



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**ANÁLISIS CINEMÁTICO COMPUTACIONAL DE  
SISTEMAS MULTICUERPO: FORMULACIÓN BASADA  
EN ECUACIONES DE GRUPO Y COORDENADAS  
RELATIVAS**

Mario Miralles Delgado

Curso 2016-2017

---

Dirigido por:  
Dr. Mariano Saura Sánchez



# **Análisis cinemático computacional de sistemas multicuerpo: Formulación basada en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas**

Mario Miralles Delgado

---

Máster en Ingeniería Industrial  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial  
25 de abril de 2018



---

# Índice

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>9</b>
	<b>Introducción</b>	<b>9</b>
1.1	Modelización de sistemas multicuerpo . . . . .	9
1.2	Objetivos y alcance . . . . .	12
1.3	Estructura del documento . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Formulaciones globales en coordenadas naturales</b>	<b>15</b>
2.1	Modelización de sistemas 2D . . . . .	15
2.2	Caso particular: Cuadrilátero articulado . . . . .	17
2.3	Modelización de sistemas 3D . . . . .	19
2.4	Caso particular: Corredera espacial . . . . .	20
2.5	Análisis cinemático . . . . .	23
2.6	Análisis cinemático del cuadrilátero articulado . . . . .	26
2.7	Análisis cinemático de la corredera espacial . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Formulación topológica basada en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales</b>	<b>29</b>
3.1	Estudio de la cinemática basada en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales . . .	30
3.2	Resultados de sistemas escalables . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Formulaciones topológicas en coordenadas relativas</b>	<b>39</b>
4.1	Modelización de sistemas 2D y 3D . . . . .	39
4.2	Caso 2D: cuadrilátero articulado . . . . .	42
4.3	Caso 3D: corredera espacial . . . . .	44
4.4	Análisis cinemático de sistemas 2D y 3D . . . . .	47
4.5	Caso particular 2D: cinemática del cuadrilátero articulado . . . . .	47
4.6	Caso particular 3D: cinemática de la corredera espacial . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Formulación basada en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas</b>	<b>53</b>
5.1	Modelización basada en ecuaciones de grupo . . . . .	53
5.2	Aplicación al análisis del cuadrilátero articulado . . . . .	55
5.3	Aplicación al análisis de la corredera espacial . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Estudio comparativo de coste computacional de las formulaciones analizadas.</b>	
	<b>Principales ventajas e inconvenientes</b>	<b>67</b>
6.1	Cuadrilátero articulado. Comparación de tiempos de ejecución . . . . .	67
6.2	Corredera espacial. Comparación de tiempos de ejecución . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Conclusiones y desarrollos futuros</b>	<b>75</b>
7.1	Principales ventajas e inconvenientes . . . . .	75
7.2	Desarrollos futuros . . . . .	76

<b>Anexos</b>	<b>77</b>
<b>A Matrices del grupo estructural del actuador lineal de la plataforma de Stewart en coordenadas naturales</b>	<b>77</b>
<b>B Matrices de la formulación topológica en coordenadas relativas de la corredera espacial</b>	<b>79</b>
<b>C Matrices del grupo estructural de la diada 3R del cuadrilátero articulado en coordenadas relativas</b>	<b>81</b>
<b>D Matrices del grupo estructural de la diada 2S1P de la corredera espacial en coordenadas relativas</b>	<b>83</b>

## **Resumen**

Este trabajo pretende desarrollar una formulación para la resolución del problema cinemático computacional de sistemas multicuerpo, basada en las ecuaciones de grupo y coordenadas relativas, a fin de comparar el tiempo de resolución con el que se obtendría al resolver el mismo mecanismo mediante otras dos formulaciones diferentes: global en coordenadas naturales y basada en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales.

### **Palabras clave:**

Sistemas multicuerpo, ecuaciones de grupo, coordenadas relativas, coordenadas naturales.

## **Abstract**

This work aims to develop a formulation for the resolution of the computational kinematic problem of multibody systems, based on the group equations and relative coordinates, in order to compare the resolution time with the one that would be obtained when solving the same mechanism by means of two different formulations: global in natural coordinates and based on group equations and natural coordinates.

### **Keywords:**

Multibody systems (MBS), group equations, relative coordinates, natural coordinates.





# Capítulo 1

---

## Introducción

---

El análisis cinemático computacional es una herramienta fundamental para el estudio de sistemas mecánicos, que tanto físicos como ingenieros emplean de forma recurrente. La determinación de la estructura cinemática también resulta de especial interés como un primer paso para el diseño y modelización automática de un sistema multicuerpo, así como para su posterior análisis cinemático.

### 1.1 Modelización de sistemas multicuerpo

Se dice que las coordenadas utilizadas para definir la posición de un sistema mecánico son dependientes si su número es mayor que el número de grados de libertad del sistema. El objetivo es emplear suficientes variables para definir perfectamente la posición de cada elemento del mecanismo. De esta forma se evitan las dificultades que aparecen con coordenadas independientes. [1]

El número de grados de libertad del sistema se puede calcular fielmente mediante criterios de movilidad. Por ejemplo, el criterio de Grübler en mecanismos planos o Kutzbach-Grübler en mecanismos espaciales.

Dado que se cuenta con más parámetros que grados de libertad, existirán unas relaciones que los ligen. Estas relaciones se denominan ecuaciones de restricción. Si designamos por  $n$  al número de coordenadas dependientes utilizado,  $g$  al número de grados de libertad del mecanismo y  $r$  al número de ecuaciones de restricción que aparecen entre las coordenadas, ha de cumplirse la relación,

$$r = n - g \tag{1}$$

Se ha dicho que lo característico de las coordenadas dependientes es que definen perfectamente la posición de cada elemento del mecanismo. Sin embargo, esto puede lograrse de muchas formas. Los tres tipos clásicos de coordenadas dependientes son: coordenadas relativas, coordenadas de punto de referencia y coordenadas naturales.[2]

Las coordenadas relativas fueron las primeras en ser utilizadas. Sitúan cada elemento del mecanismo con respecto al anterior en la cadena cinemática. Se hallan asociadas a los pares cinemáticos del mecanismo. En cada par serán necesarias tantas coordenadas como grados de libertad relativos permita el par entre los elementos que une. La figura 1 muestra un mecanismo plano modelizado con

coordenadas relativas.[3]

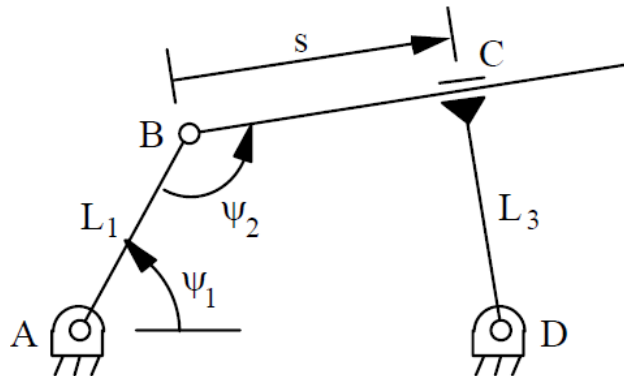


Figura 1 : Coordenadas relativas.

Las ecuaciones de restricción que ligan las variables proceden de la condición de cierre de los distintos lazos que componen la cadena cinemática. Así, en el ejemplo de la figura 1 sólo hay un lazo y al ser un problema plano la ecuación vectorial resultante tiene dos componentes o puede dividirse en dos ecuaciones escalares.

La principal ventaja de las coordenadas relativas es su reducido número, que conduce a un tamaño del problema pequeño. También facilitan la consideración de fuerzas y momentos aplicados en los pares cinemáticos.

Las formulaciones a que dan lugar las coordenadas relativas son complicadas pues aparecen numerosas funciones trigonométricas, lo que repercute negativamente aumentando el coste computacional.

Por su parte, las coordenadas de punto de referencia sitúan cada elemento del mecanismo con independencia de los demás.[4] [5] Para ello, se eligen las coordenadas de un punto cualquiera del elemento -típicamente el centro geométrico o centro de masas- y la orientación del mismo. En el caso plano, la orientación quedará definida con un ángulo, y en el espacial requerirá el empleo de algunos de los múltiples sistemas existentes para definir la orientación de un triedro en el espacio: ángulos de Euler, ángulos de Bryant, matriz de rotación, parámetros de Euler, etc.

Las ecuaciones de restricción surgen ahora de imponer las uniones -pares cinemáticos- entre los elementos, ya que inicialmente se han definido como si estuvieran libres, sin ataduras. En la figura 2 se modeliza en coordenadas de punto de referencia el mismo mecanismo modelizado antes en coordenadas relativas.

Las ventajas de estas coordenadas se encuentran en lo sistemático de su definición y del establecimiento de ecuaciones de restricción, lo que hace que el proceso sea fácilmente automatizable, y en la posibilidad que ofrecen de situar un elemento directamente, esto es, sin necesidad de conocer la

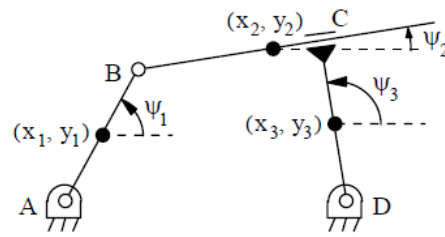


Figura 2 : Coordenadas de punto de referencia.

posición de los demás.

Como principal inconveniente está su elevado número que conduce a problemas de tamaño mayor, y la complejidad de las ecuaciones de restricción que ligan las variables.

Finalmente, conviene describir las coordenadas naturales pues en este trabajo se van a comparar resultados entre mecanismos resueltos en coordenadas relativas y mecanismos resueltos en coordenadas naturales.

Las coordenadas naturales sitúan cada elemento con independencia de los demás. Pueden verse como una evolución de las coordenadas de punto de referencia (Figura 3).

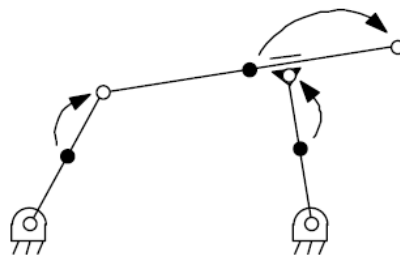


Figura 3 : Evolución de las coordenadas de punto de referencia.

Los puntos de referencia emigran a los pares, contribuyendo así simultáneamente a la definición de los dos elementos que se unen en el par correspondiente. Una consecuencia inmediata es que ya no son necesarias variables de tipo angular para la definición de la orientación de cada elemento, cuestión que complicaba el problema, especialmente en el caso tridimensional.

En la figura 4 se muestra el mismo mecanismo modelizado en coordenadas naturales.

Cuando se modeliza en coordenadas naturales, las ecuaciones de restricción que ligan las variables proceden de dos fuentes: condiciones de sólido rígido y condiciones de par cinemático (en ciertos pares).

Las ventajas de estas coordenadas son: definición simple y sistemática; ecuaciones de restricción

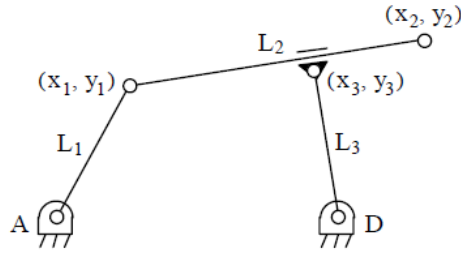


Figura 4 : Modelización de cuadrilátero articulado mediante coordenadas naturales.

fáciles de establecer y sencillas (no aparecen funciones trigonométricas); sitúan a cada elemento con independencia de los demás; número reducido, generalmente intermedio entre las relativas y las de punto de referencia (en el ejemplo, tres relativas, nueve de punto de referencia y seis naturales); inmediata interpretación geométrica de los resultados, más sencilla que en las otras coordenadas.

Como inconveniente está el hecho de que tienen un mayor número de ecuaciones de restricción que las coordenadas relativas y que la utilización de estas coordenadas exige familiarizarse con ellas.

Es frecuente que, en el ámbito de la resolución de la cinemática de mecanismos, se emplee primero una aproximación topológica basada en Ecuaciones de Grupo. Ésta consistirá en la división de un sistema multicuerpo, con métodos grafo-analíticos o computacionales, en un conjunto ordenado de cadenas cinemáticas desmodrómicas (número de movimientos independientes igual al número de grados de libertad) llamadas Grupos Estructurales. Debido al limitado número de coordenadas necesarias para definir los Grupos y a que se pueden resolver individualmente, en el orden indicado por su estructura cinemática, esta aproximación, a pesar de estar poco extendida y desarrollada, ha demostrado ser más eficiente que otras globales en el análisis cinemático de sistemas multicuerpo escalables, planos y espaciales.

## 1.2 Objetivos y alcance

En este trabajo se pretende desarrollar una formulación cinemática para la solución de sistemas multicuerpo, basada en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas. Posteriormente, se realizará un estudio para analizar el coste computacional que supone resolver mecanismos con esta nueva formulación, además de una comparativa con otras formulaciones: global en coordenadas naturales y basada en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales.

Se resolverán una serie de grupos estructurales específicos, tanto de mecanismos planos como espaciales, mediante la programación de subrutinas en coordenadas relativas. Existen multitud de grupos estructurales que siguiendo la metodología propuesta se podrían resolver de forma análoga.

## 1.3 Estructura del documento

En este apartado se expone el contenido de los diferentes capítulos en que se divide el documento.

En el segundo capítulo se abarca el estudio de formulaciones globales y coordenadas naturales, para lo cual definiremos en primer lugar la diferencia entre coordenadas naturales y coordenadas relativas. A continuación se expondrá una sucesión de ejemplos de mecanismos planos y espaciales y su resolución en coordenadas naturales.

El tercer capítulo se centra en el análisis de formulación topológica basada en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales. Además del estudio de la cinemática asociada, se procederá a la obtención de resultados de sistemas anteriores escalables o ampliables mediante la unión con nuevos grupos estructurales.

El cuarto capítulo consiste en el estudio de formulaciones topológicas en coordenadas relativas, realizando un análisis cinemático de un mecanismo plano (cuadrilátero articulado) y de un sistema espacial (corredera espacial), que son los mismos mecanismos que los analizados en coordenadas naturales en los trabajos de referencia.

En un quinto capítulo se tratará la creación de subrutinas para el análisis cinemático de grupos estructurales básicos utilizando la formulación basada en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas. Para disponer de ejemplos resueltos con esta formulación, se aplicará la misma a los ejemplos ya citados, de cuadrilátero articulado y corredera espacial.

En el sexto capítulo se realizarán las comparativas en precisión de cálculo y coste computacional de las formulaciones en coordenadas naturales: globales y topológicas basadas en ecuaciones de grupo, con la basada en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas y se expondrán las ventajas e inconvenientes de ésta última.

En el séptimo capítulo se expondrá una serie de conclusiones y posibles desarrollos futuros aplicando el método desarrollado.

Estos resultados podrán servir al Departamento de Ingeniería Mecánica de la UPCT para utilizar los modelos matemáticos y subrutinas creadas en Matlab y Fortran 90 para interactuar en tiempo real con sistemas mecánicos experimentales a una mayor velocidad, en caso de validación de la hipótesis de que con la formulación basada en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas se resuelva la cinemática de un mecanismo en menor tiempo que con otras formulaciones. Con ello, el Departamento podrá iniciar nuevas líneas de investigación y de colaboración con empresas del sector industrial.

Mario Miralles Delgado  
Murcia, 04 de Octubre de 2017.



## Capítulo 2

---

### *Formulaciones globales en coordenadas naturales*

---

En este capítulo se va a plantear la modelización de sistemas planos y espaciales en formulación global y coordenadas naturales. Así mismo se resolverá a modo de ejemplo un caso plano, el cuadrilátero articulado, y un caso espacial, el sistema manivela-corredera espacial.

#### 2.1 Modelización de sistemas 2D

En el plano, las coordenadas naturales son coordenadas cartesianas de puntos de sólidos del mecanismo, que se denominarán puntos básicos. Existen ciertas normas que deben respetarse a la hora de modelizar un mecanismo plano en coordenadas naturales. Estas normas son:

- Cada sólido rígido debe contener, al menos, dos puntos básicos, ya que en caso contrario no queda su posición definida.
- En cada par de revolución o articulación debe situarse un punto básico. De esta forma, los dos sólidos que se unen en el par comparten un punto, quedando así automáticamente impuesta la condición de par de revolución.
- En pares prismáticos deben existir dos puntos básicos alineados con el eje del par que sirvan para definirlo.
- Pueden utilizarse más puntos básicos por conveniencia: definición de ángulos o distancias, puntos concretos de interés, etc.

Cuando se modeliza en coordenadas naturales, las ecuaciones de restricción que ligan las variables proceden de dos fuentes: condiciones de sólido rígido y condiciones de par cinemático (en ciertos pares).

El criterio general para conocer cuántas ecuaciones de restricción deben imponerse para asegurar que un sólido se comporte como rígido en el caso plano es el siguiente. Un sólido libre en el plano tiene tres grados de libertad. Por tanto, si se ha modelizado con  $n_i$  variables, el número de ecuaciones de restricción que habrá que introducir será:

$$r_i = n_i - 3 \quad (2)$$

Veamos el caso de un sólido modelizado con dos puntos básicos (figura 5).

En este caso,  $n_i = 4$ , pues las variables son las coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  de los puntos 1 y 2. Entonces, según la ecuación (2), será preciso imponer una única restricción.

Si  $L_{12}$  es la distancia que separa a los puntos 1 y 2, la ecuación de restricción será una condición de distancia constante entre ambos puntos,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (3)$$

En la bibliografía de referencia se puede consultar cómo se modelizaría un sólido con tres y cuatro puntos básicos.

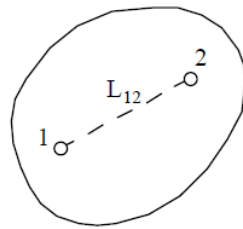


Figura 5 : Sólido modelizado con dos puntos básicos.

También existe un criterio para conocer el número de ecuaciones de restricción que deben establecerse para que un par quede correctamente modelizado. Un par cinemático en el plano puede ser de clase I o de clase II. Es decir, puede permitir un único movimiento relativo entre los elementos que une, restringiendo dos, o bien permitir dos movimientos relativos, restringiendo sólo uno.

Pues bien, el criterio es el que sigue: un par obliga a establecer tantas ecuaciones de restricción entre variables como grados de libertad restringe en el movimiento relativo de los sólidos que en él se unen. Es decir, un par de clase I implica dos restricciones y uno de clase II implica una.

Vamos a presentar un ejemplo de aplicación de este criterio a un par prismático (figura 6).

El par prismático es de clase I. Es preciso introducir, por tanto, dos restricciones que impidan los dos movimientos relativos que restringe el par. Para que ello sea posible, la modelización del par en coordenadas naturales ha de cumplir ciertas condiciones. Pero veamos cómo se hace y luego trataremos de explicarlo.

Las ecuaciones de restricción entre las variables son las siguientes:



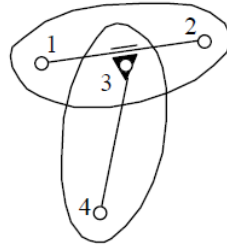


Figura 6 : Par prismático en el plano.

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) & = 0 \\ (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) - c & = 0 \end{cases} \quad (4)$$

La primera ecuación es una ecuación de producto vectorial nulo entre los vectores  $\vec{12}$  y  $\vec{13}$ . Asegura, por tanto, que el punto 3 se encontrará siempre alineado con los puntos 1 y 2. Como ya se indicó anteriormente, de las tres ecuaciones de producto vectorial, sólo la tercera, la ecuación en  $z$ , tiene sentido en el caso plano. La segunda ecuación es una ecuación de producto escalar constante. Tiene como fin impedir que se produzca un giro relativo entre los dos elementos. El valor de la constante  $c$  depende del ángulo que forme el vector  $\vec{12}$  con el  $\vec{34}$ .

## 2.2 Caso particular: Cuadrilátero articulado

En este apartado se presenta el ejemplo de un caso plano resuelto con formulación global y coordenadas naturales. Concretamente se estudia el ejemplo clásico del cuadrilátero articulado.

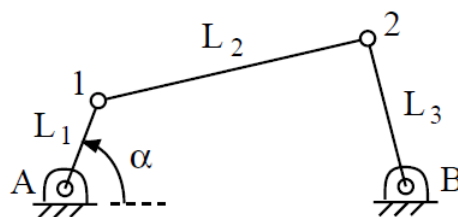


Figura 7 : Cuadrilátero articulado.

El vector de coordenadas del mecanismo sería el siguiente:

$$q^t = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha\} \quad (5)$$

Nuestro problema consiste en determinar las posiciones de los puntos 1 y 2 para un determinado

valor del ángulo  $\alpha$ , pues conocidas éstas, todos los eslabones del mecanismo quedan perfectamente situados. Esto se conoce como problema de posición inicial.

En primer lugar, para la resolución de la cinemática de un mecanismo se define la geometría: longitudes de las barras y posiciones de los puntos fijos A y B, en este caso.

En general, las variables del problema se ven ligadas por un cierto número de ecuaciones de restricción, que se agrupan en el denominado vector de restricciones  $\Phi$ . Entonces, el sistema cuya solución nos proporciona los valores de las coordenadas buscadas es:

$$\Phi(q, t) = 0 \rightarrow \Phi(q^d, q^i, t) = 0 \quad (6)$$

Como se ve en (13), el vector de coordenadas se puede separar en coordenadas dependientes  $q^d$ , coordenadas independientes  $q^i$  y el tiempo,  $t$ . Las coordenadas dependientes son las que queremos calcular y en el ejemplo que se está analizando corresponden a las posiciones de los puntos 1 y 2:  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Las coordenadas independientes representan grados de libertad controlados mediante actuadores externos (motor eléctrico, pistón hidráulico o neumático, etc), de forma que su valor se puede ir variando, a voluntad del analista, para analizar la respuesta del sistema durante ciclos de movimiento completos. En nuestro caso, la coordenada independiente es el ángulo de giro de la manivela con la horizontal,  $\alpha$ .

