Nuevas formas de tratamiento de la incertidumbre en la Matemática Financiera

Lozano Gutiérrez, Mª Carmen
Departamento de Economía Financiera y Contabilidad
Universidad Politécnica de Cartagena

RESUMEN

En la presente comunicación presentamos una metodología complementaria a los métodos de valoración tradicionales de operaciones financieras y bancarias, cuando en éstas intervienen variables sujetas a incertidumbre. La aplicación de criterios borrosos a la valoración de éstas variables permite obtener un acercamiento del resultado más próximo a la realidad . Para el desarrollo de la metodología valorativa propuesta, nos basaremos en las operaciones de constitución de capitales y en concreto en un producto financiero en el que está presente de modo fundamental la incertidumbre, los Planes de Jubilación de aportación definida. Hemos elegido éste producto porque en él confluyen una serie de circunstancias cuyo conocimiento tiene lugar de manera poco precisa, por lo que no pueden usarse ni leyes de probabilidad ni los razonamientos que con ellas se relacionan, aunque la técnica propuesta en la comunicación, sería igualmente aplicable a cualquier otra operación de inversión o financiación sujeta a la métrica de la Matemática Financiera.

Palabras claves: Matemática Financiera; Lógica Borrosa; Constitución de Capitales, Planes de Jubilación.

Clasificación JEL (Journal Economic Literature): C00; C61; G23

Área temática: Matemática de las Operaciones Financieras

1. INTRODUCCIÓN

La constante mutabilidad a la que se ven sometidos los fenómenos económicos no permite, en la mayor parte de los casos, tomar en consideración datos del pasado para poder establecer inferencias del futuro. Es por ello que la preparación de una decisión, simple ó compleja, se convierte en una actividad organizativa del pensamiento en la que inevitablemente se combina intuición y lógica.

Los modelos matemáticos que tradicionalmente se han utilizado en la economía tienen su soporte, la mayor parte de las veces, en teorías formales (que toman en consideración datos ciertos), y teorías probabilísticas (construidas a partir de datos estadísticamente mensurables ó construidos a partir de razonamientos que permitan aceptar a priori leyes de probabilidad). El problema surge cuando estos modelos se enfrenten ante hechos para los que no puedan usarse ni leyes de probabilidad ni los razonamientos que con ellas se relacionan. Así, los matemáticos y los economistas se han visto obligados a investigar en este campo y han conseguido obtener nuevos esquemas que permiten una consideración más completa de la realidad, más adaptada a lo real en definitiva, por los que se pasa de la aleatoriedad a la borrosidad cuando la imprecisión se formaliza a través de situaciones en las que existe una gradación entre la pertenencia absoluta y la no pertenencia.

Estas nuevas teorías basadas en la borrosidad, desde su creación en 1965 por Lotfi. A. Zadeh (profesor de ciencia de computadoras en la Universidad de California en Berkeley), están experimentando un éxito indiscutible (aunque criticado por aquellos que todavía no las conocen) en muchos campos y por supuesto en el campo de la gestión de empresas, donde se están realizando interesantes aportaciones de éstas técnicas a todas las áreas de decisión en las que se manejan variables intangibles o cualitativas ó incertidumbre.

En el ámbito de aplicación a la Matemática Financiera, la lógica borrosa puede significar una interesante contribución a la metodología valorativa tradicional en aquellos casos en los que las valoraciones efectuadas revelan ambigüedad e imprecisión, debido a dos motivos principalmente: 1) La elección de un tipo de interés valorativo con el que se establezca la Ley financiera a aplicar. 2) La consideración de la inflación dentro de las leyes financieras y la complejidad de su previsión.

La imprecisión y la incertidumbre con la que se han incorporado estas variables a la medición de las operaciones financieras se ha traducido en ambigüedad e inexactitud en la toma de decisiones. El manejo simplista de un tipo de interés fijo ó constante para toda la vida de la operación resulta irreal e injustificable, conduciendo a conclusiones inaceptables. La "predicción" de las tasas de inflación futuras y posterior simplificación a una tasa constante ó variable por tramos, con las que realizar las actualizaciones de las operaciones financieras, no resulta más que un intento de utilizar niveles fijos de exactitud lejanos posiblemente en la mayoría de las veces de la realidad.

