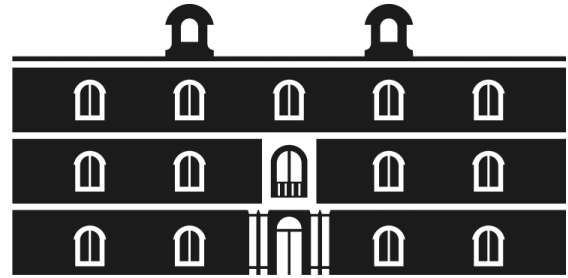


Universidad  
Politécnica  
de Cartagena



**industriales**

etsii UPCT

# Diseño y optimización de aletas rectas rectangulares “composite” bajo condiciones de convección

**Titulación:** Ingeniero Industrial  
**Alumna:** Elena Blanes Pérez  
**Director:** Juan Pedro Luna Abad  
**Codirector:** Francisco Alhama López

Cartagena, 16 de Septiembre de 2016

## ÍNDICE

Capítulo 1: Presentación y objetivos .....	2
Capítulo2: Fundamentos.....	9
Capítulo 3: Caracterización y diseño de aletas rectas rectangulares compuestas bajo condiciones de convección para valores de $k_{comp}/k < 1$ .....	40
Capítulo 4: Caracterización y diseño de aletas rectas rectangulares compuestas bajo condiciones de convección para valores de $k_{comp}/k > 1$ .....	61
Capítulo 5: Conclusiones de aletas rectas rectangulares compuestas bajo condiciones de convección.....	78
Nomenclatura.....	81
Estructura del circuito.....	83
Bibliografía.....	86

# Capítulo 1

## Presentación y objetivos

### 1.1 Antecedentes e Introducción

A pesar de constituir un tema muy estudiado por numerosos investigadores en el campo de la transferencia de calor durante las últimas décadas, lo que ha dado lugar a un sinfín de publicaciones en revistas especializadas, puede afirmarse que la optimización de aletas no es un capítulo cerrado, ni mucho menos. Lo cierto es que aún aparecen con relativa frecuencia interesantes trabajos en este campo. Las razones que justifican la dificultad de cerrar el diseño y optimización de aletas son varias: en primer lugar, se trata de un problema no lineal que, en general, requiere el concurso de métodos numéricos de cálculo, además existen numerosos tipos de aletas diferentes que han de estudiarse separadamente debido a su geometría y condiciones de contorno; en segundo lugar, la no asunción de hipótesis simplificadoras para abordar problemas reales da lugar a la aparición de un número de parámetros tan elevado que su tratamiento, tanto analítico como numérico, resulta muy complejo; por último, la no existencia de parámetros de prestaciones específicamente definidos y adecuados al proceso de optimización no permite abordar el problema siguiendo una línea común. Así, cada autor establece sus propios parámetros en cada problema y busca la optimización siguiendo su camino particular, en general complejo y, en ocasiones, difícil de entender por otros investigadores.

Los resultados obtenidos mediante este trabajo, curvas o ábacos de carácter universal, están constituidos por puntos óptimos y ha supuesto la computación de innumerables grupos de espines en los que uno a más parámetros tienen un estrecho rango de variación para ajustar lo más finamente posible el valor óptimo. En este sentido, aunque el programa de simulación usado para el cálculo numérico tiene ciertas opciones que permiten la ejecución múltiple de modelos, los tiempos de computación se elevan a centenares de horas.

La técnica usada para la solución de cada caso (configuración particular de aleta) es el “Método de Simulación por Redes” (MESIR, de aquí en adelante), González-Fernández (2002). Esta herramienta, empleada por el grupo de investigación en otras líneas de trabajo (procesos electroquímicos, transporte en membranas, flujo de fluidos con transporte de solutos, mecánica del rozamiento, elasticidad...), es de fácil manejo y proporciona una solución numérica muy precisa para mallados relativamente pequeños (50 elementos de volumen en problemas 1-D y 50×50 en problemas 2-D). Para estos mallados los errores son generalmente muy inferiores al 1%, Alhama (1999).

En esencia el MESIR se aplica en dos etapas: en primer lugar se diseña un modelo en red o circuito eléctrico, cuyas ecuaciones diferenciales expresadas en diferencias finitas en el espacio son idénticas a las del modelo físico-matemático; el tiempo permanece como variable continua. En segundo lugar, se ejecuta dicho modelo en un programa de simulación de circuitos para obtener la solución numérica del mismo.

En cuanto al diseño de modelos hay de decir que para la elaboración de los mismos se requiere un pequeño número de reglas ya que son muy pocos los componentes eléctricos diferentes que se necesitan (básicamente resistencias, condensadores y fuentes independientes y controladas por intensidad o tensión para implementar las condiciones de contorno y otras no linealidades).

## 1.2 Objetivos y Desarrollo

El objetivo de esta memoria es, esencialmente, desarrollar procesos formales de optimización y diseño para aletas rectas composites, en condiciones estacionarias, con parámetros de transferencia de calor constantes y bajo condiciones de contorno de enfriamiento convectivo, mediante la aplicación del coeficiente de prestaciones “admitancia térmica inversa relativa”, ATIR.

Se trata de demostrar que el uso del ATIR permite construir curvas o ábacos universales de aletas óptimas que conducen, mediante protocolos sencillos, a la determinación del espín idóneo para cada especificación o conjunto de valores de diseño.

## 1.3 Estado del arte

Toda memoria debe contener un apartado en el que se recoja hasta la fecha los trabajos que sobre el tema han desarrollado otros autores, incluyendo una muy breve descripción y un comentario, si procede. A pesar de que muchos de los trabajos que se citan a continuación se refieren a tipos de aletas no estudiadas en esta memoria, pero a los que se les puede aplicar el método propuesto en la misma, he decidido incluir toda la relación de trabajos que traten el tema de la optimización en un primer bloque y lo mismo para el tema de coeficientes de prestaciones en un segundo bloque.

### 1.4.1 En relación con la optimización

El primer trabajo fue llevado a cabo por Schmidt (1926) cuyo resultado fue la obtención de perfiles de aleta difíciles de mecanizar. Desde esa fecha hasta la actualidad son innumerables los trabajos dedicados a la optimización de superficies extendidas.

Razelos (1979) estudia la optimización de diferentes tipos aletas bajo modelos 1-D, con generación interna de calor y condición adiabática en el extremo. En este trabajo ya introduce la efectividad como parámetro de referencia para la optimización. En Razelos e Imre (1980) se presenta la optimización de aletas anulares tomándose en consideración la dependencia de la conductividad y el coeficiente de transferencia de calor con la temperatura y con la distancia a la base de la aleta; la condición de contorno es convectiva, se usan modelos 1-D y se adopta la condición adiabática en el extremo. En este trabajo se propone la efectividad como parámetro de optimización y, contrariamente a lo que sucederá en sucesivos trabajos del mismo autor, toma un valor de 5 para la efectividad mínima admisible.

Sonn y Bar-Cohen (1981) desarrollan la optimización del espín circular bajo condiciones de convección y extremo aislado llegando a la conclusión, entre otras, de que la eficiencia del óptimo está muy lejos de los altos valores usados en los ejemplos de la bibliografía clásica. Chung-Hsiung Li (1983) da un paso más en la optimización de espines cilíndricos al considerar la dependencia del coeficiente de transferencia de calor con la inversa del diámetro elevado a un cierto valor, función del Número de Reynolds y de la posición relativa entre espines. Analiza un solo espín y matrices de espines.

Razelos (1983), de nuevo, desarrolla la optimización de espines rectos sujetos a convección bajo modelos 1-D, a diferencia de dos trabajos citados anteriormente, aquí se estudia el problema bajo un perfil generalizado donde el radio es función de la distancia a la base.

Aziz (1985) optimiza aletas rectangulares y de perfil triangular bajo condiciones de convección. Ullman y Kalman (1989) estudian la eficiencia y las dimensiones óptimas de aletas anulares bajo modelos 1-D, diferentes perfiles y condición adiabática en el extremo. Presentan curvas de eficiencia para diferentes perfiles y definen un parámetro adimensional formado por la relación entre el calor adimensional disipado y la masa de la aleta también adimensionalizada. Con este parámetro se lleva a cabo el proceso de optimización en el que, al considerar extremo adiabático el óptimo siempre existe. En este trabajo los resultados sobre optimización usan como parámetro un Número de Biot función del radio interior de la aleta; este Biot longitudinal no es, obviamente, un parámetro relevante en el problema bajo modelos 1-D, en todo caso lo sería el  $Bi_i$ , que no se considera.

Chung e Iyer (1993) optimizan aletas rectas y espines rectos bajo condiciones 2-D y coeficientes de transferencia de calor dependientes de la temperatura, usando para ello un método integral; las ecuaciones se integran numéricamente para después comparar los resultados con las soluciones analíticas 2-D y 1-D; en ningún momento aparece la efectividad como parámetro útil para el diseño a diferencia de los trabajos que dirige Razelos, en los que este parámetro aparece continuamente.

Kraus y Bar-Cohen (1995) exponen los ejemplos más significativos sobre optimización bajo condiciones de convección, extremo adiabático y con modelos 1-D para los principales tipos de aletas, espines y aletas rectos con diferentes perfiles terminados en punta o no.

Laor y Kalman (1996) hacen un análisis pormenorizado 1-D sobre la optimización de diferentes perfiles de aletas rectas, espines y aletas anulares, cuyos parámetros térmicos son dependientes de la temperatura. Para optimizar usa el calor disipado por unidad de masa, una variable que se asemeja a la admitancia térmica inversa específica, en estado estacionario, a falta de dividir por la diferencia de temperaturas entre la base y el ambiente. Impone la condición innecesaria de calor nulo en el extremo de la aleta.

Razelos y Satyaprakash (1996), continuando en la misma línea de trabajos anteriores, estudian un espín troncocónico de sección circular con generación interna de calor con modelos 1-D y con parámetros térmicos constantes, tomando extremo adiabático. También se muestra la influencia y relación de la conductividad térmica sobre los resultados óptimos. La generación de calor está relacionada con la absorción de neutrones rápidos y se pretende aplicar al estudio de refrigeración de reactores nucleares.

Yeh (1996) analiza los errores que se dan al optimizar bajo modelos 1-D en comparación a 2-D usando para ello modelos 2-D estacionarios y con parámetros constantes. Se incluye la transferencia de calor en el extremo y se adopta una base con temperatura uniforme. Hay que hacer notar que al derivar el calor obtenido lo hace con respecto a la relación de aspecto,  $L/e$ . Define tres tipos de  $Bi_t$ , para valores de estos mayores que los correspondientes óptimos, no se alcanza el objetivo del óptimo. Concluye que siempre hay óptimo si el extremo esta aislado, no siendo así en el caso de extremo convectivo.

Kalman (2000) trabaja en la optimización de aletas rectas, espines y aletas anulares bajo modelos 1-D y con todas las variantes posibles, coeficientes dependientes de la temperatura, extremo adiabático y convectivo, generación interna de calor, etc. De sus resultados saca valores de la eficiencia, efectividad y geometrías óptimas.

Gorobets (2006) trabaja en la obtención del óptimo para aletas compuestas, aletas formadas por un núcleo con una conductividad mayor que la existente en la capa externa, de modo que ésta actúa como aislante. Analiza las aletas bajo modelos 1-D y 2-D.

Luna-Abad y Alhama (2008) presentan por primera vez, la optimización de espines cilíndricos a través de la admitancia térmica inversa relativa,  $ATIR$ , bajo condiciones de convección y modelos 2-D. Se presenta la “longitud característica generalizada” como parámetro adimensional para separar el comportamiento 1-D y 2-D del espín. Se presentan resultados de optimización para espines con extremo adiabático y convectivo además de curvas de efectividad frente a  $Bi_t$  que permiten asegurar que los resultados de la optimización conducen siempre a aletas efectivas.

Luna-Abad y Alhama (2009) proponen la optimización de aletas rectas rectangulares bajo condiciones de contorno asimétricas y bajo modelos 2-D usando de nuevo la admitancia térmica inversa

relativa. Se dan gráficas, tablas y ejemplos en los que se muestra el método seguido para la optimización. Estos autores desarrollan la optimización de aletas rectas rectangulares con condiciones de convección y bajo modelos 2-D. Se consideran los casos en los que hay o no transferencia de calor en el extremo. Presentan gráficas, tablas y ejemplos en los que se muestra el método y los resultados obtenidos para la optimización.

#### **1.4.2 En relación con la caracterización y el diseño**

El primer trabajo formal y de referencia para cientos de trabajos posteriores es el de Harper y Brown (1922). En el mismo se da una primera definición de eficiencia, aunque bajo el nombre de “efectividad” y se analiza el comportamiento de las superficies extendidas más comunes, aletas rectas y de perfil trapezoidal. Desde este trabajo hasta la actualidad son innumerables la cantidad de estudios que se han dedicado a las aletas, a su diseño, caracterización y optimización, bajo las más diversas condiciones de contorno, convección, radiación, ambas formas de calor combinadas, procesos estacionarios y transitorios, modeladas bajo condiciones 1-D y 2-D, etc. Los referidos a optimización ya han sido citados anteriormente.

Gardner (1946) lleva a cabo un gran estudio en relación a la caracterización de aletas de diferente perfil, determinando la eficiencia. En este trabajo, junto con el de Murray (1938), quedan establecidas las hipótesis sobre las que se asienta la inmensa mayoría de artículos que versan sobre aletas. Existen algunos trabajos recopilatorios en los que se puede encontrar con todo detalle referenciados la mayoría de textos que se dedican al estudio de superficies extendidas en general: Kraus (1988), que recoge una revisión de estudios sobre aletas durante 65 años (1922-1987), Heggs (2000), que de forma breve y clara presenta los principales resultados e hipótesis en el estudio de aletas y Kraus et al. (2001), que en un amplísimo trabajo recogen casi en su totalidad todo lo relacionado con la transferencia de calor en superficies extendidas. También Razelos (2003), en un amplio, extenso y detallado trabajo en el que, como el propio título indica, se hace una crítica profunda de una serie de textos dedicados a la transferencia de calor en superficies extendidas. Parte de las hipótesis de Murray-Gardner y va desmenuzando cada uno de los textos que cita indicando todo tipo de contradicciones, inexactitudes y aplicaciones imposibles, siempre según criterio del autor.

Irey (1968) determina los errores producidos en el tratamiento de espines cilíndricos bajo modelos 1-D al compararlo con los modelos 2-D. Extiende el análisis a valores de  $Bi_t$  hasta 10 lo que le lleva a trabajar con espines de efectividad por debajo de la unidad. Lau y Tan (1973) calculan los errores al trabajar con modelos 2-D ahora aplicados a aletas rectas anulares considerando la transferencia de calor en el extremo. Al considerar modelos 2-D se aprecia el efecto de que la temperatura no es constante en la base de la aleta.

Luna-Abad y Alhama (2004a) caracterizan una aleta aislada sometida a radiación y convección obteniendo una longitud característica que en el caso de radiación y convección simultánea ha de ser

deducida numéricamente debido a la complejidad de su expresión. Para este análisis se usa el método de simulación por redes (MESIR) y modelos de conducción 1-D.

Luna-Abad y Alhama (2004b), aplicando el método de simulación por redes, estudian la influencia de los parámetros geométricos y térmicos en la admitancia inversa para el conjunto aleta-pared bajo modelos 2-D. También Luna-Abad y Alhama (2005a y 2005b) caracterizan el espín circular usando el método de simulación por redes, bajo modelos 1-D y 2-D con condición de contorno en el extremo convectiva y adiabática encontrando una longitud característica generalizada que permite distinguir de forma clara la frontera entre modelos 1-D y 2-D y el error que se comete al usar un modelo u otro en función del valor del  $Bi_c$ .

De nuevo, Luna-Abad y Alhama (2006), apoyándose en los dos trabajos anteriores desarrollan el concepto de longitud característica generalizada en aletas rectas rectangulares, bajo modelos 2-D, aplicando condición de contorno en el extremo adiabática y convectiva y representado las curvas de eficiencia en función de la longitud característica generalizada.

Entre los tipos especiales de aleta a los que se ha aplicado el ATIR están las aletas compuestas, aletas formadas por dos o más materiales de diferente conductividad. En relación a los trabajos con aletas compuestas hay que citar uno de los primeros realizado por Barker (1958) en el que se determina la eficiencia de aletas formadas por dos materiales y su función en la refrigeración del regenerador de instalaciones de turbinas de gas accionadas por energía nuclear. Las distintas configuraciones usadas se tratan como sistemas multicapa con un eje de simetría. Trabaja con aletas rectas rectangulares y espines cilíndricos aplicando modelos 2-D. Chen y Flucker (1974) desarrollan las expresiones para la transferencia de calor en aletas compuestas anulares bajo modelos 2-D y condiciones de convección y extremo adiabático.

Epstein y Sandhu (1978), usando modelos 1-D, trabajan en la eficiencia de aletas cuando una capa de suciedad, material con conductividad menor que la de la aleta, está depositada sobre la superficie de la aleta. Consideran el efecto de la pared y proponen dos modelos de conducción, uno considerando que la capa aislante se comporta como una resistencia en paralelo con la resistencia de la aleta y el otro con resistencia de la capa aislante en serie con la de la aleta.

Barrow et al. (1986) obtienen la solución exacta usando modelos 2-D, y los comparan con las soluciones obtenidas mediante el método de diferencias finitas y el de elementos finitos. Su trabajo se dedica a resolver las aletas rectas compuestas formadas por un núcleo conductivo y una capa externa de escarcha que se forma en los evaporadores de las instalaciones de frío. También trabajan con coeficientes de transferencia de calor variables llegando a la conclusión de que el efecto de la capa de suciedad es pequeño y que el comportamiento del conjunto está determinado por el núcleo conductivo.



Lalot et al. (1999) determinan la eficiencia de aletas anulares formadas por dos materiales diferentes bajo modelos de conducción 2-D. Comparan los resultados entre aletas con y sin composite en función del espesor de la capa exterior.

Xia y Jacobi (2004) modelizan la capa de escarcha depositada en la superficie de la aleta situada entre dos tubos mediante modelos 2-D mientras que el modelo usado en la conducción de la aleta es 1-D. Pin Tu et al. (2006) desarrollan el cálculo de la eficiencia en aletas anulares con núcleo conductivo y capa externa, contemplando el caso de que la conductividad del núcleo sea mayor que la de la capa externa y el caso contrario. Al igual que Xia y Jacobi (2004), el sistema es simulado considerando modelos 2-D en la capa externa y modelos 1-D para el núcleo de la aleta; ambos trabajos consideran la misma expresión para el Número de Biot en función de las conductividades de ambas capas.

Gorobets (2006) trabaja en la eficiencia y la optimización de aletas rectas, anulares y espines circulares. Usa modelos 2-D y 1-D, determinando los errores entre ambos modelos. La optimización la lleva a cabo bajo modelos 1-D. Determina una expresión para el  $Bi_t$  de la aleta compuesta y expresa la geometría óptima en función de éste. Estudia la influencia del grosor y la no uniformidad de la capa de polución sobre las características térmicas, la eficiencia y la geometría óptima de la aleta. Gorobets (2008) trata los mismos puntos que el anterior trabajo excepto el referido a la transferencia de calor en el sistema tubo-aleta compuesta. Determina la transferencia de calor en modelos 1-D y 2-D y calcula los errores producidos. Obtiene las dimensiones óptimas de las aletas compuestas y la influencia de la capa menos conductiva cuando es uniforme y cuando no lo es. Determina factores de corrección en la comparación. Afirma que la capa externa menos conductiva supone una “ventaja” basándose en el hecho de que al actuar como aislante incrementa la temperatura del núcleo más conductivo y da lugar a una mayor transmisión de calor. De alguna manera la suciedad externa hace que la temperatura de la aleta sea mayor disipando así más calor.

Finalmente Cortés et al. (2007) determinan la eficiencia en aletas rectangulares compuestas de diferente espesor con métodos analíticos 1-D y numéricos 2-D.

# Capítulo 2

## Fundamentos

### 2.1 Introducción

En este capítulo se exponen los fundamentos de la ciencia de conducción del calor en aletas, las condiciones de contorno a las que están sometidas y las simplificaciones e hipótesis empleadas en su resolución.

Se presentan los números adimensionales que caracterizan el problema y que son el argumento de las soluciones analíticas, cuando existen. También se exponen los coeficientes de prestaciones que habitualmente se usan para el diseño y caracterización de aletas. Entre estos coeficientes hay que destacar la admitancia térmica inversa relativa (ATIR) como el parámetro idóneo para el diseño de estos conjuntos.

A continuación, se introducirán los fundamentos del Método de Simulación por Redes (MESIR), herramienta de cálculo para la simulación numérica de los problemas abordados en esta memoria. El MESIR es un método versátil y potente, muy extendido en la literatura científica, capaz de modelar, en principio, cualquier problema matemático definido mediante un conjunto de ecuaciones de gobierno y de condiciones de contorno. La aplicación del MESIR precisa de un programa de resolución de circuitos eléctricos. De entre los existentes en el mercado se ha adoptado OrCAD, derivado del antiguo software PSpice (1994), en sus diferentes versiones. Un epígrafe de este capítulo se dedica a las posibilidades de análisis y simulación de este programa.

### 2.2 Transmisión de calor por conducción

#### La ecuación de Fourier o ecuación de conducción

Para un medio homogéneo e isotrópico, es decir, de conductividad independiente de la posición y de la dirección espacial, la relación entre la densidad de flujo calorífico,  $\bar{q}(\bar{r}, t)$ , que cruza la unidad de superficie isoterma, y el gradiente térmico,  $\nabla T$ , vector normal a la superficie o línea isoterma, viene dada por la ley de Fourier (introducida con anterioridad por Biot (1816)),

$$\bar{q}(\bar{r}, t) = -k \nabla [T(\bar{r}, t)] \quad (2.1)$$

donde  $\bar{r}$  es la posición,  $t$  el tiempo y  $k$  la conductividad térmica, magnitud escalar positiva. Se trata de una ley fenomenológica, es decir, no deducida de principios fundamentales sino derivada a partir de observaciones directas. Como es sabido, la conducción es uno de los tres modos de transmisión del calor en el que el intercambio energético tiene lugar en sólidos o en fluidos en reposo (ausencia de movimientos convectivos).

El balance energético local en un medio en reposo entre la energía almacenada (energía térmica interna), la energía en tránsito (calor) y la generada o consumida por el propio medio (fuentes o sumideros), permite ser formulado matemáticamente en términos de una ecuación en derivadas parciales denominada ecuación de conducción del calor, Figura 2.1. Para un medio homogéneo e isotrópico dicha ecuación tiene la forma

$$(\nabla \cdot \bar{q}) + \bar{g}(\bar{r}, t) = \rho c_e \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (2.2)$$



Figura 2.1 Balance energético local

En esta ecuación  $\bar{g}(\bar{r}, t)$ , es la densidad de potencia, potencia generada por unidad de volumen en un punto del medio,  $\rho$  es la densidad y  $c_e$  el calor específico por unidad de masa a presión constante. Sustituyendo la densidad de flujo de calor de la ecuación (2.1), la ecuación de conducción puede expresarse en términos de una única variable dependiente, la temperatura, y dos independientes, la posición y el tiempo:

$$\nabla \cdot [k \nabla T(\bar{r}, t)] + \bar{g}(\bar{r}, t) = \rho c_e \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (2.3)$$

Si se trata de un medio lineal y homogéneo (conductividad y calor específico constantes independientes de la temperatura y posición), y en ausencia de generación interna y sumideros de calor la ecuación de conducción se reduce a

$$\nabla^2 \Gamma(\vec{r}, t) = \alpha^{-1} \left[ \frac{\partial \Gamma(\vec{r}, t)}{\partial t} \right] \quad (2.4)$$

donde  $\alpha = k/(\rho c_e)$  es la llamada difusividad térmica, asociada con la rapidez global de propagación del calor en el medio.

En coordenadas rectangulares la ecuación de conducción tiene la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) = \rho c_e \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (2.5)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (2.6)$$

Mientras que en coordenadas cilíndricas la ecuación se escribe en la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) = \rho c_e \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (2.7)$$

o bien

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (2.8)$$

Los problemas estudiados en esta memoria son estacionarios y abordan geometrías 1-D y 2-D rectangulares y cilíndricas, donde  $z$  e  $y$  junto con  $r$  y  $z$ , respectivamente, son variables independientes. Así, las ecuaciones anteriores se simplifican para estas coordenadas, respectivamente, a las siguientes;

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.10)$$

o bien, en medios con características térmicas constantes,

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} = 0 \quad (2.12)$$

La deducción de estas ecuaciones puede encontrarse en numerosos libros de texto entre los que cabe mencionar, por su carácter pedagógico los de Chapman (1984), Özisik (1993), Bejan (1993), Mills (1995), Incropera y DeWitt (2006), Taine y Pettit (1993) y Lienhard (2004).

## 2.3 Conducción de calor en aletas

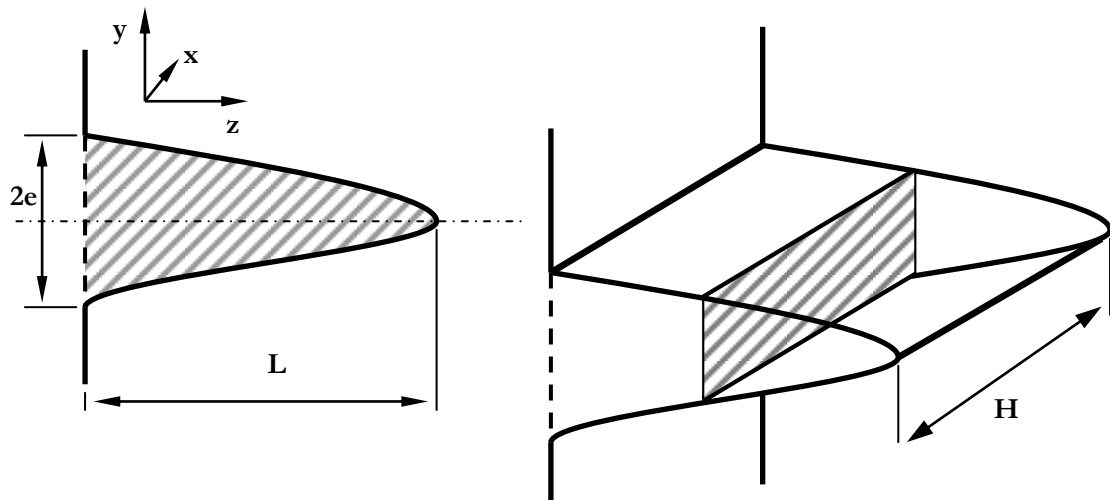
### 2.3.1 Introducción

Las aletas son elementos adicionales que se adosan a la superficie de un cuerpo cuando se desea eliminar calor de éste. Pueden ser del mismo o distinto material que la pared a la que están adosadas. Las aletas forman parte esencial de dispositivos tan variados como intercambiadores de calor, compresores, motores térmicos o eléctricos refrigerados por aire, disipadores de calor en dispositivos eléctricos y electrónicos, etc. La adición de la aleta trae como consecuencia un aumento del área por la que se intercambia calor entre el cuerpo y el medio. Sin embargo, dado que el flujo de calor ha de atravesar mayor cantidad de material (el material de la propia aleta) se produce un aumento de la resistencia térmica. Así, aunque en muchas aplicaciones las aletas se emplean para disipar calor, es decir, para aumentar la transmisión de calor hacia el entorno más frío, también pueden realizar la función inversa, es decir, aumentar la ganancia térmica de un objeto.

En general, la gran longitud relativa y pequeño espesor de la aleta proporcionan una gran superficie de contacto con el fluido que la baña, superficie a través de la cual se disipa el calor que entra en la aleta por su base. El mecanismo más frecuente de intercambio térmico a lo largo de toda esta superficie exterior es la convección, en las distintas formas que ésta adopta. En este caso se habla de aletas convectivas.

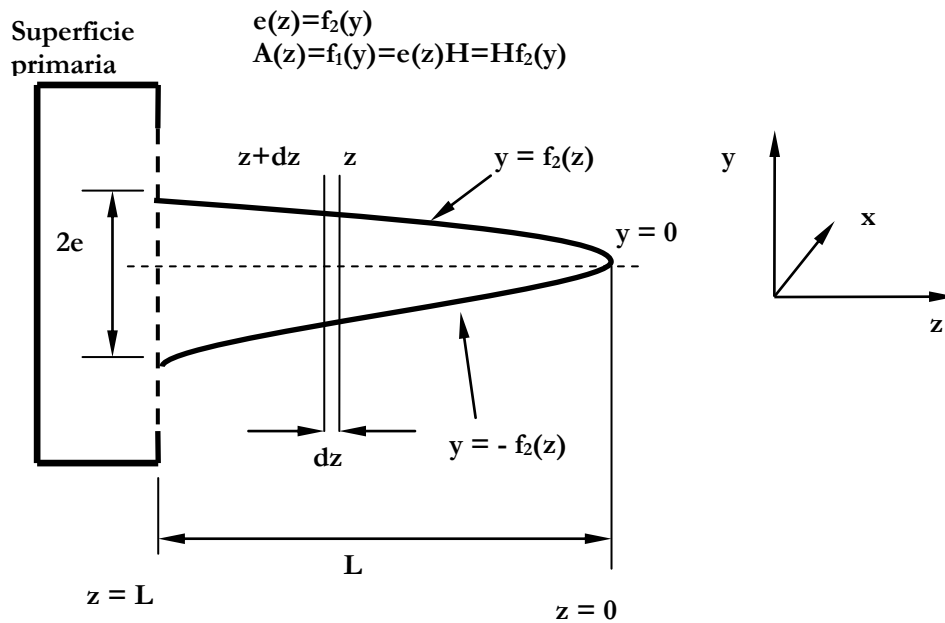
En otros casos, cuando el salto térmico es importante o no existe fluido exterior, la radiación puede ser el mecanismo de disipación. También puede ser importante el flujo disipado por la pared desnuda por lo que es necesario considerar ésta en muchas aplicaciones.

Las aletas longitudinales o rectas se caracterizan porque la base de la aleta es plana y se extiende a lo largo de la superficie primaria, también plana o casi-plana. Se denomina base de la aleta a la superficie en contacto con la pared sobre la que descansa la aleta o superficie primaria; el extremo o punta de la aleta es la superficie más alejada de la base; los flancos o superficies superior o inferior son las principales superficies de disipación de calor y los bordes son las superficies que cierran el volumen de la aleta cuyo efecto sobre la transmisión de calor es despreciable en ciertos tipos de aletas longitudinales, en este trabajo no se tendrá en consideración la transferencia de calor en los bordes.



a) Perfil de aleta general. Descripción de los ejes coordenados

b) sección transversal de una aleta



c) nomenclatura de la aleta. Se indica que el origen de coordenadas está en la base y no en el extremo. Sistema de coordenadas seguido en todo el texto

Figura 2.2 Nomenclatura para aletas simples y espines, sistemas de ejes coordenados y nomenclatura

Las dimensiones principales de las aletas rectas rectangulares son la longitud o altura,  $L$ , el espesor,  $2e$ , y la anchura,  $H$ . Se denomina sección transversal a la sección en el plano  $yx$ , plano perpendicular al flujo térmico, mientras que la sección longitudinal es la del plano  $yz$  que define el perfil de la aleta. El plano  $xz$  es, en este caso, un plano de simetría en aletas rectas y contiene al eje de la aleta de dirección axial, eje  $z$ , dirección principal en la que fluye el calor.

Por último, la terminología asociada al conjunto aleta-pared para aleta recta rectangular se muestra en la Figura 2.3.

