



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Modelización numérica y mejora del sistema de medida en una instalación experimental docente de golpe de ariete

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES



Universidad
Politécnica
de Cartagena

Autor: Martínez Fernández, José Luis
Director: Viedma Robles, Antonio

Cartagena, 05/09/2016

Índice

Resumen	5
1 Introducción histórica y problemática de los transitorios hidráulicos.....	6
2 Fundamentos físicos y modelado matemático.....	9
2.1 Descripción del fenómeno	9
2.2 Orden de magnitud de las sobrepresiones.....	12
2.3 Parámetros característicos del transitorio	12
2.3.1 Influencia del tiempo de cierre	13
2.3.2 Velocidad de propagación	15
2.4 Ecuaciones que gobiernan el golpe de ariete	15
2.5 Condiciones iniciales y de contorno	16
2.5.1 Condiciones iniciales	17
2.5.2 Condiciones de contorno	18
3 Resolución numérica del golpe de ariete.....	19
3.1 Modelado con viscosidad despreciable.....	19
3.1.1 Simplificaciones del modelo.....	19
3.1.2 Solución de las ecuaciones del flujo transitorio	19
3.1.3 Rectas características	20
3.1.4 Solución numérica	21
3.1.5 Caso particular. Esquema simple de análisis.....	24
3.1.6 Resultados.....	24
3.2 Modelado con fricción no despreciable ($f \neq 0$).....	26
3.2.1 Simplificación del modelo.....	27
3.2.2 Coeficiente de fricción (f).....	27
3.2.3 Formulación del modelo y solución numérica.....	29
3.2.4 Resultados.....	30
3.3 Modelado con fricción transitoria	33
3.3.1 Antecedentes.....	34
3.3.2 Simplificación del modelo.....	36
3.3.3 Modelo numérico 1, basado en el término de fricción de Brunone.....	36
3.3.4 Resultados del modelo 1	37

3.3.5	Modelo numérico 2.....	39
3.3.6	Resultados del modelo 2.....	40
3.4	Ecuación de cierre de la válvula	41
3.5	Condición de contorno en el extremo de la tubería. Cierre no instantáneo	42
3.5.1	Resultados.....	43
3.6	Esquemas hidráulicos con mayor complejidad.....	51
3.6.1	Pérdidas localizadas.....	51
3.6.2	Tuberías de distinto tipo	53
3.6.3	Modelo global.....	54
4	Descripción de la instalación experimental docente. Pérdidas asociadas	55
4.1	Elementos que forman la instalación y pérdidas de carga asociadas.....	57
4.1.1	Codos	57
4.1.2	Tes.....	58
4.1.3	Ensanchamiento/estrechamiento brusco.....	59
4.1.4	Electroválvula (cierre de compuerta).....	60
4.1.5	Tuberías	62
5	Régimen permanente de la instalación experimental.....	63
5.1.1	Caudalímetros candidatos.....	63
5.1.2	Determinación teórica del caudal	67
5.1.3	Pérdidas agregadas por el caudalímetro	67
5.1.4	Análisis de los resultados, comparación teórico-experimental.....	70
5.1.5	Ajuste del modelo teórico.....	72
5.1.6	Distribución de presiones	73
6	Resultados experimentales del golpe de ariete en la instalación experimental.....	75
7	Resolución numérica del golpe de ariete de la instalación experimental.....	85
7.1	Velocidad de propagación en la instalación. Discretización.....	85
7.2	Modelado del golpe de ariete en la instalación hidráulica docente.....	85
7.2.1	Modelo numérico. Apreciaciones.....	85
7.2.2	Resultados del modelo numérico. Cierre instantáneo.....	87
7.2.3	Exponente y tiempo de cierre de la electroválvula de la instalación docente	95
8	Comparación entre el modelo numérico y los resultados experimentales	97

9	Conclusiones	99
	Bibliografía.....	100
	Anexos	101
	I. Programa de resolución del modelo numérico de la instalación docente	101
	II. Programa de Arduino UNO	105
	III. Esquema y procedimiento de toma de datos en la instalación.....	106

Resumen

En el laboratorio del departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos se dispone de una instalación experimental de golpe de ariete en la que es conveniente revisar y mejorar el sistema de medida.

Paralelamente se desarrollará un modelo numérico mediante el método de las características que reproduzca en mayor medida los fenómenos transitorios producidos.

Ambos aspectos del trabajo deben converger y permitir enriquecer el contenido de las prácticas realizables en la instalación y la comprensión de los procesos físicos presentes.

1 Introducción histórica y problemática de los transitorios hidráulicos

El golpe de ariete es la sucesiva transformación de energía cinética en presión y energía elástica de la tubería.

En el transcurso de este fenómeno, el líquido genera sobrepresiones y depresiones, las cuales es necesario tener controladas para garantizar la seguridad en las instalaciones.

Las ondas de presión generadas en este transitorio se propagarán por el sistema a una velocidad determinada (se verá más adelante), de tal modo que el fenómeno sería una similitud al de la propagación y reflexión de las ondas acústicas, en el cual estas ondas viajan a la conocida velocidad del sonido.

Muchos físicos contrastaron que la velocidad de propagación de las ondas de presión en el agua (fluido típico en instalaciones hidráulicas) era menor que la esperada según la teoría de las ondas (Newton, 1687), por estar dentro de una tubería. Más tarde, Helmholtz demostraría que la razón era la elasticidad de las tuberías, que ralentizaban la velocidad de las ondas.

Fue el matemático Korteweg quien estableció en su tesis doctoral *Sobre la propagación de las ondas en tubos elásticos* las razones por las que la velocidad de propagación de una onda de presión a lo largo de una tubería de paredes elásticas era menor a la del sonido, en 1878.

Cabe destacar también a Michaud, quien abordó la problemática del golpe de ariete (las sobrepresiones) en 1878, y cuya contribución ha sido muy útil hasta hoy día.

Su mayor aportación fue relacionar las sobrepresiones que se generan en una instalación hidráulica con el cambio de velocidad generado ante la perturbación de la misma (vía empírica):

$$\Delta P = \frac{2\rho L\Delta U}{t_0} \quad [1.1]$$

Siendo ΔP las sobrepresiones generadas, L la longitud de la tubería, ΔU la variación de velocidad en la misma y t_0 el tiempo de cierre de la válvula.

Pronto se conoció que para tiempos de cierre muy bajos la expresión proporcionaba valores muy altos, y solo unas décadas más tarde, Gariel (Remenieras, 1961) demostraría que la ecuación 1.1 era únicamente válida para tiempos de cierre mayores al semiperíodo del fenómeno ($\frac{2L}{c}$) (siendo c la velocidad de propagación de las ondas de presión en la tubería).

Fue Allievi (1898) el primero en relacionar las sobrepresiones con la velocidad de propagación y la variación del campo de velocidades. Se trata de la expresión más importante del golpe de ariete:

$$\Delta P = \rho c \Delta U \quad [1.2]$$

La ecuación 1.2, en contraste con Michaud, es válida para tiempos de cierre menores que un semiperiodo del transitorio.

Sin embargo, el privilegio de proponer esta ecuación fue de von Kries, quien la formuló en 1883, aunque sin hacerla pública.

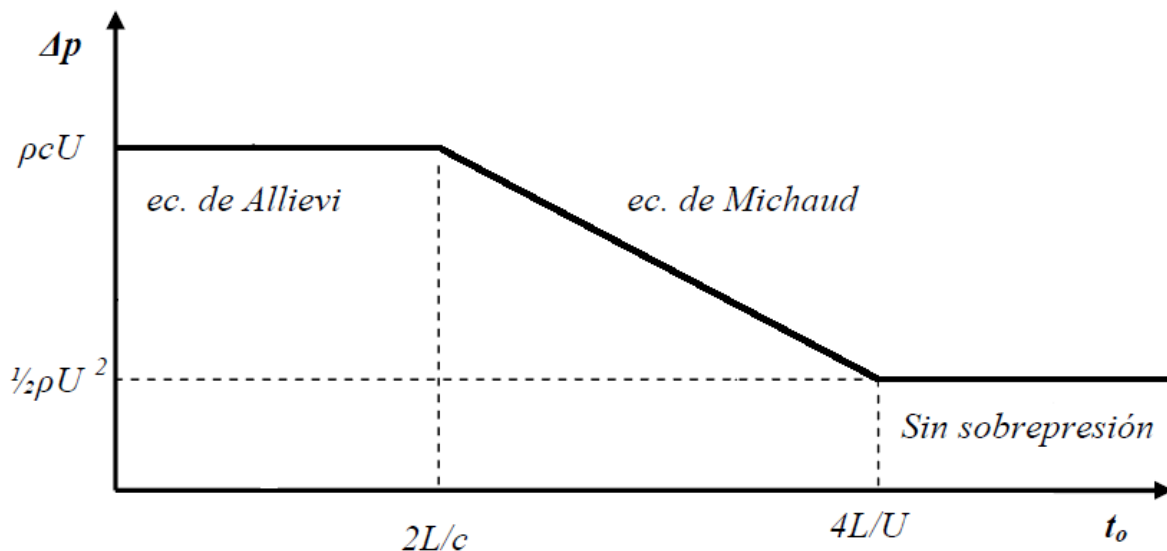


Figura 1.1. Sobrepresiones alcanzadas en función del tiempo de cierre

Como ya se ha comentado, el golpe de ariete es un fenómeno que se ha de controlar en cualquier instalación hidráulica para mantener la seguridad de la misma.



Figura 1.2. Rotura de una tubería por efecto del golpe de ariete

Para evitar los golpes de ariete causados por el cierre de válvulas, hay que estrangular gradualmente la corriente de fluido, es decir, cortándola con lentitud, utilizando para ello, por ejemplo, válvulas de asiento. Cuanto más larga es la tubería, tanto más tiempo deberá durar el cierre.



Figura 1.3. Válvula de asiento

Sin embargo, cuando la interrupción del flujo se debe a causas incontrolables como, por ejemplo, la parada brusca de una bomba eléctrica, se utilizan otros sistemas, como tanques neumáticos con cámara de aire comprimido, torres piezométricas o válvulas de muelle que puedan absorber la onda de presión, mediante un dispositivo elástico.

Otro caso común de variación brusca de la velocidad del flujo en la tubería se da en las centrales hidroeléctricas, cuando se produce una caída parcial o total de la demanda. En estos casos tratándose de volúmenes importantes de fluido que deben ser absorbidos, se utilizan en la mayoría de los casos torres piezométricas, o chimeneas de equilibrio que se conectan con la presión atmosférica, o válvulas de seguridad.

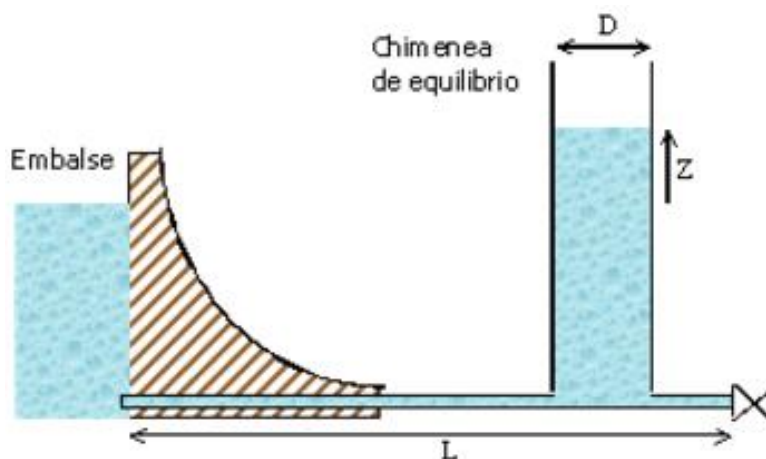


Figura 1.4. Chimenea de equilibrio

2 Fundamentos físicos y modelado matemático

Se define golpe de ariete (GDA) como un fenómeno transitorio que consiste en la propagación alternativa a través de una estructura hidráulica de una onda de presión positiva (compresión) y otra negativa (expansión) producida por el cierre de una válvula o por la parada brusca de un grupo de impulsión.

2.1 Descripción del fenómeno

Con objeto de analizar físicamente el fenómeno del golpe de ariete y describir el mecanismo de transmisión y reflexión de las ondas de presión, se fijará un sistema simple integrado por un depósito de grandes dimensiones (y, por tanto, nivel de agua constante) que alimenta a una tubería horizontal de características uniformes y que finaliza en una válvula con la cual se regula el caudal (Figura 2.1).

Inicialmente, la válvula se encuentra en una posición determinada (supongamos que totalmente abierta) mientras que por la tubería circula un caudal Q (siendo la velocidad media $U = \frac{Q}{A}$, por estar en situación de régimen turbulento, y por tanto, existir un perfil de velocidades supuesto plano) que depende del nivel de agua en el depósito H .

Como lo que meramente se pretende es la descripción del fenómeno, inicialmente no se va a considerar la fricción en la tubería.

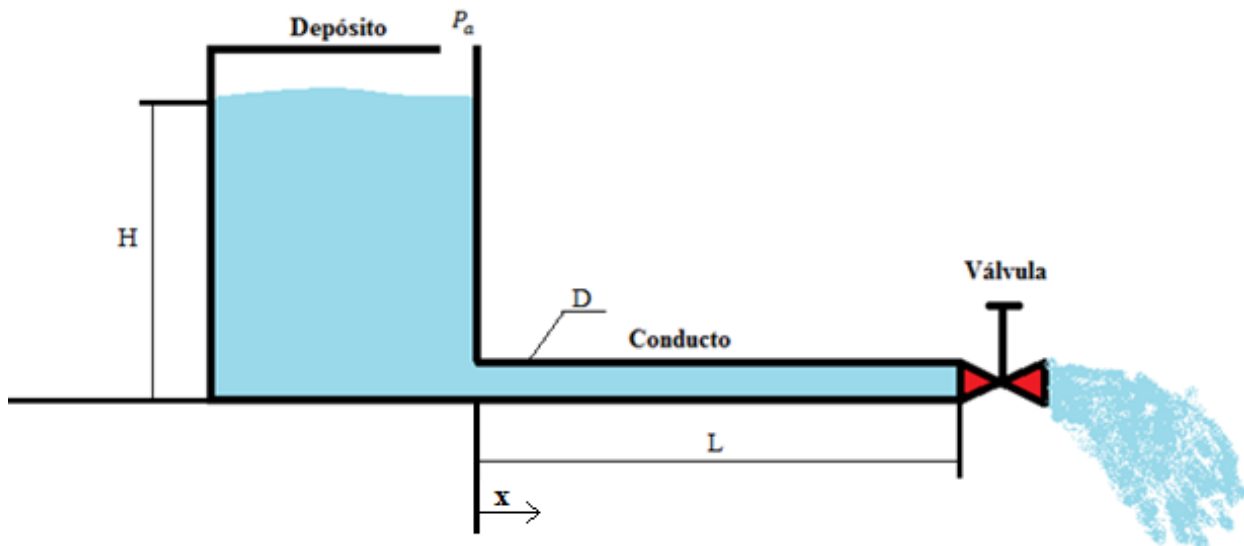


Figura 2.1. Esquema simple de análisis

Si en estas condiciones se produce un cierre total e instantáneo de la válvula (esta maniobra es físicamente imposible, pero es una buena aproximación) el caudal de descarga también se anulará

instantáneamente (figura 2.2b). De este modo la condición de contorno a imponer aguas abajo de la tubería es la de caudal nulo.

Tras el cierre de la válvula se inicia un proceso que se caracteriza por la transformación alternativa (y cíclica) de la energía cinética del fluido en energía elástica que será almacenada tanto por el fluido como por las paredes de la propia tubería en forma de energía elástica de presión. Por lo tanto, la cantidad de energía intercambiada en este proceso depende de la variación de la energía cinética que se produzca, como ya adelantó Allievi.

Teniendo en cuenta la compresibilidad del fluido y la elasticidad de la tubería, al anularse la velocidad en el extremo de la tubería, se produce una acumulación del fluido dirección aguas arriba que anula el campo de velocidades y genera una sobrepresión (figura 2.2c). La velocidad a la que se desplaza la onda (c) es la denominada velocidad de propagación. Esta sobrepresión tiene dos efectos: comprimir ligeramente el agua, reduciendo su volumen, y al tiempo dilatar la tubería.

Cuando el pulso u onda de compresión llega al depósito en el instante $t = L/c$, todo el fluido en la tubería se encuentra en reposo y bajo los efectos de la sobrepresión (figura 2.2d).

Debido a que el depósito impone una condición de presión constante en el extremo aguas arriba de la tubería, existe una situación de desequilibrio. En consecuencia, el fluido contenido en la tubería expandida inicia su retroceso hacia el depósito con velocidad ahora negativa ($-U$) comenzando aguas arriba. En ese instante se regresa al equilibrio con la presión impuesta por el depósito en la unión depósito-tubería.

La pared va recuperando sus dimensiones originales y el líquido adquiere una velocidad igual, aunque de sentido contrario, al régimen permanente. Ello propicia que el fluido se mueva hacia el depósito, produciéndose una bajada de presión en la tubería igual que la sobrepresión anterior en valor absoluto, por lo que se vuelve al estado inicial de presión. En este caso, el intercambio de energía producido es el inverso (figura 2.2e).

Esta segunda fase se completa cuando en el instante $t = \frac{2L}{c}$ todo el campo de velocidades es negativo y toda la tubería se encuentra bajo la presión inicial (figura 2.2f).

El inicio de la tercera fase lo origina la situación de inestabilidad correspondiente al final de la fase anterior: la válvula está cerrada y no puede haber flujo a través de ella. En estas condiciones el sistema responde intentando compensar la no reposición del fluido, y lo hace generando una depresión aguas arriba de la válvula, de tal manera que en estas condiciones una onda de depresión viaja hacia el depósito, con una celeridad c , que deja tras de sí al fluido en reposo, contrayendo además la tubería contraída y expandiendo el fluido ligeramente (figura 2.2g).

Al llegar ahora la onda de descompresión al depósito en el instante $t = \frac{3L}{c}$ (figura 2.2h), esta, al igual que hizo la onda de sobrepresión, se refleja (cuarta fase), pero ahora la onda que viaja hacia la válvula deja tras de sí un fluido moviéndose hacia la válvula con una velocidad positiva U , con

una presión igual a la inicial y la tubería en estado normal (figura 2.2i), todo ello provocado por la nueva inestabilidad aguas arriba: hay un desequilibrio de presión entre el depósito y la tubería que se corrige originándose velocidad en el fluido aguas abajo. De nuevo hay una transformación de energía elástica a energía cinética.

En el instante $t = \frac{4L}{c}$ esta cuarta onda llega a la válvula (figura 2.2j), reproduciéndose exactamente la situación inicial del momento del cierre.

De nuevo comenzaría el proceso que, en ausencia de fricción se repetiría cíclicamente (figura 2.3).

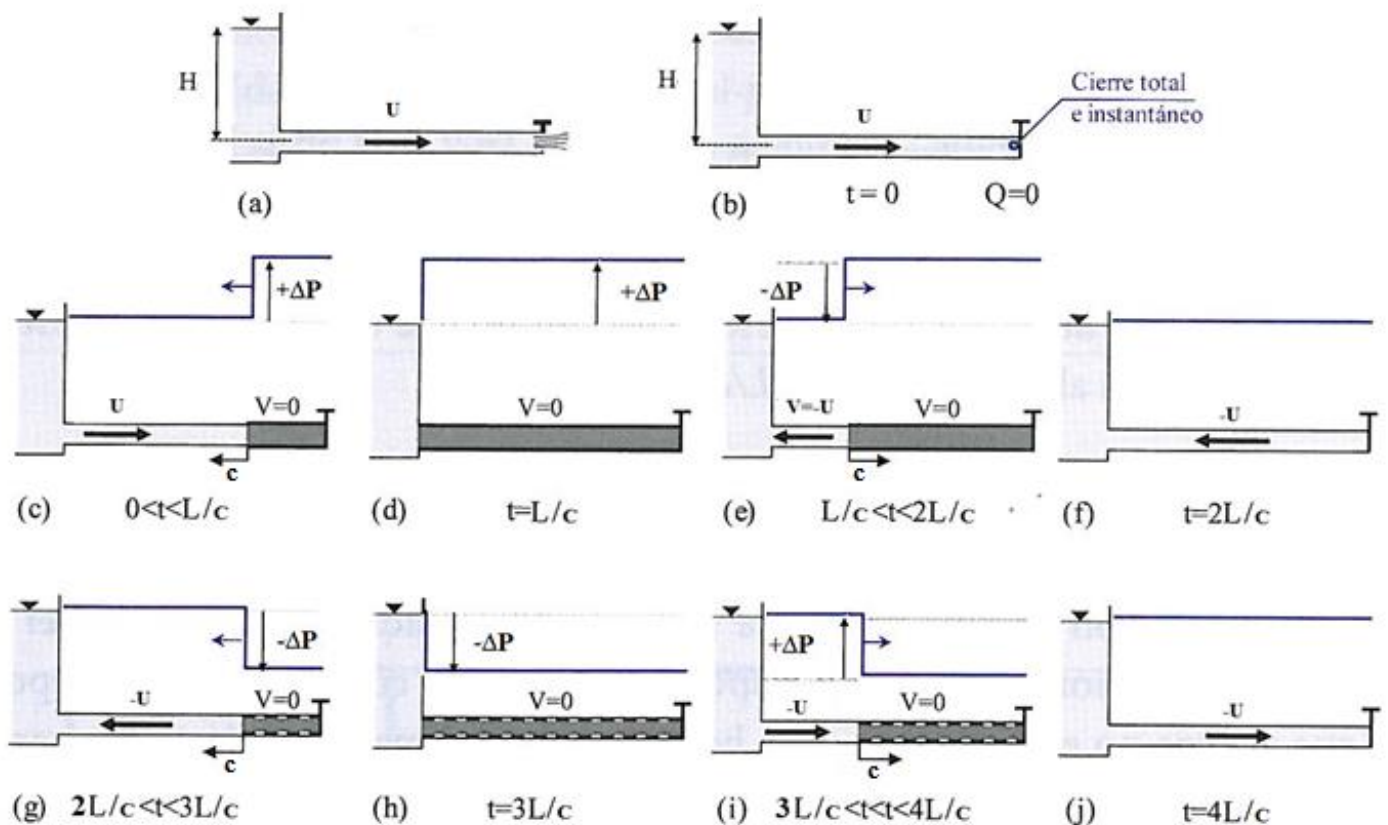


Figura 2.2. Descripción de los ciclos del golpe de ariete

La presión en el extremo de la tubería tiene por lo tanto la siguiente forma:

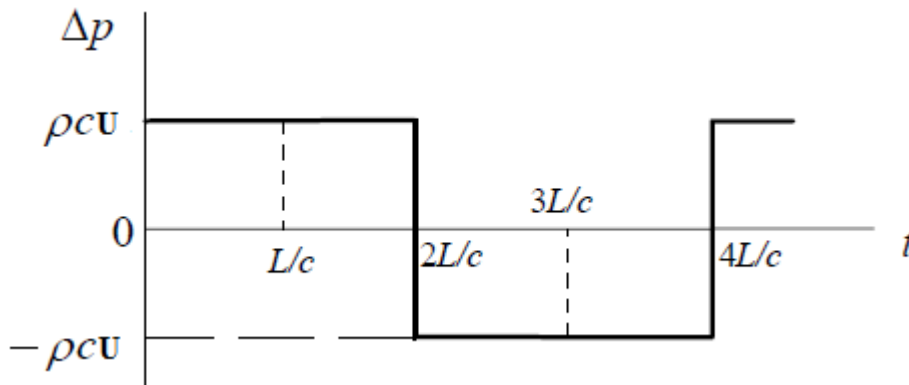


Figura 2.3. Presión en el extremo del conducto

Al introducir un coeficiente de pérdidas por fricción en la tubería, como se realizará más adelante, se podrá observar cómo las ondas de presión experimentan una atenuación.