En nuestro caso, el sistema considerado es eclerónimo, de modo que las posiciones no dependen del tiempo, con lo que queda:

$$\Phi(q) = 0 \rightarrow \Phi(q^d, q^i) = 0 \quad (7)$$

En el ejemplo del cuadrilátero articulado la ecuación vectorial de restricción resulta:

$$\begin{cases} (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \\ (x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 - L_3^2 = 0 \\ (x_1 - x_A) - L_1 \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Sin embargo, la resolución de un sistema no lineal es complicada, por lo que se recurre al método de Newton-Raphson para resolver la misma mediante iteraciones sucesivas.

## 2.3 Modelización de sistemas 3D

En el espacio, las coordenadas naturales son coordenadas cartesianas de puntos de los sólidos del mecanismo y componentes cartesianas de vectores unitarios rígidamente unidos a los sólidos del mecanismo.

Análogamente a como se hizo en el caso plano, se pueden citar varias normas generales de modelización para tomar contacto con estas coordenadas:

- Cada sólido rígido del mecanismo ha de contener suficientes puntos y vectores unitarios para que su movimiento quede perfectamente definido: esto implica un mínimo de dos puntos y un vector unitario no alineados, o tres puntos no alineados, o un punto y dos vectores unitarios distintos en cada sólido. También puede definirse un sólido con sólo dos puntos, pero en este caso aceptamos que el sólido posea sólo cinco grados de libertad, ya que no se detecta la rotación del mismo alrededor del eje definido por los dos puntos. Puede ser conveniente en el caso de barras con rótulas en los extremos.
- En la modelización de los pares cinemáticos se tratará de compartir puntos y vectores unitarios.
- Convendrá compartir un punto en aquellos pares que realmente comparten algún punto material, como el par de revolución, el esférico o la junta universal.
- Convendrá compartir un vector unitario en aquellos pares que contengan un eje de rotación o traslación, como el par de revolución, el prismático o el cilíndrico.
- Un vector unitario puede ser sustituido por dos puntos.
- Pueden definirse puntos y vectores unitarios adicionales siempre que se estime oportuno.

Se describen a continuación sistemáticamente las distintas ecuaciones de restricción que han de establecerse para asegurar el carácter rígido de los sólidos de un mecanismo cualquiera, y definir los pares cinemáticos que se presenten.

En cuanto a las restricciones de sólido rígido, en general, si se emplean  $n_i$  variables para definir un cierto sólido rígido en el espacio -que posee seis grados de libertad-, el número de ecuaciones de restricción que habrá que imponer es,

$$r_i = n_i - 6 \quad (9)$$

Veamos a continuación un sólido modelizado con dos puntos y dos vectores unitarios (figura 8).

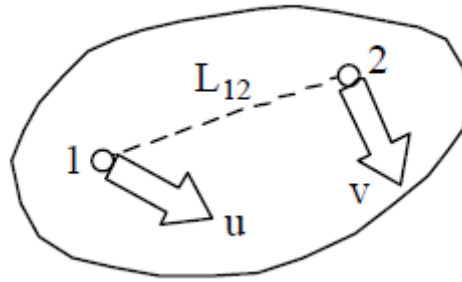


Figura 8 : Sólido modelizado con dos puntos y dos vectores unitarios.

Dado que se utilizan doce variables para la modelización del sólido y en el espacio se tienen seis grados de libertad, será preciso establecer seis ecuaciones de restricción que las relacionen.

Las ecuaciones de restricción a introducir en este caso son:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \\ u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 1 = 0 \\ v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos \beta_1 \\ \vec{u} \cdot \vec{r}_{P_2P_1} = u \cdot r_{P_2P_1} \cdot \cos \beta_2 \\ \vec{v} \cdot \vec{r}_{P_2P_1} = v \cdot r_{P_2P_1} \cdot \cos \beta_3 \end{array} \right. \quad (10)$$

La primera es una ecuación de distancia constante entre los dos puntos. La segunda y la tercera son condiciones de módulo unitario de los dos vectores. Las tres últimas ecuaciones son de producto escalar constante, que mantienen fijo el ángulo entre los dos vectores cuyo producto escalar se calcula.

## 2.4 Caso particular: Corredera espacial

En esta sección, se va a realizar la formulación global y coordenadas naturales del mecanismo manivela-biela-corredera espacial mostrado en la figura 9.

El par de revolución situado en el origen de coordenadas tiene su eje contenido en el plano  $xy$ , formando un ángulo de  $\beta = 30^\circ$  con el eje  $x$ , según puede apreciarse en la figura 9. Esto hace que, al girar la barra unida a dicho par, el carrito experimente un movimiento rectilíneo de ida y vuelta de cierta amplitud sobre la corredera. Si el ángulo que forma el eje del par con el eje  $x$  se modifica, también lo hace la amplitud de carrera del carrito. Este es pues un mecanismo que permite obtener un movimiento rectilíneo alternativo de amplitud variable.

La modelización de este mecanismo en coordenadas naturales se muestra en la figura 10.

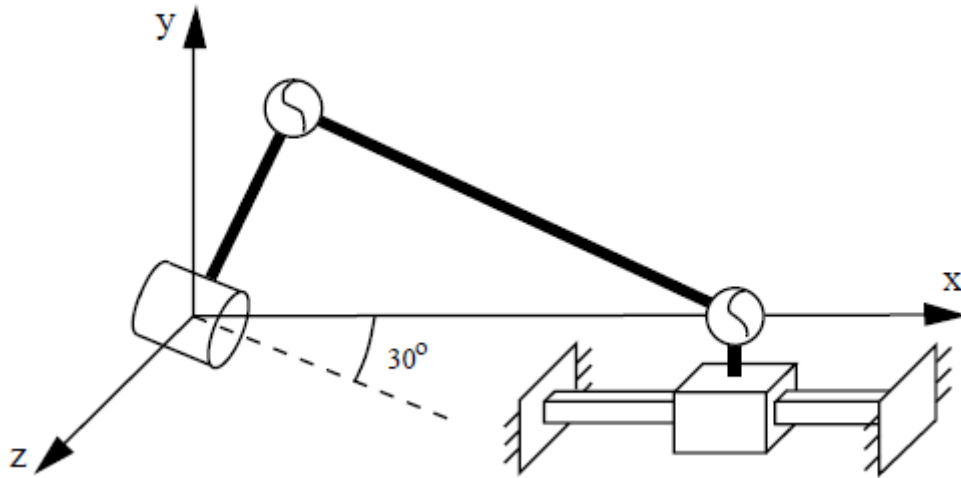


Figura 9 : Mecanismo de corredera espacial.

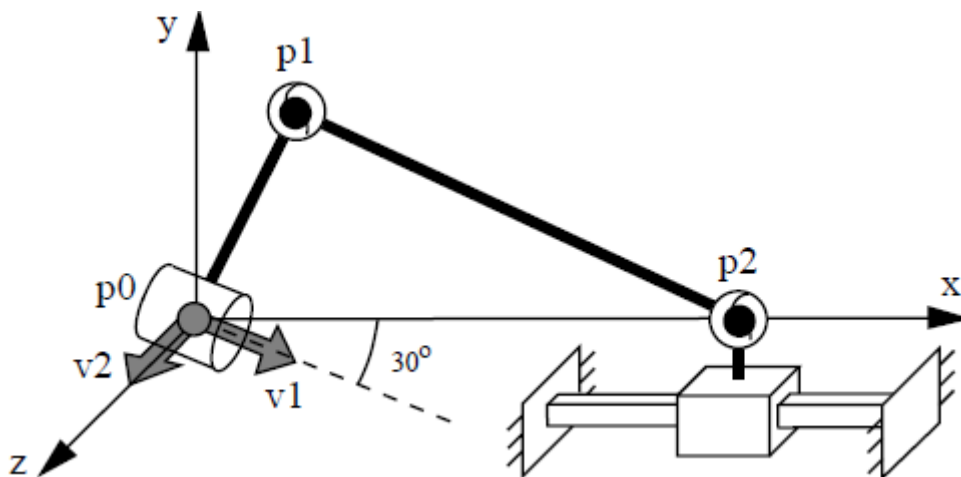


Figura 10 : Modelización del mecanismo corredera espacial.

Se utilizan cinco variables: las tres coordenadas del punto 1, la coordenada  $x$  del punto 2 y un ángulo  $\alpha$  (que no aparece en la figura por claridad del dibujo), que es el formado por el vector unitario fijo 2 y el vector que va del punto fijo 0 al punto móvil 1, medido según el vector unitario fijo 1.

El vector unitario  $v_1$  se puede descomponer en las siguientes componentes:

$$v_1 = \{v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}\} = \{\cos(\beta), -\text{sen}(\beta), 0\} \quad (11)$$

siendo  $\beta = 30^\circ$  el ángulo que forma el eje del par de revolución contenido en el plano  $xy$  con respecto a  $x$ .

Las ecuaciones de restricción son:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - L_1^2 = 0 \\ (x_1 - x_0)v_{1x} + (y_1 - y_0)v_{1y} + (z_1 - z_0)v_{1z} = 0 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_2^2 = 0 \\ (z_1 - z_0) - L_1 \cos\alpha = 0 \\ -(y_1 - y_0) - L_1 v_{1x} \operatorname{sen}\alpha = 0 \\ (x_1 - x_0) - L_1 v_{1y} \operatorname{sen}\alpha = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

La primera ecuación es una ecuación de distancia constante que asegura el carácter rígido de la barra 1. La segunda es una ecuación de producto escalar constante nulo entre la primera barra y el vector unitario 1, que obliga a la barra a moverse en el plano perpendicular al eje del par de revolución. La tercera es de nuevo una ecuación de distancia constante, esta vez entre los extremos de la barra 2.

En realidad son 4 ecuaciones de restricción, pero la cuarta puede escogerse como una cualquiera de las tres últimas. Esto se debe a que para el ángulo puede escogerse una ecuación en coseno (producto escalar) o en seno (producto vectorial). Así la cuarta ecuación procede de establecer el producto escalar entre el vector con origen en el punto 0 y extremo en el punto 1, y el vector unitario 2. Las dos últimas ecuaciones son las componentes x e y del producto vectorial entre los mismos vectores. La selección de la cuarta ecuación depende del valor del ángulo en cada caso. Por tanto, se sigue el criterio definido en la figura 11.

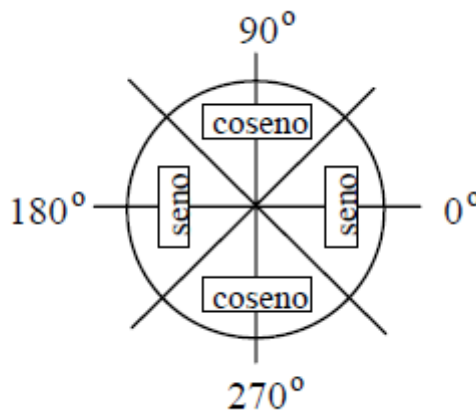


Figura 11 : Criterio de elección de la ecuación de ángulo.

Sin embargo, se pueden incluir también ambas ecuaciones siempre, aunque sean dependientes, pero se asegura así que en todo momento hay alguna válida. Este método se conoce como introducir ecuaciones redundantes. Otra posibilidad es introducir una única ecuación que sea suma o diferencia

de dos de las ecuaciones de coseno y seno, pero no siempre da buen resultado.

## 2.5 Análisis cinemático

En general, las variables del problema se ven ligadas por un cierto número de ecuaciones de restricción, que se agrupan en el denominado vector de restricciones  $\Phi$ . Entonces, el sistema cuya solución nos proporciona los valores de las coordenadas buscadas es:

$$\Phi(q, t) = 0 \rightarrow \Phi(q^d, q^i, t) = 0 \quad (13)$$

Por lo general, este sistema de ecuaciones de restricción es no lineal y se requiere la aplicación de métodos numéricos para su resolución. En el presente trabajo se aplica el método de Newton-Raphson para la resolución del sistema por iteraciones sucesivas. Consiste en desarrollar una serie de Taylor alrededor de una posición inicial de las variables  $q_0$  más o menos aproximada, que se tomará como punto de partida:

$$\Phi(q) = \Phi(q_0) + \Phi_q(q_0)(q - q_0) = 0 \quad (14)$$

donde  $q$  es el vector de coordenadas (dependientes e independientes) del mecanismo,  $q_0$  son las coordenadas en la posición inicial,  $\Phi(q)$  es el vector de ecuaciones de restricción,  $\Phi(q_0)$  son las restricciones en la posición inicial,  $\Phi_q$  es la matriz jacobiana de las ecuaciones de restricción respecto a las variables.

Vemos que constituye un sistema cuya solución para las posiciones viene dada por:

$$q = q_0 - \Phi_q^{-1}(q_0)\Phi(q_0) \quad (15)$$

Una vez modelizado el sistema mecánico mediante las correspondientes ecuaciones de restricción, se procede a la resolución del problema de velocidad, cuyas ecuaciones obtenemos derivando respecto al tiempo el problema de posición (13), obteniendo la siguiente expresión:

$$\dot{\Phi} = 0 \rightarrow \Phi_q^d \dot{q}^d + \Phi_q^i \dot{q}^i + \Phi_t = 0 \quad (16)$$

En nuestro caso, el problema de posición no depende del tiempo, luego  $\Phi_t = 0$ , resultando:

$$\Phi_q^d \dot{q}^d + \Phi_q^i \dot{q}^i = 0 \quad (17)$$

$$\Phi_q^d \dot{q}^d = -\Phi_q^i \dot{q}^i \quad (18)$$

De donde puede despejarse el vector de velocidad de las variables dependientes:

$$\dot{q}^d = -(\Phi_q^d)^{-1} \Phi_q^i \dot{q}^i \quad (19)$$

El problema de aceleración consiste en determinar las derivadas temporales segundas (aceleraciones) de todas las variables del mecanismo. Para obtener su expresión derivamos (18) respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\dot{\Phi}_q^d \dot{q}^d + \Phi_q^d \ddot{q}^d = -\dot{\Phi}_q^i \dot{q}^i - \Phi_q^i \ddot{q}^i \quad (20)$$

$$\Phi_q^d \ddot{q}^d = -[\Phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\Phi}_q^i \dot{q}^i + \dot{\Phi}_q^d \dot{q}^d] \quad (21)$$

donde

$$\dot{\Phi}_q \dot{q} = \dot{\Phi}_q^i \dot{q}^i + \dot{\Phi}_q^d \dot{q}^d \quad (22)$$

Vemos como hemos englobado los términos dependientes e independientes en un único término, resultando finalmente la ecuación de aceleración:

$$\ddot{q}^d = -(\Phi_q^d)^{-1} [\Phi_q^i \ddot{q}^i + \dot{\Phi}_q \dot{q}] \quad (23)$$

Se puede resumir el procedimiento para la resolución del problema cinemático en código Matlab en los siguientes pasos:

- (1) Definición de la geometría del mecanismo y determinación de la velocidad angular y aceleración angular de la variable independiente.
- (2) Valores iniciales de las incógnitas para comenzar las iteraciones.
- (3) Bucle que recorre varias posiciones de la variable independiente, en nuestro caso desde 60° a 90°, con incrementos de 5° de la variable. Este bucle contiene todo el código: el problema de posición (resuelto con el método de Newton-Raphson), el problema de velocidad y el de aceleración.



(a) Método de Newton-Raphson para la solución del problema de posición.

$$q = q_0 - (\Phi_q^d)^{-1}(q_0)\Phi(q_0) \quad (24)$$

donde previamente se calculan las funciones de restricción  $\Phi$  y su jacobiana respecto a las variables dependientes  $\Phi_q^d$ .

(b) Solución del problema de velocidad.

$$\dot{q}^d = -(\Phi_q^d)^{-1}\Phi_q^i\dot{q}^i \quad (25)$$

donde previamente se calcula la jacobiana de las funciones de posición respecto a las variables independientes  $\Phi_q^i$ , mientras que la velocidad de la coordenada independiente  $\dot{q}^i$  es un parámetro determinado por el analista.

(c) Solución del problema de aceleración.

$$\ddot{q}^d = -(\Phi_q^d)^{-1}[\Phi_q^i\ddot{q}^i + \dot{\Phi}_q\dot{q}] \quad (26)$$

donde hemos de calcular la derivada del jacobiano de las funciones de restricción respecto a las coordenadas dependientes e independientes o jacobiano global,  $\dot{\Phi}_q$  y multiplicarlo por las velocidades calculadas, incluyendo también la velocidad de la variable independiente.

La secuencia general de la modelización del cuadrilátero articulado se muestra en el Algoritmo 1.

**Algorithm 1:** Global solution.

---

```

MBData                                     // read MultiBody model
1: for  $t = t_0.timeStep:t_f$  do
2:   evaluate( $q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i$ )           // evaluate independent
      coordinates from  $[\Phi(q^i, t)]_{f \times 1}$ 
      // Position problem
3:   evaluate( $\Phi$ ) //  $[\Phi(q, t)]_{m \times 1}$  constraint equations
4:   error = norm( $\Phi$ )
5:   while error > tolerance do
6:     evaluate  $\Phi_{q^d}$                        // Jacobian  $\Phi_{q(m \times n)}$ 
7:     solve  $(\Phi_{q^d})_{k-1} (q_k^d - q_{k-1}^d) = \Phi_{k-1}$  // solve
      positions
8:     evaluate( $\Phi$ )
9:     error = norm( $\Phi$ )
10:  end
      // Velocity problem
11:  evaluate( $\Phi_q$ )                             // Jacobian  $\Phi_{q(m+f \times n+f)}$ 
12:  solve  $\Phi_q \dot{q} = -\Phi_t$ 
      // Acceleration problem
13:  evaluate  $\dot{\Phi}_q \dot{q}$ 
14:  solve  $\Phi_q \ddot{q} = -\dot{\Phi}_q \dot{q} - \dot{\Phi}_t$ 
15:   $t = t + \Delta t$                              // update time
16: end

```

---

## 2.6 Análisis cinemático del cuadrilátero articulado

Para la resolución del sistema de ecuaciones de restricción se aplica el método de Newton-Raphson, de donde se despeja el vector de posición como sigue:

$$q = q_0 - \Phi_q^{-1}(q_0)\Phi(q_0) \quad (27)$$

siendo el vector aproximado,

$$q_0 = \{x_1^0, y_1^0, x_2^0, y_2^0, \alpha\} \quad (28)$$

y la matriz jacobiana

$$\Phi_q(q) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - x_A) & 2(y_1 - y_A) & 0 & 0 & 0 \\ -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2(x_2 - x_B) & 2(y_2 - y_B) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & L_1 \operatorname{sen} \alpha \end{pmatrix} \quad (29)$$

Entonces resolviendo el sistema en la primera iteración obtendremos una solución  $q$  que llamaremos  $q_1$ , y que tampoco satisfará completamente las ecuaciones de restricción, pero estará más cerca.

$$q_1 = \{x_1^1, y_1^1, x_2^1, y_2^1, \alpha\} \quad (30)$$

Se puede observar que el valor de la variable  $\alpha$  no varía, ya que se trata del valor del grado de libertad conocido, y que precisamente indica la posición en que queremos montar el mecanismo.

Por tanto, el método de Newton-Raphson convergerá tras una serie de iteraciones hacia la solución. Para cuantificar en cada iteración en un solo número el incumplimiento de las ecuaciones de restricción, se define el siguiente error,

$$e = \sqrt{\sum_{i=1}^m \Phi_i^2} \quad (31)$$

El método iterativo finaliza cuando el error indicado esté por debajo de un determinado nivel de tolerancia fijado por el analista (valores típicos:  $e = 1\text{E-}10$ ).

Se ha implementado un programa en Matlab para este problema cinemático con la formulación global y coordenadas naturales, correspondiéndose la solución a la obtenida en [6]. Por ejemplo para  $\alpha = 60^\circ$  se obtiene que cuando las restricciones están por debajo de un cierto nivel de tolerancia especificado por el analista (en este caso  $e = 1\text{E-}10$ ) y el método, por tanto, converge:

$$q = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \alpha\} = \{1.0, 1.7321, 8.4125, 4.7413, 1.0472\} \quad (32)$$

El problema de los desplazamientos finitos consiste en variar un determinado incremento (pequeño para que el método converja más rápido) el valor de la variable independiente y obtener de nuevo los valores de posición de las variables dependientes. En nuestro caso se ha hecho un recorrido desde el valor de  $\alpha = 60^\circ$  hasta  $\alpha = 90^\circ$ , con incrementos de  $5^\circ$  del ángulo.

Si, por ejemplo,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\dot{\alpha} = 1$ , el vector de velocidades en el cuadrilátero plano resulta:

$$\dot{q}^d = \{\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{\alpha}\} = \{-1.7321, 1.0, -1.1674, -0.3909, 1.0\} \quad (33)$$

Si suponemos  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\dot{\alpha} = 1$ ,  $\ddot{\alpha} = 1$ , el vector de aceleraciones resulta:

$$\ddot{q}^t = \{\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_2, \ddot{\alpha}\} = \{-2.7321, -0.7321, -2.8201, -1.2639, 1.0\} \quad (34)$$

## 2.7 Análisis cinemático de la corredera espacial

Dado que la última ecuación varía dependiendo del ángulo, las jacobianas también variarán su cuarta fila en función del mismo.

Una vez obtenido el vector de ecuaciones de restricción para las posiciones, las mismas ecuaciones (19)(23) utilizadas para el análisis cinemático de sistemas 2D se pueden emplear para resolver la cinemática de sistemas 3D.