Estas razones conducen, en nuestra opinión, a la necesidad de incorporar a nuestro trabajo diario, técnicas y procedimientos que mejoren los modelos y herramientas utilizados, introduciendo planteamientos que si bien no hacen desaparecer del todo la subjetividad por lo menos la reducen; si bien no nos permitan prever, por lo menos realicemos las previsiones más cercanas al mundo real. Perfecciones en la técnica, estamos seguros de que habrá pero, de momento, nos parece que es un paso adelante.

Comencemos la exposición de nuestro trabajo, ofreciendo las definiciones formales de constitución de capitales, y cálculo de los elementos que intervienen en ésta. A continuación, mostraremos la incorporación del tipo de interés borroso en las operaciones de constitución y cómo se calcularían los cuadros constitutivos de capital por borrosidad. Establecidas las bases de la borrosidad en la constitución de capitales, a continuación, nos centramos en una operación de constitución concreta: los planes de jubilación concertados por un trabajador en activo, con el objetivo de recibir a su jubilación un capital único ó una renta vitalicia. El tratamiento financiero de la operación en los diferentes supuestos en los que se realicen las aportaciones al plan (fijas, variables, aleatorias), se unirá al tratamiento borroso del tipo de interés utilizado en las valoraciones y al IPC también borroso con el que se actualicen éstas.

Se define[1] la operación de constitución como una operación compuesta de prestación múltiple y contraprestación única con vencimiento posterior, ya que siempre puede suponerse que la prestación tiene la finalidad de formar o constituir el capital que se recibirá en concepto de contraprestación.

[1] GIL PELÁEZ, L : *Matemática de las Operaciones Financieras*, Editorial AC, 1987

Los capitales que componen la prestación, también denominados *términos constitutivos,* los denominaremos como: $(a_0,t_0),(a_1,t_1),(a_2,t_2),......(a_n,t_n)$ en donde t_0 representará el origen de la operación, y t_n el final de la operación. Sea $\left(C_n,t_n\right)$el capital constituido al cabo de t_n años ó también llamado *capital de la contraprestación.* La operación se puede concertar con una ley financiera cualquiera que denominaremos como L(t,p) (ley financiera de capitalización).

Por el postulado de equivalencia financiera, se verificará que el capital constituido será:

$$C_n = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \frac{L(t_s,p)}{L(t_n,p)}$$

Para el desarrollo de la ley financiera a aplicar a la operación de constitución, será necesario determinar los réditos i aplicables a la operación. Estos pueden ser:

-Conocidos a priori: $i_1,i_2,i_3,....i_n$, en cuyo caso:

$$C_n = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \prod_{h=s+1}^{n}(1+i_h)$$

-No conocidos a priori ó inciertos, en cuyo caso dentro de un "ambiente financiero " no estable, el tipo de interés sería claramente de naturaleza incierta y por lo tanto sería razonable aplicar la técnica de los números borrosos y de entre ellos, lo más recomendable sería utilizar la distribución triangular. Por tanto se utilizará el parámetro $\overset{\approx}{i}$ tanto efectivo anual medio por cuanto se considera como una magnitud media anual equivalente de los valores anuales que resultan en cada período anual futuro de capitalización. Comencemos pues por la operación de capitalización más sencilla, consistente en una aportación inicial [2]C_{X_a} cierta, el período de capitalización desde la fecha actual (marcada por el momento en el que se inicia la operación de constitución) hasta t_n (momento final) sea también cierto , con lo que el montante vendría por tanto representado por una cantidad borrosa, que indicaríamos por $\overset{\approx}{M}_{xj} = C_{xa}(1+\overset{\approx}{i})^{xj-xa}$ en donde $\overset{\approx}{i}$ representaría el tanto anual correspondiente a cada período futuro de