2.2 Orden de magnitud de las sobrepresiones

Cuando se cierra una válvula bruscamente, la ecuación de Euler-Bernoulli permite estimar las sobrepresiones necesarias para variar la velocidad de orden U de modo significativo durante un tiempo t_0 en un conducto de longitud L y diámetro D :

$$\Delta P \approx \rho L \frac{U}{t_0} \quad [2.1]$$

Si el tiempo característico de parada es impuesto por la propagación de las ondas de presión en el tubo, el orden de magnitud de la velocidad de estas ondas será $L/t_0 \approx c \approx 1000 \text{ m/s}$. Por tanto, las sobrepresiones para una velocidad original de 10 m/s en un conducto de un kilómetro serían del orden de 100 bares (Apuntes Ingeniería de Fluidos, UD4-10, Antonio Viedma, 2012).

Las sobrepresiones originadas son tan altas que ha de tenerse en cuenta la elasticidad de la tubería (Modelo Elástico) y la variación de densidad del líquido (Líquido compresible).

Para ello habrá que introducir las ecuaciones de elasticidad de la tubería y de compresibilidad del líquido en las ecuaciones a resolver.

2.3 Parámetros característicos del transitorio

Los parámetros característicos en el estudio del golpe de ariete como se ha visto hasta ahora son:

- Tiempo de cierre, t_0 : tiempo que tarda la válvula de paso en cerrarse. Los tiempos de cierre de una válvula pueden ser diversos, pero en este caso se trabajará con tiempos de cierre del orden de los 20 ms.

- Celeridad o velocidad de propagación, c : velocidad a la que se desplaza una onda en un determinado medio físico, es este caso a través de una tubería.
- Tiempo de ida o vuelta, t_{iv} : tiempo que tarda una onda en recorrer una tubería de longitud L .

$$t_{iv} = \frac{L}{c} \quad [2.2]$$

- Velocidad característica, U : se trata de la velocidad que se tiene en la tubería en régimen estacionario.

En base a estos parámetros, es conveniente hacer una serie de comentarios:

2.3.1 Influencia del tiempo de cierre

En la descripción del fenómeno (apartado 2.1) se ha considerado el cierre instantáneo de una válvula, una maniobra puramente “teórica”. El cierre instantáneo es una abstracción de la realidad porque realmente siempre existirá un periodo de cierre, por muy pequeño que sea. Como ya se adelantaba anteriormente, el tiempo de cierre es importante, ya que las sobrepresiones generadas pueden depender de su valor (Michaud). Si la maniobra es muy rápida, la válvula cerrará por completo antes de que retorne la onda de depresión procedente del depósito. Por otro lado, si la maniobra no es tan rápida, habrá tiempo para que la onda de depresión actúe y compense el progresivo aumento de la presión antes de que se complete el cierre.

Para analizar cualitativamente la influencia del tiempo de cierre se supone una maniobra de cierre superposición de un conjunto de maniobras elementales “instantáneas” (Quintela, 1991). De este modo, el pulso de presión que se propaga por la conducción es la suma de muchos pulsos de presión infinitesimales superpuestos (figura 2.4).

La primera maniobra elemental de reducción de sección provoca en la válvula una modificación instantánea de velocidad de U a $U - \Delta U$, la cual da origen a una sobrepresión en la sección de la válvula y una onda que se dirige hacia el depósito. La presión en cada sección es la resultante de las sucesivas maniobras de cierre instantáneas de la válvula (figura 2.4).

Tras el primer cierre de la válvula, la primera onda viaja sentido aguas arriba, hacia el depósito. Una vez llegado el instante $\frac{L}{c}$, se refleja, invirtiéndose el signo del pulso. Poco después, en $t = \frac{2L}{c}$, la primera onda de sobrepresión generada con el primer cierre elemental instantáneo de la válvula retorna a la misma.

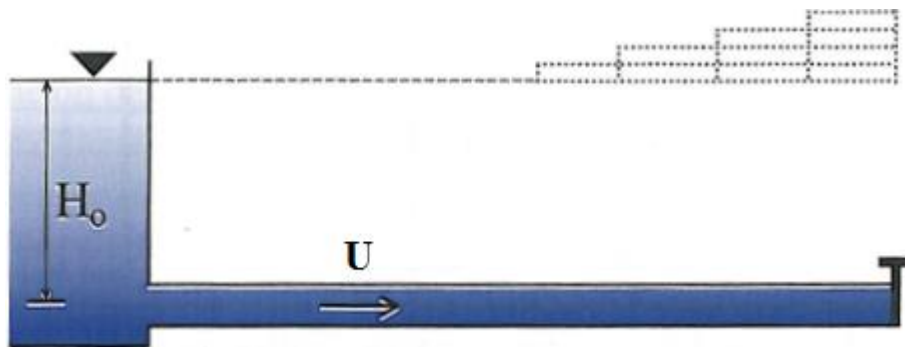


Figura 2.4. Análisis del tiempo de cierre de la válvula

Es por ello que si el tiempo de cierre se produce en un tiempo inferior a $\frac{2L}{c}$, en la válvula se alcanza la máxima sobrepresión antes de que las primeras ondas generadas estén de vuelta, suma de las sobrepresiones generadas por cada cierre elemental. En este caso el cierre se considera instantáneo.

Si por el contrario el tiempo de cierre es mayor a $\frac{2L}{c}$, la válvula aún no habrá completado el cierre cuando las primeras ondas negativas procedentes del depósito estén de vuelta. Estas ondas negativas de retorno, tras el nuevo rebote con la válvula, son origen de nuevas ondas, también negativas, que de algún modo compensarán a las ondas positivas que se siguen generando con las maniobras elementales de cierre. En este caso el cierre se considera rápido pero no instantáneo.

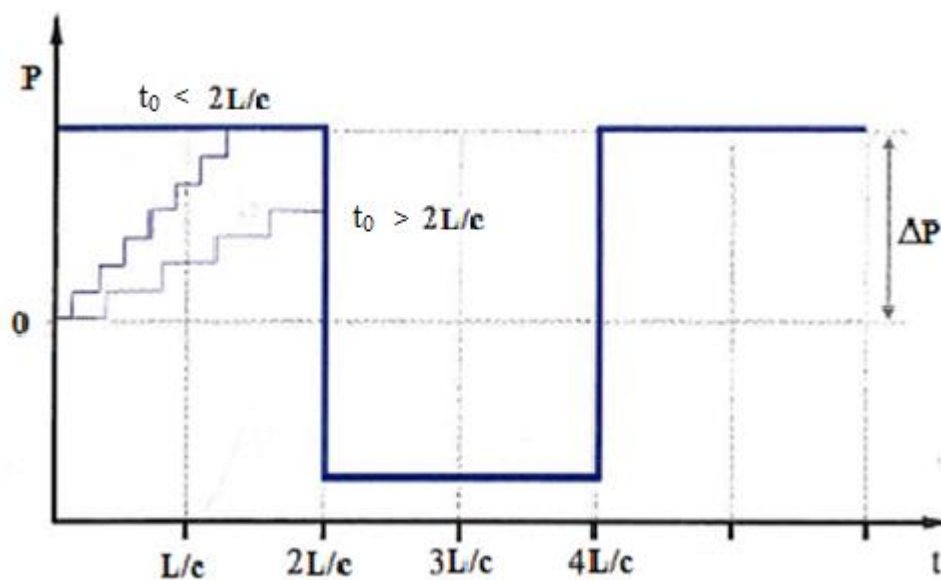


Figura 2.5. Sobrepresiones alcanzadas según el tiempo de cierre

2.3.2 Velocidad de propagación

A lo largo de este estudio se supondrá una velocidad de propagación constante con el tiempo. En la realidad no llega a ser así, ya que esta depende de parámetros como la densidad o el módulo de elasticidad que se ven modificados en el transitorio. No obstante, estas variaciones son mínimas. También se pueden dar cambios de sección en una instalación hidráulica, es decir, distintas velocidades de propagación. Ambas situaciones se abordarán más adelante.

2.4 Ecuaciones que gobiernan el golpe de ariete

Las ecuaciones unidimensionales de continuidad y de cantidad de movimiento en un conducto de sección variable y con densidad no constante, suponiendo nulas las pérdidas por fricción, son (Ingeniería de Fluidos, UD4-10, Antonio Viedma, 2012):

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v A)}{\partial x} = 0 \quad [2.3]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad [2.4]$$

A estas ecuaciones hay que sumar la ley de la elasticidad del conducto $A=A(P)$ y la de compresibilidad del líquido $\rho = \rho(P)$, más las correspondientes condiciones iniciales y de contorno.

2.4.1.1 Leyes de elasticidad del conducto y de compresibilidad del líquido

Este apartado se puede encontrar en los apuntes de Ingeniería de Fluidos (UD4-10) realizados por Antonio Viedma (2012).

Como los cambios de área de paso y densidad son pequeños, podemos plantear una linealización de los mismos, a partir de una presión de referencia P_r (en nuestro caso será la presión atmosférica), de la forma:

$$A = A_0 \left[1 + \frac{P - P_r}{P_E} \right] \quad [2.5]$$

Donde P_E está relacionado con el módulo de elasticidad E por $P_E \approx \frac{E \cdot e}{D}$ (con e el espesor de la pared).

De igual modo se linealiza la variación de la densidad:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{P - P_c}{P_c} \right] \quad [2.6]$$

Donde P_c es el módulo de compresibilidad del líquido, $P_c = \rho_0 * a^2$ (siendo a la velocidad del sonido).

Si se desarrollan las ecuaciones 3.3 y 3.4 y se introducen estas expresiones lineales, se obtiene:

$$A_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial A}{\partial t} + \rho_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \rho_0 v \frac{\partial A}{\partial x} + v A_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad [2.7]$$

La ecuación de continuidad se puede expresar en función de las derivadas de la presión:

$$\frac{\rho_0 A_0}{P_c} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho_0 A_0}{P_c} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 A_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho_0 v A_0}{P_c} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\rho_0 v A_0}{P_c} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad [2.8]$$

Estableciendo que

$$\frac{1}{\rho_0 * c^2} = \frac{1}{P_E} + \frac{1}{P_c} = \frac{1}{eE/D} + \frac{1}{\rho_0 a^2} \quad [2.9]$$

se está definiendo una velocidad de propagación de las ondas en el conducto, c , que incluye los efectos de elasticidad del conducto y compresibilidad del fluido:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{E_c}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E_c D}{eE}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\rho D}{eE}}} \quad [2.10]$$

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento quedan, por lo tanto, de la siguiente forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad [2.11]$$

Como se puede observar, las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del transitorio son ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, en las que se ha de resolver el campo de velocidades (caudal) y de presiones. Ambos dependen de la posición y del tiempo.

2.5 Condiciones iniciales y de contorno

En este apartado se van a abordar las condiciones iniciales y de contorno del esquema simple detallado en el apartado 2.1, considerando las pérdidas por fricción en la tubería, con el objetivo de obtener resultados más generales.

Para evaluar el esfuerzo cortante en la tubería se empleará el modelo de pérdidas de Darcy-Weisbach (Wylie & Streeter, 1978):

$$\tau_p = f \frac{\rho v |v|}{8} \quad [2.12]$$

Siendo f es el coeficiente de fricción permanente (adimensional). Más adelante se hablará de este coeficiente con detalle.

2.5.1 Condiciones iniciales

Para abordar el estudio de un transitorio hidráulico, es necesario determinar las condiciones de velocidad y presión que se van a dar antes del mismo.

Se entiende como estado inicial al estado inmediatamente anterior al del comienzo de cierre de la válvula (régimen permanente).

Para el cálculo de estas condiciones se utiliza la ecuación de Euler Bernoulli (cantidad de movimiento):

$$\left[\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz \right]_{S_0} - \left[\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz \right]_{S_f} = f \frac{U^2 L}{2D} \quad [2.13]$$

Donde S_0 y S_f son las secciones inicial y final del tramo de la tubería i , que tiene una longitud L y un diámetro D , por el que la velocidad es U .

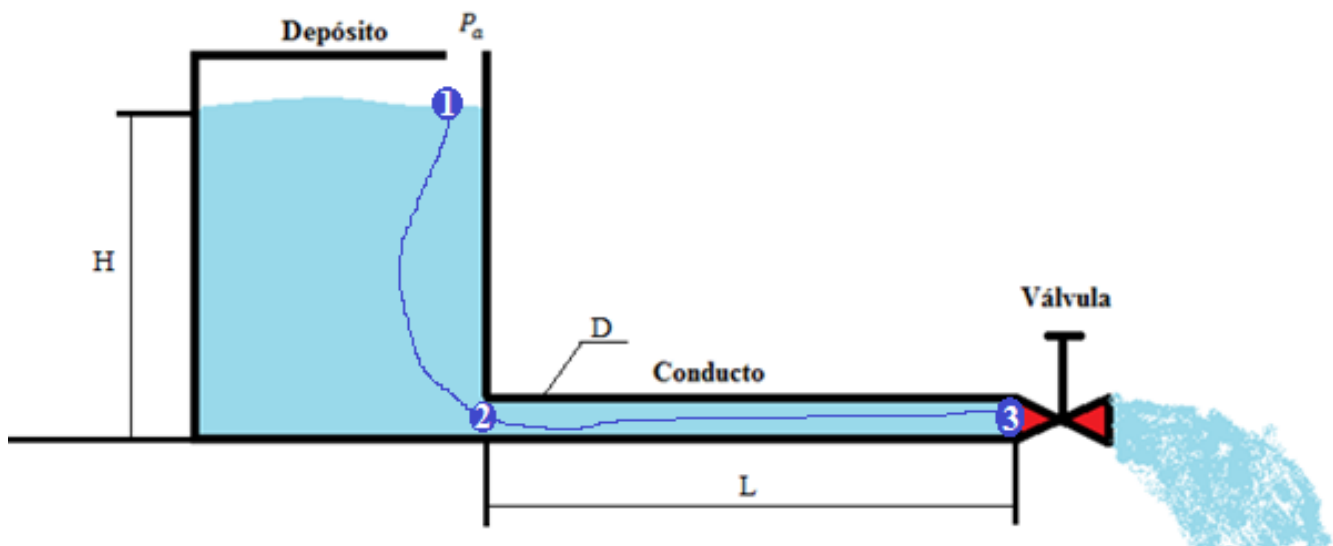


Figura 2.6. Línea de corriente del esquema

Para determinar la velocidad de descarga del depósito en el permanente ($v(x,0)$) se aplicará la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 3, con lo que se obtiene

$$v(x, 0) = \sqrt{\frac{2gH}{(1 + fL/D)}} \quad [2.14]$$

La forma de definir la presión es algo más compleja: a lo largo del conducto habrá una pérdida de presión (a excepción de considerar nulo el término de fricción permanente, como se comprobará más adelante). Aplicando la ecuación de Bernoulli entre dos secciones del conducto separadas una distancia Δx , se obtiene:

$$P(x, 0) = P(x + \Delta x, 0) + \frac{fv|v|}{2D} \Delta x \rho_0 \quad [2.15]$$

Con $P(L, 0) = 0$ Pa (presiones relativas a la del ambiente).

2.5.2 Condiciones de contorno

La velocidad en el extremo de la tubería, donde se encuentra la válvula, será nula a lo largo del transitorio, suponiendo un cierre instantáneo:

$$v(L, t > t_0) = 0 \quad [2.16]$$

La presión relativa al inicio del conducto es (se supone un nivel de agua H constante):

$$P(0, t > t_0) = \rho_0 g H - \frac{1}{2} \rho_0 v(0, t > t_0)^2 \quad [2.17]$$

3 Resolución numérica del golpe de ariete

Numerosos métodos son válidos para obtener la solución al sistema de ecuaciones diferenciales parciales del golpe de ariete. Entre ellos destacan:

- Método de Las Características
- Método de Diferencias Finitas
- Método de Elementos Finitos
- Métodos Híbridos

Dichos métodos subdividen o discretizan el espacio posición-tiempo en intervalos finitos, generando una matriz de puntos en los que el sistema tiene solución.

Este estudio se centrará en la resolución del transitorio hidráulico por el Método de Las Características. Es el método de uso común para el análisis de flujo no permanente en tuberías, debido principalmente a la facilidad para introducir diferentes consideraciones y condiciones de borde.

3.1 Modelado con viscosidad despreciable

El objetivo de este apartado es, fundamentalmente, contrastar los fundamentos físicos del golpe de ariete introducidos anteriormente en el apartado 3.

3.1.1 Simplificaciones del modelo

1. Flujo unidireccional, con velocidad y presión uniformes en la sección.
2. Toda el área de la tubería está mojada durante el periodo transitorio.
3. Se desprecian las pérdidas por fricción ($f=0$).
4. Se supone un cierre instantáneo de la válvula.

3.1.2 Solución de las ecuaciones del flujo transitorio

El sistema de ecuaciones 2.11 en forma matricial se puede expresar como (Abreu, Guarga e Izquierdo, 1995):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} P \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & \rho c^2 \\ 1/\rho & v \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} P \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [3.1]$$

Este sistema es de tipo hiperbólico, ya que la matriz de coeficientes tiene valores propios reales que dependen de la velocidad v :

$$\alpha = v \pm c \quad [3.3]$$

El sistema de ecuaciones no admite solución analítica en el espacio y en el tiempo. Por ello se recurre a simplificaciones que permitan obtener soluciones aproximadas a partir del análisis numérico. Como se ha comentado, el método de las características es la solución más extendida.

3.1.3 Rectas características

Las ecuaciones que gobiernan el transitorio hidráulico son las ecuaciones de continuidad (L1) y cantidad de movimiento (L2) (ecuaciones 3.11):

$$L_1: \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad L_2: \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad [3.4]$$

que pueden combinarse linealmente de la forma $L_1 + \lambda L_2 = 0 = L$

$$L: \left[\frac{\partial P}{\partial x} \left(v + \frac{\lambda}{\rho_0} \right) + \frac{\partial P}{\partial t} \right] + \lambda \left[\frac{\partial v}{\partial x} \left(v + \frac{c^2 \rho_0}{\lambda} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right] = 0 \quad [3.5]$$

El primer corchete resulta ser $\frac{dP}{dt}$ y el segundo $\frac{dv}{dt}$ cuando

$$\left(v + \frac{\lambda}{\rho_0} \right) = \left(v + \frac{c^2 \rho_0}{\lambda} \right) = \frac{dx}{dt}, \quad [3.6]$$

por lo que λ puede tomar los valores $\lambda = \pm(c\rho_0)$.

Tomando la ecuación 3.5 y los dos valores que puede tomar λ , se tiene:

- Para $\frac{dx}{dt} = \alpha = v + c$,

$$\frac{dP}{dt} + \frac{dv}{dt}(c\rho_0) = 0 \quad [3.7]$$

- Para $\frac{dx}{dt} = \alpha = v - c$,

$$\frac{dP}{dt} - \frac{dv}{dt}(c\rho_0) = 0 \quad [3.8]$$

De estas dos ecuaciones se obtienen dos invariantes, uno a derechas y otro a izquierdas, que relacionan la velocidad y la presión (y sus incrementos) a través de unas líneas de propagación C+ y C-, respectivamente.

Invariante a derechas (C+)

$$P + (c\rho_0)v = \text{cte} \quad [3.9]$$

Invariante a izquierdas (C-)

$$P - (c\rho_0)v = \text{cte} \quad [3.10]$$

Conocidos dos puntos, R y S en este caso, a través de C+ y C- se llega a otro punto P que satisface los invariantes (figura 3.1).

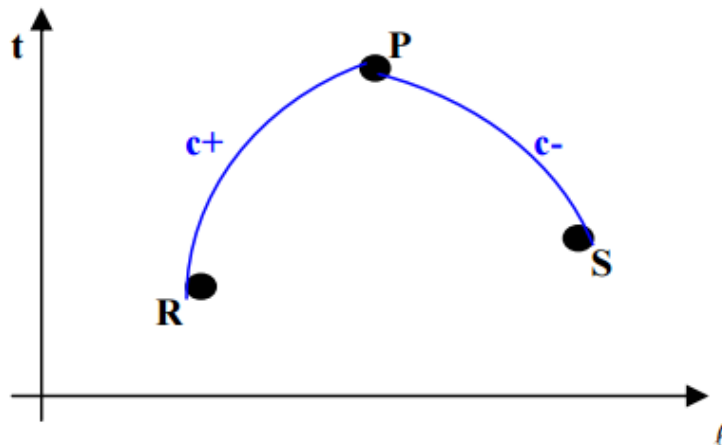


Figura 3.1. Propagación de puntos a través de C+ y C-

3.1.4 Solución numérica

Para resolver numéricamente el conjunto de ecuaciones 2.5 y 2.6 se acude entonces al método de las características. Para implementarlo se divide la longitud L de la tubería en tramos de longitud Δx . En el eje vertical se tienen intervalos temporales.

La relación entre los intervalos de posición y de tiempo se encuentra en la velocidad de propagación. Teniendo en cuenta las ecuaciones 3.7 y 3.8, y que $c \gg v(x, t)$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c \quad [3.11]$$

Volviendo a la imagen de propagación anterior (figura 3.1), se daría el siguiente esquema discreto:

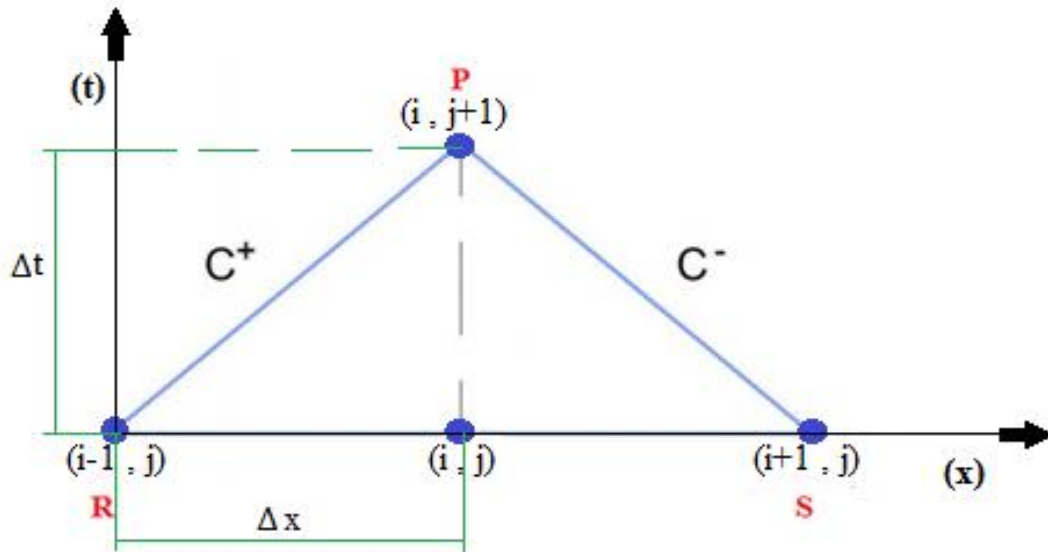


Figura 3.2. Discretización del modelo

De esta forma se llega a una matriz de puntos en la que se podrá definir la velocidad y la presión a lo largo de la tubería y del tiempo.