Se han calculado las posiciones, velocidades y aceleraciones para una vuelta completa de la barra de entrada, obteniendo así la solución cinemática del movimiento completo del mecanismo, presentada en la tabla siguiente:

$t$	$x_1$	$y_1$	$z_1$	$x_2$	$\varphi$	$\dot{x}_1$	$\dot{y}_1$	$\dot{z}_1$	$\dot{x}_2$	$\dot{\varphi}$	$\ddot{x}_1$	$\ddot{y}_1$	$\ddot{z}_1$	$\ddot{x}_2$	$\ddot{\varphi}$
0	0	0	2	5.657	0	-24	-41.57	0	-24	24	0	0	-1152	101.8	0
.021	-0.5	-0.866	1.732	5.179	30	-20.78	-36	-24	-18.95	24	288	498.8	-997.7	338.1	0
.043	-0.866	-1.5	1	4.857	60	-12	-20.78	-41.57	-10.18	24	498.8	864	-576	447.9	0
.065	-1	-1.732	0	4.745	90	0	0	-48	0	24	576	997.7	0	475.7	0
.087	-0.886	-1.5	-1	4.857	120	12	20.78	-41.57	10.18	24	498.8	864	576	447.9	0
.109	-0.5	-0.866	-1.732	5.179	150	20.78	36	-24	18.95	24	288	498.8	997.7	338.1	0
.131	0	0	-2	5.657	180	24	41.57	0	24	24	0	0	1152	101.8	0
.153	0.5	0.866	-1.732	6.179	210	20.78	36	24	22.61	24	-288	498.8	997.7	-237.9	0
.175	0.866	1.5	-1	6.589	240	12	20.78	41.57	13.82	24	-498.8	-864	576	-549.7	0
.196	1	1.732	0	6.745	270	0	0	48	0	24	-576	-997.7	0	-676.3	0
.218	0.866	1.5	1	6.589	300	-12	-20.78	41.57	-13.82	24	-498.8	-864	-576	-549.7	0
.240	0.5	0.866	1.732	6.179	330	-20.78	-36	24	-22.61	24	-288	498.8	-997.7	-237.9	0
.262	0	0	2	5.657	360	-24	-41.57	0	-24	24	0	0	-1152	101.8	0

Figura 12 : Simulación cinemática en Matlab del mecanismo de corredera espacial .

## Capítulo 3

---

### *Formulación topológica basada en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales*

---

La formulación global vista hasta ahora es muy valiosa cuando se trata de modelizar de forma automática el sistema a analizar. No obstante tiene como carencia el hecho de ser poco eficiente en cuanto a coste computacional se refiere. Por su parte, las formulaciones cinemáticas topológicas basadas en la descomposición en lazos independientes se consideran muy eficientes pero poco generalistas.

La aproximación basada en ecuaciones de grupo combina las ventajas de ambas formulaciones pudiendo ser útil para ocupar el hueco que dejan las otras dos: global y topológica.

Hasta la fecha, se ha comprobado que el método topológico basado en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales ofrece una mayor modularidad, flexibilidad y eficiencia que el método global.

El objetivo de este trabajo consistirá en comparar la eficiencia de un método topológico basado en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas con el citado método basado en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales, para sistemas escalables con hasta 550 coordenadas, así como su comparación con métodos globales.

Se parte de la hipótesis de que en coordenadas relativas, al tener que resolver con un menor número de coordenadas, para sistemas escalables se notarán diferencias de tiempo computacional (no será así para mecanismos sencillos, donde no se esperan diferencias notables). Además se resolverán muchas veces matrices muy pequeñas mientras que con el método global se resolverá una matriz enorme una sola vez. Las dimensiones de la matriz penalizan más que el número de veces que haya que resolver sistemas más pequeños, con lo que se espera que el método global sea bastante más lento.

Se ha estudiado a su vez en [7] la modelización computacional de un sistema multicuerpo, así como la obtención de su estructura cinemática utilizando el criterio de Kutzbach-Grübler para determinar la movilidad de una cadena cinemática y la definición de grupo estructural.

La consulta de [8] se hace necesaria para abordar el análisis dinámico en coordenadas naturales mediante la división de un mecanismo en grupos estructurales.

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en [9] para el análisis de sistemas multicuerpo escalables con el método basado en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales.

### 3.1 Estudio de la cinemática basada en ecuaciones de grupo y coordenadas naturales

En sistemas holónomos, una cadena cinemática está cinemáticamente determinada (es desmodrómica) si, del vector de coordenadas que define la posición de todos sus eslabones se controlan un número  $n_c$  de coordenadas igual a la movilidad  $L_c$  (grados de libertad, GDL) de la cadena. La teoría de Análisis Estructural define un Grupo Estructural (GE) como una cadena cinemática desmodrómica ( $n_c = L_c$ ). Los GE que no se pueden dividir en GE con menor número de sólidos se denominan GE simples.[10] De la condición de GE simple y utilizando el criterio de Grübler para determinar la movilidad de las cadenas cinemáticas, se obtiene la expresión (35) que permite comprobar si una cadena cinemática puede formar un GE. En (35),  $S_c$  indica el número de GDL permitidos por los P pares cinemáticos formados por los  $N_m$  eslabones móviles de la cadena.

$$S_c - n_c = 3 \cdot (P - N_m) \quad (35)$$

---

**Algorithm 2:** Kinem. Structural Group solution

---

```

Solve_3RSG(*ARGS)      /* funct.CALL */
%% I. Position problem %%
evaluate  $\Phi$  → mFi
error = norm( $\Phi$ )
while error > tolerance do
| evaluate  $\Phi_q$  → Jacob
| extract  $\Phi_\varphi$ 
| solve  $\varphi_k = \varphi_{k-1} - (\Phi_\varphi)_{k-1}^{-1} \cdot \Phi_{k-1}$ 
| evaluate  $\Phi$  → mFi
| error = norm( $\Phi$ )
end
%% II. Velocity problem %%%
evaluate  $\Phi_q$  → Jacob
extract  $\Phi_\varphi$ ; extract  $\Phi_h$ 
solve  $\dot{\varphi} = -(\Phi_\varphi)^{-1} \Phi_h \dot{h}$ 
%% III. Acceleration problem %%%
evaluate  $\dot{\Phi}_q \dot{q}$  → Fiqqqp
evaluate  $-\left[ \Phi_h \ddot{h} + \dot{\Phi}_q \dot{q} \right]$ 
solve  $\ddot{\varphi} = -(\Phi_\varphi)^{-1} \left[ \Phi_h \ddot{h} + \dot{\Phi}_q \dot{q} \right]$ 

```

---

La estructura cinemática de un MBS identifica cuál es el conjunto ordenado de GE de que está compuesto. Se han desarrollado trabajos que permiten la descomposición de MBS planos mediante métodos computacionales [7].

El siguiente paso consiste en lanzar subrutinas que resuelven dichos grupos estructurales en un orden determinado por la estructura cinemática.

Conviene presentar el algoritmo de una subrutina 3RSG llamada por el programa principal encargada de resolver la cinemática de un GE formado por dos sólidos y tres pares de rotación.

A continuación se resume el cálculo cinemático de un grupo estructural en una serie de pasos[11][12]:

- (1) Identificación de coordenadas de grupo y parámetros. Se define un sistema local de coordenadas solidario a cada eslabón y se selecciona el vector de coordenadas adecuado (naturales, de punto de referencia o relativas) que define la cadena cinemática. Este vector se divide en dos subgrupos de coordenadas: dependientes  $\varphi$  e independientes  $h$ .
- (2) Resolución del problema de posición del GE. Se definen las ecuaciones de restricción que relacionan las coordenadas del grupo entre sí. Se obtiene la matriz jacobiana  $\Phi_\varphi$  de las restricciones establecidas respecto a las coordenadas dependientes y se utiliza el método iterativo de Newton-Raphson para obtener el valor de las coordenadas dependientes en cada paso de iteración  $k$ . Cuando las funciones de restricción tiendan a cumplirse y el error esté por debajo de una tolerancia determinada se saldrá automáticamente del bucle iterativo. El método de Newton-Raphson aplicado a las posiciones se expresa como sigue:

$$\Phi(q) = 0 \rightarrow (\Phi_\varphi)_{k-1} \cdot (\varphi_k - \varphi_{k-1}) = -\Phi_{k-1} \quad (36)$$

- (3) Resolución del problema de velocidad. Las velocidades de las coordenadas independientes del grupo  $\dot{h}$  son conocidas, por lo que se puede formular el problema de velocidad derivando las ecuaciones de restricción respecto del tiempo y resolviendo para las velocidades dependientes (37). Los términos del jacobiano  $\Phi_\varphi$  y  $\Phi_h$  se corresponden a los jacobianos respecto a las variables dependientes e independientes, respectivamente.

$$\dot{\Phi}(q) = 0 \rightarrow \Phi_\varphi \cdot \dot{\varphi} = -[\Phi_h \cdot \dot{h}] \quad (37)$$

- (4) Resolución del problema de aceleración: una vez determinadas las velocidades, y conocidas las aceleraciones de las coordenadas independientes del grupo  $\ddot{h}$ , pueden determinarse las aceleraciones derivando el problema de velocidad respecto del tiempo (38).

$$\ddot{\Phi}(q) = 0 \rightarrow \Phi_\varphi \cdot \ddot{\varphi} = -[\Phi_h \cdot \ddot{h} + \dot{\Phi}_{qG} \cdot \dot{q}_G] \quad (38)$$

- (5) Resolución cinemática de otros puntos de interés (POI). En ocasiones puede resultar de interés determinar posición, velocidad y aceleración de otros puntos del sistema (no sólo los que son variables dependientes). Por ejemplo: centro de masa, o puntos de referencia para otros GE.

A modo de ejemplo, se resuelve el grupo estructural de un actuador lineal correspondiente a una plataforma de Stewart, formado por dos sólidos (cilindro y vástago) y tres pares: esférico, prismático y cardan. En amarillo se observan los dos puntos usados P0 y P1, en rojo los 5 vectores con numeración local de cada actuador y en verde los dos vectores comunes usados para cardan 6 y 7 también con numeración local.

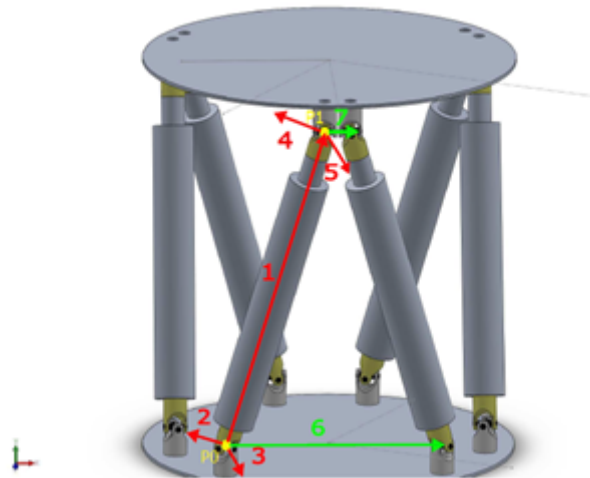


Figura 13 : Puntos y vectores empleados para la modelización de cada actuador.

Las ecuaciones de restricción de este grupo estructural en coordenadas naturales y matrices necesarias para el análisis cinemático se presentan en el Anexo.

### 3.2 Resultados de sistemas escalables

Los sistemas escalables son aquellos que componen su estructura por existencia de un grupo estructural concreto un número determinado de veces, 'n'. Para la obtención de la solución cinemática de estos sistemas basta con repetir la subrutina el número 'n' de veces que aparezca el grupo estructural en cuestión.

Para analizar las ventajas y desventajas de la formulación topológica basada en Ecuaciones de Grupo con respecto a la formulación global se utilizan dos sistemas mecánicos escalables (en el sentido de que se pueden incrementar a voluntad el número de coordenadas que definen el modelo): un sistema plano, el cuadrilátero articulado, y otro tridimensional, la suspensión de un camión [9].



- Cuadrilátero articulado: mecanismo plano (Figura 14) formado por una manivela  $\overline{A_1B_1}$ , una barra  $\overline{B_1C_1}$  y un balancín  $\overline{C_1D_1}$ . Para aumentar el tamaño del problema es suficiente con incrementar el número  $k$  de diadas en el modelo. Cada diada introduce dos nuevos cuerpos:  $(2k + 1)$  y  $(2k + 2)$ , unidos internamente mediante la junta  $C_k$  y fijado a la diada previa y al bastidor en las articulaciones  $B_k$  y  $D_k$  respectivamente. El movimiento de entrada o GDL controlado se define a velocidad constante de  $\dot{\theta}_1 = 1rad/s$ . Todas las longitudes se establecen en 6, excepto  $\overline{A_1B_1} = 2$ .

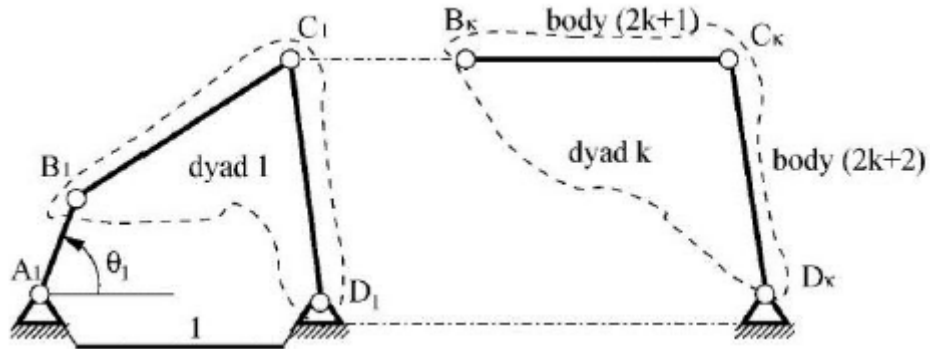


Figura 14 : Cuadrilátero escalable.

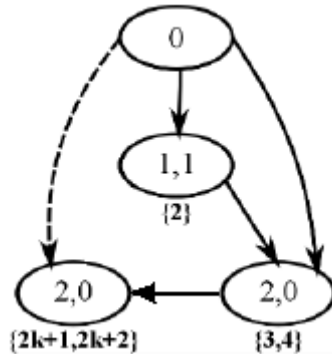


Figura 15 : Diagrama estructural del cuadrilátero escalable.

- Suspensión de camión: Para aumentar el tamaño del problema es suficiente con incrementar el número de ejes simulados. Cada uno de estos ejes es un MBS de dos GDL formado por 13 sólidos y diferentes tipos de juntas. El diagrama estructural correspondiente a un eje muestra los GE que lo forman y su orden de resolución. Un eje está formado por cinco GE. Las características de cada grupo (y sólidos que lo forman, entre llaves) se indican a continuación:
  - SG-I{2,3,4,5}: modelizado con 8 puntos y 9 vectores, cuenta con juntas cardan (2-4 y 2-5), esféricas(1-4, 1-5 y 2-3) y de revolución (1-3). Los dos GDL del sistema corresponden a los desplazamientos verticales de las dos ruedas del eje. Requiere la determinación de otros puntos de interés para la resolución del resto de grupos.
  - SG-II{6,8} y SG-III{7,9}: cada grupo se modeliza con 3 puntos, 5 vectores y 1 ángulo, y cuentan con juntas cardan (6-8 y 7-9), esféricas (1-8 y 1-9) y de revolución (2-6 y 2-7).
  - SG-IV{10,11} y SG-V{12,13}: cada grupo se modeliza con 2 puntos, 5 vectores y 1 distancia, y cuentan con juntas esféricas (1-11, 1-13), cardan (2-10, 2-12) y par prismático (10-11, 12-13).

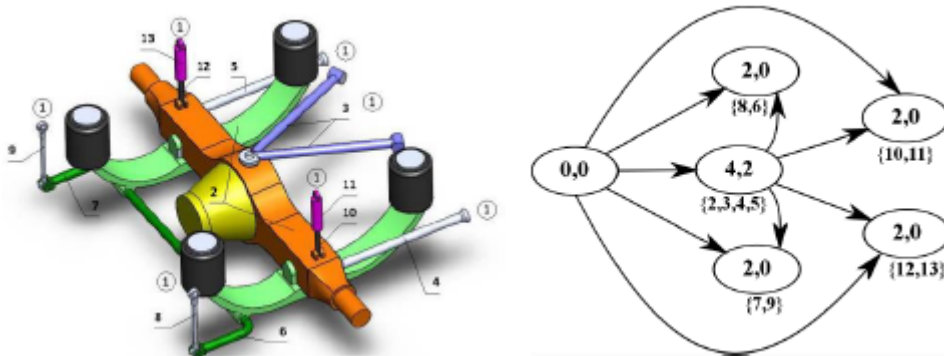


Figura 16 : Transmisión de un camión. Diagrama estructural.

Con objeto de comparar la eficiencia de las diferentes soluciones, en [9] se analiza la posición, velocidad y aceleración de las variables de los MBS presentados. Los resultados obtenidos se presentan en dos grupos de datos: Tiempos CPU de cada sistema simulado y speed-ups obtenidos de la solución topológica frente a la global, para el caso de la suspensión del camión, al ser el sistema más complejo (caso más desfavorable).

La tabla de la figura 17 muestra los resultados del tiempo de ejecución en función del número de coordenadas que define el MBS. En todos los casos el tiempo sigue una tendencia lineal según aumenta el número de coordenadas. En la nomenclatura, FBL hace referencia al cuadrilátero articulado y TS a la suspensión de camión. En el caso del cuadrilátero articulado, la solución global se presenta como FBL-G\_MA27 y la topológica por grupos en coordenadas naturales como FBL-TP. En el sistema de suspensión de un camión, se presenta una solución global (TS-G\_MA27) y cuatro soluciones topológicas (TS-TPA\_MA27, TS-TPA\_LAP, TS-TPS\_MA27, TS-TPS\_LAP). Existen dos métodos topológicos: automático (TS-TPA\_MA27, TS-TPA\_LAP) y simbólico (TS-TPS\_MA27, TS-TPS\_LAP). En los análisis realizados, MA\_27 hace referencia al solver de álgebra lineal para matrices simétricas y dispersas [13] y LAP hace referencia al solver LAPACK de MKL [14]. Se observa que el solver Lapack es más eficiente que el solver para matrices simétricas y dispersas.

Nº de coords.	FBL-G_MA27	FBL-TP	TS-G_MA27	TS-TPA_MA27	TS-TPA_LAP	TS-TPS_MA27	TS-TPS_LAP
114	0,045	<<0,015	1,258	1,185	0,530	0,702	0,374
225	0,123	<<0,015	2,707	2,324	1,076	1,435	0,764
336	0,264	<<0,015	4,035	3,432	1,638	2,106	1,154
447	0,421	<<0,015	5,499	4,618	2,135	2,870	1,544
558	0,607	<<0,015	7,100	5,741	2,699	3,526	1,949

Figura 17 : Tiempos de ejecución (en s) de las soluciones simuladas en función del número de coordenadas, para los mecanismos de cuadrilátero escalable (FBL) y suspensión de camión (TS).

En la figura 18 se muestran con líneas discontinuas los resultados del cuadrilátero escalable (FBL) y con líneas continuas los resultados de la suspensión de camión (TS).

Se observa que para el cuadrilátero articulado es más eficiente la solución topológica (FBL-TP) pues para una dimensión del sistema de 550 coordenadas, el tiempo de CPU es muy próximo a cero mientras que la formulación global (FBL-G\_MA27) consume unos 0,607 segundos (también es bastante rápida).

En un sistema más complejo como el de suspensión de un camión, se nota más la diferencia de tiempos entre la solución global (TS-G\_MA27) y las cuatro soluciones topológicas (TS-TPA\_MA27, TS-TPA\_LAP, TS-TPS\_MA27, TS-TPS\_LAP). Como ya se apuntó, existen dos métodos topológicos: automático (TS-TPA\_MA27, TS-TPA\_LAP) y simbólico (TS-TPS\_MA27, TS-TPS\_LAP), siendo

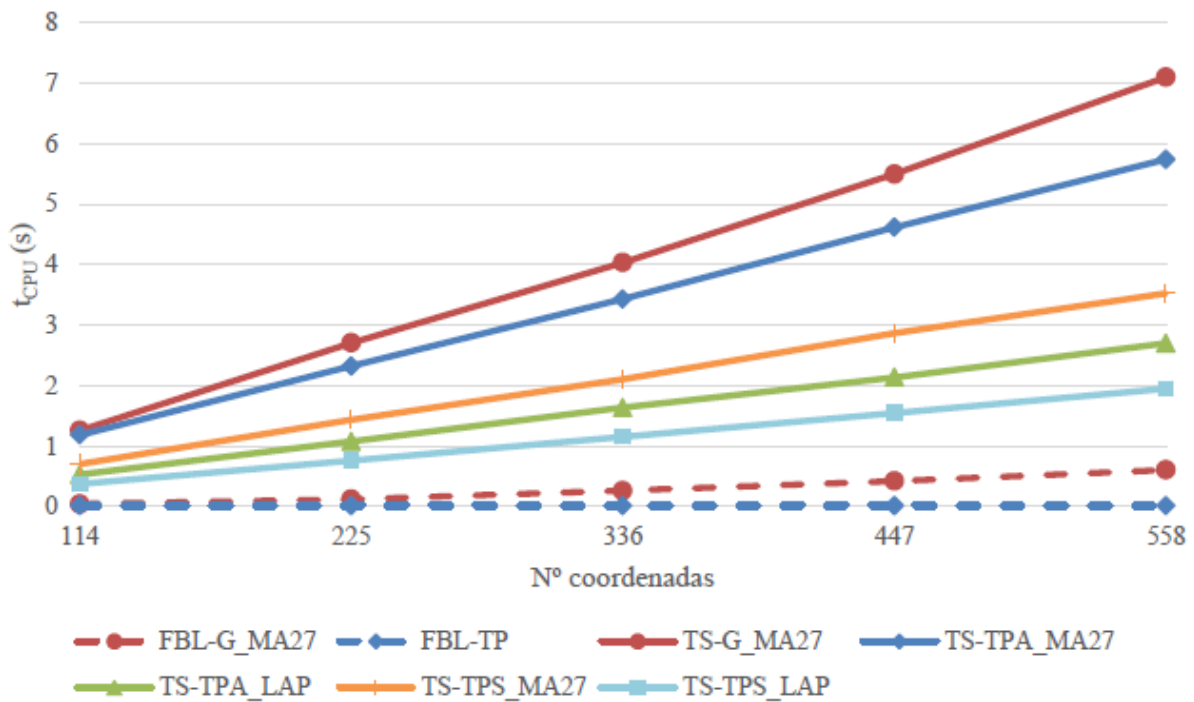


Figura 18 : Tiempo CPU ( $t_{CPU}$ ) en segundos en función del número de coordenadas para el análisis cinemático de los dos casos de estudio: cuadrilátero escalable (FBL) y suspensión de camión (TS).

bastante más rápido el método de resolución simbólico.

