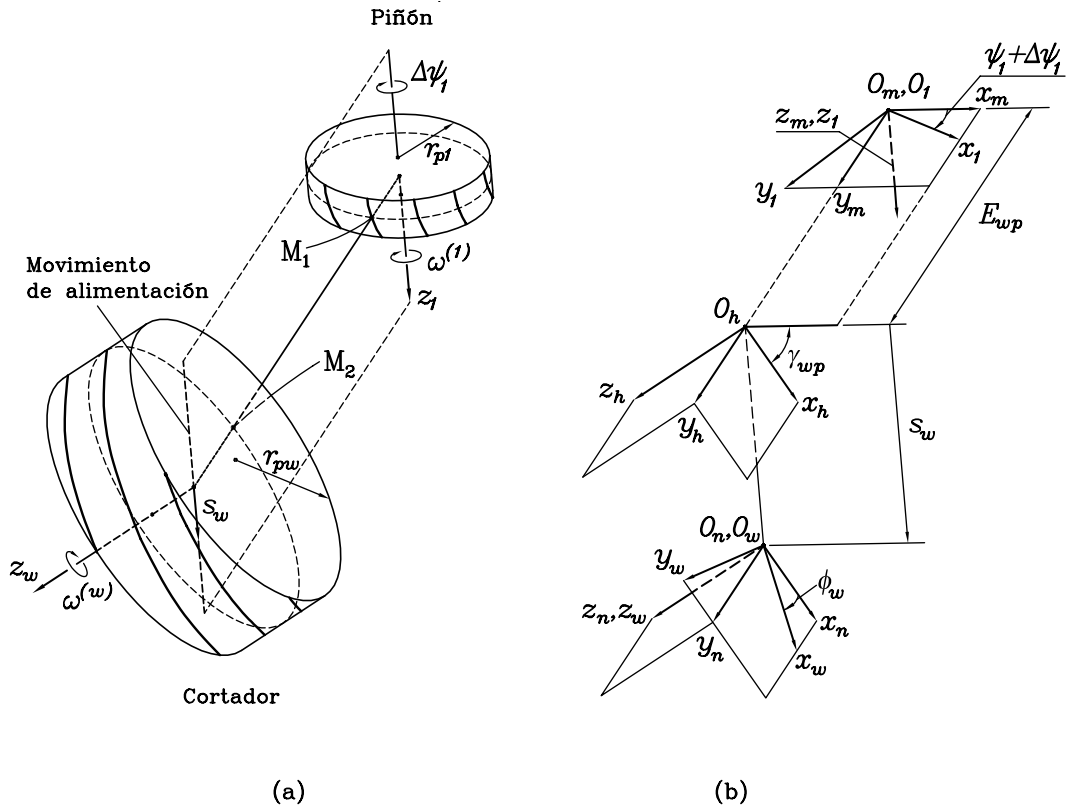


Figura 5.3.5: Generación de la superficie del piñón Σ_σ con simple abombamiento por cortador: (a) esquema de la generación; (b) sistemas de coordenadas utilizados.

(v) Considerando ϕ_w y s_w como variables independientes del movimiento, la superficie Σ_σ viene dada por la consideración simultánea de:

(1) La ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_1(u_a, \theta_a, \psi_w, \phi_w, s_w) = \mathbf{M}_{1w}(\phi_w, s_w) \mathbf{r}_w(u_a, \theta_a, \psi_w) \quad (5.3.16)$$

que representa la familia de superficies Σ_w en el sistema S_1 . Ha de tenerse en cuenta que los parámetros (u_a, θ_a, ψ_w) están relacionados por la ecuación de engrane

$$f_{cw}(u_a, \theta_a, \psi_w) = 0 \quad (5.3.17)$$

obtenida anteriormente en la generación del cortador (véase Ec. (5.3.11)). La matriz \mathbf{M}_{1w} representa la transformación de coordenadas del sistema S_w al sistema S_1 y viene dada como $\mathbf{M}_{1w} = \mathbf{M}_{1m}\mathbf{M}_{mh}\mathbf{M}_{hn}\mathbf{M}_{nw}$ donde

$$\mathbf{M}_{1m} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_1 + \Delta\psi_1) & \text{sen}(\psi_1 + \Delta\psi_1) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\psi_1 + \Delta\psi_1) & \cos(\psi_1 + \Delta\psi_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.18)$$

$$\mathbf{M}_{mh} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{wp} & 0 & -\text{sen} \gamma_{wp} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E_{wp} \\ \text{sen} \gamma_{wp} & 0 & \cos \gamma_{wp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.19)$$

$$\mathbf{M}_{hn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s_w \text{sen} \gamma_{wp} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_w \cos \gamma_{wp} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.20)$$

$$\mathbf{M}_{nw} = \begin{bmatrix} \cos \phi_w & -\text{sen} \phi_w & 0 & 0 \\ \text{sen} \phi_w & \cos \phi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.21)$$

(2) Las dos ecuaciones de engrane

$$f_{w1}^{(\phi_w)}(u_a, \theta_a, \psi_w, \phi_w, s_w) = \mathbf{n}^{(w)} \cdot \mathbf{v}_w^{(w1, \phi_w)} = 0 \quad (5.3.22)$$

$$f_{w1}^{(s_w)}(u_a, \theta_a, \psi_w, \phi_w, s_w) = \mathbf{n}^{(w)} \cdot \mathbf{v}_w^{(w1, s_w)} = 0 \quad (5.3.23)$$

donde $\mathbf{n}^{(w)}$ representa la normal unitaria a la superficie Σ_w dada por la ecuación (5.3.12), $\mathbf{v}_w^{(w1, \phi_w)}$ representa la velocidad relativa entre el cortador y el piñón cuando ϕ_w es variable y s_w es fijo, y $\mathbf{v}_w^{(w1, s_w)}$ representa la velocidad relativa entre el cortador y el piñón cuando s_w es variable y ϕ_w es fijo. Ambas ecuaciones de engrane (5.3.22) y (5.3.23) se pueden obtener en

el sistema S_n como:

$$\begin{aligned} f_{w1}^{(\phi_w)} = n_{nx} & \left[-r_{ny} \frac{N_1}{N_w} + (r_{ny} + E_{wp}) \cos \gamma_{wp} \right] \\ & + n_{ny} \left[r_{nx} \frac{N_1}{N_w} - r_{nx} \cos \gamma_{wp} + r_{nz} \operatorname{sen} \gamma_{wp} \right] \\ & + n_{nz} [-(r_{ny} + E_{wp}) \operatorname{sen} \gamma_{wp}] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

$$\begin{aligned} f_{w1}^{(s_w)} = n_{nx} & [p_1 \operatorname{sen} \gamma_{wp} + (r_{ny} + E_{wp}) \cos \gamma_{wp}] \\ & + n_{ny} (-r_{nx} \cos \gamma_{wp} + r_{nz} \operatorname{sen} \gamma_{wp}) \\ & + n_{nz} [p_1 \cos \gamma_{wp} - (r_{ny} + E_{wp}) \operatorname{sen} \gamma_{wp}] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

donde (r_{nx}, r_{ny}, r_{nz}) y (n_{nx}, n_{ny}, n_{nz}) se obtienen de las ecuaciones vectoriales $\mathbf{r}_n = \mathbf{M}_{nw} \mathbf{r}_w$ y $\mathbf{n}_n = \mathbf{L}_{nw} \mathbf{n}_w$, respectivamente. En estas ecuaciones, \mathbf{r}_w y \mathbf{n}_w son conocidos, \mathbf{M}_{nw} viene dada por la Ec. (5.3.21) y \mathbf{L}_{nw} se obtiene de eliminar la última fila y la última columna de la matriz \mathbf{M}_{nw} .

- (vi) La ecuación vectorial (5.3.16) representa la superficie del piñón con abombamiento simple Σ_σ a través de cinco parámetros relacionados por las ecuaciones escalares (5.3.17), (5.3.22) y (5.3.23).

El proceso descrito corresponde al caso general de un engranaje helicoidal. En el caso particular de un engranaje recto, el ángulo de carga $\lambda_p = 90^\circ$ y el paso de helicoide p_1 tiende a infinito. Se tiene entonces que el ángulo entre ejes del piñón y del cortador es $\gamma_{wp} = 90^\circ + \lambda_w$ y el ángulo adicional de giro del piñón (ver Ec. (5.3.14)) es $\Delta\psi_1 = 0$ para cualquier desplazamiento del cortador s_w . Las ecuaciones de engrane (5.3.24) y (5.3.25) vienen dadas entonces como

$$\begin{aligned} f_{w1}^{(\phi_w)} = n_{nx} & \left[-r_{ny} \frac{N_1}{N_w} - (r_{ny} + E_{wp}) \operatorname{sen} \lambda_w \right] \\ & + n_{ny} \left[r_{nx} \frac{N_1}{N_w} + r_{nx} \operatorname{sen} \lambda_w + r_{nz} \cos \lambda_w \right] \\ & + n_{nz} [-(r_{ny} + E_{wp}) \cos \lambda_w] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

$$f_{w1}^{(s_w)} = n_{nx} \cos \lambda_w - n_{nz} \operatorname{sen} \lambda_w = 0 \quad (5.3.27)$$

5.3.2. Generación por cortador del piñón con abombamiento doble

Anteriormente se ha descrito la generación por cortador de la superficie del piñón con simple abombamiento Σ_σ . Sin embargo, el objetivo es generar una superficie del piñón con superficies doblemente abombadas Σ_1 que sea capaz de absorber los errores de transmisión cuasilineales producidos por desalineaciones o errores de fabricación en el caso de engranajes helicoidales y de localizar el contacto en el caso de engranajes rectos. Se han propuesto dos métodos con el fin de proporcionar a la superficie Σ_σ un segundo abombamiento en la dirección longitudinal:

- (a) Por acercamiento del cortador (Fig. 5.3.6), modificando la distancia entre ejes de piñón y cortador durante la generación. Esta modificación consiste en un acercamiento del cortador hacia el piñón, siendo la magnitud de tal acercamiento función de la posición relativa del cortador en el movimiento de alimentación. Se tiene entonces que la distancia entre ejes E_{wp} no es constante sino que se expresa como una función de la variable s_w (Fig. 5.3.6(a)). La nueva función $E_{wp}(s_w)$ se define como (Fig. 5.3.6(b)):

$$E_{wp}(s_w) = E_{wp}^{(0)} - a_{pl}(s_w - s_o)^2 \quad (5.3.28)$$

donde a_{pl} es el coeficiente parabólico, $E_{wp}^{(0)}$ es la distancia entre ejes inicial definida por la Ec. (5.3.15), y s_o representa la posición inicial del cortador respecto del piñón (Fig. 5.3.6(b)).

El acercamiento del cortador según la Ec. (5.3.28) durante la generación del piñón permite proporcionar a la transmisión una función parabólica prediseñada de errores de transmisión en el caso de engranajes helicoidales. En el caso de engranajes rectos permite localizar el contacto. El parámetro s_o tiene una especial importancia en el diseño de la transmisión cuando se trata de desplazar el camino de contacto sobre las superficies.

- (b) Por variación de la relación entre el movimiento de alimentación del cortador y el giro adicional del piñón a generar. La relación entre ambas

variables, s_w y $\Delta\psi_1$, viene dada en la generación convencional por la relación (5.3.14). Con la modificación propuesta en este método se trata de aplicar la siguiente función

$$\Delta\psi_1(s_w) = \frac{s_w}{p_1} + a_{mr}(s_w - s_o)^2 \quad (5.3.29)$$

donde a_{mr} es el coeficiente parabólico y s_o representa la posición inicial del cortador. En el caso particular de engranajes rectos, la función anterior viene dada como

$$\Delta\psi_1(s_w) = a_{mr}(s_w - s_o)^2 \quad (5.3.30)$$

Las ecuaciones (5.3.29) ó (5.3.30) permiten proporcionar a las superficies del piñón un abombamiento longitudinal. La Ec. (5.3.29) en engranajes helicoidales proporciona una función parabólica de errores de transmisión. La Ec. (5.3.30) en engranajes rectos localiza el contacto. A diferencia del método anterior, la distancia entre ejes permanece constante e igual a la definida en la Ec. (5.3.15).

La obtención de la superficie Σ_1 a partir de la superficie del cortador Σ_w siguiendo las directrices de los dos métodos propuestos está basada en un proceso de doble envolvente similar al presentado en la generación por cortador de la superficie Σ_σ . Las principales modificaciones se presentan a continuación para cada uno de los métodos:

- (a) En el método de acercamiento del cortador, debe sustituirse en todo el algoritmo presentado en la generación de Σ_σ por Σ_w el valor constante de la distancia entre ejes E_{wp} por la función $E_{wp}(s_w)$ definida en (5.3.28). Igualmente la ecuación de engrane $f_{w1}^{(s_w)} = 0$ viene dada en el caso de engranajes helicoidales por

$$\begin{aligned} f_{w1}^{(s_w)} = & n_{nx}[p_1 \operatorname{sen} \gamma_{wp} + (r_{ny} + E_{wp}(s_w)) \cos \gamma_{wp}] \\ & + n_{ny}[-2a_{pl}(s_w - s_o)p_1 - r_{nx} \cos \gamma_{wp} + r_{nz} \operatorname{sen} \gamma_{wp}] \\ & + n_{nz}[p_1 \cos \gamma_{wp} - (r_{ny} + E_{wp}(s_w)) \operatorname{sen} \gamma_{wp}] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

y en el caso de engranajes rectos

$$f_{w1}^{(s_w)} = n_{nx} \cos \lambda_w - n_{ny} 2a_{pl}(s_w - s_o) - n_{nz} \operatorname{sen} \lambda_w = 0 \quad (5.3.32)$$

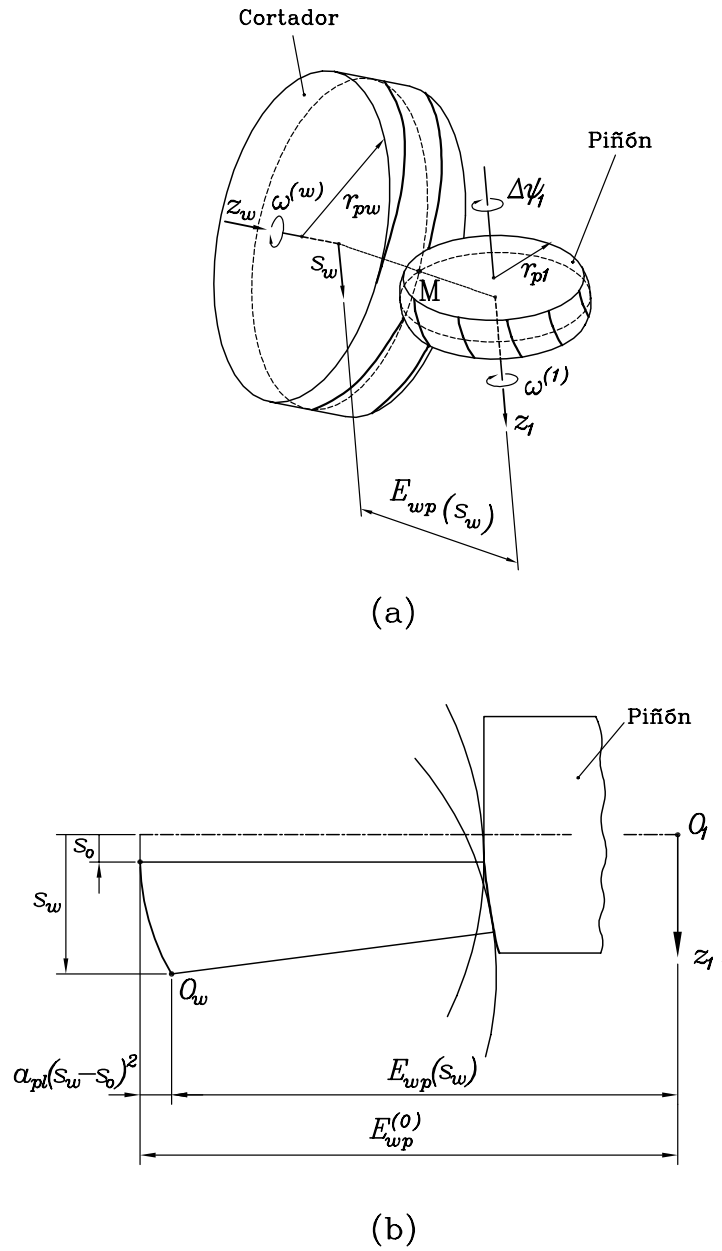


Figura 5.3.6: Generación de la superficie del piñón Σ_1 con doble bombamiento por cortador.

- (b) En el método de variación de las variables en el movimiento de alimentación del cortador, la relación $\Delta\psi_1 = s_w/p_1$ debe sustituirse por la expresada en (5.3.29) en el caso de engranajes helicoidales y en (5.3.30) en el caso de engranajes rectos. La distancia entre ejes E_{wp} es constante y la ecuación de engrane $f_{w1}^{(s_w)} = 0$ en el caso de engranajes helicoidales viene dada por

$$\begin{aligned} f_{w1}^{(s_w)} = & n_{nx} \left[\text{sen } \gamma_{wp} + (r_{ny} + E_{wp}) \cos \gamma_{wp} \left(\frac{1}{p_1} + 2a_{mr}(s_w - s_o) \right) \right] \\ & + n_{ny} \left[(-r_{nx} \cos \gamma_{wp} + r_{nz} \text{sen } \gamma_{wp}) \left(\frac{1}{p_1} + 2a_{mr}(s_w - s_o) \right) \right] \\ & + n_{nz} \left[\cos \gamma_{wp} - (r_{ny} + E_{wp}) \text{sen } \gamma_{wp} \left(\frac{1}{p_1} + 2a_{mr}(s_w - s_o) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

En el caso particular de engranajes rectos la ecuación de engrane $f_{w1}^{(s_w)} = 0$ viene dada por

$$\begin{aligned} f_{w1}^{(s_w)} = & n_{nx} [\cos \lambda_w - 2(r_{ny} + E_{wp}) \text{sen } \lambda_w a_{mr}(s_w - s_o)] \\ & + 2n_{ny} (r_{nx} \text{sen } \lambda_w + r_{nz} \cos \lambda_w) a_{mr}(s_w - s_o) \\ & + n_{nz} [-\text{sen } \lambda_w - 2(r_{ny} + E_{wp}) \cos \lambda_w a_{mr}(s_w - s_o)] = 0 \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

5.4. Simulación del engrane de una transmisión con doble abombamiento en el piñón

En este apartado se estudia la simulación del engrane y análisis del contacto de una transmisión en la que el piñón presenta superficies con doble abombamiento y la rueda puede o no presentar abombamiento en la dirección del perfil. En el caso de un coeficiente parabólico de la cremallera de la rueda $a_{dr} = 0$ se tiene una rueda con geometría de perfil de evolvente.

La superficie del piñón Σ_1 con doble abombamiento y la superficie de la rueda Σ_2 , con simple abombamiento o sin él, contactan en un punto. Esto es debido en el caso de engranajes helicoidales a que la generación de ambas

superficies está basada en la utilización de cremalleras distintas. En el caso de engranajes rectos el contacto está localizado gracias al abombamiento longitudinal de la superficie del piñón. La representación de Σ_1 y Σ_2 en el mismo sistema de referencia permiten establecer las condiciones de tangencia de ambas superficies. Tales condiciones son las mismas que las expuestas en el Apartado 4.7 para una transmisión de engranajes helicoidales con simple abombamiento en la que el contacto también está localizado. Los errores de montaje y fabricación son los mismos que los considerados en dicho apartado y están igualmente asociados a la rueda (véase Fig. 4.7.2 para los errores de montaje y 4.7.3 para el error de fabricación). Estas condiciones permiten estudiar los efectos de los errores de montaje y fabricación en la nueva transmisión propuesta con doble abombamiento en el piñón.

La representación de la superficie Σ_1 en el sistema de referencia fijo S_f viene dada por la consideración simultánea de la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_a, \theta_a, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \phi_1) = \mathbf{M}_{f_1}(\phi_1)\mathbf{r}_1^{(1)}(u_a, \theta_a, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (5.4.1)$$

y de n ecuaciones escalares $f_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$) correspondientes a n ecuaciones de engrane utilizadas en la derivación de Σ_1 .

En la Ec. (5.4.1), (u_a, θ_a) representan los parámetros de superficie de la cremallera del piñón Σ_c , ϕ_1 es la variable de movimiento de Σ_1 en el sistema de referencia fijo y α_i ($i = 1, \dots, n$) representa el conjunto de parámetros utilizados en la formulación de Σ_1 . Los parámetros utilizados en cada uno de los métodos de generación propuestos son:

- (1) Generación por disco: $\alpha_1 = \psi_\sigma$, $\alpha_2 = \theta_D$, $\alpha_3 = \psi_1$.
- (2) Generación por cortador: $\alpha_1 = \psi_w$, $\alpha_2 = \phi_w$, $\alpha_3 = s_w$.

Análogamente, la superficie de la rueda Σ_2 en el sistema S_f viene dada por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}_f^{(2)}(u_r, \theta_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{M}_{f_2}(\phi_2)\mathbf{r}_2^{(2)}(u_r, \theta_r, \psi_2) \quad (5.4.2)$$

y la ecuación de engrane $f_{t2}(u_r, \theta_r, \psi_2) = 0$.

Las matrices \mathbf{M}_{f_1} y \mathbf{M}_{f_2} son iguales a las matrices \mathbf{M}_{f_σ} y \mathbf{M}_{f_2} representadas en el Apartado 4.7.

Por otro lado, las normales unitarias en el sistema fijo S_f se obtienen como

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(u_a, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \phi_1) = \mathbf{L}_{f1}(\phi_1)\mathbf{n}_1^{(1)}(u_a, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (5.4.3)$$

$$\mathbf{n}_f^{(2)}(u_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{L}_{f2}(\phi_2)\mathbf{n}_2^{(2)}(u_r, \psi_2) \quad (5.4.4)$$

donde \mathbf{L}_{f1} y \mathbf{L}_{f2} son iguales a las matrices $\mathbf{L}_{f\sigma}$ y \mathbf{L}_{f2} representadas en el Apartado 4.7.

La tangencia de las superficies Σ_1 y Σ_2 se obtiene en el sistema S_f mediante el siguiente sistema de ecuaciones no lineales,

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_a, \theta_a, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \phi_1) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_r, \theta_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (5.4.5)$$

$$\mathbf{n}_f^{(2)}(u_a, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \phi_1) - \mathbf{n}_f^{(2)}(u_r, \psi_2, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (5.4.6)$$

$$f_i(u_a, \theta_a, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5.4.7)$$

$$f_{t2}(u_r, \theta_r, \psi_2) = 0 \quad (5.4.8)$$

La ecuación vectorial (5.4.5) representa tres ecuaciones escalares. La ecuación vectorial (5.4.6) representa dos ecuaciones escalares independientes al ser $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$. Junto con las $n + 1$ ecuaciones de engrane, se tiene un sistema de F_i ($i = n + 6$) ecuaciones escalares con $n + 7$ incógnitas: $u_a, \theta_a, u_r, \theta_r, \phi_1, \phi_2, \psi_2$ y los n parámetros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. El algoritmo para resolver el sistema es el mismo que el utilizado en el Apartado 4.7. Fijando una de las incógnitas, por ejemplo ϕ_1 , se pueden determinar las siguientes funciones,

$$\{u_a(\phi_1), \theta_a(\phi_1), u_r(\phi_1), \theta_r(\phi_1), \alpha_1(\phi_1), \dots, \alpha_n(\phi_1), \psi_2(\phi_1), \phi_2(\phi_1)\} \in C^1 \quad (5.4.9)$$

El proceso de cálculo es iterativo y se debe partir de un valor inicial

$$P^{(0)}(u_a^{(0)}, \theta_a^{(0)}, u_r^{(0)}, \theta_r^{(0)}, \alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_n^{(0)}, \psi_2^{(0)}, \phi_2^{(0)}) \quad (5.4.10)$$

que debe satisfacer el sistema de ecuaciones $F_i = 0$ ($i = n + 6$) y además verificar que el Jacobiano del sistema en $P^{(0)}$ sea distinto de cero,

$$\frac{D(F_1, \dots, F_{n+6})}{D(u_a, \theta_a, u_r, \theta_r, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \psi_2, \phi_2)} \neq 0 \quad (5.4.11)$$

A continuación se presentan dos ejemplos numéricos donde se analizan los métodos de fabricación expuestos en los Apartados 5.2 y 5.3 en el caso de engranajes helicoidales y en el caso de engranajes rectos.

Ejemplo numérico 5.4.1. Se han considerado tres transmisiones con engranajes helicoidales correspondientes a los tres métodos propuestos para obtener un piñón con superficies doblemente abombadas. Los datos son los indicados en la Tabla 5.4.1. La Figura 5.4.1 muestra el camino de contacto correspondiente a un ciclo de engrane sobre cada una de las superficies del piñón.

Tabla 5.4.1: Datos de diseño en una transmisión de engranajes helicoidales.

Número de dientes del piñón, N_1	21
Número de dientes de la rueda, N_2	77
Módulo, m	4,0 mm
Ángulo de presión en el lado conductor, α_d	25°
Ángulo de presión en el lado conducido, α_c	25°
Ángulo de hélice, β	20°
Ancho de cara, F	80 mm
Radio del disco, ρ_D	80 mm
Radio del cortador, r_{pw}	70 mm
Coefficiente parabólico abombado perfil piñón, a_{da}	0,002 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado perfil rueda, a_{dr}	0,0 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado longitudinal, a_{pl}	0,00006 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado longitudinal, a_{mr}	0,0000007 mm ⁻¹
Parámetro de tangencia de la parábola, u_{d0}	-1,3277 mm

Las elipses instantáneas de contacto se han determinado a partir de las curvaturas principales y direcciones principales de curvatura en el punto de contacto, considerando un parámetro de deformación elástica $\delta = 0,006$ mm. Se han representado los ejes mayor y menor de las elipses en cada uno de los puntos de contacto considerados. En el punto central del camino de contacto se ha representado además el contorno de la elipse de contacto. La Figura 5.4.2 muestra la función de errores de transmisión cuando el abombamiento longitudinal se obtiene mediante disco de corte o rectificado. La función parabólica obtenida es consecuencia del doble abombamiento parabólico de

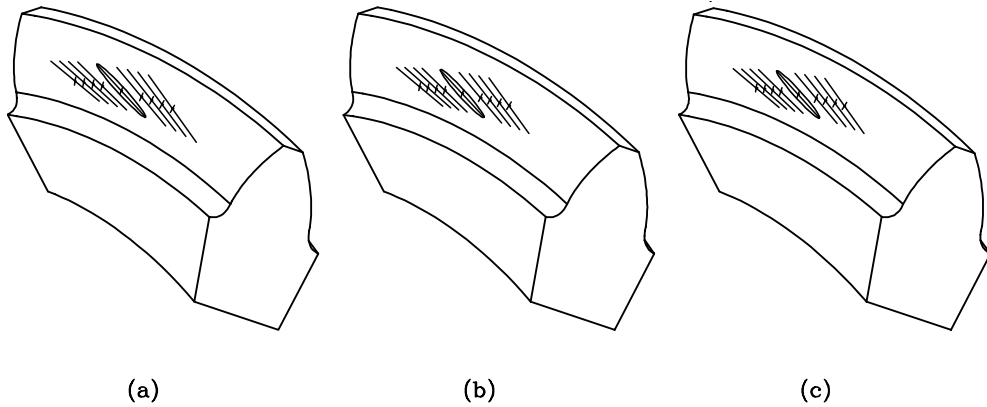


Figura 5.4.1: Camino de contacto sobre piñón helicoidal: (a) método de generación por disco; (b) método de generación por cortador modificando la distancia entre ejes; (c) método de generación por cortador modificando la relación de giro.

la superficie del piñón. Los otros dos métodos de generación basados en la utilización de un cortador también dan lugar a una función parabólica de errores de transmisión.

El algoritmo desarrollado permite simular el engrane para distintos tipos de errores de montaje y/o fabricación. La Figura 5.4.3 muestra el desplazamiento del camino de contacto en los siguientes casos: (a) error $\Delta\gamma_v = 3$ min. ang.; (b) error $\Delta\gamma_h = 3$ min. ang.; (c) error $\Delta\lambda = 3$ min. ang.; (d) combinación de errores $\Delta\gamma_h = 3$ min. ang. y $\Delta\lambda = 3$ min. ang. En los cuatro casos considerados se ha representado el eje mayor de la elipse de contacto considerando un valor de $\delta = 0,006$ mm.