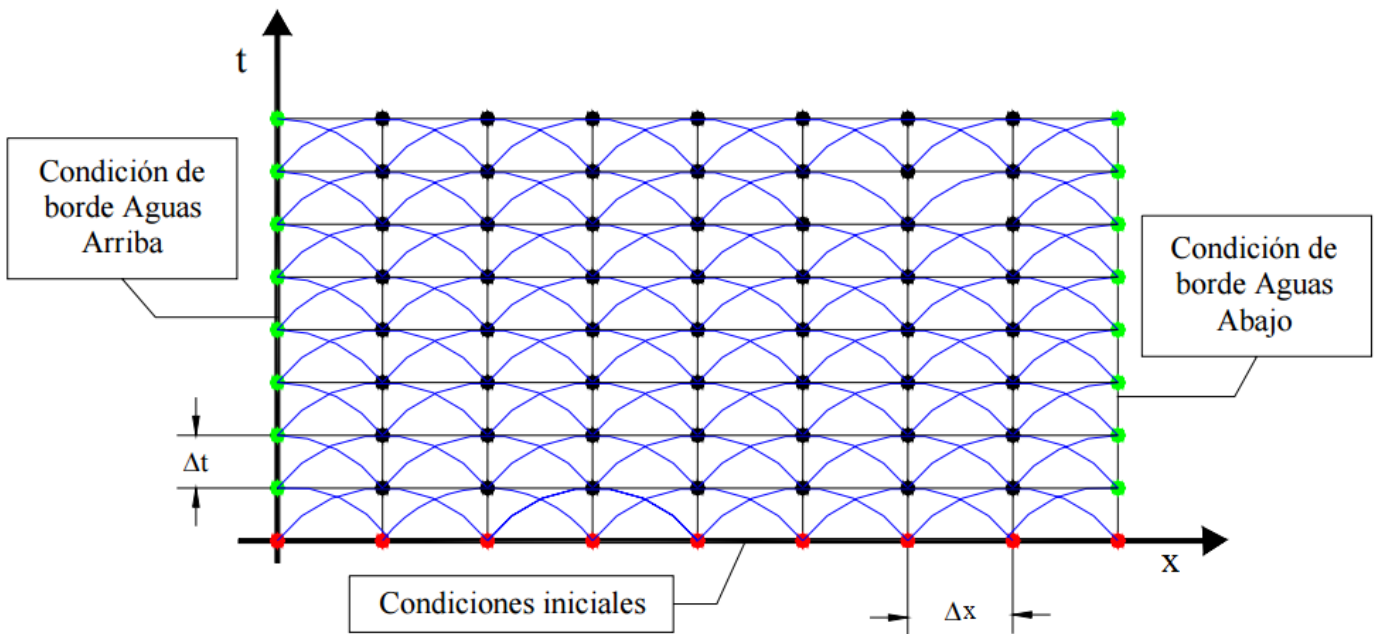


Figura 3.3. Matriz de puntos

Discretizando las ecuaciones 4.7 y 4.8 se obtienen las ecuaciones 4.12 y 4.13 respectivamente:

$$P(i, j + 1) - P(i - 1, j) + c\rho_0[U(i, j + 1) - U(i - 1, j)] = 0 \quad [3.12]$$

$$P(i, j + 1) - P(i + 1, j) - c\rho_0[U(i, j + 1) - U(i + 1, j)] = 0 \quad [3.13]$$

Por combinación de las ecuaciones 3.11 y 3.12 se obtienen las ecuaciones necesarias para la resolución del modelo numérico, tanto para los nodos intermedios como para los nodos de borde.

- Para los nodos intermedios:

- Restando las ecuaciones 3.12 y 3.13:

$$P(i, j + 1) = \frac{P(i - 1, j) + P(i + 1, j)}{2} + \frac{(c\rho_0)}{2}[U(i - 1, j) - U(i + 1, j)] \quad [3.14]$$

- Sumando las ecuaciones 3.12 y 3.13:

$$U(i, j + 1) = \frac{U(i - 1, j) + U(i + 1, j)}{2} + \frac{1}{(2c\rho_0)}[P(i - 1, j) - P(i + 1, j)] \quad [3.15]$$

- Para determinar la velocidad al inicio del conducto ($x=0$):

- De la ecuación 3.13:

$$U(i, j + 1) = \frac{1}{c\rho_0}[P(i, j + 1) - P(i + 1, j)] + U(i + 1, j) \quad [3.16]$$

- De la condición de contorno aguas arriba

$$P(i, j + 1) = \rho_0 g H + \frac{1}{2} \rho_0 U(i, j + 1)^2 \quad [3.17]$$

- Para determinar la presión el final del conducto ($x=L$):

- De la ecuación 3.12:

$$P(i, j + 1) = c\rho_0[U(i - 1, j) - U(i, j + 1)] + P(i - 1, j) \quad [3.18]$$

- De la condición de contorno aguas abajo:

$$U(i, j + 1) = 0 \quad [3.19]$$

3.1.5 Caso particular. Esquema simple de análisis.

Con objeto de aplicar el modelo anterior a un caso en particular, se supondrá el sistema anterior con la siguiente información:

$$\begin{aligned}c &= 1238\text{m/s} \\ \rho_0 &= 1000\text{kg/m}^3 \\ H &= 5\text{m} \\ g &= 9.8\text{m/s}^2 \\ L &= 23\text{m}\end{aligned}$$

La resolución numérica del modelo se realiza a través de MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices"), una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio, llamado lenguaje M.

3.1.6 Resultados

3.1.6.1 Intervalos de discretización de la posición y el tiempo

Atendiendo al número de nodos en dirección x (n) y a la longitud total del conducto L , se determina el incremento espacial de discretización Δx de la siguiente forma:

$$\Delta x = \frac{L}{n - 1} \quad [3.20]$$

Con la relación $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$, el incremento temporal de discretización será:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \quad [3.21]$$

En este caso particular se ha elegido $n = 24$, por lo que se tienen intervalos espaciales de 1 metro (según la ecuación 3.20) e intervalos temporales de 0,808 milisegundos (según la ecuación 3.21).

3.1.6.2 Onda de presión en el extremo de la tubería

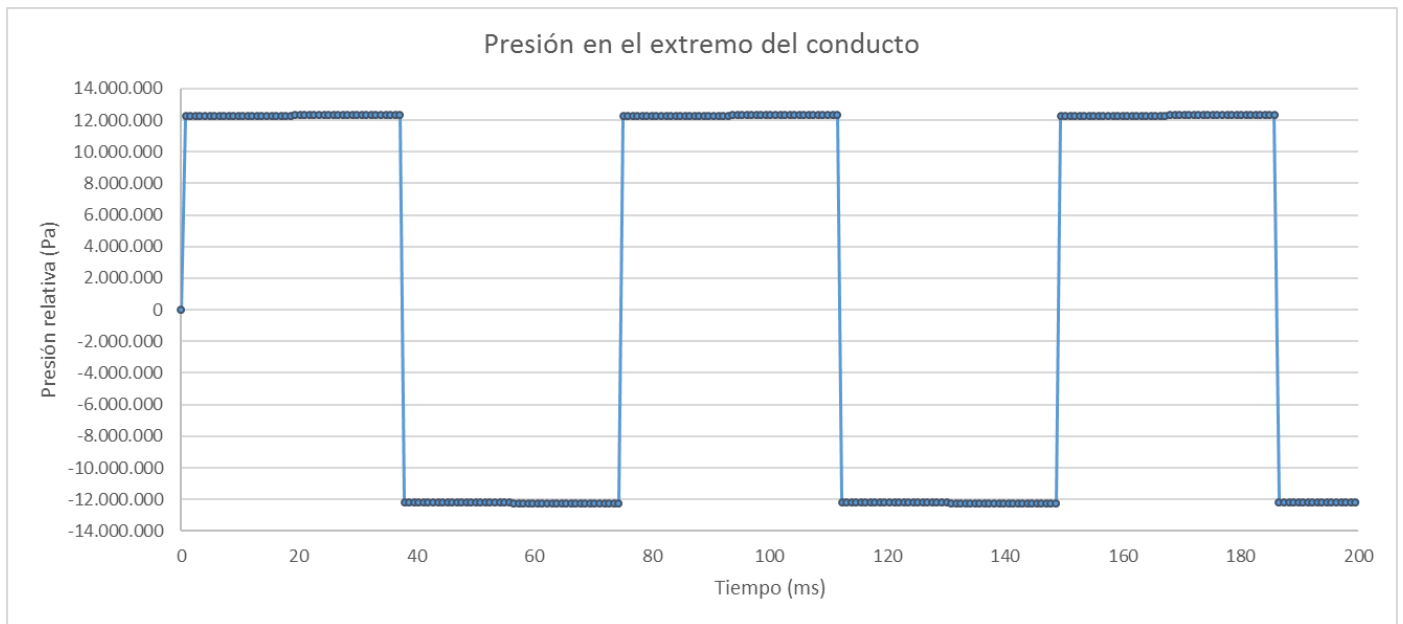


Figura 3.4. Onda de presión en el extremo de la tubería

Debido a que las pérdidas en la tubería no han sido aún introducidas, se puede comprobar cómo la solución numérica coincide con la solución esperada según la descripción del fenómeno (Apartado 3).

Obsérvese que la presión (en este caso, relativa) varía a lo largo del tiempo a través de una forma de onda cuadrada, con un valor máximo de 122,5 bares.

La sobrepresión alcanzada es el valor de presión máxima, ya que inicialmente la presión relativa en el extremo de la tubería es nula.

$$\Delta P_{max} = 122,5 \text{ bares}$$

Por otro lado, el periodo de estas ondas es de $\frac{4L}{c} = 74,3 \text{ ms}$, es decir, cuatro veces el tiempo de ida o vuelta de la onda ($t_{iv} = \frac{L}{c}$), como era de esperar, ya que como se explicó al inicio el transitorio trata de un ciclo de cuatro secuencias que se repiten, y en cada una de ellas la onda recorre toda la longitud del conducto a la velocidad de propagación.

Al no tenerse en cuenta las pérdidas por fricción, estas ondas se mantendrán en el tiempo con la misma amplitud, ya que no hay términos disipativos.

Cabe añadir que a lo largo de este estudio lo que realmente va a interesar es el primer periodo de onda, ya que tras él la onda de presión (relativa) resulta negativa, algo que es físicamente imposible. Este resultado numérico se debe a que no se está teniendo en cuenta el fenómeno de cavitación. Se hablará de esto más adelante.

3.1.6.3 Aproximación de Allievi

Atendiendo a la ecuación 4.18 (presión en el extremo del conducto), y teniendo en cuenta que para el instante posterior al inicial se alcanza la máxima sobrepresión en el extremo de la tubería, se establece lo siguiente:

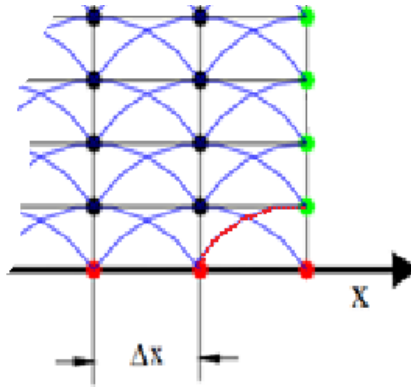


Figura 3.5. Recorte de la figura 3.3

$$P(n, 2) = c\rho_0[U(n-1, 1) - U(n, 2)] + P(n-1, 1)$$

- $\Delta P_{max} = P(n, 2) - P(n, 1) = P(n, 2) - P(n-1, 1)$
- $U(n-1, 1) = U(\text{Reg. Per})$
- $U(n, 2) = 0$
- $P(n, 1) = P(n-1, 1) = P_{inicial} = 0 \text{ Pa}$

La ecuación resultante es $\Delta P_{max} = \rho_0 U c$, que corresponde a la fórmula de Allievi.

De este modo,

$$\Delta P_{max} = \rho_0 U c = 3.714.000 \text{ Pa} = 37,14 \text{ bar} ,$$

tras haber calculado la velocidad en régimen permanente como $U = \sqrt{2gH} = 9,9 \text{ m/s}$

3.2 Modelado con fricción no despreciable ($f \neq 0$).

El modelo anterior es muy útil para entender cómo transcurre físicamente el transitorio hidráulico, pero realmente siempre existirán pérdidas en una tubería.

En una tubería real (con pérdidas) el propio régimen permanente se aleja ya bastante del considerado anteriormente, ya que las pérdidas por fricción hacen que el caudal sea menor, y, por tanto, la velocidad. En consecuencia, el punto de partida del anterior modelo ya se desvincula del comportamiento real del transitorio incluso en las primeras oscilaciones, puesto que, a menor velocidad, menores serán las sobrepresiones con las que se iniciará el mismo.

El siguiente modelo solventará esta cuestión, al tener en cuenta las pérdidas por fricción, con un coeficiente de fricción permanente no nulo.

3.2.1 Simplificación del modelo

1. Flujo unidireccional, con velocidad y presión uniformes en la sección.
2. Toda el área del conducto está mojada durante el transitorio.
3. Se introduce el término de fricción referente al régimen permanente de nuestro sistema. Por la naturaleza transitoria del fenómeno estudiado, más adelante habrá que introducir la fricción debida al estado transitorio.
4. Se supone el cierre instantáneo de la válvula.

3.2.2 Coeficiente de fricción (f)

Para determinar el coeficiente de fricción en una tubería hay numerosas correlaciones en las que este factor depende principalmente del número de Reynolds ($Re = UD/\nu$), y, además, para tuberías con paredes con una cierta rugosidad se puede demostrar, mediante análisis dimensional, que este factor también puede depender de la rugosidad relativa que presente ($\epsilon = k/D$).

La función $f = \Phi(Re, \epsilon)$ se ha representado en el diagrama de Moody para tubos de sección circular.

El diagrama de Moody corresponde a la rugosidad del material en tuberías comerciales y es por ello el más utilizado.

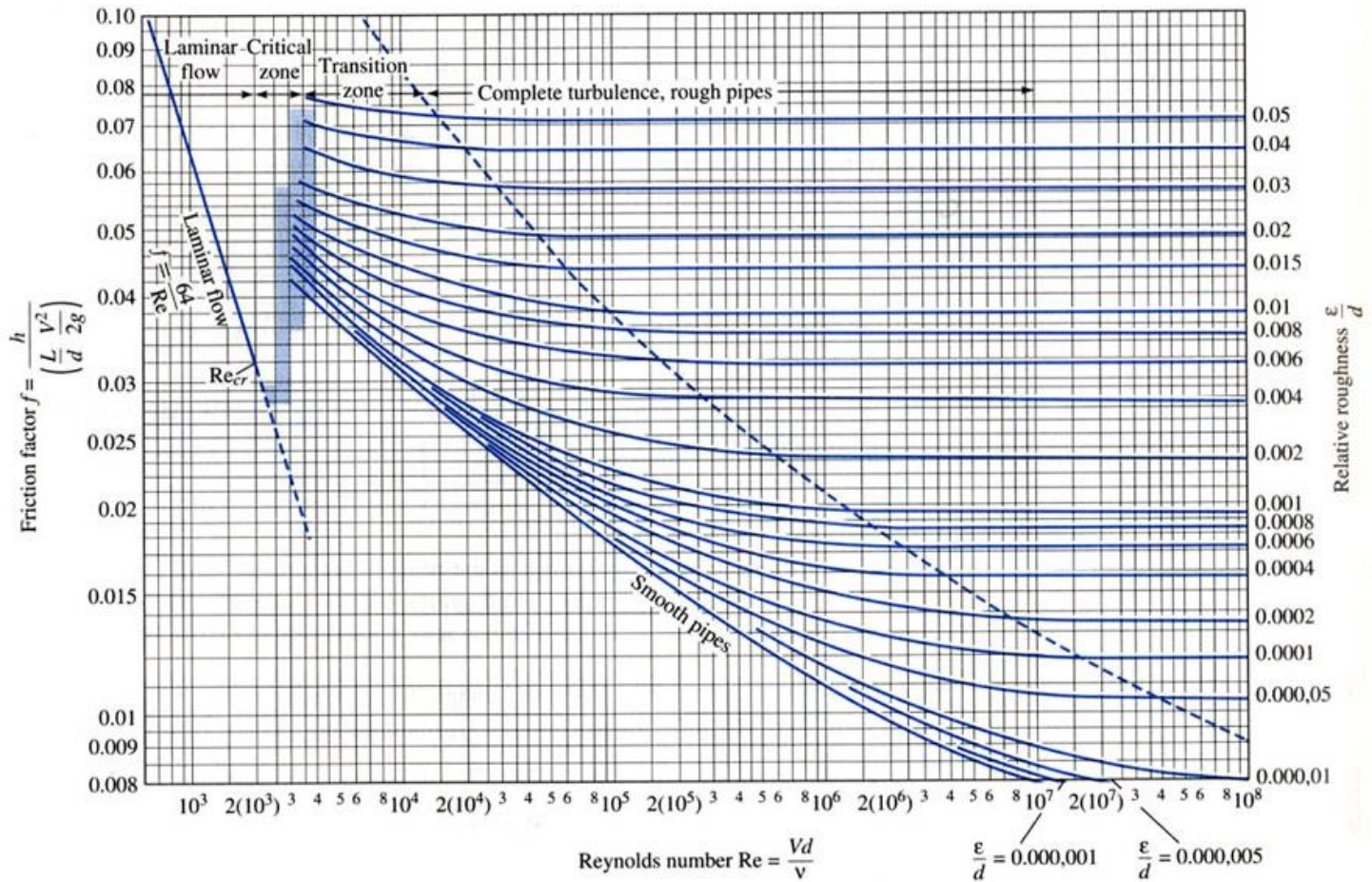


Figura 3.6. Diagrama de Moody

En cuanto al valor de la rugosidad relativa, para una tubería nueva supuesta de cobre, con un diámetro de unos 15 mm, este valor es de $\epsilon=0.015$ aproximadamente, según varios fabricantes de tuberías de cobre.

Tras un periodo de tiempo de 15 años, por ejemplo, la rugosidad relativa en una tubería se puede ver aumentada incluso más del 100%.

Suponiendo una tubería de 15 años de antigüedad, por la que ha circulado agua de Cartagena (alto contenido mineral, corrosión alta de la tubería), se va a suponer que la rugosidad relativa de la misma ha sido incrementada en un 30%, por lo tanto:

$$\epsilon_t \approx 0,02$$

Ahora se presenta una cuestión muy común: para determinar el número de Reynolds es necesario conocer la velocidad en régimen permanente en la tubería, y debido a que la velocidad depende del coeficiente de fricción, inicialmente se supondrá un valor de Re .

Observando el diagrama de Moody, para valores de Re entre 10^4 y 10^8 , y teniendo en cuenta la rugosidad relativa que se ha tomado, el coeficiente de fricción no varía.

Por lo tanto, se supone que Re está en ese intervalo, y se concluye que el factor de fricción es de $f = 0,05$.

Para ese factor de fricción, la velocidad que hay en el conducto equivale a:

$$U = \sqrt{gH / (\frac{1}{2} + fL/2D)} = 1,0702 \text{ m/s (suponiendo un diámetro de 13,6mm).}$$

El número de Reynolds correspondiente a esa velocidad, teniendo en cuenta una viscosidad cinemática del agua de $\nu = 1,1 * 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, será:

$$Re = \frac{UD}{\nu} \approx 10^4, \text{ por lo que se encuentra en el rango de } Re \text{ supuesto anteriormente.}$$

$$f=0.05$$

3.2.3 Formulación del modelo y solución numérica

El punto de partida es el mismo que el anterior: las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento, pero añadiendo ahora el término de fricción permanente correspondiente a la ecuación de cantidad de movimiento:

$$L_1: \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad L_2: \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{fv|v|}{2D} = 0 \quad [3.22]$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado 3.2, se determinan las ecuaciones que definen completamente el modelo numérico, junto con las condiciones iniciales y de contorno.