Finalmente, para valorar el rango medio de mejora obtenido por la formulación topológica frente a la global, se ha obtenido el speed-up logrado en cada simulación ejecutada. El speed-up se obtiene como la relación entre el tiempo de referencia en formulación global dividido por el tiempo obtenido con la formulación topológica  $S = t_{global}/t_{topologico}$ .

Nº de coords.	TS-TPA_MA27	TS-TPA_LAP	TS-TPS_MA27	TS-TPS_LAP
114	1,1 (5,8%)	2,4 (57,9%)	1,8 (44,2%)	3,4 (70,3%)
225	1,2 (14,8%)	2,5 (60,3%)	1,9 (47,0%)	3,5 (71,8%)
336	1,2 (14,9%)	2,5 (59,4%)	1,9 (47,8%)	3,5 (71,4%)
447	1,2 (16,0%)	2,6 (61,2%)	1,9 (47,8%)	3,6 (71,9%)
558	1,2 (19,1%)	2,6 (62,0%)	2,0 (50,3%)	3,6 (72,5%)
<b>Media</b>	<b>1,2 (14,1%)</b>	<b>2,5 (60,2%)</b>	<b>1,9 (47,4%)</b>	<b>3,5 (71,6%)</b>

Figura 19 : Mejora de rendimiento obtenida por las cuatro soluciones para suspensión de camión: speed-up y valor porcentual.

En la figura 19 se observa que el modo simbólico [15] [16] es más eficiente que el modo automático de obtención de matrices y vectores. Esto se debe a que el modo simbólico aporta directamente las

matrices y vectores necesarios para el análisis, no tiene que crearlos ni operar con ellos.

También se observa que la solución simbólica por grupos tiene un mejor rendimiento con el solver MKL (TS-TPS\_LAP, S=3,5) que con el solver para matrices dispersas (TS-TPS\_MA27, S=1,9).

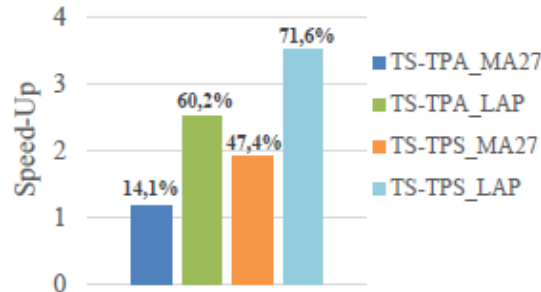


Figura 20 : Speed-Up medio logrado.

Los resultados obtenidos en [9] permiten destacar una serie de ventajas obtenidas por la formulación topológica de ecuaciones de grupo:

- Flexibilidad. La aproximación topológica permite el uso de cualquier tipo de coordenadas (punto de referencia, naturales, relativas, mixtas) para modelizar un grupo estructural y resolver su cinemática.
- Modularidad. La solución de cada GE puede programarse, optimizarse y compilarse en una subrutina independiente que puede incluirse en una extensa librería de GE.
- Generalidad frente a eficiencia. Dependiendo del número de coordenadas para modelizar cada GE, se pueden emplear diferentes métodos para resolver su cinemática, siendo el método simbólico el más eficiente.
- Método disperso frente a denso. Como el análisis cinemático de cada GE se ejecuta de forma independiente, la eficiencia de cualquier subrutina de GE puede mejorarse seleccionando el solver más adecuado en función de la estructura del grupo. De este modo, en caso de grupos de dimensiones reducidas, los solvers densos como MKL son muy eficientes, consiguiendo los mejores resultados (S=3,5 en MKL frente a S=2,5 para MA27) en el caso de la suspensión. Para MBS formados por grupos con dimensiones mayores (superiores a 60) ya puede ser interesante combinar con solvers dispersos como MA27.



## Capítulo 4

---

### *Formulaciones topológicas en coordenadas relativas*

---

Dedicamos este cuarto capítulo a presentar la resolución de diversos problemas cinemáticos utilizando una formulación topológica en coordenadas relativas. En coordenadas relativas las ecuaciones de restricción se obtienen planteando ecuaciones de cierre de lazo. Se trata de ecuaciones vectoriales que proporcionarán, en el plano y en el espacio, dos y tres ecuaciones escalares respectivamente [17][18][19].

En primer lugar analizaremos de nuevo el caso plano del cuadrilátero articulado, para con posterioridad efectuar un análisis cinemático del mecanismo manivela-biela-corredora espacial.

#### 4.1 Modelización de sistemas 2D y 3D

Para modelizar en formulación topológica en coordenadas relativas se procede de un mismo modo tanto en el caso plano como en el espacial. En sendas situaciones, la obtención de las ecuaciones de restricción se realiza como sigue:

- Abrir la cadena por uno o varios pares cinemáticos, en función del número de lazos cerrados.
- Establecer las ecuaciones de cierre de los distintos lazos de la cadena cinemática. En lugar de las condiciones de sólido rígido y de par cinemático que se imponían para obtener las ecuaciones de restricción en coordenadas naturales, en relativas se procede a establecer ecuaciones de cierre de lazo.
- En la ecuación de cierre de lazo se suman vectores referidos al sistema global. Para ello, se han de expresar las componentes del vector referidas a los ejes de su sistema local, para con posterioridad aplicar la matriz de transformación correspondiente a una rotación  $R_{zyx}$ , que es composición de las rotaciones del sistema local con respecto al sistema global según los giros  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  en ejes locales. La matriz de transformación correspondiente a una rotación se calcula como el producto de tres matrices que incluyen los giros mencionados:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Para efectuar el cambio de base o tránsito del sistema local al global, las matrices han de multiplicarse en un cierto orden, obteniéndose una matriz de cambio de base:

$$R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x \quad (39)$$

La matriz de transformación de rotación es:

$$R_{zyx} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \sin(\beta) \sin(\phi) - \cos(\phi) \sin(\gamma) & \sin(\gamma) \sin(\phi) + \cos(\gamma) \cos(\phi) \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \cos(\phi) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \sin(\phi) & \cos(\phi) \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \sin(\phi) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \sin(\phi) & \cos(\beta) \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Vamos a explicar con unas figuras(figura 22) como se realizarían las transformaciones de rotación.

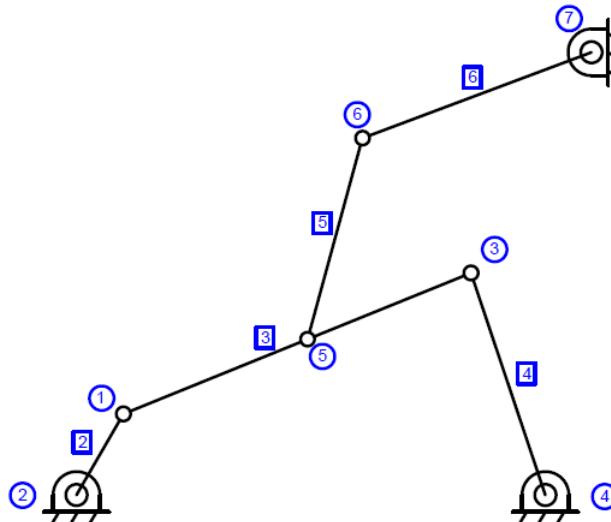


Figura 21 : Mecanismo con dos lazos cerrados.



Partimos del sistema fijo XYZ que coincide con la orientación inicial de xyz. Marcamos la orientación de xyz después de la rotación  $\Phi$  como  $x_1y_1z_1$ . Utilizaríamos la matriz de rotación definida previamente como  $R_x$  y quedaría:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = [R_x] \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

A continuación se quiere efectuar una rotación respecto al eje y, como se observa en la figura 22(b). Se procede multiplicando por la matriz de rotación correspondiente,  $R_y$ , pasando de los ejes  $x_1y_1z_1$  a las posiciones finales de los ejes,  $x_2y_2z_2$ . Esto se observa en la siguiente operación:

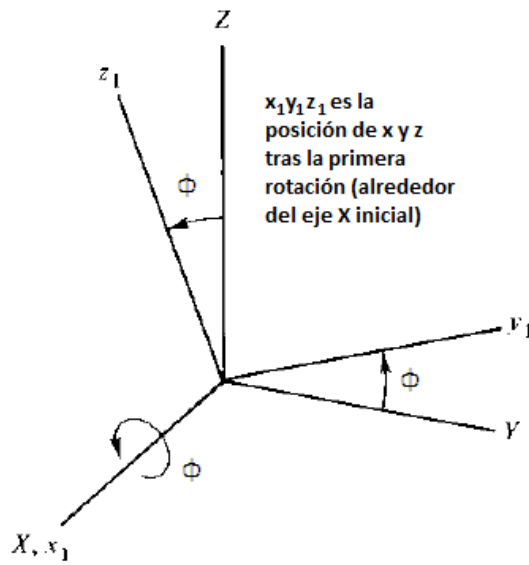
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = [R_y] \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Si queremos expresar la transformación general desde el sistema global XYZ al sistema local final  $x_2y_2z_2$ , se procede como sigue:

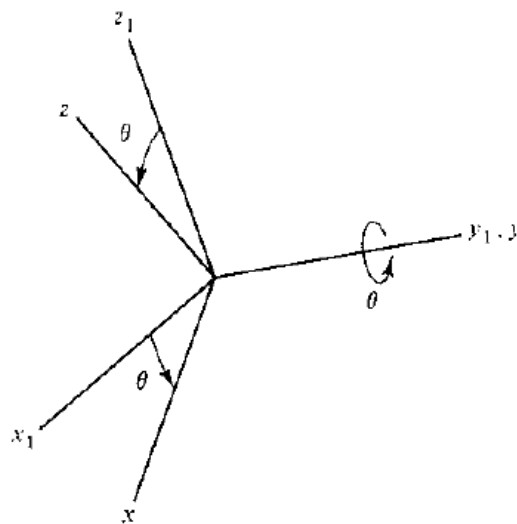
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = [R_x][R_y] \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones con las matrices de rotación se pueden estudiar en más detalle en [10].

Se puede ver la aplicación del método en los siguientes ejemplos de cuadrilátero articulado y corredera espacial.



(a) Rotación respecto al eje  $x$ .



(b) Rotación respecto al eje  $y$ .

Figura 22 Rotaciones de sistemas de referencia.

### 4.2 Caso 2D: cuadrilátero articulado

Se trata de resolver el mismo mecanismo que en el capítulo 2 se ha resuelto empleando una formulación global en coordenadas naturales, empleando ahora una formulación topológica en coordenadas relativas.

En este caso se han denotado las barras como aparece en la figura 23.

Si denotamos por 3 al punto perteneciente al extremo de la barra  $L_4$  y por B al punto perteneciente

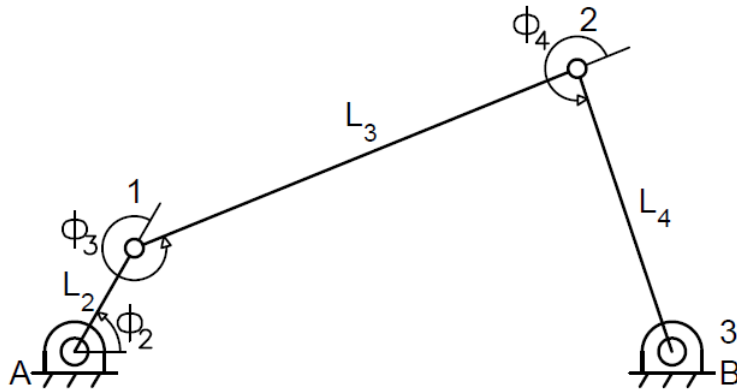


Figura 23 : Cuadrilátero en coordenadas relativas.

al bastidor coincidente con el mismo, tenemos nuestra ecuación de cierre. Se trata de una ecuación vectorial, como ya se apuntó correspondiente a dos ecuaciones escalares en el plano.

$$\vec{r}_B - \vec{r}_3 = 0 \quad (40)$$

Si la dividimos en sus componentes escalares, obtendremos las ecuaciones de restricción:

$$\begin{cases} x_B - x_3 = 0 \\ y_B - y_3 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

A continuación vamos a definir las coordenadas naturales en función de las relativas de los distintos puntos:

$$\begin{cases} x_1 = L_2 \cos \phi_2 \\ y_1 = L_2 \sen \phi_2 \\ x_2 = x_1 + L_3 \cos(\phi_3 + \phi_2) \\ y_2 = y_1 + L_3 \sen(\phi_3 + \phi_2) \\ x_B = x_2 + L_4 \cos(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) \\ y_B = y_2 + L_4 \sen(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) \end{cases} \quad (42)$$

Por tanto si se sustituye el punto  $(x_B, y_B)$  en las ecuaciones de restricción (41), se podrán expresar éstas en función de las coordenadas relativas, como sigue:

$$\begin{cases} L_2 \cos \phi_2 + L_3 \cos(\phi_3 + \phi_2) + L_4 \cos(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) - x_3 = 0 \\ L_2 \sen \phi_2 + L_3 \sen(\phi_3 + \phi_2) + L_4 \sen(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) - y_3 = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Tomando como variable independiente el ángulo  $\phi_2$ , se procede a la resolución del problema de posición, obteniendo los valores de los ángulos  $\phi_3, \phi_4$  que serán las incógnitas del método de Newton-Raphson. Estos ángulos se sustituyen en las ecuaciones (42) para obtener las posiciones cartesianas de los puntos.

### 4.3 Caso 3D: corredera espacial

La modelización de la corredera espacial se ha efectuado a partir de un script simbólico que calcula lo siguiente:

- Matrices de rotación. Se emplean para pasar los vectores de posición de un sistema local a un sistema global. Las matrices de rotación se expresan a continuación:

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ 0 & \text{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Para efectuar el cambio de base o tránsito del sistema local al global, las matrices han de multiplicarse en un cierto orden, obteniéndose una matriz de cambio de base:

$$R_{zyx} = R_z \cdot R_y \cdot R_x \quad (44)$$

Las transformaciones con las matrices de rotación se pueden estudiar en más detalle en [10].

- Vectores de posición referidos al sistema global. Para expresar los vectores en el sistema global utilizamos una matriz de rotación que multiplicada por el vector del sistema local lo transforma al global. Tenemos los vectores en sistema local siguientes:

$$r_{1,Loc} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{pmatrix}$$

$$r_{2,Loc} = \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y los siguientes valores de ángulos fijos:

$$\psi_1 = 30^\circ, \theta_1 = 0^\circ, \phi_2 = 0^\circ \quad (45)$$

Obteniéndose los vectores en sistema global tras efectuar las siguientes operaciones:

$$R_{z,1} = \begin{pmatrix} \cos\psi_1 & -\text{sen}\psi_1 & 0 \\ \text{sen}\psi_1 & \cos\psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y,1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \text{sen}\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$R_{x,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_1 & -\text{sen}\phi_1 \\ 0 & \text{sen}\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix}$$

$$R_{zyx,1} = R_{z,1} \cdot R_{y,1} \cdot R_{x,1} \quad (46)$$

Expresamos el vector  $r_1$  en el sistema global:

$$r_{1,Glo} = R_{zyx,1} \cdot r_{1,Loc} \quad (47)$$

Para obtener el vector  $r_2$  en el sistema global se procede del siguiente modo:

$$r_{2,Glo} = r_{1,Glo} + r_{21,Glo} \quad (48)$$

Siendo  $r_{21,Glo}$  el vector que tiene origen en el punto 1 y extremo en el punto 2, que podemos calcular del siguiente modo:

$$R_{z,2} = \begin{pmatrix} \cos\psi_2 & -\text{sen}\psi_2 & 0 \\ \text{sen}\psi_2 & \cos\psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y,2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$R_{x,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_2 & -\sin\phi_2 \\ 0 & \sin\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix}$$

$$R_{zyx,21} = R_{z,2} \cdot R_{y,2} \cdot R_{x,2} \quad (49)$$

$$R_{zyx,2} = R_{zyx,1} \cdot R_{zyx,21} \quad (50)$$

$$r_{21,Glo} = R_{zyx,2} \cdot r_{2,Loc} \quad (51)$$

Todo queda determinado para poder aplicar la ecuación (48).

- Ecuaciones de restricción. Se obtienen a partir de la ecuación de cierre de lazo:

$$r_{2,Glo} - r_3 = 0 \quad (52)$$

donde en este problema en particular la corredera se desplaza en el eje X, luego sólo presenta esta componente, resultando:

$$\begin{cases} x_2 - r_{3x} & = 0 \\ y_2 & = 0 \\ z_2 & = 0 \end{cases} \quad (53)$$

Donde se deben sustituir las componentes de  $r_2$  por los términos obtenidos matricialmente en el paso previo al obtener  $r_{2,Glo}$ , resultando las siguientes ecuaciones de restricción:

$$\begin{cases} L_2 * ((\sin(\phi_1) * \sin(\theta_2))/2 + (\sqrt{3} * \cos(\psi_2) * \cos(\theta_2))/2 + (\cos(\phi_1) * \cos(\theta_2) * \sin(\psi_2))/2) - (L_1 * \sin(\phi_1))/2 - r_{3x} & = 0 \\ L_2 * ((\sqrt{3} * \sin(\phi_1) * \sin(\theta_2))/2 - (\cos(\psi_2) * \cos(\theta_2))/2 + (\sqrt{3} * \cos(\phi_1) * \cos(\theta_2) * \sin(\psi_2))/2) - (\sqrt{3} * L_1 * \sin(\phi_1))/2 & = 0 \\ L_1 * \cos(\phi_1) - L_2 * (\cos(\phi_1) * \sin(\theta_2) - \cos(\theta_2) * \sin(\phi_1) * \sin(\psi_2)) & = 0 \end{cases} \quad (54)$$

Este script simbólico calculará con posterioridad matrices jacobianas y otras empleadas en el análisis cinemático.

## 4.4 Análisis cinemático de sistemas 2D y 3D

El análisis cinemático en formulación topológica y coordenadas relativas se efectúa del mismo modo que el análisis cinemático en formulación global y coordenadas naturales, es decir, obtenidas las ecuaciones de restricción, se resuelve el problema de posición mediante el método numérico de Newton-Raphson. Calculadas las posiciones, queda derivar el problema de posición respecto al tiempo para obtener el problema de velocidad. Una vez se obtienen las velocidades, queda derivar el problema de velocidad respecto al tiempo para obtener el problema de aceleración. Este método de resolución se observa en las ecuaciones de la (13) a la (23).

## 4.5 Caso particular 2D: cinemática del cuadrilátero articulado

En este apartado se presenta la resolución de la cinemática del cuadrilátero articulado con formulación topológica y coordenadas relativas, cuyas ecuaciones de restricción se han presentado en (43).

En este caso, la matriz jacobiana se calcula mediante el uso de cálculo simbólico y se introduce en Matlab para poder calcular los valores de los ángulos  $\phi_3, \phi_4$  para un determinado valor de  $\phi_2$ , así como unos determinados valores iniciales de las incógnitas  $q_0$ , como sigue:

$$q = q_0 - (\Phi_q^d)^{-1} \cdot \Phi \quad (55)$$

Siendo  $\Phi$  las funciones de restricción y  $\Phi_q^d$  la matriz jacobiana de las variables dependientes, cuya expresión se expone a continuación.

$$\Phi_q^d = \begin{pmatrix} -L_3 \text{sen}(\phi_3 + \phi_2) - L_4 \text{sen}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) & -L_4 \text{sen}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) \\ L_3 \text{cos}(\phi_3 + \phi_2) + L_4 \text{cos}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) & L_4 \text{cos}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores de los ángulos en las ecuaciones (42), obtenemos la posición de los puntos.

$\phi_2(\text{gdl})$	$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$
60	1.0	1.7321	8.4125	4.7413
65	0.8452	1.8126	8.3045	4.7038
70	0.6840	1.8794	8.1856	4.6592
75	0.5176	1.9319	8.0571	4.6071
80	0.3473	1.9696	7.9207	4.5471
85	0.1743	1.9924	7.7780	4.4791
90	0.0	2.0	7.6306	4.4029

Figura 24 : Desplazamientos finitos.

Se han de calcular las derivadas temporales de las coordenadas de los puntos 1 y 2 en función de coordenadas relativas. Así, derivando las expresiones (42) obtenemos las velocidades:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -L_2 \text{sen} \phi_2 \dot{\phi}_2 \\ \dot{y}_1 = L_2 \text{cos} \phi_2 \dot{\phi}_2 \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - L_3 \text{sen}(\phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) \\ \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + L_3 \text{cos}(\phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) \end{cases} \quad (56)$$

Hemos de obtener primero las derivadas temporales de los ángulos  $\phi_3$  y  $\phi_4$  para poder despejarlos en las ecuaciones anteriores. La coordenada independiente se ha supuesto que tiene una velocidad de  $\dot{\phi}_2 = 1$  rad/s y una aceleración de  $\ddot{\phi}_2 = 1$  rad/s<sup>2</sup>. La solución de velocidades se calcula del siguiente modo:

$$\dot{q}^d = -(\Phi_q^d)^{-1} \cdot \Phi_q^i \cdot \dot{q}^i \quad (57)$$

siendo

$$\Phi_q^i = \begin{pmatrix} -L_2 \text{sen} \phi_2 - L_3 \text{sen}(\phi_3 + \phi_2) - L_4 \text{sen}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) \\ L_2 \text{cos} \phi_2 + L_3 \text{cos}(\phi_3 + \phi_2) + L_4 \text{cos}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2) \end{pmatrix} \quad (58)$$

En este punto todos los términos son conocidos para el cálculo de las velocidades según la ecuación (57).