El camino de contacto en el caso (d) coincide con el camino de contacto cuando no se tienen errores y es un ejemplo de que en ocasiones los efectos de los errores se compensan. En todos los casos, la función de errores de transmisión es una función parabólica similar a la representada en la Fig. 5.4.2. Se puede afirmar por tanto que la función parabólica de errores de transmisión ha absorbido los errores cuasilineales (véase el Ejemplo numérico 4.7.1) producidos por los errores de montaje y/o fabricación. Por tanto, el abombamiento longitudinal de la superficie del piñón según los métodos

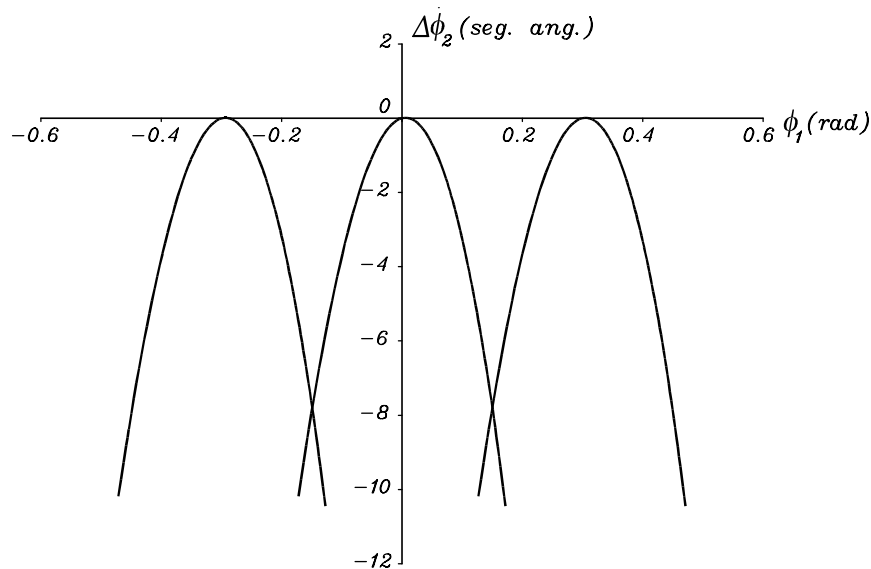


Figura 5.4.2: Función parabólica de errores de transmisión correspondiente a tres ciclos de engrane en una transmisión de engranajes helicoidales en la que el piñón presenta superficies doblemente abombadas y la rueda presenta el perfil de evolvente.

de generación propuestos en los Apartados 5.2 y 5.3 permiten aportar a la transmisión la capacidad de absorber los errores cuasilineales de transmisión producidos por los errores de montaje y/o fabricación. La función resultante de errores de transmisión es una función continua y permite suavizar la transferencia del engrane entre dos parejas de dientes consecutivas.

Ejemplo numérico 5.4.2. En este caso se consideran tres transmisiones con engranajes rectos correspondientes a los tres métodos de fabricación propuestos. Los datos de diseño se muestran en la Tabla 5.4.2. La Figura 5.4.4 muestra el camino de contacto sobre la superficie del piñón correspondiente a un ciclo de engrane en cada uno de los métodos propuestos, así como la función parabólica de errores de transmisión para tres ciclos de engrane (Fig. 5.4.4(d)). Esta función es similar en las tres transmisiones consideradas y el valor máximo de los errores de transmisión es de aproximadamente 8 seg. ang.

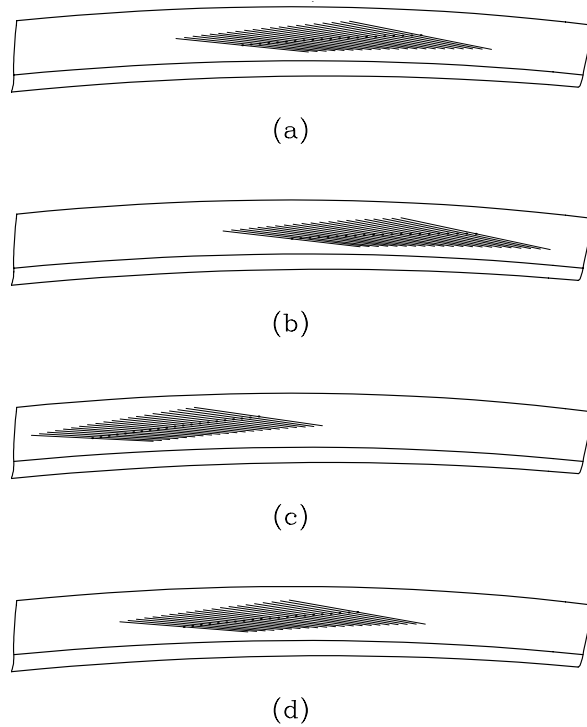


Figura 5.4.3: Influencia de los errores de montaje y fabricación en el camino de contacto: (a) $\Delta\gamma_v$ [3 min. ang.]; (b) $\Delta\gamma_h$ [3 min. ang.]; (c) $\Delta\lambda$ [3 min. ang.]; (d) combinación de errores $\Delta\gamma_h = 3$ min. ang. y $\Delta\lambda = 3$ min. ang.

para los datos de diseño considerados. El coeficiente a_{da} es el responsable de dicha función de errores de transmisión mientras que el coeficiente a_{pl} o a_{mr} es el responsable de la localización del contacto. El camino de contacto en cada una de las transmisiones se ha delimitado exactamente a un ciclo de engrane.

La Figura 5.4.5 muestra el desplazamiento del camino de contacto sobre la superficie del piñón en cada uno de los métodos propuestos cuando se tiene un error angular $\Delta\gamma_h = 4,8$ min. ang. La función de errores de transmisión es también una función parabólica y continua similar a la presentada en la Fig. 5.4.4(d). Las Figuras 5.4.5(a), 5.4.5(b) y 5.4.5(c) muestran que el efecto del error angular en el desplazamiento del camino de contacto es notablemente

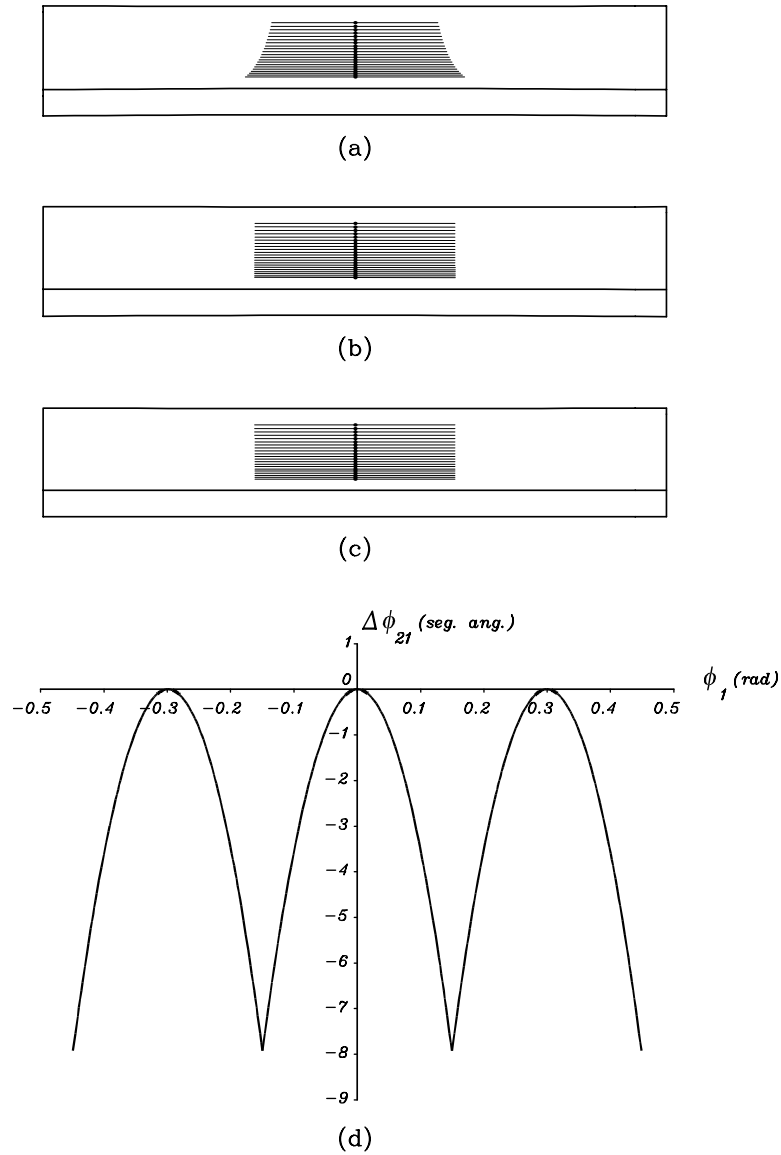


Figura 5.4.4: Camino de contacto sobre piñón recto: (a) método de generación por disco; (b) método de generación por cortador modificando la distancia entre ejes; (c) método de generación por cortador modificando la relación de giro; (d) función parabólica de errores de transmisión.

Tabla 5.4.2: Datos de diseño en una transmisión de engranajes rectos.

Número de dientes del piñón, N_1	21
Número de dientes de la rueda, N_2	50
Módulo, m	4,0 mm
Ángulo de presión en el lado conductor, α_d	25°
Ángulo de presión en el lado conducido, α_c	25°
Ángulo de hélice, β	0°
Ancho de cara, F	60 mm
Radio del disco, ρ_D	60 mm
Radio del cortador, r_{pw}	60 mm
Coefficiente parabólico abombado perfil piñón, a_{da}	0,0005 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado perfil rueda, a_{dr}	0,0 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado longitudinal, a_{pl}	0,00015 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado longitudinal, a_{mr}	0,00000167 mm ⁻¹
Parámetro de tangencia de la parábola, u_{d0}	-1,3277 mm

distinto en el caso de la generación por disco respecto a los otros dos casos de generación por cortador. En cualquier caso, el contacto aparece localizado como consecuencia del abombamiento longitudinal del piñón.

El abombamiento en la dirección del perfil es el responsable de proporcionar una función parabólica de errores de transmisión capaz de absorber los errores cuasilineales producidos por las desalineaciones. Estos errores cuasilineales se muestran en la Fig. 5.4.6(b) en el caso de generación por disco donde se ha considerado un error $\Delta\gamma = 4,8$ min. ang. y un coeficiente $a_{da} = 0$ mm⁻¹. La Fig. 5.4.6(a) muestra el correspondiente camino de contacto. Se puede afirmar por tanto que el abombamiento en la dirección del perfil ha permitido absorber tales errores.

Finalmente, en las Figuras 5.4.7 y 5.4.8 se ha representado la desviación en micrómetros de la superficie con doble abombamiento respecto a la superficie con perfil de evolvente. Se han considerado los tres métodos de fabricación correspondientes a los datos de diseño presentados en la Tablas 5.4.1 y 5.4.2,

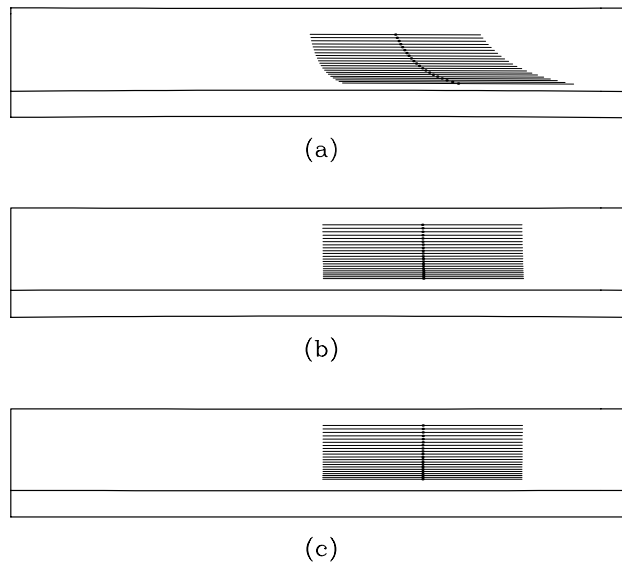


Figura 5.4.5: Influencia del error angular $\Delta\gamma_h$ [4,8 min. ang.] en el desplazamiento del camino de contacto en: (a) piñón generado por disco; (b) piñón generado por cortador modificando la distancia entre ejes; (c) piñón generado por cortador modificando la relación de giro.

respectivamente. Se puede observar que la desviación máxima es inferior a $100 \mu\text{m}$. En el caso de engranajes rectos (Fig. 5.4.8), los dos métodos de fabricación por cortador sinfín proporcionan una desviación más uniforme en la dirección del perfil que en el método de fabricación por disco de corte.

5.5. Análisis tensional de engranajes cilíndricos con geometría modificada

El análisis tensional de engranajes cilíndricos con geometría modificada se basa en el método de los elementos finitos y permite conocer las tensiones de flexión y contacto en los dientes de piñón y rueda a lo largo del ciclo de engrane. El análisis tensional permite además investigar la formación del contacto, que se extiende sobre un área de forma aproximadamente elíptica en el caso de la geometría modificada propuesta. El camino de contacto está

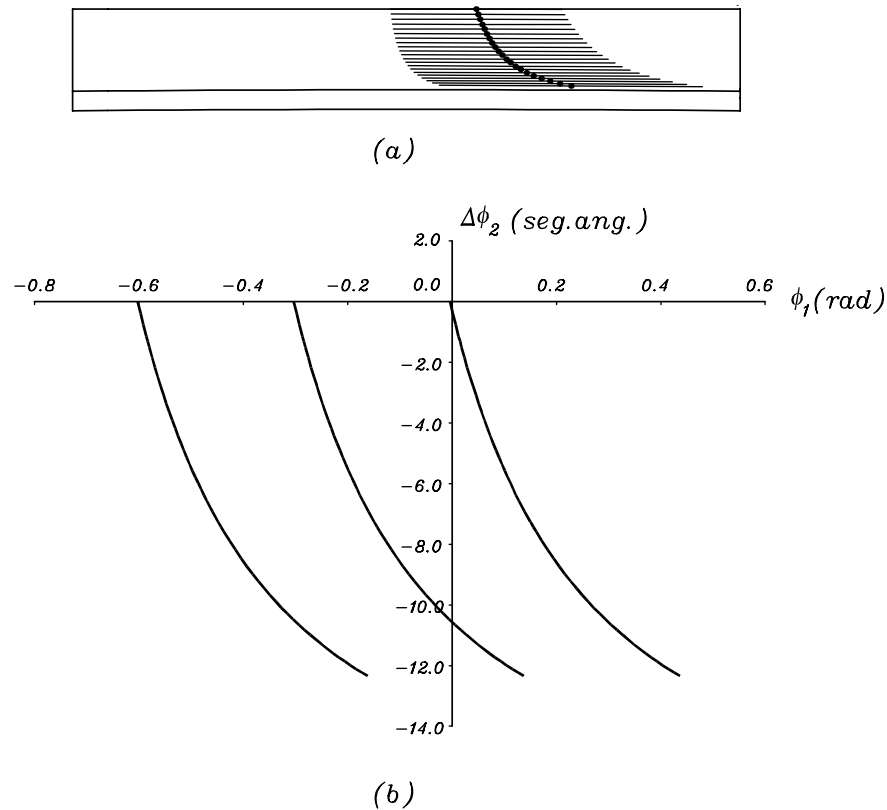


Figura 5.4.6: (a) Camino de contacto y (b) función de errores de transmisión con piñón abombado sólo longitudinalmente frente a un error de alineación $\Delta\gamma_h = 4,8$ min. ang.

formado por el conjunto de elipses instantáneas de contacto sobre la superficie del diente. La trayectoria del camino de contacto así como la orientación de las elipses instantáneas de contacto permiten investigar la existencia o no de posibles zonas de contacto severo.

El análisis tensional nos permitirá además descubrir las ventajas que se derivan de la utilización de la geometría modificada frente a la geometría tradicional de perfil de evolvente y demostrar por qué el contacto “puntual” es preferible al contacto lineal.

Para llevar a cabo el análisis tensional se ha desarrollado un algoritmo que permite la construcción parametrizada y totalmente automática de los

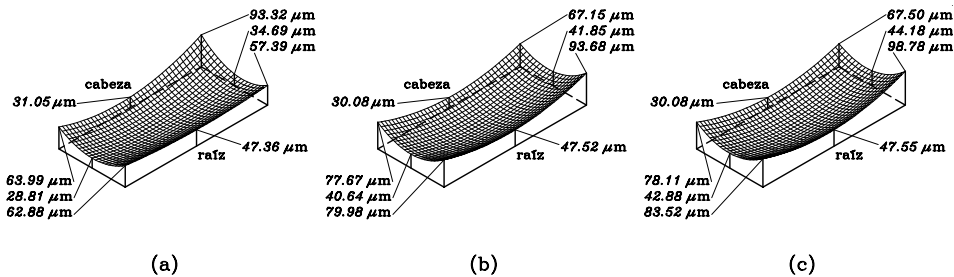


Figura 5.4.7: Material eliminado de la superficie con perfil de evolvente para obtener una superficie con doble abombamiento en un piñón *helicoidal* en los métodos de generación por: (a) disco de corte, (b) cortador sinfín modificando la distancia entre ejes, (c) cortador sinfín modificando la relación entre el desplazamiento del cortador y el giro del piñón.

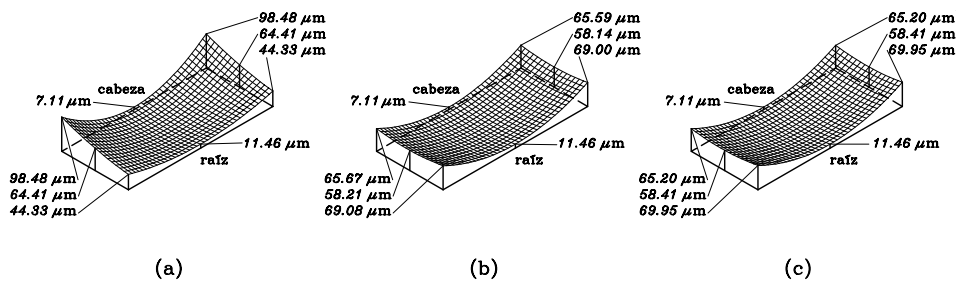


Figura 5.4.8: Material eliminado de la superficie con perfil de evolvente para obtener una superficie con doble abombamiento en un piñón *recto* en los métodos de generación por: (a) disco de corte, (b) cortador sinfín modificando la distancia entre ejes, (c) cortador sinfín modificando la relación entre el desplazamiento del cortador y el giro del piñón.

modelos de elementos finitos de las transmisiones de engranajes rectos y helicoidales. El desarrollo de dicho algoritmo permite disponer de una herramienta de análisis muy potente para el diseño de estas transmisiones.

La descripción y generación del modelo de elementos finitos se ha descrito en el Capítulo 2. A continuación se analizarán en primer lugar las transmisiones de engranajes rectos y se compararán los resultados obtenidos en el caso de la geometría modificada frente a la geometría con perfil de evolvente.

Se discutirán además las ventajas o no de la utilización de perfiles asimétricos para la reducción de tensiones propuesta recientemente por [Kapelevich, 2000] y [Litvin *et al.*, 2000b]. Finalmente se analizarán las transmisiones de engranajes helicoidales con geometría modificada, considerando dos casos: (i) rueda con perfil de evolvente, (ii) rueda con perfil abombado según la dirección del perfil. En este segundo caso es posible obtener tangencia interior entre las superficies del piñón y rueda gracias a una pequeña diferencia entre las curvaturas principales de piñón y rueda con lo que es posible disminuir el valor de las tensiones de contacto. Este tipo de geometría se puede considerar como una nueva versión de engranajes Novikov-Wildhaber.

5.5.1. Análisis tensional de engranajes rectos

El análisis tensional de engranajes rectos se ha llevado a cabo en tres tipos de geometría:

- (i) Piñón y rueda de perfil de evolvente. El contacto entre sus superficies es lineal.
- (ii) Piñón con geometría modificada por disco de corte o rectificado para conseguir el doble abombamiento de sus superficies y rueda de perfil de evolvente. El contacto se ha localizado mediante el abombamiento longitudinal y se ha prediseñado una función parabólica de errores de transmisión mediante el abombado en la dirección del perfil.
- (iii) Piñón de perfiles asimétricos con geometría modificada por disco de corte y rectificado para conseguir el doble abombamiento de sus superficies y rueda de perfil de evolvente. Se consideran perfiles asimétricos para el estudio de la posibilidad de reducción de tensiones.

Los objetivos del análisis tensional de los tres tipos de geometría presentados anteriormente son los siguientes:

- (a) Estudio de la formación del contacto y comparación de los estados tensionales en transmisiones de engranajes rectos de perfil de evolvente y de geometría modificada frente a la presencia de errores de alineación.

- (b) Estudio de la utilización de perfiles asimétricos en transmisiones de engranajes rectos para la reducción de tensiones.

La Tabla 5.5.1 muestra los datos de diseño que se han utilizado para la generación de los tres tipos de geometría de engranajes rectos considerados. El análisis del contacto (TCA) permite seleccionar cualquier punto sobre la trayectoria de contacto para construir el modelo de elementos finitos de la transmisión. La generación automática de los modelos de elementos finitos permite analizar cuantos puntos se quieran sobre la trayectoria de contacto para estudiar la evolución de las tensiones de contacto y flexión tanto en el piñón como en la rueda durante un ciclo de engrane.

Se han considerado modelos de elementos finitos formados por tres pares de dientes (Fig. 2.11.4). Los elementos utilizados son del tipo C3D8I [Hibbit, Karlsson & Sirensen, Inc., 1998] de primer orden mejorados mediante modos de deformación incompatibles para mejorar su comportamiento a flexión. El número total de elementos considerados es de 25662 con 31876 nodos. El material utilizado para el piñón y rueda es acero con módulo de elasticidad $E = 2,068 \cdot 10^5$ MPa y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,29$. En todos los casos el par tursor aplicado al piñón es de 500 N·m.

El primer análisis considerado corresponde a una transmisión por engranajes rectos de geometría tipo (i) de perfil de evolvente sin errores de alineación o fabricación. La Figura 5.5.1 muestra las tensiones de contacto y flexión obtenidas en el piñón. Como era de esperar, en ausencia de errores de fabricación y/o montaje, se obtiene contacto lineal y la carga se reparte uniformemente, incluso entre varios dientes. La tensión máxima de contacto obtenida en la posición mostrada es de 238 MPa y la tensión máxima de flexión en la base del diente es de 58 MPa.

En la Figura 5.5.2 se muestran las tensiones de contacto y flexión así como la formación del contacto en una transmisión por engranajes rectos con geometría modificada de tipo (ii). El contacto aparece localizado como consecuencia del abombamiento longitudinal de la superficie del piñón. La tensión máxima de contacto obtenida es de 726 MPa y la tensión máxima de flexión en la base del diente de 127 MPa. Las tensiones de contacto y flexión son más elevadas en este tipo de geometría que las obtenidas en el caso anterior

Tabla 5.5.1: Datos de diseño.

Número de dientes del piñón, N_1	21
Número de dientes de la rueda, N_2	50
Módulo, m	4,0 mm
Ancho de cara, F	60,0 mm
Radio del disco, ρ_D	60,0 mm
Coefficiente parabólico abombado perfil ⁽¹⁾ , a_{da}	0,0 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado longitudinal ⁽¹⁾ , a_{pl}	0,0 mm ⁻¹
Ángulo de presión en el lado conductor ⁽¹⁾ , α_d	25°
Ángulo de presión en el lado conducido ⁽¹⁾ , α_c	25°
Coefficiente parabólico abombado perfil ⁽²⁾ , a_{da}	0,0005 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado longitudinal ⁽²⁾ , a_{pl}	0,00015 mm ⁻¹
Ángulo de presión en el lado conductor ⁽²⁾ , α_d	25°
Ángulo de presión en el lado conducido ⁽²⁾ , α_c	25°
Coefficiente parabólico abombado perfil ⁽³⁾ , caso a, a_{da}	0,0003438 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado perfil ⁽³⁾ , caso b, a_{da}	0,000802 mm ⁻¹
Coefficiente parabólico abombado longitudinal ⁽³⁾ , a_{pl}	0,00015 mm ⁻¹
Ángulo de presión en el lado conductor ⁽³⁾ , α_d	30° ^(a) 20° ^(b)
Ángulo de presión en el lado conducido ⁽³⁾ , α_c	20° ^(a) 30° ^(b)

⁽¹⁾ Geometría de perfil de evolvente

⁽²⁾ Geometría con doble abombamiento

⁽³⁾ Geometría con doble abombamiento y perfiles asimétricos

para piñón y rueda de perfil de evolvente.

Si bien es cierto que la modificación de las superficies del piñón para localizar el contacto y prediseñar una función parabólica de errores de transmisión conduce a un incremento de las tensiones de contacto y flexión, las condiciones en las que se han considerado los modelos anteriores para las geometrías tipo (i) y (ii) son teóricas e ideales.

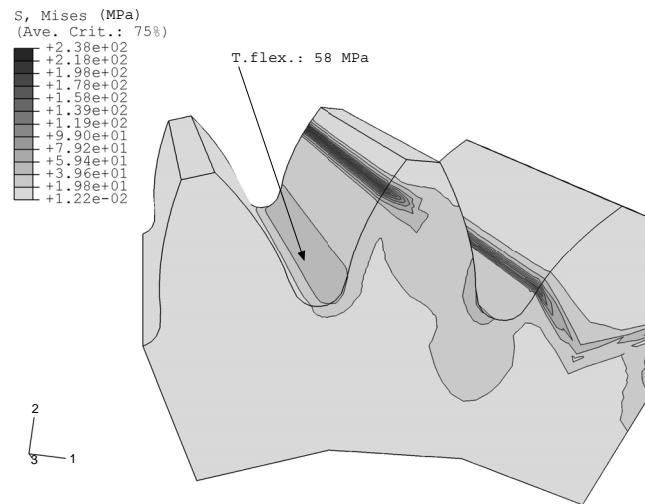


Figura 5.5.1: Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría de perfil de evolvente y sin errores de alineación.

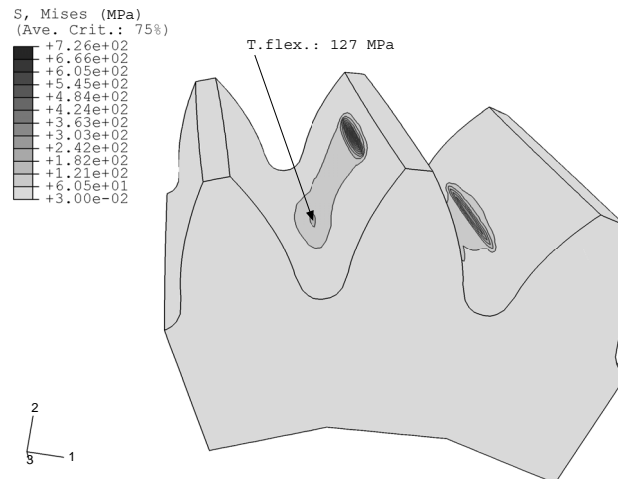


Figura 5.5.2: Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría modificada y sin errores de alineación.

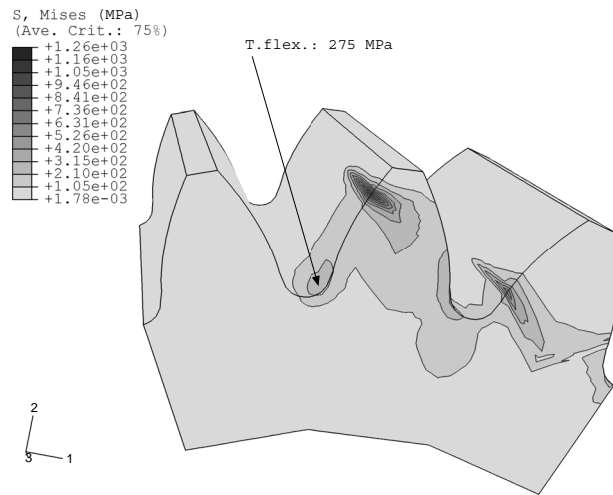


Figura 5.5.3: Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría de perfil de evolvente y con un error de alineación $\Delta\gamma_h = 0,08^\circ$.

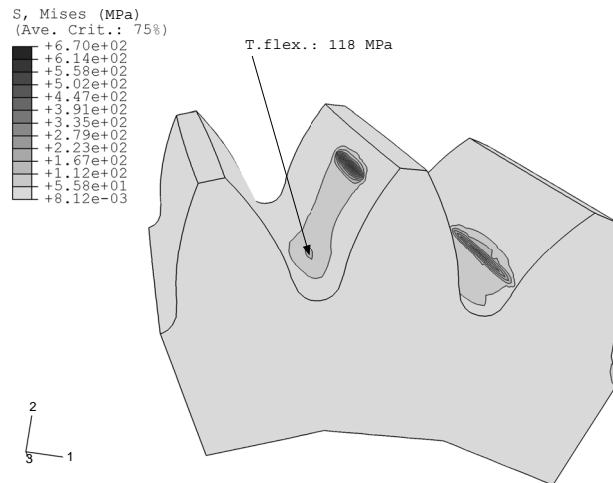


Figura 5.5.4: Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría modificada y con un error de alineación $\Delta\gamma_h = 0,08^\circ$.

En el montaje y funcionamiento real de las transmisiones siempre existirán errores de alineación o fabricación por muy pequeños que éstos sean y la tecnología existente nos permita alcanzar.

La Figura 5.5.3 muestra la formación del contacto y las tensiones de contacto y flexión en una transmisión por engranajes rectos de perfil de evolvente (geometría tipo (i)) cuando los ejes del piñón y rueda no son paralelos sino que se cruzan, es decir, cuando existe un error de alineación $\Delta\gamma_h = 0,08^\circ$. El contacto se desplaza a los bordes de las superficies de las dentaduras del piñón y de la rueda alcanzándose niveles de tensiones de contacto y flexión de 1260 y 275 MPa, respectivamente.