[2] En una fase inicial del estudio, supondremos una aportación única inicial.

capitalización. Puede obtenerse la distribución de posibilidad del tanto anual medio equivalente, resolviendo la ecuación borrosa:

$$\boxed{C_{xa}(1+\overset{\approx}{i})^{xj-xa} = C_{xa}\prod_{j=1}^{xj-xa}(1+\overset{\approx}{i}_j)}$$

2. TIPOS DE INTERÉS BORROSOS EN LA CONSTITUCIÓN DE CAPITALES

Para el establecimiento de los tipos de interés borrosos, debemos partir del concepto de *número borroso triangular*[3]. Así un número borroso se define como un subconjunto borroso del referencial de los reales, que tiene una función de pertenencia normal (debe existir una x_i para la que $\mu(x)$ toma el valor uno) y convexa (cualquier desplazamiento a la derecha e izquierda de este valor x_i, $\mu(x)$ va disminuyendo). El número borroso triangular posee una singularidad que consiste en que se halla determinado por tres cantidades: una por debajo de la cual no va a descenderse, otra por encima de la cual no será posible llegar, y finalmente, aquella que representa el máximo nivel de presunción. El nivel de presunción α del número borroso puede variar evidentemente de 0 a 1. Sea: m = tipo de interés para el que se alcanza un nivel de presunción α igual a 1. Sea *r* el tipo de interés para el que se alcanza un nivel de presunción α=0 y *s* el tipo de interés que representa el máximo nivel de presunción α=1.

A cada nivel $0 \le \alpha_k \le 1$ aparece un intervalo de confianza $\left[\ r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}\ \right]$, que es posible expresar en función de α_k de la siguiente manera:

$$\left[\ r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}\ \right]=[r + (m-r)\ \alpha_k,\ s + (s-m)\ \alpha_k\ ] \qquad [1]$$

en donde $\alpha \in [0,1]$

En efecto, por semejanza de triángulos:

$$\frac{m-r}{x-r} = \frac{1}{\alpha_k} \text{ Esto es: } x = r + \alpha_k (m-r).$$

En estas condiciones, el tipo de interés a considerar para un período futuro cualquiera t, lo denotamos mediante una tripleta de confianza $(a_t^{(j)}, b_t^{(j)}, c_t^{(j)})$ en donde

[3] Los números borrosos triangulares se caracterizan por una función de pertenencia lineal tanto a la izquierda como a la derecha del núcleo.

j= cada experto j =1,2,3....,n, representado por $a_t^{(j)}$ el valor más bajo, por $b_t^{(j)}$ el más alto que según los expertos puede tomar i_t por $c_t^{(j)}$ valor al que se le asigna el mayor nivel de presunción. A partir de estos datos podríamos obtener los valores medios mediante la fórmula:

$$\overset{\approx}{i} = \frac{1}{n}\sum_j (a_t^{(j)}, b_t^{(j)}, c_t^{(j)}) \qquad [2]$$

Para realizar la descripción de un número borroso mediante una familia de subconjuntos no borrosos, debemos introducir el concepto de α-corte, que juega un papel muy importante en esta teoría. Así, los α-cortes [4], se calcularían así

$$M_{xj} = \{i \in U / \mu_{xj}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0,1] \qquad [3]$$

esto es, el α-corte ó conjunto de nivel α de un subconjunto borroso $\overset{\approx}{M}_{xj}$, que denotaremos por M_{xj}, como el subconjunto no borroso de U (universo) formado por todos aquellos elementos cuyo grado de pertenencia a $\overset{\approx}{M}_{xj}$ sea mayor ó igual que α.

$$M_{xj}(\alpha) = \{C_{xa}(1+i)^{xj-xa} \mid i \in i(\alpha)$$

$$i(\alpha) = [a_t + (b_t - c_t) * \alpha, c_t + (c_t - b_t) * \alpha\ ] \qquad [4]$$

El montante obtenido será una cantidad incierta puesto que el tipo de interés también lo es.

$$\overset{\approx}{M}_{xj} = C_{xa}(1+\overset{\approx}{i})^{xj-xa} = \quad C_{xa}[(100 + c_t + (c_t - b_t\alpha), 100 + a_t + (b_t + a_t\alpha)\,] \qquad [5]$$

Con lo que para cada nivel α se establecería el abanico de posibilidades entre las cuáles confiamos encontrar el resultado real.

3. APLICACIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS BORROSOS A LOS PLANES DE JUBILACIÓN

Una vez desarrollada la inclusión de tipos de interés borrosos en una capitalización en la que la aportación inicial es cierta (el período de capitalización es

[4] Se llama α-corte de un subconjunto borroso $\overset{\approx}{A}$, al conjunto de los valores cuya posibilidad de ocurrencia es mayor o igual que α y lo designaremos por A(α).

conocido a priori) y tan sólo aparece como variable incierta el tipo de interés, procederemos a continuación, a la consideración del tipo de interés borroso en una operación de constitución, en la que el valor final de la renta (capital constituido), y el fondo a constituir, resultarán números borrosos ya que lo es el tipo de interés. Así pues, sea una operación de constitución, del tipo prestación múltiple y contraprestación única al final de la misma. El objeto de tal constitución es la formación de un capital (C_n, t_n) (capital constituido) mediante la entrega de n imposiciones periódicas que reciben el nombre de "*términos constitutivos*".

C_n cuantía de capital a formar ó contraprestación
a_s términos constitutivos
C_s Capital constituido en s
Δ_s Cuota de constitución en s
R_s Capital pendiente de constituir en s
I_s Intereses generados en el año s

De ésta forma:

$\tilde{\tilde{C}}_s = (C_{s-1} + a_s)(1 + \tilde{\tilde{i}}_s)$ dado que el tipo de capitalización es un número borroso, el capital constituido en un período *s* cualquiera también lo será. Por otra parte, las cuotas de constitución para cada período se calcularán de la siguiente forma:

$$\Delta_1 = C_1$$

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_2 = \tilde{\tilde{C}}_2 - \tilde{\tilde{C}}_1 \qquad [6]$$

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_3 = \tilde{\tilde{C}}_3 - \tilde{\tilde{C}}_2$$

....

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_n = \tilde{\tilde{C}}_n - \tilde{\tilde{C}}_{n-1}$$

Los intereses generados en cada período *s*, serán el resultado de aplicar el rédito $\tilde{\tilde{i}}_s$ del período considerado al capital constituido a comienzo del período más la aportación del período. $\tilde{\tilde{I}}_s = (\tilde{\tilde{C}}_{s-1} + a_s)\tilde{\tilde{i}}_s$ [7]

El capital pendiente de constitución, será la diferencia entre el objetivo de constitución C_n y el capital constituido en el período considerado.

$\tilde{\tilde{R}}_s = C_n - \tilde{\tilde{C}}_s$ [8] Por tanto, y según lo anterior, el cuadro sería:

	$\tilde{\tilde{I}}_s$	$\tilde{\tilde{C}}_s$	$\tilde{\tilde{\Delta}}_s$	$\tilde{\tilde{R}}_s$
0				$\tilde{\tilde{C}}_n$
1	$a_1 \tilde{\tilde{i}}_1$	$\tilde{\tilde{C}}_1 = a_1(1+\tilde{\tilde{i}}_1)$	$\tilde{\tilde{C}}_1$	$\tilde{\tilde{C}}_n - \tilde{\tilde{C}}_1$
2	$(\tilde{\tilde{C}}_1 + a_2)\tilde{\tilde{i}}_2$	$(\tilde{\tilde{C}}_1 + a_2)(1+\tilde{\tilde{i}}_2)$	$\tilde{\tilde{C}}_2 - \tilde{\tilde{C}}_1$	$\tilde{\tilde{C}}_n - \tilde{\tilde{C}}_2$
3	$(\tilde{\tilde{C}}_2 + a_3)\tilde{\tilde{i}}_3$	$(\tilde{\tilde{C}}_2 + a_3)(1+\tilde{\tilde{i}}_3)$	$\tilde{\tilde{C}}_3 - \tilde{\tilde{C}}_2$	$\tilde{\tilde{C}}_n - \tilde{\tilde{C}}_3$
....	......	....	.....	......
n-1	$(\tilde{\tilde{C}}_{n-2} + a_n)\tilde{\tilde{i}}_n$	$(\tilde{\tilde{C}}_{n-2} + a_n)(1+\tilde{\tilde{i}}_n)$	$\tilde{\tilde{C}}_{n-1} - \tilde{\tilde{C}}_{n-2}$	$\tilde{\tilde{C}}_n - \tilde{\tilde{C}}_{n-1}$
n	$(\tilde{\tilde{C}}_{n-1})\tilde{\tilde{i}}_n$	$(\tilde{\tilde{C}}_{n-1})(1+\tilde{\tilde{i}}_n)$	$\tilde{\tilde{C}}_n - \tilde{\tilde{C}}_{n-1}$	0

En el caso de que las aportaciones periódicas fueran constantes $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$, el capital constituido al cabo de n años sería:

$$\tilde{\tilde{C}}_n = a \cdot \ddot{S}_{n \rfloor \tilde{\tilde{i}}} = a \cdot \frac{(1+\tilde{\tilde{i}})^n - 1}{\tilde{\tilde{i}}}(1+\tilde{\tilde{i}}) \qquad [9]$$

Si $\tilde{\tilde{C}}_n$ representara el capital constituido a la jubilación mediante un plan de jubilación, este plan podría consistir en establecer un proceso de aportaciones periódicas *a* durante la vida activa laboral del trabajador[5] (desde *xa* (momento en el que se inicia el plan o edad actual alcanzada) hasta *xj* (momento en el que el trabajador se jubila). La fórmula de cálculo sería por tanto:

$$\tilde{\tilde{C}}_n = a \cdot \ddot{S}_{n \rfloor \tilde{\tilde{i}}} = a \cdot \frac{(1+\tilde{\tilde{i}})^{xj-xa} - 1}{\tilde{\tilde{i}}}(1+\tilde{\tilde{i}}) \qquad [10]$$

Tomando como referencia una persona de 42 años que se jubila a la edad de 65 años, y por lo tanto tiene un horizonte temporal como trabajador activo de *xj – xa* = 23

[5] En los planes de prestación definida, los derechos consolidados no inciden en el importe de la prestación. Esta se determina en el propio plan de forma independiente. En los planes de aportación definida, las prestaciones dependen íntegramente del Fondo de Capitalización Acumulado. A más fondo de capitalización, mayores prestaciones.

años, y que realiza aportaciones periódicas anuales de 4.000 €, a continuación se va a calcular el capital constituido a la edad de jubilación.

El tipo de interés borroso $\overset{\approx}{i}$ a considerar para la valoración, lo denotamos mediante una tripleta de confianza media (fórmula [2]), resultando de [8,10,13], por lo que su α-corte será de [8 + 2α, 13 + 3α] . Aplicando la fórmula [10], obtendríamos por ejemplo que con un grado de certeza del 90%, el capital final constituido estará en el intervalo de confianza del nivel 0,1, es decir, entre 351.603,7 y 511.252,27 €. Lógicamente, a medida que se desee alcanzar una mayor precisión, menor será el grado de certeza.

También pudiera darse el caso de que las aportaciones al Plan fueran variables según una ley definida como puede ser en progresión aritmética ó geométrica, ó sin ley definida, en la que las aportaciones las realizara el partícipe según sus posibilidades. Las fórmulas a aplicar serían:

1) <u>aportaciones variables en progresión aritmética de razón *d*</u>, el montante del fondo constituido a lo largo de los p = (xj-xa) años de constitución sería:

$$\overset{\approx}{C}_n = \left(a + \frac{d}{\overset{\approx}{i}}\right) \cdot \ddot{S}_{p\rceil i} - \frac{d}{\overset{\approx}{i}} \cdot p(1 + \overset{\approx}{i}) \qquad [11]$$

en donde *a* representaría la aportación del primer año al plan. Aportación que en los años sucesivos se verá incrementada en la cuantía *d* (razón de la progresión).