Ecuaciones de propagación del modelo

$$P(i, j + 1) - P(i - 1, j) + c\rho_0[U(i, j + 1) - U(i - 1, j)] + \frac{f\Delta x\rho_0}{2D}[U(i - 1, j)|U(i - 1, j)|] = 0 \quad [3.23]$$

$$P(i, j + 1) - P(i + 1, j) - c\rho_0[U(i, j + 1) - U(i + 1, j)] - \frac{f\Delta x\rho_0}{2D}[U(i + 1, j)|U(i + 1, j)|] = 0 \quad [3.24]$$

3.2.4 Resultados

3.2.4.1 Onda de presión en el extremo de la tubería a lo largo del tiempo

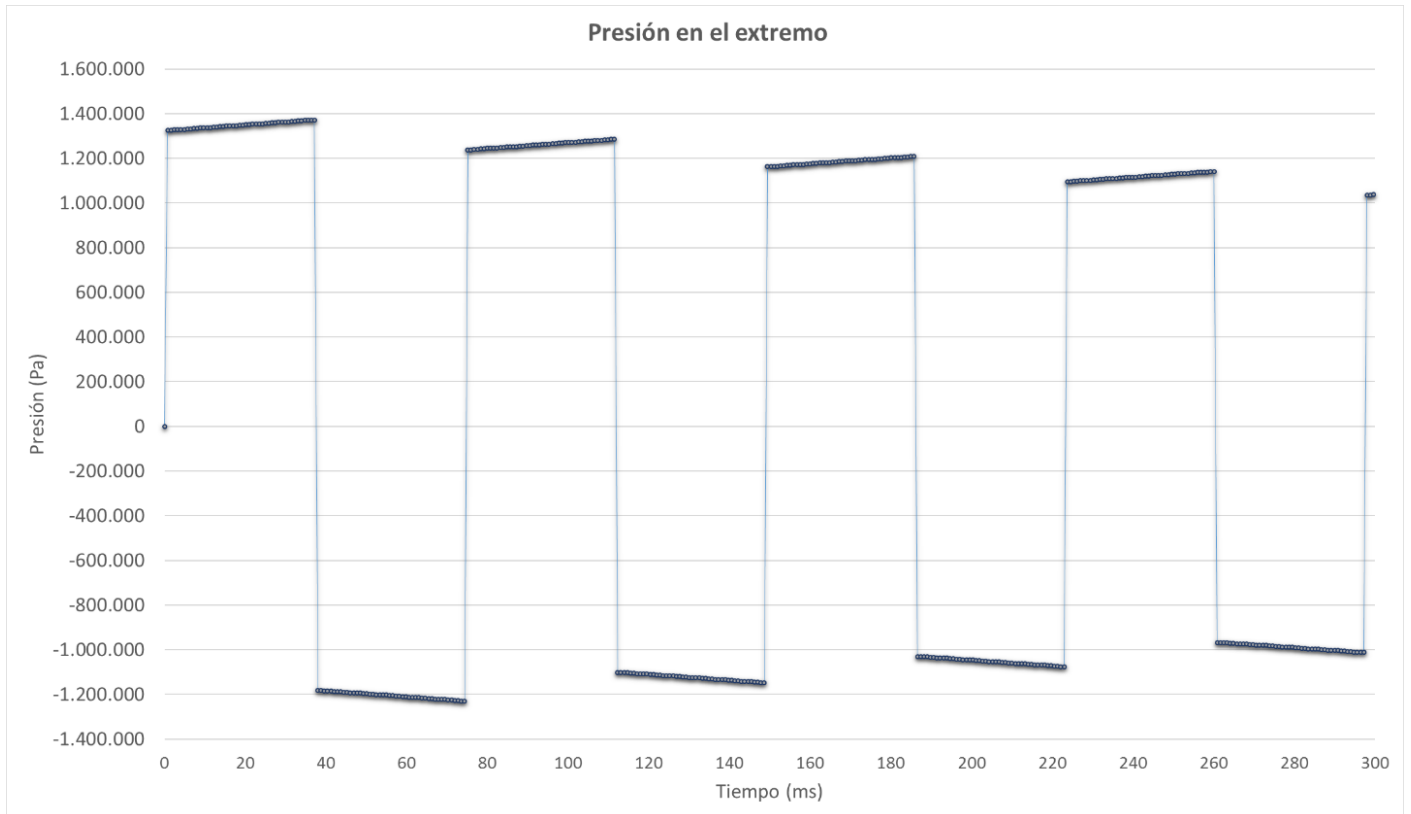


Figura 3.8. Onda de presión en el extremo de la tubería($f \neq 0$)

Se puede observar que la presión a lo largo del tiempo varía a través de una forma de onda cuadrada, con una presión máxima de 13,72 *bar*.

Como se había adelantado, las sobrepresiones alcanzadas son menores al haber considerado las pérdidas por fricción en la tubería, ya que el caudal que hay en el régimen permanente es menor.

En cuanto al periodo de las ondas, no hay nada que añadir respecto del modelo anterior.

3.2.4.2 Aproximación de Allievi

Respecto a la gráfica 3.8, se puede observar cómo tras el cierre instantáneo de la electroválvula, onda de presión sigue aumentando.

Realizando el mismo procedimiento que en el apartado 2.1.6.3, se llega a que el primer salto de presión es el correspondiente a la fórmula de Allievi:

$$P(n, 2) = c\rho_0[U(n-1,1) - U(n,2)] + P(n-1,1) - \frac{f\Delta x\rho_0}{2D}[U(n-1,j)|U(n-1,j)|]$$

- $U(n-1,1)=U$ (Reg. Per)
- $\Delta P_{inicial} = P(n,2) - P(n,1) = P(n,2) - P(n-1,1) + \frac{f\Delta x\rho_0}{2D}U^2$
- $U(n,2) = 0$ m/s
- $P(n,1) = 0$ Pa
- $P(n-1,1) - P(n,1) = \frac{f\Delta x\rho_0}{2D}$

Por lo que

$$\Delta P_{inicial} = \rho_0 U c = 13,25 \text{ bares} \quad [3.25]$$

Tras haber calculado U como $U = \sqrt{gH/(\frac{1}{2} + fL/2D)} = 1,071$ m/s.

La sobrepresión máxima debería ser la correspondiente a la fórmula de Allievi, pero como se ha dicho anteriormente, la onda de presión sigue aumentando. Esto se debe al error asociado a la discretización de las pérdidas por fricción en la tubería. La pendiente de la onda en el tramo de interés (μ) resulta ser

$$\mu(Pa/s) = \frac{fU^2\rho_0 c}{4D} = 1305180,8 Pa/s$$

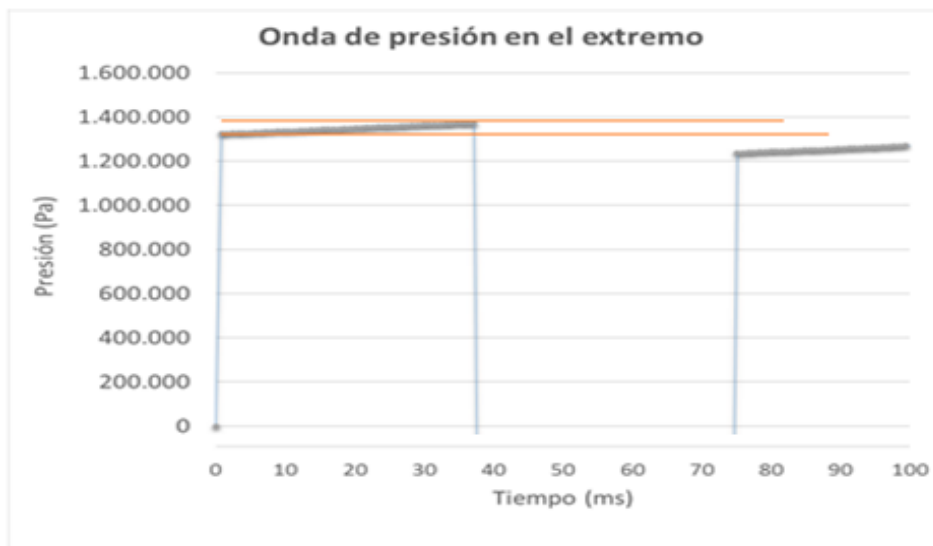


Figura 3.9. Niveles de sobrepresión según la fórmula de Allievi y según el modelo numérico

La sobrepresión máxima alcanzada en el transitorio según el modelo numérico es, por tanto:

$$\Delta P_{max,numérica} = \rho_0 U c + 1305180,8 \frac{2L}{c} = 1.372.400 \text{ Pa} \approx 13,72 \text{ bares}$$

Siendo $\frac{L}{c}$ el tiempo de ida o vuelta de la onda de presión.

El error que se da en la fórmula de Allievi, respecto del modelo numérico, es:

$$error (\%) = \frac{\Delta P_{max,Allievi} - \Delta P_{max,numérica}}{\Delta P_{max,numérica}} * 100 = -3,57\% \quad [3.26]$$

Con objeto del estudio sobre el error asociado en la fórmula de Allievi respecto al modelo numérico, se obtiene la siguiente gráfica:

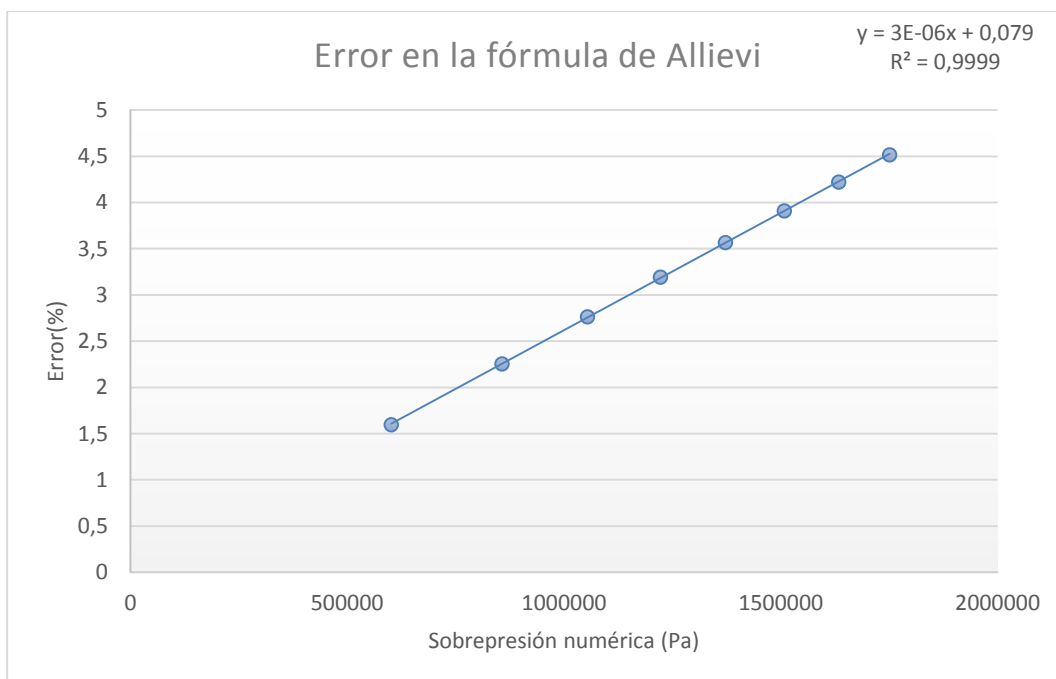


Figura 3.10. Error en la fórmula de Allievi, según el modelo numérico

Como se puede observar, el error asociado (en valor absoluto) a la fórmula de Allievi aumenta linealmente con el aumento de las sobrepresiones alcanzadas en el transitorio según el modelo numérico.

Aprovechando la linealidad del error asociado, se puede determinar la sobrepresión máxima alcanzada según el modelo numérico en función de la fórmula de Allievi de la siguiente forma

$$-\Delta P_{max,numérica}^2 * \frac{m}{100} + \Delta P_{max,numérica} - \Delta P_{max,Allievi} = 0 \quad [3.27]$$

Donde “m” la pendiente de la gráfica anterior

$$m = 3 * 10^{-6}$$

3.2.4.3 Amortiguación de la onda de presión en el extremo de la tubería

Otro fenómeno a tener en cuenta en este modelo es la amortiguación de la onda de presión por efecto de la fricción en la tubería:

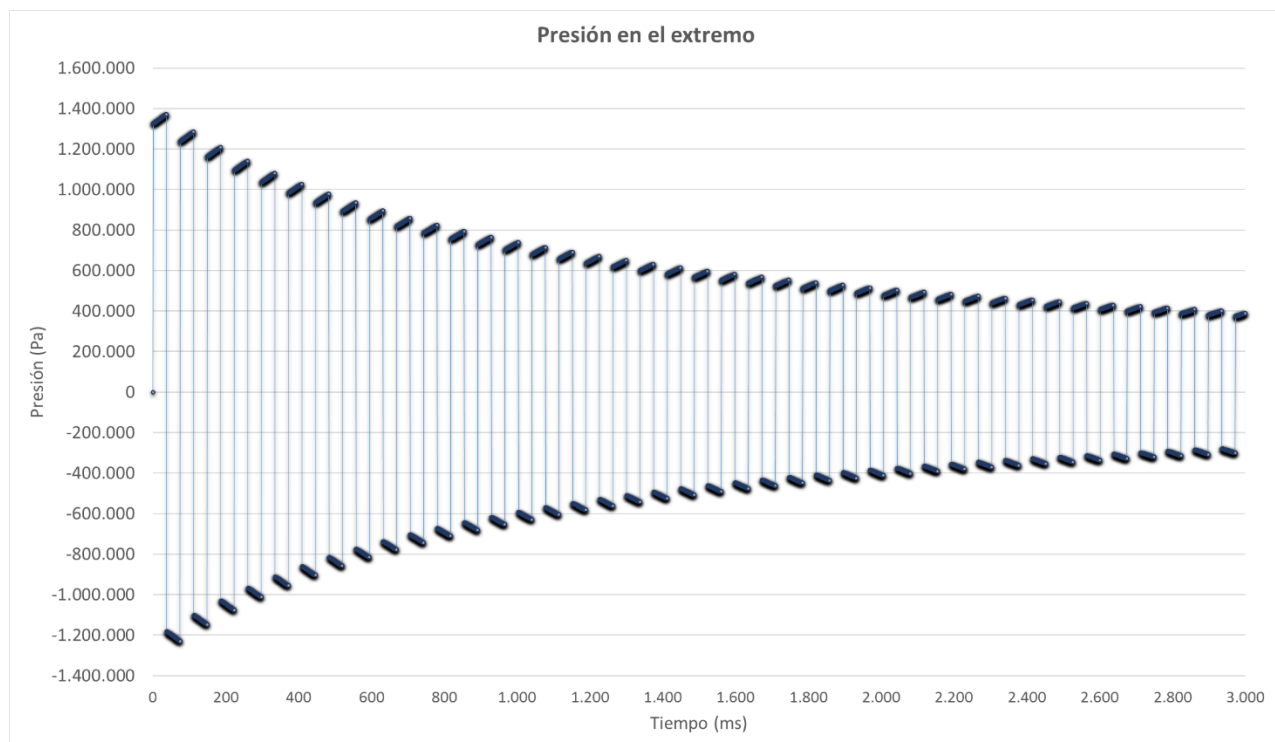


Figura 3.11. Atenuación de la presión en el extremo de la tubería ($f \neq 0$)

La amortiguación se ve con claridad. La longitud de la tubería juega un papel muy importante al considerar las pérdidas por fricción, ya que cuanto mayor sea, mayores serán las pérdidas a lo largo de la misma, y, por lo tanto, menores serán las sobrepresiones máximas y el tiempo del transitorio.

3.3 Modelado con fricción transitoria

En este apartado se completará el modelo anterior con la introducción en el mismo de la fricción debida a la naturaleza transitoria del golpe de ariete.

3.3.1 Antecedentes

En las últimas cuatro décadas mejorar la predicción de la atenuación de la presión a lo largo del tiempo ha sido objeto de muchas investigaciones. Esta atenuación es debida, en gran parte, al término de fricción de naturaleza transitoria que se presenta.

Para introducir el término de fricción transitorio se suele proponer el uso de un modelo basado en la aceleración instantánea del flujo.

Este modelo es conocido como “Modelo de Brunone”, el cual ha sido extendido internacionalmente por los satisfactorios resultados que se obtienen de él.

La ecuación que evalúa la aportación del esfuerzo cortante en flujo transitorio es (Abreu & Betamio de Almeida, 2004; Ghidaoui et al., 2005):

$$\tau_t = \frac{k_t D \rho_0}{4} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad [3.2]$$

Donde k_t es llamado “coeficiente de fricción de Brunone” o “coeficiente de fricción de transitorio” y actúa como un factor de decaimiento sobre los términos de aceleración temporal y convectiva de la ecuación de cantidad de movimiento.

La aplicación del modelo de Brunone requiere una confiable estimación de k_t .

Pezzinga (2000), con el objetivo de estudiar la relación del factor k_t con el resto de las variables presentes en el fenómeno, realizó un análisis dimensional considerando un cierre instantáneo en el extremo aguas debajo de una tubería en serie con un tanque de nivel constante aguas arriba (el mismo caso que se está estudiando hasta ahora).

Los resultados que obtuvo es que este factor dependía de la rugosidad relativa de la tubería, ϵ , y del número de Reynolds para el régimen permanente, Re , entre otros.

No se llegó a encontrar una forma sencilla de relacionar estos parámetros con el factor para su determinación.

Por otra parte, Vardy & Brown (1995) estimaron el coeficiente de fricción transitorio k_t como

$$k_t = 2\sqrt{C^*}, \quad [3.3]$$

donde C^* es un coeficiente de decaimiento que varía en función del número de Reynolds (Vitkovský, 2002):

$$C^* = 7.41/Re^{\log\left(\frac{14.3}{Re^{0.05}}\right)} \quad \text{para } Re > 2300 \quad [3.4]$$

$$C^* = 0.00476 \quad \text{para } Re < 2300$$

Esta estimación fue usada por Vitkovsky en un modelo que realizó en base al de Brunone, de la forma:

$$\tau_t = \frac{k_t D \rho_0}{4} \left[\frac{\partial v}{\partial t} - c * \text{sign}(v) \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \right] \quad [3.5]$$

Siendo la función $\text{sign}(v) = \frac{|v|}{v}$ para $v \neq 0$ y $\text{sign}(v) = 1$ para $v=0$.

Vardy & Brown (2002) realizaron una revisión de las hipótesis de su modelo para aumentar la precisión de los resultados y encontraron que en su trabajo previo, los valores de C^* sobreestimaban las tasas de decaimiento, especialmente para valores de Reynolds altos. Para corregir las compatibilidades encontradas, propusieron una nueva ecuación para evaluar C^* :

$$C^* = 12,86/Re^{\log\left(\frac{15,29}{Re^{0,0567}}\right)} \quad \text{para } 2000 < Re < 10^8 \quad [3.6]$$

$$C^* = 0,00476 \quad \text{para } Re < 2000$$

Comparando gráficamente las hipótesis de Vardy & Brown de 1995 y 2003, se puede observar que el factor de fricción transitoria es mayor en la última hipótesis.

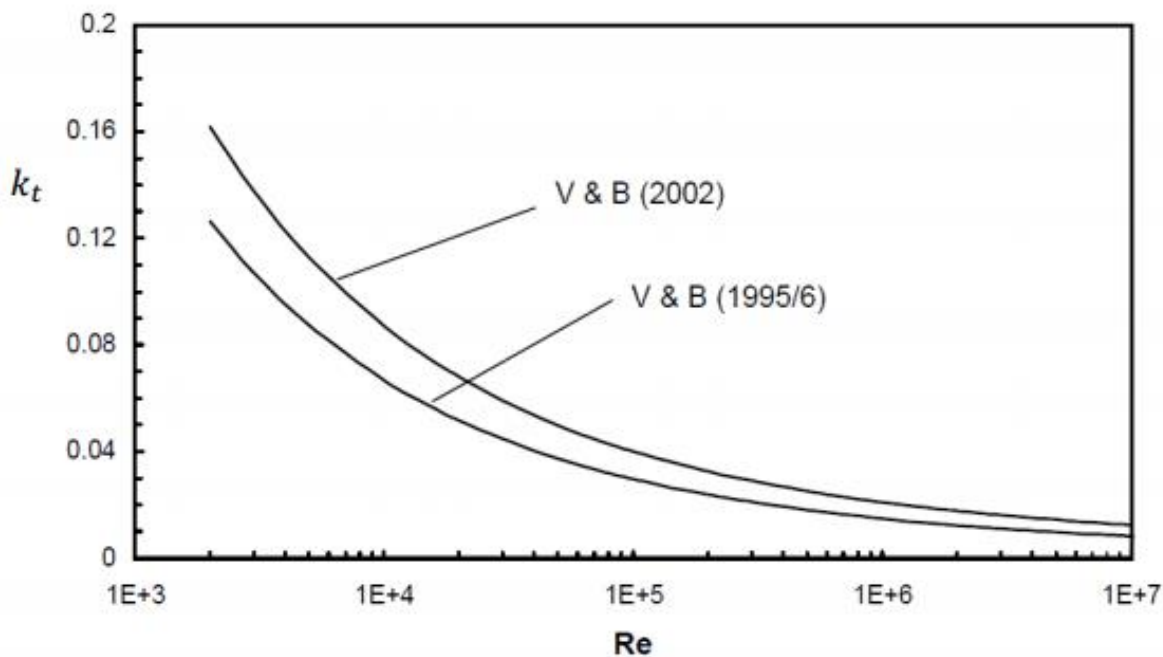


Figura 4.12. Coeficiente adimensional de fricción transitoria según Vardy & Brown.

3.3.2 Simplificación del modelo

1. Flujo unidireccional, con velocidad y presión uniformes en la sección.
2. Toda el área del conducto está mojada durante el transitorio.
3. No se entra en detalle sobre al periodo de cierre de la válvula.

3.3.3 Modelo numérico 1, basado en el término de fricción de Brunone

En este caso, el término de fricción de Brunone va a ser modificado para poder ser introducido con facilidad en el modelo, ya que incluyendo el término tal cual ha sido presentado en la ecuación de cantidad de movimiento, las mismas no tendrían solución por el método de las características.

El término a introducir que se propone es de la forma:

$$\tau_t = \frac{k_t D \rho_0}{4} \left[\text{sign}(v) \left| \frac{dv}{dt} \right| \right] \quad [3.7]$$

Cabe recordar que este término es adicional al término de fricción permanente.

Comparando el término propuesto con el original planteado por Brunone, se puede concluir que ambos mantienen el mismo orden de magnitud, siendo este último un término de contribución de pérdidas que varía en función de las variaciones de velocidad del flujo.

La función sign (Vitkovsky) es muy importante, ya que informa sobre el sentido del flujo, o, lo que es lo mismo, hacia qué dirección se sitúan las pérdidas.

3.3.3.1 Coefficiente de fricción transitorio

Teniendo en cuenta que $Re \approx 10^4$ en régimen permanente, el coeficiente de fricción transitorio según Vardy & Brown toma los siguientes valores:

Ensayo	Ecuación	Kt
Vardy & Brown (1995)	$C^* = 7.41 / Re^{\log(\frac{14.3}{Re^{0.05}})}$ $k_t = 2\sqrt{C^*}$	0.067
Vardy & Brown (2002)	$C^* = 12.86 / Re^{\log(\frac{15.29}{Re^{0.0567}})}$ $k_t = 2\sqrt{C^*}$	0.087

Figura 3.13. Valor del coeficiente adimensional de fricción transitoria (k_t)

En este caso se va a definir un valor de $k_t = 0,087$, usando la reformulación de Vardy & Brown de 2002.

3.3.3.2 Formulación del modelo y solución numérica:

De nuevo se parte de las ecuaciones de continuidad (L1) y de cantidad de movimiento (L2), ahora con un nuevo término en la ecuación de cantidad de movimiento, el término de fricción transitorio:

$$L_1: \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad L_2: \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{fv|v|}{2D} + k_t \left[\text{sign}(v) \left| \frac{dv}{dt} \right| \right] = 0 \quad [3.8]$$

El procedimiento que se lleva a cabo para determinar las ecuaciones de propagación propias de este modelo es el mismo que en los anteriores modelos (las condiciones iniciales y de contorno no afectan a este nuevo término introducido, ya que solo afecta al periodo transitorio).