En la Figura 5.5.4 se muestra la formación del contacto y las tensiones de contacto y flexión en una transmisión con geometría modificada de tipo (ii) cuando se tiene el mismo error considerado en el caso anterior ($\Delta\gamma_h = 0,08^\circ$). Se observa que el contacto permanece localizado dentro de las superficies de las dentaduras del piñón y rueda alcanzándose niveles de tensiones de contacto y flexión de 670 y 118 MPa, respectivamente, similares a los obtenidos para el caso en el que no existen errores de alineación (Fig. 5.5.2)

Se han considerado los siguientes tres casos de diseño para el estudio completo de la evolución de las tensiones de contacto y flexión en transmisiones de engranajes rectos de tipo (i) y (ii):

- Caso 1: Geometría modificada tipo (ii) sin errores de alineación y/o fabricación.
- Caso 2: Geometría modificada tipo (ii) con un error de alineación $\Delta\gamma_h = 0,08^\circ$.
- Caso 3: Geometría tradicional de perfil de evolvente (i) con un error de alineación $\Delta\gamma_h = 0,08^\circ$.

La Figura 5.5.5 muestra la evolución de las tensiones de contacto en piñón y rueda para los tres casos mencionados. Igualmente la Figura 5.5.6 muestra las tensiones de flexión en piñón y rueda.

Los resultados obtenidos nos permiten afirmar que la utilización de la geometría modificada tipo (ii) arroja niveles tensionales más bajos que la

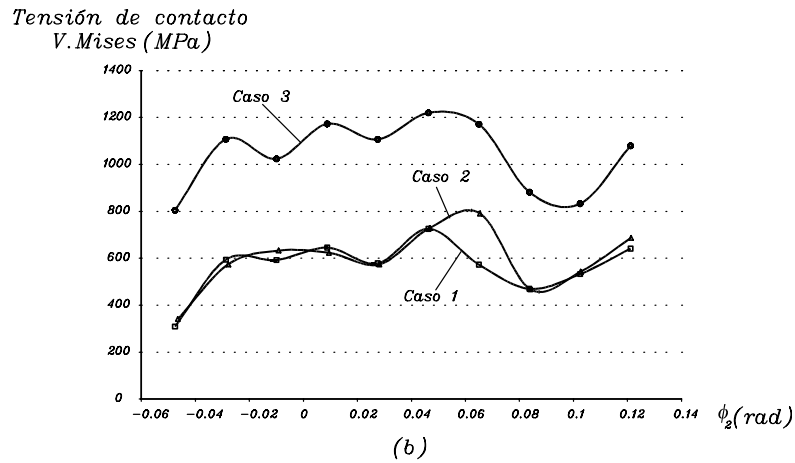
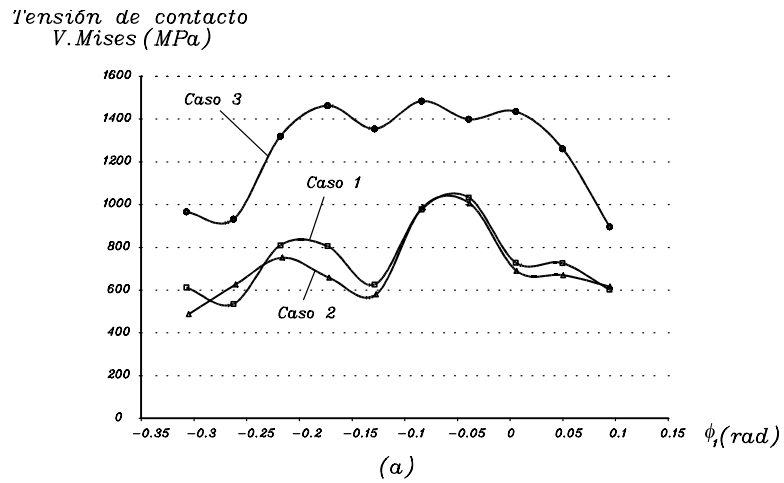


Figura 5.5.5: Evolución de las tensiones de contacto en (a) piñón y (b) rueda para los casos considerados 1, 2 y 3.

geometría tradicional de perfil de evolvente tipo (i) cuando aparecen errores de alineación y/o fabricación. Al mismo tiempo, la geometría modificada tipo (ii) permite absorber las funciones discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y montaje de forma que la transmisión tendrá niveles más bajos de ruido y vibración que en la geometría tipo (i).

Comparando el comportamiento de la transmisión tipo (ii) frente a la de tipo (i) cuando existe un error de alineación $\Delta\gamma = 0,08^\circ$, se consigue en el

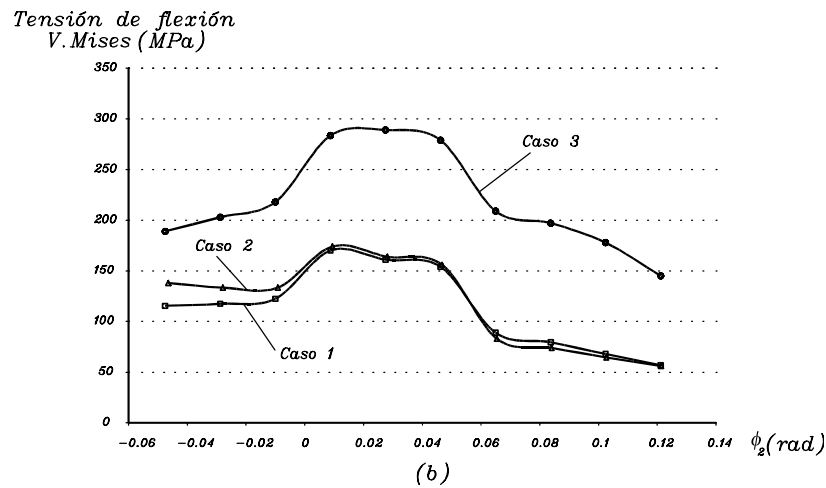
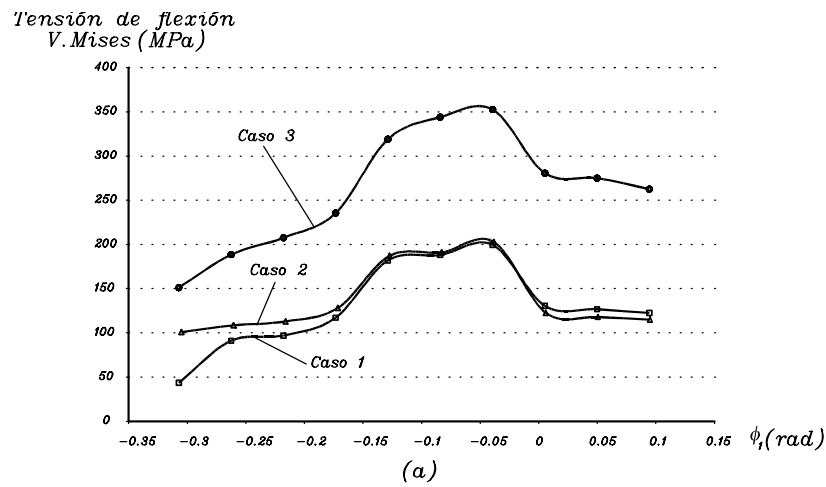


Figura 5.5.6: Evolución de las tensiones de flexión en (a) piñón y (b) rueda para los casos considerados 1, 2 y 3.

piñón hasta una reducción media del 39,02 % en las tensiones de contacto alcanzadas con la geometría convencional de perfil de evolvente. Igualmente, las tensiones de flexión se reducen hasta un valor medio del 42,24 %. Para la rueda se obtienen reducciones similares del 39,07 % y 43,07 % en las tensiones de contacto y flexión, respectivamente.

La capacidad de localización del contacto depende del valor del coeficiente a_{pl} de la trayectoria parabólica del disco de rectificado, de manera que exis-

tirá un determinado valor del error $\Delta\gamma$ a partir del cual el contacto aparece en el borde. En cualquier caso, se puede aumentar la capacidad de la transmisión para absorber errores aumentando el valor del coeficiente a_{pl} , a costa de aumentar el nivel de tensión de contacto y flexión.

Con respecto a la utilización de perfiles asimétricos (geometría tipo (iii)), se han analizado dos posibles casos: (a) utilización de un ángulo de presión mayor en el lado conductor que en el conducido, y (b) utilización de un ángulo de presión mayor en el lado conducido que en el conductor. Los casos de diseño considerados para el estudio de la utilización de perfiles asimétricos en comparación con el de perfiles simétricos son:

- Caso 1: Geometría tipo (ii), sin errores de alineación y/o montaje con un ángulo de presión de 25° en el lado conductor y 25° en el lado conducido.
- Caso a: Geometría tipo (iii), sin errores de alineación y/o montaje, con un ángulo de presión de 30° en el lado conductor y 20° en el lado conducido.
- Caso b: Geometría tipo (iii), sin errores de alineación y/o montaje, con un ángulo de presión de 20° en el lado conductor y 30° en el lado conducido.

En ambos casos, el coeficiente de abombamiento en la dirección del perfil se ha determinado de forma que la función prediseñada de errores de transmisión tenga un valor máximo de 8 segundos angulares (véase Tabla 5.5.1).

El análisis del contacto (TCA) y el análisis de las curvaturas [Litvin, 1994] permite determinar la trayectoria del contacto así como el tamaño y orientación de las elipses de contacto. En la Figura 5.5.7 se muestran las trayectorias de contacto y el tamaño y orientación de las elipses de contacto para los casos 1, a y b. En todos ellos, la función de errores de transmisión es la que se muestra en la Figura 5.5.7(d).

Un primer análisis de las tensiones de contacto y flexión en el piñón se muestra en las Figuras 5.5.8 y 5.5.9 para los casos a y b respectivamente. El punto de contacto considerado ocupa una posición similar en la trayectoria de contacto a la mostrada en la Figura 5.5.2 para el caso 1.

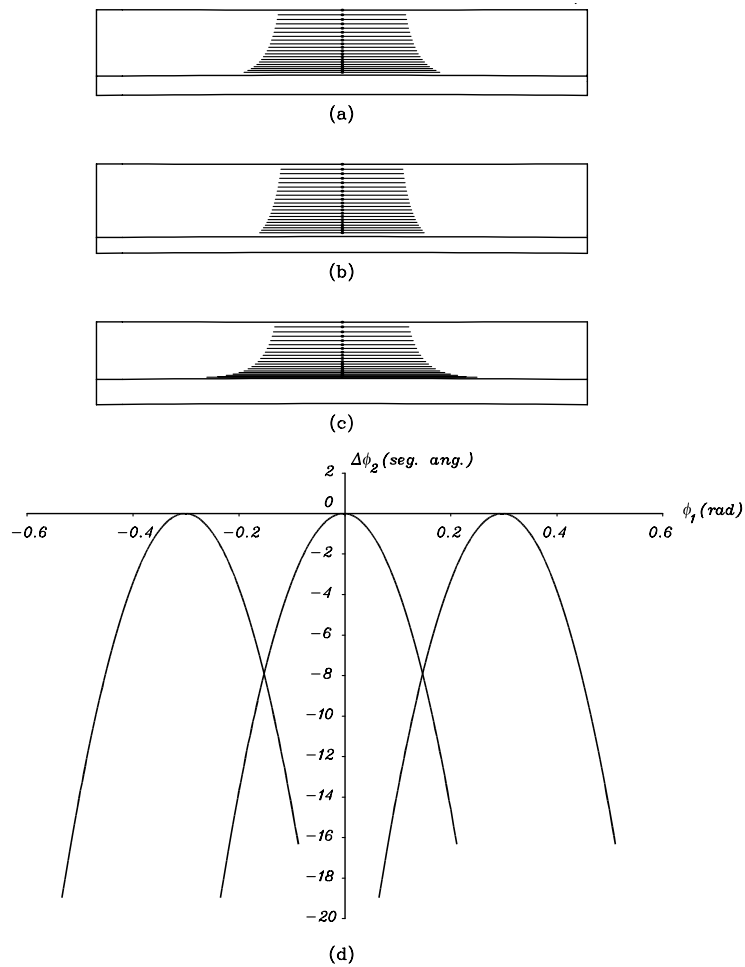


Figura 5.5.7: Análisis del contacto: (a) trayectoria de contacto en el caso 1, (b) trayectoria de contacto en el caso a, (c) trayectoria de contacto en el caso b, (d) función de errores de transmisión en los casos 1, a y b.

Se ha realizado un estudio completo de la evolución de las tensiones de contacto y flexión a lo largo de la trayectoria de contacto para los casos de diseño a y b. En la Figuras 5.5.10 y 5.5.11 se muestran las tensiones de contacto y flexión respectivamente, tanto en piñón y rueda, para los casos 1, a y b. Se observa una ligera disminución de las tensiones de contacto en el caso (b) como era de esperar por el tamaño relativamente mayor de las elipses de

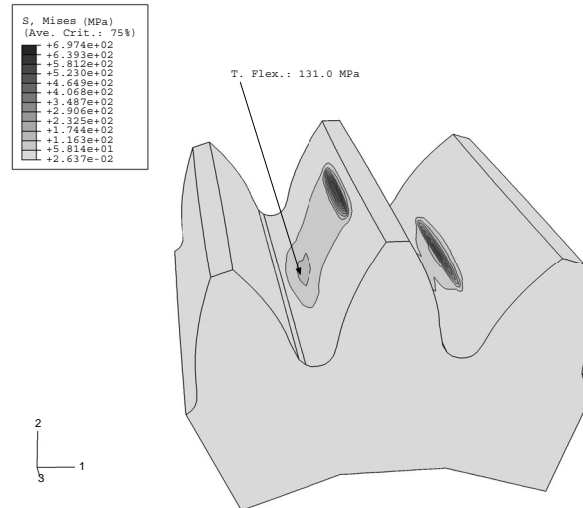


Figura 5.5.8: Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría modificada de perfiles asimétricos tipo 30-20 y sin errores de alineación.

contacto según se observa en la Figura 5.5.7(c).

No obstante, no se ha observado una reducción notable de las tensiones de contacto y/o de flexión con la utilización de perfiles asimétricos tanto en el piñón como en la rueda.

5.5.2. Análisis tensional de engranajes helicoidales

El análisis tensional de engranajes helicoidales se ha llevado a cabo en dos tipos de geometría:

- (1) Piñón con geometría modificada por cortador para conseguir el doble abombamiento de sus superficies y rueda con abombamiento en la dirección del perfil. El contacto se ha localizado mediante el uso de diferentes abombamientos en la dirección del perfil en piñón y rueda. Se ha prediseñado una función parabólica de errores de transmisión mediante el abombamiento en la dirección longitudinal de la superficie del piñón.

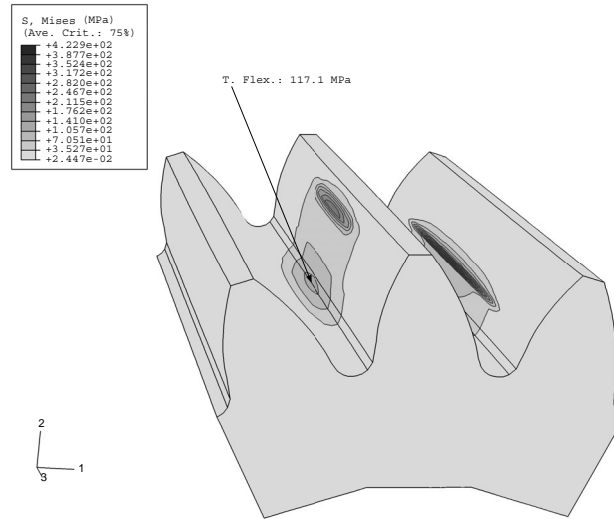


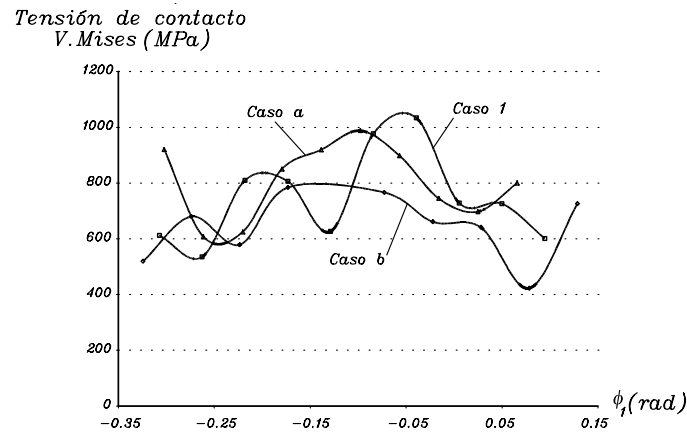
Figura 5.5.9: Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría modificada de perfiles asimétricos tipo 20-30 y sin errores de alineación.

- (2) Piñón con geometría modificada por cortador para conseguir el doble abombamiento de sus superficies y rueda de perfil de evolvente. El contacto se ha localizado mediante el abombamiento en la dirección del perfil y se ha prediseñado una función parabólica de errores de transmisión mediante el abombamiento en la dirección longitudinal.

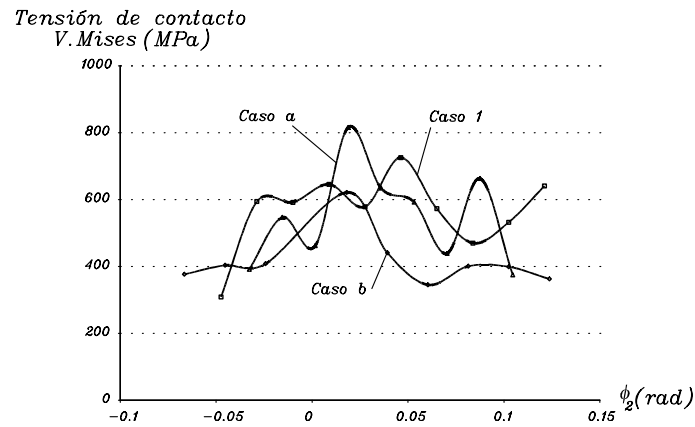
La diferencia entre los dos tipos de geometría es que en el primer tipo es posible obtener tangencia interior entre las superficies de piñón y rueda frente a la tangencia exterior del segundo tipo. La tangencia interior se obtiene como consecuencia de una pequeña diferencia en el valor de las curvaturas principales entre las superficies de piñón y rueda.

La geometría tipo (2) constituye una modificación de las transmisiones convencionales con perfil de evolvente en la que el piñón es el elemento modificado mientras que la rueda es un engranaje convencional.

La geometría tipo (1) constituye una nueva versión de las transmisiones de Novikov-Wildhaber, donde la tangencia interior es una característica de esto



(a)



(b)

Figura 5.5.10: Evolución de las tensiones de contacto en (a) piñón y (b) rueda para los casos considerados 1, a y b.

tipo de transmisiones. Las diferencias entre esta nueva versión y las versiones anteriores de las transmisiones de Novikov-Wildhaber son las siguientes:

- (1) La nueva versión incorpora un abombamiento en la dirección longitudinal de la superficie del piñón que permite el prediseño de una función parabólica de errores de transmisión. Tal función es capaz de absorber los errores cuasilineales producidos por los errores de alineación, por lo que el ruido y la vibración se han de reducir notablemente respecto a

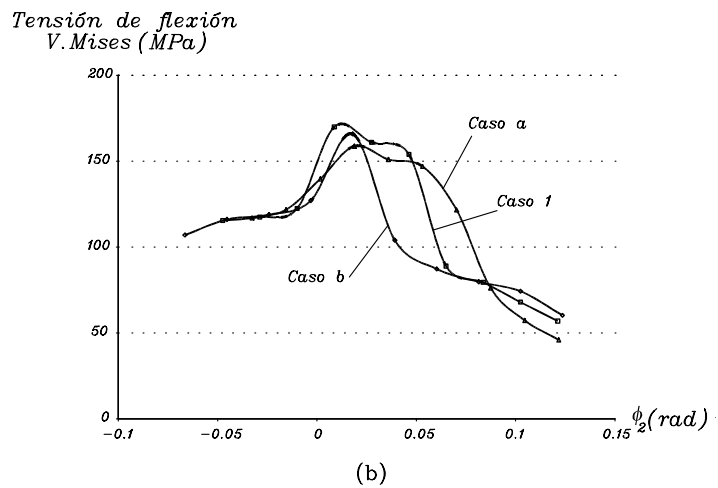
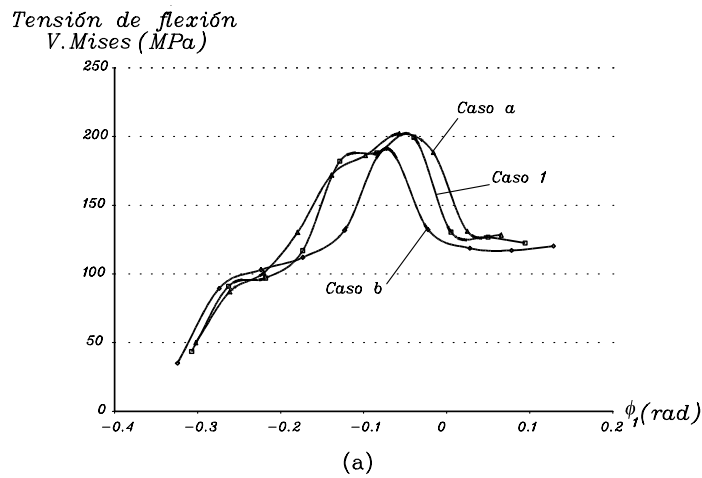


Figura 5.5.11: Evolución de las tensiones de flexión en (a) piñón y (b) rueda para los casos considerados 1, a y b.

las versiones anteriores.

- (2) El abombamiento en la dirección del perfil está basado en perfiles parabólicos de las cremalleras de referencia en lugar de perfiles de círculo. Esto aporta a las superficies una mayor rigidez para un mismo radio de curvatura [Litvin *et al.*, 2002d].

La comparación de los estados tensionales en las geometrías tipo (1) y (2) mostrará las ventajas de la utilización de la geometría tipo (1).

Tabla 5.5.2: Datos de diseño.

Número de dientes del piñón, N_1	17
Número de dientes de la rueda, N_2	77
Módulo, m	5,08 mm
Ángulo de presión en el lado conductor, α_d	25°
Ángulo de presión en el lado conducido, α_c	25°
Ángulo de hélice, β	20°
Parámetro de espesor relativo, s_{21}	0,7
Ancho de cara, F	90 mm
Radio primitivo del cortador, r_{pw}	98 mm
Coeficiente parabólico abombado perfil piñón ⁽¹⁾ , a_{da}	0,016739 mm ⁻¹
Coeficiente parabólico abombado perfil rueda ⁽¹⁾ , a_{dr}	0,0155 mm ⁻¹
Coeficiente parabólico abombado longitudinal ⁽¹⁾ , a_{pl}	0,00005 mm ⁻¹
Coeficiente parabólico abombado perfil piñón ⁽²⁾ , a_{da}	0,016739 mm ⁻¹
Coeficiente parabólico abombado perfil rueda ⁽²⁾ , a_{dr}	0,0 mm ⁻¹
Coeficiente parabólico abombado longitudinal ⁽²⁾ , a_{pl}	0,0000315 mm ⁻¹
⁽¹⁾ Geometría tipo (1) de Novikov-Wildhaber	
⁽²⁾ Geometría tipo (2)	

Los datos de diseño utilizados para el análisis de ambas geometrías se muestra en la Tabla 5.5.2. El análisis del contacto permite determinar el camino de contacto en cada tipo de geometría. La Figs. 5.5.12(a) y 5.5.12(b) muestran el camino de contacto sobre la superficie del piñón en los casos (1) y (2) respectivamente. Los coeficientes parabólicos para el abombamiento longitudinal (véase Tabla 5.5.2) permiten en cada caso obtener un función parabólica de errores de transmisión con un valor máximo del error en torno a 8 seg. ang. En la Fig. 5.5.12(c) se muestra dicha función.

Una vez obtenidos los resultados del TCA se lleva a cabo la construcción del modelo de elementos finitos en el punto de contacto elegido por el diseñador. Se ha considerado un modelo de tres dientes para el análisis. Se

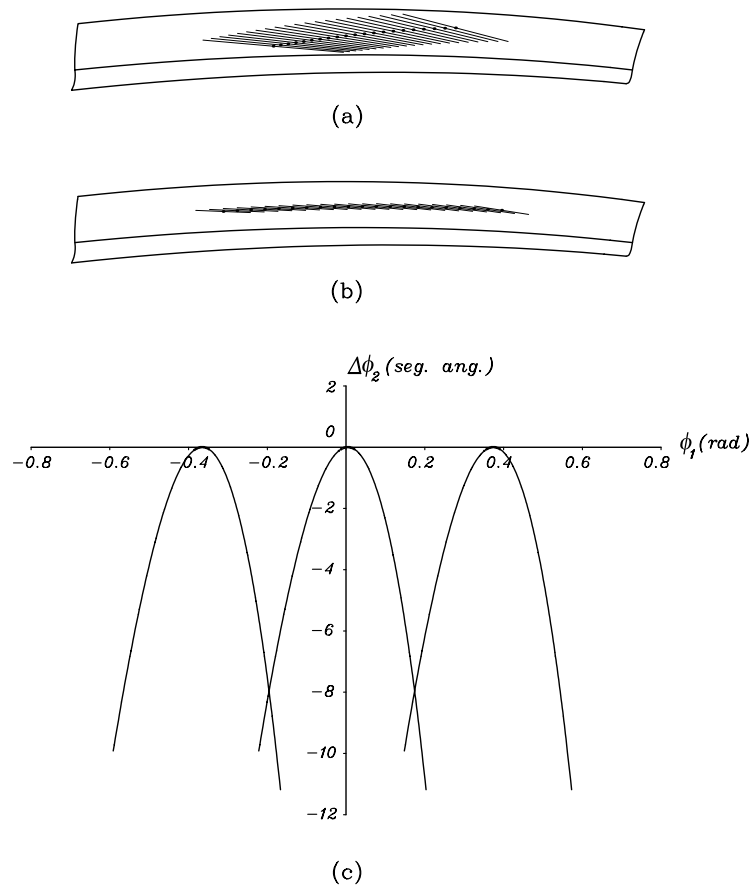


Figura 5.5.12: Resultados del TCA: (a) camino de contacto en una transmisión con geometría tipo (1) de Novikov-Wildhaber; (b) camino de contacto en una transmisión con geometría tipo (2); (c) función parabólica de errores de transmisión.

han utilizado elementos C3D8I [Hibbit, Karlsson & Sirensen, Inc., 1998]. El número total de elementos considerados es de 71460 con 87360 nodos. El material utilizado para el piñón y la rueda es acero con módulo de elasticidad $E = 2,068 \cdot 10^5$ MPa y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,29$. En todos los casos el par torsor aplicado al piñón es de 500 N·m. La Figura 5.5.13 muestra el modelo de elementos finitos para la geometría tipo (1) en el punto medio de contacto. Las Figuras 5.5.14 y 5.5.15 muestran las tensiones máximas de

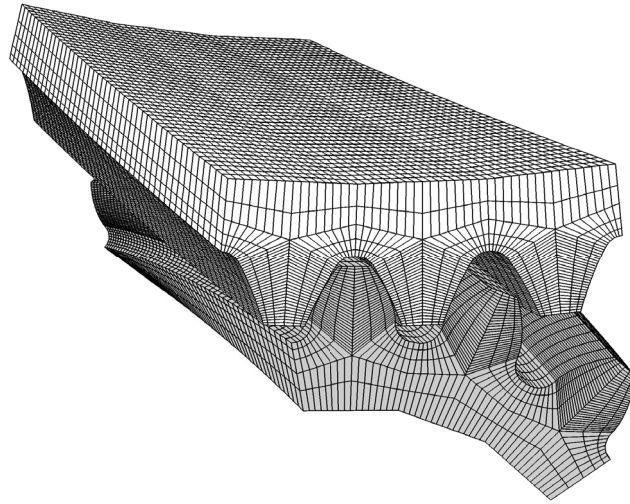


Figura 5.5.13: Modelo de elementos finitos con tres pares de dientes en la geometría tipo (1).

contacto y flexión en el punto medio de contacto en las geometrías tipo (1) y (2) respectivamente. Se observan unos valores de tensiones de contacto y de flexión inferiores en la geometría tipo (1) respecto de la geometría tipo (2) como consecuencia de un mayor tamaño de la elipse de contacto en la geometría tipo (1) (véase Figs. 5.5.12(a) y (b)).

Se ha estudiado la evolución de las tensiones de contacto y flexión a lo largo del ciclo de engrane en las geometrías tipo (1) y tipo (2). Las Figuras 5.5.16 y 5.5.17 muestran la variación de las tensiones de contacto y flexión respectivamente en ambos casos. Se puede observar una reducción importante de las tensiones de contacto en la geometría tipo (1). Las tensiones de flexión también se han reducido.

Se puede afirmar que la modificación de los coeficientes parabólicos de abombado en la dirección del perfil permite optimizar los niveles de tensión. Para ello, el TCA y el análisis de tensiones deben ser aplicados en el proceso iterativo de diseño. El TCA permite obtener la orientación de los ejes principales de las elipses de contacto, mientras que el tamaño se determina de forma aproximada considerando un coeficiente de deformación elástica δ .