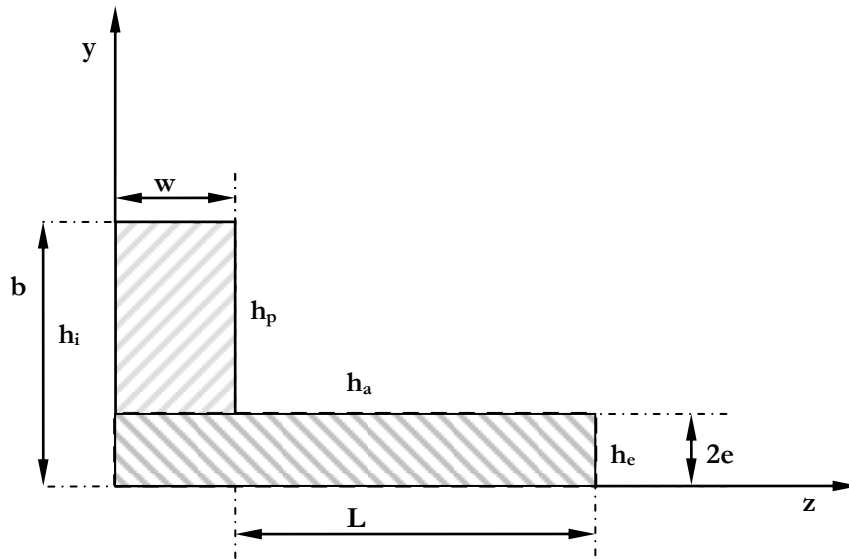


Figura 2.3 Conjunto aleta-pared. Parámetros geométricos y térmicos

### 2.3.2 Ecuación diferencial de la aleta 1-D. Hipótesis simplificadoras

Los primeros estudios formales provienen de principios del siglo pasado, Harper y Brown (1922), y abarcan un significativo número de geometrías. Estos estudios clásicos se basan en las llamadas hipótesis de Murray-Gardner, Gardner (1945), o hipótesis simplificadoras. Aún hoy se asume la mayor parte de estas hipótesis, tanto en los libros de texto especializados como en gran parte de la literatura científica, para el diseño práctico de estos conjuntos. Estas hipótesis son:

- i. El flujo de calor y la temperatura en la aleta permanecen constantes con el tiempo, el análisis es estacionario,
- ii. El material del que está formada la aleta es homogéneo, su conductividad térmica es la misma en todas las direcciones y permanece constante,
- iii. El coeficiente de transferencia de calor sobre las caras es constante y uniforme en todas las caras de la superficie,
- iv. La temperatura del ambiente o medio en el que está sumergida la aleta es constante,
- v. El espesor es pequeño en comparación con la longitud y con la anchura o profundidad de la aleta, por tanto el gradiente de temperatura a lo largo del eje perpendicular al eje axial de la aleta y el calor a través de las superficies laterales puede ser despreciado,
- vi. La temperatura de la base es uniforme,
- vii. No hay resistencia de contacto en el lugar en que la base de la aleta se une a la superficie primaria,
- viii. No hay fuentes de calor en el interior de la superficie,

- ix. El calor transferido a través del extremo de la aleta es despreciable en comparación con el que se transfiere por la superficie lateral,
- x. El calor transferido desde la aleta es proporcional a la temperatura de exceso entre la aleta y el medio circundante.

Otra condición que a menudo se impone en muchos estudios y que a lo largo de este trabajo se usará con frecuencia es la que hace referencia a la transferencia de calor en el extremo, lo que supone no asumir la hipótesis (ix).

### **2.3.3 La ecuación diferencial 2-D de la aleta en condiciones 2-D**

La formulación bajo condiciones 2-D para aletas y espines cilíndricos supone una temperatura no constante en puntos de cada sección transversal. Para este modelo se obtienen soluciones en forma de series de convergencia lenta y, por tanto, de complicada manipulación matemática. Sin embargo, la aplicación del MESIR a estos problemas proporciona resultados directos en forma de tablas y gráficas de fácil interpretación. Las ecuaciones (2.11) y (2.12) hacen referencia a esta formulación y se aplican las mismas condiciones de contorno del epígrafe anterior.

### **2.3.4 Soluciones analíticas**

Muchos de los problemas estudiados tienen solución analítica, particularmente los que tienen condiciones de contorno lineales, aunque estas soluciones sean matemáticamente complejas. Remitimos a los textos Chapman (1984), Incropera y DeWitt (2006) y Özisik (1993), entre otros para encontrar estas soluciones.

Para otros problemas no lineales pueden encontrarse, en ocasiones, soluciones semianalíticas y en cualquier caso todos pueden tratarse numéricamente. La herramienta numérica con la que se resuelven los problemas del programa, el MESIR, es muy precisa y ha sido contrastada en numerosas aplicaciones tanto en el campo de transmisión de calor como en otros campos, por lo que sus soluciones pueden considerarse fiables.

### **2.3.6 Medios multicapa. Aletas compuestas**

Estas aletas están formadas por diferentes materiales de distinta conductividad. Estos materiales se disponen en capas. Se puede dar el caso de una aleta con un núcleo muy conductivo y una capa de otro material que la envuelva y cuya conductividad es menor, por ejemplo las aletas situadas en evaporadores o condensadores que están recubiertas de hielo o suciedad; también se da este caso en aletas con núcleo de cobre que han de trabajar en ambientes muy corrosivos o de altas temperaturas de manera que la capa externa menos conductiva, generalmente acero, protege al núcleo más conductivo. El caso contrario en el que una capa muy conductiva envuelve a un material menos conductivo también se da, acero recubierto de



una capa de aluminio, estas aletas encuentran en intercambiadores de muy alta eficiencia. En este trabajo sólo se ha tratado el caso de núcleo conductivo recubierto de un material menos conductivo.

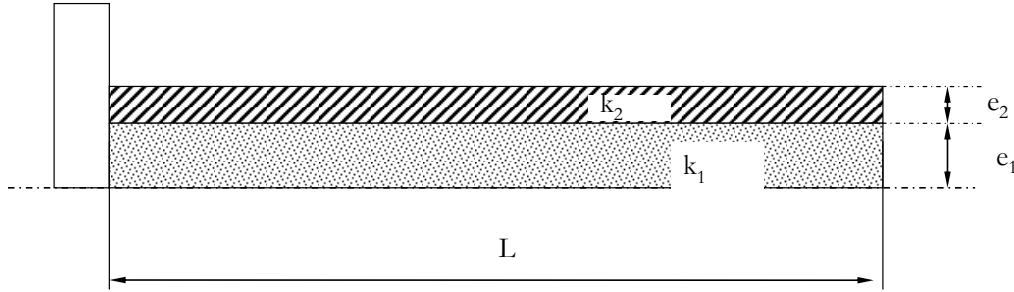


Figura 2.4 Espín cilíndrico compuesto. Aleta recta rectangular formada por dos láminas de material diferente y con distinta conductividad

En cada capa se satisface la ecuación de calor, (2.6) o (2.8), para la geometría rectangular o cilíndrica, de forma que el conjunto global de ecuaciones tiene la forma

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial z_i^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y_i^2} = \left(\frac{1}{\alpha_i}\right) \left(\frac{\partial T_i}{\partial t}\right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

donde n es el número de capas. Además de estas ecuaciones deben cumplirse las condiciones de frontera entre capas; en el caso de contacto térmico perfecto estas ecuaciones son las de conservación del flujo calorífico entre medios y la de continuidad del valor de la temperatura al pasar de un medio a otro, es decir

$$k_i \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right) = k_j \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\right); \quad y = e_i; \quad 0 < z < L; \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.30)$$

$$\Phi_i = \Phi_j; \quad y = e_i; \quad 0 < z < L; \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

donde  $e_i$  es el espesor de capa  $i$ .

## 2.4 Coeficientes de caracterización, diseño y optimización

Desde el punto de vista económico las superficies aleteadas se diseñan bajo el criterio de maximizar la efectividad para un coste dado o minimizando el coste para un valor determinado de la efectividad. El uso de aletas es más efectivo en aquellas aplicaciones en las que el coeficiente de convección es pequeño, por esta razón su aplicación está más justificada cuando el medio es un gas que un líquido, o en convección natural que forzada. No es una coincidencia que un intercambiador liquido-gas, radiador de un coche por ejemplo, las aletas se sitúen en el lado del gas.

Para comparar y evaluar el incremento de la transferencia de calor desde el área de la base se usan dos criterios asociados a los coeficientes de prestaciones eficiencia y efectividad. Sin ningún género de

duda, el más popular para el diseño de aletas es la eficiencia,  $\eta$ , que se define como la relación entre el calor real disipado y el que sería disipado si toda la aleta estuviera a la temperatura de la base, aleta isoterma.

$$\eta = \frac{Q_{\text{disipado}}}{Q_{\text{aleta - isoterma}}} \quad (2.32)$$

donde  $\eta < 1$ . Muchos autores (incluyendo la mayoría de libros de texto y manuales de transferencia de calor) tratan la eficiencia como un coeficiente de propósito general asignándole un significado que recuerda al rendimiento termodinámico de un ciclo, i.e., buscando como objetivo alcanzar el valor más alto posible. En esencia, la eficiencia ha sido propuesta como un parámetro para que las aletas puedan ser comparadas con referencia a un mismo estándar. Como es sabido, una aleta puede disipar más calor que otra bajo las mismas condiciones ambientales mientras que opera a menor eficiencia. Esta confusión relacionada con la definición de eficiencia insinúa que este parámetro no siempre manifiesta la tendencia del comportamiento del flujo de calor correctamente cuando las propiedades térmicas o geométricas de la aleta son modificadas. Como consecuencia de esto, la eficiencia no es un parámetro adecuado para la optimización. Krauss y Bar-Cohen (1995), Lienhard (2004), Krauss et al. (2001), Wood et al. (1996, 2000), Razelos y Krikkis (2003) y Razelos (2003) han demostrado que el comportamiento de la eficiencia de las aleta no siempre es coherente. Particularmente, los últimos autores, Razelos y Krikkis (2003), Razelos (2003) y Heggs (1999) no recomiendan el uso de la eficiencia y, en cambio, proponen la efectividad,  $\varepsilon$ , como un parámetro adecuado para la optimización. Como es sabido, ésta se define como la relación entre el calor disipado por la aleta y el disipado por la superficie desnuda en la que se apoya la misma usando los mismos coeficientes de transferencia de calor. Así,

$$\varepsilon = \frac{Q_{\text{disipado}}}{Q_{\text{sin aleta}}} \quad (2.33)$$

donde se asume que la efectividad debe ser mayor que 1 para que la aleta cumpla su función. En relación a esto, Lienhard (2004) sugiere que la efectividad es un parámetro más adecuado que la eficiencia para el diseño de aletas. Esta afirmación también ha sido realizada por Heggs (1999), quien termina su trabajo con la afirmación categórica de “adiós eficiencia”. Sin embargo, se hace hincapié en Wood et al. (2000) que el comportamiento de la efectividad, cuyo límite superior es  $(Bi_i)^{-1/2}$ , no siempre es coherente, y por tanto el problema de la optimización no puede resolverse por completo usando sólo este parámetro. Más aún, tanto la eficiencia como la efectividad están definidas para el análisis de aletas aisladas, no tienen en cuenta el efecto de la pared; no predicen de forma correcta la transferencia de calor en el conjunto aleta-pared.

Kraus et al. (1978) proponen una formulación completamente distinta, también basada en las hipótesis clásicas, y definen el coeficiente admitancia de entrada,  $Y_i$ , y el factor térmico de transmisión, en esencia son iguales, solo que la Admitancia de Entrada se aplica a aletas donde la superficie del extremo

libre no sea cero en tanto que el segundo se aplica aquellas aletas y espines en las que el área transversal del extremo es cero. La admitancia de entrada se define

$$Y_i = \frac{Q_b}{\theta_b} \quad (2.34)$$

que está relacionado con la eficiencia a través de

$$Y_i = \eta h S_a \quad (2.35)$$

La idea fundamental que subyace en este parámetro es proporcionar información directa del calor disipado en función únicamente de la temperatura de exceso en la base, llamada “driving force”. Es el resultado de una formulación matricial de funciones de transferencia, que permite la evaluación de aletas con disposiciones especiales (en serie, ramificadas, bucles, etc.), para lo que se apoya en la teoría de grafos lo cual le confiere una gran potencia y versatilidad (discretización de aletas, inclusión de fuentes térmicas, etc.). Sin embargo ninguno de los parámetros proporciona información alguna acerca de la optimización de aletas.

#### 2.4.1 La Admitancia Térmica Inversa Relativa

En la tesis doctoral del profesor Alarcón (2001) se realiza un amplio análisis de todos y cada uno de los parámetros citados anteriormente, mostrando las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos. Es muy importante el efecto que produce la colocación de aletas en una pared, lo que implica que la temperatura de la pared desnuda es diferente de la temperatura en la base de la aleta y no es conocida a priori. En este trabajo se considera la temperatura de la base conocida cuando se trata de aletas aisladas o espines y en el conjunto aleta pared no se tiene en cuenta el efecto de la convección en el fluido interior del tubo o pared.

Alarcón et al. (2002b y 2003) proponen tres nuevos coeficientes de prestaciones llamados; 1) admitancia inversa, 2) admitancia inversa específica y 3) admitancia térmica inversa relativa (este último cumple con las condiciones asociadas con un coeficiente ideal para el cálculo de bondades y rendimiento de aletas). Como ocurre con los coeficientes clásicos, estos nuevos coeficientes pueden ser aplicados tanto bajo condiciones 1-D como 2-D. En este trabajo, estos coeficientes han sido determinados a partir de modelos en red bajo condiciones 2-D, con apreciables desviaciones de los modelos analíticos 1-D. Es importante destacar que la evaluación de la admitancia térmica inversa relativa es muy costosa en tiempo debido a que es necesario obtener la solución de un gran conjunto de aletas, en nuestro caso más de 100000 han sido simuladas.

La admitancia inversa relativa se define en Alarcón et al. (2002b, 2003) como un parámetro adimensional muy adecuado para el análisis y el diseño de aletas de varias configuraciones. Su evaluación requiere del conocimiento de la admitancia inversa específica,  $y_r$ , y de la admitancia inversa específica en el óptimo de las aletas para diferentes geometrías (rectangular, anular, espines, etc.) y/o diferentes materiales,

$y_{r,opt}$ . Por brevedad, el término “inversa” se suprime en lo que sigue. Para un determinado tipo de aletas, la admitancia relativa,  $y_{rel}$ , se define como la relación  $y_{rel} = y_r/y_{r,opt}$ . La admitancia específica esta referida a la unidad de masa o de volumen de una aleta particular y es igual a la relación entre el calor total disipado al fluido circundante (o transferido a otros elementos) y la diferencia de temperatura entre la base de la aleta y el fluido circundante.

$$y_r = \frac{Q_d}{(T_b - T_\infty)V} \quad (2.41)$$

La geometría de la aleta para la cual la admitancia específica alcanza un máximo, proporciona el valor de  $y_{r,opt}$ . La admitancia relativa busca cumplir con las condiciones inherentes a un buen coeficiente de diseño, éstas son; i) ser un parámetro consistente, un valor creciente del parámetro es indicativo de un mejor comportamiento, ii) estar referido a un estándar que lo hace adimensional (aunque no es una condición esencial) y ofrece un valor máximo de 1 que no puede ser superado (una referencia universal), iii) proporcionar un valor máximo que coincide con el óptimo (el óptimo ocurre cuando  $y_r$  alcanza su máximo valor) y iv) servir para comparar los méritos relativos de un grupo de aletas del mismo tipo. En contraste, los parámetros de diseño clásico, eficiencia y efectividad, no siempre no consistentes.

En este trabajo, el ATIR se calcula de forma numérica para aletas de perfil recto rectangular bajo convección, radiación con temperatura exterior de 0 K y con condiciones de contorno de extremo convectivo. También para aletas con condiciones de contorno asimétricas, aletas compuestas y el sistema aleta-pared, siempre para condiciones de conducción 2-D. Aparte de los parámetros independientes ya mencionados y en función de las condiciones particulares del modelo hay que añadir otros parámetros tales como la relación de temperatura en las bases en sistemas con condiciones de contorno asimétricas para la temperatura, y la relación entre las conductividades de los materiales que forman la aleta en el caso de aletas compuestas. Si el problema de la optimización se centra en radiación con medio exterior a 0 K los parámetros de entrada serán la emisividad, temperatura en la base, la conductividad y el volumen, a los que habría que añadir otros parámetros relacionados con las condiciones de contorno, si ha lugar. La definición del  $Bi_t$  proporciona el espesor óptimo de la aleta. Para la condición de extremo convectivo, el ábaco de doble entrada proporciona directamente la longitud óptima para las mismas variables independientes. A partir de este espesor óptimo, el  $Bi_t$  proporciona la efectividad a través del gráfico que relaciona ambas parámetros. En el caso de que la condición sea radiactiva el proceso es muy similar al descrito para el extremo convectivo.

## 2.5 El Método de Simulación por Redes

### 2.5.1 Idea del método. Tipos de monopuertas

El Método de simulación por redes (MESIR o NSM, Network Simulation Method), González-Fernández (2002), es una técnica para el estudio de diferentes procesos físicos que puedan definirse mediante un conjunto de ecuaciones o modelo matemático. Partiendo de éstas el procedimiento consiste, en primer lugar, en elaborar un “modelo en red” o circuito eléctrico equivalente al proceso, y en segundo lugar en simular dicho proceso, obteniendo la solución del modelo mediante un programa adecuado de resolución de circuitos eléctricos.

Un modelo en red se considera equivalente a un determinado proceso cuando, en su descripción, las ecuaciones del modelo matemático discretizadas y las ecuaciones del modelo en red para un elemento del volumen o celda elemental, correspondientes a variables análogas, coinciden. La técnica de elaboración del modelo consiste en reticular el espacio en elementos de volumen o celdas elementales; al aplicar a estas reticulaciones las ecuaciones diferenciales, se obtiene un conjunto de ecuaciones en diferencias finitas que se constituyen en el punto de partida para la obtención del modelo en red correspondiente a cada celda elemental; una seleccionada correspondencia entre variables dependientes del problema y variables eléctricas, tensiones e intensidades, permite interpretar los resultados de la simulación en términos del proceso que se modela. La asociación de celdas, de acuerdo con la geometría del problema, configura el modelo en red correspondiente a todo el medio finito, que es tanto más preciso cuanto mayor sea el número de estas celdas. Las condiciones de contorno e iniciales se incorporan al modelo de manera simple mediante dispositivos eléctricos adecuados.

En el caso de los procesos de transmisión de calor, la posibilidad de elaborar modelos en red representativos de los mismos, es decir, el hecho de que admitan redes eléctricas equivalentes, supone no sólo la equivalencia matemática sino, también, la equivalencia física entre las variables características de unos y otros procesos (térmicos y eléctricos). Además la equivalencia física permite, en casos muy concretos, determinar cualitativa y cuantitativamente ciertas magnitudes asociadas a la red que pueden jugar un papel, en la descripción del fenómeno de transporte, similar al correspondiente en el transporte de carga eléctrica, como es el caso de la impedancia por ejemplo.

A partir del modelo matemático y siguiendo los planteamientos de lo que se conoce como “Teoría de Redes” de Peusner (1986, 1987), se obtiene un grafo equivalente al proceso cuya simulación (solución) se lleva a cabo mediante un programa de ordenador. Con el método de simulación por redes, el grafo es del tipo eléctrico (un circuito eléctrico), y la simulación se realiza mediante el software de simulación de circuitos. En este trabajo se ha utilizado PSpice, PSpice (1994), Nagel (1975 y 1977) y Vladimirescu (1994).

El método de simulación por redes presenta diferencias notables respecto de los métodos numéricos clásicos. Desde el punto de vista conceptual supone la sustitución de un complicado sistema de

ecuaciones diferenciales, que ya no es necesario manipular, por un circuito eléctrico equivalente, de cuya solución se encarga PSpice, y donde resulta fácil visualizar la interconexión entre flujos y fuerzas, y relacionar los procesos físicos locales con la evolución de las variables en los componentes eléctricos que simulan el medio (modelo en red). En cuanto a la reticulación, sólo requiere una división de la variable espacio, como en los llamados métodos de líneas, Berezin y Zhidkov (1965) y Rukos (1978). Por otro lado, en tanto que la continuidad de la corriente eléctrica (1ª ley de Kirchhoff) y la propiedad asociada al potencial eléctrico, derivado de un campo conservativo (2ª ley de Kirchhoff), son teoremas exigidos a los circuitos, no es necesario hacer las aproximaciones o tanteos que muchos métodos numéricos exigen para cumplir estos requerimientos; PSpice advierte cuando alguna de estas reglas no ha sido respetada en el diseño del modelo en red.

Cabe señalar la ventaja que supone un buen conocimiento de la teoría de circuitos a la hora de implementar la red; no obstante es preciso poco esfuerzo para la familiarizarse con este aspecto del método, ya que son bastante reducidos los términos de las expresiones matemáticas que se convierten en elementos o partes del circuito.

En cuanto a la manipulación y elaboración del programa podemos afirmar que las dificultades son mínimas. Su presentación bajo “entorno windows” (tanto para PC como para estación de trabajo) supone una guía constante para el manipulador, y la nomenclatura utilizada, organizada por nudos y componentes eléctricos, permite el acceso inmediato a las tensiones y corrientes que constituyen las variables fundamentales en el circuito.

El MESIR, que utiliza la teoría de redes para modelar el proceso físico objeto de estudio, es un método de simulación en tanto que incluye la resolución numérica del modelo en red. Así, las variables flujo y fuerza características del mismo deben satisfacer las leyes de Kirchhoff y sus relaciones determinarán los elementos de circuito correspondientes. Ahora bien, en cada proceso concreto y una vez elegidas las variables conjugadas, la información de qué elementos de circuito intervienen en el modelo en red y cómo se conectan entre sí, se obtiene del modelo matemático y no de consideraciones de tipo físico acerca del papel que juegan estas variables.

En síntesis, en la teoría de redes, la viabilidad de un modelo en red supone:

- i. La existencia de una red independiente del tiempo,
- ii. La existencia de una magnitud  $J_{N-N'}$  llamada flujo, asociada a cada rama que conecta los nudos  $N-N'$  y que va de  $N$  a  $N'$ .  $J_{N-N'}$  obedece las leyes de Kirchhoff para corrientes (LCK),
- iii. La existencia de una magnitud,  $\phi$ , asociada a cada nudo, tal que la diferencia  $X_{N-N'} = \phi_N - \phi_{N'}$ , llamada fuerza, obedece la ley de los voltajes de Kirchhoff (LVK).

El hecho de que las leyes LCK y LVK se refieran, respectivamente, a corrientes eléctricas y voltajes no es significativo. En el caso de procesos de transporte es normal establecer una correspondencia entre variables flujo por un lado (densidad de corriente eléctrica con flujo de calor, con flujo de masa) y

variables tipo potencial por otro (potencial eléctrico con temperatura, concentración), pero es posible establecer otro tipo analogías no asociadas con esta correspondencia.

Las relaciones entre flujo y fuerza asociadas a una rama y sus (dos) nudos límite, que pueden incluir o no variaciones temporales de estas variables que se dicen conjugadas, definen los elementos concretos del circuito equivalente a esa rama. La relación causa-efecto entre las variables conjugadas es completamente arbitraria con tal que sea consistente con ii) y iii).

Volviendo a considerar un proceso de transporte caracterizado por las variables flujo y fuerza que obedecen las leyes de Kirchhoff, y que por consiguiente son variables LCK y LVK respectivamente, tales leyes dan cuenta de la topología de la red relativa al proceso. A la red se le asocia un conjunto de flujos que obedecen a una ley de balance local y un conjunto de fuerzas que satisfacen la condición de unicidad. Las propiedades topológicas dependen únicamente de la asignación de conexiones entre los diferentes puntos o de las posibles combinaciones de trayectorias que unen un nudo dado con otros nudos. Son independientes de las medidas y, desde un punto de vista topológico, dos grafos son iguales o isomorfos si las asignaciones de vértices y ramas son las mismas.

Las leyes de Kirchhoff establecen relaciones entre flujos y fuerzas por separado, pero no expresan ningún tipo de relación entre flujos y fuerzas entre sí. Las relaciones entre el par conjugado flujo-fuerza se conocen como ecuaciones constitutivas o fenomenológicas y definen los elementos de circuito que expresan características específicas de cada proceso. Se dice que dos grafos son geoméricamente iguales si los potenciales y flujos de cada par de puntos y su rama correspondiente, son iguales para cualquier conjunto de valores que puedan ser elegidos para los flujos o las fuerzas. Las propiedades geométricas de la red, es decir, sus características métricas, se siguen de las relaciones constitutivas.

Las relaciones constitutivas se pueden establecer entre las variables de un par flujo-fuerza, en cuyo caso se habla de monopuerta. Las monopuertas pueden ser pasivas, que disipan o almacenan energía, y activas o fuentes, que generan potencia de acuerdo con una ley preestablecida. Las monopuertas pasivas son las resistencias, bobinas y condensadores mientras que las activas son las fuentes de tensión y/o corriente, controladas o no. En función de la relación expresa existente entre las variables LCK y LVK las monopuertas pasivas tienen nombre específicos. Las usadas en esta memoria son:

**Monopuerta resistiva.** Es un elemento de circuito asociado a una relación entre las derivadas temporales de las variables flujo y fuerza, de una misma rama, mediante una función independiente del tiempo que llamaremos resistencia,  $R_E$ , que puede depender o no del flujo o de la fuerza;

$$dX(t)/dt = R_E (dJ(t)/dt) \tag{2.42}$$

o bien

$$R_E = dX(t)/dJ(t) \tag{2.43}$$

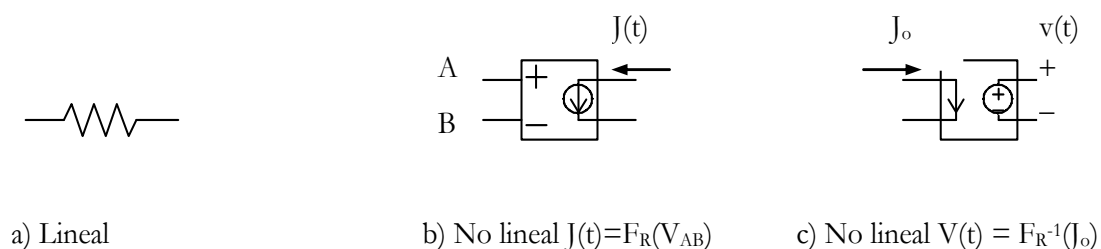


Figura 2.5 Representación simbólica de monopuertas resistivas

Una monopuerta resistiva es lineal cuando la relación entre las variables  $X(t)$  y  $J(t)$  lo es, es decir  $X(t) = R_E J(t)$ ; naturalmente  $R_E$  es una constante en este caso. Su acción es instantánea, no importa cual sea su estado anterior, en este sentido carecen de memoria. En su analogía física representan efectos disipativos, fricciones, efectos viscosos, energías de reacción, etc, y desde el punto de vista termodinámico son elementos generadores de entropía. Las monopuertas resistivas no lineales se definen a través de las funciones que las caracterizan y constituyen, en definitiva, fuentes controladas de corriente o tensión, respectivamente. Su representación simbólica de una monopuerta resistiva se muestra en la Figura 2.5.

La traducción al modelo en red es una resistencia eléctrica de valor  $R_E$  ohmios para el caso lineal o una fuente controlada de corriente o tensión para el caso no lineal.

**Monopuerta capacitiva.** Es un elemento de circuito asociado a una relación entre la variable flujo y la derivada temporal de la variable fuerza, de una misma rama, mediante una función no dependiente del tiempo que designaremos como capacidad,  $C$ ,

$$J(t)=C(dX(t)/dt) \quad (2.44)$$

En estas monopuertas se produce algún tipo de almacenamiento energético, sin pérdidas (no hay disipación energética), y su estado, que no cambia instantáneamente, tiene en cuenta todas las operaciones llevadas a cabo en el pasado (tiene memoria). En su analogía, representa procesos físicos en los que se produce algún tipo de almacenamiento como condensadores, tanques, etc.

La relación constitutiva anterior puede expresarse en términos de una capacidad en la forma

$$C=dq^*/dX=dF_c(X)/dX \quad (2.45)$$

que es constante cuando la dependencia  $q^*=F_c(X)$  es lineal,  $C=q^*/X$ . Las dependencias  $q^*=F_c(X)$  no lineales deben estudiarse particularmente en cada caso. La representación simbólica de la monopuerta capacitiva lineal se muestra en la Figura 2.6. La traducción al modelo en red es un condensador eléctrico de valor  $C$  faradios.



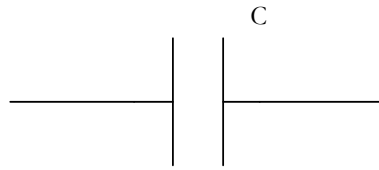


Figura 2.6 Representación simbólica de una monopuerta capacitiva lineal

Los procesos de almacenamiento y disipación de energía, bajo la hipótesis de continuidad del medio, se originan en todo los puntos del sistema. Los elementos  $R_E$  y  $C$  se identifican sin embargo con regiones pequeñas pero finitas del medio y sus conexiones con las otras puertas se realizan con enlaces ideales de energía, es decir, con conductores de resistencia nula. El que cada elemento pueda ser caracterizado por un par de variables conjugadas con una única ecuación constitutiva entre ellas es una hipótesis básica en el MESIR que deriva de la teoría de redes. Físicamente equivale a decir que es posible elegir un elemento de volumen lo suficientemente pequeño como para que su tiempo de relajación interna sea mucho menor que el del sistema global, pero suficientemente grande como para que las fluctuaciones de las variables que describe el sistema en él sean despreciables.

En las monopuertas activas se produce una aportación o extracción de energía al sistema. Las empleadas dentro de los programas objeto de esta memoria son:

**Fuentes constantes.** Son monopuertas definidas de acuerdo con las expresiones  $F_j(J)=0$  y  $F_x(X)=0$ , según se trate de fuentes de flujo o de fuerza, respectivamente. Tienen asignado un sentido (o signo) que indica la dirección en que fluye la energía. La representación simbólica es la de la Figura 2.7 a); eléctricamente, se corresponden a pilas o generadores de corriente constante.

**Fuentes dependientes del tiempo.** La relación constitutiva entre las variables tiene la misma forma de las fuentes constantes; además,  $X=X(t)$  y  $J=J(t)$  según se trate de fuentes de fuerza o de flujo. Ejemplos de representación simbólica se muestran en la Figura 2.7 b).

**Fuentes controladas.** Se trata de monopuertas especiales asociadas a relaciones constitutivas entre variables, conjugadas o no, expresadas mediante cualquier función que no contiene explícitamente el tiempo. Se trata de elementos de entradas múltiples con una única salida que corresponde a un flujo o una fuerza que depende funcionalmente de otros flujos o fuerzas de distintas ramas y nudos, del mismo o diferente circuito. Estas fuentes van a permitir especificar acoplamientos energéticos de distinto tipo. Existen cuatro tipos de fuentes controladas por una sola variable, Figura 2.7 c) y d): fuentes de tensión controladas por tensión, fuentes de tensión controladas por corriente, fuentes de corriente controladas por tensión y fuentes de corriente controladas por corriente. La acción de control puede ser ejercida por más de una variable y las funciones de control pueden ser complejas. Aunque la monopuerta puede especificarse arbitrariamente, su implementación como elemento de circuito puede no ser posible en tanto que no esté contenida en las librerías del software elegido. La teoría de circuitos permite, mediante

circuitos auxiliares, resolver prácticamente todos los casos de diseño de la red eléctrica que se necesiten para cualquier tipo complejo de fuente controlada. El potencial de estas monpuertas activas para establecer los modelos en red de sistemas fuertemente no lineales es inmenso ya que su uso permite imponer a la monpuerta el valor de una variable (en función de variables de otras monpuertas) sin influir en la otra variable, cuyo valor, se ajusta a la topología y geometría del modelo en red. En términos de componentes eléctricos el software elegido en esta memoria para la simulación, PSpice (1994), es capaz de reconocer un largo catálogo de componentes eléctricos: resistencias  $R_E$ , condensadores,  $C$ , fuentes constantes de tensión y corriente, fuentes de tensión y corriente dependientes del tiempo, fuentes controladas de tensión y corriente y fuentes controladas no lineales de tensión y corriente.