Ecuaciones de propagación del modelo

$$P(i, j + 1) - P(i - 1, j) + c\rho_0[U(i, j + 1) - U(i - 1, j)] + \frac{f\Delta x\rho_0}{2D}[U(i - 1, j)|U(i - 1, j)|] \quad [3.9]$$

$$+ c\rho_0 k_t \text{sign}(U(i - 1, j))|U(i, j + 1) - U(i - 1, j)| = 0$$

$$P(i, j + 1) - P(i + 1, j) - c\rho_0[U(i, j + 1) - U(i + 1, j)] - \frac{f\Delta x\rho_0}{2D}[U(i - 1, j)|U(i - 1, j)|] \quad [3.10]$$

$$+ c\rho_0 k_t \text{sign}(U(i - 1, j))|U(i, j + 1) - U(i + 1, j)| = 0$$

3.3.4 Resultados del modelo 1

En este capítulo se estudiará la validez del modelo, comparando el mismo con el modelo anterior, en el que solo se tiene en cuenta la fricción en estado permanente.

3.3.4.1 Atenuación de la onda de presión en el extremo del conducto.

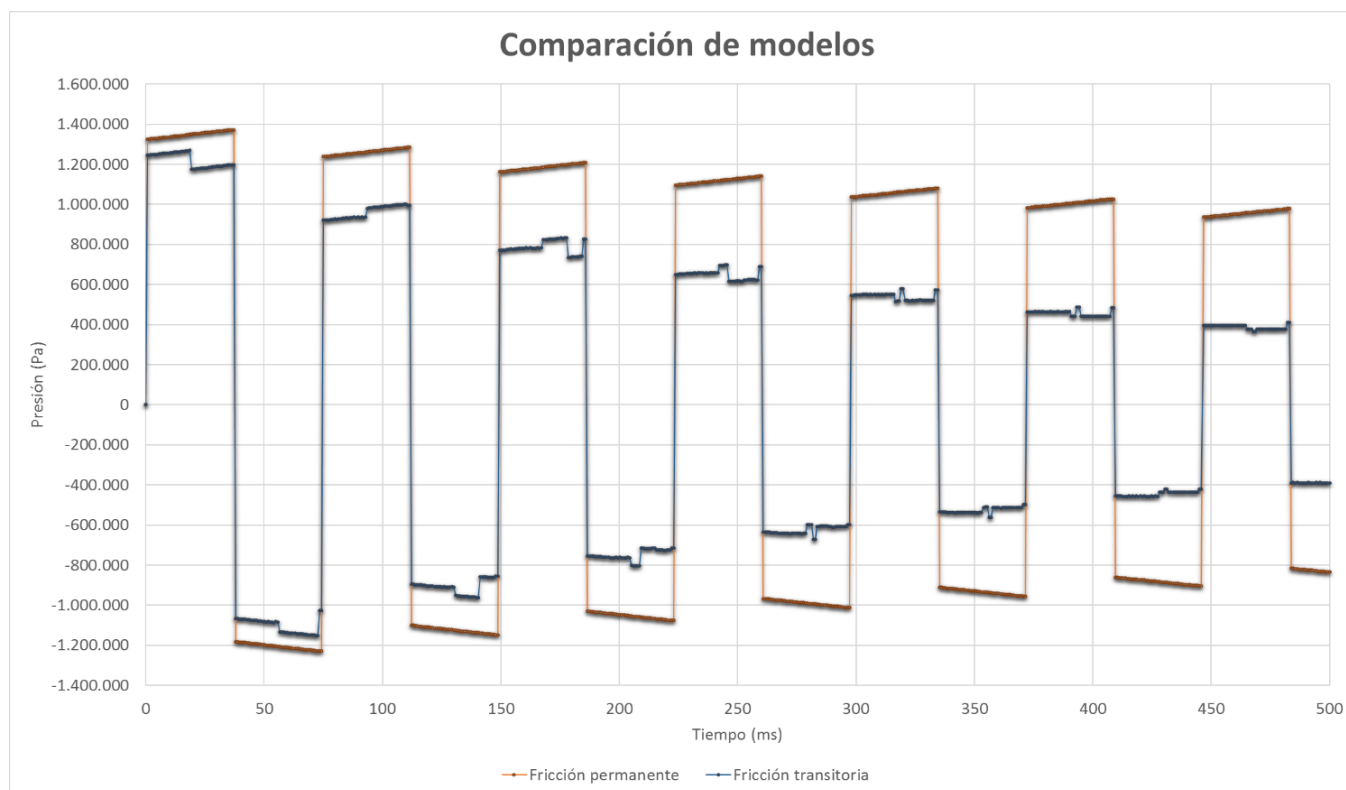


Figura3.15. Gráfica comparativa de los modelos 3.3 y 3.4.3

El término introducido de fricción transitoria genera unas pérdidas cuantificadas por las variaciones espacio/temporales de velocidad que se producen en la tubería. Ya en el primer periodo, donde el transitorio alcanza la sobrepresión máxima, el término de fricción transitoria reduce la misma, por lo que no se cumple la fórmula de Allievi.

3.3.4.2 Conclusiones del modelo

Como se dijo anteriormente, en este estudio lo que realmente interesa es el primer periodo de onda, ya que tras él aparece el fenómeno de cavitación y la resolución numérica carece de validez. En vista de esto, observando la figura 3.15, el primer periodo de onda resulta no llegar a alcanzar la sobrepresión según la fórmula de Allievi, ya que la deceleración de la velocidad en el extremo de la tubería genera unas pérdidas.

Es por ello que se rechaza este modelo, ya que se precisa de un modelo de fricción transitoria que no genere un error en el primer periodo de onda mayor al error que ya existía en el modelo de fricción permanente.

3.3.5 Modelo numérico 2

Puesto que el modelo numérico 1 no ha resultado válido, se propone un nuevo modelo: en este, la fricción transitoria quedará cuantificada con un aumento del coeficiente de fricción permanente, dado por el decremento de la velocidad a lo largo del transitorio, de la forma:

$$f(t^+) = f(0) \left[1 + \frac{U(0) - \max[|U(t^-)|]}{U(0)} \right]^m \quad [3.38]$$

Donde $\max[|U(t^-)|]$ es la velocidad absoluta máxima en la tubería en t^- , y “m” es un factor, cuyo valor se determinará más adelante para ajustar el modelo teórico a los resultados experimentales ($m > 1$).

De esta forma, el coeficiente de fricción permanente aumenta desde el inicio del transitorio hasta 2^m veces al final del mismo.

La idea de considerar la fricción transitoria como un aumento del coeficiente de fricción permanente es bastante utilizada en numerosos modelos, como en el de Zielke (1968) y Carstnens & Roller (1959), estableciendo el aumento del esfuerzo de fricción permanente mediante la siguiente expresión:

$$f = 1 + 0,007 \frac{D^2}{v} \frac{du/dt}{u} \quad [3.39]$$

Donde el valor de 0,007 es un factor obtenido vía empírica.

3.3.5.1 *Formulación del modelo y solución numérica:*

De nuevo se parte de las ecuaciones de continuidad (L1) y de cantidad de movimiento (L2), ahora con un coeficiente de fricción variable $f(t)$:

$$L_1: \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad L_2: \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f(t)v|v|}{2D} = 0 \quad [3.40]$$

De este modo, las ecuaciones propias de propagación del modelo quedan de la siguiente forma:

$$P(i, j + 1) - P(i - 1, j) + c\rho_0 + f \left[1 + \frac{U(0) - \max[|U(j)|]}{U(0)} \right]^m \frac{\Delta x \rho_0}{2D} [U(i - 1, j)|U(i - 1, j)|] \quad [3.41]$$

$$P(i, j + 1) - P(i + 1, j) - c\rho_0 - f \left[1 + \frac{U(0) - \max[|U(j)|]}{U(0)} \right]^m \frac{\Delta x \rho_0}{2D} [U(i - 1, j)|U(i - 1, j)|] \quad [3.42]$$

3.3.6 Resultados del modelo 2

En este apartado se comprobará primeramente la validez del modelo 2, comparándolo con el modelo de fricción permanente ($m=0$), y después, cómo influye el valor del factor m en el modelo.

3.3.6.1 Atenuación de la onda de presión en el extremo de la tubería

En esta gráfica se puede constatar el efecto que causa el factor m del modelo:

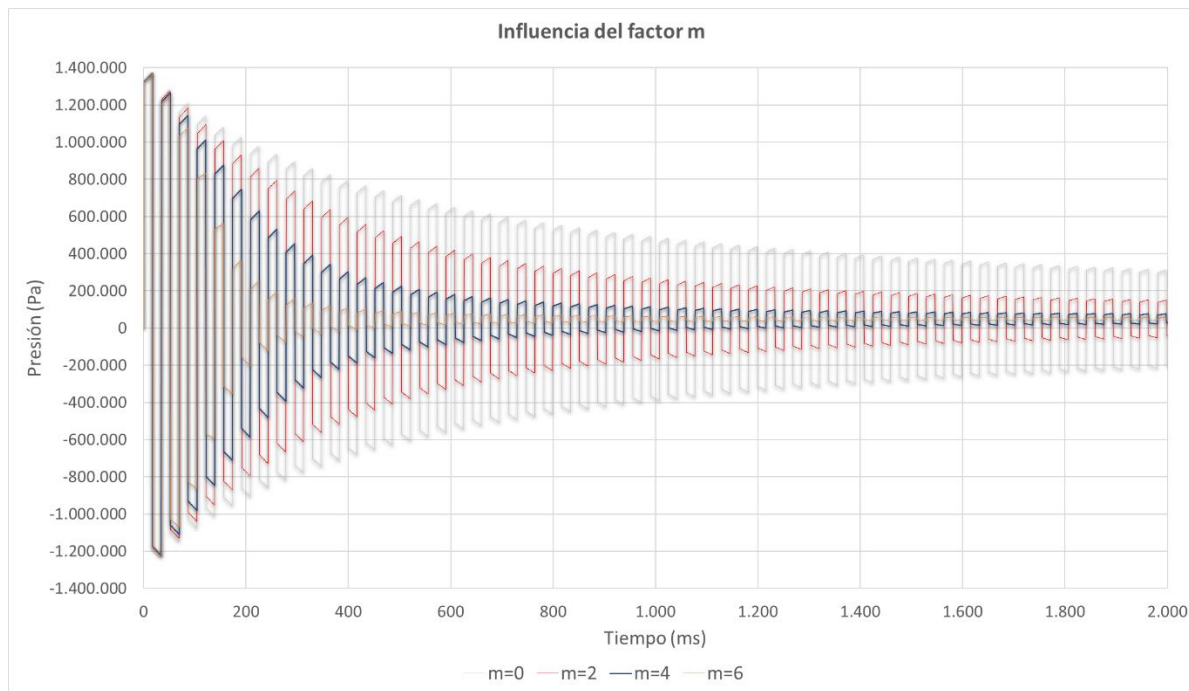


Figura 3.16. Atenuación de la presión en el extremo de la tubería (fricción transitoria, modelo 2)

Con este modelo se ha solventado el problema que se presentaba en el anterior modelo. La sobrepresión máxima, incluyendo la fricción transitoria, coincide con la sobrepresión máxima del modelo de fricción permanente 3.3, que a su vez cumple la fórmula de Allievi (con su pequeño error asociado), como se demostró anteriormente.

Conforme se va aumentando el valor de m , la fricción transitoria actúa incrementando cada vez más la atenuación de la onda a lo largo del tiempo.

3.4 Ecuación de cierre de la válvula

Hasta ahora se ha supuesto que el cierre de la válvula es instantáneo, es decir, en la discretización del problema, la válvula pasa de estar totalmente abierta a estar totalmente cerrada en un solo intervalo temporal (Δt , que en nuestro caso particular era de aproximadamente 1ms).

En la realidad esto no es así, ya que la válvula tiene un cierto periodo de cierre, del orden de los 20-60 ms.

La variación del área dada en el extremo de la tubería por el cierre de la válvula con el tiempo es lo que se denomina ecuación de cierre de la válvula.

La ecuación de cierre de la válvula se representa de la siguiente forma:

$$\alpha(t) = \frac{A(t)}{A} = \left[\frac{t}{t_{\text{cierre}}} - 1 \right]^y \quad [3.43]$$

Siendo “y” el exponente de cierre, característico de cada válvula, y normalmente desconocido.

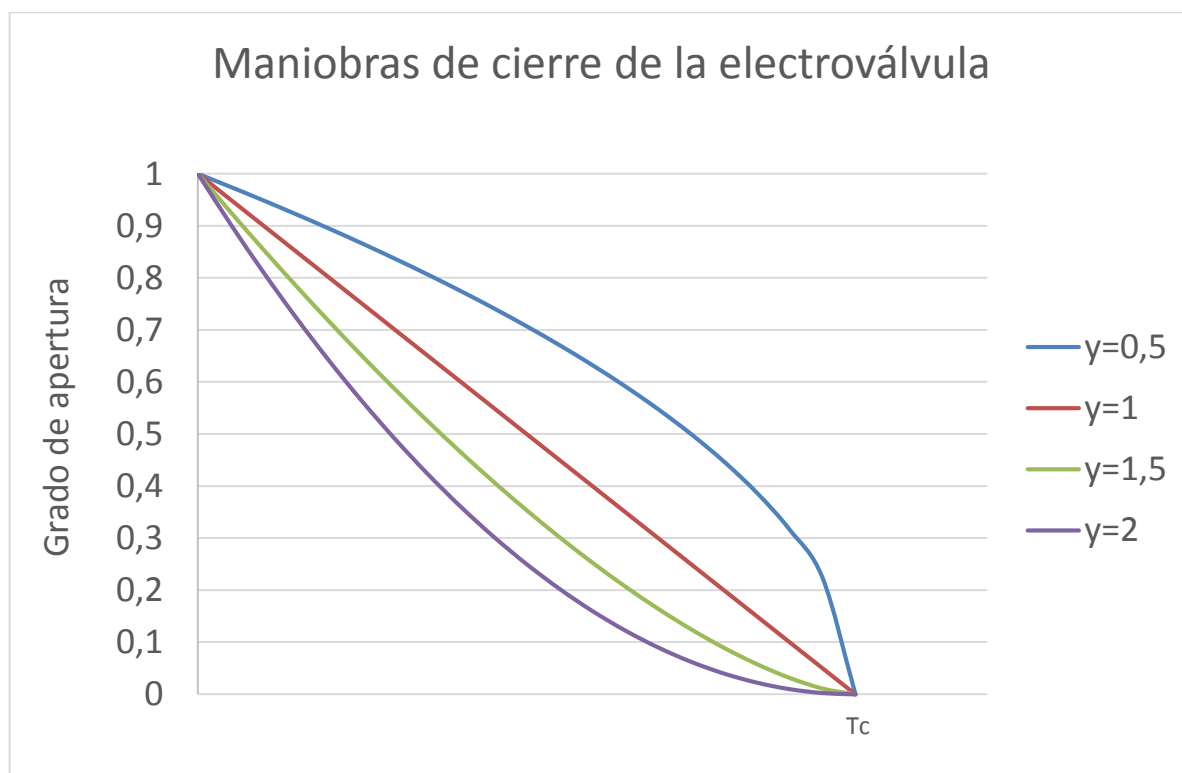


Figura 3.17. Maniobras de cierre de la electroválvula

3.5 Condición de contorno en el extremo de la tubería. Cierre no instantáneo

Se nos presenta el siguiente esquema:



Figura 3.18. Euler Bernouilli en la válvula

Aplicando la ecuación de Bernouilli (ecuación 2.11) a las anteriores líneas de corriente se obtiene la nueva condición de contorno en el extremo del conducto:

$$P(L, t) = \frac{1}{2} \rho_0 K(t) \frac{Q(L, t)^2}{A(L)^2} \quad [3.44]$$

Siendo $Q(L, t)$ el caudal que pasa por la posición L y $P(L, t)$ la presión relativa en el extremo.

Como se puede observar, ahora entran en juego las pérdidas localizadas en la válvula ($K_v(t)$), que varían con el tiempo.

En $t=0$, se cumple

$$P(L, 0) = \frac{1}{2} \rho_0 K_v(0) \frac{Q(L, 0)^2}{A(L)^2} \quad [3.45]$$

Hasta ahora la presión absoluta en el extremo se había considerado igual a la presión atmosférica, es decir, $K_v(0) = 0$.

Al introducir la constante de pérdidas de la válvula no nula, la velocidad disminuirá, de la forma:

$$U = \frac{1}{A(0)} \sqrt{\frac{\frac{\Delta P}{\rho}}{\frac{8K_v}{\pi^2 D^4} + \frac{8fL}{\pi^2 D^5}}} \quad [3.46]$$

No obstante, para el caso que se está estudiando, y suponiendo una constante de pérdidas $K_v \simeq 0,03$ para la electroválvula en posición totalmente abierta, la velocidad (y por relación directa, la sobrepresión máxima alcanzada) se ve reducida un 0,01% respecto del modelo anterior para un cierre instantáneo.

Combinando las ecuaciones 3.44 y 3.45 se llega a la ecuación 3.47:

$$\sqrt{\frac{P(L, t)}{P(L, 0)}} = \frac{K_v(t) A(L) Q(L, t)}{K_v(0) A(0) Q(L, 0)} \quad [3.47]$$

Suponiendo que $\frac{K_v(t)}{K_v(0)} = 1$ e introduciendo la ecuación 5.1 en la ecuación 5.5, se obtiene la condición de contorno en el extremo del conducto (ecuación 5.6):

$$\sqrt{\frac{P(L, t)}{P(L, 0)}} = \alpha(t) \frac{Q(L, t)}{Q(L, 0)} \quad [3.48]$$

Más adelante se introducirán las pérdidas localizadas en el modelo numérico del transitorio, por lo que se introducirá la relación $\frac{K_v(t)}{K_v(0)}$ de la válvula, sin considerarse igual a la unidad.

Modelo de fricción transitoria con la ecuación de cierre de la válvula

En este capítulo se analizará cómo influyen el tiempo y el exponente de cierre de la electroválvula en el transitorio hidráulico.

3.5.1 Resultados

Los siguientes resultados han sido obtenidos teniendo en cuenta la fricción debida al estado transitorio, para un exponente de aumento del coeficiente de fricción permanente $m=4$.

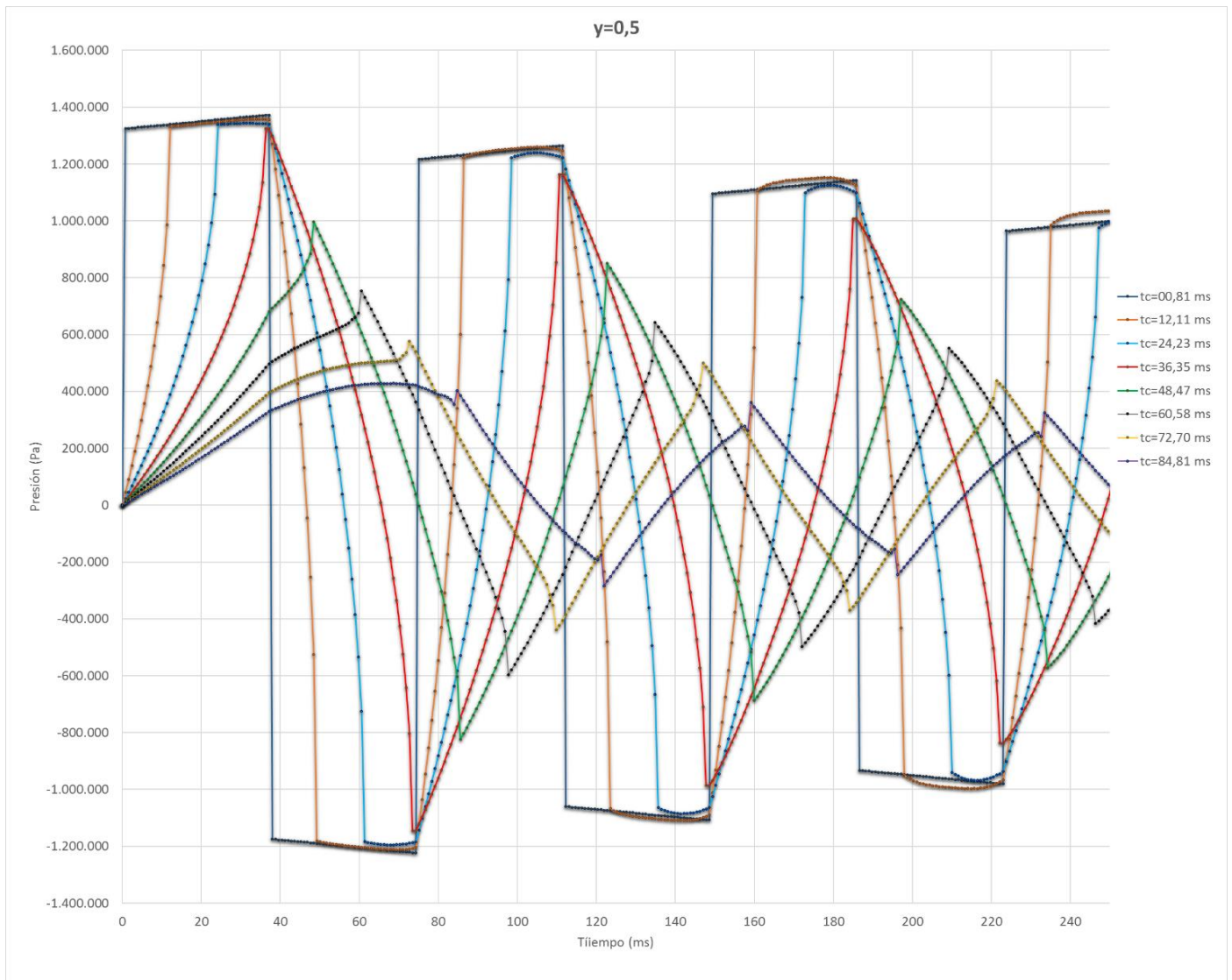


Figura 3.19. Onda de presión en el extremo. $Y=0,5$.