Procederemos a continuación al cálculo de las aceleraciones, derivando de nuevo respecto al tiempo:

$$\ddot{q} = -(\Phi_q^d)^{-1} [\dot{\Phi}_q^d \dot{q} + \dot{\Phi}_q^i \dot{\phi}_2 + \Phi_q^i \ddot{\phi}_2] \quad (59)$$

siendo las derivadas temporales de los jacobianos:

$$\dot{\Phi}_q^d = \begin{pmatrix} -L_3 \text{cos}(\phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) - L_4 \text{cos}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) & -L_4 \text{cos}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) \\ -L_3 \text{sen}(\phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) - L_4 \text{sen}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) & -L_4 \text{sen}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Phi}_q^i = \begin{pmatrix} -L_2 \text{cos} \phi_2 \dot{\phi}_2 - L_3 \text{cos}(\phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) - L_4 \text{cos}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) \\ -L_2 \text{sen} \phi_2 \dot{\phi}_2 - L_3 \text{sen}(\phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) - L_4 \text{sen}(\phi_4 + \phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_4 + \dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2) \end{pmatrix}$$



Ya se han definido todas las matrices necesarias para el cálculo de aceleraciones, luego su resolución por la ecuación (59) es inmediata para las aceleraciones de los ángulos. El siguiente paso es sustituir en las aceleraciones de los puntos 1 y 2:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= -L_2(\cos\phi_2\dot{\phi}_2^2 + \text{sen}\phi_2\ddot{\phi}_2) \\ \ddot{y}_1 &= L_2(-\text{sen}\phi_2\dot{\phi}_2^2 + \cos\phi_2\ddot{\phi}_2) \\ \ddot{x}_2 &= \ddot{x}_1 - L_3(\cos(\phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2)^2 + \text{sen}(\phi_3 + \phi_2)(\ddot{\phi}_3 + \ddot{\phi}_2)) \\ \ddot{y}_2 &= \ddot{y}_1 + L_3(-\text{sen}(\phi_3 + \phi_2)(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_2)^2 + \cos(\phi_3 + \phi_2)(\ddot{\phi}_3 + \ddot{\phi}_2)) \end{cases} \quad (60)$$

Se comprueba que para todas las posiciones de  $\phi_2$ , los resultados coinciden con la formulación global y en coordenadas naturales de la sección 2.6 del segundo capítulo.

## 4.6 Caso particular 3D: cinemática de la corredera espacial

Como ya se ha mencionado, para la resolución de la cinemática de este mecanismo en coordenadas relativas se ha programado un script simbólico de Matlab en el que se obtiene, además de las funciones de restricción mostradas en (54), una serie de matrices necesarias para el análisis cinemático:

- Jacobiana respecto a las variables dependientes. Para obtener la matriz jacobiana empleamos el comando `jacobian(FuncPos, varDep)`, encargado de calcular la matriz jacobiana de la matriz de funciones de restricción respecto a las variables dependientes. Esta matriz se presenta en el anexo del proyecto.
- Jacobiana respecto a las variables independientes. Se calcula de modo análogo a la jacobiana dependiente, pero ahora derivando respecto a variables independientes. Esta matriz se presenta en el anexo del proyecto.
- Derivada temporal de la matriz jacobiana completa. Utilizamos el comando `diff` para realizar la derivada temporal de la matriz jacobiana.
- Matriz  $\dot{\Phi}_q\dot{q}$ . Es una matriz empleada en el cálculo de aceleraciones, que resulta ser de gran dimensión. Esta matriz se presenta en el anexo del proyecto.
- Derivadas primera y segunda del vector de posición del punto 1 respecto al sistema global:  $\dot{r}_1$ ,  $\ddot{r}_1$ . Es un punto de interés (POI), por lo que nos interesa obtener su velocidad y aceleración. Estas expresiones se incluyen en el anexo.

La matriz  $\dot{\Phi}_q\dot{q}$  se emplea para el cálculo de aceleraciones de las variables dependientes atendiendo a la fórmula siguiente

$$\ddot{q} = -(\Phi_q^d)^{-1}[\dot{\Phi}_q \dot{q} + \Phi_q^i \ddot{\phi}_1] \quad (61)$$

A su vez, ha sido necesario el cálculo de las derivadas primera y segunda del vector de posición del punto 1 respecto al sistema global, que proporcionan los valores de la velocidad y aceleración absolutas en dicho punto.

Para el punto 2 no es necesario calcular las derivadas de sus vectores de posición respecto al sistema global, aunque podría hacerse. Esto se debe a que su velocidad y aceleración coinciden con las de la variable dependiente  $r_{3x}$ .

Por otra parte, se ha procedido al desarrollo de dos procedimientos para la resolución del problema:

- (1) Solución simbólica. Consiste en introducir el script simbólico justo al inicio del código en Matlab, antes de definir la geometría. En el main en lugar de copiar las matrices obtenidas en el cálculo simbólico se utiliza la función `eval(nombreMatrizSimbólico)`, que determina la matriz en concreto sustituyendo o evaluando para los valores conocidos de las variables.
- (2) Solución analítica o llamada a funciones. Se tiene el código simbólico aparte para generar las matrices (expresiones analíticas). Se definen funciones de Matlab (extensión `.m`) que calculan los valores numéricos de esas matrices y vectores simbólicos, en base a unos datos o variables de entrada. Desde el main se realiza una llamada a función cuando se requiera, por ejemplo cuando se necesite la matriz jacobiana dependiente.

La diferencia entre ambos métodos radica en la forma de obtención de las matrices del problema.

La solución simbólica requiere procesar el script simbólico al inicio del programa para calcular inicialmente las matrices que nos hacen falta. A continuación, se procede a la definición de la geometría para seguir con el bucle iterativo de Newton-Raphson donde ya se requiere de las funciones de restricción y de la jacobiana dependiente por lo que se recurre a la utilización de la función 'eval'.

Por su parte, la solución analítica mediante funciones calcula cada matriz con una función externa para posteriormente efectuar llamadas a función desde el main para recopilar las matrices necesarias.

Se ha comprobado que la solución analítica mediante funciones es del orden de unas 151,67 veces más rápida que la solución simbólica, ya que para un mismo incremento angular de 0 a 360° y una misma tolerancia, se obtienen los tiempos de ejecución de 13,3472 segundos para la solución simbólica y tan sólo 0,0880 segundos para la solución analítica mediante funciones.

A continuación se explicará la implementación del script simbólico efectuada en código Matlab.

El script simbólico se calcula en base a una serie de pasos:

- (1) Definir las variables dependientes e independientes como simbólicas y dependientes del tiempo.

- (2) Establecer valores fijos.
- (3) Definir vectores locales, matrices de rotación y vectores globales.
- (4) Establecer ecuaciones de restricción.
- (5) Utilizar la función 'subs' para realizar el cambio de variables temporales por variables numéricas en las ecuaciones de restricción.
- (6) Utilizar la función 'jacobian' para el cálculo de la jacobiana respecto a las variables dependientes e independientes.
- (7) Utilizar de nuevo 'subs' para realizar el cambio de variables numéricas a temporales en las ecuaciones de restricción.
- (8) Utilizar la función 'diff' para calcular la derivada primera de la matriz jacobiana, necesaria para el cálculo de aceleraciones.
- (9) Sustituir los diferenciales por las derivadas primeras. Por ejemplo:  $d\phi_1 = \text{diff}(\phi_1b,t)$ .
- (10) Utilizar la función 'subs' para sustituir en la derivada del jacobiano las variables temporales por otras numéricas. Por ejemplo:  $\theta_{2b}$  por  $\theta_2$  y  $d\theta_2$  por  $\theta_{2p}$ .
- (11) Calcular la matriz producto  $\dot{\Phi}_q \dot{q}$ , necesaria para el cálculo de aceleraciones de las variables dependientes.
- (12) Calcular  $\dot{r}_1$  y  $\ddot{r}_1$  para obtener velocidades y aceleraciones del punto 1, también usando 'diff' y 'subs'.

Como se puede apreciar, se han utilizado dos funciones muy particulares:

**diff** Se utiliza para realizar la derivada de una función o matriz respecto de una variable. En nuestro caso, se han empleado para realizar derivadas respecto del tiempo.

**subs** Se utiliza para intercambiar una variable con un nombre por otra con un nombre diferente. Se han empleado para hacer permutas entre variables temporales y variables numéricas, así como para intercambiar un diferencial por una variable con un nombre concreto. Por ejemplo sustituir  $\text{diff}(\theta_2,t)$  por una variable llamada  $\theta_{2p}$ .



## Capítulo 5

---

### *Formulación basada en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas*

---

#### 5.1 Modelización basada en ecuaciones de grupo

La formulación basada en ecuaciones de grupo permite la modelización automática de sistemas multicuerpo sin dejar de ser eficiente a nivel computacional.

La descomposición en grupos estructurales ya fue comentada en el capítulo 3, donde se introdujo la condición necesaria que debe cumplirse para formar un grupo estructural.

Esta modelización basada en ecuaciones de grupo y coordenadas relativas es similar a la presentada en la formulación topológica en coordenadas relativas en cuanto a que se busca la apertura de lazos 'cerrados' considerando los puntos de pares externos como si fueran fijos.

Observar que por grupos estructurales y coordenadas relativas, se puede optar por utilizar expresiones del tipo (50) para rotación de sistemas de referencia con giros relativos, o bien utilizar para los

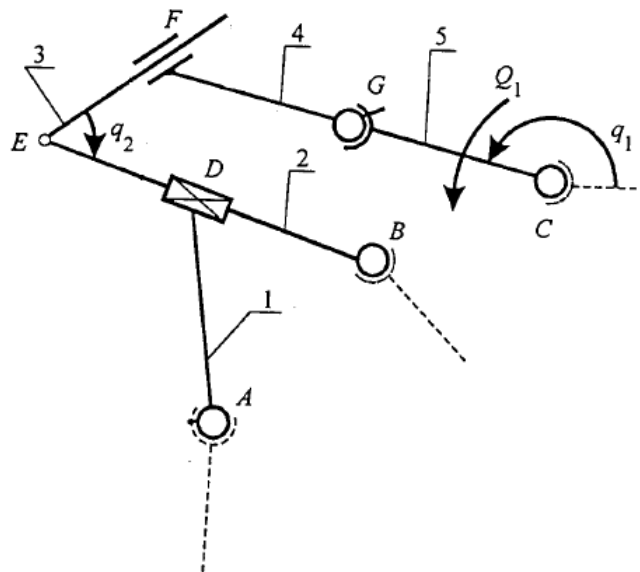


Figura 25 : Grupo estructural de movilidad dos.

vectores de posición matrices de rotación que consideran giros absolutos de los sistemas de referencia.

Para el análisis cinemático de un sistema multicuerpo por descomposición en grupos estructurales se sigue una secuencia concreta. Esta secuencia se muestra en el Algoritmo 3.

---

**Algorithm 3:** Kinem: Topol. SG solution

---

```

%Read data MBS;

MBDatos;
%MBS Kin. analysis %%
for t = t0 : timeStep : tf do
    /* set indep.values */
    z = z + Δz
    for ng = 2 : length(MGroups) do
        /* solve each SG */
        switch MGroups(ng).kind do
            case MGroups(ng).kind ==
                1RSG do
                | CALL Solve_1RSG(*ARGS)
            case MGroups(ng).kind ==
                3RSG do
                | CALL Solve_3RSG(*ARGS)
        end
    end
end
end

```

---

Después de cargar el fichero de datos que define el modelo del MBS, el programa principal incluye tres bucles. En cada paso de tiempo (primer bucle) el tiempo de ejecución aumenta y se definen los valores de las variables independientes de todo el sistema. Entonces, para cada GE de la estructura cinemática (segundo bucle), se identifica el GE y, en función de su tipo (tercer bucle), se utiliza la subrutina adecuada para resolver su cinemática.

Así pues, la resolución de cada mecanismo se basa en analizar su estructura cinemática, identificar los grupos de que está compuesto y lanzar subrutinas que resuelvan dichos grupos.

En los apartados subsiguientes se presentarán los ejemplos de cuadrilátero articulado y corredera espacial y se incluirá la explicación de las subrutinas en coordenadas relativas que resuelven sus grupos.

## 5.2 Aplicación al análisis del cuadrilátero articulado

Un cuadrilátero articulado se puede descomponer en dos grupos estructurales en el plano: un grupo estructural compuesto por la manivela (1 par de rotación, SG 1R2DREL) y otro grupo (diada) compuesto por tres pares de rotación (SG 3R2DREL).

En la figura 26 se muestra la numeración global establecida de puntos y eslabones del cuadrilátero, mientras que en la figura 27 se muestra la numeración local establecida de puntos y eslabones del cuadrilátero.

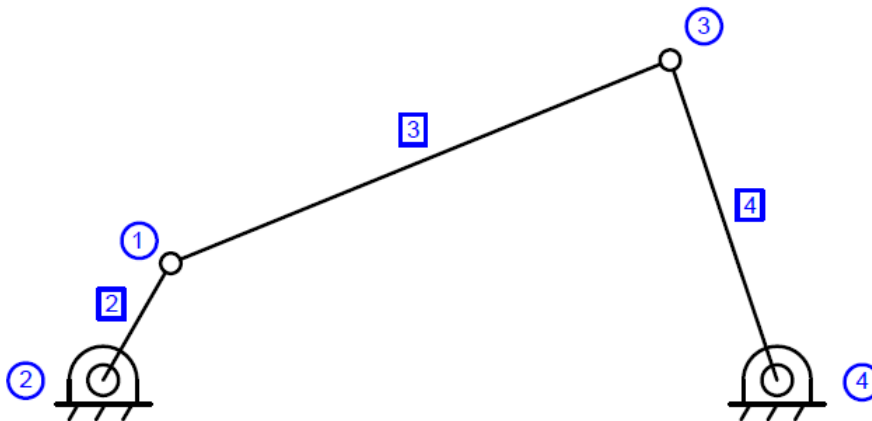


Figura 26 : Numeración global de puntos y eslabones del cuadrilátero.

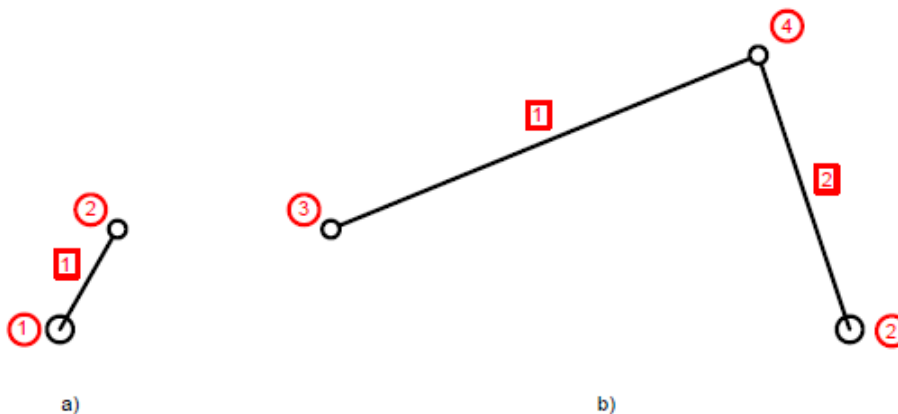


Figura 27 : Numeración local de puntos y eslabones del cuadrilátero. a)SG-I. Manivela( $ng=2$ ). b)SG-II. Diada( $ng=3$ ).

En el fichero MBDatos.m es donde se realiza esta identificación de puntos y eslabones.

A continuación se definen las subrutinas empleadas para resolver cada grupo estructural:

- SG 1R2DREL. Este grupo presenta un único par de rotación y su resolución es inmediata, es decir, no requiere calcular jacobianas de las funciones de restricción.

Para la resolución de las subrutinas se han empleado estructuras de datos en Matlab, para almacenar la información de los puntos y de los ángulos en ellas de una forma más ordenada.

Las estructuras de datos son:

**POI(numGlo).PVA(1:9)**=[**x y z  $\dot{x}$   $\dot{y}$   $\dot{z}$   $\ddot{x}$   $\ddot{y}$   $\ddot{z}$  ] Se utiliza para incluir en una estructura de datos los valores de posición, velocidad y aceleración de los puntos.**

**Fi(numGlo).PVA(1:9)**=[ **$\phi$   $\theta$   $\psi$   $\dot{\phi}$   $\dot{\theta}$   $\dot{\psi}$   $\ddot{\phi}$   $\ddot{\theta}$   $\ddot{\psi}$  ] Se utiliza para incluir en una estructura de datos los valores de posición, velocidad y aceleración de los ángulos.**

En este grupo la resolución a su cinemática se obtiene de forma inmediata por derivación respecto al tiempo.

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + L_1 \cos\alpha \\ y_2 = y_1 + L_1 \sin\alpha \end{cases}$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -L_1 \sin\alpha \cdot \dot{\alpha} \\ \dot{y}_2 = L_1 \cos\alpha \cdot \dot{\alpha} \end{cases}$$

Derivando por segunda vez se obtienen las aceleraciones:

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = -L_1 \sin\alpha \cdot \ddot{\alpha} - L_1 \cos\alpha \cdot \dot{\alpha}^2 \\ \ddot{y}_2 = L_1 \cos\alpha \cdot \ddot{\alpha} - L_1 \sin\alpha \cdot \dot{\alpha}^2 \end{cases}$$

- SG 3R2DREL. Este grupo tiene 3 pares de rotación, requiere obtener funciones de restricción y jacobianas.

En el caso más general, sean los sólidos 1 y 2 que constituyen la diada, establecemos un sistema local asociado a cada sólido  $j$  (figura 28), cuyo eje  $\eta$  está girado un ángulo  $\phi_j$  respecto al eje  $x$  del sistema global. Se tratan de sistemas locales genéricos situados en cualquier posición. Posteriormente veremos que si particularizamos y situamos los sistemas locales sobre los pares cinemáticos y con el eje  $\eta$  coincidente con la dirección de la barra  $j$ , las componentes de los vectores locales se simplifican notablemente.



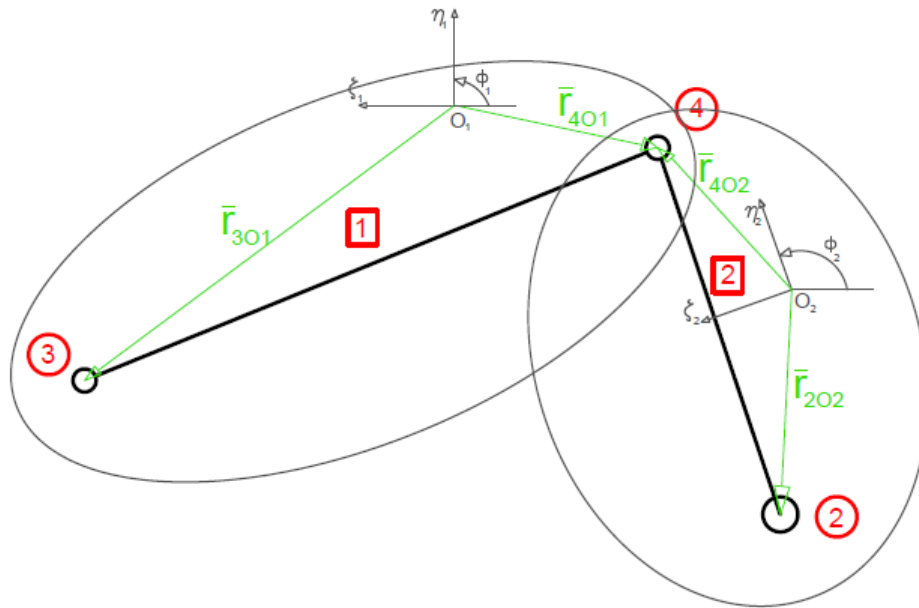


Figura 28 : Numeración local de puntos y eslabones del grupo estructural SG II (Diada).

La función de restricción generalizada es:

$$\vec{r}'_2 - \vec{r}'_3 = \vec{r}'_{43} + \vec{r}'_{24} \quad (62)$$

donde las posiciones de los puntos 2 y 3 son conocidas, mientras que los vectores  $r_{43}$  y  $r_{24}$  se pueden obtener como sigue:

$$\begin{cases} \vec{r}'_{43} = \vec{r}'_{4O1} - \vec{r}'_{3O1} \\ \vec{r}'_{24} = \vec{r}'_{2O2} - \vec{r}'_{4O2} \end{cases} \quad (63)$$

Donde los vectores  $\vec{r}'_{iOj}$  se obtienen en dos pasos:

- (1) Se expresan en su sistema local correspondiente al sólido  $j$ , con las coordenadas locales  $\{x'_i, y'_i\}$ :

$$\vec{r}'_{iOj,S'j} = \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix}$$

- (2) Se multiplica la matriz de transformación de rotación por el vector expresado en el sistema local, para expresarlo respecto a los ejes del sistema global:

$$\vec{r}'_{iOj,S} = R_z(\Phi_j) \vec{r}'_{iOj,S'j} \quad (64)$$

siendo  $\Phi_j$  el ángulo que está girado el eje  $\eta$  del sistema local del sólido  $j$  respecto al eje  $x$  del sistema global.

Finalmente, esta transformación se puede expresar en sus componentes como sigue:

$$\vec{r}'_{iO_j} = \begin{pmatrix} x'_i \cos \Phi_j - y'_i \sin \Phi_j \\ x'_i \sin \Phi_j + y'_i \cos \Phi_j \end{pmatrix} \quad (65)$$

Si particularizamos y definimos los sistemas locales como se indica en la figura 29, es decir, situando los sistemas locales con origen en los pares y con su eje horizontal  $\eta$  coincidente con la dirección de las barras o eslabones, se obtendrán las componentes de los vectores en los sistemas locales mucho más simplificadas. Así, por ejemplo, la componente horizontal coincidirá con la longitud de la barra del sólido en cuestión.