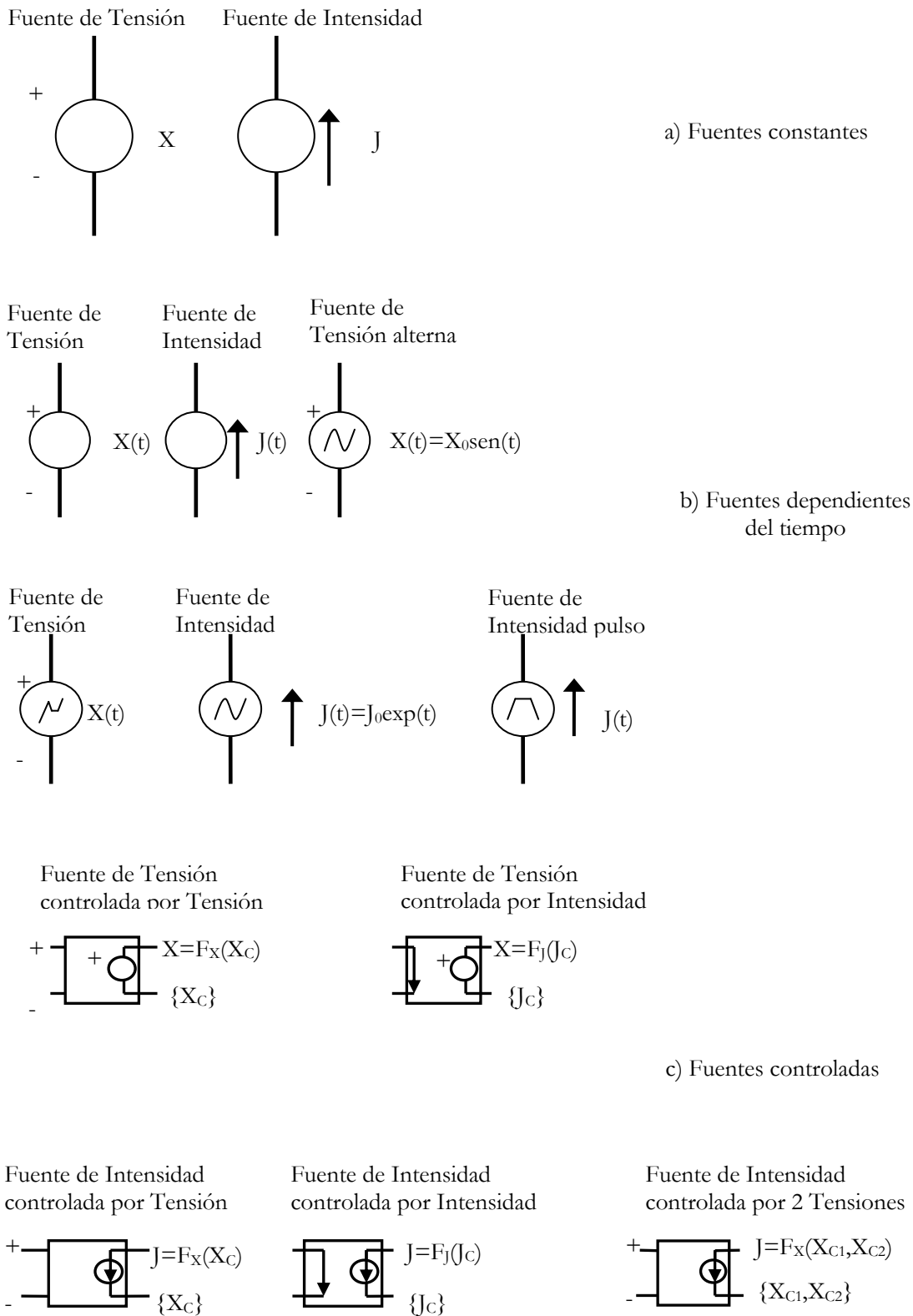


Figura 2.7 Representación simbólica de monopuertas activas. a): Fuentes constantes; b): Fuentes dependientes del tiempo; c): Fuentes controladas por una o varias variables

### 2.5.2 El MESIR como método numérico

Desde el punto de vista de cálculo, el MESIR es, efectivamente, un método numérico en tanto que los procedimientos usados para obtener una solución aproximada de los circuitos eléctricos (que, a su vez, son los modelos en red de los problemas estudiados) son estrictamente numéricos. Se trata de procedimientos muy sofisticados y perfeccionados fruto de una continuada investigación en el campo eléctrico. Digamos que el MESIR es, en esencia, un usuario de estas técnicas ya que su aportación se limita a diseñar unos circuitos cuyas ecuaciones diferenciales en diferencias finitas son equivalentes a las correspondientes, discretizadas en el espacio, del modelo matemático del problema. Esta tarea, sin embargo, no es trivial y depende de la complejidad del modelo. Son numerosos los diferentes tipos de problemas que el MESIR ha abordado con éxito y que han sido publicados en la literatura científica. Entre estos cabe destacar:

- i. Problemas de difusión a través de membranas en Horno et al. (1990),
- ii. Ídem. de procesos electroquímicos en González-Fernández et al. (1995),
- iii. Ídem. de determinación de propiedades superficiales de coloides en Horno et al. (1993), López-García et al. (1996),
- iv. Ídem. de transferencia de calor en Alhama (1999), Alarcón (2001), Alarcón et al. (2002a, 2002b) y Zueco y Alhama (2007),
- v. Ídem. de flujo de fluidos en Soto et al. (2007a, 2007b),
- vi. Ídem. mecánicos aplicados a cadenas cinemáticas, problemas tribológicos, modos de vibración en vigas, Moreno et al. (2004 y 2007),
- vii. Ídem. de ecología en López Sánchez et al. (2005),
- viii. Problemas inversos en Zueco y Alhama (2005, y 2006) y Zueco et al. (2006a y 2006b),
- ix. Procesos caóticos aplicados en Alcover et al. (2006), etc.

A diferencia de otros métodos numéricos clásicos, como los de formulaciones en diferencias finitas explícita, implícita e híbrida, métodos de elementos finitos, métodos variacionales, métodos iterativos específicos y de autovalores, el MESIR es una técnica que aprovecha los potentes algoritmos integrados en los modernos software de resolución de circuitos los cuales, quizás, son los más sofisticados y capaces ya que tienen que afrontar señales fuertemente no lineales (pulsos) y frecuencias muy altas. Además, conserva en cierto modo la visualización del proceso de transporte que siempre queda oscurecida entre todo el aparato matemático en los otros métodos. El punto de partida es siempre el modelo matemático del proceso, esto es, un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) espacio-temporales; la discretización de la variable espacial permite establecer el modelo en red o red eléctrica equivalente. Ésta es la única manipulación directa que se hace de las ecuaciones. El modelo en red es, pues, el formato que se da al modelo matemático para que pueda ser utilizado como entrada (fichero) en

un programa de resolución de circuitos eléctricos tal como PSpice<sup>®</sup>, Nagel (1975), PSpice (1994) y Vladimirescu (1994). Este software es el que resuelve las ecuaciones de la red y proporciona la solución numérica del modelo matemático.

A continuación exponemos las diferencias de estrategias más notables al compararlo con otros métodos numéricos. Cuando en una ecuación en derivadas parciales se hace una doble reticulación, espacial y temporal, se reemplazan de hecho las derivadas parciales por aproximaciones algebraicas, lo que conduce a un conjunto de ecuaciones algebraicas que aproximan las EDP. Para la solución numérica de éstas se utiliza un software adecuado de matemáticas. Este procedimiento es la base de los bien conocidos métodos numéricos de diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos para la solución de las EDP.

Como ya se ha comentado, la elaboración del modelo en red pasa por la reticulación espacial, pero no temporal. Se parte, pues, de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuya reticulación espacial las convierte en ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo, que son las del circuito correspondiente a una celda elemental. La diferencia esencial es, pues, que en los métodos numéricos convencionales se realiza una reticulación simultánea de las dos variables independientes, espacio y tiempo, mientras que en el MESIR la reticulación es sucesiva; 1ª etapa, una reticulación espacial de la que se obtiene el modelo en red y 2ª etapa, una reticulación temporal, realizada por el propio software en el proceso de simulación.

Alhama (1999) demostró que la precisión de los resultados de la simulación o error respecto de la solución exacta, en problemas lineales, depende del tamaño de la reticulación, pero son suficientes reticulaciones del orden de 40 a 60 elementos de volumen para reducir estos errores a valores por debajo del 0.5-0.2%. Cuando se trata de problemas fuertemente no lineales, por ejemplo problemas de cambio de fase con frontera móvil, basta duplicar el tamaño de la retícula para obtener soluciones con errores del mismo orden.

## **2.6 Modelos en red**

### **2.6.1 La analogía termoeléctrica clásica**

Una amplia y detallada discusión sobre este punto, con numerosas referencias bibliográficas, se puede ver en Alhama (1999). Es frecuente el uso de analogías eléctricas de procesos simples de transmisión de calor por un interés meramente académico; sencillamente porque las ecuaciones algebraicas del proceso de transporte (no diferenciales) aplicadas a medios finitos son exactamente iguales a las que relacionan la intensidad y la tensión (ley de Ohm) en los componentes pasivos de los circuitos eléctricos.

Textos recientes como Chapman (1984), Lienhard (2004), Siegel y Howell (1992) y Mills (1995) no olvidan este aspecto tanto en procesos de conducción como de radiación; Holman (1981) presenta una discusión muy didáctica de la aplicación de la analogía eléctrica a problemas más complicados de transmisión de calor, en particular en el campo de radiación, con numerosos ejemplos. Otros textos

clásicos y modernos no hacen referencia alguna a la analogía termo-eléctrica, Özisik (1993) y Gebhart (1993), o la mencionan muy de pasada, White (1988), Bejan (1993), Taine y Petitt (1993). Textos modernos, específicos de tratamiento numérico, Patankar (1980), Shih (1984), no hacen, obviamente, referencia alguna a analogías eléctricas ni mencionan el “Network Method” de Oppenheim (1956).

En todo caso las referencias en estos textos siempre aparecen en capítulos que tratan problemas lineales y con condiciones de contorno simples, primera y segunda clase. Ningún texto ni artículo, con excepción de los publicados por miembros del grupo de simulación por redes, menciona la analogía termo-eléctrica como método de cálculo numérico. Un ejemplo importante es el uso de la analogía eléctrica empleado por Chapman (1984). Dedicó un importante apartado a este tema pero siempre dentro de los procesos de transmisión de calor lineales, cuya solución sólo requiere resistencias térmicas, condensadores para el almacenamiento y fuentes constantes para las condiciones de contorno. Hay que mencionar un caso especial de analogías a las que se hace referencia como “lumped-capacity systems”, “lumped-thermal-capacity problems” o “lumped system formulation” Lienhard (2004), Özisik (1993), Mills (1995). Se trata de problemas de interés exclusivamente académico. Las aportaciones reales de interés científico de la analogía termo-eléctrica se reducen a las derivadas de la técnica “resistance-network model”, que mediante el uso exclusivo de resistencias se llega a la construcción de complicados circuitos en los que manipulando el intervalo de tiempo permiten simular problemas no lineales, que incluyen entre otros, procesos de cambio de fase o transitorios.

El paréntesis de casi tres décadas que separa estas publicaciones es debido a las dificultades inmensas en la realización práctica de los circuitos para obtener pruebas fiables; en la década actual los programas de resolución de circuitos disponibles en el mercado han salvado este obstáculo. Como dice Özisik (1993) “El método analógico de redes eléctricas, usado a menudo en los primeros años, ha sido desplazado por la aplicación de métodos numéricos puros a causa de la gran potencialidad de los ordenadores digitales”, o Lienhard (2004), “... los computadores digitales actuales hacen posible la solución de complicados problemas por aplicación directa de métodos numéricos”. De todo ello se puede deducir que el “método de simulación por redes” es algo sustancialmente diferente a la analogía termo-eléctrica clásica esencialmente por su capacidad de abordar cualquier tipo de problemas lineales o no, acoplados o no, y con condiciones de contorno arbitrarias.

### 2.6.2 Modelos para medios homogéneos y para las condiciones de contorno

Los modelos de aleta analizados en esta memoria han sido realizados para trabajar bajo condiciones de conducción 2-D. El modelo en red de una celda elemental correspondiente a un medio 2-D, homogéneo, de dimensiones  $\Delta z \Delta y$  es el indicado en la Figura 2.8, González-Fernández (2002). La celda se ha organizado simétricamente disponiendo condensador de almacenamiento en el punto central de la misma. En el caso de este trabajo, la aleta completa estará constituida por  $N_z \times N_y$  celdas iguales conectadas en serie,  $N_z$  en el sentido del eje  $z$  y  $N_y$  celdas en el sentido del eje  $y$ . Para el caso de coordenadas cartesianas, los valores de los componentes, resistencia y condensador son;

$$R_{E,iq} = R_{E,der} = \frac{\Delta z}{2kS} = \frac{\Delta z}{2k\Delta y} \quad (2.46)$$

$$R_{E,sup} = R_{E,inf} = \frac{\Delta y}{2kA} = \frac{\Delta y}{2k\Delta z} \quad (2.47)$$

$$C = \rho c_e \Delta z \Delta y \quad (2.48)$$

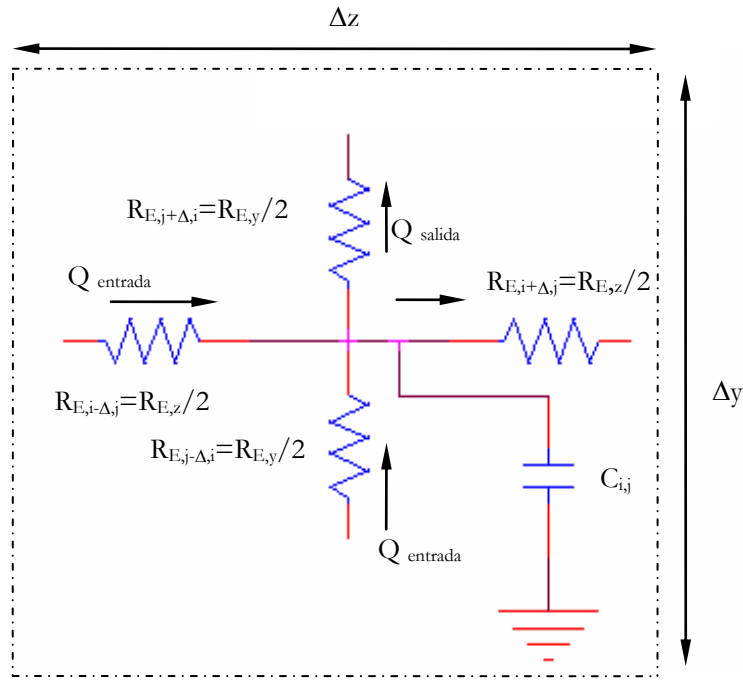


Figura 2.8 Modelo en red de la celda elemental 2-D en coordenadas cartesianas

En la Figura 2.9 se muestra un celda elemental para coordenadas cartesianas en 2-D y bajo condición de contorno convectiva, esta condición de contorno queda representada por una fuente de tensión controlada. La condición de convección modifica el modelo. Esta condición se implementa introduciendo un generador controlado por tensión conectado como se muestra en la Figura 2.9. La corriente de este generador, especificada mediante programación es el flujo de convección dado por la ley de Newton,  $q_{conv} = h(T_i - T_{ref})$ , donde  $T_i$  es la temperatura en el centro de la celda,  $T_{ref}$  la del fluido exterior y  $h$  el coeficiente de convección.

La polaridad de estos generadores debe ser la adecuada para que el flujo de corriente circule en el sentido de mayor a menor temperatura. Si se trata de la condición de radiación, el modelo no cambia pero la corriente viene definida por la ley de Stefan de la radiación,  $q_{rad} = \zeta \sigma S_i (T_i^4 - T_{ref}^4)$ , donde  $\zeta$  es la emisividad de la superficie,  $\sigma$  la constante de Stefan y  $S_i$  la superficie exterior del elemento de volumen. La existencia de condición simultánea de convección y radiación puede implementarse separadamente (o conjuntamente) por medio de dos generadores (o uno solo) unidos al centro de la celda.

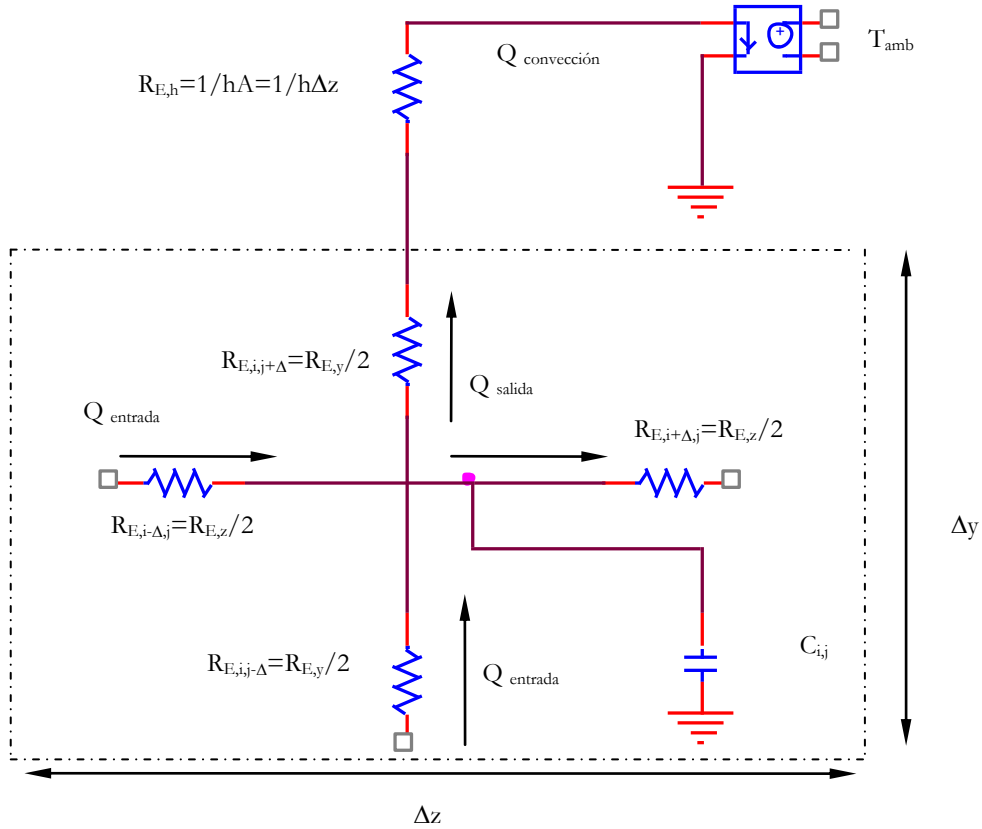


Figura 2.9 Modelo en red de la celda elemental 2-D en coordenadas cartesianas con condición de contorno convectiva

Para el caso de geometría cilíndrica 2-D, las variables independientes son el radio y el eje axial que en este caso coincide con el eje  $z$ . En la Figura 2.10 se presenta el modelo que tiene la misma configuración que el anterior pero el valor de las resistencias y condensador es

$$R_{E,i,q} = R_{E,der} = \frac{\Delta z / 2}{k\pi(R_{i,ext}^2 - R_{i,int}^2)} \quad (2.49)$$

$$R_{E,sup} = \frac{\Delta R_i / 2}{k2\pi\left(R_{i,ext} + \frac{\Delta R_i}{4}\right)\Delta z} \quad (2.50)$$

$$R_{E,inf} = \frac{\Delta R_i / 2}{k2\pi\left(R_{i,ext} - \frac{\Delta R_i}{4}\right)\Delta z} \quad (2.51)$$

$$C = \rho c_e \pi (R_{i,ext}^2 - R_{i,int}^2) \Delta z \quad (2.52)$$



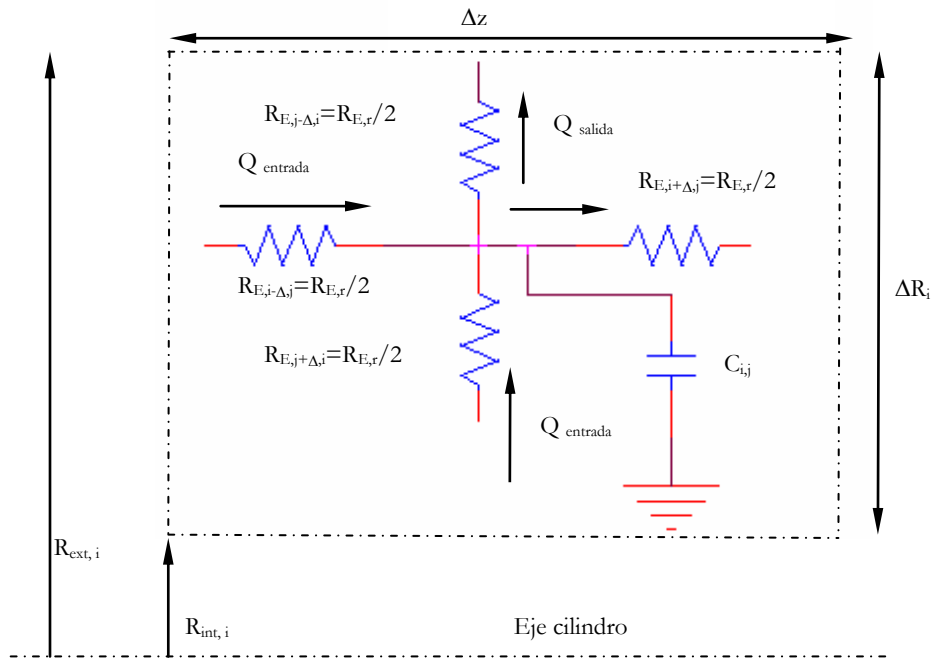


Figura 2.10 Nomenclatura de la celda en geometría recta 2-D

En el caso del modelo en red de la aleta compuesta está formado por dos subcircuitos diferente, uno de ellos representa el núcleo de la aleta, de conductividad  $k_1$ , el otro es un subcircuito idéntico al anterior salvo en que el valor de las resistencias viene dado en función de la conductividad del recubrimiento,  $k_2$ . Aún cabe una posibilidad más si se considera que el recubrimiento del extremo tiene una conductividad  $k_3$  diferente de las anteriores. En la Figura 2.11 se pueden ver los subcircuitos que forman las zonas 1 y 2; se ha omitido el subcircuito de la zona 3 para facilitar la comprensión del dibujo.

En relación con las condiciones de contorno (aparte de lo indicado anteriormente para la convección y radiación, cuyos modelos en el caso de aletas se han integrado en las celdas de contorno), su implementación se muestra en la Figura 2.12.

La condición isoterma se simula mediante una fuente de voltaje de valor constante; otras fuentes dependientes del tiempo tales como voltajes sinusoidales, en rampa, continua a trazos, rectangular, etc, pueden implementarse fácilmente pues estos componentes eléctricos están integrados en las librerías de los programas de simulación, Figura 2.12 a) y Figura 2.12 b). Para el flujo constante o dependiente del tiempo se usan fuentes de corriente, Figura 2.12 c) y Figura 2.12 d). La condición adiabática se implementa con una resistencia de valor elevado, teóricamente de valor infinito, Figura 2.12 e). Las condiciones de convección y radiación se implementan mediante fuentes controladas de corriente, Figura 2.12 f).

Recubrimiento exterior de la aleta compuesta, conductividad  $k_2$ . Incluye condición de contorno convectiva la medio exterior

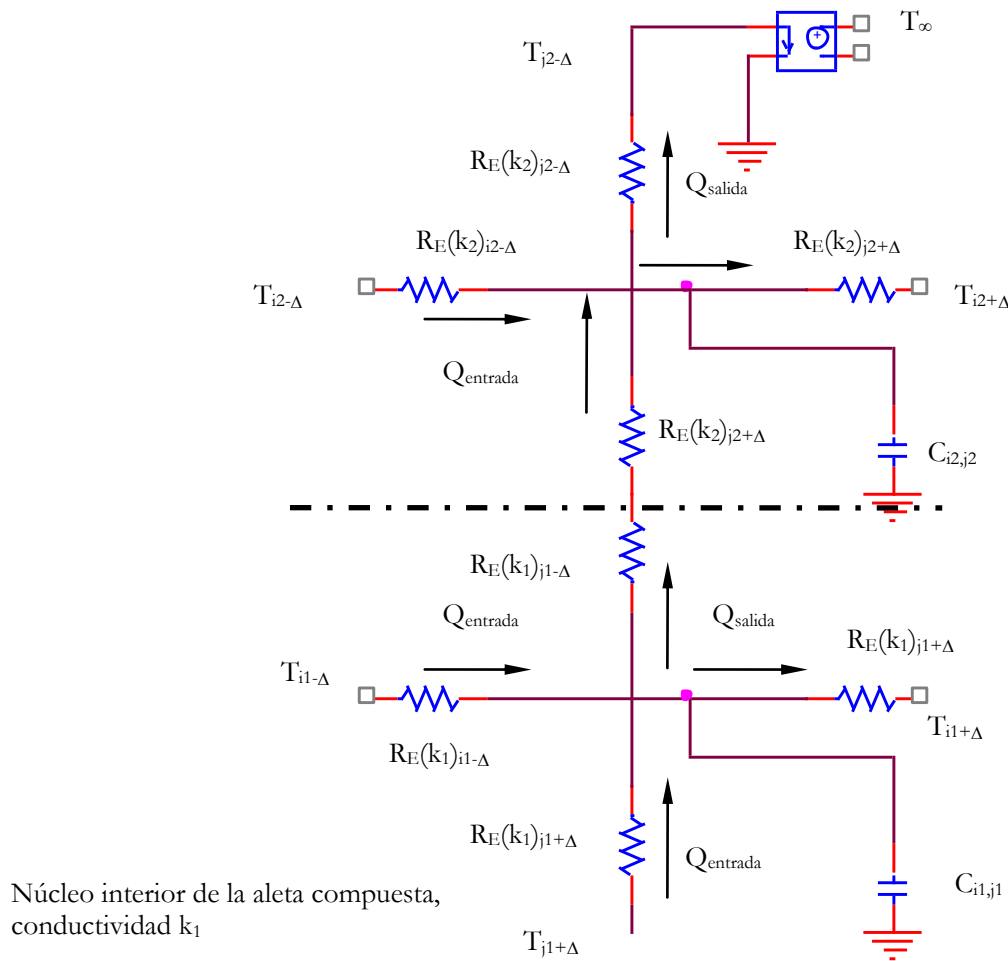


Figura 2.11 Modelo en red de una aleta compuesta 2-D. Se distinguen dos subcircuitos diferentes

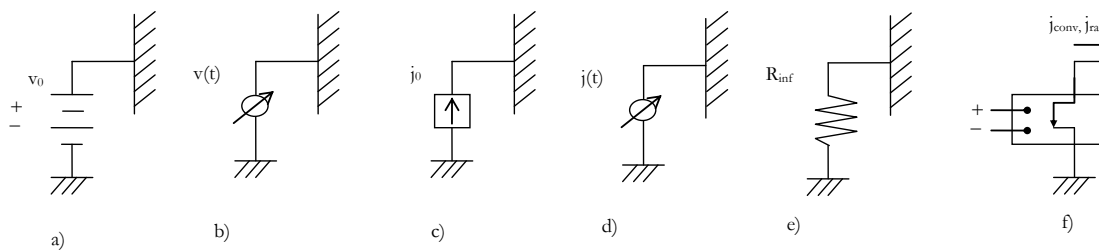


Figura 2.12 Componentes para implementar las condiciones de contorno, a): Isoterma, b): temperatura dependiente del tiempo, c): flujo de calor constante, d): flujo de calor dependiente del tiempo, e): Adiabática, f): convección o de radiación

## 2.7 El software PSpice-Orcad

### 2.7.1 Introducción y aplicaciones

Una vez obtenido el modelo en red se procede a su análisis mediante su simulación. Para ello hemos buscado un software adecuado para la solución de circuitos eléctricos tal como PSpice u OrCAD (1994). El segundo es, en realidad, la versión actualizada del primero. PSpice ha sido utilizado por otros autores para resolver problemas de otras disciplinas. Baker y Shortt (1990) estudia el comportamiento de componentes integrados en diferentes rangos de temperatura, Herbert (1992) lo aplica a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, Hamill (1993) a problemas estadísticos y relacionados con el caos, etc.

En el proceso de simulación el circuito se presenta al ordenador como un conjunto de ecuaciones matemáticas y éste, mediante procedimientos de análisis numérico, proporciona toda la información solicitada por el investigador para cada tipo de análisis. De esta forma se obtienen los datos correspondientes a medidas típicas de laboratorio con un margen de error despreciable y sin afectar al circuito; más aún, pueden alterarse las condiciones iniciales, de contorno, y las características térmicas del medio con sencillos cambios en el programa, y el análisis puede aportar datos sobre el comportamiento del circuito más allá de los límites que virtualmente se pueden obtener con medidas reales.

La simulación está estructurada en cinco subprogramas principales, que interaccionan entre ellos a través de una estructura de datos que se almacena en un área común del programa. Estos subprogramas son: entrada, organización, análisis, salida y utilidades, Figura 2.13.

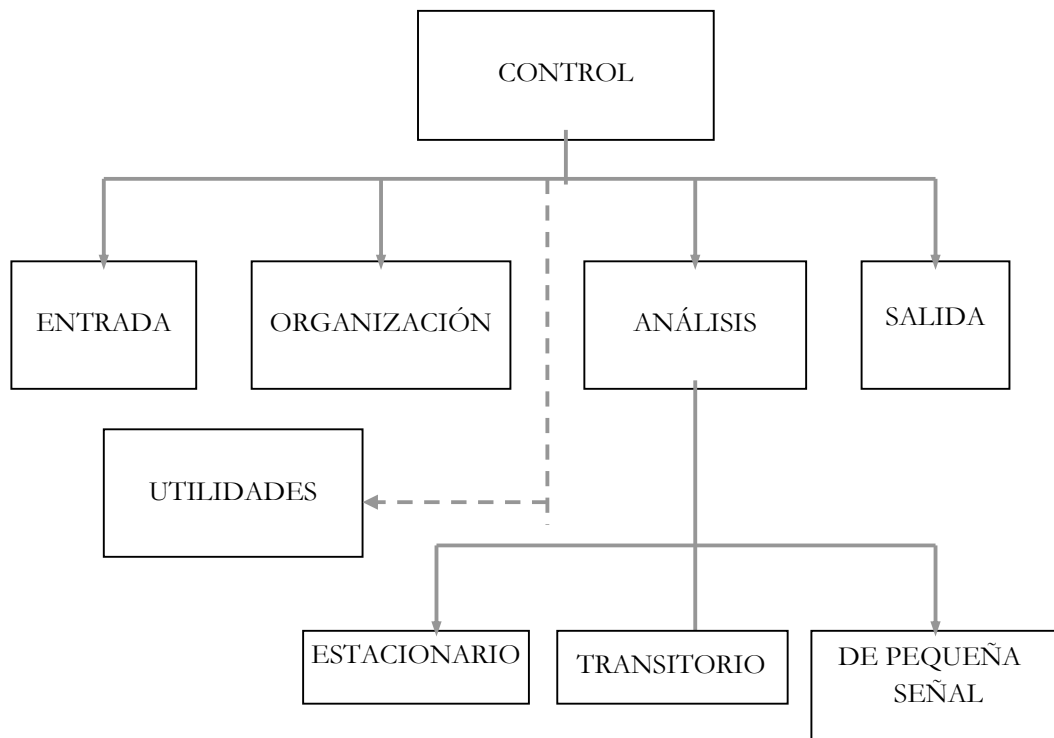


Figura 2.13 Diagrama bloques del programa de simulación de circuitos PSpice

El subprograma de entrada lee el archivo de entrada, construye una estructura de datos y chequea el circuito. El de organización, una vez que el programa se ha ejecutado con éxito, construye las estructuras adicionales de datos que serán requeridas en el programa de análisis, parte esencial de la simulación. El subprograma de salida genera y organiza, en la memoria central o en discos, los resultados solicitados por el usuario en forma tabular o gráfica. Las utilidades son aspectos secundarios no relacionados directamente con la simulación; éstas permiten, por ejemplo, almacenar componentes o partes de modelos para ser compartidos por otros usuarios. El subprograma análisis es la parte importante del programa de simulación. Ejecuta los análisis del circuito requeridos, de acuerdo con las indicaciones del archivo de entrada; la información resultante se almacena en la memoria central o en discos para su posterior procesamiento en los archivos de salida. Mientras que la facilidad de uso del programa reside en los subprogramas de entrada y salida, el programa de análisis, que contiene algoritmos más complejos y consume la fracción mayor del tiempo de computación, determina la eficiencia de la simulación.

En el proceso de simulación, se obtiene la solución numérica de la representación matemática del modelo en red. Ésta contiene: i) las ecuaciones matemáticas de los diferentes tipos de monopuertas, ii) las ecuaciones correspondientes a las restricciones impuestas por las leyes de Kirchhoff, propias de la teoría de circuitos, que han de satisfacerse entre las ramas y nudos del circuito, y iii) la información particular sobre la interconexión de los diferentes componentes eléctricos de cada modelo. Toda esta información compone un extenso sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales. El conjunto de tareas que componen el proceso de simulación puede ser agrupado en los siguientes tópicos (o algoritmos de computación): i) formulación de las ecuaciones, ii) solución de ecuaciones lineales, iii) solución de ecuaciones no lineales, y iv) integración numérica.