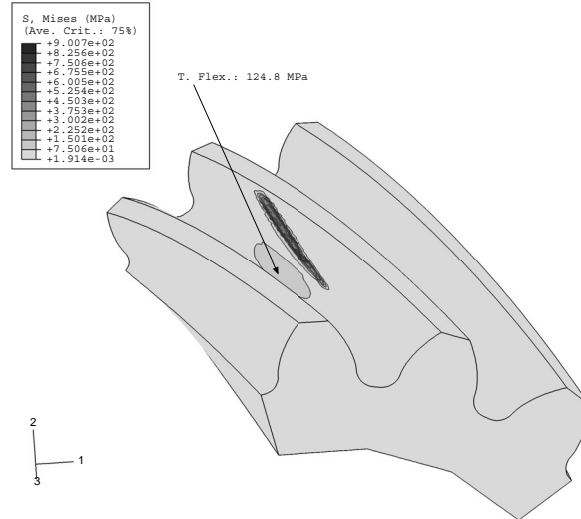


Figura 5.5.14: Tensiones de contacto y flexión en el punto medio de contacto sobre la superficie del piñón en la geometría tipo (1).

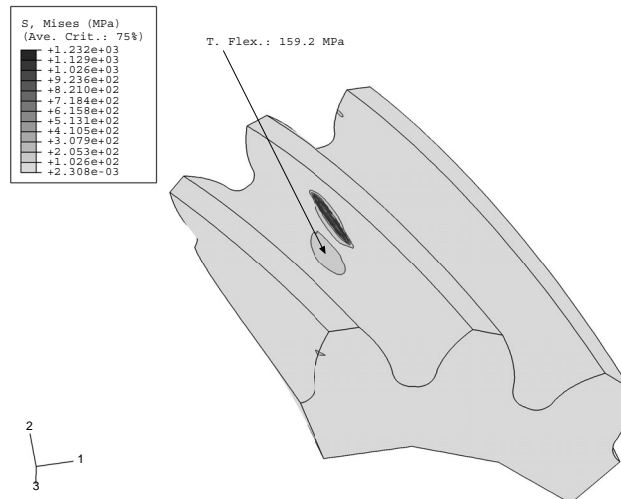
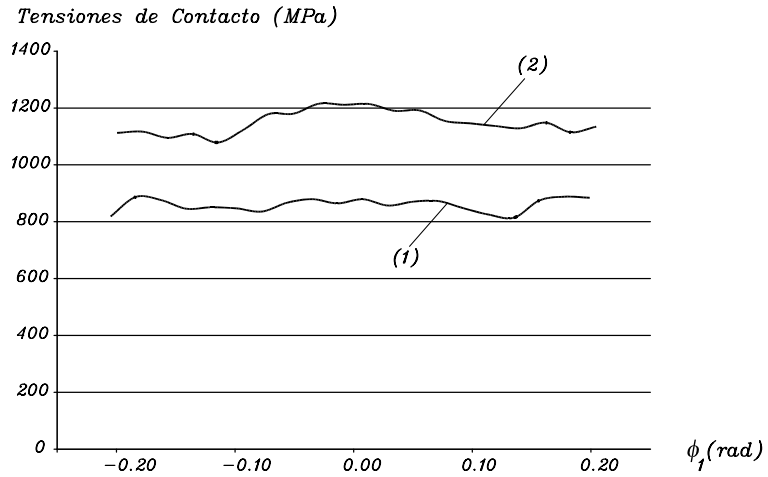
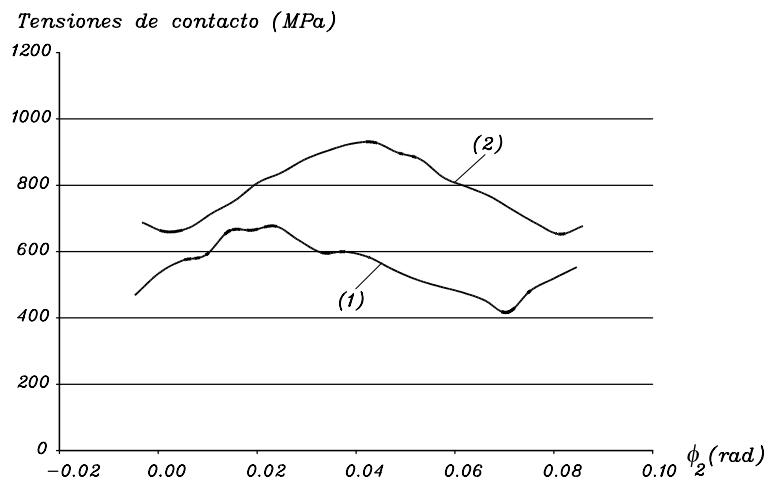


Figura 5.5.15: Tensiones de contacto y flexión en el punto medio de contacto sobre la superficie del piñón en la geometría tipo (2).



(a)



(b)

Figura 5.5.16: Evolución de las tensiones de contacto en las geometrías tipo (1) y (2) en: (a) el piñón, (b) la rueda.

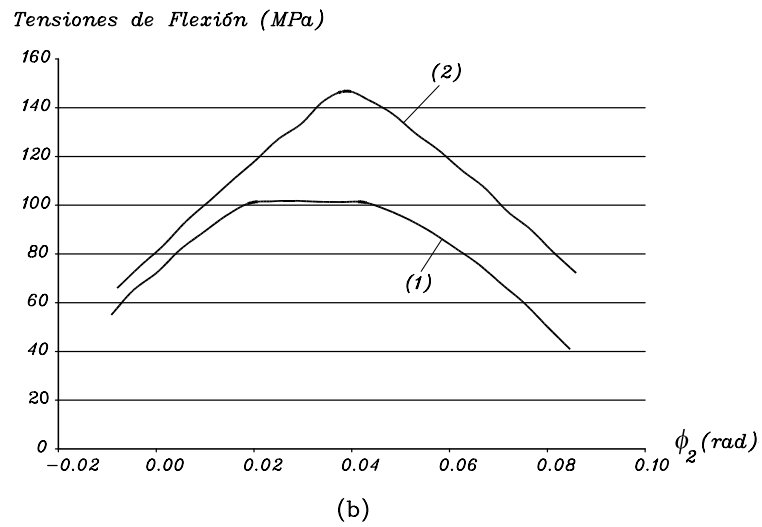
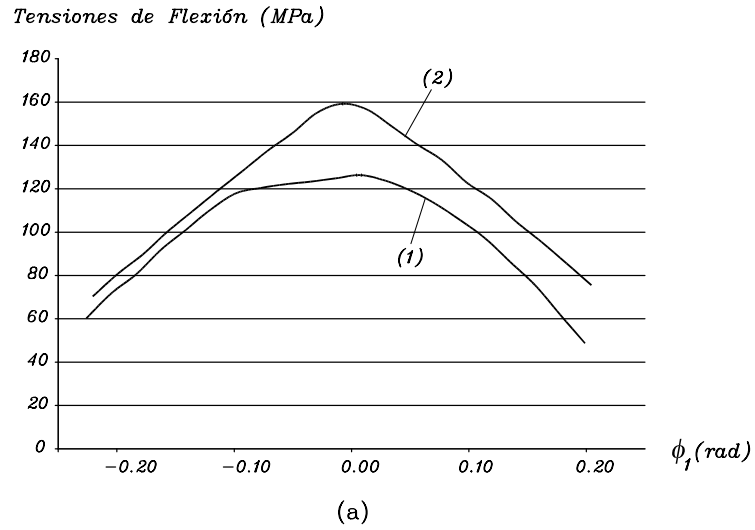


Figura 5.5.17: Evolución de las tensiones de flexión en las geometrías tipo (ii) y (iii) en (a) el piñón y (b) la rueda.

La geometría tipo (1) (Fig. 5.5.12(a)) supone un aumento del tamaño de las elipses de contacto respecto a la geometría tipo (2) (Fig. 5.5.12(b)). Sin embargo, el camino de contacto en la geometría tipo (1) se desvía de la dirección longitudinal y se debe tener especial cuidado porque pueden aparecer áreas de contacto severo. El análisis de tensiones confirma la orientación de los ejes de las elipses obtenidas en el TCA y determina de forma más aproximada el tamaño de las elipses, permitiendo detectar la presencia de áreas de contacto severo. En el diseño propuesto para la geometría tipo (1) se han evitado dichas áreas.

Capítulo 6

Aplicación de engranajes cilíndricos en transmisiones con ejes que se intersectan: Engranajes de cara

6.1. Introducción

Los engranajes cilíndricos tanto rectos y helicoidales se aplican normalmente en transmisiones con ejes paralelos (o con ejes que se cruzan en el caso de helicoidales). No obstante, los engranajes cilíndricos también se pueden utilizar en transmisiones con ejes que se intersectan si se modifica la disposición de los dientes en uno de los engranajes. La Figura 6.1.1 muestra las diferentes disposiciones del dentado en la rueda cuando se modifica el ángulo entre ejes, pasando de una transmisión con ejes paralelos (Fig. 6.1.1(a)) a otra transmisión con ejes que se intersectan (Figs. 6.1.1(b) y (c)).

Las transmisiones de engranajes cilíndricos y ejes que se intersectan se denominan transmisiones de engranajes de cara (“face gear drives” en la literatura inglesa) dado que los dientes aparecen en la cara de uno de los engranajes. Los engranajes de cara encuentran su mayor aplicación en transmisiones donde se requiere bifurcar la transmisión del par torsor, es importante la sen-

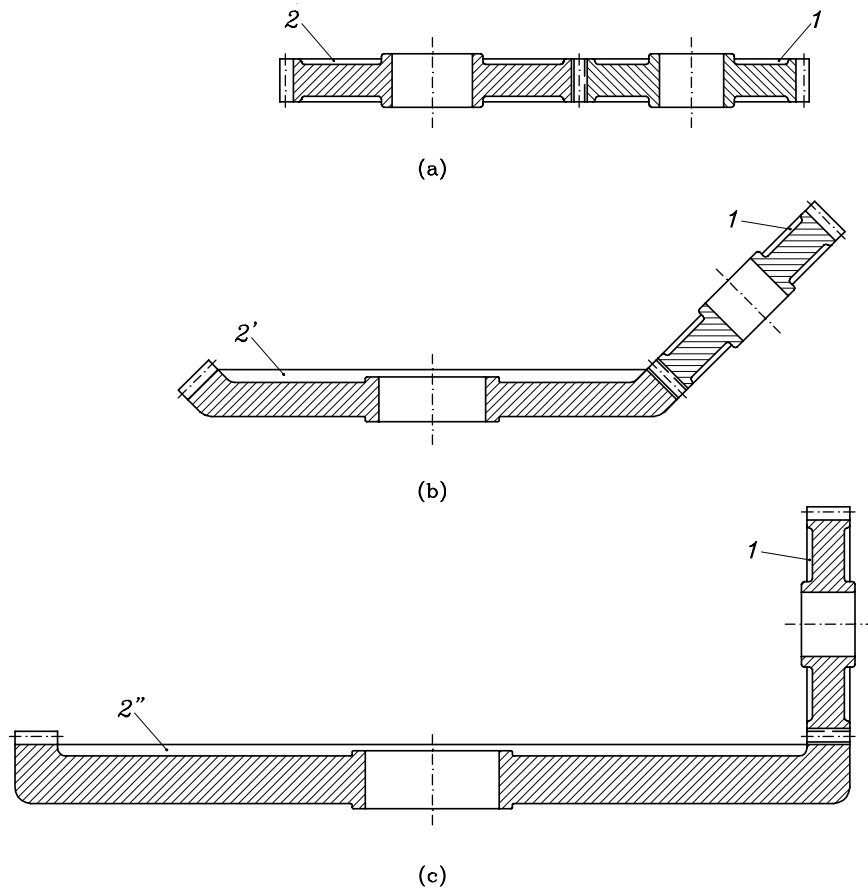


Figura 6.1.1: Transmisiones con engranajes cilíndricos: (a) con ejes paralelos, (b) y (c) con ejes que se intersectan.

cillez constructiva y el peso es un factor crítico. La Figura 6.1.2 muestra una aplicación típica en helicópteros donde la bifurcación del par torsor permite aumentar la capacidad de transmisión de potencia. En comparación con sus competidores, los engranajes cónicos espirales, los engranajes de cara presentan una mayor precisión y sencillez de fabricación. Sin embargo, los engranajes de cara se utilizan con relaciones de transmisión entre 4 y 10 aproximadamente, mientras que para relaciones menores los engranajes cónicos espirales constituyen una mejor solución.

La investigación desarrollada sobre transmisiones de engranajes de cara

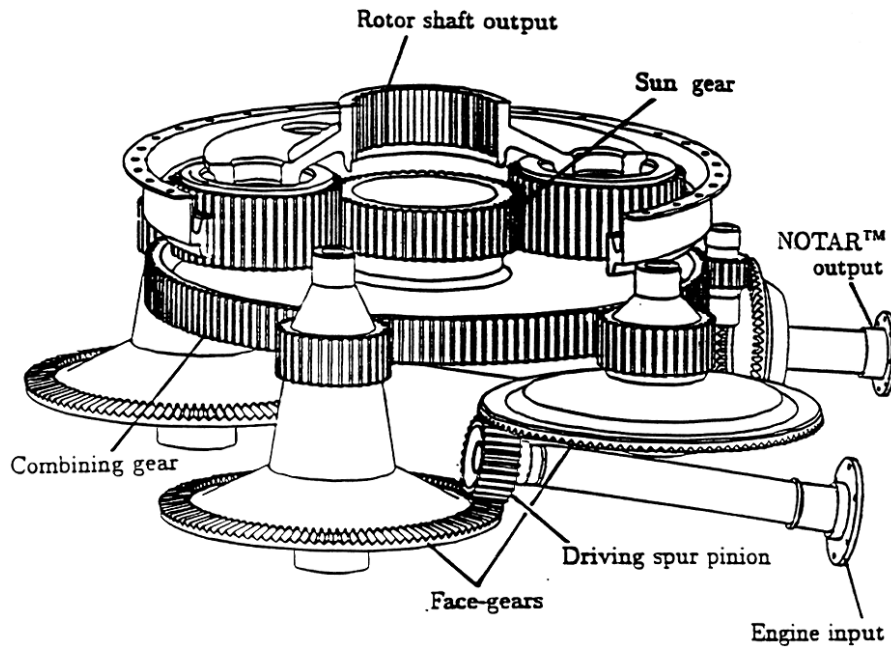


Figura 6.1.2: Aplicación de engranajes de cara en una transmisión utilizada en helicópteros.

es muy amplia [Litvin *et al.*, 1992; Handschuh *et al.*, 1992; Handschuh *et al.*, 1996; Zhang & W., 1996; Litvin *et al.*, 2000a; Litvin *et al.*, 2000d; Litvin *et al.*, 2001b; Litvin *et al.*, 2002a; Litvin *et al.*, 2002b; Litvin *et al.*, 2002c].

El método de fabricación del engranaje de cara está basado en la utilización de un cortador similar al piñón con el que engrana (véase Fig. 6.1.3). El número de dientes del cortador N_s es distinto del número de dientes del piñón N_1 ($N_s - N_1 = 2 \div 3$) con el fin de localizar el contacto entre el piñón y el engranaje de cara. La transmisión así diseñada presenta un camino de contacto según la dirección del perfil. Los errores de alineación producen el desplazamiento del camino de contacto pero no producen errores de transmisión.

La investigación desarrollada en el presente capítulo tiene un doble objetivo:

- (i) Modificar la geometría existente con el fin de conseguir una trayectoria



Figura 6.1.3: Ilustración del engrane entre el engranaje de cara y el cortador convencional.

longitudinal del camino de contacto. La desviación del camino de contacto de la dirección del perfil evita las áreas de contacto severo que se producen en la cabeza del diente con geometría convencional.

- (ii) Aplicar un proceso de rectificado en la generación del engranaje de cara basado en la utilización de un cortador sinfín. El proceso de rectificado permite la utilización de superficies endurecidas por tratamiento térmico y con ello aumentar la capacidad de transmisión de potencia. El proceso de rectificado mediante cortador sinfín ha sido estudiado anteriormente en el caso de engranajes rectos [Litvin *et al.*, 2000a]. En este trabajo se amplía su estudio a los engranajes helicoidales. La Figura 6.1.4 muestra

el cortador sinfín en engrane con el engranaje de cara.

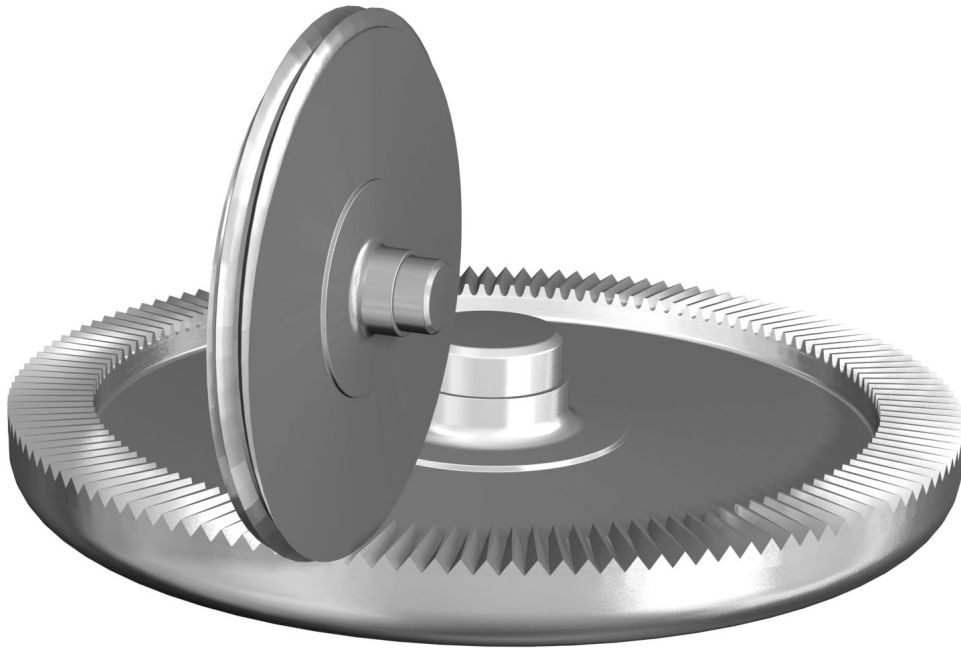


Figura 6.1.4: Ilustración del engrane entre el engranaje de cara y el cortador sinfín.

6.2. Geometría convencional y geometría propuesta

En la geometría existente o convencional de los engranajes de cara, la localización del contacto se obtiene como consecuencia de la aplicación de un cortador con un número de dientes N_s diferente del número de dientes del piñón N_1 . Normalmente $N_s - N_1 = 2 \div 3$. La superficie del engranaje de cara se obtiene como envolvente de la familia de superficies del cortador.

El análisis del contacto y el análisis de tensiones muestran que, en la geometría existente, el camino de contacto está orientado según la dirección del

perfil y el contacto en el borde es inevitable. En el presente capítulo se propone un nuevo tipo de geometría en el que la superficie del piñón y del cortador que genera el engranaje de cara se obtienen como envolvente de cremalleras con perfiles parabólicos. Las ideas desarrolladas han sido previamente aplicadas en engranajes de cara con piñón recto [Litvin *et al.*, 2002b] y se extienden en el presente trabajo a engranajes de cara con piñón helicoidal.

A continuación se describen ambos tipos de geometría.

6.2.1. Geometría convencional con perfiles de evolvente

La obtención de la superficie de evolvente del piñón (y del cortador) a partir de su cremallera está basada en las siguientes consideraciones:

- (1) La superficie generadora de la cremallera es un plano cuya orientación viene determinada por el ángulo β (Fig. 6.2.1(a)).
- (2) Las secciones normal y transversal de la cremallera vienen dadas por planos perpendiculares al plano Π según las direcciones $a - a$ y $b - b$, respectivamente (Fig. 6.2.1(a)). Los perfiles de la cremallera en la sección normal $a - a$ (Fig. 6.2.1(b)) y en la sección transversal $b - b$ son líneas rectas. Los espesores del diente s_o y del espacio entre dientes w_o (Fig. 6.2.1(b)) vienen relacionados por

$$s_o + w_o = \pi m_n \quad (6.2.1)$$

$$\frac{s_o}{w_o} = \lambda_c \quad (6.2.2)$$

donde m_n es el módulo en la sección normal y λ_c es el parámetro de espesor relativo. Normalmente, $\lambda_c = 1$.

- (3) Durante la generación (Fig. 6.2.1(c)), la cremallera y el piñón (cortador) describen movimientos relacionados por

$$s_c = r_{pi} \psi_i \quad (6.2.3)$$

donde r_{pi} es el radio del cilindro primitivo. En la Ec. (6.2.3), $i = 1$ en el caso del piñón e $i = s$ en el caso del cortador.

- (4) Los parámetros u_i (Fig. 6.2.1(b)) y l_i (Fig. 6.2.1(a)) representan los parámetros de superficie de la cremallera.

La superficie Σ_i ($i = 1, s$) del piñón (cortador) se obtiene como envolvente de la familia de superficies Σ_c en el sistema S_i ($i = 1, s$) y viene dada por

$$\mathbf{r}_i(u_i, l_i, \psi_i) = \mathbf{M}_{ic}(\psi_i)\mathbf{r}_c(u_i, l_i) \quad (i = 1, s) \quad (6.2.4)$$

$$f_{ci}(u_i, l_i, \psi_i) = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{v}_c^{(ci)} = 0 \quad (i = 1, s) \quad (6.2.5)$$

donde $\mathbf{r}_c(u_i, l_i)$ y \mathbf{n}_c representa la superficie de la cremallera y su normal unitaria, $\mathbf{r}_i(u_i, l_i, \psi_i)$ representa la familia de superficies de la cremallera, $f_{ci} = 0$ es la ecuación de engrane y $\mathbf{M}_{ic}(\psi_i)$ es la matriz de transformación de coordenadas.

6.2.2. Geometría propuesta

La geometría propuesta está basada en las siguientes ideas:

- (i) En la generación del piñón y del cortador se utilizan dos cremalleras diferentes denominadas Σ_{c1} y Σ_{cs} (Fig. 6.2.2). Para la definición de las mismas se utiliza la cremallera de referencia Σ_c , la cual corresponde a la cremallera convencional de perfiles rectos.
- (ii) Las cremalleras Σ_{c1} y Σ_{cs} están constituidas por perfiles parabólicos tangentes con el perfil recto de la cremallera convencional Σ_c . La Fig. 6.2.2(a) muestra una desviación exagerada de Σ_{c1} y Σ_{cs} respecto a Σ_c . Los perfiles parabólicos de un lado del diente de las cremalleras Σ_{cs} y Σ_{c1} se muestran en las Figs. 6.2.2(b) y (c). Los coeficientes parabólicos para las cremalleras del piñón y del cortador se designan por a_1 y a_s , respectivamente. La superficie de la cremallera Σ_{ci} ($i = 1, s$) se representa en el sistema de coordenadas S_c (Fig. 6.2.1(c)) mediante el vector $\mathbf{r}_c(u_i, l_i)$, cuyas componentes vienen dadas por

$$\begin{aligned} x_c(u_i, l_i) &= \frac{s_o}{2} \cos \alpha_n \operatorname{sen} \alpha_n + (u_i - u_o) \cos \alpha_n + a_i u_i^2 \operatorname{sen} \alpha_n \\ y_c(u_i, l_i) &= \left(\frac{s_o}{2} \cos^2 \alpha_n - (u_i - u_o) \operatorname{sen} \alpha_n + a_i u_i^2 \cos \alpha_n \right) \cos \beta - l_i \operatorname{sen} \beta \\ z_c(u_i, l_i) &= \left(\frac{s_o}{2} \cos^2 \alpha_n - (u_i - u_o) \operatorname{sen} \alpha_n + a_i u_i^2 \cos \alpha_n \right) \operatorname{sen} \beta + l_i \cos \beta \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

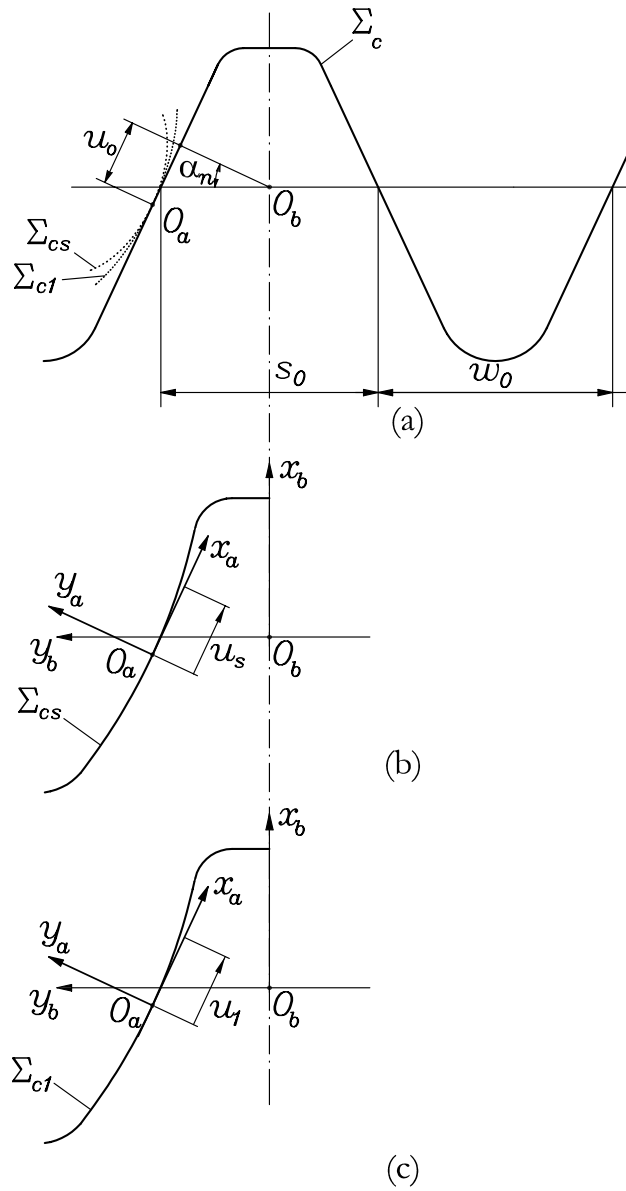


Figura 6.2.2: Ilustración de: (a) cremallera de referencia con perfiles rectos, (b) perfil parabólico de la cremallera del cortador, (c) perfil parabólico de la cremallera del piñón.

El parámetro u_o determina la posición del punto de tangencia entre los perfiles parabólicos y el perfil recto.

- (iii) Las superficies del piñón Σ_1 y del cortador Σ_s se obtienen como envolventes a las superficies de las cremalleras Σ_{c1} y Σ_{cs} , respectivamente. El proceso es similar al descrito anteriormente. En este caso, de la ecuación de engrane $f_{ci} = 0$ se deriva el siguiente valor del parámetro del movimiento ψ_i :

$$\psi_i(u_i, l_i) = \frac{[2a_i^2 u_i^3 + (1 + a_i s_o \cos \alpha_n) u_i - u_o] \cos \beta}{(\sin \alpha_n - 2a_i u_i \cos \alpha_n) r_{pi}} + \frac{[l_i \sin \alpha_n - 2a_i u_i l_i \cos \alpha_n] \sin \beta}{(\sin \alpha_n - 2a_i u_i \cos \alpha_n) r_{pi}} \quad (6.2.7)$$

Entonces, es posible representar Σ_i como

$$\mathbf{R}_i(u_i, l_i) = \mathbf{r}_i(u_i, l_i, \psi_i(u_i, l_i)) \quad (6.2.8)$$

La normal a Σ_i se determina como

$$\mathbf{N}_i(u_i, l_i) = \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial u_i} \times \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial l_i} \quad (6.2.9)$$

6.3. Generación del engranaje de cara

La superficie del engranaje de cara Σ_2 se obtiene como envolvente de la familia de superficies del cortador Σ_c . Dado que se han descrito dos tipos de geometría, la superficie del cortador Σ_s puede venir dada: (i) por las ecuaciones (6.2.4)-(6.2.5) en el caso de una superficie con perfil de evolvente, o (ii) por la ecuación (6.2.8). En ambos casos se debe considerar en dichas ecuaciones un subíndice $i = s$.

La Figura 6.3.1 representa de forma esquemática la generación del engranaje de cara. Los sistemas de coordenadas utilizados en la formulación de Σ_2 son los sistemas fijos S_m y S_a y los sistemas móviles S_2 y S_s . El parámetro L_0 se considera de forma que O_a se encuentra en la sección central del cortador. Los parámetros L_2 y L_1 determinan las dimensiones exterior e interior

del engranaje de cara y pueden ser determinados a partir de las condiciones de penetración y apuntamiento.

El ángulo γ_m es el ángulo entre ejes del cortador y el engranaje de cara. La distancia r_{ps} es el radio del cilindro primitivo del cortador. La distancia a_f constituye el adendo del engranaje de cara. El cortador y el engranaje de cara están sometidos a sendas rotaciones alrededor de los ejes z_a y z_m , respectivamente, y según la siguiente relación:

$$\frac{\psi_s}{\psi_2} = \frac{N_2}{N_s} \quad (6.3.1)$$

donde ψ_s es el ángulo de rotación del cortador y ψ_2 es el ángulo de rotación del engranaje de cara.