En el ejemplo anterior, supongamos que la aportación de 4.000 € corresponde al primer año, y en los años sucesivos las aportaciones que se realicen sufrirán incrementos lineales de 100 €. Así para un grado de certeza del 90% (como hemos considerado antes), el capital final constituido estará en el intervalo de confianza : [382.348 , 748.977].€

2) <u>aportaciones variables en progresión geométrica de razón *q*</u>, el montante del fondo constituido a lo largo de los *p* años de constitución sería:

$$\overset{\approx}{C}_n = a \cdot \frac{(1 + \overset{\approx}{i})^p - q^p}{(1 + \overset{\approx}{i}) - q}(1 + \overset{\approx}{i}) \qquad [12]$$

en donde *a* representaría la aportación del primer año al plan, que en los años sucesivos se vería incrementada en la cuantía *q*.

En el ejemplo anterior, supongamos que la aportación de 4.000 € corresponde al primer año, y en los años sucesivos las aportaciones que se realicen sufrirán incrementos acumulativos del 3%. Así para un grado de certeza del 90% (como hemos considerado antes), el capital final constituido estará en el intervalo de confianza : [384.189 , 817.510].€

1) aportaciones variables aleatoriamente., en este caso, el montante del fondo constituido se calcularía como:

$$\tilde{\tilde{C}}_n = \sum_{j=1}^{xj-xa} a_j \cdot \prod_{j=1}^{xj-xa} (1+\tilde{\tilde{i}}_j) \qquad [13]$$

En el caso de que al alcanzar la edad que da derecho a la obtención del capital de la contraprestación $\tilde{\tilde{C}}_n$, se optara por percibir éste como una pensión periódica mensual (pensión vitalicia), la forma de calcular ésta (suponiendo que adoptara una frecuencia mensual)sería la del valor actual de la renta mensual formada por dichas contraprestaciones, esto es: $\tilde{\tilde{C}}_n = \dfrac{\tilde{\tilde{A}}}{\tilde{\tilde{i}}_{12}}(1+\tilde{\tilde{i}}_{12})$ [14]

En donde $\tilde{\tilde{A}}$ representaría la cuantía mensual a percibir como pensión vitalicia, y los tipos de interés borrosos utilizados seguirían frecuencias mensuales. Sería lógico que las cuantías $\tilde{\tilde{A}}$, se vieran corregidas por el IPC correspondiente (esto es: pensión revalorizable indiciada con el IPC), con lo que podría calcularse una distribución de posibilidad para los valores estimados para el tipo medio del IPC a partir de la información obtenida de los expertos, la cuál vendrá definida por un número borroso triangular.

En estas condiciones, la equivalencia financiero-actuarial en el momento de alcanzar la edad de jubilación se produciría entre el fondo borroso constituido $\tilde{\tilde{C}}_n$ y las pensiones borrosas $\tilde{\tilde{A}}$.La fórmula que hemos empleado para el cálculo de $\tilde{\tilde{C}}_n$ a partir de $\tilde{\tilde{A}}$, ha sido determinada a partir de la consideración de que la renta vitalicia se aproxima a una renta perpetua de infinitos términos cuyo valor actual se determinará a partir del límite de la fórmula $\tilde{\tilde{C}}_n = Lim\left[\, a \cdot \ddot{S}_{n\rceil \tilde{i}} \,\right]$, en lo que sería una solución típica de la Matemática Financiera.