PSpice es miembro de la familia de programas de simulación de circuitos SPICE2, Nagel, (1975); mucho más potente y rápido que sus predecesores, fue desarrollado en la Universidad de California en los años setenta y utiliza algoritmos numéricos más refinados con formatos de entrada-salida idénticos. En el análisis de continua PSpice determina el punto de trabajo, es decir, los valores de polarización de sus componentes en ausencia de excitaciones alternas. Para este cálculo se elimina la acción de los condensadores y bobinas, los primeros quedan como circuitos abiertos y las bobinas se cortocircuitan. Para el análisis transitorio PSpice parte del intervalo de tiempo  $(0, t)$  solicitado, que puede ser menor o mayor que la duración del transitorio, y facilita los datos en forma de listado o mediante gráficas. Si los resultados se quieren en forma tabular el usuario debe indicar el instante inicial, el final, el paso temporal y el número de variables listadas; si se solicitan en forma gráfica, una sentencia de programa permite organizarlos y almacenarlos para ser utilizados con ese propósito en cada momento.

La formulación de las ecuaciones del circuito se realiza mediante el método conocido como Análisis Nodal Modificado. La solución transitoria se determina computacionalmente extrayendo del intervalo temporal un conjunto discreto de instantes  $(0, t_1, t_2, \dots, t)$ . En cada uno de ellos, empezando por 0, el tiempo se incrementa una pequeña porción o paso,  $\delta t$ , y, mediante métodos de integración (algoritmo

implícito de Backward-Euler) y procesos de iteración hasta conseguir la convergencia, se resuelven las ecuaciones algebraicas equivalentes de las monopuertas que contienen derivadas temporales; cada iteración requiere de la linealización de las ecuaciones del modelo y de su solución; el método de linealización es el de Newton-Raphson que utiliza una serie de Taylor truncada después del término de primer orden. Para la solución del sistema matricial de ecuaciones lineales se utiliza el método de factorización LU que elimina directamente las incógnitas (este método descompone la matriz de coeficientes en producto de matrices triangulares, “lower and upper, LU”, cuyas inversas no precisan ser calculadas, lo que redundaría en un menor esfuerzo computacional). Para minimizar el esfuerzo de cálculo, las ecuaciones se reordenan usando el método de Markowitz.

Los métodos de integración implantados en PSpice incorporan un proceso de variación dinámica del paso del tiempo de integración para mantener una razonable exactitud en la solución y un tiempo mínimo de computación. PSpice utiliza unos métodos de integración polinomiales basados en el análisis de error de truncamiento local y en la estabilidad (propiedades contrapuestas). Debido a que ciertos circuitos (que contienen constantes de tiempo de valores muy diferentes) pueden dar lugar a un sistema de ecuaciones “stiff”, se utiliza un algoritmo de integración sea “stiff-estable”.

Para conseguir este objetivo se utilizan métodos de integración trapezoidal y Gear de orden variable de dos a seis. Tras conseguir la convergencia, la solución se almacena y se reinicia el proceso para el instante siguiente. El paso  $\delta t$  es, en consecuencia, variable de unos tramos del intervalo a otros; el programa los ajusta en función de la precisión exigida a los resultados de manera que el tiempo de computación sea el mínimo. Los datos de simulación correspondientes a tiempos fuera del conjunto discreto de instantes  $0, t_1, t_2, \dots$ , se obtienen por interpolación. La Figura 2.14 representa un diagrama de flujo que ilustra los cuatro algoritmos de computación que tienen lugar en la simulación de un proceso transitorio (para simplificar se ha supuesto un  $\delta t$  constante). Los algoritmos utilizados en PSpice, que se documentan en la tesis de Nagel (1975), son el resultado de implementaciones, modificaciones y comparaciones cuidadosas de los métodos numéricos existentes en el contexto especial de la simulación de circuitos.

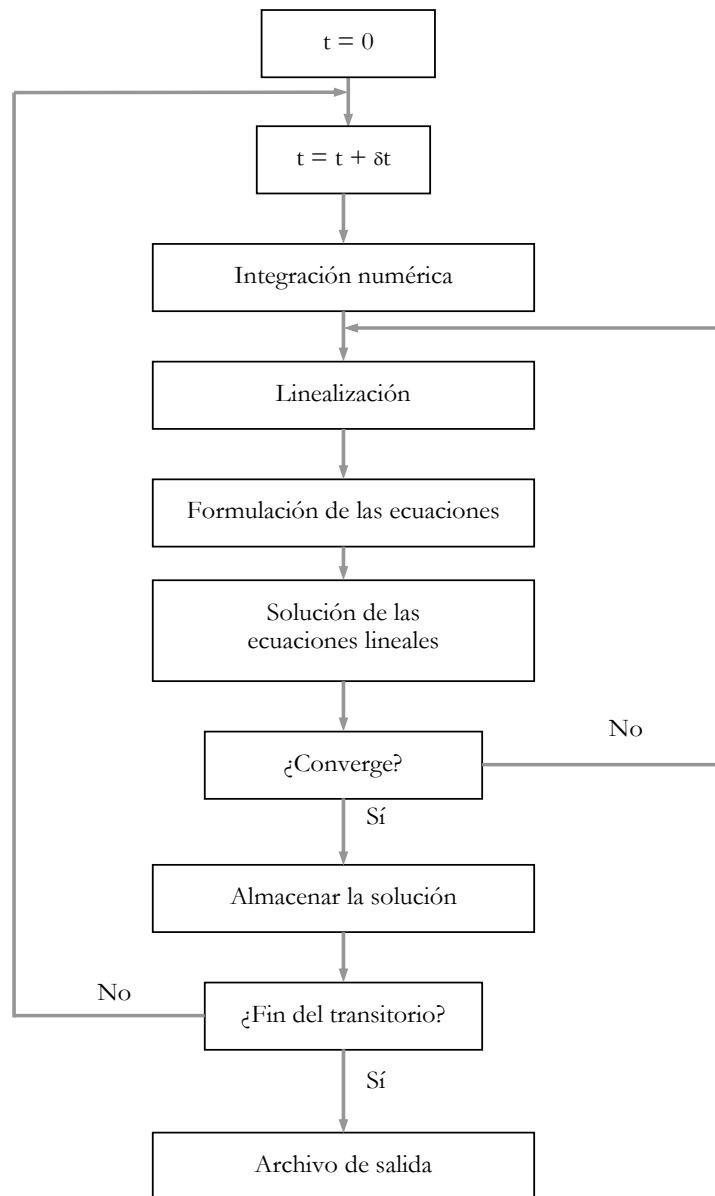


Figura 2.14 Operaciones en el análisis de circuitos

### 2.7.2 Simulación. Presentación de resultados

El software PSpice se programa en su forma clásica por sentencias, elaborando archivos de texto, en un lenguaje relativamente simple (alternativamente es posible elaborar archivos por medio de la opción gráfica ‘SCHEMATICS’ seleccionando directamente los elementos de circuito y conectándolos eléctricamente entre sí en forma de esquema eléctrico). La sintaxis de entrada no requiere especiales disposiciones ordenadas de datos, su estilo puede catalogarse más bien como libre y dispone de una razonable fuente de datos que se adjudican por omisión a los componentes cuando estos no se especifican en detalle. También realiza un buen número de chequeos para asegurar que el circuito ha sido introducido correctamente y el resto de las sentencias de programa están bien escritas, advirtiendo al programador de

posibles errores mediante mensajes previos a la ejecución. En definitiva, un usuario principiante necesita especificar un número mínimo de parámetros y controles de simulación para extraer unos resultados de simulación aceptables.

El programa, por fin, se estructura como un listado que contiene todos los componentes eléctricos del circuito (existe la posibilidad de organizar el programa mediante subcircuitos), resistencias, condensadores, fuentes, interruptores, etc, que se introducen uno por uno indicando el nombre, valor, nudos de conexión y otros parámetros característicos.

El programa PSpice (como, en general, cualquier otro software de resolución de circuitos eléctricos) ofrece muchas posibilidades para el estudio de los sistemas térmicos. A continuación se destacan algunas utilizadas en esta memoria;

- i. Permite conocer directamente el estacionario del sistema térmico (BIAS POINT), mediante el análisis en continua del circuito antes referido,
- ii. La opción TRANS proporciona el transitorio del proceso. Con el análisis en alterna se obtiene de forma inmediata el análisis de respuesta en frecuencia del sistema térmico,
- iii. La aplicación Probe muestra de forma gráfica los resultados de la simulación con la máxima precisión que da el programa. Esta aplicación permite también la representación de funciones resultado de operaciones entre variables de la simulación. Por ejemplo, las curvas de la admitancia o la impedancia del sistema (cociente entre corriente y tensión o viceversa) pueden ser directamente obtenidas de Probe,
- iv. Admite la parametrización del modelo en red (sentencia PARAM), lo que constituye un modo ventajoso de utilizar la técnica de cambiar de valores los componentes del circuito para obtener soluciones de problemas similares,
- v. El uso de las sentencias PARAM y STEP combinadas obtienen la variación secuencial de la respuesta del sistema ante la variación de un parámetro, lo que es una herramienta muy útil para problemas sencillos de optimización (una o dos variables),
- vi. La aplicación Stimulus permite la confección de fuentes de tensión o corriente de prácticamente cualquier forma, que pueden representar cualquier estímulo térmico del sistema,
- vii. El programa admite la ejecución sucesiva de programas, técnica que permite arrancar indefinidamente el PSpice por otro programa y resolver el circuito para una amplia gama de valores de los componentes. En este caso el programa actúa como un solver, cuya misión es resolver las ecuaciones diferenciales del sistema, mientras que al otro programa se le confía la resolución de un problema más amplio.

En relación con la presentación de resultados, el programa permite acceder a los resultados de la simulación (temperaturas y flujos de calor en todo el medio) de dos formas: i) directamente usando el

entorno gráfico de PSpice, muy intuitivo y potente, o accediendo a los archivos de salida de datos los cuales muestran los resultados en forma tabulada; en general estos resultados vienen dados usando como variable independiente el tiempo por lo que son muy útiles en problemas transitorios pero no tanto en problemas estacionarios, y ii) mediante representaciones gráficas alternativas usando paquetes comerciales. Estas representaciones alternativas, muy útiles en problemas estacionarios, se han elaborado para dar mayor información pues consisten en tipos de representación no proporcionados por el entorno gráfico PSpice (por ejemplo mapas de temperatura en función de la posición). Finalmente, es posible extraer los datos en forma tabulada para ser manipulados mediante hoja de cálculo.



## Capítulo 3

# Caracterización y diseño de aletas rectas rectangulares compuestas bajo condiciones de convección para valores de $k_{\text{comp}}/k < 1$

### 3.1 Introducción

Cuando un intercambiador se diseña para trabajar en ambientes corrosivos o con altas temperaturas, es necesario proteger la superficie de alta conductividad de los efectos dañinos del ambiente que la rodea. Este objetivo se alcanza cubriendo la superficie con un material de menor o mayor conductividad capaz de soportar las condiciones extremas del ambiente. El resultado es una “aleta compuesta”. Un ejemplo práctico de aleta compuesta se encuentra en los regeneradores de las instalaciones de turbina de gas, en los que los alabes están protegidos por una lámina de acero inoxidable que recubre el núcleo de cobre, de mayor conductividad, protegiéndolo de las altas temperaturas. Otro ejemplo se puede encontrar en los intercambiadores de las instalaciones de frío en cuyas aletas se deposita una capa de hielo (evaporador) o polvo (condensador) de baja conductividad. Varios autores, cuya labor ha sido citada y descrita con detalle en el Capítulo 2, han dedicado su tiempo al estudio de las aletas compuestas, desde los primeros trabajos de Barker (1958), pasando por los de Chen y Fluker (1974) y Epstein y Sandhu (1978) hasta llegar a los más recientes de Barrow et al. (1986), Lalot et al. (1999) o Gorobets (2006 y 2008). Éste último afronta por primera vez de manera seria y realista el problema de la optimización de este tipo de aletas, a diferencia de todos los anteriores, más preocupados por la bondad de los modelos de conducción elegidos y por la caracterización del problema.

En este trabajo se usa el ATIR para optimizar aletas rectas rectangulares compuestas, con el núcleo más conductivo que la capa exterior, caso más general. Se usan modelos 2-D para la

conducción y se considera que el extremo está recubierto del mismo material que la superficie superior de la aleta, de manera que todo el núcleo conductivo se encuentra recubierto de una lámina de conductividad menor. Se considera la transferencia de calor en toda la superficie exterior incluido también el extremo. Los resultados se presentan en forma de gráficas y tablas, mostrándose ejemplos para una mejor comprensión del proceso de optimización. Junto a la geometría óptima se presentan los valores de efectividad de manera que se garantice que la aleta compuesta cumple con su cometido.

### 3.2 Modelo matemático 2-D

Se ha dividido la aleta compuesta en tres regiones diferentes, Figura 3.1. En cada una de estas regiones se ha aplicado la ecuación de conducción del calor bajo modelos 2-D y sus correspondientes condiciones de contorno.

#### Zona 1

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0; \quad 0 < z < L_1; \quad 0 < y < e_1$$

$$\Phi_1 = 1; \quad 0 < y < e_1; \quad z = 0$$

$$k_1 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right) = k_2 \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right); \quad y = e_1; \quad 0 < z < L_1$$

$$\Phi_1 = \Phi_2; \quad y = e_1; \quad 0 < z < L_1$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 0; \quad y = 0; \quad 0 < z < L_1$$

$$k_1 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) = k_2 \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right); \quad 0 < y < e_1; \quad z = L_1$$

$$\Phi_1 = \Phi_3; \quad 0 < y < e_1; \quad z = L_1$$

#### Zona 2

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0; \quad 0 < z < L_1 + e_2; \quad e_1 < y < e_1 + e_2$$

$$\Phi_2 = 1; \quad e_1 < y < e_1 + e_2; \quad z = 0$$

$$-k_2 \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right) = h \Phi_2; \quad y = e_2 + e_1; \quad 0 < z < L_1 + e_2$$

$$-k_2 \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) = h \Phi_2; \quad e_1 < y < e_1 + e_2; \quad z = L_1 + e_2$$

**Zona 3**

$$\frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y^2} = 0; \quad L_1 < z < L_1 + e_2; \quad 0 < y < e_1$$

$$\left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right) = 0 \quad y = 0; \quad L_1 < z < L_1 + e_2$$

$$-k_2 \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) = h \Phi_3; \quad 0 < y < e_1; \quad z = L_1 + e_2$$

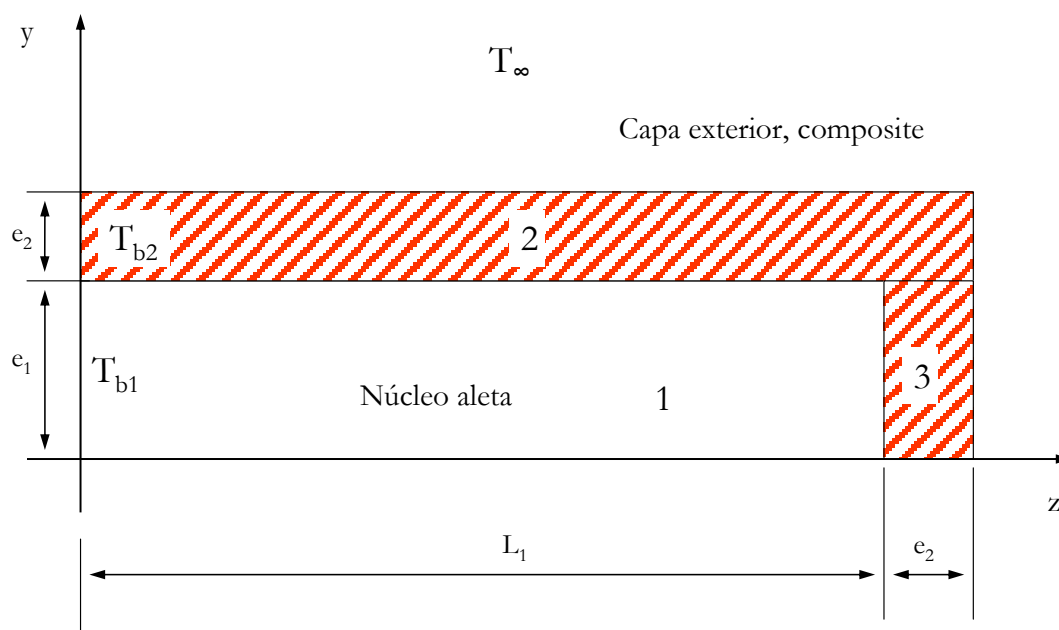


Figura 3.1 Geometría de la aleta compuesta. Nomenclatura y sistema de referencia. Zona 1, núcleo conductivo de la aleta, zonas 2 y 3, recubrimiento externo de la aleta

Las ecuaciones (3.1), (3.8) y (3.12) representan la conducción de calor en cada una de las zonas, dando lugar a diferentes perfiles de temperatura, las ecuaciones (3.2) y (3.9) se refieren al valor de la temperatura en la base mientras que las ecuaciones (3.3), (3.4), (3.6) y (3.7) hacen referencia a la condición de continuidad del flujo de calor y de la temperatura en la frontera del núcleo conductivo y el material de recubrimiento, tanto en la zona superior como en el extremo. La condición adiabática en el eje está representada por las ecuaciones (3.5) y (3.13). La condición de

contorno referente a la convección hacia el medio exterior se expresa en las ecuaciones (3.10), (3.11) y (3.14).

### 3.3 Diseño y optimización de aletas rectas rectangulares compuestas

El problema de la optimización de aletas compuestas no ha sido tratado con profundidad hasta la fecha. El trabajo más avanzado en este sentido, como se ha mencionado anteriormente, corresponde a Gorobets (2006 y 2008), sin embargo esta labor de optimización se hace bajo modelos 1-D por la complejidad de las expresiones matemáticas para modelos 2-D.

En este trabajo se ha aplicado el concepto de admitancia térmica inversa relativa (ATIR) para la optimización de aleta con núcleo conductivo y recubrimiento aislante. Se han usado modelos 2-D, considerando que la temperatura en la base es constante. Las variables con las que se ha trabajado han sido: el volumen del núcleo de la aleta, el coeficiente de convección, la conductividad del núcleo, el espesor del recubrimiento y la relación entre la conductividad del recubrimiento y la del núcleo. Hay que resaltar que debido al proceso de optimización el espesor del recubrimiento puede llegar a ser mayor que el del núcleo de la aleta. Se tiene en cuenta la transferencia de calor en el extremo. Para garantizar que la geometría óptima de la aleta disipe efectivamente calor, se ha calculado la efectividad definida como el cociente entre el calor disipado y el que disiparía una pared sin aleta pero forrada del mismo material que el que recubre el núcleo de la misma.

Con objeto de determinar los márgenes de los valores de los parámetros geométricos y térmicos y sin pérdida de generalidad sobre resultados cualitativos esperados, se han tomado dos valores diferentes para la conductividad de la capa de recubrimiento,  $1/5$  y  $1/100$  del valor de la conductividad de la aleta, considerando que estos valores son suficientemente representativos de casos prácticos. Para abarcar el mayor número de aletas compuestas reales, se ha trabajado con varios cocientes de la relación  $h/k$ ,  $0.1$ ,  $1$  y  $10 \text{ m}^{-1}$  siendo  $k$  la conductividad del núcleo de la aleta. Este conjunto de valores permite llegar a efectividades cercanos a  $1$  como límite inferior. El espesor del recubrimiento tiene el mismo valor en la superficie lateral y en el extremo. Cuatro valores se han tomado para este espesor,  $0.1$ ,  $0.2$ ,  $0.5$  y  $1 \text{ mm}$ . Al determinar la geometría óptima se da el caso de que en ocasiones el espesor del recubrimiento es mayor que el espesor del núcleo de la aleta.

#### 3.2.1 Optimización de aletas compuestas para $k_{recub}/k = 1/100$

Los datos de partida son la conductividad y espesor del recubrimiento, es decir, el volumen de la aleta, el coeficiente de convección, la conductividad del núcleo y del recubrimiento y por último el espesor del recubrimiento.

En la Figura 3.2 se representa el valor del espesor óptimo del núcleo de la aleta frente al volumen, variando el parámetro  $h/k$  para los distintos valores estudiados. El espesor del recubrimiento es 0.1 mm. Las curvas presentan una misma pendiente, pero en cambio en la curva de  $h/k = 0.1 \text{ m}^{-1}$  y volúmenes más pequeños de  $1\text{E-}7 \text{ m}^3$  se aprecia un cambio de tendencia produciéndose un aumento de la pendiente.

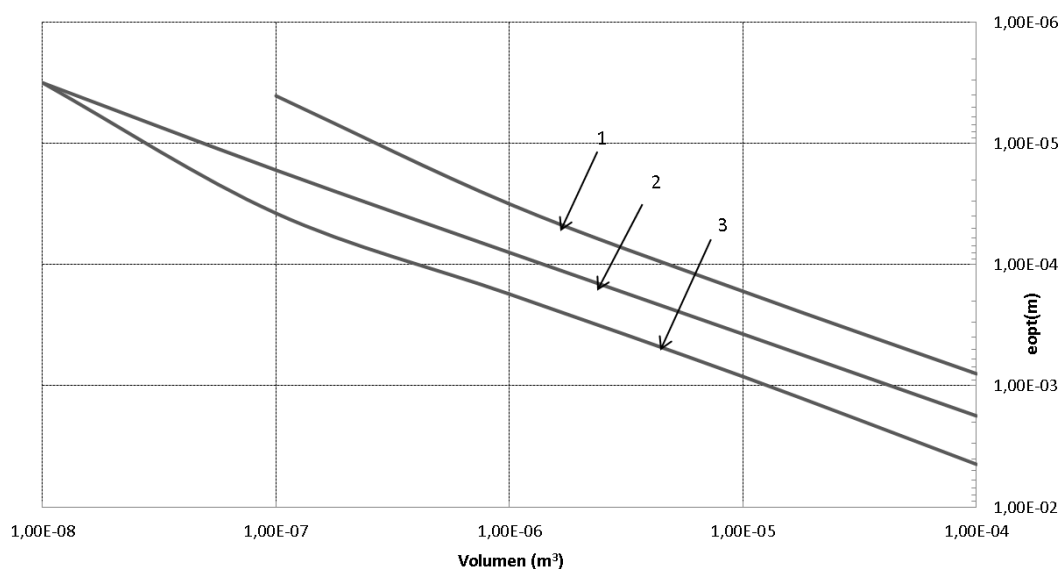


Figura 3.2 Espesor óptimo vs. volumen del núcleo de la aleta para  $k_{recub}/k = 1/100$  y espesor de recubrimiento de 0.1 mm. Curva 1):  $h/k=10 \text{ m}^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 \text{ m}^{-1}$ , curva 3):  $h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$

En la Figura 3.3 se observa el mismo cambio de tendencia que en la gráfica anterior para valores de  $h/k$  0.1 y  $1 \text{ m}^{-1}$  y espesor de recubrimiento mayor, 1 mm. Esta tendencia de la pendiente no aparece en valores grandes de  $h/k= 10\text{m}^{-1}$

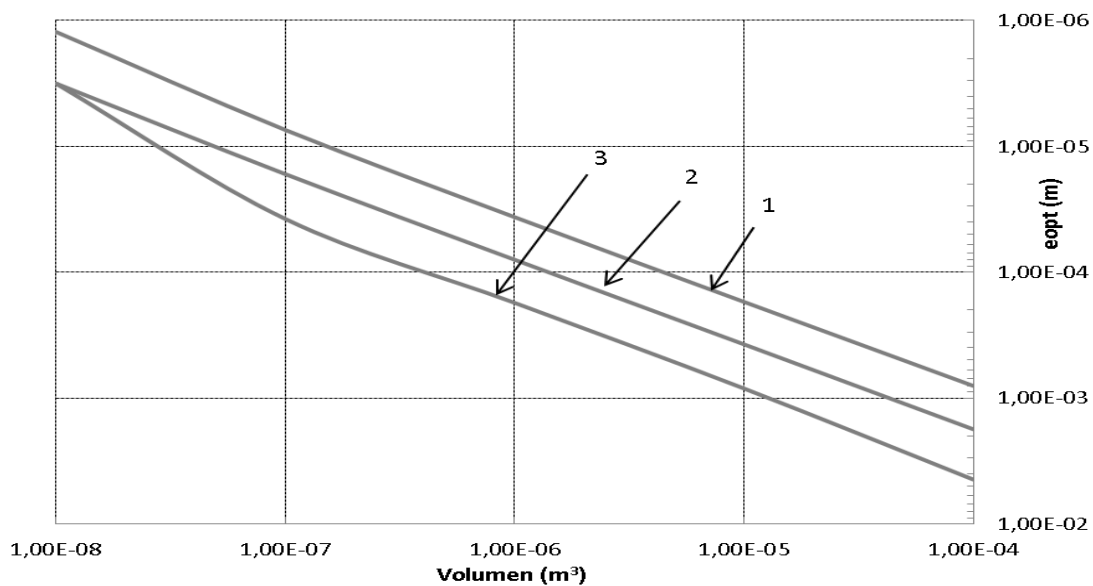


Figura 3.3 Espesor óptimo vs. volumen del núcleo de la aleta para  $k_{recub}/k = 1/100$ , recubrimiento de 1 mm. Curva 1):  $h/k=10 m^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 m^{-1}$ , curva 3):  $h/k=0.1 m^{-1}$

En la Figura 3.4 se representa el espesor óptimo frente al volumen del núcleo de la aleta para varios valores de  $h/k$  y espesores de recubrimiento. Las gráficas se agrupan para valores de  $h/k=0.1$  y  $1m^{-1}$  cuando aumentamos el volumen, pero esto no se produce para las curvas de  $h/k=10 m^{-1}$  que no se agrupan formando una misma línea.

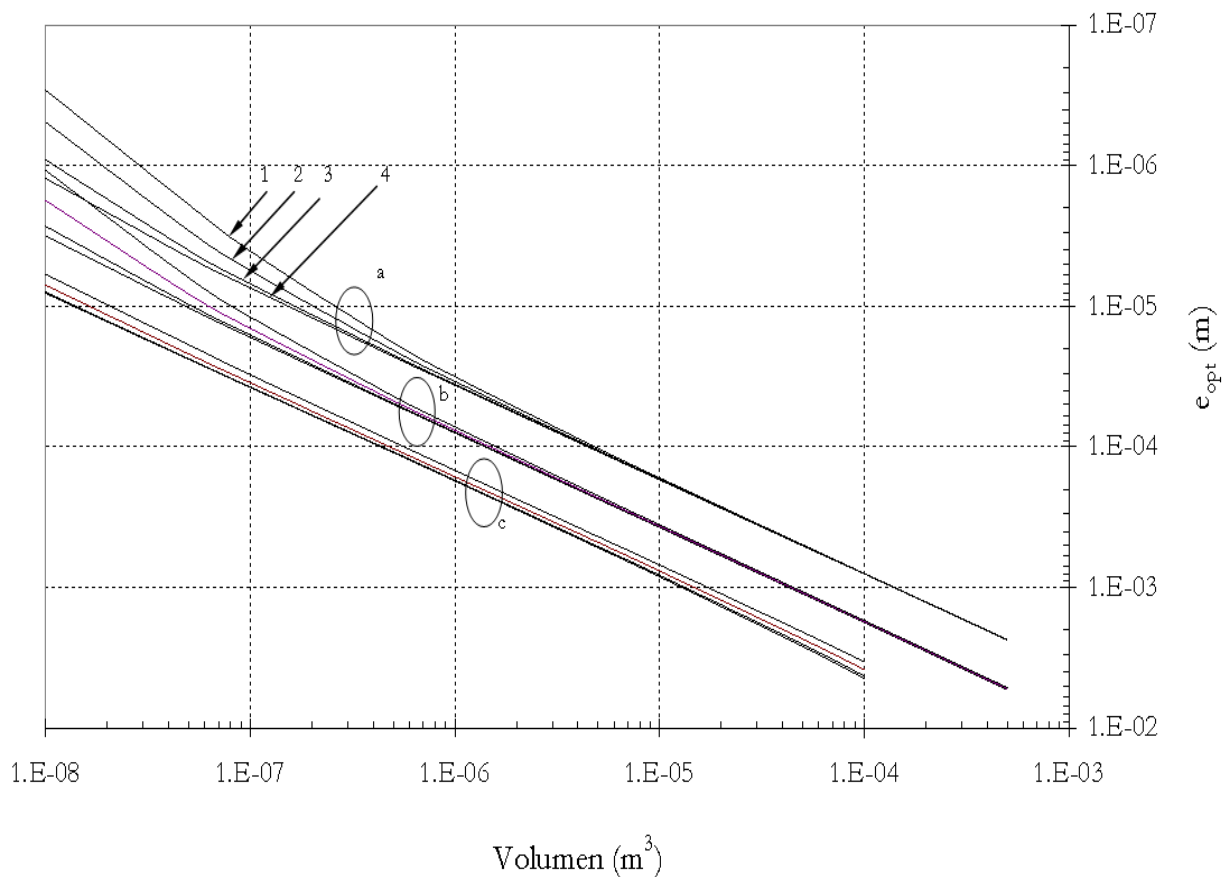


Figura 3.4 Espesor óptimo vs. volumen del núcleo de la aleta para  $k_{recub}/k = 1/100$ . a):  $h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$ , curva 1): espesor de recubrimiento 1 mm, curva 2): espesor de recubrimiento 0.5 mm, curva 3): espesor de recubrimiento 0.2 mm, curva 4): espesor de recubrimiento 0.1mm. b):  $h/k=1 \text{ m}^{-1}$ , c):  $h/k=10 \text{ m}^{-1}$

La Figura 3.5 representa la efectividad frente a  $Bi_t$ , para diferentes valores de  $h/k$  y espesor de recubrimiento. Las curvas tienen máximos y mínimos conforme aumenta el  $Bi_t$ , por lo que un valor bajo de  $Bi_t$  no significa que haya una mayor efectividad.

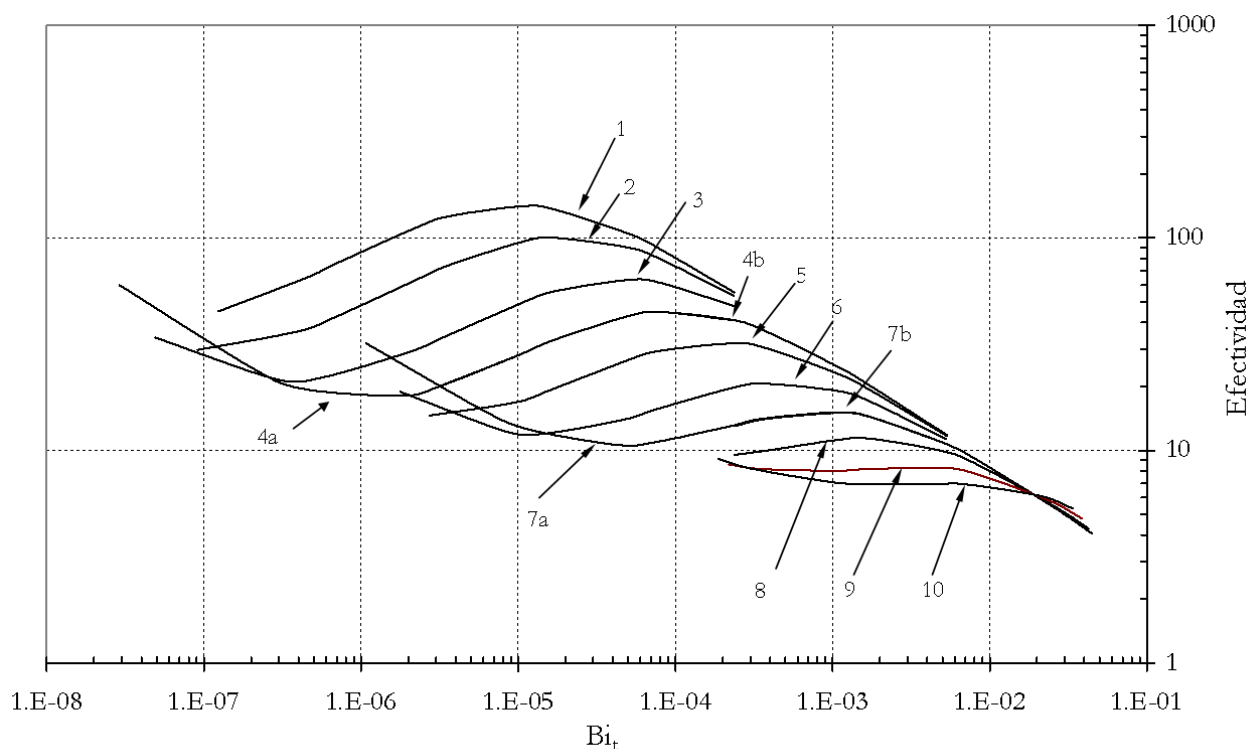


Figura 3.5 Efectividad vs  $Bi_t$ , para  $h/k = 0.1 \text{ m}^{-1}$ , curva 1): espesor de recubrimiento  $1E-4 \text{ m}$ , curva 2): e. r.  $2E-4 \text{ m}$ , curva 3): e. r.  $5E-4 \text{ m}$ , curva 4a): e. r.  $10E-4 \text{ m}$ . Para  $h/k = 1 \text{ m}^{-1}$ , curva 4b): e. r.  $1E-4 \text{ m}$ , curva 5): e. r.  $2E-4 \text{ m}$ , curva 6): e. r.  $5E-4 \text{ m}$ , curva 7a): e. r.  $10E-4 \text{ m}$ . Para  $h/k = 10 \text{ m}^{-1}$ , curva 7b): e. r.  $1E-4 \text{ m}$ , curva 8): e. r.  $2E-4 \text{ m}$ , curva 9): e. r.  $5E-4 \text{ m}$ , curva 10) e. r.  $10E-4 \text{ m}$

Para valores grandes de  $Bi_t$  las curvas se agrupan dando la apariencia de que hay una línea límite para la efectividad de estas curvas, por lo que no se sobrepasa este valor. En la Figura 3.6 podemos apreciar la línea límite.