La superficie Σ_2 se determina mediante la consideración simultánea de las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{r}_2(u_s, l_s, \psi_s) = \mathbf{M}_{2s}(\psi_s)\mathbf{r}_s(u_s, l_s) \quad (6.3.2)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u_s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial l_s} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \psi_s} = f_{s2}(u_s, l_s, \psi_s) = 0 \quad (6.3.3)$$

El vector $\mathbf{r}_2(u_s, l_s, \psi_s)$ representa la familia de superficies del cortador Σ_s en el sistema S_2 . La ecuación $f_{s2} = 0$ representa la ecuación de engrane. Las ecuaciones (6.3.2) y (6.3.3) consideradas simultáneamente representan la superficie Σ_2 a través de tres parámetros relacionados. La ecuación de engrane puede ser determinada además como

$$\mathbf{N}_s \cdot \mathbf{v}_s^{(s2)} = f_{s2}(u_s, l_s, \psi_s) = 0 \quad (6.3.4)$$

donde \mathbf{N}_s es la normal a Σ_s representada en S_s y $\mathbf{v}_s^{(s2)}$ es la velocidad relativa representada en S_s .

Teniendo en cuenta que la superficie del cortador está formada por la superficie con perfil de evolvente y por la superficie de cabeza (Fig. 6.3.2(a)), la superficie del diente del engranaje de cara (Fig. 6.3.2(b)) estará formada por: (i) la superficie activa generada por la superficie de evolvente o por la superficie modificada de evolvente (según el tipo de geometría considerada), y (ii) por la superficie de acuerdo generada por la superficie de cabeza del cortador. La superficie de cabeza del cortador está definida por el arco de

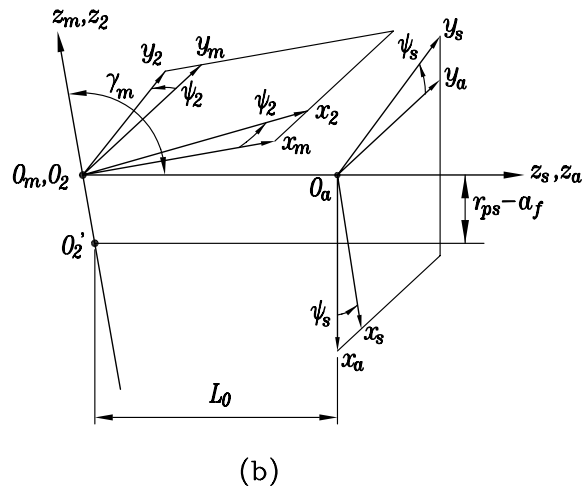
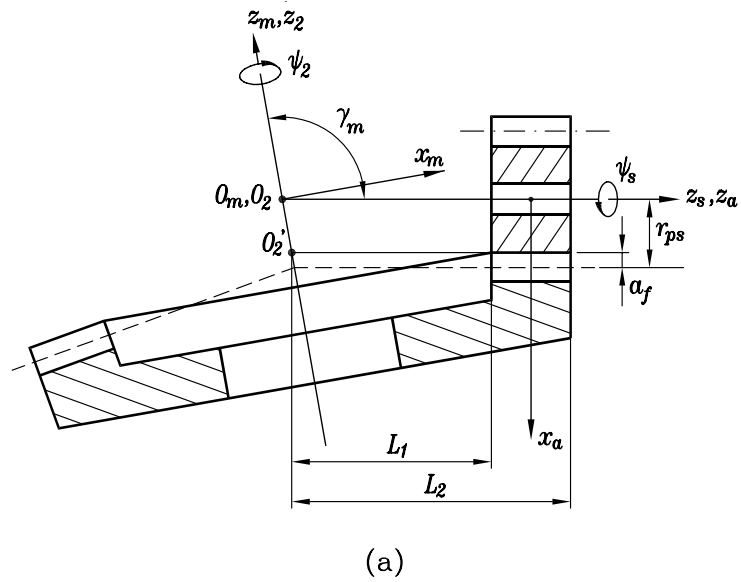


Figura 6.3.1: Sistemas de coordenadas utilizados en la determinación de la superficie del engranaje de cara Σ_2 : (a) sistemas fijos S_m y S_a ; (b) sistemas móviles S_s y S_2 .

radio ρ , el cual es tangente al círculo de adendo del cortador. La utilización de la superficie de cabeza del cortador definida según el radio ρ permite reducir las tensiones de flexión en el engranaje de cara [Litvin *et al.*, 2002b].

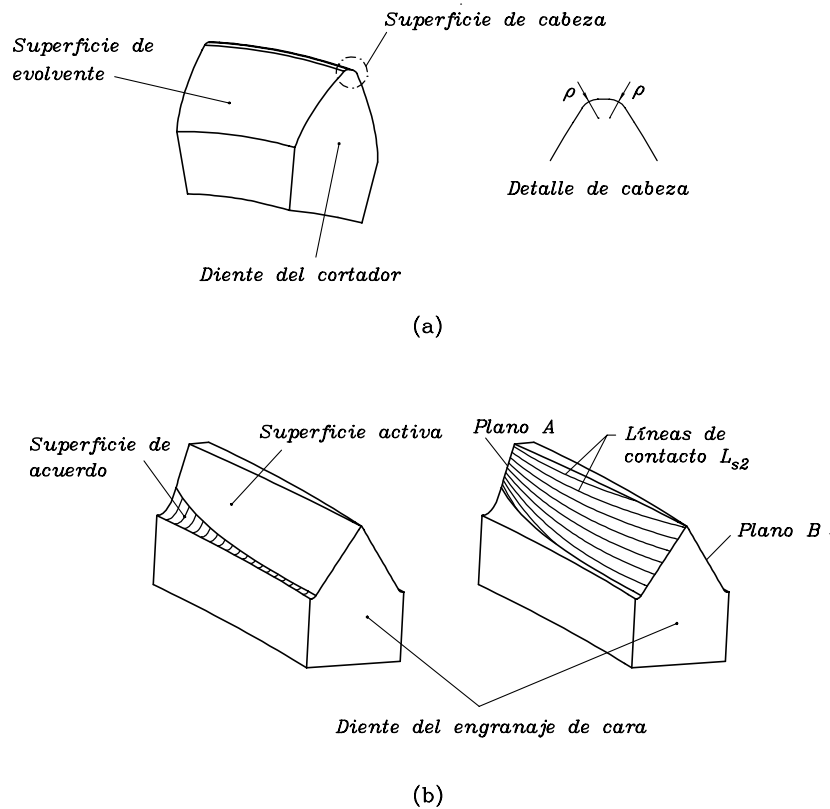


Figura 6.3.2: Estructura de las superficies del cortador y del engranaje de cara: (a) superficies de evolvente de círculo y de cabeza del cortador, (b) superficies activa y de acuerdo del engranaje de cara.

La longitud del diente del engranaje de cara viene limitada por las dimensiones L_1 y L_2 (Fig. 6.3.1(a)) con el fin de evitar la penetración en el plano A y el apuntamiento en el plano B (Fig. 6.3.2(b)).

Para evitar la penetración se debe considerar (véase Apartado 2.5):

- (i) La penetración está asociada a la presencia de puntos singulares en la superficie generada Σ_2 .

- (ii) Los puntos singulares son generados por puntos regulares de la superficie generadora Σ_s cuando la velocidad del punto de contacto en su movimiento sobre Σ_2 se hace igual a cero:

$$\mathbf{v}_r^{(2)} = \mathbf{v}_r^{(s)} + \mathbf{v}^{(s2)} = \mathbf{0} \quad (6.3.5)$$

- (iii) La Ec. (6.3.5) y la ecuación diferencial de engrane

$$\frac{d}{dt}[f_{s2}(u_s, l_s, \psi_s)] = 0 \quad (6.3.6)$$

permiten obtener un sistema de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas: du_s/dt y dl_s/dt . El sistema tiene solución si la matriz del sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial u_s} & \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial l_s} & -\mathbf{v}_s^{(s2)} \\ \frac{\partial f_{s2}}{\partial u_s} & \frac{\partial f_{s2}}{\partial l_s} & -\frac{\partial f_{s2}}{\partial \psi_s} \frac{d\psi_s}{dt} \end{bmatrix} \quad (6.3.7)$$

tiene rango $r = 2$. Esto permite obtener la ecuación

$$F_{s2}(u_s, l_s, \psi_s) = 0 \quad (6.3.8)$$

- (iv) La ecuación de engrane (6.3.4) y la ecuación (6.3.8) permiten obtener sobre la superficie Σ_s una línea de puntos regulares L_s que generan puntos singulares en Σ_2 . La limitación de la superficie Σ_s por la línea L_s permite evitar la aparición de puntos singulares en Σ_2 . Limitando la superficie del cortador con el plano A (Fig. 6.3.3) se evita la aparición de la línea L_s sobre la superficie de cortador, obteniéndose el valor mínimo de L_1 .

El apuntamiento en el engranaje de cara significa que el ancho de cabeza es cero. La máxima longitud L_2 se obtiene considerando la condición de que las superficies activas de ambos lados del diente se intersectan.

La longitud máxima del diente del engranaje de cara viene dada por la diferencia $L_2 - L_1$ y se puede expresar mediante el coeficiente adimensional

$$c = \frac{L_2 - L_1}{m_n} \quad (6.3.9)$$

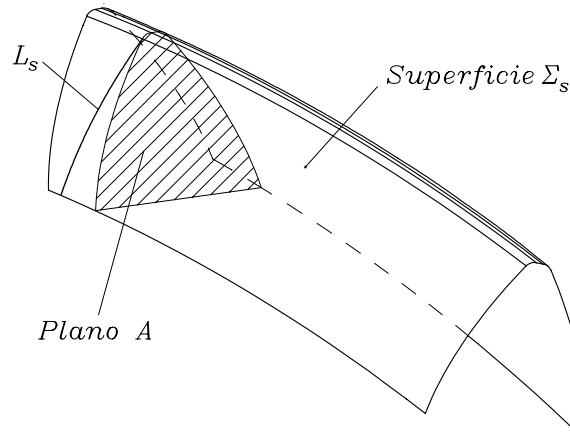


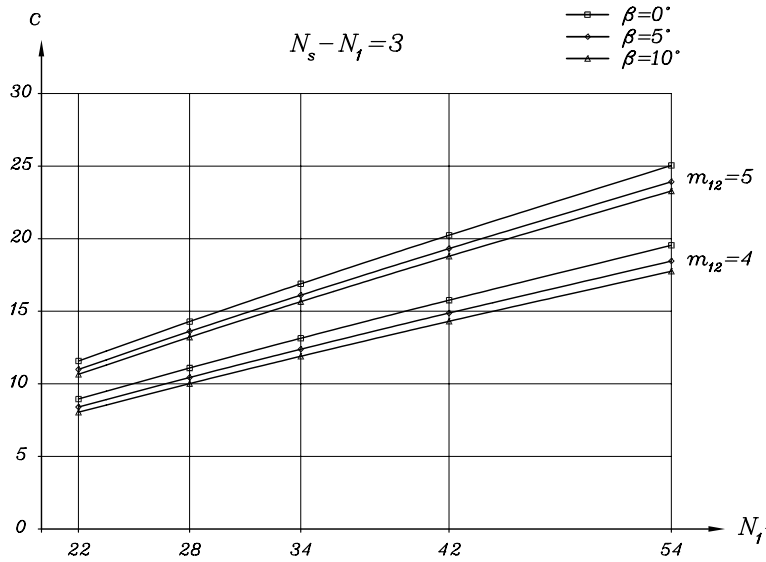
Figura 6.3.3: Línea límite L_s sobre la superficie del cortador que genera puntos singulares sobre la superficie Σ_2 .

El coeficiente c depende de la relación de transmisión m_{12} y del ángulo de hélice. La Figura 6.3.4 muestra que el ángulo de hélice afecta ligeramente al coeficiente c . Dicho coeficiente ha sido determinado teniendo en cuenta que en una transmisión helicoidal la zona cóncava del diente es la que limita la longitud L_1 . Las condiciones de penetración en la zona convexa dan valores más pequeños de L_1 . Los datos considerados en la Fig. 6.3.4 son: $\alpha_n = 27,5^\circ$, $\lambda_c = 1,0$, $m_n = 3,175$ mm, $\gamma_m = 90^\circ$.

6.4. Análisis del contacto (TCA)

El análisis del contacto o TCA permite simular el engrane entre las superficies del piñón helicoidal Σ_1 y del engranaje de cara Σ_2 considerando el efecto de los errores de alineación en los errores de transmisión y en el desplazamiento del camino de contacto. El algoritmo del TCA está basado en la condición de tangencia de las superficies Σ_1 y Σ_2 durante el engrane (véase Fig. 2.9.1).

El TCA ha sido aplicado en las dos versiones de geometría consideradas: (a) basada en superficies de evolvente, (b) basada en superficies conjugadas de cremalleras con perfil parabólico.

Figura 6.3.4: Variación del coeficiente adimensional c .

El programa de TCA está basado en las siguientes consideraciones:

- (i) La superficie helicoidal del piñón Σ_1 y su normal unitaria vienen dadas en el sistema S_1 por

$$\mathbf{r}_1(u_1, l_1), \quad \mathbf{n}_1(u_1, l_1) \quad (6.4.1)$$

De forma análoga, la superficie del engranaje de cara Σ_2 y su normal unitaria vienen dadas en S_2 por los vectores

$$\mathbf{r}_2(u_s, l_s, \psi_s), \quad \mathbf{n}_2(u_s, l_s, \psi_s) \quad (6.4.2)$$

y la ecuación de engrane entre el cortador y el engranaje de cara

$$f_{2s}(u_s, l_s, \psi_s) = 0 \quad (6.4.3)$$

- (ii) Además de los sistemas de coordenadas S_1 y S_2 rígidamente conectados al piñón y al engranaje de cara, respectivamente, se considera el sistema fijo S_f donde se considera el engrane entre Σ_1 y Σ_2 .

- (iii) La condición de tangencia de las superficies Σ_1 y Σ_2 en el sistema S_f viene dada por

$$\mathbf{r}_f^{(1)}(u_1, l_1, \phi_1) - \mathbf{r}_f^{(2)}(u_s, l_s, \psi_s, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (6.4.4)$$

$$\mathbf{n}_f^{(1)}(u_1, l_1, \phi_1) - \mathbf{n}_f^{(2)}(u_s, l_s, \psi_s, \phi_2) = \mathbf{0} \quad (6.4.5)$$

$$f_{s2}(u_s, l_s, \psi_s) = 0 \quad (6.4.6)$$

- (iv) El sistema de ecuaciones (6.4.4)-(6.4.6) contiene seis ecuaciones no lineales independientes y siete incógnitas, dado que $|\mathbf{n}_f^{(1)}| = |\mathbf{n}_f^{(2)}| = 1$. El Jacobiano del sistema de ecuaciones es distinto de cero dado que las superficies Σ_1 y Σ_2 son tangentes en un punto. Usando el teorema de existencia de la función implícita [Korn & Korn, 1968], se obtiene la solución del sistema de ecuaciones (6.4.4)-(6.4.6) como función del parámetro ϕ_1 . La solución se obtiene mediante un proceso iterativo basado en el método de Newton-Raphson.

En las Figs. 6.4.1(a) y 6.4.1(d) se representan los sistemas de coordenadas S_1 , S_2 y S_f . Los sistemas de coordenadas auxiliares S_a , S_b , y S_c (Figs. 6.4.1(b), (c) y (d)) se utilizan para la simulación de los errores de alineación $\Delta\gamma_m$, ΔE y Δq . La magnitud B representa la distancia entre centros entre el cortador y el piñón y viene dada por

$$B = \frac{m_n}{2} \cdot \frac{N_s - N_1}{\cos \beta} \quad (6.4.7)$$

Los resultados obtenidos del TCA en los dos tipos de geometría obtenidos son:

Caso 1: Las superficies de los dientes de piñón y cortador presentan perfiles de evolvente.

- (i) La trayectoria del contacto está orientada en la dirección del perfil tanto en una transmisión con piñón helicoidal como con piñón recto.
- (ii) Los errores de alineación $\Delta\gamma$ correspondiente al ángulo entre ejes, Δq correspondiente al desplazamiento axial del engranaje de cara y ΔE correspondiente a la distancia entre ejes no producen errores de transmisión.

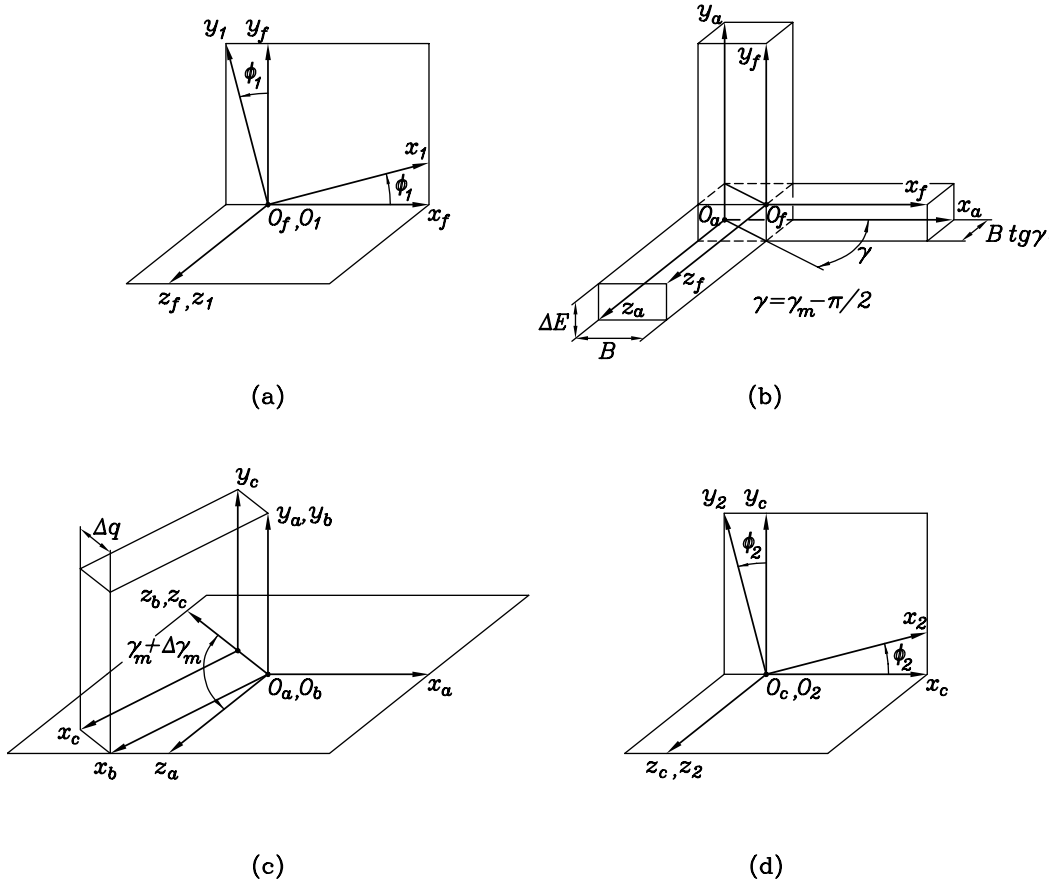


Figura 6.4.1: Sistemas de coordenadas utilizados en la simulación del engrane: (a) sistemas S_1 y S_f ; (b) sistemas S_f y S_a ; (c) sistemas S_a , S_b y S_c ; (d) sistemas S_c y S_2 .

- (iii) No obstante, los errores de alineación antes mencionados producen el desplazamiento del camino de contacto. El desplazamiento axial Δq del engranaje de cara y el desplazamiento ΔE del piñón respecto del engranaje de cara pueden utilizarse para desplazar el contacto a la posición original.

Caso 2: Las superficies de los dientes de piñón y cortador se determinan como envolventes de cremalleras con perfiles parabólicos.

- (i) Existe un fenómeno de asimetría en la formación del contacto el cual es más evidente cuando el ángulo de hélice es mayor (véase Fig. 6.4.2).

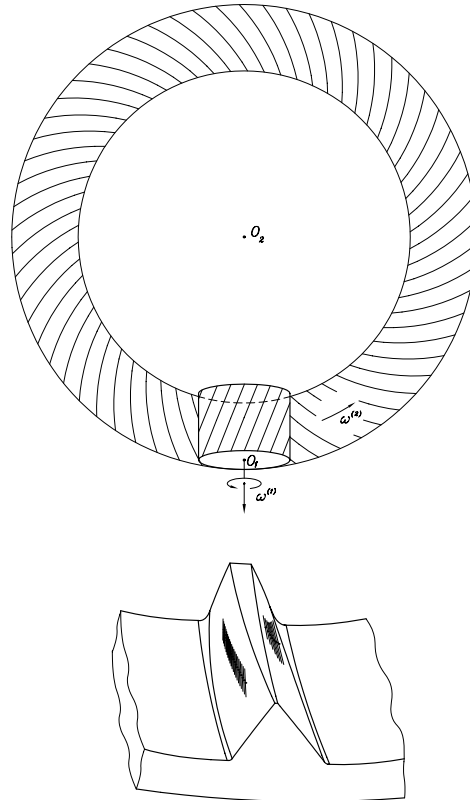


Figura 6.4.2: Contacto asimétrico en una transmisión de engranaje de cara con piñón helicoidal en la segunda versión de geometría.

- (ii) El camino de contacto está orientado en la parte convexa según la dirección longitudinal y ésta representa la ventaja más importante de este tipo de geometría.
- (iii) Se evita el contacto en el borde, como se demostrará en el Apartado 6.8 sobre análisis de tensiones.
- (iv) En el nuevo tipo de geometría aparece una función de errores de trans-

misión de tipo parabólico y con un nivel máximo de error (Fig. 6.4.3).

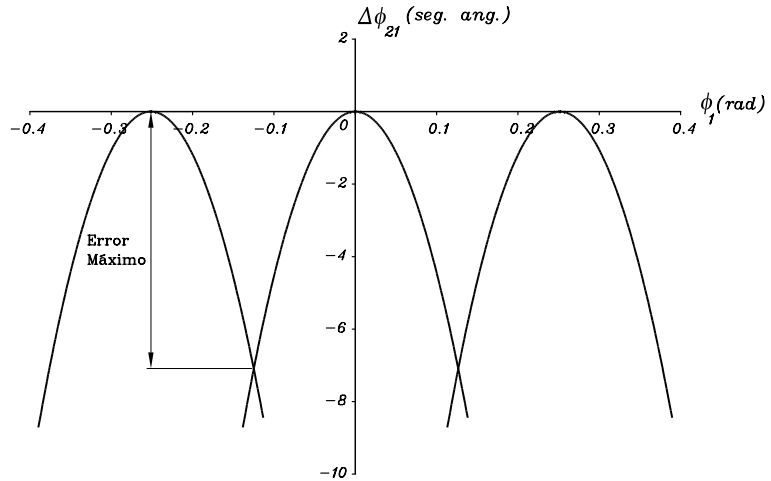


Figura 6.4.3: Función de errores de transmisión.

- (v) El camino de contacto puede ser optimizado mediante la variación de la diferencia entre los coeficientes de parábola de los perfiles de las cremalleras del piñón y del cortador. La Fig. 6.4.4(a) muestra el camino de contacto obtenido para los siguientes valores de los coeficientes de parábola: $a_s = 0,003 \text{ mm}^{-1}$ en la cremallera del cortador y $a_1 = 0,002 \text{ mm}^{-1}$ en la cremallera del piñón. La Fig. 6.4.4(b) muestra el desplazamiento del camino de contacto debido a un error $\Delta\gamma = 3 \text{ min. ang.}$. En la Fig. 6.4.4(c) se ha desplazado el contacto a la posición original utilizando el desplazamiento Δq .
- (vi) El abombamiento longitudinal del piñón utilizando, por ejemplo, un disco de rectificad, permite disminuir la sensibilidad de la transmisión a los errores de alineación. La Fig. 6.4.4(d) muestra que el desplazamiento del contacto debido al mismo error $\Delta\gamma = 3 \text{ min. ang.}$ que el mostrado en la Fig. 6.4.4(b) es menor. En este caso se utilizó un coeficiente $a_{pl} = 0,0001 \text{ mm}^{-1}$ en la función parabólica de la distancia entre los ejes del disco y del piñón durante el proceso de generación.

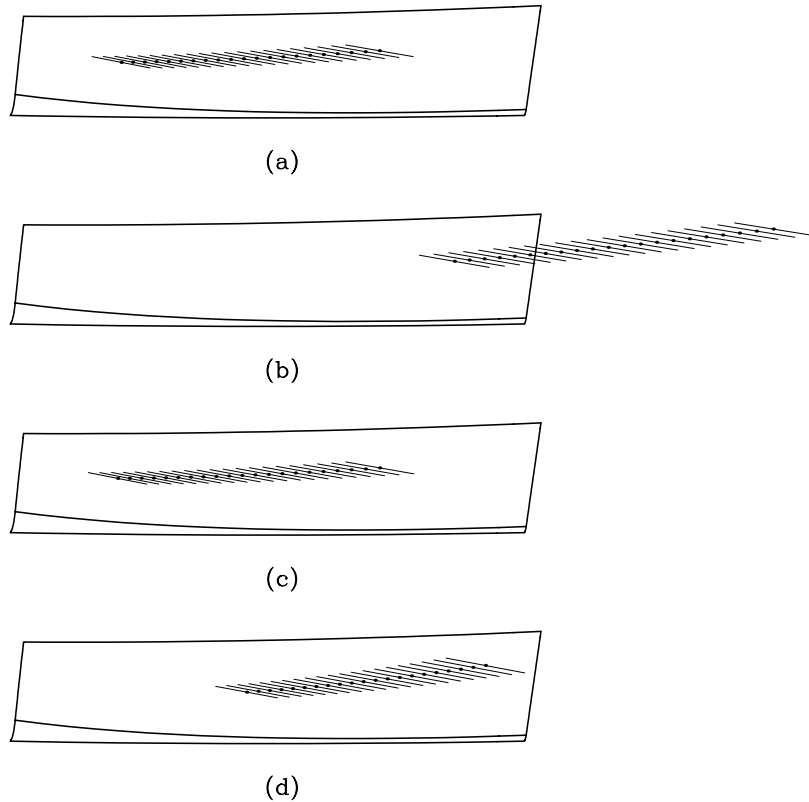


Figura 6.4.4: Caminos de contacto en los siguientes casos: (a) sin errores de alineación; (b) con un error $\Delta\gamma = 3$ min.ang.; (c) desplazamiento axial $\Delta q = -0,65$ mm aplicado para restablecer el camino de contacto; (d) error $\Delta\gamma = 3$ min.ang. y aplicación de un abombamiento longitudinal en el piñón.

6.5. Diseño del cortador sinfín

El diseño del cortador sinfín para el rectificado del engranaje de cara permite la aplicación de materiales endurecidos. También es posible utilizar el cortador sinfín como herramienta de corte en lugar del cortador convencional.

El diseño del cortador sinfín exige:

- (i) Diseño del cortador sinfín considerando los dos tipos de geometría.
- (ii) Estudio de las singularidades de superficie.

- (iii) Limitaciones del cortador sinfín debido al ángulo de hélice.
- (iv) Determinación de la superficie del engranaje de cara generada por el cortador sinfín.

6.5.1. Ángulo entre ejes del cortador convencional y el cortador sinfín

La determinación del ángulo entre ejes se obtiene como sigue:

- (i) Las superficies Σ_s del cortador convencional, Σ_w del cortador sinfín y Σ_2 del engranaje de cara tienen un punto de tangencia común P , el cual pertenece a las superficies primitivas del cortador convencional, del cortador sinfín y del engranaje de cara (Fig. 6.5.1).
- (ii) La distancia más corta entre ejes E_{ws} (Fig. 6.5.1) viene dada por

$$E_{ws} = r_{pw} - r_{ps} \quad (6.5.1)$$

donde r_{ps} y r_{pw} son los correspondientes radios primitivos.

- (iii) La velocidad de deslizamiento y el vector \mathbf{i}_t tangente común a las hélices del cortador convencional y del cortador sinfín son colineales. Considerando la igualdad de los pasos normales en ambos elementos se obtiene:

$$\gamma_{ws} = 90^\circ - \beta \pm \lambda_w \quad (6.5.2)$$

$$\lambda_w = \arcsen \frac{r_{ps} N_w \cos \beta}{N_s (E_{ws} + r_{ps})} \quad (6.5.3)$$

donde N_s y N_w son los números de dientes del cortador convencional y el número de filetes del cortador sinfín. El signo superior e inferior en la ecuación (6.5.2) corresponden a la utilización de un cortador a derechas y otro a izquierdas, respectivamente.

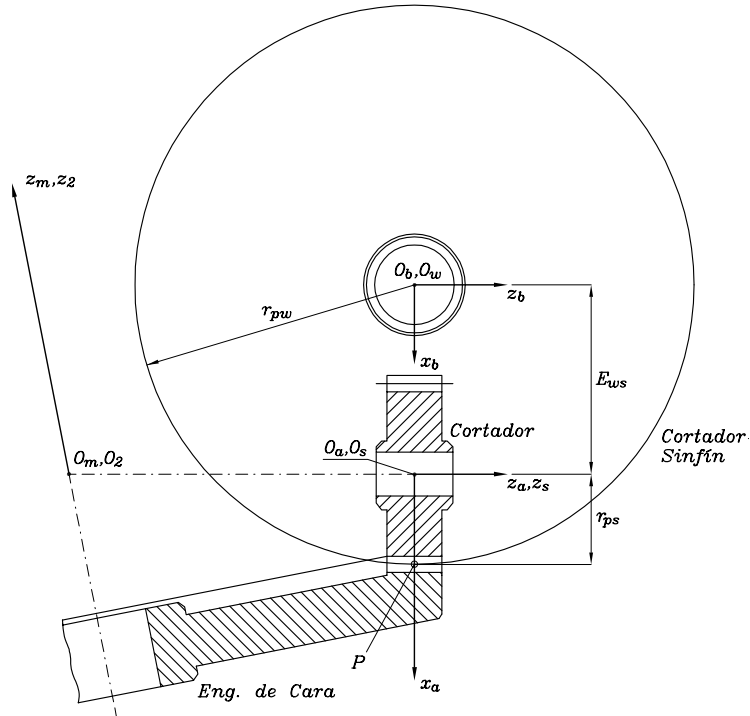


Figura 6.5.1: Tangencia del engranaje de cara, el cortador convencional y el cortador sinfín en el punto P .