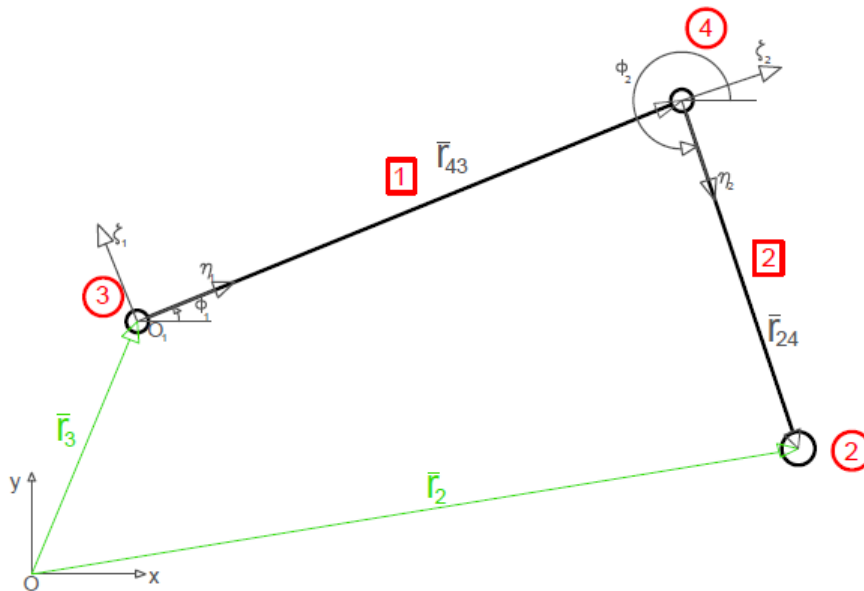


Figura 29 : Sistemas locales situados en los pares y con el eje horizontal coincidente con la barra.

A partir de aquí se emplea la numeración local del grupo:  $L_1, L_2, r_3, r_2$ .

Las funciones de restricción se obtuvieron como sigue:

$$r_3 = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix}$$

con  $Z_3 = 0$ .

$$r_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

con  $Z_2 = 0$ .

Los vectores de posición  $r_3$  y  $r_2$  están determinados. Los vectores expresados en los sistemas locales son:

$$r_{43,Loc} = \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_{24,Loc} = \begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices de transformación de rotación requeridas para expresar los vectores en el sistema global son:

$$R_{z,1} = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 & -\text{sen}\phi_1 & 0 \\ \text{sen}\phi_1 & \cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{z,2} = \begin{pmatrix} \cos\phi_2 & -\text{sen}\phi_2 & 0 \\ \text{sen}\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones de restricción obtenido a partir de una ecuación vectorial de cierre de lazo es:

$$\Phi = r_2 - r_3 - R_{z,1} \cdot r_{43,Loc} - R_{z,2} \cdot r_{24,Loc} \quad (66)$$

Desarrollando términos, las ecuaciones de restricción quedan:

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 - L_1 \cdot \cos\phi_1 - L_2 \cdot \cos\phi_2 \\ y_2 - y_3 - L_1 \cdot \text{sen}\phi_1 - L_2 \cdot \text{sen}\phi_2 \end{pmatrix}$$

siendo las coordenadas dependientes:

$$q^d = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas independientes:

$$q^i = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Las matrices jacobianas del grupo estructural respecto a las variables dependientes  $\varphi$  e independientes  $\mathbf{h}$ , pueden ser obtenidas fácilmente como sigue:

$$\Phi_{\varphi, 3R} = \left[ \frac{\partial \Phi_{3R}}{\partial \varphi_{3R}} \right]_{2 \times 2} \quad (67a)$$

$$\Phi_{\mathbf{h}, 3R} = \left[ \frac{\partial \Phi_{3R}}{\partial \mathbf{h}_{3R}} \right]_{2 \times 2} \quad (67b)$$

Del mismo modo, se han empleado estructuras de datos para el desarrollo de la subrutina del grupo.

La subrutina del grupo se programa en base a los siguientes pasos:

- (1) Identificación de los puntos, numeración global.
- (2) Escribir en 'POI' los valores de posición de las coordenadas cartesianas de los puntos que se pretenden calcular.
- (3) Escribir en 'Fi' los valores de los ángulos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  que en este caso constituyen las coordenadas dependientes.
- (4) Método de Newton-Raphson para resolver el problema de posición. Se leen las funciones de las funciones de restricción y jacobiana respecto a los términos dependientes que obtuvimos con el script simbólico del grupo estructural en cuestión.
- (5) Solución del problema de posición:

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} - (\Phi_{\varphi})_{i-1}^{-1} \cdot \Phi_{i-1} \quad (68)$$

siendo  $\varphi$  el vector de coordenadas dependientes,  $\Phi_{\varphi}$  la matriz jacobiana de las funciones de restricción respecto a las variables dependientes y  $\Phi$  las funciones de restricción.

- (6) Escribir en 'Fi' las variables dependientes calculadas. Escribir en 'POI' los valores del punto  $(x_4, y_4)$  (punto 4 en numeración local)(ver figura 27).
- (7) Solución al problema de velocidades:

$$\dot{\varphi} = -(\Phi_{\varphi})^{-1} \cdot \Phi_h \cdot \dot{h} \quad (69)$$

siendo  $\dot{\varphi}$  el vector de velocidades de las variables dependientes,  $\Phi_{\varphi}$  la matriz jacobiana de las funciones de restricción respecto a las variables dependientes,  $\Phi_h$  la matriz jacobiana de las funciones de restricción respecto a las variables independientes y  $\dot{h}$  la velocidad de la coordenada independiente.

(8) Escribir en 'Fi' las velocidades de las variables dependientes calculadas. Escribir en 'POI' las velocidades del punto  $(\dot{x}_4, \dot{y}_4)$ .

(9) Solución al problema de aceleraciones:

$$\ddot{\varphi} = -(\Phi_{\varphi})^{-1} \cdot (\dot{\Phi}_q \cdot \dot{q} + \Phi_h \cdot \ddot{h}) \quad (70)$$

siendo  $\ddot{\varphi}$  el vector de aceleraciones de las variables dependientes,  $\dot{\Phi}_q$  es la derivada temporal del jacobiano de las funciones de restricción,  $\dot{q}$  es el vector de velocidades y  $\ddot{h}$  es la aceleración de la coordenada independiente.

(10) Escribir en 'Fi' las aceleraciones de las variables dependientes calculadas. Escribir en 'POI' las aceleraciones del punto  $(\ddot{x}_4, \ddot{y}_4)$ .

### 5.3 Aplicación al análisis de la corredera espacial

La corredera espacial se puede descomponer en dos grupos estructurales en el espacio: una manivela (1 par de rotación, SG 1R3DREL) y una diada biela-corredera (2 pares esféricos y un par prismático, SG 2S1P3DREL).

En la figura 30 se muestra la numeración global establecida de puntos y eslabones de la corredera espacial, mientras que en la figura 31 se muestra la numeración local establecida de puntos y eslabones de la corredera espacial.

A continuación se definen las subrutinas empleadas para resolver cada grupo estructural:

- SG 1R3DREL. Este grupo presenta un único par de rotación y su resolución es inmediata, es decir, no requiere calcular jacobianas de las funciones de restricción.

En este caso la solución se obtiene de forma inmediata por derivación respecto al tiempo:

$$r_{1,Loc} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{pmatrix}$$

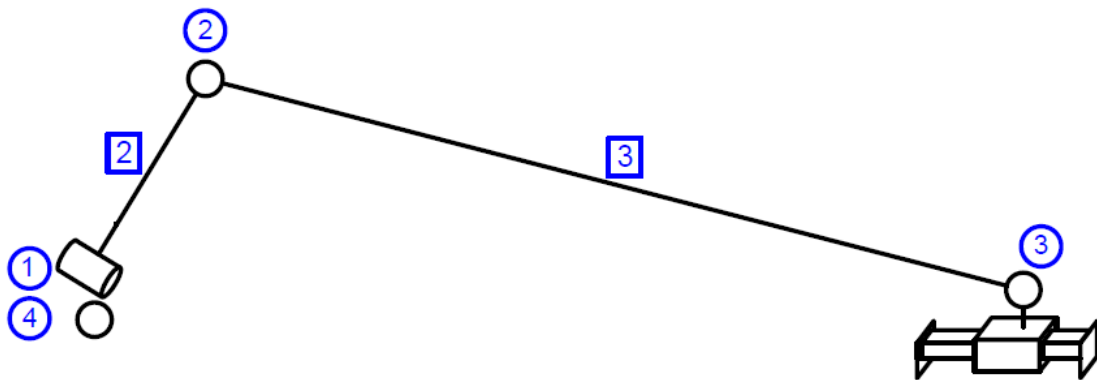


Figura 30 : Numeración global de puntos y eslabones de la corredera.

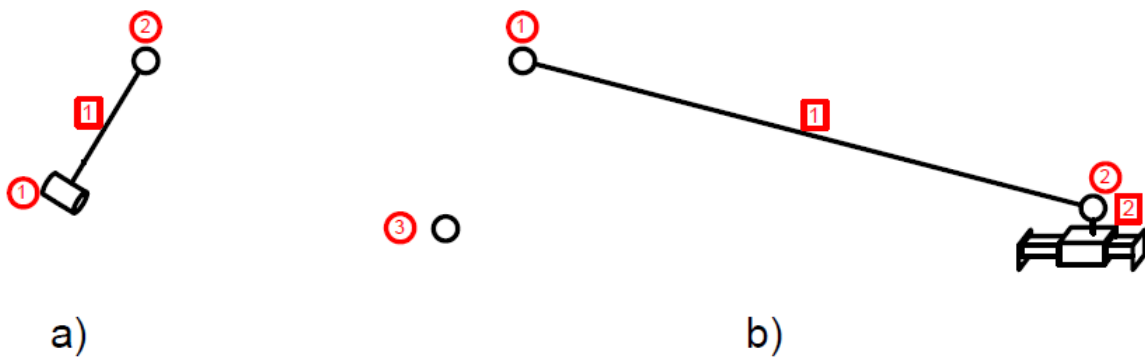


Figura 31 : Numeración local de puntos y eslabones del cuadrilátero. a)SG-I. Manivela( $ng=2$ ). b)SG-II. Diada biela-corredera( $ng=3$ ).

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\psi_1 & -\text{sen}\psi_1 & 0 \\ \text{sen}\psi_1 & \cos\psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & 0 & \text{sen}\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_1 & -\text{sen}\phi_1 \\ 0 & \text{sen}\phi_1 & \cos\phi_1 \end{pmatrix}$$

$$R_{zyx,1} = R_z \cdot R_y \cdot R_x \quad (71)$$

$$r_1 = R_{zyx,1} \cdot r_{1,Loc} \quad (72)$$

$$\begin{cases} x_2 = r_1(1) \\ y_2 = r_1(2) \\ z_2 = r_1(3) \end{cases} \quad (73)$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{-L_1 \cdot \cos\phi_1 \cdot \dot{\phi}_1}{2} \\ \dot{y}_2 = \frac{-\sqrt{3} \cdot L_1 \cdot \cos\phi_1 \cdot \dot{\phi}_1}{2} \\ \dot{z}_2 = -L_1 \cdot \text{sen}\phi_1 \cdot \dot{\phi}_1 \end{cases} \quad (74)$$

Derivando respecto al tiempo por segunda vez obtenemos las aceleraciones:

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = \frac{L_1 \cdot \text{sen}\phi_1 \cdot \dot{\phi}_1^2}{2} - \frac{L_1 \cdot \cos\phi_1 \cdot \ddot{\phi}_1}{2} \\ \ddot{y}_2 = \frac{\sqrt{3} \cdot L_1 \cdot \text{sen}\phi_1 \cdot \dot{\phi}_1^2}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot L_1 \cdot \cos\phi_1 \cdot \ddot{\phi}_1}{2} \\ \ddot{z}_2 = -L_1 \cdot \cos\phi_1 \cdot \dot{\phi}_1^2 - L_1 \cdot \text{sen}\phi_1 \cdot \ddot{\phi}_1 \end{cases} \quad (75)$$

- SG 2S1P3DREL. Este grupo se compone de una diada biela-corredera que cuenta con dos pares esféricos y un par prismático. Para su resolución, deben obtenerse ecuaciones de restricción y matrices jacobianas.

Se ha creado un script simbólico para la resolución de esta subrutina, en el que las ecuaciones de restricción se obtienen en función de la ecuación de cierre de lazo de la figura 32.

$$\Phi = r_1 + r_2 - (r_4 + r_{40}) \quad (76)$$

Donde los vectores se obtienen como sigue:

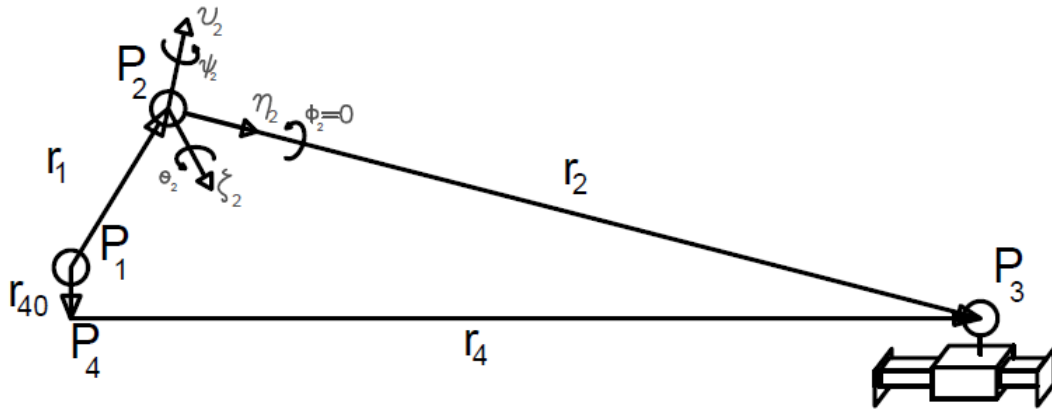


Figura 32 : Ecuación de cierre de lazo para el GE 2S1P3D.

$$r_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

Este vector  $r_1$  fue calculado en el primer grupo estructural.

$$r_{40} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix}$$

$$r_{2,Loc} = \begin{pmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de rotación:

$$R_{z,2} = \begin{pmatrix} \cos\psi_2 & -\text{sen}\psi_2 & 0 \\ \text{sen}\psi_2 & \cos\psi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y,2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \text{sen}\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$



$$R_{x,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_2 & -\text{sen}\phi_2 \\ 0 & \text{sen}\phi_2 & \cos\phi_2 \end{pmatrix}$$

Expresamos  $r_2$  en el sistema global:

$$r_2 = R_{z,2} \cdot R_{y,2} \cdot R_{x,2} \cdot r_{2,Loc} \quad (77)$$

Por otra parte el vector  $r_4$  se obtiene como sigue:

$$r_{4,Loc} = \begin{pmatrix} r_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrices de rotación:

$$R_{z,4} = \begin{pmatrix} \cos\psi_4 & -\text{sen}\psi_4 & 0 \\ \text{sen}\psi_4 & \cos\psi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y,4} = \begin{pmatrix} \cos\theta_4 & 0 & \text{sen}\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 \end{pmatrix}$$

$$R_{x,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi_4 & -\text{sen}\phi_4 \\ 0 & \text{sen}\phi_4 & \cos\phi_4 \end{pmatrix}$$

Expresamos  $r_4$  en el sistema global:

$$r_4 = R_{z,4} \cdot R_{y,4} \cdot R_{x,4} \cdot r_{4,Loc} \quad (78)$$

Desarrollando términos, las ecuaciones de restricción quedan:

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1 - x_4 + L_3 \cos\psi_2 \cos\theta_2 - r_4 \cos\psi_4 \cos\theta_4 \\ y_1 - y_4 + L_3 \cos\theta_2 \text{sen}\psi_2 - r_4 \cos\theta_4 \text{sen}\psi_4 \\ z_1 - z_4 - L_3 \text{sen}\theta_2 + r_4 \text{sen}\theta_4 \end{pmatrix}$$

siendo las coordenadas dependientes:

$$q^d = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \psi_2 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas independientes:

$$q^i = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Las matrices jacobianas del grupo estructural respecto a las variables dependientes  $\varphi$  e independientes  $\mathbf{h}$ , pueden ser obtenidas fácilmente como sigue:

$$\Phi_{\varphi, 2S1P} = \left[ \frac{\partial \Phi_{2S1P}}{\partial \varphi_{2S1P}} \right]_{3 \times 3} \quad (79a)$$

$$\Phi_{\mathbf{h}, 2S1P} = \left[ \frac{\partial \Phi_{2S1P}}{\partial \mathbf{h}_{2S1P}} \right]_{3 \times 3} \quad (79b)$$

El código Matlab de esta subrutina sigue los mismos pasos que el algoritmo del cuadrilátero articulado, ya presentado. Básicamente cambian las funciones de restricción pero el proceso de obtención de ecuaciones de restricción, jacobianas y vectores de posición a partir de un script simbólico se mantiene. También se sigue efectuando la escritura de datos en Fi y POI.

## Capítulo 6

---

### *Estudio comparativo de coste computacional de las formulaciones analizadas. Principales ventajas e inconvenientes*

---

Los diferentes estudios cinemáticos llevados a cabo en este trabajo permiten lanzar simulaciones para comparar tiempos de ejecución de los mismos, pudiendo así comprobar si nuestra hipótesis de partida se cumple. Suponíamos que para mecanismos sencillos con un reducido número de coordenadas, tales como el cuadrilátero articulado, la formulación topológica con grupos estructurales y coordenadas relativas no obtendría mejoras respecto a la formulación topológica con GE y coordenadas naturales, dado que el número de coordenadas y de ecuaciones de grupo, para GE de reducido tamaño, es similar.

No obstante, para sistemas más complejos tales como la corredera espacial o el sistema de suspensión de un camión, donde el número de coordenadas de grupo se hace considerable, una resolución por grupos estructurales y coordenadas relativas conduciría a la obtención de matrices de dimensiones mucho más reducidas que la formulación por grupos estructurales y coordenadas naturales, lo que se traduciría en una reducción de los tiempos de ejecución, permitiendo lanzar un mayor número de cálculos utilizando coordenadas relativas.

#### **6.1 Cuadrilátero articulado. Comparación de tiempos de ejecución**

En primer lugar, se presenta la precisión de cálculo obtenida. Para ello se comparan los resultados obtenidos de posición, velocidad y aceleración de un punto de interés para distintos tiempos, tanto en el cuadrilátero resuelto por formulación topológica en coordenadas naturales por derivada temporal como en el cuadrilátero resuelto por formulación topológica en coordenadas relativas.

En este caso se obtienen resultados exactos con ambas formulaciones. En la tabla 1 se muestran los resultados obtenidos para diferentes tiempos:

Dado que se obtienen los mismos resultados para ambas simulaciones, se concluye que el error de cálculo es nulo.

A su vez, se presentan los tiempos de ejecución de las distintas simulaciones llevadas a cabo para

$t(s)$	$x_5$	$\dot{x}_5$	$\ddot{x}_5$
0.0050000000000000	10.612451549661314	-0.582865459289154	-0.132438510512617
30.004999999998315	8.591859698746134	0.784628399323436	0.290703328938613
60.00000000012243	7.550020463296548	-0.214609486353615	0.110858981042600
90.004999999990630	10.612451549634249	-0.582865705470976	-0.132438591755672
119.994999999963355	8.584027954328500	0.781718441964308	0.291284352732358

Cuadro 1 Posición, velocidad y aceleración del POI(5) del cuadrilátero articulado en formulación topológica en coordenadas naturales por derivada temporal y formulación topológica en coordenadas relativas.

$n_d$	Profiling (s)					Speed ups		
	GLOB	GLOB_SP	TOP_TD	TOP_3OT	TOP_REL	$\frac{TOP\_TD}{GLOB\_SP}$	$\frac{TOP\_3OT}{GLOB\_SP}$	$\frac{TOP\_REL}{GLOB\_SP}$
10	0.746	0.976	0.016	0.035	0.109	<u>61.0</u>	<u>27.9</u>	<u>8.95</u>
20	2.171	1.823	0.049	0.112	0.218	37.2	16.3	8.36
30	4.198	2.509	0.087	0.205	0.312	28.8	12.2	8.04
40	7.059	3.124	0.119	0.269	0.421	26.3	<u>11.6</u>	<u>7.42</u>
50	11.036	4.502	0.156	0.348	0.562	28.9	12.9	8.01
60	16.696	5.108	0.180	0.416	0.655	28.4	12.3	7.80
70	24.694	6.021	0.205	0.475	0.749	29.4	12.7	8.04
80	33.221	6.814	0.252	0.563	0.842	<u>27.0</u>	12.1	8.09
90	44.466	7.981	0.284	0.642	0.952	28.1	12.4	8.38
100	57.139	8.715	0.317	0.718	1.061	27.5	12.1	8.21

Cuadro 2 Tiempos de ejecución del análisis cinemático del cuadrilátero articulado en función del número de diadas ( $n_d$ ) usando diferentes formulaciones: global, global 'sparse', topológica con derivada temporal, topológica con tensor de tercer orden y topológica en coordenadas relativas.

el cuadrilátero articulado (FBL).

Se han efectuado los cálculos aumentando el número de diadas  $n_d$  en incrementos de 10 diadas. Los análisis efectuados corresponden a diferentes formulaciones: global(GLOB), global 'sparse'(GLOB\_SP) o dispersa, topológica con derivada temporal(TOP\_TD), topológica con tensor de tercer orden(TOP\_3OT) y topológica por grupos y coordenadas relativas (TOP\_REL).