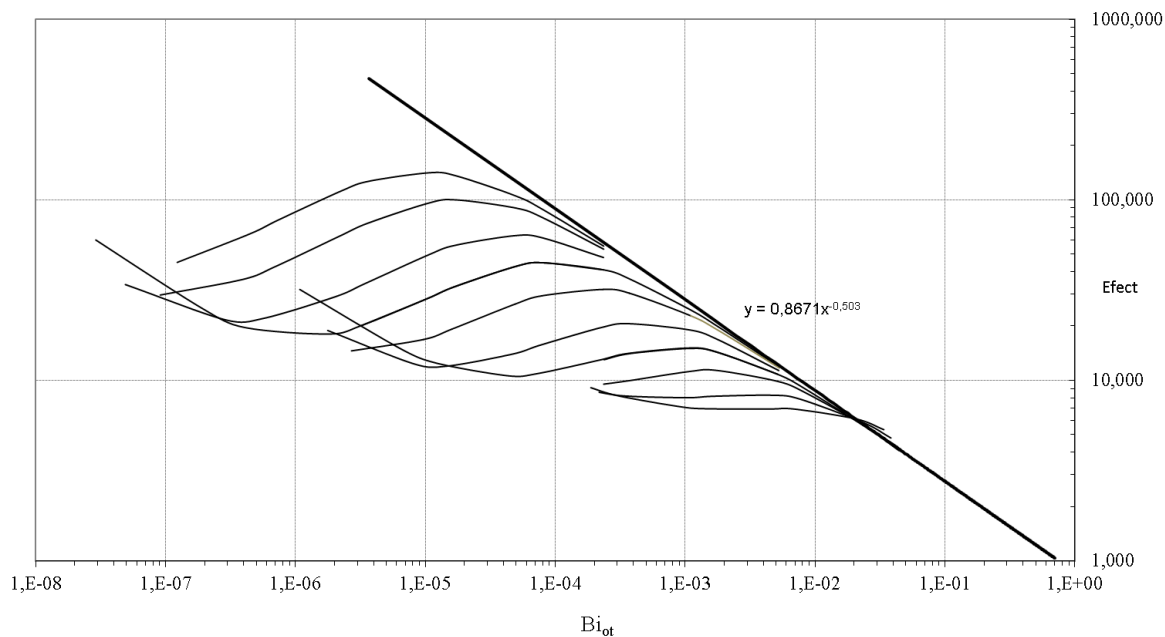


Figura 3.6 Línea límite de tendencia de la efectividad vs  $Bi_t$  para  $k_{recub}/k = 1/100$  y  $(h/k)e_{recub} = cte$ .

$E_{comp} = 1e-4m$

$h/k = 0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Volopt(m <sup>3</sup> )	$e_{opt}$ Ps(m)	Qmax Pspice(W)	$L_{opt}$ (m)	Efectividad	biot	$L^*$ (m)	$L/L^*$	Qsin aleta(W)
1,00E-04	1,13E-04	8,00E-04	7,96E-01	1,25E-01	88,4	8,00E-05	0,089	1,398	9,00E-03
5,00E-05	6,00E-05	5,04E-04	6,31E-01	9,93E-02	105	5,04E-05	0,070	1,398	6,04E-03
1,00E-05	1,59E-05	1,72E-04	3,69E-01	5,83E-02	136	1,72E-05	0,041	1,405	2,72E-03
5,00E-06	9,66E-06	1,08E-04	2,93E-01	4,64E-02	141	1,08E-05	0,032	1,413	2,08E-03
1,00E-06	3,76E-06	3,65E-05	1,73E-01	2,75E-02	126	3,65E-06	0,019	1,440	1,36E-03
5,00E-07	2,71E-06	2,28E-05	1,38E-01	2,21E-02	112	2,28E-06	0,015	1,461	1,23E-03
1,00E-07	1,46E-06	7,40E-06	8,27E-02	1,36E-02	77,01	7,40E-07	0,008	1,582	1,07E-03
5,00E-08	1,18E-06	4,48E-06	6,73E-02	1,13E-02	64,4	4,48E-07	0,006	1,682	1,04E-03
1,00E-08	8,33E-07	1,23E-06	4,44E-02	8,23E-03	43,8	1,23E-07	0,003	2,346	1,01E-03

$h/k=1\text{ m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Q entrada aleta(W)
1,00E-04	1,05E-04	1,77E-03	9,79E-01	0,05	19,94	1,77E-03	0,042	1,340	4,91E-02
5,00E-05	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	0,063	21,32	8,79E-04	0,029	2,128	4,07E-02
1,00E-05	2,26E-06	3,74E-04	7,50E-01	0,004	36,45	3,74E-04	0,019	0,246	2,06E-02
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	0,047	43,52	9,00E-05	0,009	4,985	1,66E-02
1,00E-06	2,26E-06	7,95E-05	7,11E-01	0,012	44,83	7,95E-05	0,008	1,413	1,59E-02
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-05	7,09E-01	0,013	49,34	2,65E-05	0,005	2,543	1,44E-02
1,00E-07	7,02E-07	1,66E-05	7,09E-01	0,006	32,94	1,66E-05	0,004	1,477	2,15E-02
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-06	7,18E-01	0,007	47,29	2,43E-06	0,001	4,997	2,29E-03
1,00E-08	3,26E-07	3,16E-06	7,56E-02	0,003	20,02	3,16E-06	0,001	1,777	3,77E-03

$h/k=10\text{m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Q entrada aleta(W)
1,00E-04	1,02E-04	4,44E-03	9,67E-01	0,02	4,08	4,44E-02	0,021	1,067	2,40E-01
5,00E-05	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	0,063	21,32	8,79E-03	0,005	6,731	4,07E-02
1,00E-05	1,57E-06	8,39E-04	7,540E-01	0,001	8,97	8,39E-03	0,009	0,182	8,36E-02
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	0,047	43,52	9,00E-04	0,003	15,765	1,66E-02
1,00E-06	1,57E-06	1,75E-04	7,11E-01	0,005	14,33	1,75E-03	0,004	1,364	4,96E-02
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-05	7,19E-01	0,013	49,34	2,65E-04	0,001	8,0432	1,44E-02
1,00E-07	3,65E-07	3,77E-05	7,08E-01	0,002	14,08	3,77E-04	0,001	1,364	5,03E-02
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-06	7,38E-01	0,007	47,29	2,43E-05	0,0004	15,80	2,29E-03
1,00E-08	3,26E-07	3,16E-06	7,61E-02	0,003	20,02	3,16E-05	0,0005	5,63	3,77E-03

$E_{comp}=1\text{e-}3\text{m}$

$h/k=0.1\text{m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Volopt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Q entrada aleta(W)
1,00E-04	2,26E-04	7,95E-04	9,79E-01	0,120	44,83	7,95E-05	0,089	1,413	2,18E-02
5,00E-05	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	0,032	37,25	8,79E-05	0,093	0,350	2,33E-02
1,00E-05	3,26E-05	1,66E-04	7,50E-01	0,027	32,94	1,66E-05	0,040	0,686	2,28E-02
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	0,008	27,32	9,00E-06	0,03	0,274	2,64E-02
1,00E-06	3,26E-05	3,16E-05	7,11E-01	0,0316	20,02	3,16E-06	0,017	1,77	3,55E-02
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-05	7,09E-01	0,001	19,98	2,65E-06	0,016	0,099	3,55E-02
1,00E-07	2,48E-05	4,05E-06	7,09E-01	0,024	19,65	4,05E-07	0,006	3,881	3,61E-02
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-06	1,08E-01	0,001	18,35	2,43E-07	0,004	0,168	5,89E-03

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Volopt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L* (m)	L/L*	Q entrada aleta(W)
1,00E-04	1,59E-04	1,72E-03	9,62E-01	0,05	14,43	1,72E-03	0,041	1,405	6,67E-02
5,00E-05	5,62E-05	8,89E-04	8,32E-01	0,02	14,32	8,89E-04	0,923	0,997	5,81E-02
1,00E-05	1,49E-05	3,58E-04	7,39E-01	0,01	14,09	3,58E-04	0,018	0,580	5,24E-02
5,00E-06	5,40E-06	1,22E-04	7,12E-01	0,004	12,38	1,22E-04	0,01	0,434	5,75E-02
1,00E-06	1,49E-05	7,22E-05	7,09E-01	0,013	10,89	7,22E-05	0,008	1,635	6,51E-02
5,00E-07	5,65E-06	2,89E-05	7,08E-01	0,005	11,52	2,89E-05	0,005	1,023	6,14E-02
1,00E-07	8,50E-06	1,19E-05	7,07E-01	0,008	12,51	1,19E-05	0,003	2,435	5,65E-02
5,00E-08	4,99E-07	2,87E-06	6,89E-01	0,001	13,41	2,87E-06	0,001	0,293	5,14E-02

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Volopt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L* (m)	L/L*	Q entrada aleta(W)
1,00E-04	1,30E-04	3,38E-03	9,69E-01	0,020	5,34	3,38E-02	0,018	1,610	1,81E-01
5,00E-05	5,92E-05	7,79E-04	8,35E-01	0,03	6,34	7,79E-03	0,008	3,768	1,32E-01
1,00E-05	7,80E-06	6,92E-04	7,43E-01	0,004	6,94	6,92E-03	0,008	0,554	1,07E-01
5,00E-06	8,78E-06	8,55E-05	7,23E-01	0,008	6,96	8,55E-04	0,002	2,765	1,04E-01
1,00E-06	7,80E-06	1,47E-04	7,13E-01	0,006	6,96	1,47E-03	0,003	1,773	1,02E-01
5,00E-07	1,54E-06	2,44E-05	7,09E-01	0,001	7,25	2,44E-04	0,001	0,963	9,78E-02
1,00E-07	3,37E-06	3,06E-05	7,08E-01	0,003	8,21	3,06E-04	0,001	1,869	8,62E-02
5,00E-08	7,77E-07	2,33E-06	7,00E-01	0,001	8,35	2,33E-05	0,0004	1,604	8,38E-02

$E_{comp}=2e-4 m^{-1}$

$h/k=0.1 m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Volopt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L* (m)	L/L*	Q entrada aleta(W)
1,00E-04	1,36E-04	1,56E-04	6,82E-01	0,380	148,32	1,56E-05	0,039	9,64	0,006
5,00E-05	5,62E-05	0,000879	3,85E-01	0,052	219,95	8,79E-05	0,093	0,55	0,003
1,00E-05	1,32E-05	9,37E-04	3,49E-01	0,011	494,675	9,37E-05	0,096	0,120	0,001
5,00E-06	5,99E-06	2,15E-05	3,72E-01	0,0270	592,452	2,15E-06	0,014	1,84	0,001
1,00E-06	1,56E-06	4,02E-04	3,71E-01	0,002	686,03	4,02E-05	0,063	0,040	0,001
5,00E-07	5,65E-06	1,85E-04	2,71E-01	0,0146	697,08	1,85E-05	0,043	0,34	0,001
1,00E-07	1,33E-07	2,79E+00	2,71E-01	4,76181E-08	705,12	2,79E-01	5,277	9,022E-09	0,001

$h/k=1 \text{ m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Volopt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Q <sub>max</sub> Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L* (m)	L/L*	Q entrada aleta(W)
1,00E-04	1,03E-04	1,49E-03	3,68E+00	0,064	4,37E+01	1,49E-03	0,038	1,6	8,42E-02
5,00E-05	6,18E-05	9,24E-04	2,91E+00	0,060	6,53E+01	9,24E-04	0,030	1,91	4,46E-02
1,00E-05	1,32E-05	3,95E-04	1,70E+00	0,026	6,74E+01	3,95E-04	0,019	1,3	2,52E-02
5,00E-06	6,99E-06	1,96E-04	1,35E+00	0,0235	1,20E+02	1,96E-04	0,014	1,11	1,12E-02
1,00E-06	1,25E-06	7,63E-05	7,92E-01	0,007	9,29E+01	7,63E-05	0,008	0,811	8,52E-03
5,00E-07	5,65E-06	1,03E-05	8,09E-01	0,051	8,92E+01	1,03E-05	0,003	16,01	9,06E-03
1,00E-07	1,53E-07	8,00E-06	8,71E-01	0,001	8,88E+01	8,00E-06	0,002	0,499	9,81E-03
5,00E-08	5,99E-07	2,43E-06	8,81E-01	0,005	8,78E+01	2,43E-06	0,001	3,746	1,00E-02
1,00E-08	1,32E-08	1,33E-06	8,56E-02	0,0001	86,7	1,33E-06	0,001	0,11	9,87E-04

$h/k=10 \text{ m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Volopt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	x Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L* (m)	L/L*	Qsin aleta(W)
1,00E-04	1,21E-04	3,56E-03	9,79E-01	0,0331	325	3,56E-02	0,018	1,755	3,01E-03
5,00E-05	5,86E-05	8,79E-04	8,67E-01	0,059	297	8,79E-03	0,009	6,380	2,92E-03
1,00E-05	1,24E-05	6,98E-04	7,50E-01	0,015	255	6,98E-03	0,008	1,851	2,94E-03
5,00E-06	5,30E-06	8,57E-05	7,21E-01	0,028	205	8,57E-04	0,0029	9,758	3,52E-03
1,00E-06	1,23E-06	8,13E-05	7,11E-01	0,006	160	8,13E-04	0,002	2,380	4,43E-03
5,00E-07	5,70E-06	2,26E-05	7,09E-01	0,046	128	2,26E-04	0,001	30,87	5,56E-03
1,00E-07	1,22E-07	9,66E-06	7,09E-01	0,001	100,40	9,66E-05	0,001	1,135	7,06E-03
5,00E-08	5,92E-07	2,43E-06	1,08E-01	0,005	97,86	2,43E-05	0,0004	11,71	1,11E-03
1,00E-08	1,22E-08	1,96E-06	7,56E-02	0,001	96,26	1,96E-05	0,0004	0,270	7,85E-04

$E_{comp}=5e-4 \text{ m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Q <sub>max</sub> Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	Bit	Q entrada aleta(W)	L*(m)	L/L*
5,00E-04	6,08E-04	2,35E-03	4,08E+00	2,13E-01	47,7	3,45E-04	0,0850	0,153	1,39
1,00E-04	1,63E-04	7,99E-04	2,38E+00	1,25E-01	61,2	2,10E-04	0,0387	0,089	1,40
5,00E-05	1,00E-04	5,02E-04	1,89E+00	9,97E-02	63,1	1,98E-04	0,0298	0,070	1,40
1,00E-05	3,99E-05	1,69E-04	1,11E+00	5,91E-02	55,5	2,57E-04	0,0198	0,0411	1,44
5,00E-06	2,90E-05	1,06E-04	8,89E-01	4,74E-02	48,9	3,32E-04	0,0179	0,032	1,46
1,00E-06	1,59E-05	3,42E-05	5,4E-01	2,92E-02	33,4	7,28E-04	0,0155	0,018	1,58
5,00E-07	1,30E-05	2,05E-05	4,36E-01	2,44E-02	27,9	1,06E-03	0,0149	0,014	1,70
1,00E-07	9,33E-06	5,57E-06	2,90E-01	1,80E-02	19,1	2,42E-03	0,0132	0,0074	2,41
5,00E-08	8,95E-06	2,89E-06	2,56E-01	1,73E-02	17	3,21E-03	0,0118	0,0053	3,22
1,00E-08	1,05E-05	4,90E-07	2,20E-01	2,04E-02	14,7	4,56E-03	0,0064	0,002	9,22

$$h/k=1 \text{ m}^{-1}$$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	Bit	Q entrada aleta(W)	L*(m)	L/L*
5,00E-04	5,50E-04	5,26E-03	1,86E+01	9,51E-02	10,8	6,30E-03	1,64	0,072	1,31
1,00E-04	1,30E-04	1,75E-03	1,08E+01	5,72E-02	16	2,88E-03	0,638	0,041	1,37
5,00E-05	7,37E-05	1,09E-03	8,58E+00	4,58E-02	18	2,31E-03	0,450	0,033	1,39
1,00E-05	2,41E-05	3,67E-04	5,02E+00	2,73E-02	19,3	2,02E-03	0,243	0,019	1,42
5,00E-06	1,63E-05	2,29E-04	3,99E+00	2,18E-02	18,2	2,27E-03	0,202	0,015	1,44
1,00E-06	7,86E-06	7,61E-05	2,37E+00	1,31E-02	13,7	4,09E-03	0,151	0,008	1,51
5,00E-07	6,11E-06	4,69E-05	1,90E+00	1,07E-02	11,6	5,77E-03	0,136	0,006	1,56
1,00E-07	3,85E-06	1,43E-05	1,19E+00	6,99E-03	7,71	1,37E-02	0,099	0,003	1,85
5,00E-08	3,36E-06	8,20E-06	9,99E-01	6,12E-03	6,55	1,96E-02	0,080	0,002	2,14
1,00E-08	3,09E-06	1,77E-06	7,50E-01	5,65E-03	4,98	3,72E-02	0,039	0,001	4,25

$$h/k=10 \text{ m}^{-1}$$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	Bit	Q entrada aleta(W)	L*(m)	L/L*
3,68E-03	1,00E-04	1,00E-04	0,003	1,36E-02	2,61E-02	0,2842	4,80E02	0,003	4,31
2,68E-03	5,00E-05	5,00E-05	0,002	1,08E-02	2,15E-02	0,183	5,86E02	0,002	4,816
2,36E-04	1,00E-05	1,00E-05	0,0007	6,29E-03	1,31E-02	0,079	7,88E02	0,001	6,290
2,73E-04	5,00E-06	5,00E-06	0,0004	5,01E-03	1,05E-02	0,060	8,27E02	0,0007	7,086
8,75E-05	1,00E-06	1,00E-06	0,0001	2,99E-03	6,14E-03	0,036	8,16E02	0,0003	9,457
3,70E-05	5,00E-07	5,00E-07	0,0001	2,41E-03	4,87E-03	0,030	8,02E02	0,0002	10,78
1,50E-05	1,00E-07	1,00E-07	0,00003	1,51E-03	2,87E-03	0,018	8,19E02	0,0001	15,08
8,20E-06	5,00E-08	5,00E-08	0,00002	1,26E-03	2,29E-03	0,014	8,59E02	0,001	17,77

Tabla 3.1 Valores de geometría óptima y efectividad para aletas compuestas con diferentes espesores de recubrimiento y de la relación  $h/k$

Definimos la longitud característica denotada como  $L^*$  como  $\sqrt{ke/h}$

En las tablas anteriores observamos que al disminuir el volumen aumenta la efectividad, así como que al aumentar los valores de  $h/k$  también aumenta el valor de la efectividad y disminuye el valor de Biot.

Los ejemplos recogidos en la tabla anterior corresponden a efectividades suficientemente elevadas que permiten asumir la hipótesis de funcionamiento 1-D en el núcleo de la aleta. Los modelos 2-D aquí utilizados permiten garantizar la precisión de los resultados de las Figuras 3.5 y

3.6 en todo su rango de valores y en particular para efectividades menores de 10. La Figura 3.7 muestra un esquema del proceso de optimización de aletas compuestas, su uso es como se describe a continuación:

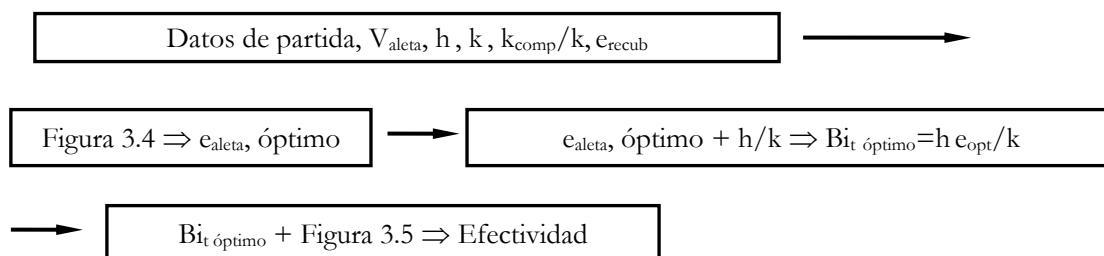


Figura 3.7 Diagrama de flujo para optimización de aletas compuestas

Un ejemplo de uso del diagrama anterior sería como sigue: dado un volumen del núcleo de la aleta de  $1E-5 \text{ m}^3$ ,  $h/k = 1 \text{ m}^{-1}$ , espesor de recubrimiento de  $1E-4 \text{ m}$  y  $k_{recub}/k_o = 1/100$ , la curva 2 de la Figura 3.2 proporciona el valor del espesor óptimo,  $3.74E-04 \text{ m}$ , para el núcleo de la aleta. A partir de este valor de espesor y la relación  $h_o/k_o$  se obtiene el  $Bi_t = 3.74E-04$ ; para la geometría óptima, con este valor de  $Bi_t$  y la gráfica de la Figura 3.5 se obtiene el valor de efectividad de 36.45.

Naturalmente el proceso de optimización se puede realizar partiendo de los datos anteriores, excepto el volumen de la aleta, y la efectividad, pudiendo darse el caso que un mismo valor de efectividad produzca dos conjuntos óptimos de diferente volumen y espesor, un resultado específico de la aleta compuesta.

### 3.2.2 Optimización de aletas compuestas para $k_{recub}/k = 1/5$

A continuación trataremos el proceso de optimización de aletas compuestas cuando la relación entre la conductividad del núcleo y la del recubrimiento es de  $1/5$ .

En la figura 3.8 se representa el valor del espesor óptimo del núcleo de la aleta frente al volumen, podemos observar que las curvas obtenidas se tratan de funciones potenciales, aunque las gráficas no tienen tanta pendiente como en el caso anterior, el cambio en la tendencia de la pendiente se aprecia incluso para volúmenes altos y para cualquiera de los parámetros  $h/k$  estudiados. El espesor del recubrimiento es de  $0.1 \text{ mm}$ .

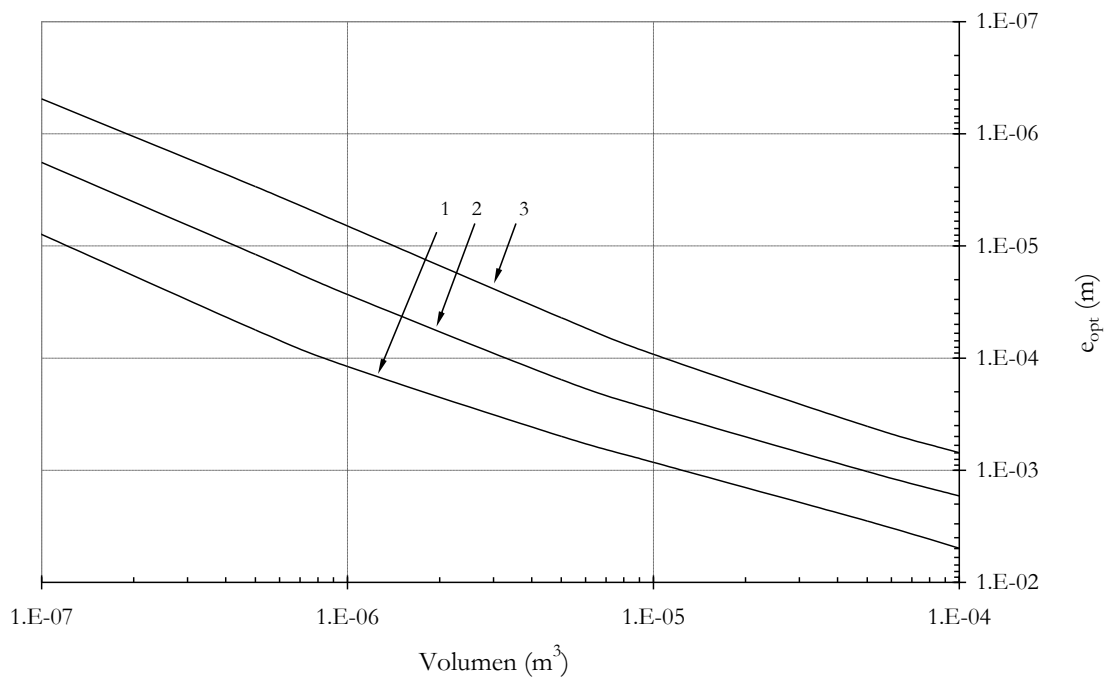


Figura 3.8 Espesor óptimo vs. volumen del núcleo de la aleta para el valor de espesor de  $k_{recub}/k = 1/5$ , recubrimiento de 0.1 mm. Curva 1):  $h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 \text{ m}^{-1}$ , curva 3):  $h/k=10 \text{ m}^{-1}$

En la gráfica de la Figura 3.9 en el que el recubrimiento es de 1mm, se observa como el cambio en la pendiente se produce para valores de volúmenes mayores.

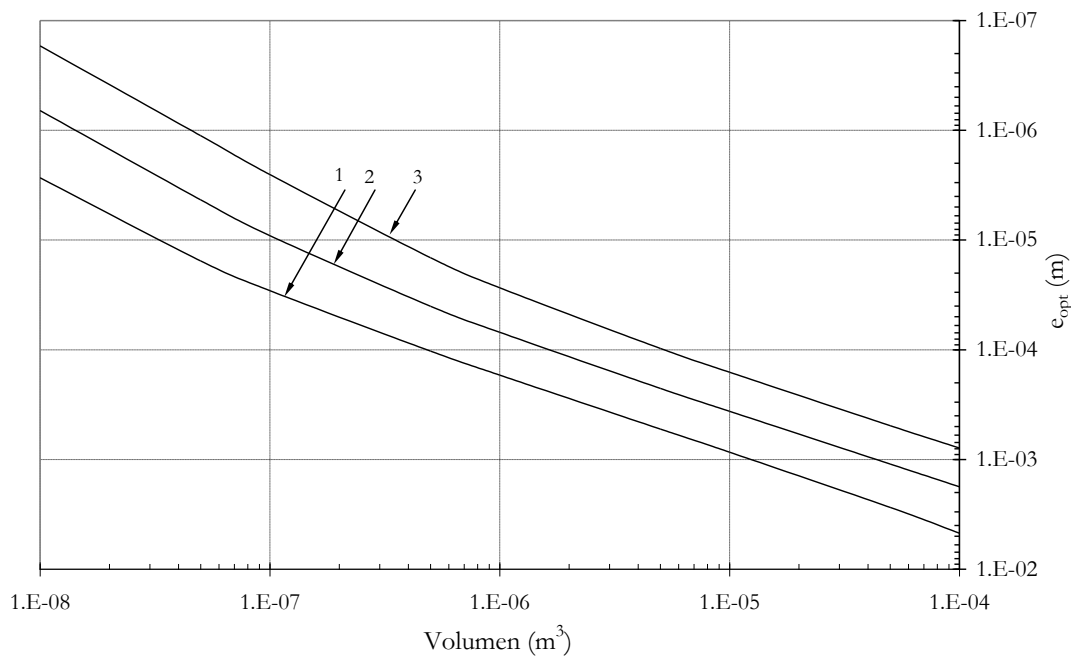


Figura 3.9 Espesor óptimo vs. Volumen óptimo del núcleo de la aleta para el valor de espesor de  $k_{recub}/k = 1/5$ , recubrimiento de 1 mm. Curva 1):  $h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 \text{ m}^{-1}$ , curva 3):  $h/k=10 \text{ m}^{-1}$

En la Figura 3.10 se representa el espesor óptimo frente al volumen del núcleo de la aleta para varios valores de  $h/k$  y espesores de recubrimiento. Se puede observar un agrupamiento de las curvas para todos los valores de  $h/k$ , a diferencia del caso anterior, en el que este agrupamiento no se producía para relaciones grandes de  $h/k$ ,  $10 \text{ m}^{-1}$ .

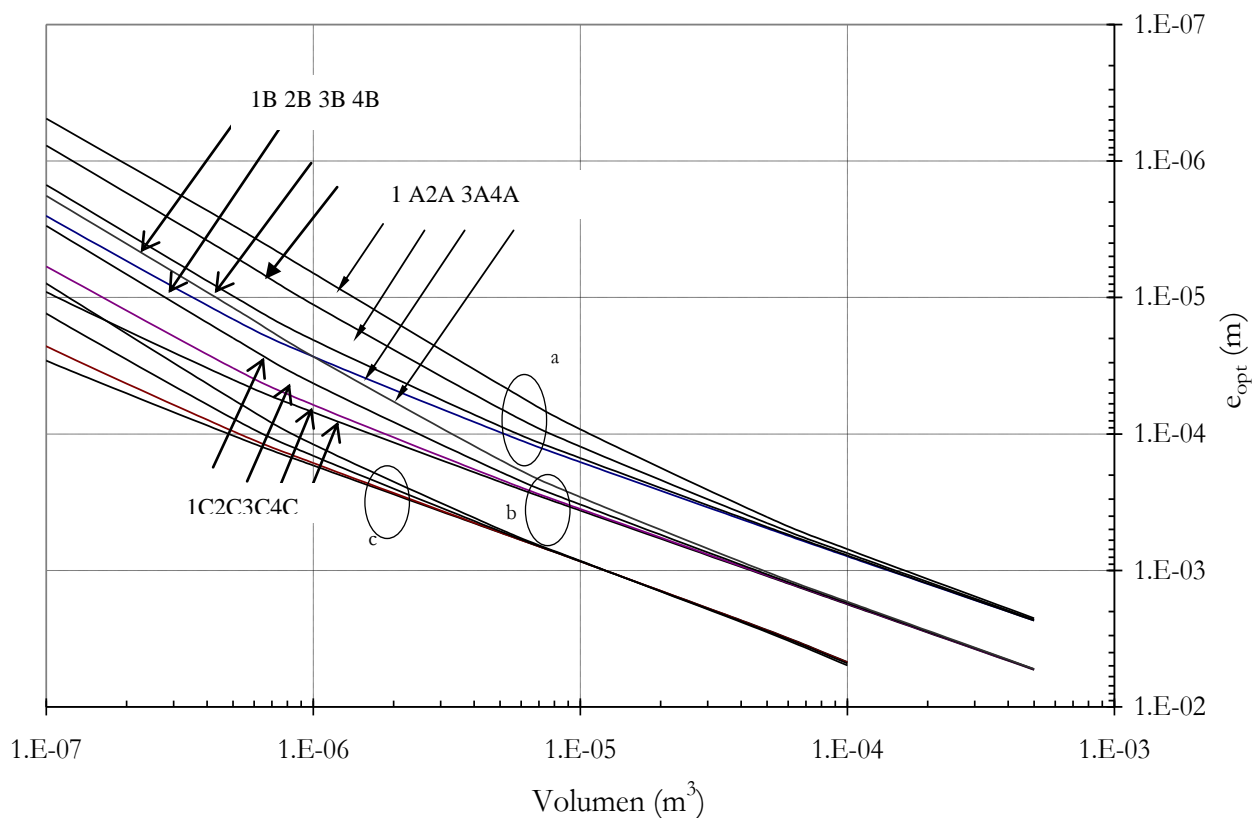


Figura 3.10 Espesor óptimo vs. Volumen del núcleo de la aleta. Relación entre  $k_{recub}/k = 1/5$ . a):  $h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$ , curva 1): espesor de recubrimiento  $1E-4 \text{ m}$ , curva 2): espesor de recubrimiento  $2E-4 \text{ m}$ , curva 3): espesor de recubrimiento  $5E-4 \text{ m}$ , curva 4): espesor de recubrimiento  $10E-4 \text{ m}$ . b):  $h/k=1 \text{ m}^{-1}$ , c):  $h/k=10 \text{ m}^{-1}$



La Figura 3.11 representa la efectividad frente a  $Bi_t$ , para diferentes valores de  $h/k$  y espesor de recubrimiento. Las curvas presentan como en el caso anterior una línea limite que no es sobrepasada por ninguna de las curvas. Presentan máximos y mínimos relativos. Las curvas presentan una pendiente más constante que en el caso anterior.