6.5.2. Generación de la superficie del cortador sinfín Σ_w

La superficie del cortador sinfín Σ_w se obtiene como envolvente de la familia de superficies del cortador convencional Σ_s . La superficie Σ_w viene dada en el sistema de coordenadas S_w por:

$$\mathbf{r}_w(u_s, l_s, \psi_s) = \mathbf{M}_{ws}(\psi_s) \mathbf{r}_s(u_s, l_s) \quad (6.5.4)$$

$$\mathbf{N}_s \cdot \mathbf{v}_s^{(sw)} = f_{sw}(u_s, l_s, \psi_s) = 0 \quad (6.5.5)$$

El vector $\mathbf{r}_s(u_s, l_s)$ representa la superficie del cortador convencional. La matriz $\mathbf{M}_{ws}(\psi_s)$ es la matriz de transformación de coordenadas del sistema S_s al sistema S_w (Fig. 6.5.2). El vector $\mathbf{r}_w(u_s, l_s, \psi_s)$ representa en el sistema S_w la familia de superficies Σ_s del cortador convencional. La Ec. (6.5.5) es la ecuación de engrane entre las superficies del cortador convencional y del

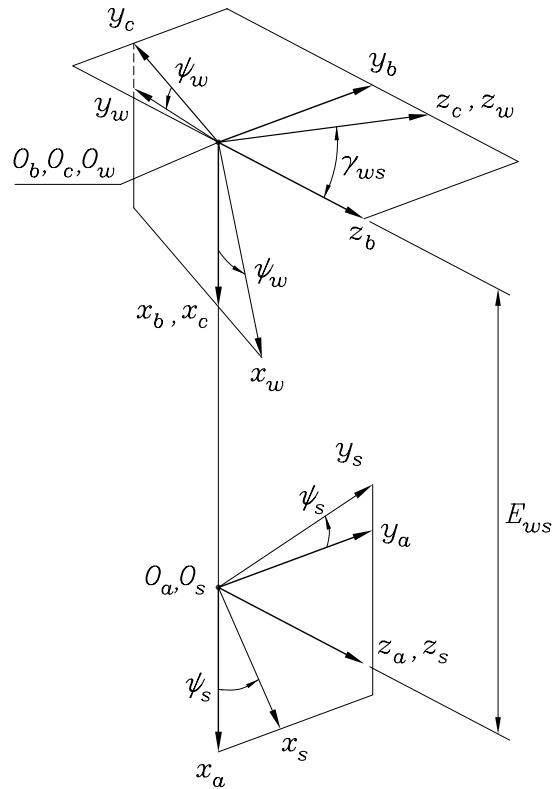


Figura 6.5.2: Sistemas de coordenadas utilizados en la determinación de la superficie del cortador sinfín.

cortador sinfín. El parámetro ψ_s es el parámetro generalizado del movimiento considerando que el cortador convencional y el cortador sinfín presentan movimientos de rotación alrededor de los ejes z_a y z_c . Ambas rotaciones están relacionadas por la siguiente ecuación

$$\frac{\psi_s}{\psi_w} = \frac{N_w}{N_s} \quad (6.5.6)$$

Las ecuaciones (6.5.4) y (6.5.5) consideradas simultáneamente representan la superficie del cortador sinfín a través de tres parámetros relacionados (u_s, l_s, ψ_s). La Fig. 6.5.3 muestra el engrane simultáneo del engranaje de cara, el cortador convencional y el cortador sinfín.

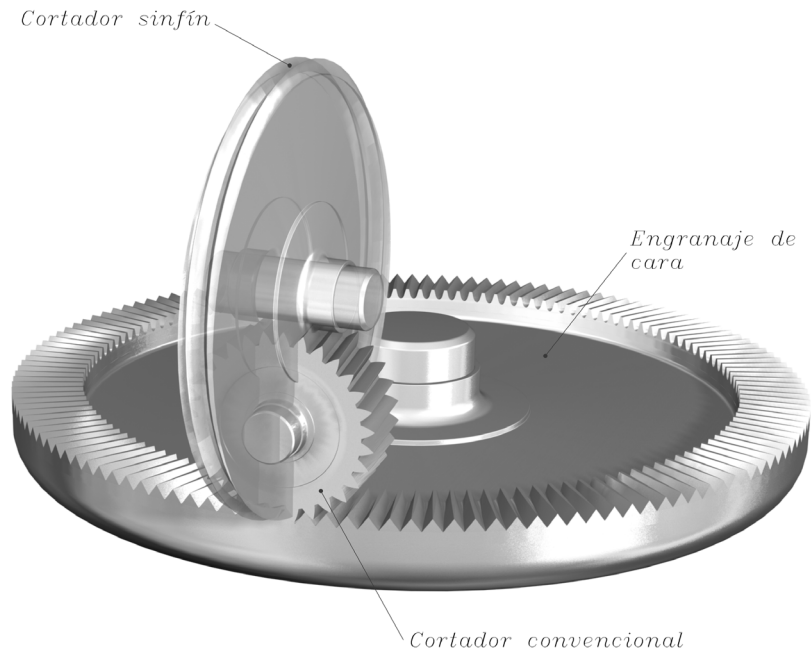


Figura 6.5.3: Ilustración del engranaje simultáneo del cortador sinfín, el cortador convencional y el engranaje de cara.

6.6. Singularidades del cortador sinfín

El procedimiento para obtener las singularidades en el cortador sinfín es similar al representado en la Sección 6.3.

El procedimiento desarrollado está basado en las siguientes consideraciones:

- (i) El cortador convencional y el cortador sinfín se encuentran en contacto lineal y las líneas de contacto se han representado en el plano de parámetros (u_s, l_s) del cortador convencional (Fig. 6.6.1).
- (ii) Se obtiene una línea instantánea de contacto para cada valor considerado del parámetro ψ_s .
- (iii) Utilizando el procedimiento de determinación de singularidades, se puede determinar la línea de penetración constituida por puntos regulares en

el cortador convencional que generan puntos singulares en el cortador sinfín.

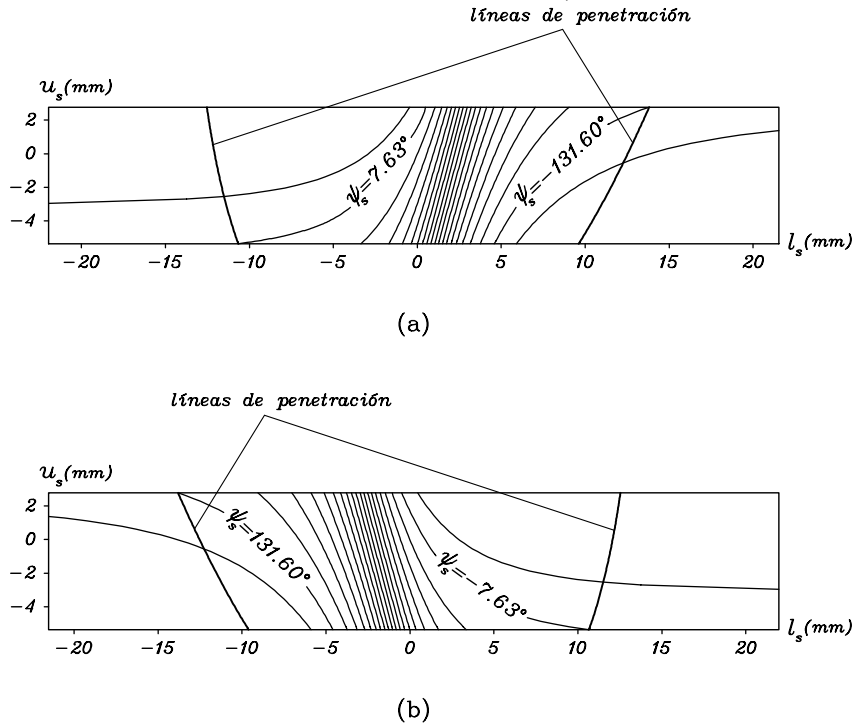


Figura 6.6.1: Líneas de contacto y penetración correspondientes a la generación de un cortador sinfín por un cortador convencional con un ángulo de hélice de 5° : (a) lado conductor, y (b) lado conducido.

El área entre las dos líneas de penetración está libre de singularidades y los valores del parámetro ψ_s en dicha área están permitidos. La rotación máxima ψ_s debe ser mayor que $2\pi/N_s$, que representa el ángulo de giro correspondiente a un diente del cortador convencional.

En el caso de un valor elevado del ángulo de hélice, puede resultar que la rotación máxima de ψ_s sea inferior a $2\pi/N_s$, con lo que el ángulo de rotación del cortador sinfín será inferior a $2\pi/N_w$, donde N_w es el número de filetes del cortador sinfín. Esto significa que la superficie del cortador sinfín necesaria para la generación presenta singularidades.

La disminución del ángulo de hélice o del diámetro del cortador sinfín permiten obtener un cortador sinfín cuya superficie necesaria para la generación está libre de singularidades. La Fig. 6.6.2(b) muestra un cortador sinfín con un diámetro inferior al del cortador convencional con el fin de evitar las singularidades. Las líneas de contacto y de penetración se han representado en el plano de parámetros del cortador convencional en la Fig. 6.6.3 para este caso, el cual muestra la existencia de la envolvente E a las líneas de contacto.

El gráfico de la Fig. 6.6.4 muestra el ángulo de hélice permisible en el cortador como función del ratio r_{pw}/r_{ps} . Los datos de diseño considerados se muestran en la Tabla 6.6.1. El incremento de área corresponde a la utilización de la geometría modificada en el cortador convencional, donde se ha utilizado un abombamiento basado en una función parabólica con un valor del coeficiente $a_s = 0,003 \text{ mm}^{-1}$.

Tabla 6.6.1: Parámetros de diseño del cortador sinfín.

Número de dientes del cortador convencional, N_s	30
Número de dientes del engranaje de cara, N_2	140
Número de filetes del cortador sinfín, N_w	1
Módulo, m_n	3,175 mm
Ángulo de presión normal, α_n	27,5°
Parámetro de espesor relativo, λ_c	0,95

6.7. Generación del engranaje de cara a partir del cortador sinfín

La generación del engranaje de cara que engranará con el piñón se obtiene normalmente a partir de un cortador convencional. A continuación se presenta la generación del engranaje de cara a partir del cortador sinfín. Dicha generación está basada en el engrane simultáneo del cortador sinfín, el cortador convencional y el engranaje de cara (Fig. 6.5.3) teniendo en cuenta lo siguiente.



(a)



(b)

Figura 6.6.2: Ilustración del engrane de: (a) el cortador convencional y el engranaje de cara y (b), el cortador sinfín y el engranaje de cara donde el diámetro del cortador sinfín es inferior al del cortador convencional.

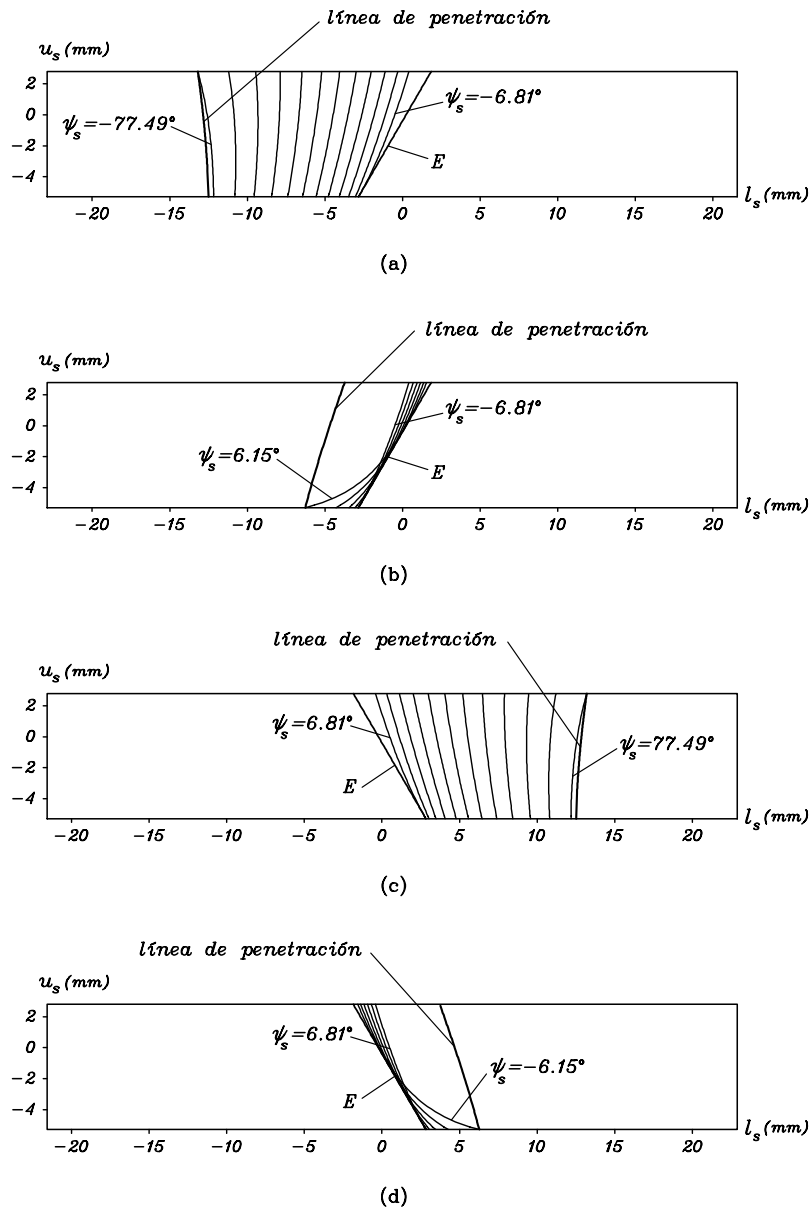


Figura 6.6.3: Líneas de contacto, penetración y envolvente E a la familia de líneas de contacto: (a) y (b), líneas de contacto en el lado conductor correspondiendo a dos regiones, donde cada región está limitada por una de las líneas de penetración y la envolvente; (c) y (d) líneas de contacto en el lado conducido para dos regiones similares.

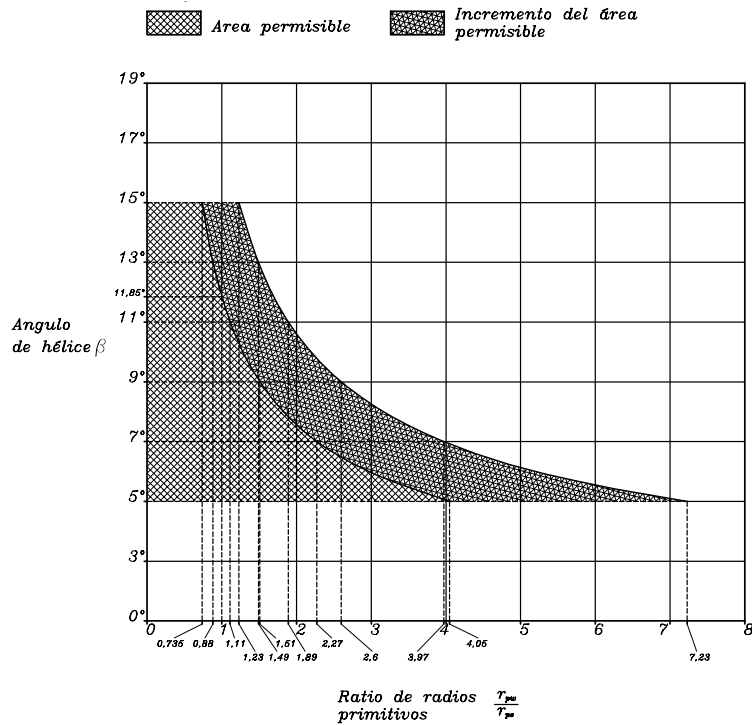


Figura 6.6.4: Relación entre el ángulo de hélice y el ratio de los radios primitivos del cortador sinfín y el cortador convencional con el fin de obtener un filete del cortador sinfín libre de singularidades.

La superficie del cortador convencional Σ_s presenta contacto lineal con la superficie del engranaje de cara Σ_2 y con la superficie del cortador sinfín Σ_w . Las líneas L_{s2} y L_{sw} indican las líneas de tangencia de las superficies Σ_s y Σ_2 , y de las superficies Σ_s y Σ_w , respectivamente (Figs. 6.7.1(a) y (b)). Sin embargo, las superficies del cortador sinfín Σ_w y del engranaje de cara Σ_2 se encuentran en contacto puntual en cada instante dado que las líneas L_{s2} y L_{sw} no coinciden sino que se intersectan (Fig. 6.7.1(c)).

Si consideramos ahora que el cortador sinfín y el engranaje de cara giran en torno a sus respectivos ejes según la siguiente ecuación

$$\frac{\psi_w}{\psi_2} = \frac{N_2}{N_w}, \quad (6.7.1)$$

debido a la tangencia en un punto entre Σ_w y Σ_2 , el cortador sinfín generará

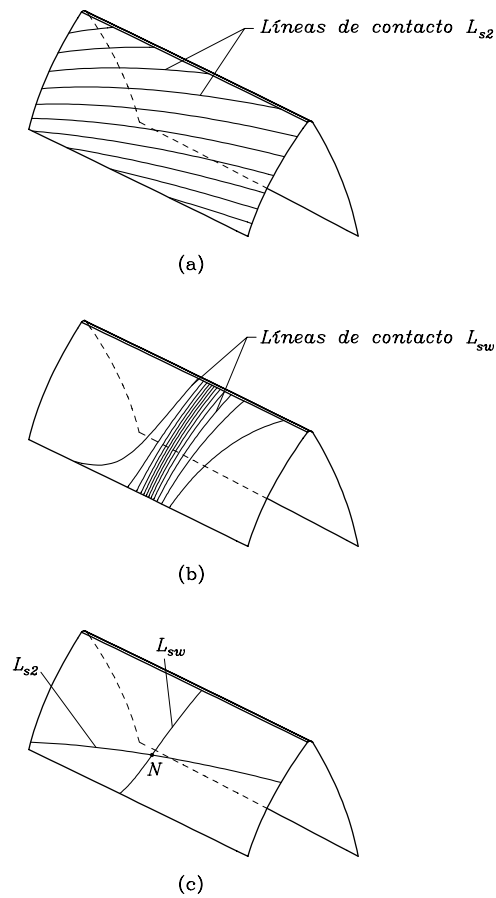


Figura 6.7.1: Líneas de contacto sobre la superficie del cortador convencional Σ_s : (a) líneas de contacto L_{s2} entre Σ_s y Σ_2 , (b) líneas de contacto L_{sw} entre Σ_s y Σ_w , (c) líneas de contacto L_{s2} y L_{sw} para un determinado valor del parámetro del movimiento.

un línea sobre la superficie Σ_2 .

La generación de la superficie completa Σ_2 a partir del cortador sinfín requiere la aplicación de un proceso de doble envolvente basado en las siguientes ideas:

- (1) El cortador sinfín, el cortador convencional y el engranaje de cara engranan simultáneamente, como se representa en la Fig. 6.5.3. El cortador sinfín y el engranaje de cara presentan movimientos de rotación

relacionados por la Ec. (6.7.1). Sin embargo dichos movimientos no son capaces de generar la superficie completa del engranaje de cara.

- (2) La superficie completa del engranaje de cara se obtiene si se aporta al cortador sinfín un movimiento de alimentación respecto al engranaje de cara.

El movimiento de alimentación significa que la posición del cortador sinfín varía durante el proceso de generación. El cortador sinfín genera en cada posición una línea sobre la superficie del engranaje de cara.

- (3) Las distintas posiciones del cortador sinfín, el cortador convencional y el engranaje de cara se realizan de la siguiente forma:

- (i) El cortador sinfín se traslada en la dirección del eje del cortador convencional la magnitud Δl_w y, simultáneamente, el cortador convencional gira el ángulo $\Delta \psi_s$ (Fig. 6.7.2). Las magnitudes Δl_w y $\Delta \psi_s$ son componentes del movimiento helicoidal que el cortador sinfín realiza alrededor del eje del cortador convencional y están relacionadas como

$$\frac{\Delta l_w}{\Delta \psi_s} = p_s \quad (6.7.2)$$

donde p_s es el parámetro de helicoides del cortador convencional.

La ecuación (6.7.2) permite que las superficies Σ_w y Σ_s sean tangentes en cada posición del cortador sinfín.

- (ii) La tangencia simultánea de las tres superficies en cada posición del cortador sinfín requiere que el engranaje de cara gire un ángulo adicional $\Delta \psi_2$, el cual se determina como

$$\Delta \psi_2 = \Delta \psi_s \cdot \frac{N_s}{N_2} = \frac{\Delta l_w}{p_s} \cdot \frac{N_s}{N_2} \quad (6.7.3)$$

- (4) La obtención de la superficie del engranaje de cara a partir del cortador sinfín se puede representar como un proceso continuo de doble envolvente basado en la aplicación de dos conjuntos independientes de parámetros:

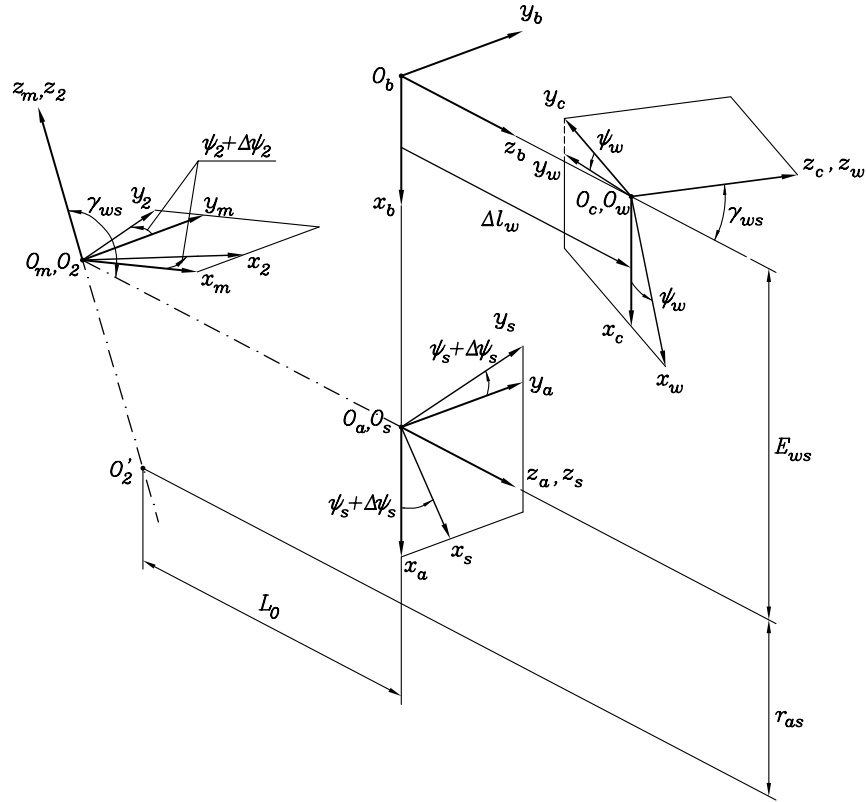


Figura 6.7.2: Sistemas de coordenadas utilizados en la generación del engranaje de cara por un cortador sinfín.

- (i) El conjunto de parámetros (ψ_w, ψ_2) relacionados por la ecuación (6.7.1).
- (ii) El conjunto de parámetros $(\Delta l_w, \Delta \psi_2)$ relacionados por la ecuación (6.7.3).

La superficie Σ_2 del engranaje de cara se determina como envolvente a una familia biparamétrica de superficies del cortador sinfín y viene representada por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{r}_2(u_s, \psi_s, \psi_w, \Delta l_w) = \mathbf{M}_{2w}(\psi_w, \Delta l_w) \mathbf{R}_w(u_s, \psi_s) \quad (6.7.4)$$

$$\mathbf{N}_w \cdot \mathbf{v}_w^{(w2, \psi_w)} = f_{w2}^{(1)}(u_s, \psi_s, \psi_w, \Delta l_w) = 0 \quad (6.7.5)$$

$$\mathbf{N}_w \cdot \mathbf{v}_w^{(w2, \Delta l_w)} = f_{w2}^{(2)}(u_s, \psi_s, \psi_w, \Delta l_w) = 0 \quad (6.7.6)$$

La ecuación vectorial $\mathbf{r}_2(u_s, \psi_s, \psi_w, \Delta l_w)$ representa en el sistema de coordenadas S_2 la familia de superficies del filete del cortador sinfín; las Ecs. (6.7.5) y (6.7.6) representan las ecuaciones de engrane; (u_s, ψ_s) son los parámetros de superficie del cortador sinfín; ψ_w y Δl_w son los parámetros independientes del movimiento; \mathbf{N}_w es la normal a la superficie del cortador sinfín en el punto de contacto; el vector $\mathbf{v}_w^{(w2, \psi_w)}$ representa la velocidad relativa entre el cortador sinfín y el engranaje de cara cuando el parámetro ψ_w varía y el parámetro Δl_w se mantiene fijo; el vector $\mathbf{v}_w^{(w2, \Delta l_w)}$ representa la velocidad relativa entre el cortador sinfín y el engranaje de cara cuando el parámetro Δl_w varía y el parámetro ψ_w es fijo. Ambos vectores de velocidad relativa, así como la normal, están representados en el sistema S_w . Los sistemas de coordenadas utilizados están representados en la Fig. 6.7.2. La superficie obtenida coincide con la generada a partir del cortador convencional.

6.8. Análisis tensional

Los objetivos del análisis tensional son:

- (i) Estudio de la formación del contacto a lo largo del ciclo de engrane.
- (ii) Comparación de los estados tensionales de contacto y flexión en las dos versiones de geometría (ver Apartado 6.2).

El análisis de tensiones está basado en el método de los elementos finitos [Zienkiewicz & Taylor, 2000] y en la aplicación de un programa de elementos finitos de uso general [Hibbit, Karlsson & Sirensen, Inc., 1998].

El procedimiento para la construcción del modelo ya ha sido presentado en el Capítulo 2. Los modelos se determinan considerando las ecuaciones de las superficies de los dientes. Las Figs. 6.8.1(a) y (b) muestran los modelos de elementos finitos para un diente del piñón y otro diente del engranaje de cara. La generación del modelo del engranaje de cara debe considerar la estructura peculiar del diente del engranaje de cara (véase Fig. 6.3.2).

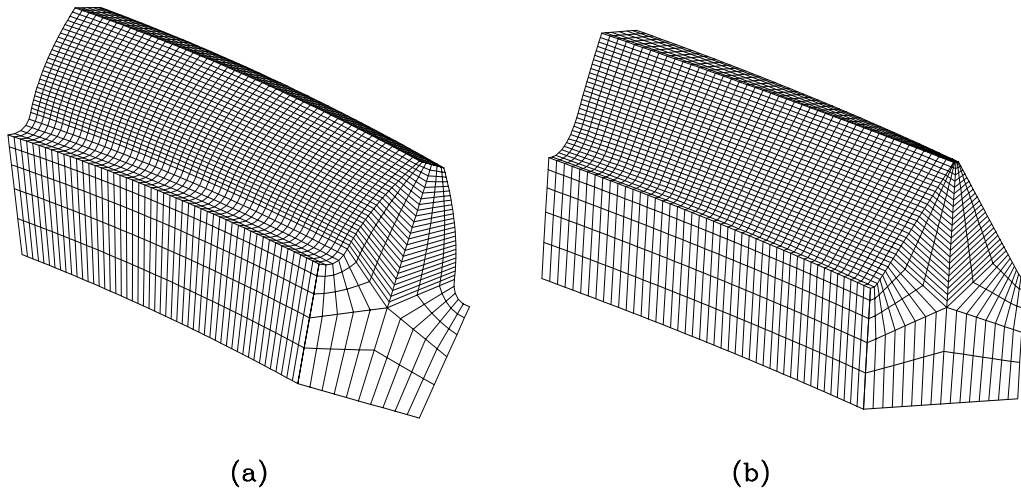


Figura 6.8.1: Modelos de elementos finitos de (a) un diente del piñón y (b) un diente del engranaje de cara.

Las condiciones de contorno se establecen según las directrices explicadas en el Capítulo 2. La Figura 6.8.2 muestra el caso de un modelo de tres pares de dientes.

6.8.1. Ejemplo numérico

El análisis de tensiones se ha realizado para los dos tipos de geometría descritos en el Apartado 6.2: (i) las superficies de los dientes del piñón y del cortador convencional corresponden a superficies de evolvente de círculo, y (ii) las superficies de los dientes del piñón y del cortador convencional son envolventes de cremalleras con perfiles parabólicos. Los caminos de contacto están orientados en la dirección del perfil y en la dirección longitudinal en los casos (i) y (ii) respectivamente.