Se observa que los speed-ups obtenidos para el caso de formulación topológica y coordenadas relativas son peores que los obtenidos para coordenadas naturales. Esto sucede en base a dos causas:

- (1) Dimensión del problema. El número de coordenadas de grupo no es lo suficientemente grande como para que las coordenadas relativas presenten ventaja respecto a las coordenadas naturales.
- (2) Modo de cálculo. En coordenadas relativas hemos de pasar de coordenadas cartesianas a relativas para calcular las variables dependientes para posteriormente deshacer el cambio pasando de relativas a cartesianas, obteniendo la información necesaria de los puntos de interés. Este doble cambio supone una mayor pérdida de tiempo de cálculo frente a las coordenadas naturales,

donde no se requieren las coordenadas angulares y directamente se calcula todo en cartesianas.

No obstante, para mecanismos más complejos, el número de coordenadas de grupo será mucho mayor en naturales frente a relativas, por lo que el número de ecuaciones en coordenadas naturales será tan grande que las jacobianas serán consecuentemente de gran dimensión, presentando una desventaja en coste computacional las formulaciones en coordenadas naturales.

En la figura 33 se muestra la comparativa de los tiempos de ejecución de las distintas formulaciones para el cuadrilátero articulado.

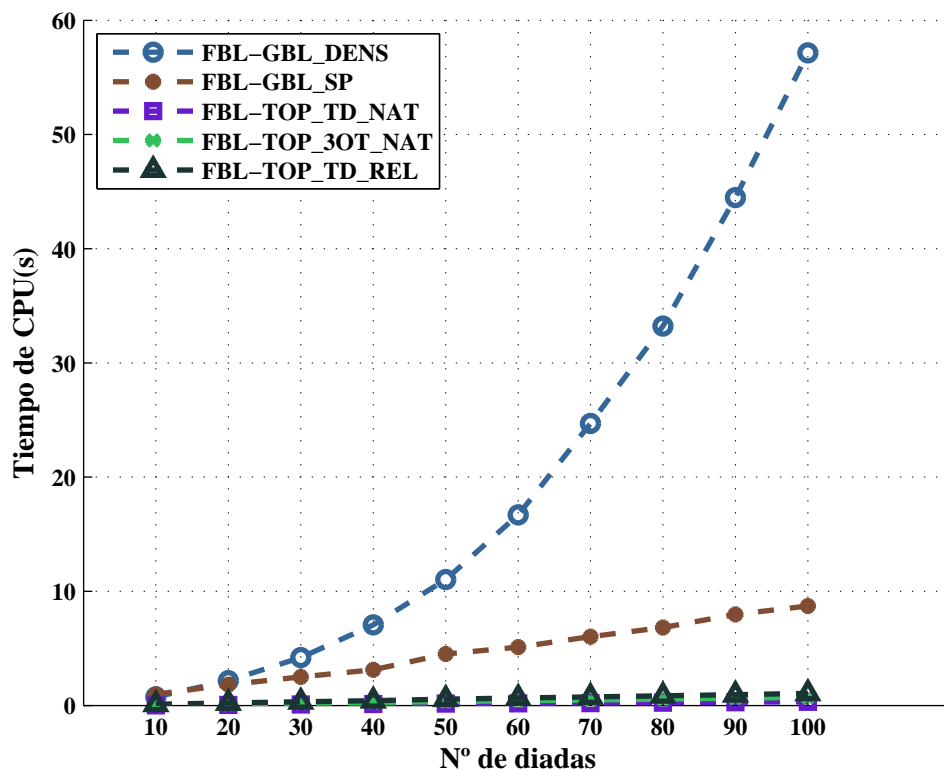


Figura 33 : Comparativa de tiempos de ejecución del cuadrilátero articulado en distintas formulaciones.

De la gráfica de la figura 33 se extrae que la formulación topológica en coordenadas relativas aplicada al cuadrilátero articulado también es mucho más eficiente que la solución global, siguiendo también una tendencia lineal creciente de los tiempos de ejecución con el número de diadas.

La pendiente de la solución topológica en coordenadas relativas es ligeramente superior a las de las formulaciones topológicas en coordenadas naturales, por lo que deducimos que para el caso concreto del cuadrilátero articulado la formulación en coordenadas relativas es algo más ineficiente que las formulaciones en coordenadas naturales. De este hecho se puede deducir también que una

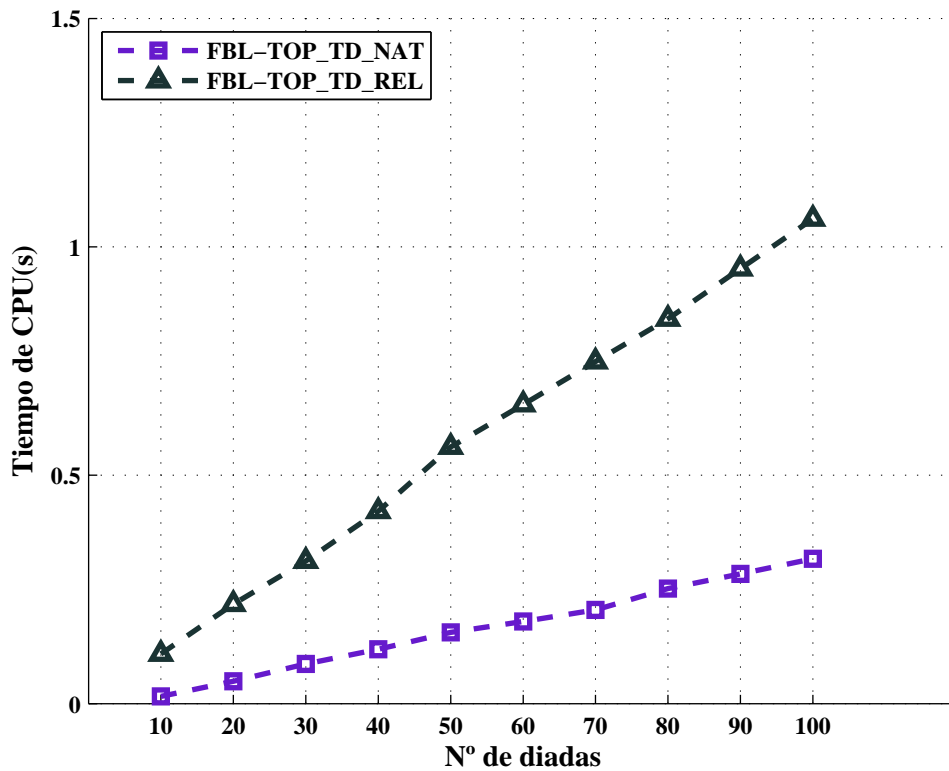


Figura 34 : Comparativa de tiempos de ejecución del cuadrilátero articulado. Formulación topológica derivada temporal y coordenadas naturales frente a topológica derivada temporal y coordenadas relativas.

formulación topológica en coordenadas relativas, que no divida en GE debe tener un comportamiento lineal y con una eficiencia comprendida entre la mostrada por la formulación 'Global sparse' y la topológica en coordenadas naturales.

Para el cuadrilátero articulado, la formulación topológica en coordenadas naturales por derivada temporal es la más eficiente, resultando más rápida que la del tensor de tercer orden y la topológica con coordenadas relativas.

En la figura 34 se puede ver la diferencia de tiempos de ejecución de la solución topológica en coordenadas naturales por derivada temporal y la topológica en coordenadas relativas por derivada temporal, apreciándose una gran ventaja de la primera respecto de la segunda.

## 6.2 Corredera espacial. Comparación de tiempos de ejecución

La corredera espacial representa un problema de mayor interés que el cuadrilátero articulado, pues la dimensión del problema es mayor.

El mecanismo escalable de manivela-corredera 3D (figura 35(a)) consiste en un bastidor fijo (cuerpo 1), una manivela (cuerpo 2,  $\overline{AB}$ ) que gira respecto al bastidor, y un número creciente de  $k$  diadas que se pueden agregar para hacer este mecanismo escalable. Cada una de estas  $k$  diadas introduce dos cuerpos: una barra (cuerpo  $2k + 1, \overline{B_k C_k}$ ) y una corredera (cuerpo  $2k + 2, D_k$ ) que se traslada respecto al bastidor en una dirección fija. Cada barra está unida a la manivela 2 y a la corredera correspondiente por medio de juntas esféricas. La longitud de la manivela se fija en  $2m$  y las barras tienen por longitud  $6m$ .

El grafo estructural y el diagrama estructural asociados a este mecanismo se muestran en la figura 35(b) y en la figura 35(c), respectivamente. Una vez que el bastidor ha sido aislado, la estructura cinemática de este sistema multicuerpo está compuesta por: un primer grupo estructural, llamado  $1R3D$ , formado por el cuerpo 2 y un par cinemático de rotación externa  $\{1 - 2\}$ , y un número de  $k(\forall k \geq 1)$  diadas, llamadas  $2E1P$ , ya que son dos pares esféricos y un par prismático. Cada una de estas diadas está formada por dos cuerpos ( $2k + 1, 2k + 2$ ), cuya cinemática puede ser resuelta en el orden especificado por el parámetro  $k$ .

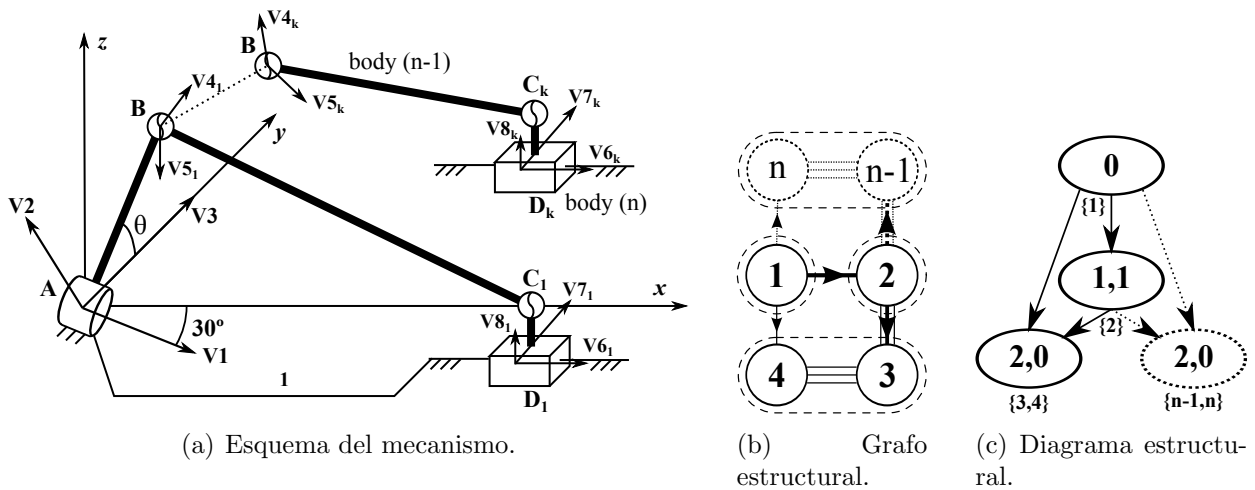


Figura 35 Mecanismo manivela-corredera espacial escalable.

La precisión de cálculo obtenida para la corredera espacial se comprueba comparando los resultados de la simulación de la corredera resuelta por formulación topológica en coordenadas naturales por derivada temporal con la formulación topológica en coordenadas relativas.

En la tabla 3 se muestran los resultados obtenidos en la formulación topológica en coordenadas naturales por derivada temporal, mientras que en la tabla 4 se muestran los resultados obtenidos en la formulación topológica en coordenadas relativas.

Se observa que apenas hay diferencias en los últimos decimales, por lo que el error de cálculo es mínimo.

Para la comprobación de la eficiencia computacional, se han comparado en un primer lugar los

tiempos de ejecución de soluciones topológicas en coordenadas naturales frente a la solución global, obteniéndose los speed-ups mostrados en la tabla 5.

Se han calculado los tiempos de ejecución de la corredera espacial para tres valores de velocidad angular de la manivela mostrados en la tabla en cuestión.

A continuación se ha efectuado la simulación de la corredera espacial con formulación topológica en coordenadas relativas, comparándose a su vez ésta con la solución global. Los speed-ups calculados se muestran en la tabla 6.

En la figura 36 se muestra la comparativa de los tiempos de ejecución de la corredera espacial en formulación global, formulaciones topológicas en coordenadas naturales por derivada temporal y tensor de tercer orden, y formulación topológica en coordenadas relativas por derivada temporal.

Se observa que la tendencia de los tiempos de CPU es aproximadamente lineal en todos los casos, siendo la solución por tensor de tercer orden mucho más ineficiente que el resto. Por otra parte, la pendiente de la solución global es mucho mayor que la de la topológica en coordenadas relativas, de tal modo que para un número de 100 diadas, la solución topológica en coordenadas relativas por derivada temporal apenas tarda 5 segundos mientras que la solución global tarda casi 35 segundos (7 veces más). Conforme aumente el número de diadas mayor será la diferencia de tiempos de ejecución entre ambas soluciones.

A su vez, cabe destacar que los tiempos de ejecución son menores en coordenadas relativas que en coordenadas naturales, por lo que para la solución topológica con coordenadas relativas se obtienen speed-ups mayores que para las soluciones topológicas en coordenadas naturales.

Son del orden del doble de rápido los cálculos en coordenadas relativas, lo que nos permitiría lanzar el doble de simulaciones cinemáticas al día.

Cuanto mayores son las velocidades de la coordenada independiente, mayor es el incremento de ángulo entre dos posiciones consecutivas con lo que los errores de cada una de las funciones de restricción se hacen mayores y es más probable que se requiera un número de iteraciones mayor.

La comparativa de los speed-ups de la solución topológica en coordenadas relativas por derivada

t(s)	$x_3$	$\dot{x}_3$	$\ddot{x}_3$
0.0050000000000000	5.656854249492381	-0.349065850398866	0.021539704319873
30.004999999998315	6.588786974914187	0.200944989574667	-0.116290287294979
60.000000000012243	4.855996747654875	0.147646979941129	0.094797470642292
90.004999999990630	5.656854249477905	-0.349065850398014	0.021539704321562
120.004999999963346	6.588786974928230	0.200944989566542	-0.116290287297355

Cuadro 3 Posición, velocidad y aceleración del POI(3) de la corredera espacial en formulación topológica en coordenadas naturales por derivada temporal.



$t(s)$	$x_3$	$\dot{x}_3$	$\ddot{x}_3$
0.0050000000000000	5.656854249492439	-0.349065850398866	0.021539704319873
30.0049999999998315	6.588786974913902	0.200944989574640	-0.116290287295078
60.000000000012243	4.855996747656264	0.147646979941157	0.094797470642385
90.004999999990630	5.656854249478582	-0.349065850398014	0.021539704321554
120.004999999963346	6.588786974927944	0.200944989566514	-0.116290287297453

Cuadro 4 Posición, velocidad y aceleración del POI(3) de la corredera espacial en formulación topológica en coordenadas relativas.

temporal frente a las soluciones topológicas en coordenadas naturales se presenta en la tabla 6.

Si se realiza la media de la primera columna de la tabla se deduce que la solución topológica en coordenadas relativas es del orden de 2,436 veces más rápida que la solución topológica en coordenadas naturales por derivada temporal para una velocidad de  $\dot{\theta} = 34,9E^{-5}$  rad/s.

nEq	Profiling (s)			Speed Ups					
	GLOB_SP			$\frac{TOP\_TD}{GLOB\_SP}$			$\frac{TOP\_3OT}{GLOB\_SP}$		
	34.9E-5	34.9E-2	34.9	34.9E-5	34.9E-2	34.9	34.9E-5	34.9E-2	34.9
14	0.281	0.435	0.717	2.248	2.326	2.706	0.121	0.181	0.280
86	1.981	2.870	4.632	2.593	2.390	2.856	0.119	0.170	0.274
166	3.946	5.771	9.655	2.456	2.623	3.207	0.125	0.178	0.298
246	5.974	8.688	13.977	2.715	2.579	3.200	0.131	0.183	0.277
326	8.408	12.090	19.623	2.821	2.636	3.364	0.136	0.195	0.296
406	10.372	15.084	24.616	2.782	2.686	3.287	0.138	0.194	0.298
486	12.745	18.673	29.873	2.918	2.830	3.520	0.142	0.202	0.302
566	15.849	22.432	37.080	3.070	2.953	3.548	0.147	0.204	0.319
646	18.205	26.924	43.303	3.146	2.935	3.691	0.152	0.219	0.339
726	21.013	30.123	48.343	3.082	3.022	3.672	0.150	0.209	0.326
806	23.758	33.929	54.629	3.180	3.166	3.706	0.156	0.217	0.339

Cuadro 5 Tabla de comparación de soluciones topológicas de la corredera espacial en coordenadas naturales con la solución global, para las tres velocidades angulares consideradas  $\dot{\theta} = [34,9E^{-5}, 34,9E^{-2}, 34,9]$ .

$n_d$	Speed Ups								
	$\frac{TOP\_REL}{GLOB\_SP}$			$\frac{TOP\_REL}{TOP\_TD}$			$\frac{TOP\_REL}{TOP\_3OT}$		
	34.9E-5	34.9E-2	34.9	34.9E-5	34.9E-2	34.9	34.9E-5	34.9E-2	34.9
1	9.065	9.255	11.565	4.032	3.979	4.274	74.913	51.134	41.302
10	6.349	6.568	8.242	2.449	2.748	2.886	53.356	38.632	30.080
20	6.166	6.603	8.598	2.510	2.517	2.681	49.325	37.095	28.851
30	6.275	6.632	8.374	2.311	2.572	2.617	47.902	36.241	30.233
40	6.909	6.739	8.737	2.449	2.557	2.597	50.800	34.560	29.516
50	6.855	6.810	8.817	2.464	2.535	2.682	49.676	35.103	29.586
60	7.041	6.918	8.864	2.413	2.445	2.518	49.588	34.250	29.352
70	7.416	6.979	9.547	2.416	2.364	2.691	50.452	34.213	29.927
80	7.529	7.809	9.705	2.393	2.661	2.629	49.533	35.656	28.628
90	7.567	7.756	9.624	2.455	2.566	2.621	50.445	37.108	29.522
100	7.933	7.739	9.727	2.495	2.444	2.625	50.850	35.665	28.694
Media	7.004	7.055	9.024	2.436	2.541	2.655	50.193	35.852	29.439

Cuadro 6 Tabla de comparación de solución topológica de la corredera espacial en coordenadas relativas con la solución global y las soluciones topológicas en coordenadas naturales para las tres velocidades angulares consideradas  $\dot{\theta} = [34,9E^{-5}, 34,9E^{-2}, 34,9]$ .

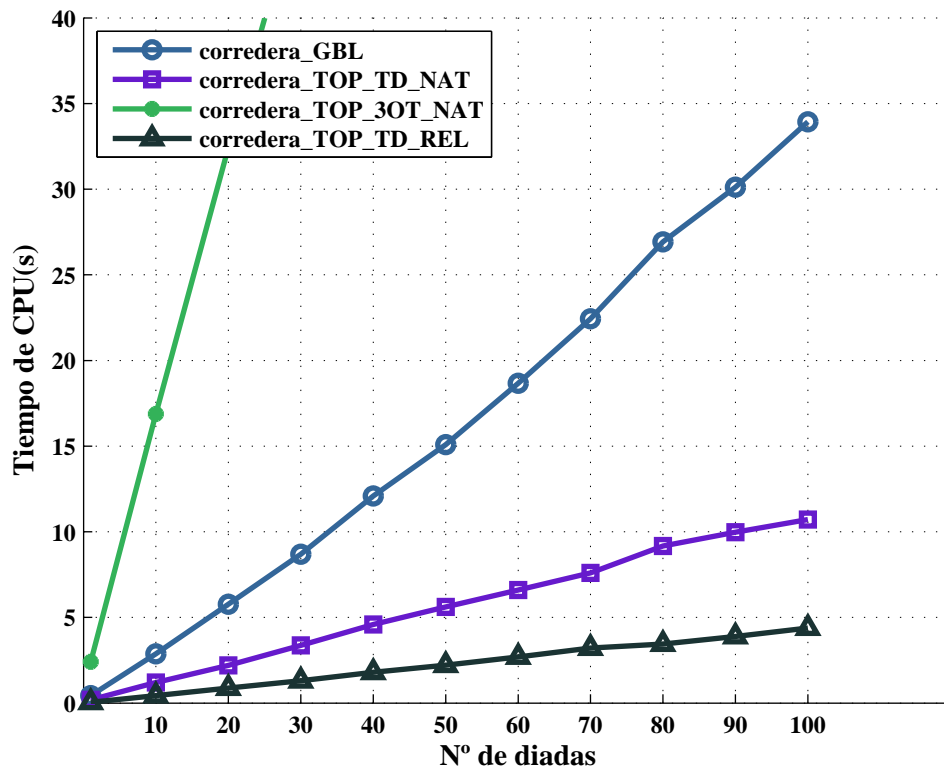


Figura 36 : Tiempos de ejecución de la corredera espacial en formulaciones global, topológica en coordenadas naturales y topológica en coordenadas relativas.