4. CONCLUSIONES

La imprecisión de los datos económicos que proviene de las dificultades de medición de las grandes magnitudes, la variabilidad en el tiempo, y la influencia del entorno, hacen recomendable la aplicación de la lógica borrosa en la medida que puede superar las limitaciones de la teoría probabilística. La existencia de un tipo de interés determinado ejerce indudable influencia sobre las decisiones del empresario cuando la consideración del tipo de interés represente la base de comparación entre diferentes alternativas de inversión ó financiación. A efectos valorativos, su elección ofrece dudas cuando se comparan inversiones que implican diferencias altas de unos períodos a otros. Por otra parte, la homogeneización del mismo es necesaria para abordar la medición de la operación. Todo ello, conlleva a que se elijan tipos de interés calculatorios fijos difíciles de admitir en la realidad y por supuesto discutibles.

En la presente comunicación, hemos mostrado la lógica y métrica de la operación de constitución de capitales y, en concreto a los planes de jubilación, analizando los puntos débiles en el tratamiento de las variables fundamentales que intervienen en éstas operaciones, para a continuación introducir la borrosidad en el tratamiento. De ésta forma, hemos llegado a la conclusión fundamental de que la técnica empleada, si bien conlleva ciertos grados de subjetividad (en la elección de grados), proporciona un acercamiento más completo y adaptado a la realidad.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

-AZORÍN POCH, F [1979]: *Aplicaciones de los conjuntos borrosos a la estadística*. Edit. Ministerio de Economía. Instituto Nacional de Estadística.

-FERNÁNDEZ PASCUAL, A [2000]: “El tratamiento de la incertidumbre en las previsiones de tesorería”. *Actualidad Financiera /*Septiembre.

-GIL ALUJA, J (2007) *Algoritmos para el tratamiento de fenómenos económicos complejos. Bases, desarrollos y aplicaciones*. Ed. Universitaria Ramón Areces. Madrid (ISBN 13-978-84-8004-784-6). En colaboración con Ana María Gil Lafuente.

-GIL LAFUENTE, A [1993]: *El análisis financiero en la incertidumbre*. Edit. Ariel Economía.

-GIL PELÁEZ, L [1987]: *Matemática de las Operaciones Financieras*. Edit. AC

-KAUFMANN, A; GIL ALUJA, J [1986]: *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la Gestión de las Empresas*. Edit. Milladoiro.

-[1990]: *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre.* Edit. Centro de Estudios Ramón Areces.

-[1987]: *Técnicas operativas para el tratamiento de la incertidumbre.* Edit. Hispanoeuropea.
-[1993]. *Técnicas especiales para la gestión de Expertos.* Edit. Milladoiro.

-[1992]: *Técnicas de Gestión de Empresa: Previsiones, Decisiones y Estrategias.* Edit. Pirámide.

-KOSKO, B [1995]: *Pensamiento borroso*. Edit. Drakontos crítica.

-LÓPEZ GONZALEZ, E; MIERES J.R; MENDAÑA, C y RODRÍGUEZ, M.A [1996]: "The selection of an entry mode strategy into foreign markets under conditions of environmental uncertainty: a new approach to the market analysis using a spreadsheet to process quantitative fuzzy data" *Fuzzy Economic Review.* Núm.1.vol I., Mayo.

-NILSSON, NILS. (2005):*Inteligencia Artificial: Una Nueva Síntesis,* Editorial McGraw Hill, Madrid (España),1ª, p 1-9 y 33-34.

-REIG MULLOR, J; MANUEL, E; TRIGUEROS PINA, J.A. [2000]: "Lógica borrosa y su aplicación a la contabilidad". *Revista Española de Financiación y Contabilidad.* Vol. XXIX nº 103.

-TRILLAS, E; ALSINA, C; TERRICABRAS, J [1995]: *Introducción a la lógica borrosa.* Edit. Ariel Matemática.

-TRILLAS, E; GUTIÉRREZ RÍOS, J [1992]: *Introducción en aplicaciones de la lógica borrosa.* Consejo superior de Investigaciones Científicas.

-ZADEH, L.A. [1965]: Fuzzy Sets *Information and Control,* 8

- [1978]: Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility *Fuzzy sets and Systems*, 1