Los dos tipos de geometría se han analizado considerando los siguientes ejemplos, con los parámetros de diseño que se representan en la Tabla 6.8.1.

Ejemplo 1. Se considera una transmisión formada por un piñón con perfil de evolvente y un engranaje de cara generado por un cortador convencional basado igualmente en el perfil de evolvente.

Ejemplos 2 y 3. Se considera una transmisión formada por un piñón con

Tabla 6.8.1: Parámetros de diseño en los Ejemplos 1, 2 y 3.

Parámetro de diseño	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3
Número de dientes del piñón, N_1	25	25	25
Número de dientes del cortador, N_s	28	28	28
Número de dientes del engranaje de cara, N_2	160	160	160
Módulo, m_n (mm)	6,35	6,35	6,35
Ángulo de presión normal, α_n (deg.)	25	25	25
Parámetro de espesor relativo, λ_c	0,9	0,9	0,9
Ángulo entre ejes, γ_m (deg.)	90	90	90
Ángulo de hélice, β (deg.)	15	15	15
Radio interior engranaje de cara, L_1 (mm)	500	510	510
Radio exterior engranaje de cara, L_2 (mm)	590	590	590
Coefficiente parabólico, a_1 (mm ⁻¹)	0,0	-0,002	+0,002
Coefficiente parabólico, a_s (mm ⁻¹)	0,0	+0,003	+0,003
Localización vértice parábola, u_o (mm)	-	1,99678	0,99839
Coefficiente parabólico, a_{pl} (mm ⁻¹)	0,0	0,0001	0,0001
Desplazamiento ΔE (mm)	0,0	-0,5	-0,5

superficies modificadas y un engranaje de cara cuyo cortador también presenta superficies modificadas. La modificación de las superficies está basada en la utilización de cremalleras con perfiles parabólicos. Las condiciones del contacto se optimizan utilizando el desplazamiento ΔE (véase Fig. 6.4.1), variando los coeficientes de los perfiles parabólicos, desplazando el vértice de las parábolas (véase Fig. 6.2.2) o mediante el abombamiento longitudinal del piñón.

La optimización de los parámetros de diseño en el segundo tipo de geometría es un proceso iterativo que permite obtener:

- (i) Dimensiones suficientes de las elipses instantáneas del contacto y una orientación más favorable de las mismas.
- (ii) Las mejoras mencionadas en (i) pueden verse acompañadas por una

ligera desviación de la trayectoria longitudinal.

(iii) El proceso iterativo permite excluir áreas de contacto severo.

Los parámetros de diseño correspondientes a los Ejemplos 2 y 3 (véase Tabla 6.8.1) constituyen dos casos intermedios en el proceso iterativo de optimización de las condiciones de contacto. La Figura 6.8.3 muestra que los caminos de contacto están orientados: (i) según la dirección del perfil en el caso de un piñón con geometría de evolvente (Fig. 6.8.3(a)), y (ii) en la dirección longitudinal en el caso de un piñón con geometría modificada (Figs. 6.8.3(b), 6.8.3(c)).

La Figura 6.8.4 muestra el modelo aplicado de elementos finitos con tres pares de dientes. Las Figuras 6.8.5 a 6.8.8 muestran los resultados del análisis de tensiones y la formación del contacto.

Los elementos considerados en el modelos son del tipo C3D8I de primer orden (mejorados con modos incompatibles para mejorar el comportamiento a flexión). El número total de elementos es 71460 con 87360 nodos. El material es acero con un módulo de Young $E = 2,068 \cdot 10^5$ MPa y un coeficiente de Poisson de 0,29. El par aplicado es de 4000 Nm en los tres ejemplos considerados.

Las Figs. 6.8.5(a) y 6.8.5(b) muestran la formación del contacto sobre las superficies del piñón y del engranaje de cara, respectivamente, en el caso del ejemplo 1. El camino de contacto en la dirección del perfil es el responsable del contacto en el borde de cabeza.

Las Figs. 6.8.6(a) y 6.8.6(b) muestran la formación del contacto sobre la superficie de los dientes del engranaje de cara en los Ejemplos 2 y 3, respectivamente. El camino de contacto está orientado longitudinalmente con lo que se evita el contacto en el borde. Las dimensiones de la elipse de contacto son mayores en el Ejemplo 3.

Las Figs. 6.8.7(a) y 6.8.7(b) muestran la formación del contacto sobre la superficie del piñón en los Ejemplos 2 y 3, respectivamente. La Fig. 6.8.7(b) muestra un área de contacto severo sobre la superficie del piñón correspondiente al Ejemplo 3.

Se ha analizado el valor de las tensiones de contacto y flexión a lo largo

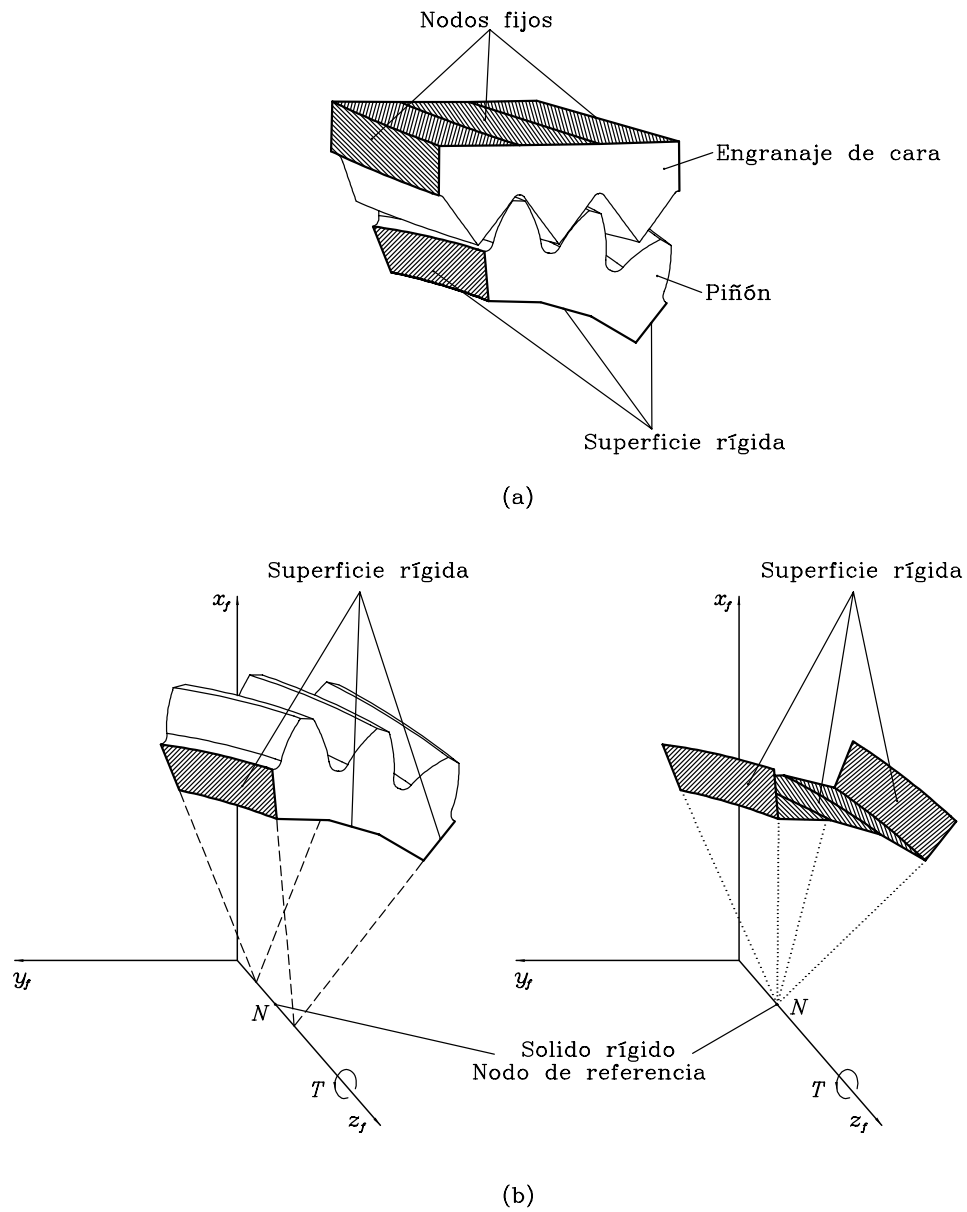


Figura 6.8.2: Esquema de: (a) condiciones de contorno en el piñón y en el engranaje de cara, y (b) superficies rígidas para la aplicación de las condiciones de contorno en el piñón.

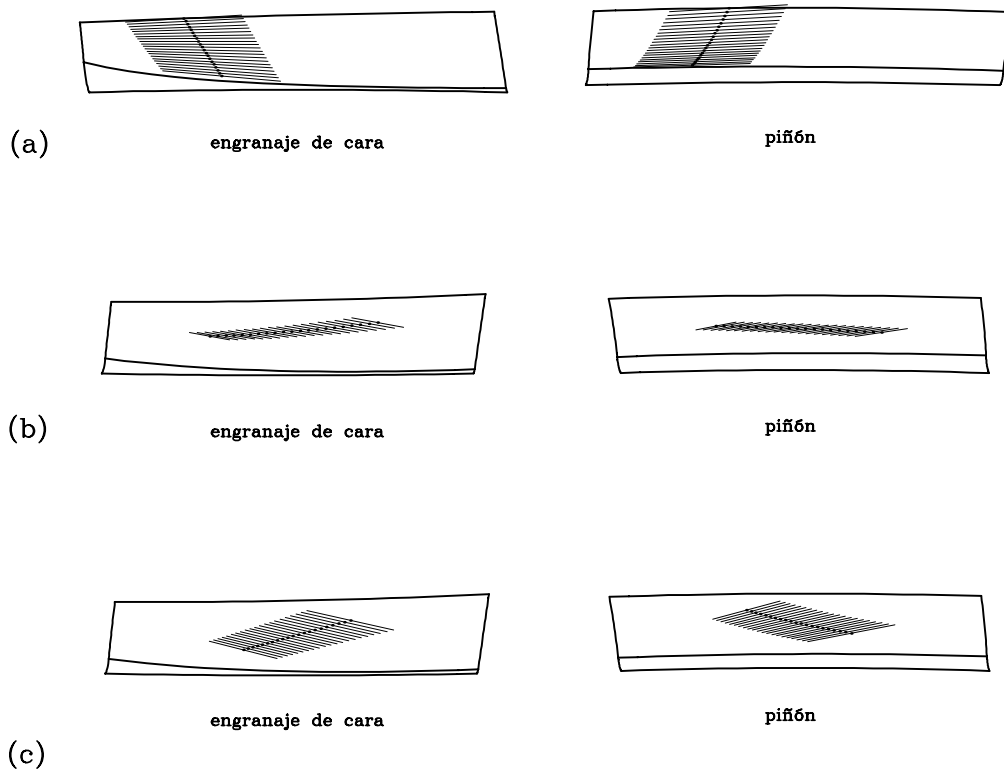


Figura 6.8.3: Caminos de contacto sobre el piñón y el engranaje de cara en: (a) Ejemplo 1, (b) Ejemplo 2 y (c) Ejemplo 3.

del ciclo de engrane. Las Figuras 6.8.8 y 6.8.9 muestran la variación de las tensiones de contacto y flexión, respectivamente, en los tres casos considerados. El contacto en el borde se evita en los Ejemplos 2 y 3 y ésta es la razón por la que los picos elevados de tensión de contacto (Fig. 6.8.8) aparecen en el Ejemplo 1 pero no en los Ejemplos 2 y 3. Las tensiones de flexión son más elevadas en el Ejemplo 2 porque la distribución de la carga está concentrada en un área menor. Esto se ha mejorado en el Ejemplo 3. La gran ventaja de la geometría propuesta (Ejemplos 2 y 3) es que se evita el contacto en el borde. El diseño representado en el Ejemplo 3 representa una mejora del diseño representado en el Ejemplo 2 dado que el nivel de las tensiones de contacto y flexión se ha reducido. Sin embargo, el Ejemplo 3 es todavía mejorable si se

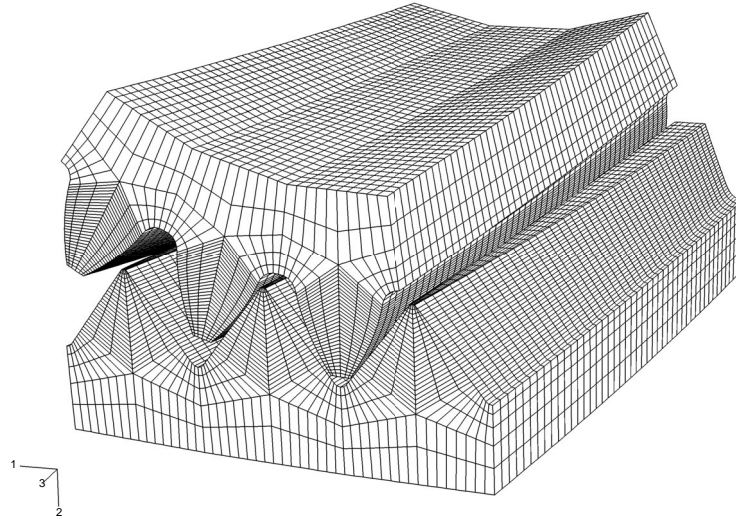
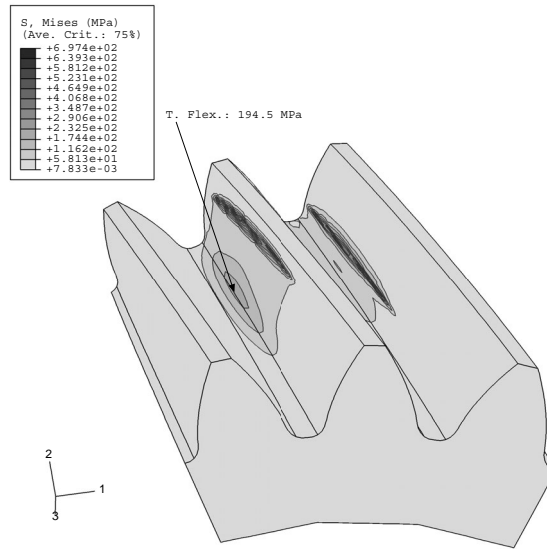
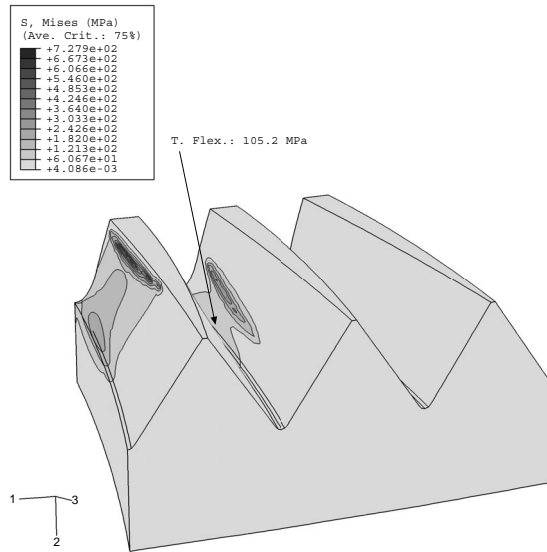


Figura 6.8.4: Modelo de elementos finitos con tres pares de dientes.

evita el área de contacto severo en el piñón seleccionando nuevos valores de los coeficientes de parábola para conseguir una trayectoria más longitudinal.

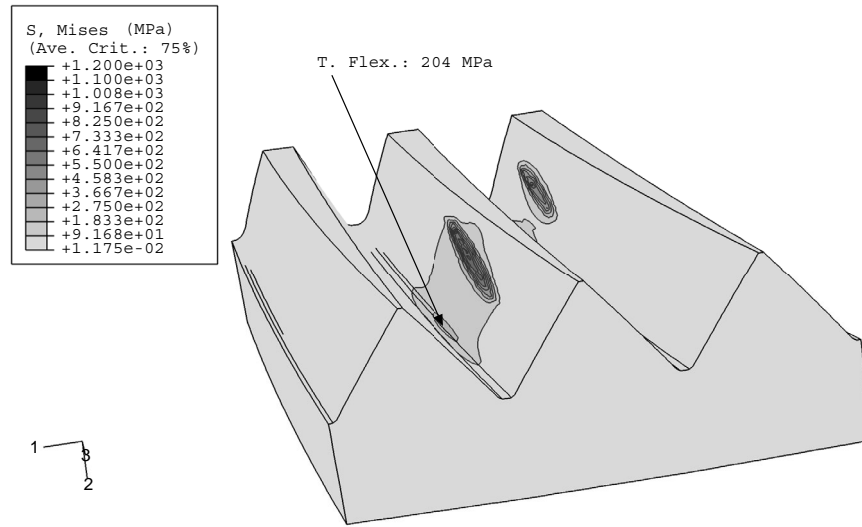


(a)

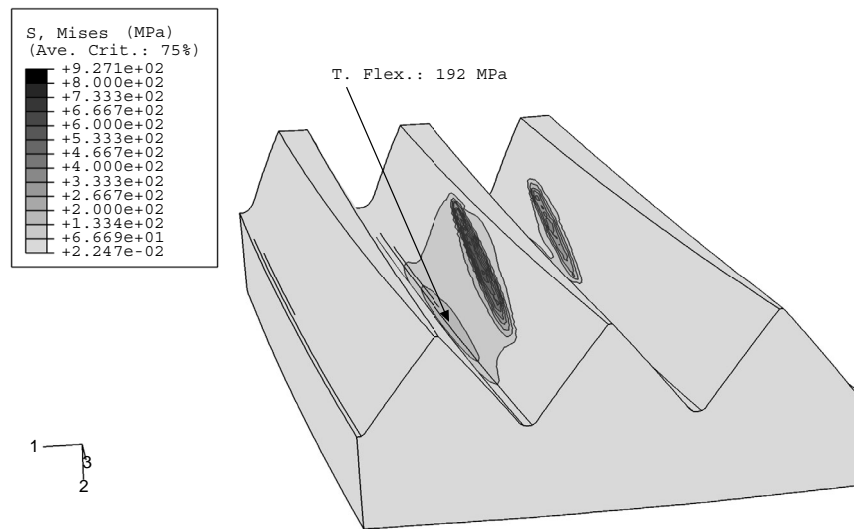


(b)

Figura 6.8.5: Tensiones de contacto y flexión para cierto punto de contacto en el Ejemplo 1 en: (a) piñón y (b) engranaje de cara.

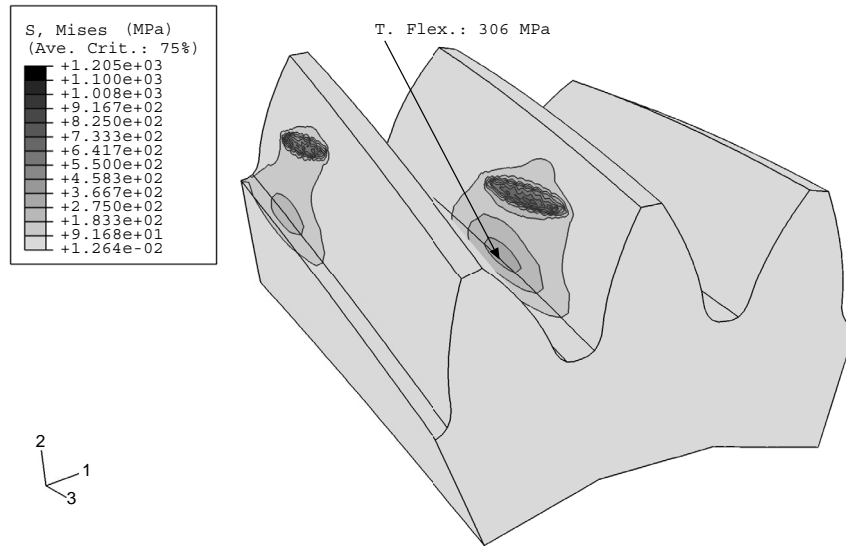


(a)

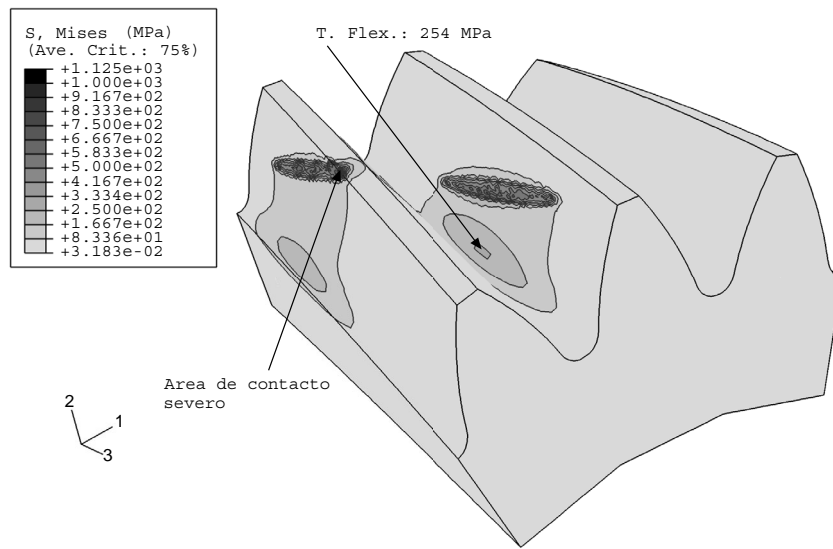


(b)

Figura 6.8.6: Tensiones de contacto y flexión en el engranaje de cara para cierto punto de contacto en: (a) Ejemplo 2 y (b) Ejemplo 3.



(a)



(b)

Figura 6.8.7: Tensiones de contacto y flexión en el piñón para cierto punto de contacto en: (a) Ejemplo 2 y (b) Ejemplo 3.

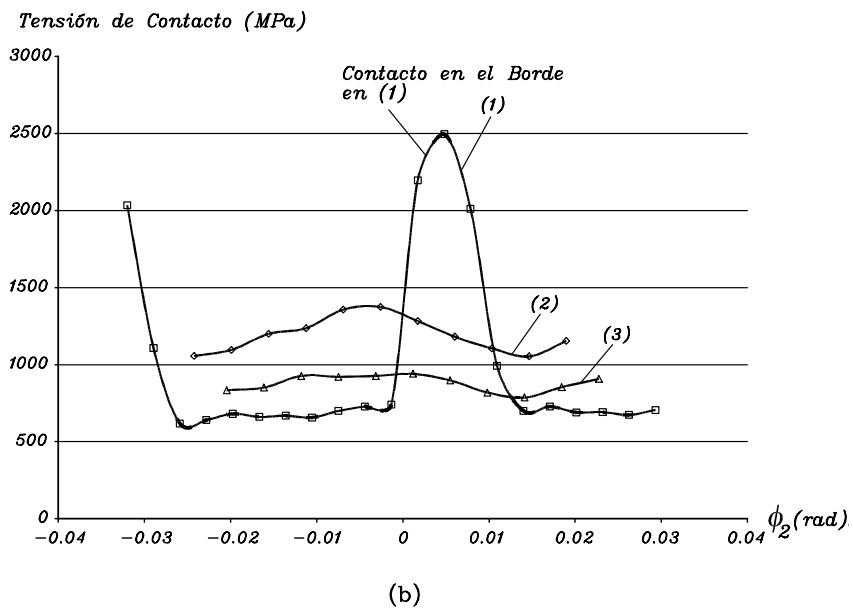
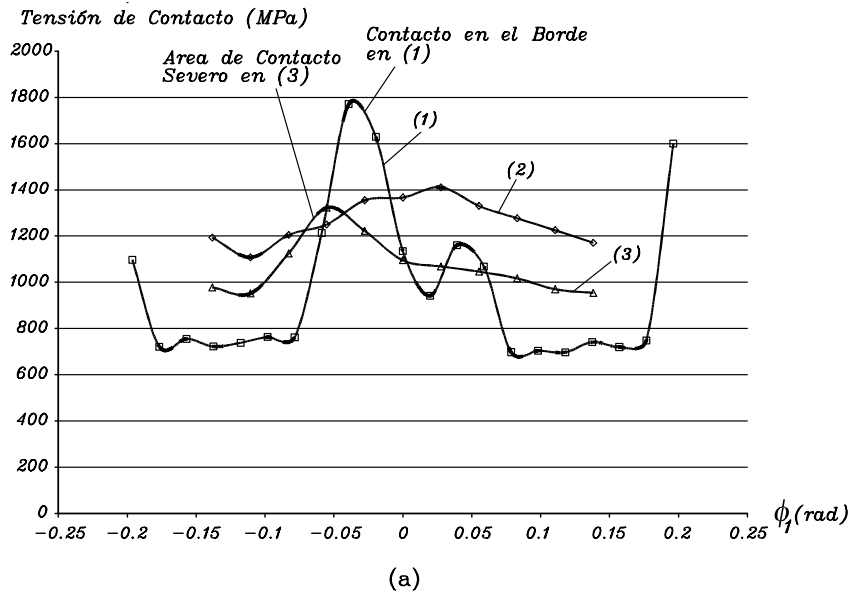


Figura 6.8.8: Variación de las tensiones de contacto a lo largo del ciclo de engrane en los tres ejemplos de diseño: (a) en el piñón y (b) en el engranaje de cara.

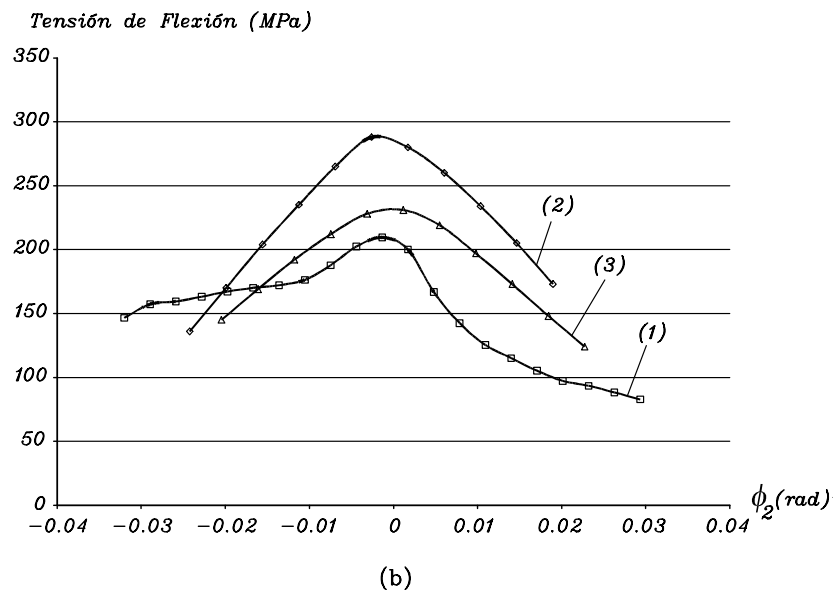
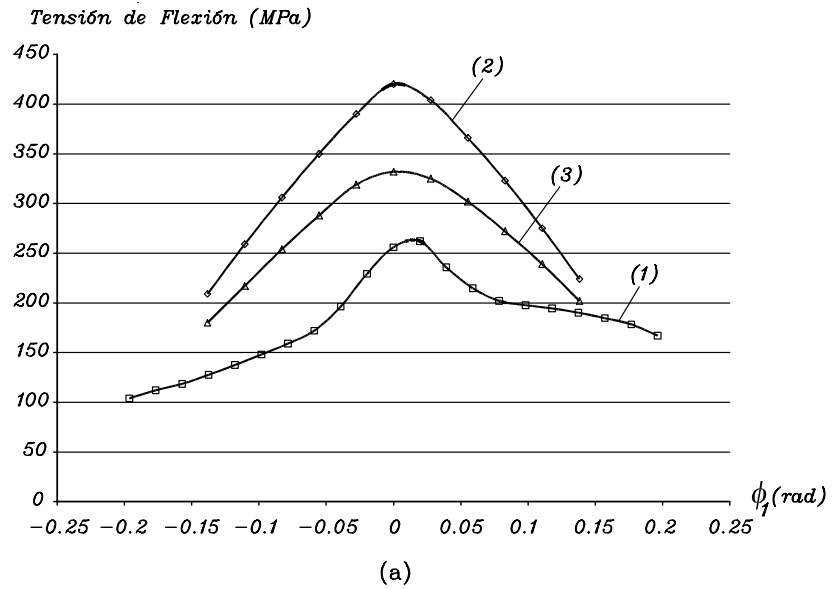


Figura 6.8.9: Variación de las tensiones de flexión a lo largo del ciclo de flexión en los tres ejemplos de diseño: (a) en el piñón y (b) en el engranaje de cara.

Capítulo 7

Resultados y conclusiones

En la presente Tesis Doctoral se han propuesto las bases para el diseño y la fabricación de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales de bajo nivel de ruido y vibración. Las ventajas de la aplicación de engranajes cilíndricos con geometría modificada para la reducción de los niveles de ruido y vibración, se han comprobado mediante la simulación del engrane y el estudio del contacto de estas transmisiones frente a posibles errores de alineación y/o fabricación, así como mediante el análisis tensional por el método de los elementos finitos. Además, se ha presentado la geometría de las transmisiones de engranajes de cara, en los que un engranaje cilíndrico, ya sea recto o helicoidal, engrana con una rueda que tiene sus dientes tallados en una de sus caras, y que permite la transmisión de potencia entre ejes que se intersectan con relaciones de transmisión relativamente grandes.