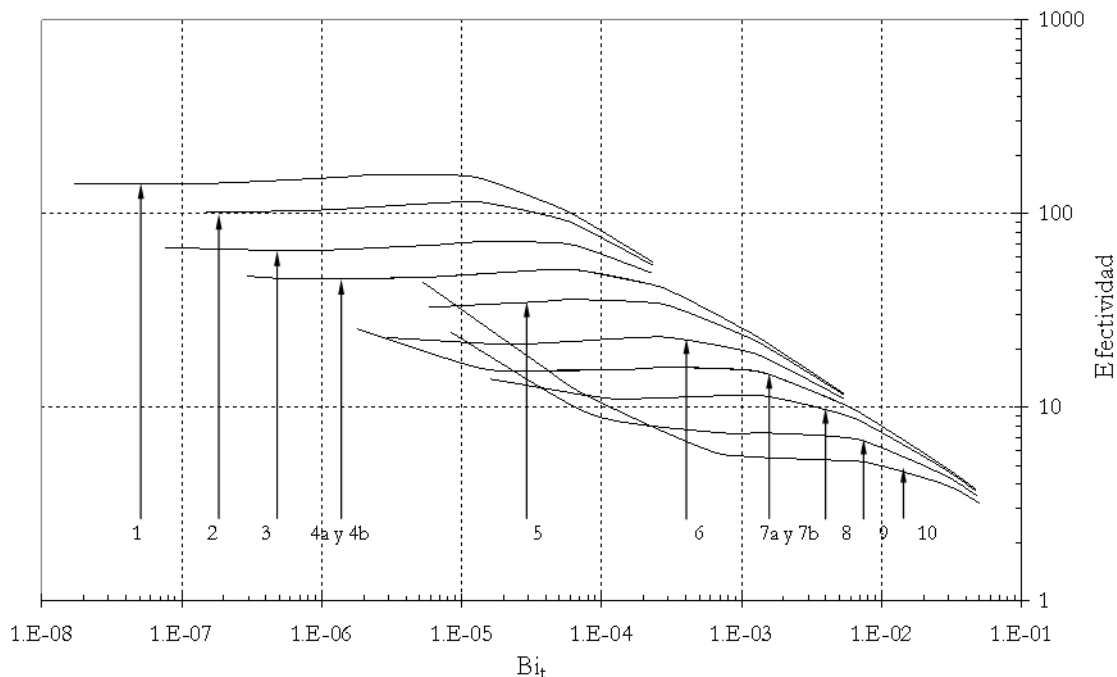


Figura 3.11 Efectividad vs  $Bi_t$ . Para  $h/k = 0.1 \text{ m}^{-1}$ , curva 1): espesor de recubrimiento  $1\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 2):  $e_{recub} \text{ } 2\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 3):  $e_{recub} \text{ } 5\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 4a):  $e_{recub} \text{ } 10\text{E-}4 \text{ m}$ . Para  $h/k = 1 \text{ m}^{-1}$ , curva 4b):  $e_{recub} \text{ } 1\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 5):  $e_{recub} \text{ } 2\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 6):  $e_{comp} \text{ } 5\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 7a):  $e_{recub} \text{ } 10\text{E-}4 \text{ m}$ . Para  $h/k = 10 \text{ m}^{-1}$ , curva 7b):  $e_{recub} \text{ } 1\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 8):  $e_{recub} \text{ } 2\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 9):  $e_{recub} \text{ } 5\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 10):  $e_{recub} \text{ } 10\text{E-}4 \text{ m}$

$E_{comp} = 1e-4m$

$h/k = 0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,13E-04	7,87E-04	9,79E-01	0,127	90,21	7,87E-05	0,088	1,431	1,08E-02
5,00E-05	6,18E-05	3,88E-04	8,67E-01	1,27E-01	120,355	3,88E-05	0,062	2,033	7,21E-03
1,00E-05	1,63E-05	1,61E-04	7,50E-01	6,23E-02	146,59	1,61E-05	0,040	1,5526	5,11E-03
5,00E-06	8,99E-06	3,15E-05	7,21E-01	6,83E-02	147,18	3,15E-06	0,017	3,851	4,90E-03
1,00E-06	4,68E-06	2,73E-05	7,11E-01	3,68E-02	159,7	2,73E-06	0,0165	2,227	4,45E-03
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-06	7,09E-01	1,61E-02	149,869	2,65E-07	0,005	3,13	4,73E-03
1,00E-07	4,05E-06	8,53E-05	7,09E-01	2,19E-02	145,02	8,53E-06	0,029	0,748	4,89E-03
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-05	1,08E-01	6,42E-03	144,32	2,43E-06	0,015	0,41	7,49E-04
1,00E-08	5,89E-06	1,70E-05	7,56E-02	5,03E-02	143,07	1,70E-06	0,013	3,861	5,28E-04

$h/k = 1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,06E-04	1,77E-03	9,79E-01	0,0565	19,99	1,77E-03	0,042	1,342	4,90E-02
5,00E-05	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	6,95E-02	21,32	8,79E-04	0,793	2,3440	4,07E-02
1,00E-05	2,44E-06	3,64E-04	7,50E-01	6,52E-03	37,71	3,64E-04	0,09	0,341	1,99E-02
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	8,99E-02	43,52	9,00E-05	0,009	9,472	1,66E-02
1,00E-06	2,44E-06	6,94E-05	7,11E-01	3,07E-02	51	6,94E-05	0,008	3,687	1,39E-02
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-05	7,09E-01	4,54E-02	49,34	2,65E-05	0,005	8,82	1,44E-02
1,00E-07	1,20E-06	9,13E-06	7,09E-01	6,28E-02	47,94	9,13E-06	0,003	20,76	1,48E-02
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-06	1,08E-01	6,42E-02	47,29	2,43E-06	0,001	41,16	2,29E-03
1,00E-08	1,53E-06	6,60E-07	7,56E-02	1,44E-01	46,18	6,60E-07	0,001	176,67	1,64E-03

$h/k = 10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,02E-04	4,69E-03	9,79E-01	0,021	3,77	4,69E-02	0,021	0,984	2,60E-01
5,00E-05	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	0,063	5,32	8,79E-03	0,005	6,731	1,63E-01
1,00E-05	1,12E-05	8,59E-04	7,50E-01	0,011	8,56	8,59E-03	0,009	1,257	8,76E-02
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	0,047	10,25	9,00E-04	0,003	15,76	7,04E-02
1,00E-06	1,59E-06	1,70E-04	7,11E-01	0,005	14,45	1,70E-03	0,0041	1,426	4,92E-02
5,00E-07	1,59E-06	2,65E-05	7,09E-01	0,012	15,34	2,65E-04	0,001	7,722	4,62E-02
1,00E-07	4,45E-07	2,90E-05	7,09E-01	0,003	16,09	2,90E-04	0,001	2,024	4,40E-02

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
5,00E-08	7,99E-07	8,95E-06	1,08E-01	0,007	15,98	8,95E-05	0,0009	7,749	6,77E-03
1,00E-08	3,79E-07	2,71E-06	7,56E-02	0,003	15,41	2,71E-05	0,0005	7,088	4,90E-03

$E_{comp}=1e-3m$

$h/k=0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	2,43E-04	6,99E-04	9,79E-01	0,143	50,91	6,99E-05	0,083	1,71	1,92E-02
5,00E-05	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	6,95E-02	21,32	8,79E-05	0,093	0,741	4,07E-02
1,00E-05	1,52E-04	9,26E-05	7,50E-01	1,48E+00	47,94	9,26E-06	0,030	48,68	1,56E-02
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	8,99E-02	43,52	9,00E-06	0,03	2,995	1,66E-02
1,00E-06	1,52E-04	6,64E-06	7,11E-01	9,13E+00	46,18	6,64E-07	0,008	1121,0	1,54E-02
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-05	7,09E-01	4,54E-02	49,34	2,65E-06	0,016	2,790	1,44E-02
1,00E-07	2,05E-04	4,88E-07	7,09E-01	1,96E+01	59,1	4,88E-08	0,002	8,83	1,20E-02
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-06	1,08E-01	6,42E-02	47,29	2,43E-07	0,004	13,0	2,29E-03

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,59E-04	1,69E-03	9,79E-01	0,0591	14,49	1,69E-03	0,0411	1,437	6,75E-02
5,00E-05	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	6,95E-02	21,32	8,79E-04	0,029	2,344	4,07E-02
1,00E-05	3,79E-05	2,90E-04	7,50E-01	1,26E-01	16,09	2,90E-04	0,017	7,418	4,66E-02
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	8,99E-02	43,52	9,00E-05	0,009	9,472	1,66E-02
1,00E-06	3,79E-05	2,71E-05	7,11E-01	1,02E+00	15,42	2,71E-05	0,005	196,23	4,61E-02
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-05	7,09E-01	4,54E-02	49,34	2,65E-05	0,0051	8,82	1,44E-02
1,00E-07	5,57E-05	1,80E-06	7,09E-01	4,72E+00	25,39	1,80E-06	0,004	3518,3	2,79E-02
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-06	1,08E-01	6,42E-02	47,29	2,43E-06	0,0015	41,168	2,29E-03

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,20E-04	4,96E-03	9,79E-01	0,0202	18,32	4,96E-02	0,022	0,90	5,34E-02
5,00E-05	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	6,95E-02	21,32	8,79E-03	0,009	7,412	4,07E-02
1,00E-05	9,40E-06	8,51E-04	7,50E-01	1,09E-02	32,85	8,51E-03	0,009	1,183	2,28E-02

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	8,99E-02	43,52	9,00E-04	0,003	29,95	1,66E-02
1,00E-06	9,40E-06	1,19E-04	7,11E-01	7,29E-02	45,32	1,19E-03	0,003	21,12	1,57E-02
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-05	7,09E-01	4,54E-02	49,34	2,65E-04	0,001	27,90	1,44E-02
1,00E-07	1,28E-05	7,90E-06	7,09E-01	7,15E-01	48,32	7,90E-05	0,0008	804,5	1,47E-02
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-06	7,08E-01	6,42E-02	47,29	2,43E-05	0,0004	130,18	1,50E-02

$$E_{comp}=2e-4 \text{ m}^{-1}$$

$$h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,85E-05	7,87E-04	9,79E-01	0,018743668	90,21	7,87E-05	0,088	0,211	1,08E-02
5,00E-05	6,18E-05	3,88E-04	8,67E-01	1,59E-01	120,355	3,88E-05	0,062	2,557	7,21E-03
1,00E-05	1,75E-05	1,61E-04	7,50E-01	1,09E-01	146,59	1,61E-05	0,0401	2,708	5,11E-03
5,00E-06	8,99E-06	3,15E-05	7,21E-01	2,85E-01	147,18	3,15E-06	0,017	16,08	4,90E-03
1,00E-06	1,32E-06	2,73E-05	7,11E-01	4,84E-02	159,7	2,73E-06	0,016	2,926	4,45E-03
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-06	7,09E-01	6,25E-01	149,869	2,65E-07	0,0051	121,57	4,73E-03
1,00E-07	1,24E-07	8,53E-05	7,09E-01	1,45E-03	145,02	8,53E-06	0,029	0,049	4,89E-03
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-05	1,08E-01	3,28E-02	144,32	2,43E-06	0,015	2,10	7,49E-04
1,00E-08	1,24E-05	1,70E-05	7,56E-02	7,26E-01	143,07	1,70E-06	0,013	55,71	5,28E-04

$$h/k=1 \text{ m}^{-1}$$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	4,79E-03	3,17E-03	1,42E+00	1,423454699	37,31	3,17E-03	0,056	25,29	3,82E-02
5,00E-05	2,31E-03	1,75E-03	1,19E+00	1,29E+00	29,76	1,75E-03	0,0535	30,77	3,99E-02
1,00E-05	5,67E-04	6,13E-04	6,98E-01	8,56E-01	25,51	6,13E-04	0,024	34,58	2,74E-02
5,00E-06	3,05E-04	3,60E-04	5,44E-01	7,42E-01	24,79	3,60E-04	0,018	39,11	2,19E-02
1,00E-06	1,08E-04	1,44E-04	3,14E-01	5,57E-01	22,96	1,44E-04	0,012	46,36	1,37E-02
5,00E-07	5,65E-06	2,65E-05	7,09E-01	7,40E-02	25,32	2,65E-05	0,005	14,37	2,80E-02
1,00E-07	1,53E-07	9,13E-06	7,09E-01	2,58E-03	36,20	9,13E-06	0,003	0,854	1,96E-02
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-06	1,08E-01	1,52E-02	47,29	2,43E-06	0,0015	9,762	2,29E-03
1,00E-08	1,85E-07	6,60E-07	7,56E-02	3,66E-03	52,23	6,60E-07	0,0008	4,50	1,45E-03

$h/k=10 \text{ m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,19E-04	5,08E-04	9,99E-01	0,16	159,32	5,08E-03	0,0071	23,5	6,27E-03
5,00E-05	5,72E-05	3,20E-04	8,85E-01	0,110	235,51	3,20E-03	0,005	19,46	3,76E-03
1,00E-05	1,27E-05	4,39E-05	7,76E-01	0,051	521,543	4,39E-04	0,0020	24,76	1,49E-03
5,00E-06	7,56E-06	2,17E-05	7,66E-01	0,034	631,45	2,17E-04	0,0014	23,16	1,21E-03
1,00E-06	2,60E-06	3,89E-06	7,42E-01	0,01	721,032	3,89E-05	0,0006	20,43	1,03E-03
5,00E-07	1,34E-06	1,39E-06	7,34E-01	0,006	734,32	1,39E-05	0,0003	17,91	1,00E-03
1,00E-07	7,42E-07	2,65E-07	7,35E-01	0,003	751,01	2,65E-06	0,0001	22,74	9,79E-04
5,00E-08	5,99E-07	3,45E-07	7,32E-01	0,002	7,65E+02	3,45E-06	0,0001	16,10	9,57E-04
1,00E-08	3,85E-07	4,80E-07	7,21E-01	0,001	7,77E+02	4,80E-06	0,0002	8,75	9,29E-04

$E_{comp}=5e-4m^{-1}$

$h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,13E-04	7,87E-04	9,79E-01	0,127	90,21	7,87E-05	0,088	1,431	1,08E-02
5,00E-05	6,18E-05	3,88E-04	8,67E-01	1,27E-01	120,355	3,88E-05	0,062	2,033	7,21E-03
1,00E-05	1,63E-05	1,61E-04	7,50E-01	6,23E-02	146,59	1,61E-05	0,040	1,552	5,11E-03
5,00E-06	8,99E-06	3,15E-05	7,21E-01	6,83E-02	147,18	3,15E-06	0,017	3,851	4,90E-03
1,00E-06	4,68E-06	2,73E-05	7,11E-01	3,68E-02	159,7	2,73E-06	0,01	2,227	4,45E-03
5,00E-07	1,65E-06	2,65E-06	7,09E-01	1,61E-02	149,869	2,65E-07	0,005	3,133	4,73E-03
1,00E-07	4,05E-06	8,53E-05	7,09E-01	2,19E-02	145,02	8,53E-06	0,029	0,748	4,89E-03
5,00E-08	7,99E-07	2,43E-05	1,08E-01	6,42E-03	144,32	2,43E-06	0,015	0,41	7,49E-04
1,00E-08	5,89E-06	1,70E-05	7,56E-02	5,03E-02	143,07	1,70E-06	0,013	3,861	5,28E-04

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
5,65E-06	1,06E-04	1,77E-03	9,79E-01	0,0565	19,99	1,77E-03	0,042	0,002	4,90E-02
6,95E-06	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	6,95E-02	21,32	8,79E-04	0,027	0,003	4,07E-02
6,52E-07	2,44E-06	3,64E-04	7,50E-01	6,52E-03	37,71	3,64E-04	0,01	0,0001	1,99E-02
8,99E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	8,99E-02	43,52	9,00E-05	0,009	0,002	1,66E-02
3,07E-06	2,44E-06	6,94E-05	7,11E-01	3,07E-02	51	6,94E-05	0,0083	0,0006	1,39E-02
4,54E-06	1,65E-06	2,65E-05	7,09E-01	4,54E-02	49,34	2,65E-05	0,0051	0,0009	1,44E-02
6,28E-06	1,20E-06	9,13E-06	7,09E-01	6,28E-02	47,94	9,13E-06	0,003	0,001	1,48E-02
6,42E-06	7,99E-07	2,43E-06	1,08E-01	6,42E-02	47,29	2,43E-06	0,001	0,0013	2,29E-03

---

1,00E-08	1,53E-06	6,60E-07	7,56E-02	1,44E-01	46,18	6,60E-07	0,0008	0,0031	1,64E-03
----------	----------	----------	----------	----------	-------	----------	--------	--------	----------

---

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	1,02E-04	4,69E-03	9,79E-01	0,021	3,77	4,69E-02	0,0216	0,984	2,60E-01
5,00E-04	6,18E-05	8,79E-04	8,67E-01	0,063	5,32	8,79E-03	0,05	6,731	1,63E-01
1,00E-05	1,12E-05	8,59E-04	7,50E-01	0,011	8,56	8,59E-03	0,009	1,257	8,76E-02
5,00E-06	8,99E-06	9,00E-05	7,21E-01	0,0472	10,25	9,00E-04	0,003	15,76	7,04E-02
1,00E-06	1,59E-06	1,70E-04	7,11E-01	0,0058	14,45	1,70E-03	0,0041	1,426	4,92E-02
5,00E-07	1,59E-06	2,65E-05	7,09E-01	0,0125	15,34	2,65E-04	0,001	7,72	4,62E-02
1,00E-07	4,45E-07	2,90E-05	7,09E-01	0,0034	16,09	2,90E-04	0,0017	2,02	4,40E-02
5,00E-08	7,99E-07	8,95E-06	1,08E-01	0,007	15,98	8,95E-05	0,0009	7,74	6,77E-03
1,00E-08	3,79E-07	2,71E-06	7,56E-02	0,003	15,41	2,71E-05	0,0005	7,08	4,90E-03

Tabla 3.2 Valores de geometría óptima y efectividad para aletas compuestas con diferentes espesores de recubrimiento y de la relación  $h/k$

En la tabla 3.2 podemos observar que conforme aumenta el volumen disminuye el parámetro de Biot y aumenta la efectividad. Para valores mayores de  $h/k$  manteniendo constante el valor del espesor de recubrimiento observamos que disminuye la efectividad. También podemos observar que cuanto mayor es el espesor de recubrimiento manteniendo constante el valor de  $h/k$  menor es la efectividad.

## Capítulo 4

### Caracterización y diseño de aletas rectas rectangulares compuestas bajo condiciones de convección para valores de $k_{comp}/k > 1$

#### 4.1 Optimización de aletas compuestas para $k_{comp}/k = 5/1$

En este punto se detalla el proceso de optimización de aletas compuestas cuando la relación entre la conductividad del núcleo y la del recubrimiento es de 5/1,  $k_{comp}/k = 5/1$ . En este apartado vamos a realizar una representación del valor del espesor óptimo frente al volumen; los parámetros tomados son el cociente  $h/k$  y el espesor del recubrimiento.

Las curvas obtenidas se rigen por funciones del tipo  $y = ax^b$ , aunque el coeficiente de correlación no es tan alto como en el caso anterior, el cambio en la tendencia de la pendiente se aprecia incluso para relaciones  $h/k$  altas,  $10 \text{ m}^{-1}$

En la figura 4.1 se representa el valor del volumen frente al espesor óptimo del núcleo de la aleta, variando el valor de  $h/k$  para cada uno de los casos estudiados. El espesor del recubrimiento es de 0.1mm. Podemos observar que las curvas presentan la misma pendiente. Se trata de una pendiente potencial que no es tan marcada como en las gráficas anteriores. Las gráficas aunque presentan la misma pendiente para valores mayores de volumen se produce un cambio de tendencia en cada uno de los distintos  $h/k$  estudiados.

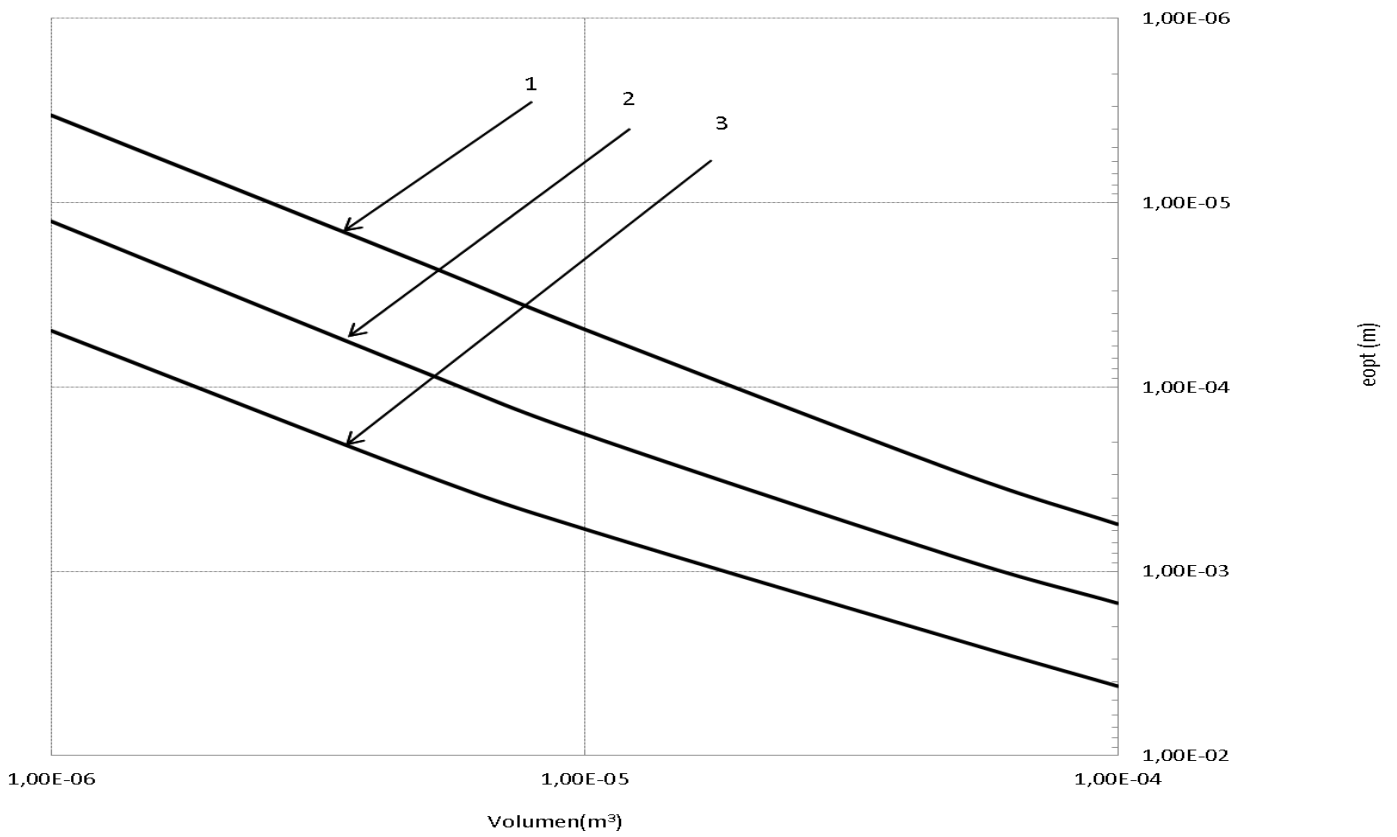


Figura 4.1. Espesor óptimo de la aleta vs. volumen del núcleo de la aleta para  $k_{comp}/k = 5/1$  y espesor de recubrimiento de 0.1 mm. Curva 1):  $h/k=10 \text{ m}^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 \text{ m}^{-1}$ , curva 3):  $h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$

En la Figura 4.2 se representan los valores del volumen con respecto al espesor óptimo para recubrimientos de 1mm, podemos determinar que como en el caso anterior, presenta una tendencia potencial en el que las curvas presentan la misma pendiente pero no se produce un cambio de tendencia para valores grandes de volumen.



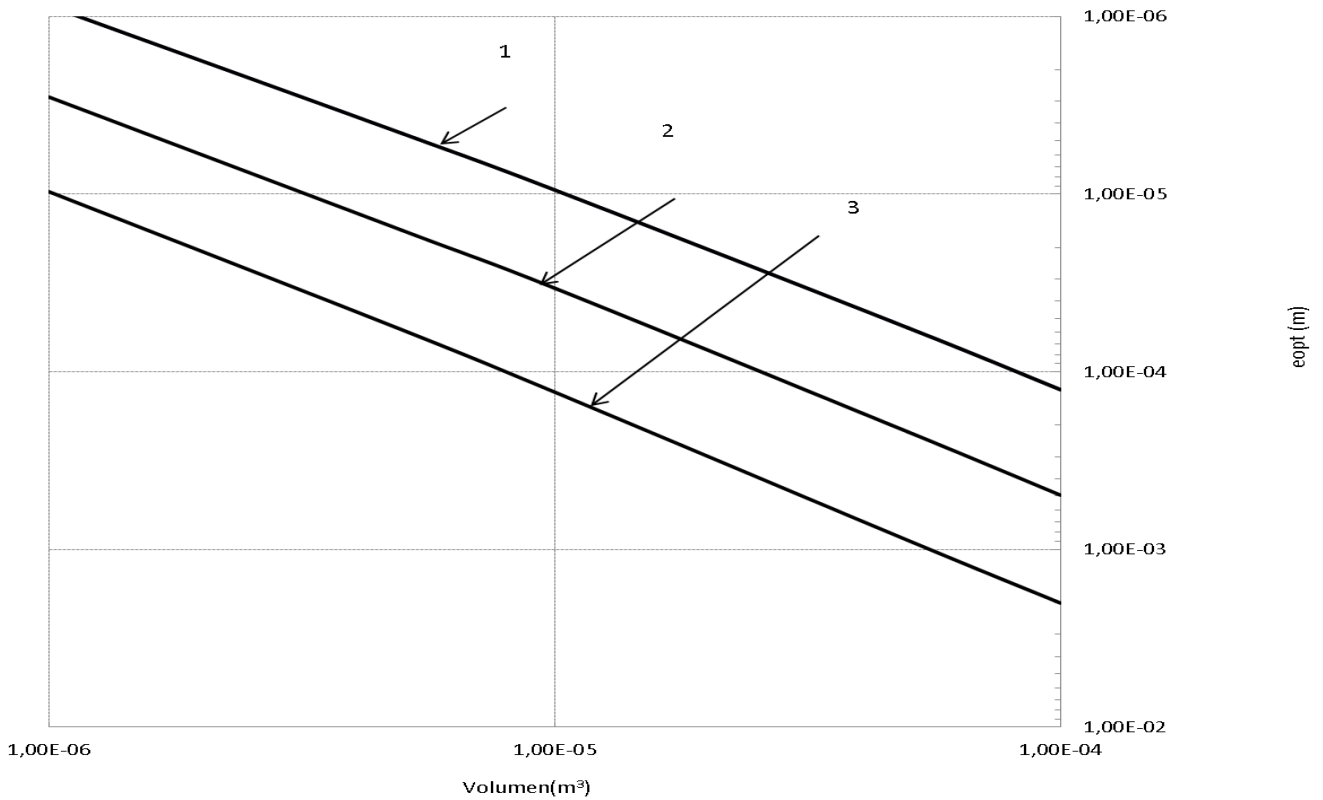


Figura 4.2. Espesor óptimo vs. volumen del núcleo de la aleta para  $k_{comp}/k = 5/1$  y espesor de recubrimiento de 1 mm. Curva 1):  $h/k=10$   $m^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1$   $m^{-1}$ , curva 3):  $h/k=0.1$   $m^{-1}$

En la figura 4.3 se representan los valores del volumen de la aleta con respecto al espesor óptimo del núcleo de la aleta. Las gráficas presentan una tendencia potencial, en la que se puede apreciar que en el caso de  $h/k=10$   $m^{-1}$  se produce un cambio de pendiente para un volumen mayor de  $1E-04$   $m^3$ . Podemos determinar que a mayor volumen el espesor disminuye. No existe agrupamiento de las gráficas como en los casos anteriores.

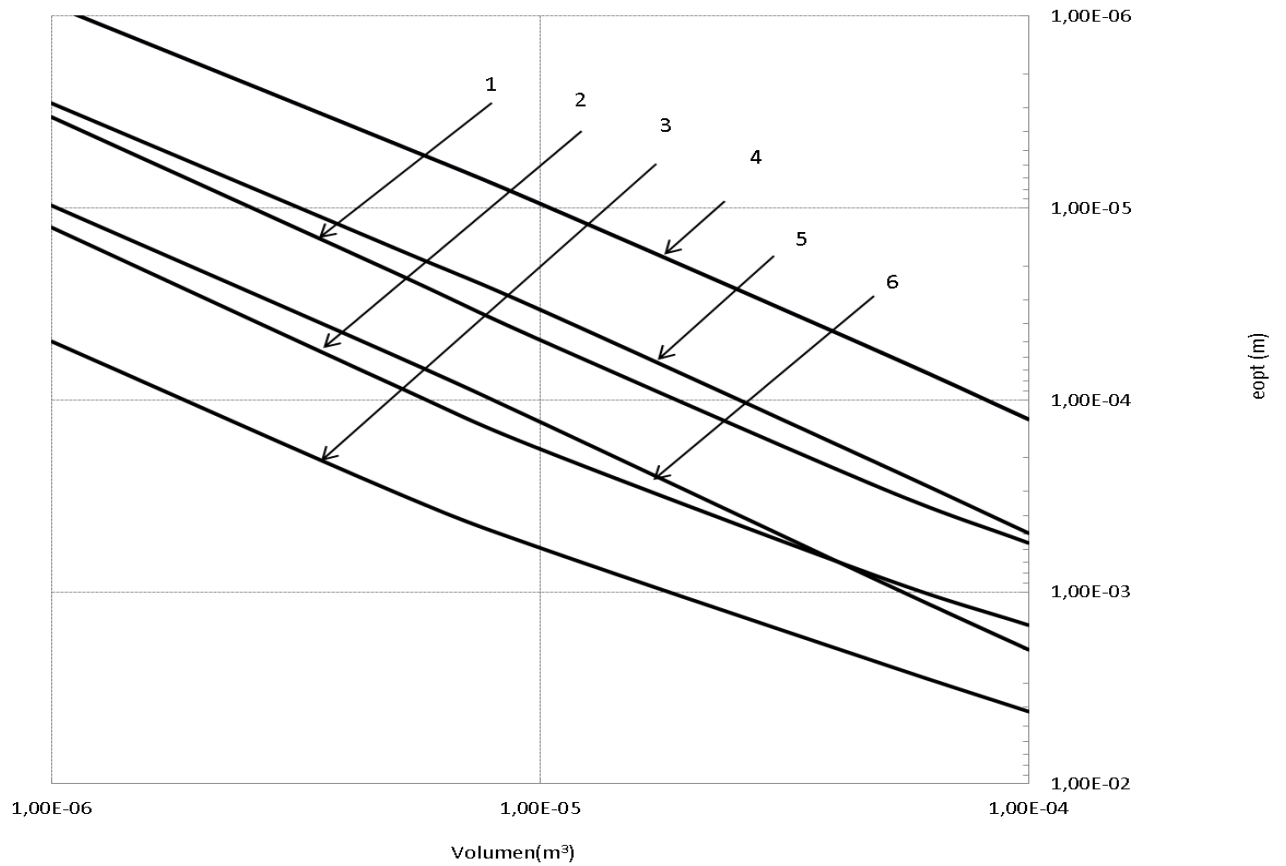


Figura 4.3. Efectividad vs  $Bi_i$  para  $k_{comp}/k = 5/1$  y  $(h/k)e_{recub} = cte$ .  $h/k = 0,1m^{-1}$  Curva 1):  $e_{opt} 1e-04m$ , curva 2);  $e_{opt} 2e-04m$  curva 3):  $e_{opt} 5e-04m$ .  $h/k = 10m^{-1}$  curva 4):  $e_{opt} 1e-04m$  curva 5):  $e_{opt} 2e-04m$ , curva 6);  $e_{opt} 5e-04m$

En cuanto a la figura 4.4 representa el valor de Biot con respecto a la efectividad. Podemos observar en la gráfica que los valores de Biot disminuyen con el aumento de la efectividad. Las gráficas tienden a unirse en una línea límite sin llegar a sobrepasarla. La tendencia de las curvas es menor que en casos anteriores.