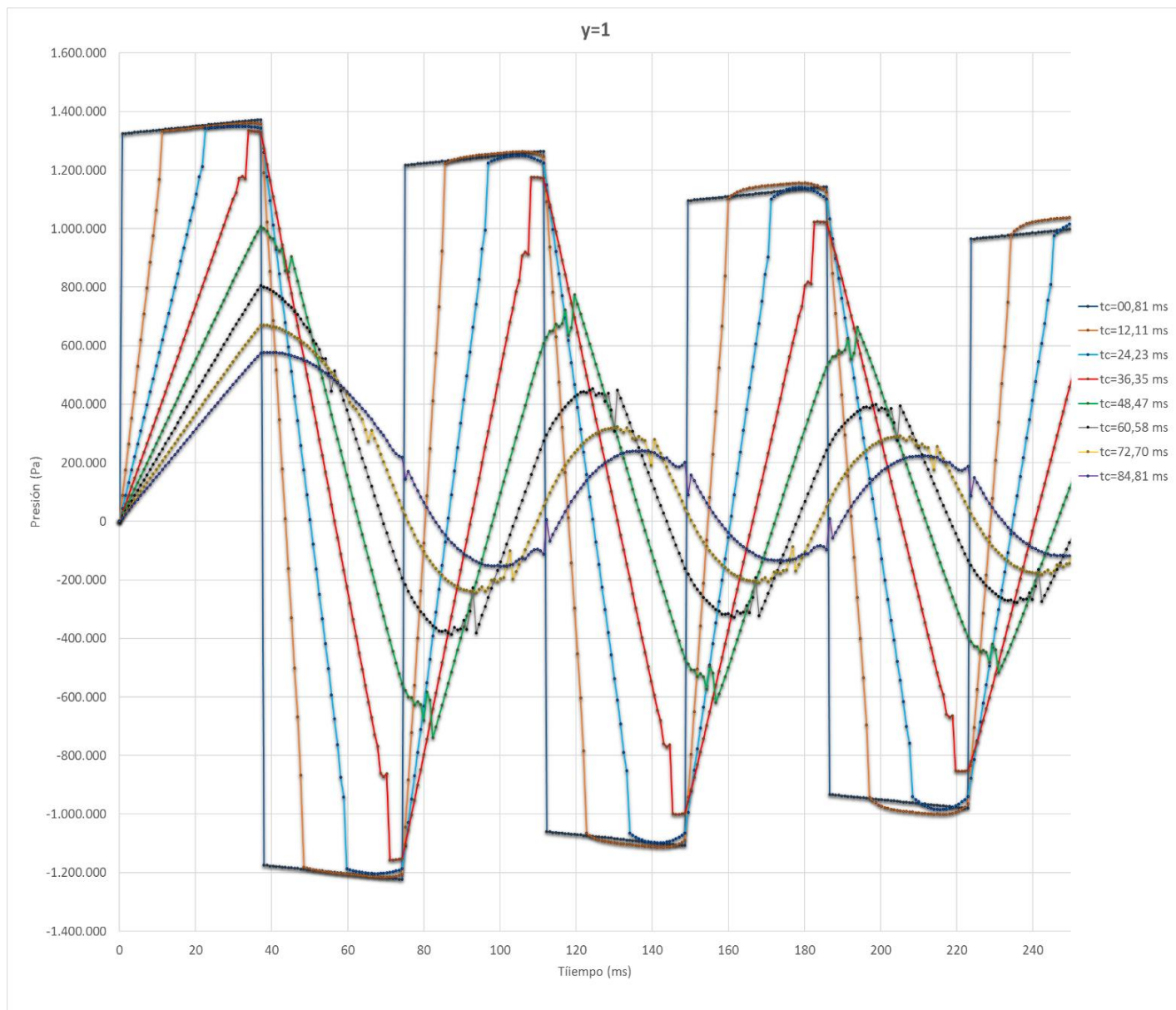


Figura 3.20. Onda de presión en el extremo. Y=1.

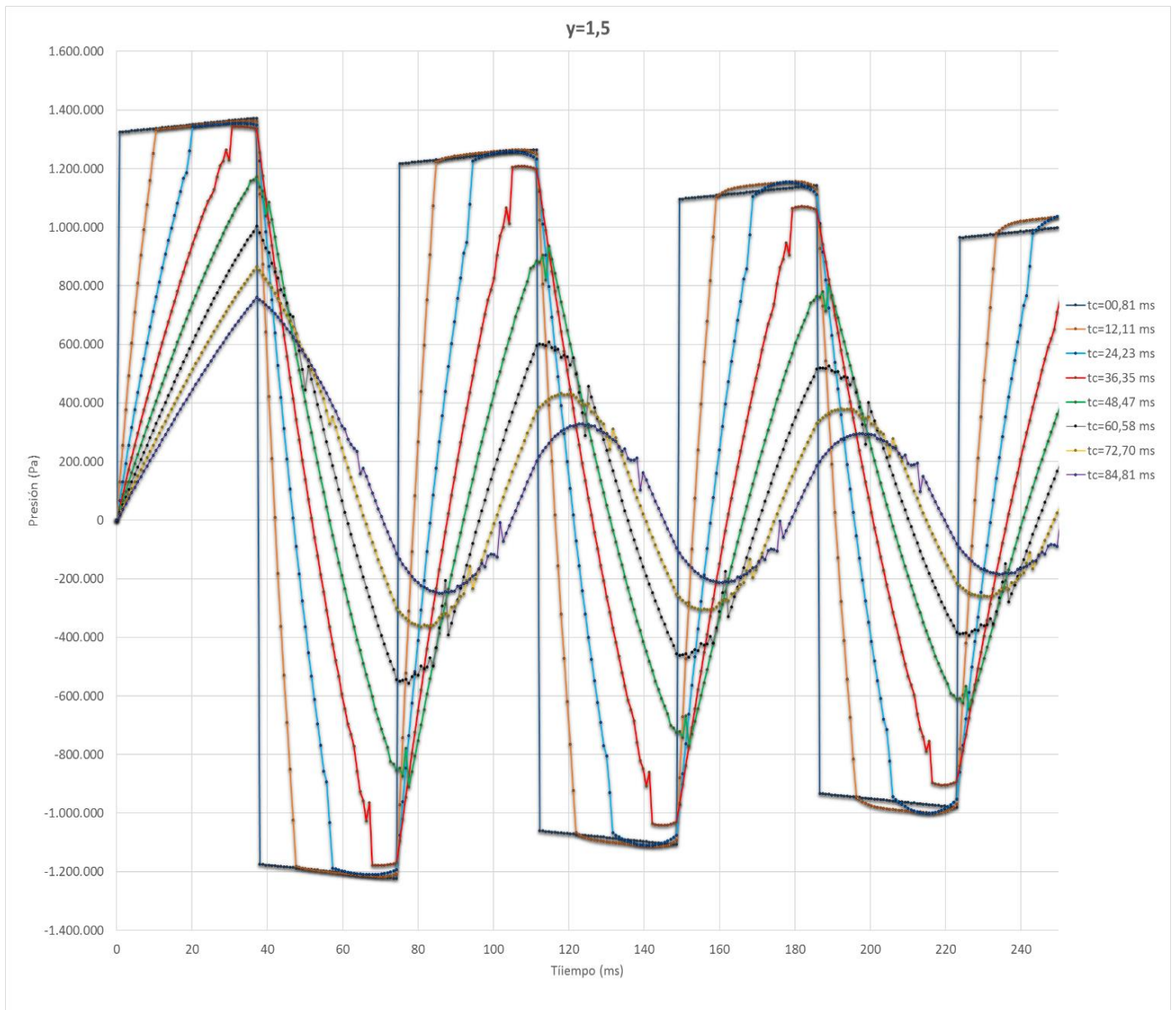


Figura 3.21. Onda de presión en el extremo. Y=1,5.

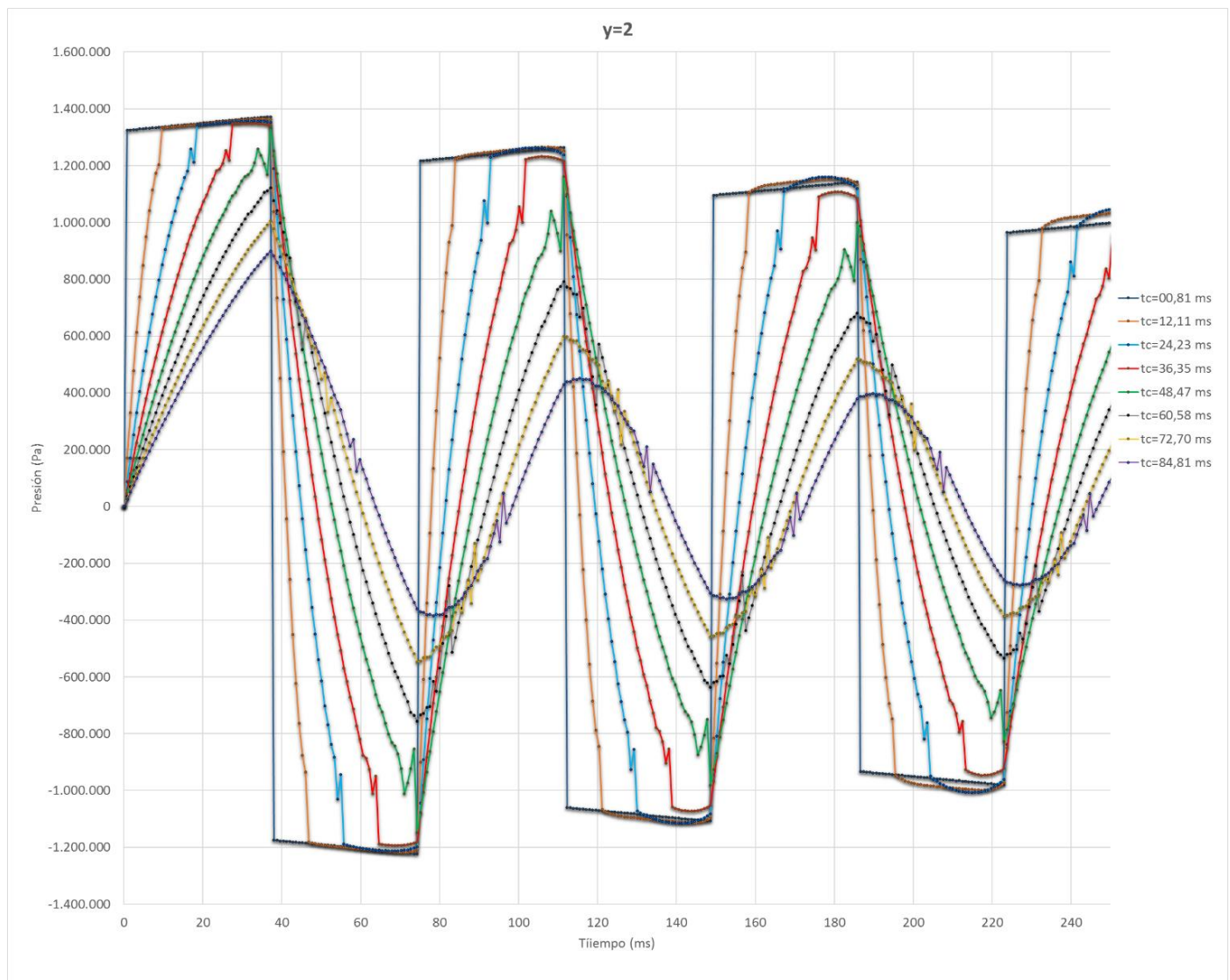


Figura 3.22. Onda de presión en el extremo. Y=2.

En cuanto a la forma de onda, se puede apreciar como para tiempos de cierre mayores que el tiempo de ida y vuelta (37,15 ms), cierres rápidos, pero no instantáneos, la onda se va suavizando conforme crece el exponente de cierre de la electroválvula (y).

También a partir de esos tiempos de cierre se puede apreciar cómo el primer periodo de la onda de presión es algo mayor que el periodo normal (37,15 ms), generándose un desfase respecto a la onda que se generaría si el tiempo de cierre fuera menor al tiempo de ida y vuelta de la onda (cierre instantáneo).

En la siguiente gráfica se puede apreciar la tendencia al desfase temporal para distintos exponentes y tiempos de cierre.

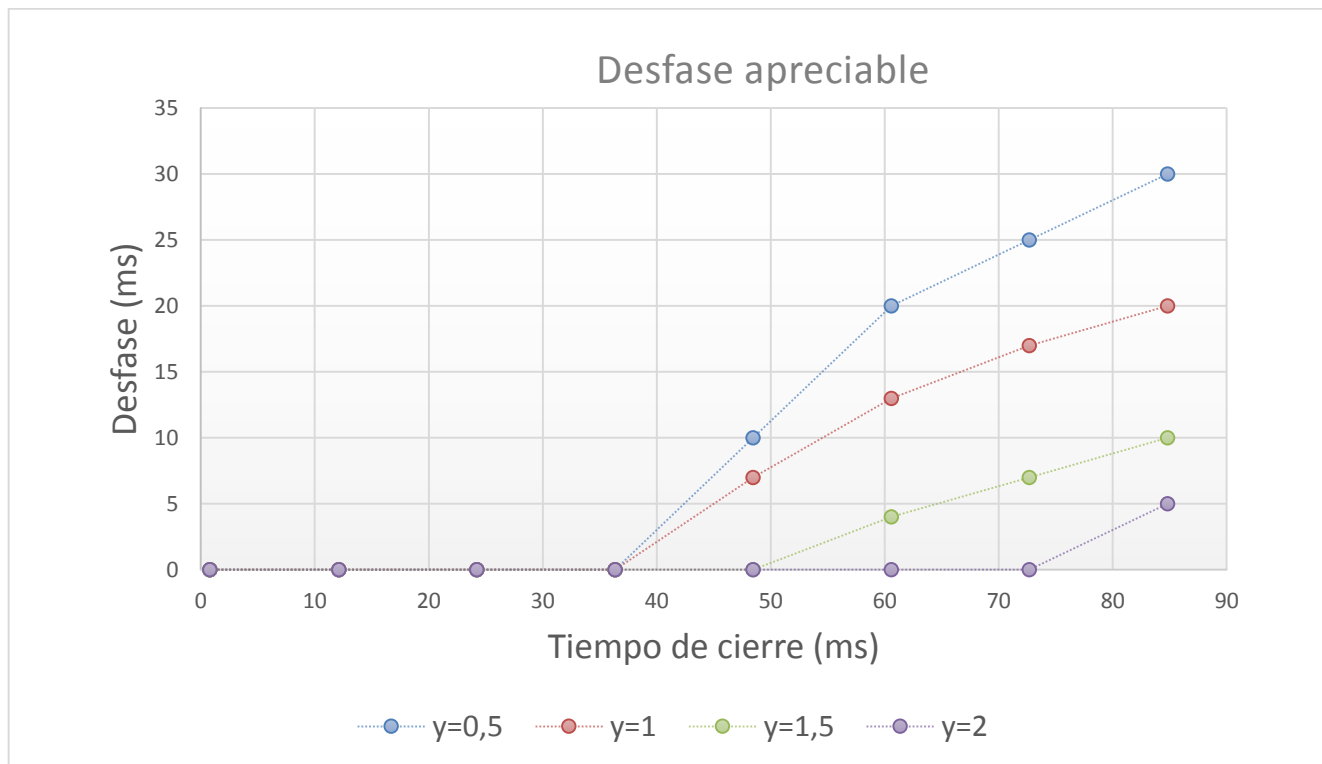


Figura 3.23. Desfase apreciable para tiempos de cierre altos

Como puede observarse, para un tiempo de cierre dado, conforme aumenta el exponente de cierre, el desfase disminuye hasta anularse.

También para un exponente de cierre dado, el desfase disminuye conforme se disminuye el tiempo de cierre hasta anularse.

La cuestión más importante en este capítulo es la relación entre las sobrepresiones máximas alcanzadas y los tiempos de cierre de la electroválvula para un exponente de cierre dado:

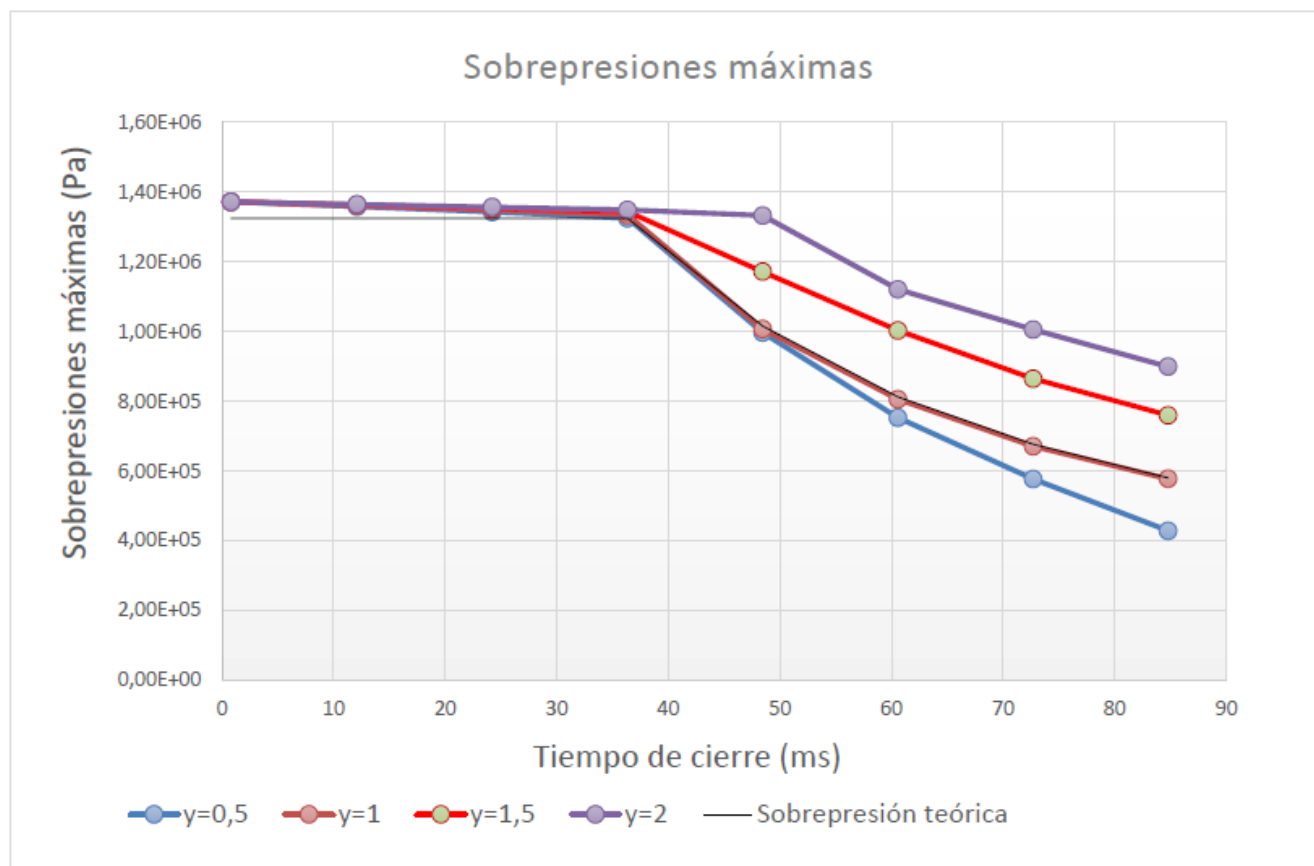


Figura 3.24. Sobrepresiones máximas en función del tiempo y el exponente de cierre.

Para tiempos de cierre menores al tiempo de ida y vuelta, las sobrepresiones obtenidas por el modelo numérico son mayores que las sobrepresiones formuladas por Allievi, como ya se estudió anteriormente. No obstante, conforme aumenta el tiempo de cierre, la sobrepresión máxima se va acercando al valor de sobrepresión teórico.

Para tiempos de cierre menores que el tiempo de ida y vuelta de la onda, es decir, cierres rápidos, pero no instantáneos, como era de esperar, las sobrepresiones máximas disminuyen conforme el tiempo de cierre aumenta.

No obstante, la disminución de las sobrepresiones máximas con el aumento del tiempo de cierre depende del exponente de cierre de la válvula: conforme el exponente de cierre aumenta, el grado de disminución es menor.

La sobrepresión máxima según la fórmula de Michaud (sobrepresión máxima teórica) coincide aproximadamente con la sobrepresión máxima obtenida en el modelo numérico para un exponente de cierre de $\gamma=1$.

En el caso de tener un exponente de cierre diferente a la unidad, la fórmula de Michaud no sería válida.

Aproximadamente, para instalaciones en las que exista solamente un solo tipo de tubería, las sobrepresiones máximas obtenidas en el modelo y las sobrepresiones máximas según la fórmula de Michaud guardan una regresión lineal múltiple de la forma:

$$\frac{\Delta P_{max,numérica}(y, tc)}{\Delta P_{max,Michaud}} \simeq ay + bt_c(ms) + c \quad [3.49]$$

Con ayuda de un programa de estadística (R-Comander) se obtienen los coeficientes a, b y c:

```
Salida

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.12909 -0.05582 -0.01467  0.05544  0.15429

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.581901   0.114221   5.094 0.000206 ***
X0           0.384489   0.037181  10.341 1.22e-07 ***
X1           0.001098   0.001534   0.716 0.486759
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.08314 on 13 degrees of freedom
(2 observations deleted due to missingness)
Multiple R-squared:  0.8921, Adjusted R-squared:  0.8755
F-statistic: 53.72 on 2 and 13 DF,  p-value: 5.193e-07
```

Figura 3.25. Ventana de salida de R-Comander. Instalaciones de un solo tipo de tubería

a	0,384489
b	0,001098
c	0,581901

Figura 3.26. Coeficientes de regresión. Instalaciones de un solo tipo de tubería

El valor de R^2 resulta ser 0,8755, por lo que el ajuste del modelo de regresión lineal múltiple es bastante aceptable.

Desarrollando la ecuación anterior, se obtiene un modelo generalizado de la forma:

$$\Delta P_{max,numérica}(y, tc)(Pa) = 2\rho L\Delta U \left[\frac{ay + c}{t_c} + 1000b \right] = 2\rho L\Delta U (m/s) \left[\frac{0,384489y + 0,581901}{t_c(s)} + 1,098 \right] \quad [3.50]$$

Para el caso en particular que se está tratando, resulta:

$$\Delta P_{max,numérica}(y, tc)(Pa) = 49229,2 \left[\frac{0,384489y + 0,581901}{t_c(s)} + 1,098 \right] \quad [3.51]$$

3.6 Esquemas hidráulicos con mayor complejidad

Hasta ahora, todo el estudio realizado ha sido en base a un esquema hidráulico simple de tanque-tubería-válvula.

En una instalación hidráulica, lo más común es encontrarse con codos, tes, ensanchamientos, caudalímetros, válvulas, etc., que originan pérdidas localizadas a lo largo de la instalación, además de instalaciones con tuberías de distintos diámetros.

A continuación, se procederá a completar el modelo numérico desarrollado hasta ahora introduciendo las pérdidas localizadas y los cambios de diámetro en la instalación.

3.6.1 Pérdidas localizadas

Para abordar este caso se va a hacer una analogía entre la ecuación de Bernoulli (ecuación 2.11) y la ecuación (discretizada) de propagación determinada en el modelo clásico de fricción permanente (ecuación 3.23).