Se han estudiado las condiciones del contacto en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente con ejes que se cruzan para considerar el caso más general, y estudiar la sensibilidad del contacto en estas transmisiones frente a la presencia de errores de alineación y fabricación en función del ángulo entre ejes γ . Se ha obtenido que la huella del contacto (representación de las sucesivas elipses instantáneas de contacto) se desplaza sobre las superficies de los dientes cuando se presentan errores de alineación y/o fabricación. El valor del desplazamiento depende de la cuantía del error, del tipo de error y de la sensibilidad de la transmisión al tipo de error considerado. La función

de errores de transmisión, no obstante, es nula, y la acción conjugada existe aún en la presencia de errores de alineación y/o fabricación, siempre que el contacto tenga lugar dentro de la superficie real de los dientes en contacto. Puesto que las superficies de los dientes tienen unas dimensiones finitas, cuando el contacto teórico se desplaza más allá de los límites de las superficies, el contacto real tendrá lugar entre el borde de un diente y la superficie del otro, o entre los dos bordes de ambas superficies de contacto. En este caso, aparecen grandes errores de transmisión y la acción de engrane deja de ser conjugada.

Se ha demostrado que las transmisiones con ejes que se cruzan perpendicularmente son poco sensibles a los errores de alineación y fabricación y el contacto se mantiene normalmente dentro de la superficie de los dientes para los errores considerados. Cuando el ángulo entre ejes disminuye, la sensibilidad del contacto frente a los errores de alineación y/o fabricación es mayor, obteniéndose un mayor desplazamiento del contacto para un mismo valor del error considerado. Las transmisiones en las que el ángulo entre ejes es cero, es decir, con ejes paralelos, constituyen el caso extremo, en el que por muy pequeño que sea el error en el ángulo entre ejes, el contacto siempre se desplaza al borde de las superficies. La función de errores de transmisión resulta entonces una función cuasilínea y discontinua. Estas condiciones son muy perjudiciales para la transmisión dado que, por un lado, el contacto en el borde supone un aumento considerable de las tensiones de contacto y flexión y, por otro lado, los errores de transmisión constituyen la fuente principal de ruido y vibración, más aún cuando la función de errores de transmisión es una función discontinua.

Los engranajes cilíndricos rectos o helicoidales con ejes paralelos, se han estudiado como un caso particular de los anteriores. Se ha demostrado que la sensibilidad del contacto frente a la presencia de errores de alineación y fabricación en estas transmisiones es máxima y la localización del contacto es imprescindible para poder evitar el contacto en el borde de las superficies de los dientes. Se ha demostrado además que la localización del contacto no es suficiente y se debe acompañar de una modificación adicional de las superficies que permita absorber los errores de transmisión.

Se han estudiado y propuesto métodos para la modificación de las superficies de los dientes de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales, siempre considerando como objetivos principales: (i) la localización del contacto y (ii) la absorción de las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y fabricación. En primer lugar se ha estudiado la influencia de la aplicación de un abombamiento en la dirección del perfil a las superficies de los dientes de uno o los dos elementos de una transmisión para la consecución de los objetivos anteriores. El análisis del contacto de estas transmisiones, cuya geometría modificada está basada en la generación mediante cremalleras de geometría diferente para piñón y rueda, muestra que los objetivos propuestos se satisfacen sólo parcialmente y por tanto se demuestra la necesidad de realizar modificaciones adicionales de la superficie con el fin de conseguir los dos objetivos propuestos.

Se han estudiado y propuesto diferentes métodos de fabricación de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales con doble abombamiento. Se ha introducido un abombamiento adicional en la dirección longitudinal que, junto con el abombamiento en la dirección del perfil, permite la localización del contacto y el prediseño de una función parabólica de errores de transmisión capaz de absorber las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y fabricación. Estos métodos de fabricación se basan en la aplicación de herramientas reales de corte o rectificado. Se han propuesto tres métodos para la generación de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales de bajo nivel de ruido y vibración: (1) mediante disco de corte o rectificado, modificando la distancia entre los ejes del disco y del piñón durante el proceso de generación, (2) mediante cortador sinfín, modificando la distancia entre los ejes del cortador y del piñón durante la generación y (3) mediante cortador sinfín, modificando la relación entre el giro del piñón y el desplazamiento del cortador durante el movimiento de alimentación del cortador, según una función parabólica, siendo constante la distancia entre ejes. Los dos procesos basados en la utilización de cortador sinfín se describen utilizando los movimientos reales que el cortador describe durante la generación. Las funciones parabólicas utilizadas para obtener el doble abombamiento se caracterizan, no sólo por el coeficiente de parábola, sino también por la lo-

calización del vértice de la parábola, siendo éste un parámetro fundamental para desplazar el camino de contacto en el diseño de la transmisión y para aumentar la tolerancia de la transmisión frente a determinados errores cuando se conoce de antemano la dirección en la que tienen lugar dichos errores. En la definición de la geometría de la cremallera que sirve de referencia para la obtención de las superficies de las herramientas (disco y cortador sinfín), se ha definido un parámetro de espesor relativo que permite modificar los espesores del diente y del hueco en el engranaje generado, permitiendo variar la rigidez de los dientes. Se han utilizado además ángulos de presión diferentes en ambos lados para considerar la posibilidad de transmisiones con perfiles asimétricos.

Se han desarrollado programas de ordenador para la simulación del engrane y el análisis del contacto (TCA) en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales con geometría modificada.

Se ha realizado el análisis tensional de estas transmisiones mediante el método de los elementos finitos, utilizando para ello un programa de uso general. Para la construcción del modelo de elementos finitos se ha desarrollado un programa que permite la total parametrización del modelo, no siendo necesaria la utilización de programas CAD. Los objetivos considerados para el análisis tensional han sido: (i) estudiar la formación del contacto durante el ciclo de engrane y (ii) comparar los niveles tensionales de contacto y flexión entre la geometría modificada y la geometría con perfil de evolvente. El estudio de la formación del contacto ha permitido confirmar los resultados obtenidos del análisis del contacto y obtener el verdadero tamaño de las elipses de contacto para el par a transmitir. Los niveles tensionales obtenidos en ambos tipos de geometría confirman las ventajas de utilizar las transmisiones con geometría modificada.

Además, se ha estudiado un tipo de transmisión con engranajes cilíndricos en el que los ejes se intersectan, conocida con el nombre de transmisión de engranajes de cara. En este tipo de transmisión el contacto se encuentra localizado porque se utiliza un cortador para generar la rueda con un número de dientes ligeramente superior al del piñón que engranará con la misma. Se han estudiado las transmisiones de engranaje de cara con piñón helicoidal y se

han propuesto modificaciones de la geometría existente con el fin de conseguir un camino de contacto longitudinal. Se ha obtenido además la geometría de un cortador sinfín libre de singularidades para el rectificado de las superficies de la rueda. Dicho rectificado permite la utilización de materiales endurecidos térmicamente con lo que es posible aumentar la resistencia de los dientes de la rueda.

Las principales conclusiones que se han obtenido de la realización de la presente Tesis Doctoral son las siguientes:

- (1) La simulación del engrane y el estudio del contacto en las transmisiones de engranajes cilíndricos ha confirmado que, en el caso de transmisiones con ejes paralelos y perfil de evolvente, se requiere el doble abombamiento de las superficies de los dientes de uno de los elementos de la transmisión, tanto en la dirección del perfil como en la dirección longitudinal, con el fin de estabilizar el contacto y absorber las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y fabricación.
- (2) El prediseño de una función parabólica de errores de transmisión permite absorber las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por las desalineaciones. El análisis del contacto ha confirmado que la función resultante de errores de transmisión es una función continua cuando se consideran varios ciclos de engrane.
- (3) La localización del contacto evita el contacto en los bordes de las superficies de los dientes de los engranajes. El análisis de tensiones por el método de los elementos finitos ha confirmado la reducción de tensiones de contacto y flexión en las transmisiones con geometría modificada frente a las transmisiones con perfil de evolvente.
- (4) El prediseño de una función parabólica negativa de errores de transmisión favorece la descarga progresiva de la pareja de dientes en contacto y la carga progresiva de la pareja de dientes siguiente. El reparto de carga en los extremos del ciclo de engrane se ha mejorado notablemente, produciéndose de forma gradual. El diseño de un camino de con-

tacto longitudinal evita la existencia de contacto en el borde de cabeza del diente y una mejor transición de la carga. El camino de contacto en la dirección del perfil requiere una buena localización del camino de contacto. El control de la posición de la función prediseñada de errores de transmisión durante el proceso de generación es fundamental para conseguir dicho objetivo.

- (5) Las condiciones idóneas de contacto en las transmisiones con ejes cruzados y perfil de evolvente vienen representadas por el diseño canónico, que se produce cuando las líneas de acción se intersectan. El contacto se encuentra entonces localizado en la parte central de las superficies. La acción conjugada existe aún en el caso de existencia de errores de alineación. Dichas condiciones se dan siempre que el error no desplace el camino de contacto al borde de las superficies.
- (6) La utilización de perfiles asimétricos para los dientes de los engranajes con el fin de reducir las tensiones de contacto y flexión no ha mostrado ventajas considerables frente al caso convencional de utilización de perfiles simétricos, habiéndose obtenido niveles tensionales a lo largo del ciclo de engrane muy similares al caso de perfiles simétricos.
- (7) Las transmisiones de engranajes de cara y piñón helicoidal con contacto localizado se pueden diseñar para conseguir un camino de contacto longitudinal, pero un fenómeno de asimetría del contacto aparece como restricción en la obtención de un cortador sinfín para el rectificado de la rueda.

El trabajo desarrollado ha abierto nuevas líneas de investigación para futuros trabajos, entre los que se destacan:

- (1) Simulación del engrane y análisis del contacto bajo carga de transmisiones de engranajes cilíndricos teniendo en cuenta las deformaciones elásticas en las dentaduras.
- (2) Desarrollo de un código propio de análisis tensional basado en el método de los elementos de contorno para su integración en los programas de

ordenador desarrollados y que permita acortar el tiempo de análisis considerablemente.

- (3) Aplicación de la síntesis local al diseño de los engranajes cilíndricos rectos y helicoidales para la obtención de la superficie buscada de forma directa, sin iteraciones. La síntesis local aplicada a engranajes cilíndricos no permitirá un abanico tan amplio de posibilidades como para el caso de los engranajes cónicos espirales o hipoides, pero permitirá obtener directamente los coeficientes de abombado longitudinal y en la dirección del perfil para conseguir las dimensiones de las elipses de contacto deseadas y el prediseño de una función parabólica de errores de transmisión de un valor máximo prefijado.
- (4) Aplicación de la teoría moderna de engranajes para el diseño, simulación del engrane y estudio del contacto, y análisis tensional de otras transmisiones de engranajes como tornillos sinfín, engranajes hipoides, engranajes planetarios, etc.

Bibliografía

- AMINI, N., ROSÉN, B. G., & WESTBERG, H. 1998. Optimization of Gear Tooth Surfaces. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, **38**, 425–435.
- BRADLEY, W. 1973. How to Design the Noise Out of Gears. *Machine Design*, **45**(30), 49.
- BUCKINGHAM, E. 1963. Analytical Mechanics of Gears. 2d Ed. New York: Dover.
- CHINESE STANDARD. 1981. J.B. 2940-81.
- CHIRONIS, N. P. 1967. Gear Design and Application. New York: McGraw-Hill. Chap. Design of Novikov Gears.
- COLBOURNE, J. R. 1987. The Geometry of Involute Gears. Springer-Verlag.
- COY, J. J., TOWNSEND, D. P., & ZARETSKY, E. V. 1985. Gearing. *NASA Reference Publication 1152, AVSCOM Technical Report 84-C-15*.
- DARYANI, P. H. 2002. The Art of Gear Fabrication. Industrial Press, Inc.
- DAVIDOV, J. S. 1963. The Generation of Conjugate Surfaces by Two Rigidly Connected Tool Surfaces. *Vestnik Mashinostroyeniya* (en ruso).
- DENAVID, J., & HARTENBERG, R. S. 1955. A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices. *ASME J. Appl. Mech.*, **22**, 215–221.
- DRAGO, R. J. 1980. How to Design Quiet Transmissions. *Machine Design*, 175–181.

- DUDLEY, D. W. 1969. The Evolution of the Gear Art. *American Gear Manufacturers Association, Washington, D.C.*
- DUDLEY, D. W. 1984. Handbook of Practical Gear Design. New York: McGraw-Hill, Inc.
- FENG, P.-H., LITVIN, F. L., TOWNSEND, D. P., & HANDSCHUH, R. F. 1999. Determination of Principal Curvatures and Contact Ellipses for Profile Crowned Helical Gears. *ASME Journal of Mechanical Design*, **121**(1), 107–111.
- FUENTES, A. 1996. Modelo de Cálculo a Flexión de Engranajes Cilíndricos de Perfil de Evolvente. Tesis Doctoral, U.N.E.D., Madrid.
- GOCHMAN, H. I. 1886. Theory of Gearing Generalized and Developed Analytically. *Odessa (en ruso)*.
- GREGORY, R. W., HARRIS, S. L., & MUNRO, R. G. 1963. Dynamic Behaviour of Spur Gears. *Proc. I. Mech. E.*, **178**(8), 207–226.
- HANDSCHUH, R. F., LEWICKI, D. G., & BOSSLER, R. B. 1992. Experimental Testing of Prototype Face Gears for Helicopter Transmissions. *NASA TM-105434, AVSCOM 7R-92-C-008*.
- HANDSCHUH, R. F., LEWICKI, D. G., HEATH, G. F., & BOSSLER JR., R. B. 1996. Experimental Evaluation of Face Gears for Aerospace Drive System Applications. *ASME Power Transmission and Gearing Conference*, **88**, 581–588.
- HARRIS, S. L. 1958. Dynamic Loads on the Teeth of Spur Gears. *Proc. I. Mech. E.*, **172**(2), 87–112.
- HIBBIT, KARLSSON & SIRENSEN, INC. 1998. ABAQUS/Standard User's Manual. 1800 Main Street, Pantucket, RI 20860-4847.
- JOHNSON, K. L. 1985. Contact Mechanics. New York: Cambridge University Press.

- KAPELEVICH, A. L. 2000. Geometry and Design of Involute Spur Gears with Asymmetric Teeth. *Mechanism and Machine Theory*, **35**, 117–130.
- KIM, D. 1995. Computerized Simulation of Meshing for Finishing Operations of Production of Spur and Helical Gears. Tesis Doctoral, University of Illinois at Chicago.
- KORN, G. A., & KORN, T. M. 1968. Mathematics Handbook for Scientist and Engineers. 2d Ed. McGraw-Hill, Inc.
- KUDRJAVTSEV, V.N. 1966. Epicycloidal Trains. Mashgis (en ruso).
- KUDRJAVTSEV, V.N. 1980. Machine Elements. Mashgis (en ruso).
- LI, X., SYMMONS, G. R., & COCKERHAM, G. 1996. Optimal Design of Involute Profile Helical Gears. *Mechanism and Machine Theory*, **59**(6), 717–728.
- LITVIN, F. L. 1955. Application of Matrices and Dual Number Calculations to Analysis of Spatial Gearings. *In Proceedings of Leningrad Polytechnic Institute*, **182**, (en ruso).
- LITVIN, F. L. 1962. The Investigation of the Geometric Properties of a Variety of Novikov Gearing. *Proc. Leningrad Mechanical Institute*, (en ruso).
- LITVIN, F. L., & TSAY, C.-B. 1985. Helical Gears with Circular Arc Teeth: Simulation of Conditions of Meshing and Bearing Contact. *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **107**, 556–564.
- LITVIN, F. L., ZHANG, J., & HANDSCHUH, R. F. 1988a. Crowned Spur Gears: Methods for Generation and Tooth Contact Analysis - Part 1: Basic Concepts, Generation of the Pinion Tooth Surface by a Plane. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **110**(septiembre), 337–342.

- LITVIN, F. L., ZHANG, J., & HANDSCHUH, R. F. 1988b. Crowned Spur Gears: Methods for Generation and Tooth Contact Analysis - Part 2: Generation of the Pinion Tooth Surface by a Surface of Revolution. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, **110**(septiembre), 343–347.
- LITVIN, F. L., & ZHANG, J. 1988. Spur Gears. Optimal Geometry, Methods for Generation and Tooth Contact Analysis (TCA) Program. *NASA Contractor Report 4135, AVSCOM Technical Report 88-C-002*, abril.
- LITVIN, F. L. 1989. Theory of Gearing. Washington, D. C.: NASA RP-1212 (AVSCOM 88-C-C035).
- LITVIN, F. L., WANG, J.-C., CHEN, Y.-J., BOSSLER, R. D., HEATH, G., & LEWICKI, D. G. 1992. Face Gear Drives: Design, Analysis and Testing for Helicopter Transmission Applications. *AGMA Paper 92FTM2*.
- LITVIN, F. L. 1994. Gear Geometry and Applied Theory. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc.
- LITVIN, F. L., & LU, J. 1995. Computerized Design and Generation of Double Circular-Arc Helical Gears With Low Transmission Errors. *ASME Journal of Mechanical Design*, **127**(1-4), 57–86.
- LITVIN, F. L., CHEN, N. X., LU, J., & HANDSCHUH, R. F. 1995. Computerized Design and Generation of Low-Noise Helical Gears with Modified Surface Topology. *ASME Journal of Mechanical Design*, **117**(2), 254–261.
- LITVIN, F. L., SEOL, I. H., KIM, D., LU, J., WANG, A. G., EGELJA, A., ZHAO, X., & HANDSCHUH, R. F. 1996. Kinematic and Geometric Models of Gear Drives. *ASME Journal of Mechanical Design*, **118**(4), 544–550.
- LITVIN, F. L., & KIM, D. H. 1997. Computerized Design, Generation and Simulation of Meshing of Modified Involute Spur Gear With Localized Bearing Contact and Reduced Level of Transmission Errors. *ASME Journal of Mechanical Design*, **119**, 96–100.

- LITVIN, F. L., ZHANG, J., CHAING, W.-S., COY, J. J., & HANDSCHUH, R. F. 1998. Crowned Spur Gears: Optimal Geometry and Generation. *Gear Technology, The Journal of Gear Manufacturing*, **5**(5), 9–15.
- LITVIN, F. L. 1998. Development of Gear Technology and Theory of Gearing. *NASA Reference Publication 1406, ARL-TR-1500*.
- LITVIN, F. L., LU, J., TOWNSEND, D. P., & HOWKINS, M. 1999. Computerized Simulation of Meshing of Conventional Helical Involute Gears and Modification of Geometry. *Mechanism and Machine Theory*, **34**(1), 123–147.
- LITVIN, F. L., CHEN, Y.-J., HEATH, G. F., SHETH, V. J., & CHEN, N. 2000a. Apparatus and Method for Precision Grinding Face Gears. *USA Patent 6,146,253*.
- LITVIN, F. L., LIAN, Q., & KAPELEVICH, A. L. 2000b. Asymmetric Modified Spur Gear Drives: Reduction of Noise, Localization of Contact, Simulation of Meshing and Stress Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **188**(1-3), 363–390.
- LITVIN, F. L., FENG, P.-H., & LAGUTIN, S. A. 2000c. Computerized Generation and Simulation of Meshing and Contact of New Type of Novikov-Wildhaber Helical Gear. *NASA/CR-2000-209415, ARL-CR-428*, octubre.
- LITVIN, F. L., EGELJA, A., TAN, J., CHEN, D. Y.-D., & HEATH, G. 2000d. Handbook on Face Gear Drives with a Spur Involute Pinion. *NASA/CR-2000-209909, ARL-CR-447*, marzo.
- LITVIN, F. L., FAN, Q., VECCHIATO, D., DEMENEGO, A., HANDSCHUH, R. F., & SEP, T. M. 2001a. Computerized Generation and Simulation of Meshing of Modified Spur and Helical Gears Manufactured by Shaving. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 5037–5055.

- LITVIN, F. L., FUENTES, A., HAWKINS, J. M., & HANDSCHUH, R. F. 2001b. Design, Generation and Tooth Contact Analysis (TCA) of Asymmetric Face Gear Drive with Modified Geometry. *NASA/TM 2001-210614, ARL-TR-2373*, enero.
- LITVIN, F. L., *et al.* 2001c. Helical and Spur Gear Drive with Double Crowned Pinion Tooth Surfaces and Conjugated Gear Tooth Surfaces. *US Patent Office, Patent No. 6,205,879*, marzo, 27.
- LITVIN, F. L., FUENTES, A., ZANZI, C., & PONTIGGIA, M. 2002a. Face Gear Drive with Spur Involute Pinion: Geometry, Generation by a Worm, Stress Analysis. *NASA CR-2002-211362, ARL-CR-491*, febrero, 1–44.
- LITVIN, F. L., FUENTES, A., ZANZI, C., PONTIGGIA, M., & HANDSCHUH, R. F. 2002b. Face Gear Drive with Spur Involute Pinion: Geometry, Generation by a Worm, Stress Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 2785–2813.
- LITVIN, F. L., FUENTES, A., ZANZI, C., & PONTIGGIA, M. 2002c. Design, Generation, and Stress Analysis of Two Versions of Geometry of Face-Gear Drives. *Mechanism and Machine Theory*, **37**, 1179–1211.
- LITVIN, F. L., FUENTES, A., GONZALEZ-PEREZ, I., CARNEVALI, L., & SEP, T. M. 2002d. New Version of Novikov-Wildhaber Helical Gears: Computerized Design, Simulation of Meshing and Stress Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 5707–5740.
- LITVIN, F. L., FUENTES, A., GONZALEZ-PEREZ, I., CARNEVALI, L., KAWASAKI, K., & HANDSCHUH, R. F. 2003. Modified Involute Helical Gears: Computerized Design, Simulation of Meshing, and Stress Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, 3619–3655.
- NIEMANN, G. 1961. Novikov Gear System and Other Special Gear Systems for High Load Carrying Capacity. *VDI Berichte*, **47**.
- NOVIKOV, M. L. 1956. USSR Patent No. 109,750.

- OLIVIER, T. 1842. *Theorie Geometrique des Engrenages*. Bachelier, Paris.
- OPTIZ, H. 1968. Noise of Gears. *Phil. Trans. of the Royal Society*, **263**, 369–380.
- PALMER, D., & MUNRO, R. G. 1995. Measurements of Transmission Error, Vibration and Noise in Spur Gears. *British Gear Association Congress, Suite 45, IMEX Park, Shobnall Rd., Burton on Trent*.
- PEDRERO, J. I., FUENTES, A., & ESTREMS, M. 2000. Approximate Method for the Determination of the Bending Strength Geometry Factor for External Spur and Helical Gear Teeth. *ASME Journal of Mechanical Design*, **122**(3), 331–336.
- SMITH, J. DEREK. 1983. *Gears and their Vibration*. Macmillan, New York.
- SMITH, J. DEREK. 1999. *Gear Noise and Vibration*. 270 Madison Avenue, New York, NY 10016: Marcel Dekker Inc.
- TOWNSEND, D. P. 1991. *Dudley's Gear Handbook*. 2d Ed. New York: McGraw-Hill, Inc.
- WELBOURN, D. B. 1979. Fundamental Knowledge of Gear Noise - A Survey. *Proc. Noise & Vibration of Engines and Transmissions, I. Mech.E., Cranfield, UK*, 9–14.
- WELLS, C. F., & SHOTTER, B. A. 1962. The Development of 'Cirarc' Gearing. *AEI Engineering*.
- WILDHABER, E. 1962. Method and Machine for Producing Crowned Teeth. *United States Patent Office, Patent No. 3,046,844*.
- WILLIS, R. I. 1841. *Principles of Mechanisms*. Longman, Green and Co., London.
- WINTER, H., & LOOMAN, J. 1961. Tools for Making Helical Circular Arc Spur Gears. *VDI Berichte*, **47**.

- ZALGALLER, V. A. 1975. Theory of Envelopes. Publishing House Nauka (en ruso), Moscow.
- ZALGALLER, V. A., & LITVIN, F. L. 1977. Sufficient Condition of Existence of Envelope to Contact Lines and Edge of Regression on the Surface of the Envelope to the Parametric Family of Surfaces Represented in Parametric Form. *Proceedings of Universities: Mathematics (en ruso)*, **178**(3), 20–23.
- ZHANG, Y., & W., Z. 1996. The Tooth Geometry and Contact Analysis of Offset Face Gears. *ASME Power Transmission and Gearing Conference*, **88**, 493–500.
- ZIENKIEWICZ, O. C., & TAYLOR, R. L. 2000. The Finite Element Method. 5th Ed. John Wiley & Sons.

Biografía del autor

Ignacio González Pérez nace el 21 de mayo de 1974 en Murcia. Natural de Alcantarilla, inicia sus estudios de Ingeniería Técnica Industrial en Cartagena en el año 1992, en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial, perteneciente entonces a la Universidad de Murcia. En el año 1996 recibe el premio extraordinario fin de carrera por su rendimiento académico en la intensificación de Construcción de Maquinaria y recibe el premio al mejor proyecto fin de carrera en su intensificación por el Colegio de Ingenieros Técnicos Industriales de la Región de Murcia. Ese mismo año inicia los estudios de segundo ciclo de Ingeniero Industrial en Cartagena, finalizando en el año 1999, en el cual es otorgado de nuevo con el premio extraordinario fin de carrera por su rendimiento académico en la intensificación de Mecánica y Fabricación. En el año 2000 es contratado por la Universidad Politécnica de Cartagena como profesor ayudante de escuela universitaria en el Departamento de Ingeniería Mecánica, desarrollando labores de docencia en el área del diseño de elementos de máquinas y labores de investigación en el proyecto “Análisis del Contacto entre Dientes de Engranajes. Estudio de la Influencia de la Modificación del Perfil”, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología. En octubre del año 2001 inicia su estancia como investigador en el Gear Research Center de la Universidad de Illinois en Chicago, bajo la dirección del profesor Faydor L. Litvin. En octubre del año 2002 la American Gear Manufacturers Association le concede el premio al mejor artículo de estudiantes de doctorado del AGMA Fall Technical Meeting celebrado en St. Louis. En octubre del año 2003 finaliza su estancia en la Universidad de Illinois en Chicago y reinicia sus labores de docencia e investigación en la Universidad Politécnica de Cartagena. La

investigación desarrollada ha dado lugar a los siguientes artículos:

- Litvin, F. L., Fuentes, A., Gonzalez-Perez, I., Carnevali, L., & Sep, T. M. “New Version of Novikov-Wildhaber Helical Gears: Computerized Design, Simulation of Meshing and Stress Analysis”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science Ltd., UK*, 191, 5707–5740, 2002.
- Gonzalez-Perez, I., & Carnevali, L. “Design and Stress Analysis of New Version of Novikov-Wildhaber Helical Gears”. *Technical Paper 02FTMS1, AGMA Fall Technical Meeting, Saint Louis, USA*, 2002.
- Litvin, F. L., Fuentes, A., Gonzalez-Perez, I., Carnevali, L., Kawasaki, K., & Handschuh, R. F. “Modified Involute Helical Gears: Computerized Design, Simulation of Meshing, and Stress Analysis”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science Ltd., UK*, 192, 3619–3655, 2003.
- Litvin, F. L., Fuentes, A., Gonzalez-Perez, I., Carnevali, L., & Kawasaki, K. “Modified Involute Helical Gears: Computerized Design, Simulation of Meshing, and Stress Analysis”. *NASA Contractor Report 2003-212229, NASA Glenn Research Center, USA*, 2003.
- Fuentes, A., González Pérez, I., & Pedrero, J. I. “Diseño, Generación, Simulación del Engrane y Análisis del Contacto en Engranajes Rectos con Geometría Modificada”. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, UNED, Madrid*, 7, 3–31, 2003.
- Fuentes, A., & González Pérez, I. “Análisis Tensional por Elementos Finitos de Engranajes Rectos con Geometría Modificada”. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica, UNED, Madrid*, aceptado para publicación, 2003.
- Litvin, F. L., Demenego, A., Vecchiato, D., Fuentes, A., & Gonzalez-Perez, I. “One-Stage Planetary Gear Train with Double-Helical Gears: Reduction of Transmission Errors and Improved Conditions of Load

Distribution". *Journal of Mechanical Engineering Science, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C, Professional Engineering Publishing, UK*, en proceso de revisión.

- Litvin, F. L., Gonzalez-Perez, I., Fuentes, A., Vecchiato, D., & Sep, T. M. "Generalized Concept of Meshing and Contact of Involute Crossed Helical Gears and its Application". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science Ltd., UK*, en proceso de revisión.
- Litvin, F. L., Gonzalez-Perez, I., Fuentes, A., Vecchiato, D., Hansen, B. D., Binney, D. "Design, Generation and Stress Analysis of Face-gear Drive with Helical Pinion". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science Ltd., UK*, en proceso de revisión.
- Litvin, F. L., Vecchiato, D., Fuentes, A., Gonzalez-Perez, I. "Automatic Determination of Guess Values for Simulation of Meshing of Gear Drives". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science Ltd., UK*, en proceso de revisión.