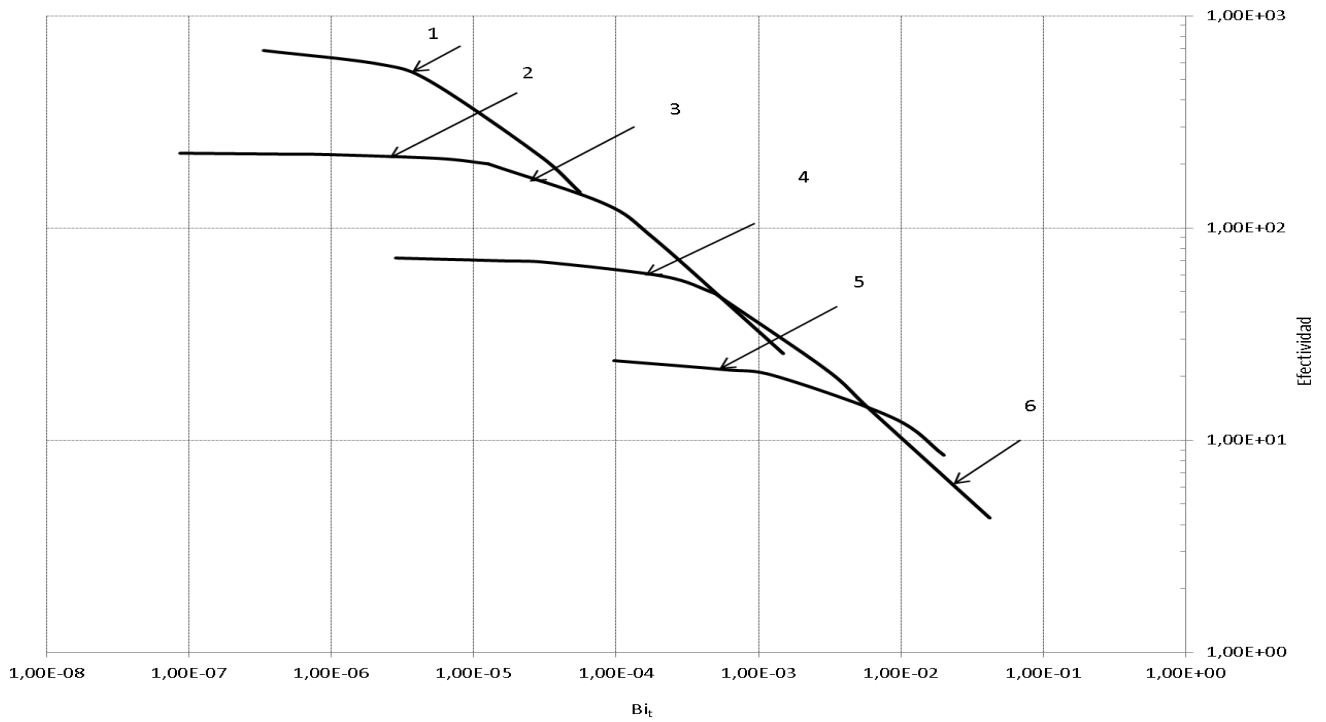


Figura 4.4 Estudio de Biot con respecto a la efectividad para distintos espesores. para  $h/k = 0.1 \text{ m}^{-1}$ , curva 1): espesor de recubrimiento  $1\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 2): e. r.  $2\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 3): e. r.  $5\text{E-}4 \text{ m}$ . Para  $h/k = 1 \text{ m}^{-1}$ , curva 4b): e. r.  $1\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 5): e. r.  $2\text{E-}4 \text{ m}$ , curva 6): e. r.  $5\text{E-}4 \text{ m}$ .

$e_{comp} = 1\text{e-}4\text{m}$

$h/k = 0.1\text{m}^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e.opt(m)	Bit	efectividad	Q max(W)	Q entrada aleta(W)	Lopt(m)	L*(m)	L/L*
1,00E-04	6,88E-04	5,562E-05	147,5	9,73E-01	6,56E-03	1,27E-01	8,29E-02	1,53E+00
5,00E-05	4,58E-04	2,879E-05	220	8,74E-01	3,88E-03	8,96E-02	6,77E-02	1,32E+00
1,00E-05	6,90E-05	4,857E-06	494,7	7,55E-01	1,49E-03	5,92E-02	2,63E-02	2,25E+00
5,00E-06	4,33E-05	2,149E-06	592,5	7,33E-01	1,21E-03	3,49E-02	2,08E-02	1,68E+00
1,00E-06	4,51E-06	3,350E-07	686	7,21E-01	1,03E-03	9,57E-03	6,72E-03	1,43E+00
5,00E-07	2,55E-06	1,550E-07	721,08	7,13E-01	1,02E-03	4,88E-03	5,05E-03	9,66E-01
1,00E-07	4,21E-07	2,900E-08	732,12	7,10E-01	1,00E-03	9,96E-04	2,05E-03	4,85E-01

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qsin aleta (W)
1,00E-04	1,49E-03	9,73E-01	6,72E-02	25,6	1,49E-03	3,86E-02	1,74E+00	2,43E-03
5,00E-05	8,43E-04	8,74E-01	5,93E-02	36,1	8,43E-04	2,90E-02	2,04E+00	1,73E-03
1,00E-05	1,80E-04	7,55E-01	5,55E-02	90,5	1,80E-04	1,34E-02	4,14E+00	1,18E-03
5,00E-06	8,31E-05	7,33E-01	6,02E-02	130,1	8,31E-05	9,12E-03	6,60E+00	1,03E-03
1,00E-06	1,26E-05	7,21E-01	7,92E-02	200,7	1,26E-05	3,55E-03	2,23E+01	8,81E-04
5,00E-07	8,49E-06	7,13E-01	6,95E-02	230,75	8,96E-06	2,91E-03	2,39E+01	9,12E-04
1,00E-07	7,56E-06	7,10E-01	6,35E-02	245,53	5,68E-06	2,75E-03	2,31E+01	9,19E-04
5,00E-08	5,26E-06	9,73E-01	5,92E-02	270,36	4,32E-06	3,86E-02	1,74E+00	8,71E-04

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	Vol_C_opt(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	Efectividad	Lopt(m)	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	4,20E-03	9,62E-01	2,38E-02	4,3	4,20E-02	1,00E-04	3,10E-01	1,35E-01	7,68E-04
5,00E-05	2,36E-03	8,21E-01	2,12E-02	6,1	2,36E-02	5,00E-05	2,87E-01	8,24E-02	5,65E-05
1,00E-05	5,89E-04	7,23E-01	1,70E-02	14,2	5,89E-03	1,00E-05	2,69E-01	2,19E-02	7,22E-05
5,00E-06	2,99E-04	7,23E-01	1,67E-02	21,5	2,99E-03	5,00E-06	2,69E-01	1,11E-02	4,44E-06
1,00E-06	4,94E-05	7,08E-01	2,02E-02	49,2	4,94E-04	1,00E-06	2,66E-01	1,86E-03	5,65E-06
5,00E-07	9,20E-06	7,08E-01	1,89E-02	50,3	3,52E-04	5,00E-07	2,66E-01	1,32E-03	3,12E-06
1,00E-07	7,35E-06	7,01E-01	1,92E-02	63,25	9,77E-05	1,00E-07	2,65E-01	3,69E-04	9,79E-07
5,00E-08	5,67E-06	6,55E-01	1,85E-02	75,22	7,67E-05	5,00E-08	3,10E-01	1,35E-01	6,23E-07

$E_{comp}=1e-3m$

$h/k=0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Bit	efectividad	Q max(W)	Qentrada aleta(W)	Lopt(m)	L*	L/L*
1,00E-04	1,26E-04	1,26E-05	200,7	9,93E-01	0,011	7,94E-01	3,55E-02	2,24E+01
5,00E-05	5,66E-05	5,66E-06	212,6	9,11E-01	0,016	8,83E-01	2,38E-02	3,71E+01
1,00E-05	9,47E-06	9,47E-07	221,8	7,93E-01	0,010	1,06	9,73E-03	1,09E+02
5,00E-06	4,56E-06	4,56E-07	222,9	7,73E-01	0,010	1,1	6,75E-03	1,63E+02
1,00E-06	8,70E-07	8,70E-08	225,1	7,51E-01	0,009	1,15	2,95E-03	3,90E+02
5,00E-07	7,85E-07	7,78E-08	227,32	7,33E-01	0,009	1,25	2,80E-03	4,46E+02
1,00E-07	5,32E-07	5,32E-08	245,54	7,25E-01	0,009	1,32	2,31E-03	5,72E+02

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)e	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	4,94E-04	9,22E-01	2,02E-01	49,2	4,94E-04	9,09E+00	9,09E+00	2,50E-03
5,00E-05	2,18E-04	7,23E-01	2,29E-01	59,1	2,18E-04	1,55E+01	1,55E+01	1,79E-03
1,00E-05	3,38E-05	7,09E-01	2,96E-01	68,7	3,38E-05	5,09E+01	5,09E+01	1,23E-03
5,00E-06	1,60E-05	6,92E-01	3,13E-01	70	1,60E-05	7,83E+01	7,83E+01	1,02E-03
1,00E-06	2,84E-06	7,19E-01	3,52E-01	72,2	2,84E-06	2,09E+02	2,09E+02	8,87E-04
5,00E-07	3,49E-05	6,98E-01	0,003	75,62	2,49E-06	5,08E-01	5,08E-01	9,36E-04
1,00E-07	1,87E-05	6,30E-01	0,001	74,6	1,87E-06	4,32E-03	4,32E-03	9,51E-04
5,00E-08	8,67E-06	6,32E-01	0,001	76,82	1,67E-06	9,09E+00	9,09E+00	9,40E-04

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	2,00E-03	9,79E-01	5,00E-02	8,5	2,00E-02	3,54E+00	3,54E+00	8,02E-04
5,00E-05	8,89E-04	8,67E-01	5,62E-02	12,7	8,89E-03	5,96E+00	5,96E+00	5,22E-05
1,00E-05	1,30E-04	7,32E-01	7,67E-02	20,1	1,30E-03	2,13E+01	2,13E+01	7,53E-05
5,00E-06	5,81E-05	7,11E-01	8,61E-02	21,5	5,81E-04	3,57E+01	3,57E+01	4,32E-06
1,00E-06	9,68E-06	7,10E-01	1,03E-01	23,7	9,68E-05	1,05E+02	1,05E+02	5,03E-06
5,00E-07	8,365E-06	7,06E-01	2,61E-01	25,68	3,98E-05	2,85E+02	2,85E+02	3,65E-06
1,00E-07	7,35E-06	7,00E-01	3,37E-02	27,65	9,77E-06	8,57E-04	8,57E-04	9,33E-07

$E_{comp}=2e-4m$

$h/k=0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	efectividad	Q max(W)	Qb entrada aleta(W)	Lopt(m)	L*(m)	L/L*
1,00E-04	7,35 E-04	265,1	9,79E-01	0,006	1,07E-01	2,96E-02	2,40E+01
5,00E-05	4,11E-04	352,2	8,92E-01	0,003	6,56E-02	2,08E-02	4,76E+00
1,00E-05	6,24E-05	455,22	7,67E-01	0,002	3,67E-02	8,15E-03	3,61E+01
5,00E-06	4,33E-05	463,22	7,43E-01	0,002	2,15E-02	6,66E-03	2,55E+00
1,00E-06	4,02E-06	575,22	7,31E-01	0,002	4,88E-03	6,83E-03	3,22E+00
5,00E-07	3,11E-06	573,52	7,22E-01	0,002	2,46E-03	5,67E-03	2,29E+00
1,00E-07	4,33E-07	674,11	7,12E-01	0,001	4,99E-04	3,90E-03	1,03E+00

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	8,78E-04	9,32E-01	0,712	33,352	8,78E-04	2,40E+01	2,40E+01	2,31E-03
5,00E-05	4,33E-04	8,13E-01	0,099	37,35	4,33E-04	4,76E+00	4,76E+00	1,67E-03
1,00E-05	6,65E-05	7,11E-01	0,294	42,11	6,65E-05	3,61E+01	3,61E+01	1,14E-03
5,00E-06	4,43E-05	7,11E-01	0,017	45,352	4,43E-05	2,55E+00	2,55E+00	9,98E-04
1,00E-06	4,67E-05	7,01E-01	0,022	47,32	4,67E-05	3,22E+00	3,22E+00	8,52E-04
5,00E-07	3,21E-05	7,09E-01	0,013	48,35	3,21E-05	2,29E+00	2,29E+00	9,68E-04
1,00E-07	1,52E-05	7,02E-01	0,004	52,22	1,52E-05	3,90E-03	3,90E-03	9,32E-04

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Qentrada aleta(W)
1,00E-04	8,38E-04	9,21E-01	0,808	3,91	8,38E-04	9,15E-03	8,83E+01	2,33E-03
5,00E-05	4,22E-04	8,23E-01	0,121	4,75	4,22E-04	6,50E-03	1,86E+01	1,73E-03
1,00E-05	6,15E-05	7,01E-01	0,480	6,12	6,15E-05	2,48E-03	1,94E+02	1,14E-03
5,00E-06	4,23E-05	7,15E-01	0,029	7,02	4,23E-05	2,06E-03	1,41E+01	1,02E-03
1,00E-06	8,55E-06	7,21E-01	0,050	8,03	8,55E-06	9,25E-04	5,41E+01	8,98E-04
5,00E-07	3,21E-05	7,07E-01	0,023	10,32	3,21E-05	1,79E-03	1,28E+01	9,11E-04
1,00E-07	1,45E-05	7,01E-01	0,008	11,65	1,45E-05	1,20E-03	6,64E+00	9,18E-04

$E_{comp}=5e-4m$

$h/k=0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_P(m)	efectividad	Q max(W)	Q entrada aleta(W)	Lopt(m)	L*(m)	L/L*
1,00E-04	7,32E-04	362,541	9,83E-01	0,007	8,11E-02	9,48E-01	9,48E-01
5,00E-05	4,32E-04	424,952	9,01E-01	0,005	4,71E-02	7,17E-01	7,17E-01
1,00E-05	6,24E-05	590,072	7,88E-01	0,005	1,75E-02	7,01E-01	7,01E-01
5,00E-06	4,33E-05	653,452	7,63E-01	0,005	9,40E-03	4,52E-01	4,52E-01
1,00E-06	4,02E-06	772,032	7,43E-01	0,005	1,98E-03	3,12E-01	3,12E-01
5,00E-07	3,11E-06	745,087	7,23E-01	0,005	9,94E-04	1,78E-01	1,78E-01
1,00E-07	4,33E-07	752,127	7,22E-01	0,004	2,00E-04	2,08E-03	2,08E-03

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Q entrada aleta (W)
1,00E-04	7,54E-04	9,21E-01	0,683	41,35	7,54E-04	2,49E+01	2,49E+01	2,23E-03
5,00E-05	4,22E-04	8,76E-01	0,085	49,68	4,22E-04	4,14E+00	4,14E+00	1,76E-03
1,00E-05	5,42E-05	7,02E-01	0,119	63,2	5,42E-05	1,62E+01	1,62E+01	1,11E-03
5,00E-06	5,23E-05	7,02E-01	0,009	75,52	5,23E-05	1,24E+00	1,24E+00	9,33E-04
1,00E-06	4,67E-05	7,12E-01	0,010	84,32	4,67E-05	1,46E+00	1,46E+00	8,44E-04
5,00E-07	2,87E-05	7,21E-01	0,006	74,54	2,87E-05	1,12E+00	1,12E+00	9,68E-04
1,00E-07	1,24E-05	7,12E-01	0,002	76,56	1,24E-05	3,52E-03	3,52E-03	9,31E-04
5,00E-08	8,00E-06	6,52E-01	0,001	75,21	8,00E-06	2,49E+01	2,49E+01	8,67E-04

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_P(m)	Qmax (W)	L_opt(m)	Efectividad	biot	L*(m)	L/L*	Q entrada aleta (W)
1,00E-04	7,34E-04	9,31E-01	0,980	9,21	7,34E-04	1,14E+02	1,14E+02	2,36E-03
5,00E-05	4,02E-04	8,86E-01	0,151	15,22	4,02E-04	2,38E+01	2,38E+01	1,86E-03
1,00E-05	5,32E-05	7,12E-01	0,417	16,22	5,32E-05	1,81E+02	1,81E+02	1,16E-03
5,00E-06	5,13E-05	7,08E-01	0,033	17,43	5,13E-05	1,46E+01	1,46E+01	1,01E-03
1,00E-06	8,52E-06	7,09E-01	0,048	18,23	8,52E-06	5,20E+01	5,20E+01	8,83E-04
5,00E-07	2,67E-05	7,14E-01	0,025	21,34	2,67E-05	1,53E+01	1,53E+01	9,20E-04
1,00E-07	1,31E-05	7,07E-01	0,009	22,65	1,31E-05	1,14E-03	1,14E-03	9,26E-04
5,00E-08	8,20E-06	6,82E-01	0,006	25,65	8,20E-06	1,14E+02	1,14E+02	9,06E-04

Tabla 4.1 Valores de geometría óptima y efectividad para aletas compuestas con diferentes espesores de recubrimiento y de la relación  $h/k$

En las tablas anteriores observamos que al disminuir el volumen aumenta la efectividad, así como que al aumentar los valores de  $h/k$  también aumenta el valor de la efectividad y disminuye el valor de Biot.

#### 4.2.1 Optimización de aletas compuestas para $k_{comp}/k = 10/1$

Los datos utilizados son los habituales usados en apartados anteriores además de la conductividad y espesor del recubrimiento, es decir, el volumen de la aleta, el coeficiente de convección, la conductividad del núcleo y del recubrimiento y por último el espesor del recubrimiento. En la Figura 4.5 se representa el valor del espesor óptimo del núcleo de la aleta frente al volumen de la misma, tomando como parámetros el cociente  $h/k$ . El espesor del

recubrimiento es 0.1 mm. Las curvas se rigen por funciones de tipo potencial, como ocurría en los casos anteriores de aletas rectas, pero en este caso se puede apreciar que existe para valores de volúmenes pequeños una misma tendencia de la curva. Para valores mayores de volumen en el caso del espesor de recubrimiento 5E-04m aparece un cambio de tendencia.

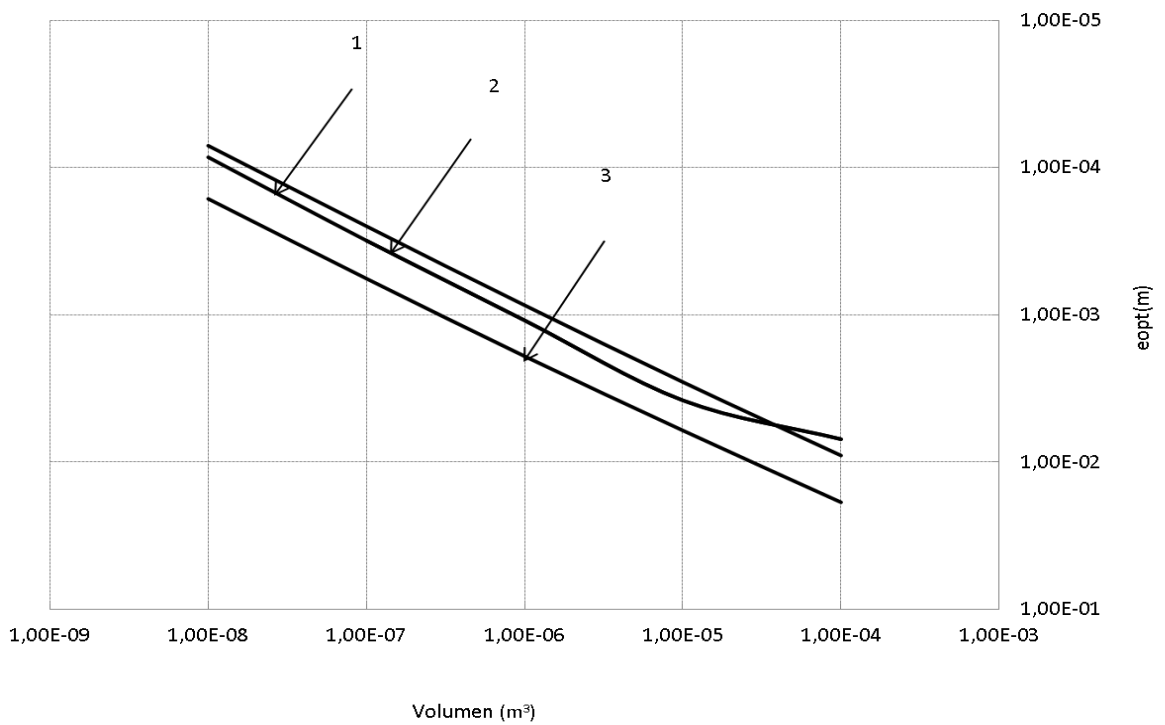


Figura 4.5 Espesor óptimo vs. volumen del núcleo de la aleta para  $k_{comp}/k = 10/1$  y espesor de recubrimiento de 0.1 mm. Curva 1):  $h/k=10 m^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 m^{-1}$ , curva 3):  $h/k=0.1 m^{-1}$

En la figura 4.6 se representa el volumen con respecto al espesor óptimo para recubrimientos de 1mm. Podemos observar que se tratan de gráficas en las cuales hay una misma tendencia.



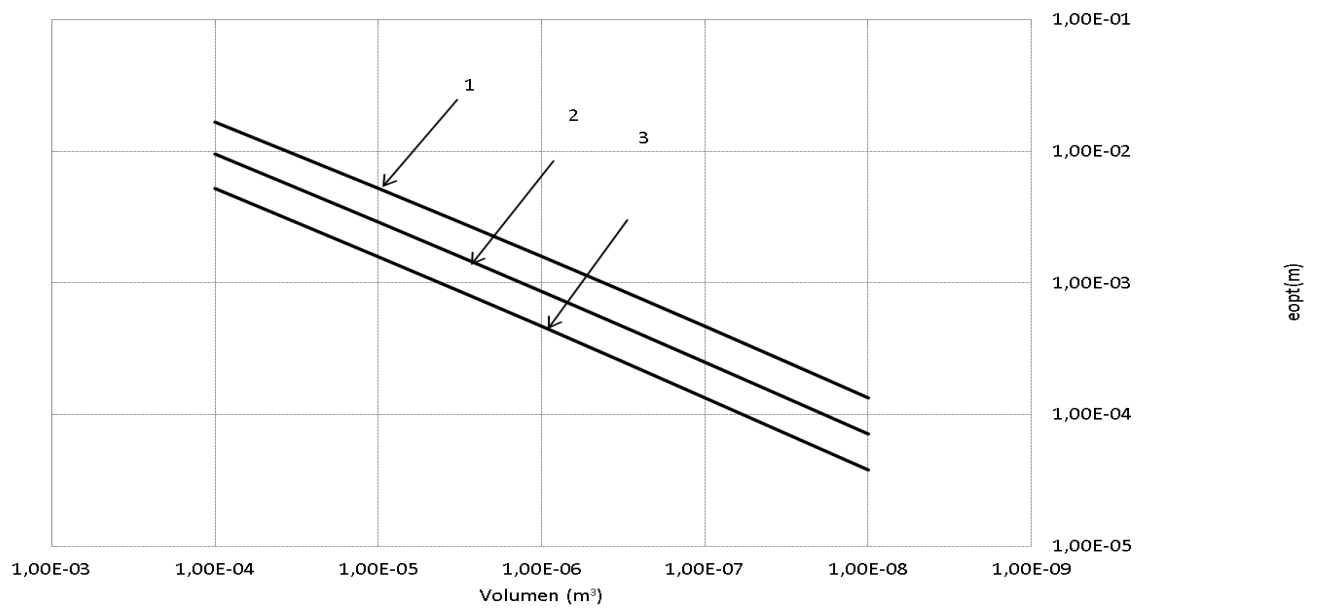


Figura 4.6 Espesor óptimo vs. volumen del núcleo de la aleta para el valor de espesor de  $k_{comp}/k = 10/1$ , recubrimiento de 1 mm. Curva 1):  $h/k=0.1 \text{ m}^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 \text{ m}^{-1}$ , curva 3):  $h/k=10 \text{ m}^{-1}$

En la figura 4.7 se representa el volumen del núcleo con respecto al espesor óptimo para valores de recubrimiento. No se produce un agrupamiento de las curvas como se podían apreciar en casos anteriores. Existe un cambio de pendiente para valores mayores de volumen.

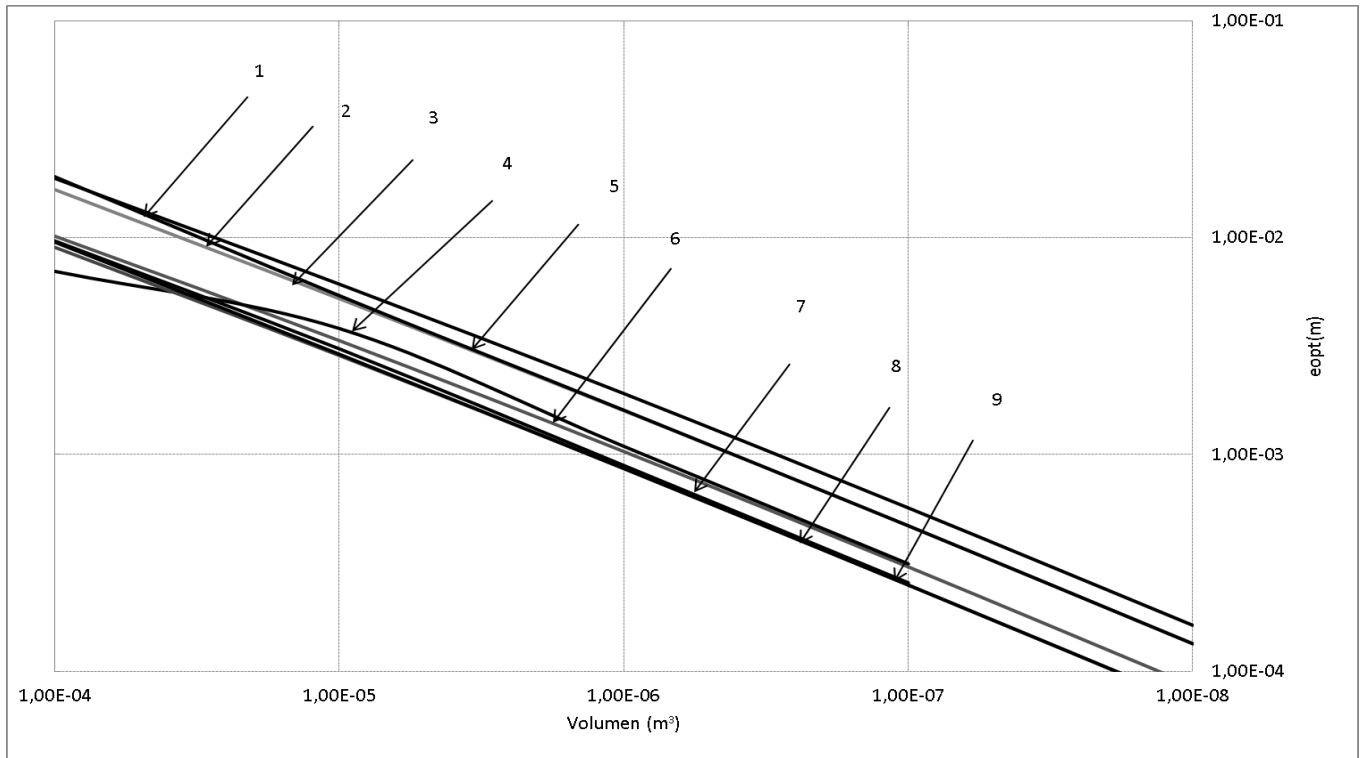


Figura 4.7 Espesor óptimo vs. volumen del núcleo de la aleta para el valor de espesor de  $k_{comp}/k = 10/1$ , recubrimiento de 1 mm. Curva 1):  $h/k=0.1 m^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 m^{-1}$ , curva 3):  $h/k=10 m^{-1}$ , recubrimiento de 0,1 mm. Curva 1):  $h/k=0.1 m^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 m^{-1}$ , curva 3):  $h/k=10 m^{-1}$ , recubrimiento de 0, 2 mm. Curva 1):  $h/k=0.1 m^{-1}$ , curva 2):  $h/k=1 m^{-1}$ , curva 3):  $h/k=10 m^{-1}$

En la figura 4.8 se representa que para los distintos valores de Biotf se obtienen los valores de efectividad, haciendo que las gráficas tengan una pendiente más suave. Las curvas presentan una línea límite y además máximos y mínimos relativos. Se produce un agrupamiento para valores mayores de  $1E-04m^3$

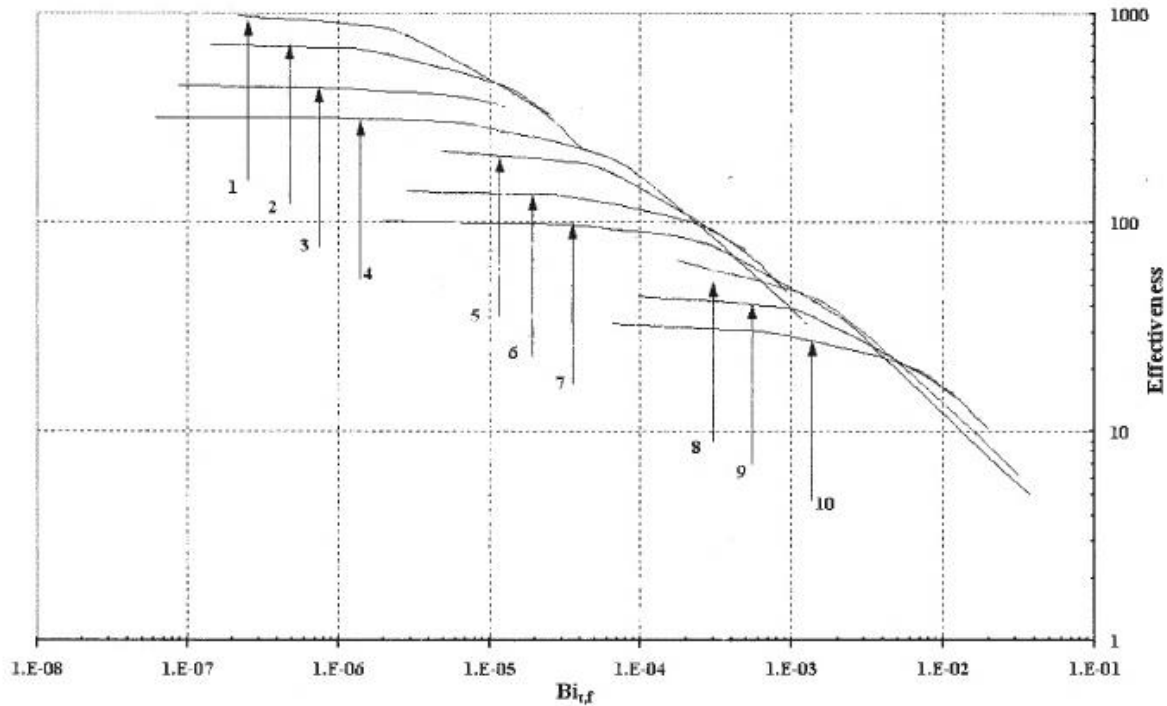


Figura 4.8 Efectividad vs  $Bi_{t,f}$  para  $k_{comp}/k = 10/1$ . curva 1): espesor de recubrimiento  $1E-4$  m, curva 2):  $e_{recub} 2E-4$  m, curva 3):  $e_{recub} 5E-4$  m, curva 4a):  $e_{recub} 10E-4$  m. Para  $h/k = 1 m^{-1}$ , curva 4b):  $e_{recub} 1E-4$  m, curva 5):  $e_{recub} 2E-4$  m, curva 6):  $e_{comp} 5E-4$  m, curva 7a):  $e_{recub} 10E-4$  m. Para  $h/k = 10 m^{-1}$ , curva 7b):  $e_{recub} 1E-4$  m, curva 8):  $e_{recub} 2E-4$  m, curva 9):  $e_{recub} 5E-4$  m, curva 10):  $e_{recub} 10E-4$  m

A continuación, se representan las distintas tablas para los distintos valores estudiados.