Se parte de un tramo de longitud L y un coeficiente de pérdidas f , con dos pérdidas localizadas (K_1 y K_2):

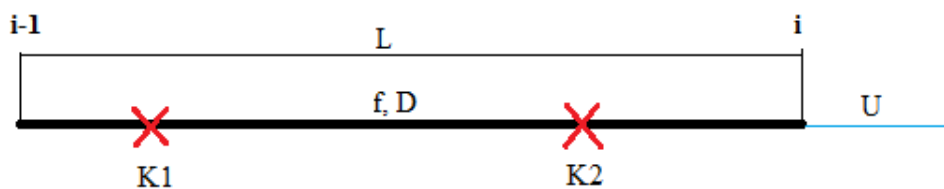


Figura 3.27. Tramo de tubería con dos pérdidas localizadas

La ecuación de Bernoulli queda de la forma:

$$\left(\frac{P_i}{\rho} \right) - \left(\frac{P_{i-1}}{\rho} \right) = -\frac{U^2}{2} \left(f \frac{L}{D} + K_1 + K_2 \right) \quad [3.52]$$

La ecuación de propagación (se utilizará la invariante C+), suponiendo que el tramo se encuentra entre dos nodos (i e $i+1$, por lo tanto, la longitud L coincide con el Δx de la discretización), quedaría de la forma (sin tener en cuenta las pérdidas localizadas):

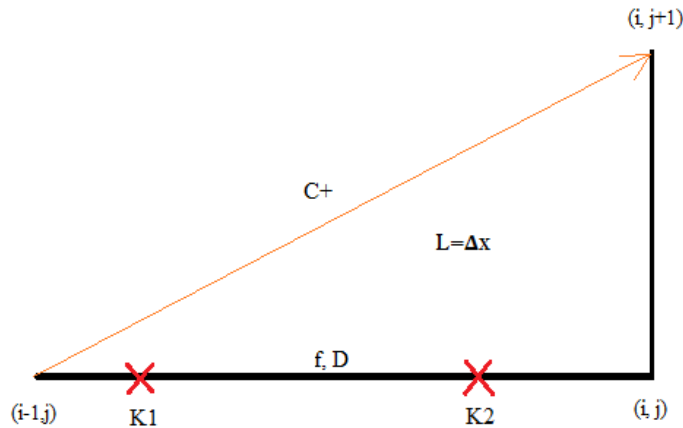


Figura 3.28. Tramo de tubería con dos pérdidas localizadas

$$\left(\frac{P(i, j+1)}{\rho} + cU(i, j+1) \right) - \left(\frac{P(i-1, j)}{\rho} + cU(i-1, j) \right) = -\frac{U|U|}{2} \left(f \frac{\Delta x}{D} \right) \quad [3.53]$$

Comparando esta ecuación de propagación con la ecuación de Bernoulli, se pueden introducir las pérdidas localizadas de la forma:

$$\left(\frac{P(i, j+1)}{\rho} + cU(i, j+1) \right) - \left(\frac{P(i-1, j)}{\rho} + cU(i-1, j) \right) = -\frac{U|U|}{2} \left(f \frac{\Delta x}{D} + K_1 + K_2 \right) \quad [3.54]$$

Las ecuaciones de propagación del modelo clásico (considerando solamente el término de fricción permanente) quedan de la siguiente forma:

$$P(i, j+1) - P(i-1, j) + c\rho_0[U(i, j+1) - U(i-1, j)] + \left(f \frac{\Delta x}{D} + \sum K(i-1, i) \right) \frac{\rho_0}{2} [U(i-1, j)|U(i-1, j)|] = 0 \quad [3.55]$$

$$P(i, j+1) - P(i+1, j) - c\rho_0[U(i, j+1) - U(i+1, j)] - \left(f \frac{\Delta x}{D} + \sum K(i, i+1) \right) \frac{\rho_0}{2} [U(i-1, j)|U(i-1, j)|] = 0 \quad [3.56]$$

Siendo $\sum K(i-1, i)$ y $\sum K(i, i+1)$ el sumatorio de las pérdidas localizadas situadas entre los nodos de propagación $[(i-1) - (i)]$ y $[(i) - (i+1)]$ respectivamente.

3.6.2 Tuberías de distinto tipo

En caso de instalaciones en las que haya tuberías distintas, hay varias cuestiones a tener en cuenta.

La primera de ellas es que, al tener un área variable, por continuidad, la variable a tratar es el caudal y no la velocidad. Las ecuaciones quedan de la forma:

$$L_1: \frac{1}{c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\rho_0}{A(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad L_2: \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{Q}{A(x)^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{f(x)Q|Q|}{2D(x)A(x)^2} = 0 \quad [3.57]$$

Donde $A(x)$ es el área de la tubería en cada sección y $f = f(x)$ el coeficiente de fricción, que puede variar a lo largo de la instalación.

Otra cuestión es la velocidad de propagación, que también varía según el tipo de tubería (ver ecuación 3.10.).

Para que la resolución del sistema por el método de las características sea válida, habrá que mantener el intervalo temporal constante, es decir, se tendrán que establecer intervalos espaciales que dependan de la forma

$$\Delta x_i = c_i * \Delta t$$

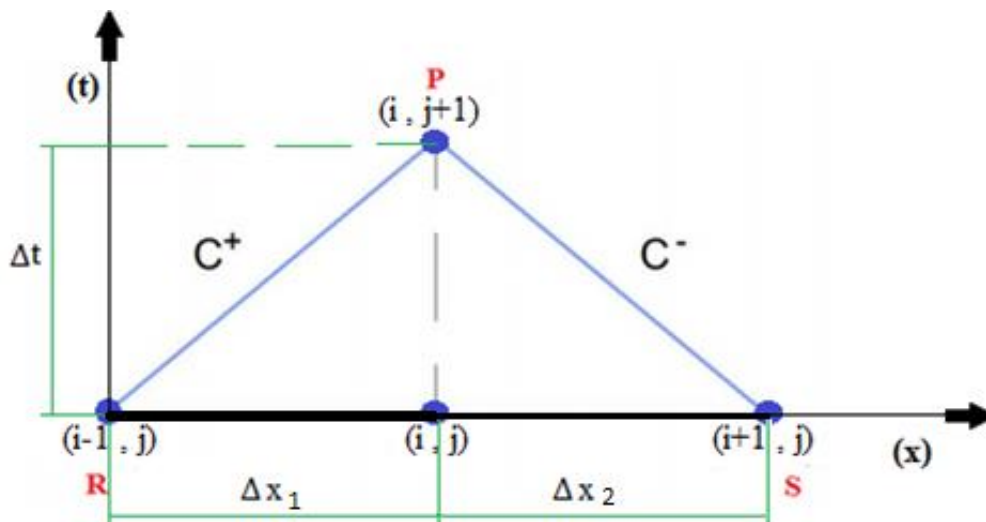


Figura 3.29. Propagación de puntos. Tuberías de distinto tipo.

Siendo c_i la velocidad de propagación para cada tramo de la instalación, y Δx_i el incremento espacial asociado para un incremento temporal Δt .

3.6.3 Modelo global

Teniendo en cuenta todos los aspectos abarcados hasta ahora, el modelo matemático trata de las siguientes ecuaciones de propagación:

$$P(i, j + 1) - P(i - 1, j) + c(i - 1, i)\rho_0 \left[\frac{Q(i, j + 1)}{A(i)} - \frac{Q(i - 1, j)}{A(i - 1)} \right] \quad [3.58]$$

$$+ \left(\sum_{= \mathbf{0}} f(i - 1, i, k) \frac{Q_{in}(i - 1, i, k)}{\max[Q(i - 1, i, j, k)]} \frac{\Delta x(i - 1, i, k)}{D(i - 1, i, k)} + \sum K(i - 1, i) \right) \frac{\rho_0}{2A(i - 1)^2} [Q(i - 1, j)|Q(i - 1, j)]$$

$$P(i, j + 1) - P(i + 1, j) - c(i, i + 1)\rho_0 \left[\frac{Q(i, j + 1)}{A(i)} - \frac{Q(i + 1, j)}{A(i + 1)} \right] \quad [3.59]$$

$$- \left(\sum_{= \mathbf{0}} f(i, i + 1, k) \frac{Q_{in}(i, i + 1, k)}{\max[Q(i, i + 1, j, k)]} \frac{\Delta x(i, i + 1, k)}{D(i, i + 1, k)} + \sum K(i, i + 1) \right) \frac{\rho_0}{2A(i + 1)^2} [Q(i + 1, j)|Q(i + 1, j)]$$

Se debe aclarar que el término

$$\sum f(i - 1, i, k) \frac{Q_{in}(i - 1, i, k)}{\max[Q(i - 1, i, j, k)]} \frac{\Delta x(i - 1, i, k)}{D(i - 1, i, k)}$$

y el respectivo a la segunda ecuación, han sido definidos en forma de sumatorio, ya que en un intervalo espacial puede ser que se den tuberías de distinto tipo (k).

Este modelo es el que se utilizará para la resolución numérica del golpe de ariete de la instalación docente, cuyas características se van a detallar en los siguientes capítulos.

4 Descripción de la instalación experimental docente. Pérdidas asociadas

El estudio del golpe de ariete en la Universidad Politécnica de Cartagena se realiza en un circuito secundario de una instalación de ensayo de bombas centrífugas. Esta instalación es un circuito cerrado y consta de un depósito cilíndrico de 300 litros (abierto a la atmósfera) del que se aspiran dos bombas centrífugas de 1,5 kW.



Figura 4.1. Instalación Hidráulica

Aunque las tuberías generales son de PVC, para los ensayos de golpe de ariete se ha diseñado una derivación de cobre con diferentes diámetros que descarga a través de dos ramales en paralelo al depósito. En uno de los ramales se ha instalado una electroválvula de cierre rápido y en otro, una válvula manual de esfera. En el siguiente apartado se procederá a explicar detalladamente cada una de las partes de la derivación en la que se encuentra la electroválvula, que es la parte que se va a estudiar.



Figura 4.2. Instalación Hidráulica (Derivación)

En una primera descripción general se dirá que la instalación diseñada para el estudio del golpe de ariete tiene una longitud de 24,5 metros, desde la derivación PVC-Cobre hasta la descarga en el depósito, abierto a la atmósfera, en los cuales nos podemos encontrar con dos diámetros diferentes de tubería: a los primeros 12 metros le corresponde una tubería de diámetro exterior 22 mm, luego hay otros 12,2 metros con una tubería de diámetro exterior 15 mm, y finalmente, 0,3 m de tubería de diámetro exterior 22 mm hasta la descarga al depósito.

No obstante, la longitud característica L del ensayo del golpe de ariete no son los 24,5 m totales, sino la distancia de aguas arriba a la electroválvula, que son 23,5 m.

Datos de la instalación:

Diámetro interior 1 de la tubería (D_{1in})	19 mm
Diámetro interior 2 de la tubería (D_{2in})	12 mm
Espesor de la tubería (e)	1,5 mm
Longitud de la instalación	24,5 m
Tiempo de cierre de la electroválvula (t_0)	50 ms
Módulo de elasticidad de la tubería (E)	$1,1 \cdot 10^{11}$ Pa
Módulo de compresibilidad del agua ($E_c = \rho a^2$) donde a es la velocidad del sonido en el agua	$2,1 \cdot 10^9$ Pa
Densidad del agua (ρ)	1000 kg/m^3
Viscosidad cinemática del agua (ν)	$1,14 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$

Figura 4.3. Datos de la instalación

4.1 Elementos que forman la instalación y pérdidas de carga asociadas

En una instalación hidráulica es fácil encontrarse con todo tipo de pérdidas de carga, indudablemente desde las propias pérdidas por fricción del fluido con las tuberías, hasta las pérdidas de carga localizadas en codos, derivaciones, ensanchamientos, estrechamientos, válvulas, etc.

4.1.1 Codos

En la instalación hay dos tipos de codos dependiendo de la tubería (15 o 22 mm), por lo tanto, el factor de pérdidas de carga podrá ser distinto:

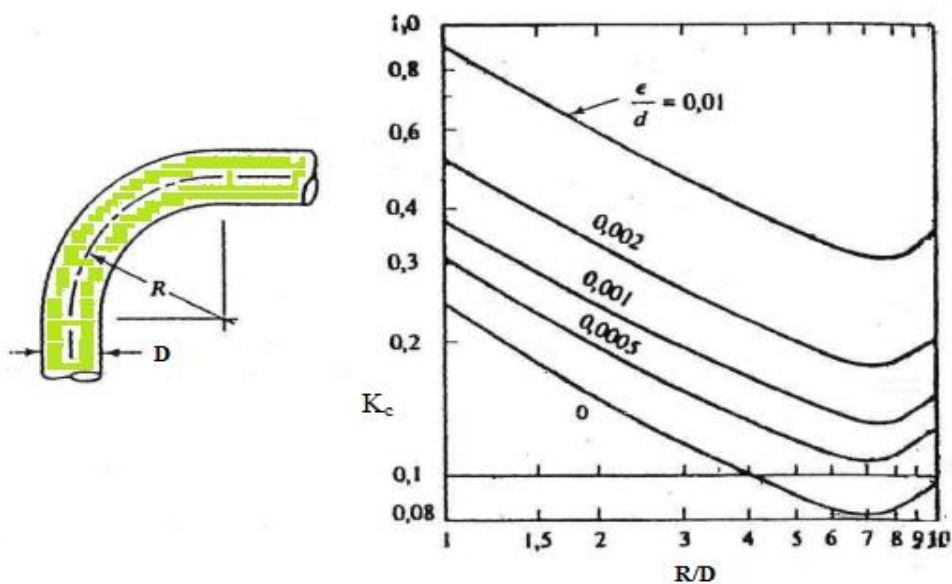


Figura 5.4. Pérdidas localizadas en codos de 90° (Ingeniería de Fluidos (tablas y gráficas), Antonio Viedma, 2012)

4.1.1.1 Codos de diámetro 12 mm

Los codos presentes en la instalación, para un diámetro interior de 12 mm, tienen un radio de giro de 15 mm. Atendiendo a la figura 5.4, se puede determinar el factor de pérdidas debido a este elemento como $K_{c12} = 0,9$.



Figura 4.5. Codo de diámetro exterior de 15 mm

4.1.1.2 Codos de diámetro 22 mm

Los codos presentes en la instalación, para un diámetro interior de 19 mm, tienen un radio de giro de 20 mm. Considerando igualmente la figura 5.4, se puede concluir que el factor de pérdidas de este elemento equivale a $K_{c19} = 0,9$.



Figura 4.6. Codo de diámetro exterior de 22 mm

4.1.2 Tes

A lo largo de la instalación hay varias tes, tanto con $D_{in} = 19$ mm como con $D_{in} = 12$ mm, en flujo lateral y en flujo directo.

Los valores de K_T se encuentran seleccionados en la figura 4.8:

$$K_{TD} = 0,1$$

$$K_{TL} = 0,58$$

Como no se dispone de los valores de K_T para los diámetros de la instalación se ha optado por aproximar al diámetro inmediato inferior.



Figura 4.6. Te de diámetro exterior de 22 mm en flujo lateral

Diámetro nominal, in	Roscado				Acoplado				
	$\frac{1}{2}$	1	2	4	1	2	4	8	20
Tes:									
Flujo directo	0,90	0,90	0,90	0,90	0,24	0,19	0,14	0,10	0,07
Flujo lateral	2,4	1,8	1,4	1,1	1,0	0,80	0,64	0,58	0,41

Figura 4.7. Pérdidas localizadas en tes (Ingeniería de Fluidos (tablas y gráficas), Antonio Viedma, 2012)

4.1.3 Ensanchamiento/estrechamiento brusco

En régimen permanente, según el sentido del flujo, un elemento se puede considerar ensanchamiento o estrechamiento, pero en este caso las pérdidas van a ir asociadas también a un transitorio en el que el flujo, como ya se ha visto, no tiene siempre el mismo sentido.



Figura 4.8. Ensanchamiento / Estrechamiento de la instalación

En la instalación se dispone de un elemento en el que se pasa de un diámetro interior de 12 mm a otro de 19 (figura 4.8) (Al final se vuelve a pasar de diámetro 12 mm a 19 mm, pero a través de una te).

Tomando el elemento como estrechamiento, atendiendo a la ecuación 4.2, el factor de pérdidas asociado es de $K_{es} = 0,15$, y tomándolo como ensanchamiento, atendiendo a la ecuación 4.1, $K_{en} = 0,36$ (Ingeniería de Fluidos, UD9, Antonio Viedma, 2012).

$$K_{en} = \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]^2 \quad [4.1]$$

$$K_{es} = 0,42 \left[1 - \frac{d^2}{D^2} \right] \quad [4.2]$$

En un régimen permanente de funcionamiento, el elemento de la figura 4.8 queda totalmente definido como estrechamiento, pero en el transitorio hidráulico que se está estudiando, la velocidad cambia de sentido. No obstante, en el estudio del transitorio siempre se tomará el elemento como un estrechamiento.

La descarga en el depósito también supone una pérdida adicional, cuyo factor de pérdidas se puede determinar con la ecuación 4.2, con la aproximación $d/D = 0$, por lo que

$$K_{dep} = 1$$

4.1.4 Electroválvula (cierre de compuerta)



Figura 4.9. Electroválvula de la instalación

En este caso se tiene un elemento cuyo factor de pérdidas de carga varía según el grado de apertura. La figura 4.10 muestra el aumento de las pérdidas en la válvula (supuesto cierre de compuerta) conforme se va cerrando. Esta variación es exponencial, como se ha comprobado en la figura 4.11.

Condición $K_v(0) = 0,03$	Cociente K/K (abierta)	
	Compuerta	Esfera
Abierta	1,0	1,0
Cerrada, 25%	3,0-5,0	1,5-2,0
50%	12-22	2,0-3,0
75%	70-120	6,0-8,0

Figura 4.10. Pérdidas localizadas en una electroválvula (Ingeniería de Fluidos (tablas y gráficas), Antonio Viedma, 2012)

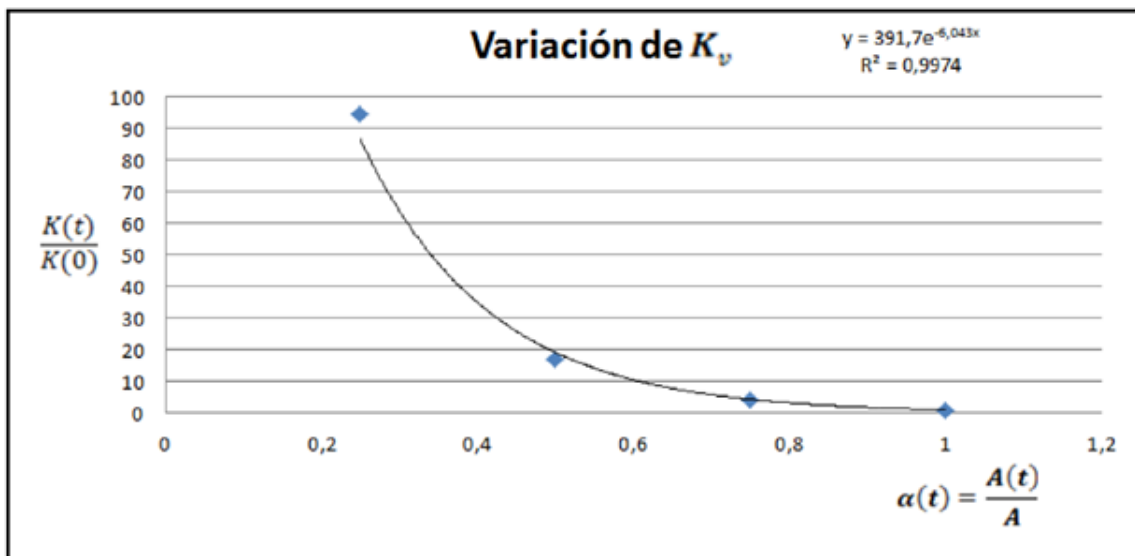


Figura 4.11. Pérdidas localizadas en una electroválvula (gráfico)

Una vez determinado el coeficiente de pérdidas en la válvula según el grado de apertura de la misma, cabe reconsiderar la aproximación $\frac{K_v(t)}{K_v(0)} = 1$ que se hizo anteriormente..

$$\text{De esta forma, } \frac{K_v(t)}{K_v(0)} \simeq \frac{391,7e^{(-6,043\alpha(t))}}{391,7e^{(-6,043\alpha(0))}} = 421e^{(-6,043\alpha(t))}$$

Aclaración: ahora, el coeficiente de pérdidas asociado a la válvula cuando la misma esté totalmente abierta es de $K_v(0) = 391,7e^{(-6,043\alpha(0))} = 0,93$.

4.1.5 Tuberías

Como se ha visto en el apartado 3.3.2, el factor de fricción permanente f se determina en el diagrama de Moody a partir del Re y de la rugosidad relativa de la tubería.

Para un régimen de funcionamiento de la bomba de entre 1000 y 1800 r.p.m. se tiene un caudal de entre $1,5 \cdot 10^{-4}$ y $3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. Estos datos han sido determinados experimentalmente.

Los valores extremos del número de Reynolds para cada tubería son

D_{in} (mm)	U_{max} (m/s)	U_{min} (m/s)	Re_{max}	Re_{min}
19	1,06	0,53	17.666	8.833
12	2,65	1,33	27.895	14.000

Figura 4.12. Límites del número de Reynolds

Con una rugosidad relativa actual para la instalación de $\epsilon_t = 0,02$ (determinada en el apartado 4.3.2.), se puede determinar el coeficiente de fricción máximo y mínimo para cada tipo de tubería atendiendo al diagrama de Moody (figura 3.6).

D (mm)	f_{max}	f_{min}
19	0,055	0,05
12	0,05	0,05

Figura 4.13. Valores límite de f

Observando la figura 4.13, para un régimen de funcionamiento de la bomba de entre 1000 y 1800 r.p.m, se puede considerar que el factor de fricción para cada tubería es constante:

D (mm)	f_{med}
19	0,052
12	0,05

Figura 4.14. Valores promediados de f

5 Régimen permanente de la instalación experimental

La instalación hidráulica no dispone de caudalímetro, y una de las variables más importantes para verificar los resultados teóricos es conocer el caudal real que circula por la instalación.

Para ello se ha decidido insertar un caudalímetro en el que se han tenido en cuenta las siguientes condiciones:

1. Tipo de tubería: se trata de tubería de cobre ($D = 22 \text{ mm}$).
2. Fluido: el tipo de fluido es importante, en concreto, su viscosidad. En este caso se trata de agua, el fluido más común.
3. Rango de caudal: se ha podido estimar que para un régimen de entre 1000 y 1800 r.p.m el rango de caudal en la instalación oscilará entre 5 y 20 l/min.
4. Presión máxima a soportar: el caudalímetro tendrá que ser capaz de soportar las sobrepresiones generadas por el golpe de ariete. Estas sobrepresiones se cuantifican según la fórmula de Allievi.

En este caso, se ha comprobado que las sobrepresiones máximas van a ser de unos 25 bares (a 1800 r.p.m.).

Una vez detalladas las especificaciones de la instalación, se puede entrar en otro tipo de detalles a tener en cuenta en cuanto a la elección del caudalímetro, por ejemplo:

- Se requiere que el caudalímetro disponga un pequeño display en el que visualizar los resultados.
- Convendría la ausencia de partes móviles, ya que el golpe de ariete podría causar daños en ellas.
- Alimentación.
- Tipo de señal generada.
- Coste.
- Disponibilidad.

5.1.1 Caudalímetros candidatos

En general, casi todos los caudalímetros de turbina consultados cumplían las especificaciones, a excepción de las sobrepresiones alcanzadas. También se han descartado otros por su elevado coste.