### *Conclusiones y desarrollos futuros*

---

#### 7.1 Principales ventajas e inconvenientes

Si se compara la formulación topológica por ecuaciones de grupo y coordenadas relativas con la formulación topológica en coordenadas naturales, podemos recoger las siguientes consideraciones:

- Menor coste computacional de la formulación topológica con coordenadas relativas por derivada temporal frente a formulación topológica con coordenadas naturales por derivada temporal para un grupo estructural con número de coordenadas elevado, en el caso espacial (3D). Se ha probado que para mecanismos con más coordenadas de grupo, tales como la corredera espacial, el problema se resuelve más rápido en coordenadas relativas, las cuales que requieren un menor número de coordenadas de grupo comparadas con las naturales y, por tanto, dan lugar a matrices jacobianas de menor dimensión, lo que simplifica considerablemente el problema.
- En grupos estructurales planos resueltos por formulación topológica en coordenadas relativas, el retraso en el cálculo de coordenadas cartesianas a partir de las relativas es perjudicial. Por ello como vimos en la resolución del cuadrilátero articulado se producía un retraso de la formulación en coordenadas relativas frente a la formulación topológica en coordenadas naturales, ambas por derivada temporal. No obstante, en desarrollos futuros si sería mejor resolver con formulación topológica en relativas que con formulación topológica por grupos y coordenadas relativas, o incluso naturales y grupos, en función del tamaño y del tipo de los grupos.
- Modularidad. Considera una serie de ventajas frente a la solución global: facilidad de modelización y resolución de cualquier MBS, y análisis rápido y efectivo. Consiste en la posibilidad de que cada grupo estructural pueda programarse, optimizarse y compilarse en una subrutina independiente que puede incluirse en una extensa librería de GE.
- Empleo de la función 'subs' en el método simbólico. La modelización por GE permite el uso de cálculo simbólico para generar las matrices necesarias para el análisis cinemático, a diferencia del global. Ello sistematiza la creación de las subrutinas que calculan los elementos de estas matrices, evitando operaciones al analista y garantizando que las mismas estén exentas de errores. Se ha incluido un avance que evita tener que copiar a mano las matrices, a menudo de

gran dimensión, al poder sustituir los diferenciales por variables con un nombre concreto. Esto supone una reducción de los tiempos de programación de las subrutinas y una forma de evitar errores en la realización alternativa del procedimiento de un modo manual.

- Formulación menos sistemática del problema. La formulación del problema en coordenadas relativas es menos sistemática y requiere la identificación de una serie de coordenadas angulares y de distancia, así como la fijación de otras tantas. Por su parte, en coordenadas naturales se fijan de forma sistemática una serie de puntos y vectores, lo que facilita la programación de esta solución.
- Ecuaciones de restricción con fórmulas trigonométricas complejas. Mientras que en coordenadas naturales siempre tenemos ecuaciones de restricción de sólido rígido (distancia constante), producto escalar o producto vectorial, en coordenadas relativas hemos de 'abrir' el mecanismo por un par cinemático y establecer una ecuación de cierre de lazo que a menudo contiene funciones trigonométricas complejas, lo que puede ralentizar algo la derivación del problema.

## 7.2 Desarrollos futuros

El presente trabajo puede servir como partida para el estudio y el análisis cinemático de mecanismos planos y espaciales por descomposición en grupos estructurales y utilizando subrutinas en coordenadas relativas que resuelvan tales grupos.

Entre los posibles desarrollos futuros, se destacan:

- Extensión del método a sistemas espaciales con GE que incluyan pares cinemáticos distintos de las combinaciones de rotación/traslación presentadas en este trabajo.
- Estudio comparativo de la eficiencia de métodos basados en coordenadas relativas sin descomposición en grupos.
- Desarrollo de un simulador para el estudio de la eficiencia del método basado en coordenadas relativas y GE dependiendo de la estructura cinemática del sistema multicuerpo, densidad de las matrices jacobianas de los GE, número de GDL del grupo y tipo de solver empleado en el análisis.
- Desarrollo e implementación de la formulación en coordenadas relativas y GE al análisis dinámico inverso y directo de sistemas multicuerpo.

grupo estructural del actuador lineal de la plataforma de Stewart en  
coordenadas naturales

$$\Phi = \begin{pmatrix} v1x^2+v1y^2+v1z^2-1 \\ v2x^2+v2y^2+v2z^2-1 \\ v3x^2+v3y^2+v3z^2-1 \\ v1xv2x+v1yv2y+v1zv2z-0,010447 \\ v1xv3x+v1yv3y+v1zv3z-0,027594 \\ v2xv3x+v2yv3y+v2zv3z+0,00432 \\ v4x^2+v4y^2+v4z^2-1 \\ v5x^2+v5y^2+v5z^2-1 \\ v1xv4x+v1yv4y+v1zv4z-0,0005903 \\ v1xv5x+v1yv5y+v1zv5z-0,029736 \\ v4xv5x+v4yv5y+v4zv5z+0,01326 \\ v1y(P0z-P1z)-v1z(P0y-P1y) \\ v1z(P0x-P1x)-v1x(P0z-P1z) \\ v1x(P0y-P1y)-v1y(P0x-P1x) \\ v3xv6x+v3yv6y+v3zv6z \\ v5xv7x+v5yv7y+v5zv7z \\ P1x-P0x-sv1x \\ P1y-P0y-sv1y \\ P1z-P0z-sv1z \end{pmatrix}; \Phi_q = \begin{pmatrix} 2v1x, 2v1y, 2v1z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 2v2x, 2v2y, 2v2z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 2v3x, 2v3y, 2v3z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ v2x, v2y, v2z, v1x, v1y, v1z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ v3x, v3y, v3z, 0, 0, 0, v1x, v1y, v1z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, v3x, v3y, v3z, v2x, v2y, v2z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2v4x, 2v4y, 2v4z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2v5x, 2v5y, 2v5z, 0 \\ v4x, v4y, v4z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v1x, v1y, v1z, 0, 0, 0, 0 \\ v5x, v5y, v5z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v1x, v1y, v1z, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v5x, v5y, v5z, v4x, v4y, v4z, 0 \\ 0, P0z-P1z, P1y-P0y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ P1z-P0z, 0, P0x-P1x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ P0y-P1y, P1x-P0x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, v6x, v6y, v6z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v7x, v7y, v7z, 0 \\ -s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -v1x \\ 0, -s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -v1y \\ 0, 0, -s, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -v1z \end{pmatrix}; \Phi_{q\dot{q}} = \begin{pmatrix} 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, -v1z, v1y, 0, v1x, -v1y, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ v1z, 0, -v1x, -v1z, 0, v1x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ -v1y, v1x, 0, v1y, -v1x, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, v3x, v3y, v3z, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v5x, v5y, v5z \\ -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\ 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix}; \Phi_{q\ddot{q}} = \begin{pmatrix} 2v1px^2+2v1py^2+2v1pz^2 \\ 2v2px^2+2v2py^2+2v2pz^2 \\ 2v3px^2+2v3py^2+2v3pz^2 \\ 2v1pxv2px+2v1pyv2py+2v1pzv2pz \\ 2v1pxv3px+2v1pyv3py+2v1pzv3pz \\ 2v2pxv3px+2v2pyv3py+2v2pzv3pz \\ 2v4px^2+2v4py^2+2v4pz^2 \\ 2v5px^2+2v5py^2+2v5pz^2 \\ 2v1pxv4px+2v1pyv4py+2v1pzv4pz \\ 2v1pxv5px+2v1pyv5py+2v1pzv5pz \\ 2v4pxv5px+2v4pyv5py+2v4pzv5pz \\ P0pxv1py-P0pyv1pz+P1pyv1pz-v1py(P0px-P1pz)+v1py(P0pz-P1pz) \\ P0pxv1pz-P0pv1px-P1pxv1pz+v1pz(P0px-P1px)-v1px(P0pz-P1pz) \\ P0pyv1px-P0pv1py+P1pyv1py-v1py(P0px-P1px)+v1py(P0py-P1py) \\ 2v3pxv6px+2v3pyv6py+2v3pzv6pz \\ 2v5pxv7px+2v5pyv7py+2v5pzv7pz \\ -2spv1px \\ -2spv1py \\ -2spv1pz \end{pmatrix}$$

$$\Phi_h \ddot{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P0szv1y - P1szv1y - P0syv1z + P1syv1z \\ P1szv1x - P0szv1x + P0sv1z - P1sv1z \\ P0syv1x - P1syv1x - P0sv1y + P1sv1y \\ v6sv3x + v6syv3y + v6szv3z \\ v7sv5x + v7syv5y + v7szv5z \\ P1sx - P0sx \\ P1sy - P0sy \\ P1sz - P0sz \end{pmatrix}$$

formulación topológica en coordenadas relativas de la corredera espacial

$$\Phi = \begin{pmatrix} L_2((\sin(\phi_1)\sin(\theta_2))/2+(\sqrt{3}\cos(\psi_2)\cos(\theta_2))/2+(\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2)-(L_1\sin(\phi_1))/2-r_{3,x} \\ L_2((\sqrt{3}\sin(\phi_1)\sin(\theta_2))/2-(\cos(\psi_2)\cos(\theta_2))/2+(\sqrt{3}\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2)-(\sqrt{3}L_1\sin(\phi_1))/2 \\ L_1\cos(\phi_1)-L_2(\cos(\phi_1)\sin(\theta_2)-\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2)) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_q^d = \begin{pmatrix} -L_2((\sqrt{3}\cos(\psi_2)\sin(\theta_2))/2-(\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2,-L_2((\sqrt{3}\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2-(\cos(\phi_1)\cos(\psi_2)\cos(\theta_2))/2),-1 \\ L_2((\cos(\psi_2)\sin(\theta_2))/2+(\sqrt{3}\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2),L_2((\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2+(\sqrt{3}\cos(\phi_1)\cos(\psi_2)\cos(\theta_2))/2),0 \\ -L_2(\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)+\sin(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2)),L_2\cos(\psi_2)\cos(\theta_2)\sin(\phi_1),0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_q^i = \begin{pmatrix} L_2((\cos(\phi_1)\sin(\theta_2))/2-(\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2))/2)-(L_1\cos(\phi_1))/2 \\ L_2((\sqrt{3}\cos(\phi_1)\sin(\theta_2))/2-(\sqrt{3}\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2))/2)-(\sqrt{3}L_1\cos(\phi_1))/2 \\ L_2(\sin(\phi_1)\sin(\theta_2)+\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))-L_1\sin(\phi_1) \end{pmatrix}$$

$$\dot{r}_1 = \begin{pmatrix} -(L_1\dot{\phi}_1\cos(\phi_1))/2 \\ -(\sqrt{3}L_1\dot{\phi}_1\cos(\phi_1))/2 \\ -L_1\dot{\phi}_1\sin(\phi_1) \end{pmatrix}$$

$$\ddot{r}_1 = \begin{pmatrix} L_1\sin(\phi_1)\dot{\phi}_1^2/2-(L_1\ddot{\phi}_1\cos(\phi_1))/2 \\ (\sqrt{3}L_1\sin(\phi_1)\dot{\phi}_1^2)/2-(\sqrt{3}L_1\ddot{\phi}_1\cos(\phi_1))/2 \\ -L_1\cos(\phi_1)\dot{\phi}_1^2-L_1\ddot{\phi}_1\sin(\phi_1) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_h\ddot{h} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1(L_2((\cos(\phi_1)\sin(\theta_2))/2-(\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2))/2)-(L_1\cos(\phi_1))/2) \\ \ddot{\phi}_1(L_2((\sqrt{3}\cos(\phi_1)\sin(\theta_2))/2-(\sqrt{3}\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2))/2)-(\sqrt{3}L_1\cos(\phi_1))/2) \\ \ddot{\phi}_1(L_2(\sin(\phi_1)\sin(\theta_2)+\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))-L_1\sin(\phi_1)) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\sigma\dot{q} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_{11} = & \dot{\phi}_1((L_1\dot{\phi}_1\sin(\phi_1))/2 + (L_2\dot{\theta}_2\cos(\phi_1)\cos(\theta_2))/2 - (L_2\dot{\phi}_1\sin(\phi_1)\sin(\theta_2))/2 \\
 & - (L_2\dot{\phi}_1\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2 - (L_2\dot{\psi}_2\cos(\psi_2)\cos(\theta_2)\sin(\phi_1))/2 + (L_2\dot{\theta}_2\sin(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2) \\
 & - L_2\dot{\psi}_2((\dot{\phi}_1\cos(\psi_2)\cos(\theta_2)\sin(\phi_1))/2 + (\psi_2\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2 + (\dot{\theta}_2\cos(\phi_1)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2))/2 \\
 & + (\sqrt{3}\dot{\psi}_2\cos(\psi_2)\cos(\theta_2))/2 - (\sqrt{3}\dot{\theta}_2\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2 - L_2\dot{\theta}_2((\dot{\theta}_2\sin(\phi_1)\sin(\theta_2))/2 \\
 & - (\dot{\phi}_1\cos(\phi_1)\cos(\theta_2))/2 + (\psi_2\cos(\phi_1)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2))/2 + (\dot{\theta}_2\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2 \\
 & - (\dot{\phi}_1\sin(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2 + (\sqrt{3}\dot{\theta}_2\cos(\psi_2)\cos(\theta_2))/2 - (\sqrt{3}\dot{\psi}_2\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2) \\
 A_{21} = & -\dot{\phi}_1((L_2(\sqrt{3}\dot{\phi}_1\sin(\phi_1)\sin(\theta_2))/2 - (\sqrt{3}\dot{\theta}_2\cos(\phi_1)\cos(\theta_2))/2 + (\sqrt{3}\dot{\phi}_1\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2 \\
 & + (\sqrt{3}\dot{\psi}_2\cos(\psi_2)\cos(\theta_2)\sin(\phi_1))/2 - (\sqrt{3}\dot{\theta}_2\sin(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2 - (\sqrt{3}L_1\dot{\phi}_1\sin(\phi_1))/2) \\
 & - L_2\dot{\theta}_2((\dot{\psi}_2\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2 - (\dot{\theta}_2\cos(\psi_2)\cos(\theta_2))/2 - (\sqrt{3}\dot{\phi}_1\cos(\phi_1)\cos(\theta_2))/2 + (\sqrt{3}\dot{\theta}_2\sin(\phi_1)\sin(\theta_2))/2) \\
 & + (\sqrt{3}\dot{\psi}_2\cos(\phi_1)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2))/2 + (\sqrt{3}\dot{\theta}_2\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2 - (\sqrt{3}\dot{\phi}_1\sin(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2) \\
 & - L_2\dot{\psi}_2((\dot{\theta}_2\sin(\psi_2)\sin(\theta_2))/2 - (\psi_2\cos(\psi_2)\cos(\theta_2))/2 + (\sqrt{3}\dot{\phi}_1\cos(\psi_2)\cos(\theta_2)\sin(\phi_1))/2 \\
 & + (\sqrt{3}\dot{\psi}_2\cos(\phi_1)\cos(\theta_2)\sin(\psi_2))/2 + (\sqrt{3}\dot{\theta}_2\cos(\phi_1)\cos(\psi_2)\sin(\theta_2))/2) \\
 A_{31} = & -\dot{\psi}_2(L_2\dot{\psi}_2\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2) - L_2\dot{\phi}_1\cos(\phi_1)\cos(\psi_2)\cos(\theta_2) + L_2\dot{\theta}_2\cos(\psi_2)\sin(\phi_1)\sin(\theta_2)) \\
 & - \dot{\phi}_1(L_1\dot{\phi}_1\cos(\phi_1) - L_2\dot{\phi}_1\cos(\phi_1)\sin(\theta_2) - L_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_2)\sin(\phi_1) - L_2\dot{\psi}_2\cos(\phi_1)\cos(\psi_2)\cos(\theta_2) \\
 & + L_2\dot{\phi}_1\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2) + L_2\dot{\theta}_2\cos(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2)) - L_2\dot{\theta}_2(\dot{\phi}_1\cos(\phi_1)\sin(\psi_2)\sin(\theta_2) \\
 & - \dot{\theta}_2\cos(\phi_1)\sin(\theta_2) - \dot{\phi}_1\cos(\theta_2)\sin(\phi_1) + \dot{\psi}_2\cos(\psi_2)\sin(\phi_1)\sin(\theta_2) + \dot{\theta}_2\cos(\theta_2)\sin(\phi_1)\sin(\psi_2))
 \end{aligned}$$



*grupo estructural de la diada 3R del cuadrilátero articulado en coordenadas relativas*

---

$$\Phi = \begin{pmatrix} 10 - L_1 \cos(\phi_1) - L_2 \cos(\phi_2) - x_3 \\ -y_3 - L_1 \sin(\phi_1) - L_2 \sin(\phi_2) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} L_1 \sin(\phi_1), L_2 \sin(\phi_2) \\ -L_1 \cos(\phi_1), -L_2 \cos(\phi_2) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_h = \begin{pmatrix} -1, 0 \\ 0, -1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Phi}_q \dot{q} = \begin{pmatrix} L_1 \cos(\phi_1) \dot{\phi}_1^2 + L_2 \cos(\phi_2) \dot{\phi}_2^2 + \dot{x}_3 \dot{z}_3 + \dot{y}_3 \dot{z}_3 \\ L_1 \sin(\phi_1) \dot{\phi}_1^2 + L_2 \sin(\phi_2) \dot{\phi}_2^2 + \dot{x}_3 \dot{z}_3 + \dot{y}_3 \dot{z}_3 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_h \ddot{h} = \begin{pmatrix} -\ddot{x}_3 \\ -\ddot{y}_3 \end{pmatrix}$$



grupo estructural de la diada 2S1P de la corredera espacial en coordenadas relativas

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1 - x_4 + L_3 \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) - r_4 \cos(\psi_4) \cos(\theta_4) \\ y_1 - y_4 + L_3 \cos(\psi_2) \sin(\psi_2) - r_4 \cos(\theta_4) \sin(\psi_4) \\ z_1 - z_4 - L_3 \sin(\theta_2) + r_4 \sin(\theta_4) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -L_3 \cos(\psi_2) \sin(\theta_2), -L_3 \cos(\theta_2) \sin(\psi_2), -\cos(\psi_4) \cos(\theta_4) \\ -L_3 \sin(\psi_2) \sin(\theta_2), L_3 \cos(\psi_2) \cos(\theta_2), -\cos(\theta_4) \sin(\psi_4) \\ -L_3 \cos(\theta_2), 0, \sin(\theta_4) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_h = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Phi}_{q\dot{q}} = \begin{pmatrix} -\dot{\psi}_2 (L_3 \dot{\psi}_2 \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) - L_3 \dot{\theta}_2 \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)) - \dot{\theta}_2 (L_3 \dot{\theta}_2 \cos(\psi_2) \cos(\theta_2) - L_3 \dot{\psi}_2 \sin(\psi_2) \sin(\theta_2)) \\ -\dot{\psi}_2 (L_3 \dot{\psi}_2 \cos(\theta_2) \sin(\psi_2) + L_3 \dot{\theta}_2 \cos(\psi_2) \sin(\theta_2)) - \dot{\theta}_2 (L_3 \dot{\psi}_2 \cos(\psi_2) \sin(\theta_2) + L_3 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \sin(\psi_2)) \\ L_3 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\Phi_h \ddot{h} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{pmatrix}$$



---

## *Referencias*

---

- [1] J. G. Jalon, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems*. NY: Springer-Verlag, 1993.
- [2] M. Gerardin and A. Cardona, *Flexible multibody dynamics: A finite element approach*. John Wiley and Sons, 2001.
- [3] S.-S. Kim and E. J. Haug, “A recursive formulation for flexible multibody dynamics, part ii: Closed loop systems,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 74, pp. pp. 251–269, 1989.
- [4] E. J. Haug, *Computer-aided kinematics and dynamics of mechanical systems*. Allyn and Bacon, Boston, MA, 1989.
- [5] P. E. Nikravesh, *Computer aided analysis of mechanical systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NY, 1988.
- [6] J. Cuadrado, “Modelización cinemática y dinámica de sistemas multicuerpo.”
- [7] A. Celdrán Cáceres, M. Saura Sánchez, D. Dopico Dopico, and P. Martínez Ibáñez, “Análisis computacional de la estructura cinemática de sistemas multicuerpo espaciales,” *XXI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Vol. 199, pp. pp. 1177–1184, 2016.
- [8] M. Saura Sánchez, P. Segado Cabezos, and D. Dopico Dopico, “Formulaciones dinámicas en coordenadas naturales para la aproximación basada en ecuaciones de grupo,” *XXI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Vol. 73, pp. pp. 335–342, 2016.
- [9] P. Segado Cabezos, M. Saura Sánchez, D. Dopico Dopico, and P. Martínez Ibáñez, “Eficiencia de una formulación cinemática computacional basada en ecuaciones de grupo,” *XXI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Vol. 53, pp. pp. 212–219, 2016.
- [10] M. Z. Kolovsky, A. N. Evgrafov, Y. A. Semenov, and A. V. Slousch, *Advanced theory of mechanism and machines*. Springer, 2000.
- [11] M. Saura, A. Celdrán, D. Dopico, and J. Cuadrado, “Computational structural analysis of planar multibody systems with lower and higher kinematic pairs,” *Proceedings of the 2nd Joint International Conference of Multibody System Dynamics, Stuttgart, Germany*, 2012.

- [12] P. Segado, J. C. Cano, J. Cuenca, D. Giménez, M. Saura, and P. Martínez, “Eficiencia de la paralelización multihilo en el análisis cinemático de sistemas multicuerpo basado en ecuaciones de grupo,” *XXI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, 2016.
- [13] “Hsl, a collection of fortran codes for large-scale scientific computation,” <http://www.hsl.rl.ac.uk/>, 2015.
- [14] “Intel math kernel library (intel mkl,” <https://software.intel.com/en-us/mkl-reference-manual-for-fortran>, 2015.
- [15] J. Samin and P. Fiset, *Symbolic modeling of multibody systems*. Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [16] M. Leger and J. McPhee, “Selection of modeling coordinates for forward dynamics multibody simulations,” *Multibody System Dynamics*, Vol. 18, No. 18, pp. pp. 277–297, 2007.
- [17] A. Kecskeméthy, T. Krupp, and M. Hiller, “Symbolic processing of multiloop mechanism dynamics using closed-form kinematics solution,” *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, No. 1, pp. pp. 23–45, 1997.
- [18] A. A. Shabana, *Dynamics of multibody systems*. 2nd ed. Cambridge Univ Press, 1998.
- [19] J. Cuadrado, D. Dopico, M. González, and M. A. Naya, “A combined penalty and recursive real-time formulation for multibody dynamics,” *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, No. 4, pp. pp. 602–608, 2004.