---

$e_{comp}=1e-4m$

---

$h/k=0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	$e_{opt\_Ps}(m)$	Qmax Pspice(W)	$L_{opt}(m)$	Efectividad	biotf	$L^* (m)$	$L/L^*$
1,00E-04	1,02E-02	1,00E+00	8,78E-02	562,328	9,53E-03	7,25E-01	1,60E-01
5,00E-05	3,35E-03	9,45E-01	4,65E-02	640,238	2,30E-04	6,32E-01	1,01E-01
1,00E-05	1,03E-03	8,33E-01	1,22E-02	626,329	3,68E-04	2,39E-01	9,49E-02
5,00E-06	3,03E-04	8,15E-01	7,45E-03	737,454	8,58E-04	1,55E-01	9,31E-02
1,00E-06	8,60E-05	8,27E-01	2,59E-03	826,879	2,75E-05	6,35E-02	8,11E-02
5,00E-07	7,35E-05	8,54E-01	1,34E-03	938,457	9,68E-05	3,91E-02	6,85E-02
1,00E-07	6,32E-05	8,63E-01	7,42E-04	957,765	5,86E-06	1,78E-02	8,33E-02

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	1,88E-02	9,90E-01	1,63E-01	352,324	6,31E-02	1,37E-01	1,19E+00
5,00E-05	6,10E-03	8,85E-01	1,15E-01	425,523	4,99E-03	7,81E-02	1,47E+00
1,00E-05	1,91E-03	7,59E-01	6,90E-02	509,298	8,32E-04	4,37E-02	1,58E+00
5,00E-06	5,67E-04	7,59E-01	5,88E-02	609,864	2,86E-05	2,38E-02	2,47E+00
1,00E-06	4,90E-04	7,32E-01	2,48E-02	721,283	4,90E-06	2,21E-02	1,12E+00
5,00E-07	1,35E-04	7,30E-01	1,32E-02	732,383	1,88E-07	1,16E-02	1,14E+00
1,00E-07	8,35E-05	7,23E-01	7,39E-03	738,276	3,78E-07	9,14E-03	8,09E-01

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	6,99E-03	9,54E-01	1,83E-01	453,32	9,90E-02	2,64E-02	6,92E+00
5,00E-05	3,81E-03	8,35E-01	1,92E-01	508,534	1,88E-03	1,95E-02	9,84E+00
1,00E-05	1,09E-03	7,02E-01	7,89E-02	589,527	5,91E-03	1,04E-02	7,56E+00
5,00E-06	3,13E-04	7,20E-01	6,18E-02	675,232	2,09E-04	5,59E-03	1,10E+01
1,00E-06	8,50E-05	7,06E-01	2,44E-02	775,547	6,18E-04	2,92E-03	8,37E+00
5,00E-07	5,65E-05	7,05E-01	1,51E-02	789,383	1,63E-05	2,38E-03	6,35E+00
1,00E-07	3,22E-05	7,02E-01	7,27E-03	801,076	6,98E-05	1,79E-03	4,05E+00

$k_{comp}=1e-3m$

$h/k=0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	9,02E-03	1,00E+00	8,78E-02	62,32	1,53E-03	3,00E-01	2,92E-01
5,00E-05	2,86E-03	9,45E-01	4,65E-02	140,38	3,30E-04	1,69E-01	2,75E-01
1,00E-05	8,61E-04	8,33E-01	1,22E-02	225,979	8,56E-05	9,28E-02	1,31E-01
5,00E-06	2,50E-04	8,15E-01	7,45E-03	337,464	2,21E-06	5,00E-02	1,49E-01
1,00E-06	7,10E-05	8,27E-01	2,59E-03	426,079	3,75E-06	2,66E-02	9,72E-02
5,00E-07	5,32E-05	8,54E-01	1,34E-03	538,357	1,25E-07	2,31E-02	5,81E-02
1,00E-07	2,35E-05	8,63E-01	7,42E-04	557,059	8,32E-07	1,53E-02	4,84E-02

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	1,67E-02	1,00E+00	8,26E-02	82,324	8,39E-02	1,29E-01	6,39E-01
5,00E-05	5,23E-03	9,45E-01	4,39E-02	140,513	3,03E-03	7,23E-02	6,07E-01
1,00E-05	1,59E-03	8,33E-01	1,21E-02	175,543	4,72E-03	3,99E-02	3,03E-01
5,00E-06	4,69E-04	8,15E-01	7,42E-03	237,457	1,89E-04	2,17E-02	3,43E-01
1,00E-06	1,34E-04	8,27E-01	2,59E-03	356,069	3,37E-04	1,16E-02	2,24E-01
5,00E-07	5,55E-05	8,54E-01	1,34E-03	438,324	1,28E-05	7,45E-03	1,80E-01
1,00E-07	3,52E-05	8,63E-01	7,42E-04	557,01	2,43E-05	5,93E-03	1,25E-01

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	9,66E-03	9,87E-01	1,04E-01	51,32	2,94E-02	3,11E-02	3,35E+00
5,00E-05	3,07E-03	8,91E-01	6,08E-02	61,53	1,05E-03	1,75E-02	3,47E+00
1,00E-05	8,90E-04	7,12E-01	1,79E-02	67,35	3,42E-03	9,43E-03	1,90E+00
5,00E-06	2,56E-04	7,27E-01	7,74E-03	71,45	1,25E-03	5,06E-03	1,53E+00
1,00E-06	1,98E-04	7,11E-01	2,83E-03	78,47	3,44E-04	4,45E-03	6,36E-01
5,00E-07	9,85E-05	7,09E-01	1,36E-03	88,85	9,21E-04	3,14E-03	4,33E-01
1,00E-07	7,54E-05	7,08E-01	7,68E-04	98,76	9,96E-04	2,75E-03	2,80E-01

$e_{comp}=2e-4m$

$h/k=0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	5,22E-03	9,99E-01	1,68E-01	59,32	5,08E-02	2,28E-01	7,35E-01
5,00E-05	1,58E-03	8,85E-01	1,10E-01	65,53	3,20E-03	1,26E-01	8,75E-01
1,00E-05	4,69E-04	7,76E-01	5,19E-02	67,29	4,39E-03	6,85E-02	7,58E-01
5,00E-06	1,34E-04	7,66E-01	3,41E-02	71,46	2,17E-04	3,66E-02	9,32E-01
1,00E-06	3,80E-05	7,42E-01	1,27E-02	72,08	3,89E-04	1,95E-02	6,51E-01
5,00E-07	1,22E-05	7,34E-01	6,67E-03	73,38	1,39E-05	1,10E-02	6,04E-01
1,00E-07	8,65E-06	7,35E-01	3,71E-03	75,01	2,65E-05	9,30E-03	3,99E-01

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	9,53E-03	1,00E+00	1,64E-01	39,32	5,24E-02	9,76E-02	1,68E+00
5,00E-05	2,90E-03	9,10E-01	1,06E-01	35,53	3,39E-03	5,39E-02	1,97E+00
1,00E-05	8,62E-04	7,99E-01	4,71E-02	40,97	6,87E-03	2,94E-02	1,60E+00
5,00E-06	2,50E-04	7,99E-01	3,38E-02	41,46	2,39E-04	1,58E-02	2,14E+00
1,00E-06	7,13E-05	7,62E-01	1,27E-02	51,08	4,10E-04	8,44E-03	1,50E+00
5,00E-07	5,22E-05	7,57E-01	6,67E-03	57,38	1,53E-05	7,22E-03	9,23E-01
1,00E-07	1,32E-05	7,75E-01	3,70E-03	67,07	3,16E-05	3,63E-03	1,02E+00

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	1,91E-02	9,68E-01	1,78E-01	27,32	4,10E-03	4,37E-02	4,07E+00
5,00E-05	5,40E-03	8,54E-01	1,62E-01	31,53	1,53E-04	2,32E-02	6,97E+00
1,00E-05	1,60E-03	7,07E-01	5,42E-02	42,52	4,99E-04	1,26E-02	4,28E+00
5,00E-06	4,69E-04	7,21E-01	3,48E-02	57,43	1,74E-05	6,85E-03	5,08E+00
1,00E-06	1,34E-04	7,07E-01	1,31E-02	67,04	5,16E-05	3,66E-03	3,58E+00
5,00E-07	8,32E-05	7,07E-01	8,60E-03	69,38	1,38E-06	2,88E-03	2,98E+00
1,00E-07	5,32E-05	7,03E-01	3,70E-03	70,01	5,71E-06	2,31E-03	1,60E+00

$k_{comp}=5e-4m$

$h/k=0.1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	4,24E-02	1,00E+00	1,29E-01	16,32	4,24E-01	1,98E-01	1,98E-01
5,00E-05	2,69E-02	9,14E-01	7,45E-02	23,51	2,69E-02	1,44E-01	1,44E-01
1,00E-05	3,67E-03	7,99E-01	2,36E-02	25,59	3,67E-02	1,23E-01	1,23E-01
5,00E-06	1,89E-03	7,85E-01	1,46E-02	27,86	1,89E-03	1,06E-01	1,06E-01
1,00E-06	3,29E-04	7,67E-01	5,16E-03	36,07	3,29E-03	9,00E-02	9,00E-02
5,00E-07	1,15E-04	7,54E-01	2,68E-03	38,32	1,15E-03	7,90E-02	7,90E-02
1,00E-07	2,22E-05	7,73E-01	1,48E-03	47,05	2,22E-04	1,49E-02	1,49E-02

$h/k=1m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	Biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	5,26E-02	1,00E+00	1,16E-01	8,38	5,26E-01	2,29E-01	5,06E-01
5,00E-05	4,00E-02	9,14E-01	6,36E-02	9,23	4,00E-02	2,00E-01	3,18E-01
1,00E-05	5,72E-03	7,99E-01	2,27E-02	11,97	5,72E-02	7,56E-02	3,00E-01
5,00E-06	2,39E-03	7,85E-01	1,44E-02	12,46	2,39E-03	4,89E-02	2,95E-01
1,00E-06	4,03E-04	7,67E-01	5,15E-03	13,87	4,03E-03	2,01E-02	2,57E-01
5,00E-07	1,53E-04	7,54E-01	2,68E-03	15,35	1,53E-04	1,24E-02	2,17E-01
1,00E-07	3,16E-05	7,73E-01	1,48E-03	18,65	3,16E-04	5,62E-03	2,63E-01

$h/k=10m^{-1}$

Vol(m <sup>3</sup> )	e_opt_Ps(m)	Qmax Pspice(W)	L_opt(m)	Efectividad	biotf	L* (m)	L/L*
1,00E-04	3,52E-02	9,76E-01	1,47E-01	6,32	3,52E-02	5,93E-02	2,48E+00
5,00E-05	1,28E-02	8,84E-01	9,43E-02	7,53	1,28E-02	3,58E-02	2,64E+00
1,00E-05	4,16E-03	7,10E-01	2,87E-02	8,52	4,16E-03	2,04E-02	1,41E+00
5,00E-06	1,48E-03	7,26E-01	1,50E-02	9,23	1,48E-03	1,22E-02	1,23E+00
1,00E-06	4,36E-04	7,09E-01	5,43E-03	12,03	4,36E-03	6,60E-03	8,22E-01
5,00E-07	1,16E-04	7,08E-01	3,66E-03	15,32	1,16E-04	3,41E-03	1,07E+00
1,00E-07	4,74E-05	7,05E-01	1,50E-03	21,06	4,74E-04	2,18E-03	6,89E-01

Tabla 4.2 Valores de geometría óptima y efectividad para aletas compuestas con diferentes espesores de recubrimiento y de la relación  $h/k$

En la tabla 4.2 podemos observar que conforme aumenta el volumen disminuye el parámetro de Biot y aumenta la efectividad. Para valores mayores de  $h/k$  manteniendo constante el valor del espesor de recubrimiento observamos que disminuye la efectividad. También podemos observar que cuanto mayor es el espesor de recubrimiento manteniendo constante el valor de  $h/k$  menor es la efectividad

## Capítulo 5

### Conclusiones de aletas rectas rectangulares compuestas bajo condiciones de convección

Se ha aplicado la admitancia inversa relativa (ATIR) a la optimización de aletas compuestas para diferentes valores de espesor de recubrimiento y relación de conductividades que cubren un amplio rango de casos prácticos. La conductividad del núcleo se ha tomado mayor que la del recubrimiento.

Se ha trabajado con cuatro relaciones de conductividad y cuatro espesores diferentes de recubrimiento,  $e_{\text{recub}}=1\text{E-}4, 2\text{E-}4, 5\text{E-}4$  y  $1\text{E-}3$  m. Se ha considerado la transferencia de calor en el extremo estando éste recubierto por el mismo material que la superficie exterior, hipótesis generalmente simplificada por otros autores.

#### 5.1. Conclusiones para aletas bajo condiciones $K_{\text{comp}}/k < 1$

Se han obtenido como resultados para valores de  $k_{\text{comp}}/k = 1/100$

- Se han obtenido curvas de carácter lineal para recubrimientos de 0.1 mm que presentan una misma pendiente, pero en cambio en la curva de  $h/k = 0.1 \text{ m}^{-1}$  y volúmenes más pequeños de  $1\text{E-}7 \text{ m}^3$  se aprecia un cambio de tendencia produciéndose un aumento de ésta.
- Para espesores de recubrimiento mayores a 1mm se observa el mismo cambio de tendencia pero no aparece en valores grandes de volumen de  $h/k = 10\text{m}^{-1}$



- Las gráficas se agrupan para valores de  $h/k=0.1$  y  $1m^{-1}$  cuando aumentamos el volumen, pero esto no se produce para las curvas de  $h/k=10 m^{-1}$  que no se agrupan formando una misma línea.
- Las curvas tienen máximos y mínimos conforme aumenta el Biot, por lo que un valor bajo de Biot no significa que haya una mayor efectividad.
- Para valores grandes de Biot las curvas se agrupan dando la apariencia de que hay una línea límite para la efectividad de estas curvas, por lo que no se sobrepasa este valor.
- Observamos que al disminuir el volumen aumenta la efectividad, así como que al aumentar los valores de  $h/k$  también aumenta el valor de la efectividad y disminuye el valor de Biot.

Se han obtenido como conclusiones para los valores de  $k_{comp}/k = 1/5$

- El cambio en la tendencia de la pendiente se aprecia incluso para volúmenes altos y para cualquiera de los parámetros  $h/k$  estudiados
- Se puede observar un agrupamiento de las curvas para todos los valores de  $h/k$ , a diferencia del caso anterior, en el que este agrupamiento no se producía para relaciones grandes de  $h/k$ ,  $10 m^{-1}$ .
- Las curvas presentan como en el caso anterior una línea límite que no es sobrepasada por ninguna de las curvas. Presentan máximos y mínimos relativos. Las curvas presentan una pendiente más constante que en el caso anterior.
- Podemos observar que conforme aumenta el volumen disminuye el parámetro de Biot y aumenta la efectividad. Para valores mayores de  $h/k$  manteniendo constante el valor del espesor de recubrimiento observamos que disminuye la efectividad. También podemos observar que cuanto mayor es el espesor de recubrimiento manteniendo constante el valor de  $h/k$  menor es la efectividad.

## 2. Conclusiones para aletas bajo condiciones $K_{comp}/k > 1$ .

Se han obtenido como conclusiones para valores de  $k_{comp}/k = 5/1$

- Los valores del espesor óptimo aumentan conforme aumentan los valores del volumen. No se produce ningún cambio de pendiente permaneciendo ésta constante.
- Cuando aumentamos el Biot disminuye la efectividad. Las gráficas tienden a unirse en una línea límite sin llegar a sobrepasarla.
- Las gráficas presentan una tendencia potencial, en la que se puede apreciar que en el caso de  $h/k=10m^{-1}$  se produce un cambio de pendiente para valores mayores de volumen.

- Podemos determinar que a menor volumen existe un aumento del espesor. No existe agrupamiento de las gráficas como en otros casos. En las tablas anteriores observamos que al disminuir el volumen aumenta la efectividad, así como que al aumentar los valores de  $h/k$  también aumenta el valor de la efectividad y disminuye el valor de Biot.s anteriores.

Se han obtenido como conclusiones para  $k_{comp}/k = 10/1$

- Se han obtenido curvas de carácter potencial para recubrimientos de 0.1 mm que presentan una misma pendiente no produciéndose un cambio de tendencia.
- No se produce un agrupamiento de las curvas como se podían apreciar en casos anteriores
- Se obtienen los valores de efectividad, haciendo que las gráficas tengan una pendiente más suave
- .Las curvas presentan una línea límite y además máximos y mínimos relativos.

## Apéndice 1. Estructura del circuito de PSpice

La elaboración del circuito eléctrico equivalente en un editor gráfico mediante símbolos sólo tiene sentido cuando los circuitos son sencillos y tienen pocos componentes, o cuando se quiere hacer mucho énfasis en el diseño del mismo. La discretización de las aletas provoca la existencia de una gran cantidad de subcircuitos interconectados que no tendría sentido componer gráficamente. Es por esto por lo que se recurre a la creación de un archivo *.cir*, que no es más que la representación por escrito del circuito, que PSpice será capaz de interpretar correctamente.

Para poner un ejemplo, se ha extraído el circuito para sistema aleta-pared siendo la aleta recta rectangular cuando se considera el extremo adiabático. Para el caso convectivo, la estructura del circuito sería la misma, excepto  $h_{ce}$  que sería sustituido por  $h_{ce} = \{h_{cf}\}$ , ya que en este caso conduce el calor en el extremo de la aleta, y se supone que con el mismo coeficiente de convección que en el resto del sistema aleta-pared.

Se transcribe a continuación la porción del mismo que describe los parámetros utilizados, así como el tipo de análisis que se va a realizar. El resto de archivo contiene la definición de los subcircuitos y las interconexiones de los mismos, y se ha prescindido de incluirlo por ser demasiado extenso y por haber sido descrito gráficamente en el *capítulo 4*.

```
* GEOMETRIA

** PARED

.PARAM Ncpx = 20
.PARAM Ncpy = 30

** ENTRONQUE ALETA-PARED

.PARAM Ncapx = 20
.PARAM Ncapy = 20

** ALETA DESNUDA

.PARAM Ncax = 100
.PARAM Ncay = 20

* PARÁMETROS FUNDAMENTALES
.PARAM Va = {1E-6}
.PARAM Vint={w*e}
.PARAM Vp={w*(b-e)}
.PARAM VolT={Va+Vint+Vp}
.PARAM e = {0.001}
.PARAM b = 0.01
.PARAM L = {(Va)/e}
.PARAM w = 0.001
.PARAM hh = 1.00E+10
.PARAM hcn = {hcf}
.PARAM hce = 1E-15
.PARAM hcf = 500
.PARAM k = 50
.PARAM Lc={e*k/hcf^(1/2)}
.PARAM z = 1
```

```

*****TRANSITORIO *****
*.STEP PARAM L 0.001 0.01 0.0005
*.TRAN 0 2000 1990
*****

*****ESTACIONARIO*****

.DC PARAM e 1E-4 0.0099 1E-4

*****

.OPTIONS NUMDGT 8
.OPTIONS RELTOL 0.0000001

[...]
```

Este circuito se utilizó para la obtención del parámetro  $ATTR$ , dentro de la parte de optimización. Para ello, se realizó un análisis a lo largo de la aleta considerando varias interdistancias y volúmenes fijos. Al fijar el volumen, la longitud de la aleta aparece referida a éste.

Como se puede ver, hay un uso extensivo de la sentencia *PARAM*, la cual permite parametrizar el circuito problema, haciendo que el cambio de condiciones de contorno y condiciones intrínsecas al propio circuito sea mucho más sencillo para el usuario. Las propias variables parametrizadas pueden incluso referirse a otras variables, posibilitando esto la inclusión de formulas que relacionen nuestras variables entre sí.

En principio los parámetros con los que más se va a tratar en este proyecto serán la conductividad térmica del material,  $k$ , el coeficiente de convección  $h_{ef}$  y la altura de la pared o interdistancia entre aletas  $b$ .

Tras definir todos los parámetros que interesan, y teniendo en cuenta que posteriormente se definen los circuitos que integran el sistema, así como sus componentes, se puede observar que existía la posibilidad de un análisis transitorio, que ha sido comentado con asteriscos para que *PSpice* no lo realice, al tratarse de un problema estacionario. Sí se realiza, en cambio, un análisis estacionario, variando en este caso la variable  $z$ , que representa la longitud adimensionalizada de la aleta.

Estas últimas sentencias se especifican las condiciones de cierre del circuito: las últimas líneas de los circuitos. En las primeras líneas aparece la definición de las fuentes de tensión que alimentan tanto la base de la aleta como la parte superficial y el extremo de la misma, dependientes, como se puede ver, de las temperaturas que sean impuestas. En las últimas líneas se especifica la tolerancia y precisión que se va a requerir por parte de *PSpice*, así como la variable que interesa obtener como salida en un archivo de texto (aunque también se calculan las demás variables que intervienen el circuito, quedando grabadas en otro archivo de texto, de extensión *.dat*).

Vdcp1	nVp1	0	{Tcdc0}
Vdcamb01	nVpamb1	0	{Tdcamb0}
Vdcambs0	nVaambs1	0	{Tdcambs0}
Vdcambfr0	nVambfr1	0	{Tdcambfr0}

## Nomenclatura

A	Área	$m^2$
AUG	Factor de aumento	[-]
$Bi_r$	Número de Biot transversal en radiación, $(\zeta\sigma T_b^3 S/Pk)$	[-]
$Bi_t$	Número de Biot transversal, $(hS/kP)$	[-]
C	Condensador o capacidad	F
$c_e$	Calor específico	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$
$c_o$	Constante arbitraria	[-]
e	Semiespesor de la aleta recta	m
$f_1, f_2, f_3, \dots$	Funciones matemáticas arbitrarias	
g	Densidad de potencia	$W/m^3$
H	Anchura de la aleta	m
h	Coefficiente de transferencia de calor por convección	$Wm^{-2}\ K^{-1}$
k	Conductividad térmica	$Wm^{-1}\ K^{-1}$
L	Longitud de la aleta o espín	m
$l^*$	Longitud característica, $(hP/kS)^{-1/2}$	m
$l_{g}^*$	Longitud característica generalizada	m
$l_{g,Q}^*$	Longitud característica generalizada para el flujo de calor	m
$l_{g,T}^*$	Longitud característica generalizada para la temperatura	m
m	Parámetro de la aleta, $(hP/kS)^{1/2}$	$m^{-1}$
<i>m</i>	Masa	kg
$N_y$	Número de celdas en la dirección del eje y	[-]
$N_z$	Número de celdas en la dirección del eje z	[-]
P	Perímetro	m
q	Flujo de calor	$W/m^2$
Q	Calor o potencia calorífica	W o $W/m$
R	Radio	m
$R^*$	Resistencia térmica	
$R_E$	Resistencia eléctrica	$\Omega$
S	Área o sección transversal	$m^2$
T	Temperatura	$^{\circ}C, K$
$T_{ref}$	Temperatura de referencia	$^{\circ}C, K$
$T_{ref,rad}$	Temperatura de referencia en radiación	$^{\circ}C, K$
$T_{ref,conv}$	Temperatura de referencia en convección	$^{\circ}C, K$

$T_{\infty}$	Temperatura ambiente	$^{\circ}\text{C}, \text{K}$
$t$	Tiempo	s
$x, y, z$	Coordenadas relacionadas con las direcciones espaciales	[--]
$Y_i$	Admitancia de entrada	W/K
$y_{\text{ropt}}$	Admitancia relativa en el optimo	W/Km <sup>3</sup>
$y_{\text{rel}}$	Admitancia térmica inversa relativa	[--]
$\vec{r}$	Vector de posición	m
$V$	Volumen	m <sup>3</sup>

### Letras griegas

$\alpha$	Difusividad térmica	m <sup>2</sup> /s
$\varepsilon$	Efectividad	[--]
$\Phi$	Temperatura adimensional, $(T-T_{\infty}) / (T_b-T_{\infty})$ ,	[--]
$\eta$	Eficiencia de aleta o espín	[--]
$\varphi$	Ángulo acimutal	[--]
$\lambda$	Coefficiente de mejora	[--]
$\theta$	Temperatura de exceso, $T-T_{\infty}$	$^{\circ}\text{C}$ ó K
$\rho$	Densidad	kg m <sup>-3</sup>
$\tau$	Error absoluto	[--]
$\xi$	Coordenada adimensional, $z/L$	[--]
$\zeta$	Emisividad	[--]

### Subíndices

0	Relacionado con un valor concreto de un parámetro o con una condición inicial
a	Aleta
ap	Aleta-pared o relativo al conjunto aleta-pared
b	Relativo a la base de aleta o espín
der	Derecha
e	Extremo
ext	Referido al fluido exterior, lado frío donde se situará la aleta
i, j, k	Número del elemento de volumen
i- $\Delta$ , i+ $\Delta$	Denotan la localización horizontal de una celda
int	Referido al fluido interior, lado caliente
izq	Izquierda
J	Relativo al flujo
j- $\Delta$ , j+ $\Delta$	Denotan la localización vertical de una celda
o	Referido a un valor concreto de un parámetro o una variable
p	Pared
p	Relativo a la pared
recub	Recubrimiento, referente a las variables del recubrimiento en aletas compuestas
ref	Relacionado con el ambiente que rodea a la aleta
ref, conv	Relativo a la temperatura de referencia en ambiente convectivo
ref, rad	Relativo a la temperatura de referencia en radiación

---

X	Relativo a la fuerza
x, y, z	Relacionado con los ejes cartesianos
Tp	Relativo a la resistencia térmica total de la pared
Tap	Relativo a la resistencia térmica total del conjunto aleta -pared

- 
- [1] Krauss, A. D., Aziz, A. and Welty, J., 2001, *Extended surface heat transfer*. John Wiley and Sons, New York
- [2] Razelos, P., *The Optimization of Longitudinal Convective Fins With Internal Heat Generation*, *Nuclear Engineering and Design*, vol. 54, pp. 289–299, 1979.
- [3] Razelos, P., and Krikkis, R. N., *On the Optimum Thermal Design of Individual Longitudinal Fins With Rectangular Profile*, *International Communications Heat and Mass Transfer*, vol. 30, no. 3, pp. 349–358, 2003.
- [4] Chung, B. T. F., and Iyer, R., *Optimum Design of Longitudinal Rectangular Fins and Cylindrical Spines With Variable Heat Transfer Coefficient*, *Heat Transfer Engineering*, vol. 14, no. 1, pp. 31–42, 1993.
- [5] Kang, H. S., Chung, B. T. F., and Wang, Y., *Analytical Solution for Optimization of Convective Longitudinal Two Dimensional Trapezoidal Fins*, *Proc. 36th AIAA Thermophysic Conf.*, Orlando, FL, June 23–26, 2003.
- [6] Yeh, R. H., *An Analytical Study of the Optimum Dimensions of Rectangular Fins And Cylindrical Pin Fins*, *International Journal of Heat And Mass Transfer*, vol. 40, no. 15, pp. 3607–3615, 1997.
- [7] Kalman, H., *About Fin Performance and Optimization in: Recent Advances in Analysis of Heat Transfer for Fin Type Surfaces*, eds. B. Sundén and P. J. Heggs, Wit Press, Southampton, UK, pp. 97–143, 2000.
- [8] González-Fernández C. F., 2002, *Heat Transfer and the Network Simulation Method*. Horno J. Ed. Research Signpost, Kerala
- [9] Alhama, F., 1999, *Estudio de respuestas térmicas transitorias en procesos no lineales de transmisión de calor mediante el método de simulación por redes*. Ph. D. University of Murcia (Spain)
- [10] Alhama, F and Campo, A., 2002, *Electric network representative of the unsteady cooling of a lumped body by nonlinear heat transfer modes*. *Heat Transfer*, Oct. (124) 988-992
- [11] Alarcón, M., Alhama, F. and González-Fernández C. F., 2003, *A revision of the classical performance extended surfaces assessment: Proposed new Coefficients*. *J Heat transfer*, 125, 1187-1191
- [12] Luna–Abad, J.P., and Alhama, F., 2004. *Caracterización de una aleta simple sometida a radiación y convección*. *Proceedings of XVI Congreso Nacional De Ingeniería Mecánica*. León.
- [13] Luna–Abad, J.P., and Alhama, F., 2005. *A generalization of the Characteristic length provided by discriminated dimensional analysis for cylindrical spines*. *IASME Transactions*, Issue 8, Vol. 2.
- [14] Luna–Abad, J. P. and Alhama, F., 2008, *A direct optimization of 1-D and 2-D cylindrical spines using the relative inverse admittance*. *Proceedings of 5<sup>th</sup> European thermal-sciences conference*, Eindhoven, Netherlands.
- [15] Luna–Abad, J. P., Alhama, F., and Campo, A., 2009 *Optimization of longitudinal rectangular fins through the concept of relative inverse admittance*, *Heat Transfer Engineering*, vol. 31, issue 5 January 2010 , pp. 395 – 401.



- [16] Luna–Abad, J. P., thesis doctoral, 2010. Caracterización, optimización y diseño de algunos tipos de aletas a través del concepto de Admitancia Térmica Inversa Relativa
- [17] PSPICE 6.0, 1994, MicroSim Corp., 20 Fairbanks Ave, Irvine, CA 92718.
- [18] Barker, J. J. (1958). Efficiency of Composite Fins. *Nuclear Science and Engineering*, vol. 3, pp. 300-312.
- [19] Chen, W. V. y Fluker, B. J. (1974). Heat Transfer in Composite Fins at Steady State. *Proceedings 5th International Heat Transfer Conference*, vol 1, pp. 241-245.
- [20] Epstein, N. y Sandhu K. (1978). Effect of Uniform Fouling Deposit in Total Efficiency of Extended Surfaces. *Proceedings 6th International Heat Transfer Conference*, vol. 4, pp. 397-402. Toronto, Canada.
- [21] Barrow, H., Mistry, J. y Clayton, D. (1986). Numerical and Exact Mathematical Analyses of Two Dimensional Rectangular Composite Fins. *Proceedings 8th International Heat Transfer Conference*, San Francisco, vol. 2, pp. 367-372.
- [22] Lalot, S., Tournier, C. y Jensen, M. (1999). Fin Efficiency of Annular Fins Made of Two Materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 42, pp. 3461-3467.
- [23] Xia, Y., and Jacobi, A. M., (2004). An exact solution to steady heat conduction in a two-dimensional slab on a one-dimensional fin: application to frosted heat exchangers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 47, pp. 3317 – 3326.
- [24] Tu, P., Inaba, H., Horibe A., Li, Z., And Haruki, N. (2006). Fin efficiency of an annular fin composed of a substrate metallic fin and a coating layer. *Journal Heat Transfer*, ASME, vol. 128, pp: 851 – 854.
- [25] Gorobets, V. (2006). Thermal Efficiency and the Optimum Sizes of Finned Surfaces with Coating. *Proc. 13th International Heat Transfer Conf., HEX-03*, Sydney, Australia.
- [26] Gorobets, V. (2008). Influence of Coating on Thermal Characteristics and Optimum Sizes of Fins. *Journal of Enhanced Heat Transfer* vol. 15, pp. 65-80.
- [27] Cortés, C., Díez, L. I. and Campo, A. (2008). Efficiency of composite fins of variable thickness. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 51, pp. 2153 – 2166.
- [28] Cortés, C., Díez, L. I. (2010). New analytical solution for heat transfer in insulated wires. *International Journal of Thermal Sciences*, aun está por definir el volumen y las paginas, aunque está ya on-line