A continuación, se muestran los 2 caudalímetros candidatos para la instalación:

5.1.1.1 *Serie FV101 (FV101)*

<http://es.omega.com/pptst/FV100.html>

Este caudalímetro cumple con todas las especificaciones (rango de caudal de 9 a 90 l/min, presión admisible de 20 bares).

Otros detalles de importancia son:

- Incorpora display.
- No tiene partes móviles.
- Alimentación entre 10 y 30 V.
- Salida analógica.
- Disponible.
- Coste: 725 euros.

5.1.1.2 *Serie FTB1400 (FTB 1412)*

http://es.omega.com/pptst/FTB1400_SERIES.html

Este caudalímetro cumple con todas las especificaciones (rango de caudal de 2,8 a 28 l/min, presión admisible de más de 300 bares).

El tipo de conexión es de 1/2", por lo que habría que hacer una adaptación a 3/4".

Otros detalles de importancia son:

- No incorpora display, por lo que habría que adquirir uno aparte. Este es el display más idóneo para este caudalímetro: <http://es.omega.com/pptst/FTB-1400-D.html> (Precio: 400 euros).
- Puede tener partes móviles (no se sabe).
- Alimentación entre 10 y 30 V.
- Salida a pulsos.
- En stock.
- Coste: 675 euros.

5.1.1.3 *Elección final*

El caudalímetro finalmente elegido ha sido el primer modelo presentado, ya que es más barato, se indica que no tiene partes móviles, y ya incorpora un display.

He aquí sus características:



Figura 5.15. Imagen del caudalímetro adquirido.

ESPECIFICACIONES

Flujo

Precisión: $\pm 2\%$ escala completa
Repetibilidad: $\pm 0,25\%$ escala completa
Banda muerta de alarma: 5% escala completa
Tiempo de respuesta: Seleccionable por el usuario, de 0,9 a 7,5 segundos
Caudal máximo: Por encima del rango, llegando ocasionalmente hasta un 125% de capacidad

Temperatura

Precisión: $\pm 1\%$ escala completa
Tiempo de respuesta: 1,8 seg. a 63% de caudal
Banda muerta de alarma: 2%
Pantalla: LED de 3 dígitos numéricos de 7,62 mm (0,3"), que parpadean debajo del punto de referencia
Presión de funcionamiento máxima:
 2" e inferior: 20 bares (300 psig)
 3 y 4": 13 bares (200 psig)
Temperatura de funcionamiento: 2 a 99 °C (35 a 210 °F)
Clasificación de la carcasa:
 IP65: Tipo 1, 3, 4, 12, y 13
Salida analógica: 4 a 20 mA (600 Ω @ 24 Vcc)

Conexión eléctrica:

Unidades FV100 (solo flujo):

Conector macho micro de 5 pines,

Unidades FV100-T (flujo/temperatura):

Conector macho micro de 8 pines

Salida de la alarma: SPST SSR, operación NA o NC, seleccionable; doble alarma para unidades de flujo/temperatura

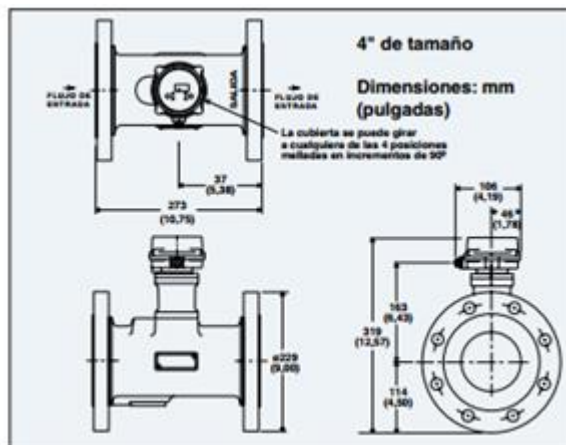
FV101 y 102: 250 mA @ 30 Vcc hasta 85 °C (185 °F)

del FV103 al 108: 125 mA @ 30 Vcc hasta 85 °C (185 °F), grado de corriente reducido a temperaturas más altas

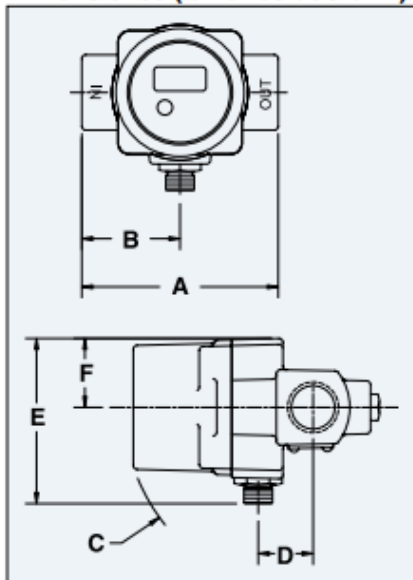
Potencia: 10 a 30 Vcc @ 80 mA
Piezas húmedas: Latón, PVDF y sellos FKM; los cuerpos de acero inoxidable 316 están disponibles para pedidos especiales en tamaño $\frac{1}{4}$ " y $\frac{1}{2}$ "; comuníquese con Flow Engineering para obtener más detalles.

Instalación: Se recomienda utilizar 10 veces el diámetro del tubo antes y 5 veces el diámetro después

Cableado para la serie FV100



Dimensiones (tamaños de ¼ a 2")



Tamaño (pulgadas)	mm (pulgadas)					
	A	B	C	D	E	F
¼, ½	82 (3,25)	41 (1,62)	80 (3,13)	23 (0,91)	69 (2,74)	29 (1,15)
¾, 1	115 (4,54)	58 (2,27)	103 (4,04)	53 (2,08)	106 (4,19)	45 (1,78)
1½, 2	173 (6,82)	87 (3,41)	120 (4,71)	71 (2,80)	106 (4,19)	45 (1,78)

Para hacer su pedido, visite es.omega.com/fv100 para consultar precios y detalles

Caudalímetro N.º de modelo	Caudalímetro/ transmisor de temperatura N.º de modelo	Conexión	Rango de caudal (GPM)		Caída de presión máxima	Peso en libras (kg)
			Mín	Máx		
FV101	—	¼ FNPT	0,4	4	9,2	1,3 (2,8)
FV102	—	½ FNPT	1,2	12	3,6	1,2 (2,6)
FV103	FV103-T	¾ FNPT	2,5	25	3,6	2,9 (6,3)
FV104	FV104-T	1 FNPT	5	50	9,5	2,7 (5,9)
FV105	FV105-T	1½ FNPT	10	100	4,8	5,9 (13)
FV106	FV106-T	2 FNPT	20	200	4,9	4,8 (10,5)
FV107	FV107-T	3" ANSI RF	30	300	1,3	19 (42)
FV108	FV108-T	4" ANSI RF	60	600	1,3	25 (55)

Accesorios

N.º de modelo	Descripción
FV100-C1	Cable de repuesto de 1 m (3') para la serie FV100
FV100-C3	Cable de 3 m (9,8') para la serie FV100
FV100-C10	Cable de 10 m (32,8') para la serie FV100
FV100-CT2	Cable de repuesto de 2 m (6,5') para la serie FV100-T
FV100-CT5	Cable de 5 m (16,4') para la serie FV100-T
FV100-CT10	Cable de 10 m (32,8') para la serie FV100-T
PSR-24L	Alimentación regulada de 24 Vcc

Completo de serie con manual del operador y cable de 1 m (3').

Ejemplos de pedidos: FV101, medidor Vortex de ¼ FNPT, 0,4 a 4 GPM. FV104, medidor de 1 FNPT, 5 a 50 GPM.

Figura 5.1. Especificaciones del caudalímetro adquirido.

Observaciones:

En un principio, el caudalímetro iba a colocarse en la tubería de 22 mm, pero finalmente ha sido colocado en la tubería de 15 mm por facilidades de montaje.

5.1.2 Determinación teórica del caudal

Con objeto del modelado numérico del golpe de ariete en la instalación, es necesario definir previamente el régimen permanente, esencial para establecer las condiciones iniciales.

5.1.3 Pérdidas agregadas por el caudalímetro

Las especificaciones del caudalímetro informan acerca de las pérdidas de presión que este produce en función del caudal que pasa a través de él.

Caudal (l/m)	Caida de presión (bar)
15,1	0,63
11,4	0,35
7,6	0,16
3,8	0,04
1,5	0,01

Figura 5.2. Caida de presión en el caudalímetro (tabla proporcionada en las especificaciones).

Evaluando la ecuación de Bernouilli en el caudalímetro, y suponiendo que se trata de un tramo de $\Delta x = 15 \text{ cm}$ en el que las pérdidas por fricción son las definidas anteriormente para la tubería de 12mm, se tiene que

$$\frac{\Delta P}{\rho} = Q^2 \frac{8k}{\Pi^2 D} + Q^2 \frac{8f \Delta x}{\Pi^2 D^5} \quad [5.1]$$

Por lo tanto, se puede evaluar los valores que toma el coeficiente de pérdidas del caudalímetro, obteniéndose:

Caudal (l/m)	Caida de presión (bar)	k
15,1	0,63	24,9
11,4	0,35	24,2
7,6	0,16	24,9
3,8	0,04	24,9
1,5	0,01	40,3

Figura 5.3. Coeficiente de pérdidas del caudalímetro

En lo siguiente se van a introducir las pérdidas asociadas al caudalímetro con una constante de pérdidas media de $k=24,5$.

El valor de $k=40,3$ no se ha considerado, ya que el funcionamiento de la instalación siempre se encuentra en un rango de caudal más alto.

5.1.3.1 Modelo numérico con pérdidas localizadas

Tanto al inicio como al final de la instalación se conoce la presión:

- Aguas abajo hay presión atmosférica, ya que el depósito está abierto a la atmósfera.
- Aguas arriba la presión depende del régimen de funcionamiento de la bomba, como se puede observar en la figura 5.4, en la que los datos han sido tomados experimentalmente.

Régimen	Presión aguas arriba(relativa, bar)
1000	0,65
1200	0,95
1400	1,2
1600	1,55
1800	1,95

Figura 5.4. Relación entre la presión aguas arriba y el régimen de la bomba

Con la ecuación de Euler Bernouilli se podrá determinar el caudal que circula por la instalación para cada régimen de funcionamiento:

$$\left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz \right)_O - \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz \right)_L = Q^2 \left[\sum_i \frac{8f_i L_i}{\pi^2 D_i^5} + \sum_j \frac{8K_j}{\pi^2 D_j^4} \right] \quad [5.2]$$

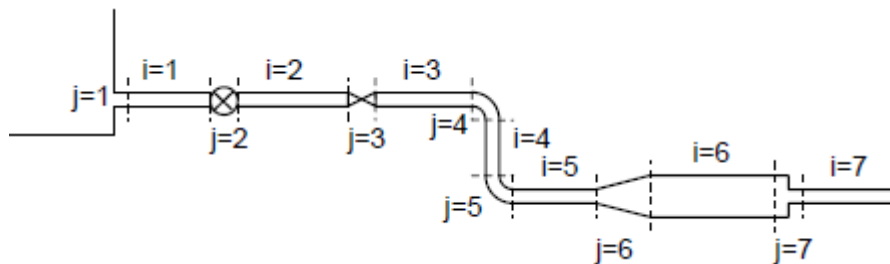


Figura 5.5. Esquema de pérdidas en una instalación hidráulica

Reorganizando la ecuación 5.2 se puede determinar el caudal de la instalación como:

$$Q = \sqrt{\frac{+g\Delta Z + \frac{\Delta P}{\rho}}{+\frac{1}{2} \left[\frac{1}{A_L^2} - \frac{1}{A_0^2} \right] - \sum_i \frac{8f_i L_i}{\pi^2 D_i^5} - \sum_j \frac{8K_j}{\pi^2 D_j^4}}} \quad [5.3]$$

Para las pérdidas de carga localizadas:

Elemento	Diferencia (mm)	Cantidad	Factor de pérdidas (K)	$\frac{8K_j}{\pi^2 D_j^4}$
Te directa	19	2	0,1	1244031,711
Te indirecta	19	1	0,58	3607691,961
Te directa	12	1	0,1	3909226,865
Te indirecta	12	0	0,58	0
Codo	12	8	0,19	59420248,35
Codo	19	6	0,19	7090980,75
Caudalímetro	12	1	24,5	957760582
Ensanchamiento/estrechamiento	12	2	0,36	28146433,43
Electroválvula	12	1	0,93	36355809,85
Descarga a depósito	12	1	1	39092268,65

Figura 5.6. Pérdidas de carga localizadas

Para las pérdidas de carga distribuidas:

Diámetro interior	Longitud	Factor de fricción (f)	$\frac{8f_i L_i}{\pi^2 D_i^5}$
12	11,9	0,052	2015857987
19	12,6	0,05	206247362,5

Figura 5.7. Pérdidas de carga distribuidas

En vista de la ecuación 5.3 se obtienen los siguientes resultados:

Régimen	Caudal (m ³ /s)
1000	1,36E-04
1200	1,68E-04
1400	1,91E-04
1600	2,18E-04
1800	2,46E-04

Figura 5.8. Caudal teórico

5.1.3.2 *Método aproximado de determinación del caudal*

Según el guión de prácticas de Ingeniería de Fluidos, para un régimen en la bomba de 3.000 r.p.m, por la tubería del golpe de ariete se dispone de un caudal de 20 l/m y la presión al inicio de la tubería es de 5 bares.

El coeficiente de pérdidas en la tubería varía en la forma $f \propto Re^{-1/4}$, y como $\Delta P = \rho U^2 \frac{fL}{2D}$, entonces:

$$\Delta P \propto U^{7/4}$$

De esta forma, conociendo la presión al inicio del tramo, se puede determinar el caudal aproximadamente que está circulando por la tubería, tal que

$$\frac{Q_i}{Q} = \left[\frac{\Delta P_i}{\Delta P} \right]^{4/7} \quad [5.4]$$

Régimen	Caudal (m ³ /s)
1000	1,04E-04
1200	1,29E-04
1400	1,47E-04
1600	1,71E-04
1800	1,95E-04

Figura 5.9. Caudal aproximado

5.1.4 Análisis de los resultados, comparación teórico-experimental

El caudalímetro proporciona el caudal real que está circulando por la instalación, por lo que se puede hacer una valoración cuantitativa de la precisión de los modelos teóricos anteriores de determinación del caudal:

Régimen (r.p.m.)	Caudal teórico (m ³ /s)	Caudal aproximado (m ³ /s)	Caudal experimental (m ³ /s)
1000	1,36E-04	1,04E-04	1,35E-04
1200	1,68E-04	1,29E-04	1,65E-04
1400	1,91E-04	1,47E-04	1,95E-04
1600	2,18E-04	1,71E-04	2,31E-04
1800	2,46E-04	1,95E-04	2,61E-04

Figura 5.10. Recopilación. Caudal experimental, teórico y aproximado

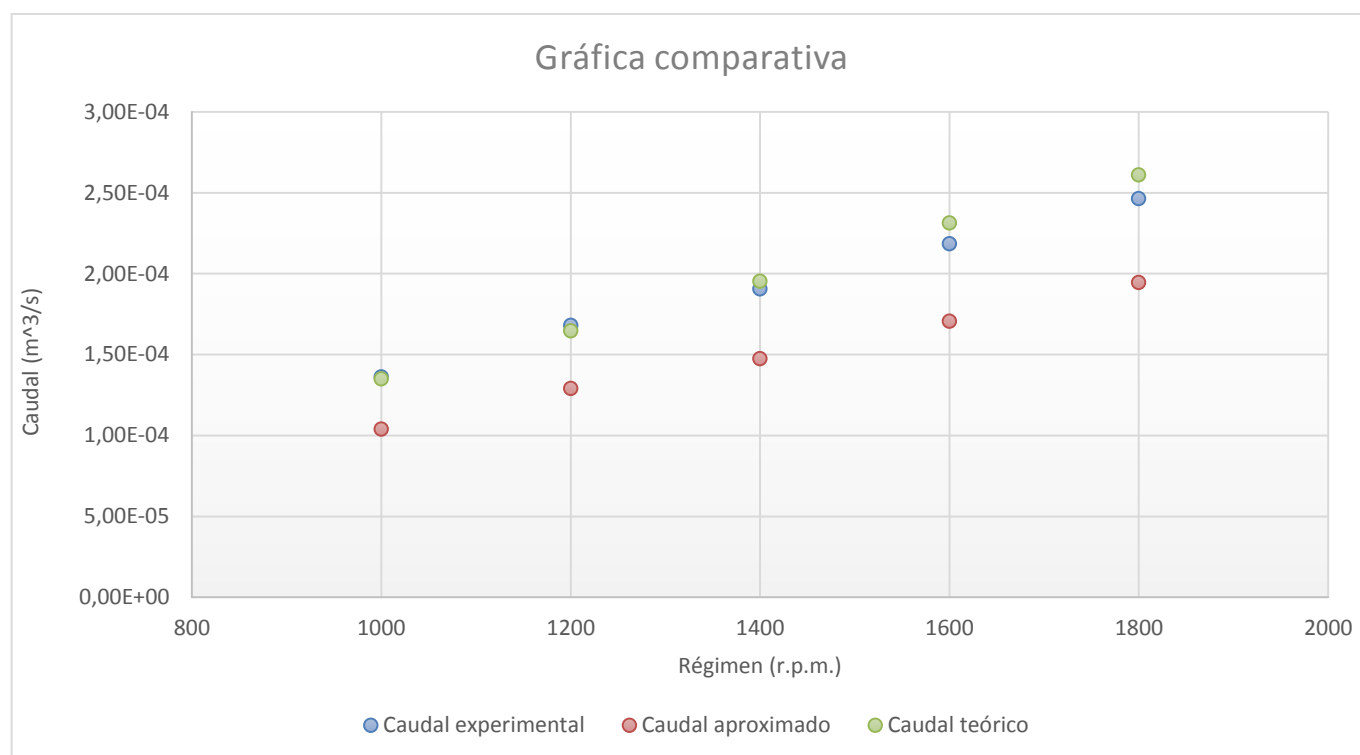


Figura 5.11. Gráfica de caudales

Se puede concluir que el modelo teórico en el que se han introducido las pérdidas localizadas, se ha cuantificado el coeficiente de fricción y se han tenido en cuenta las cotas, resulta mucho más preciso que el modelo aproximado. No obstante, conforme aumenta el régimen de funcionamiento, aumenta el error asociado al modelo, hasta un 6% con un régimen de 1.800 r.p.m.

Régimen (r.p.m.)	Caudal teórico (m ³ /s)	Caudal experimental (m ³ /s)	Error (%)
1000	1,36E-04	1,35E-04	-0,8
1200	1,68E-04	1,65E-04	-2,1
1400	1,91E-04	1,95E-04	2,4
1600	2,18E-04	2,31E-04	5,6
1800	2,46E-04	2,61E-04	5,6

Figura 5.12. Error entre el caudal experimental y el caudal teórico

Régimen (r.p.m.)	Caudal aproximado (m ³ /s)	Caudal experimental (m ³ /s)	Error (%)
1000	1,04E-04	1,35E-04	-23,0
1200	1,29E-04	1,65E-04	-21,6
1400	1,47E-04	1,95E-04	-24,5
1600	1,71E-04	2,31E-04	-26,2
1800	1,95E-04	2,61E-04	-25,4

Figura 5.13. Error entre el caudal experimental y el caudal aproximado

Retomando el modelo aproximado de determinación del caudal, el error asociado puede ser debido al punto de partida, ya que no se ha podido comprobar que realmente, para un régimen de funcionamiento de la bomba de 3000 r.p.m, se tenga un caudal de 20l/m en la instalación.

5.1.5 Ajuste del modelo teórico

Para el cálculo de los coeficientes de fricción de cada tubería se ha supuesto un aumento de la rugosidad relativa comercial del cobre de un 30%. Con el objetivo de ajustar el modelo a los resultados experimentales, se va a suponer que el aumento de la rugosidad relativa es menor al 30%, aproximadamente de un 10%, tal que, siguiendo el procedimiento anterior, resulta un coeficiente de fricción de $f=0,045$ para las dos tuberías, por lo que ahora los resultados varían:

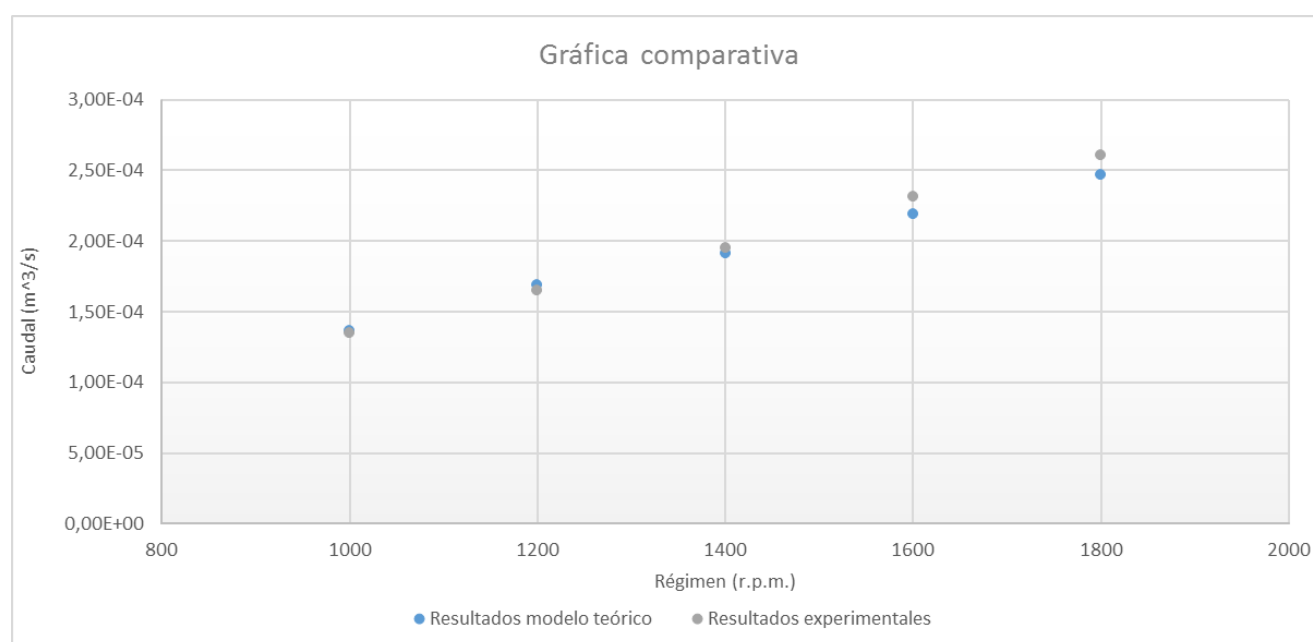


Figura 5.14. Ajuste del modelo del régimen permanente en la instalación

Régimen (r.p.m.)	Caudal teórico (m³/s)	Caudal experimental (m³/s)	Error (%)
1000	1,38E-04	1,35E-04	-2,2
1200	1,70E-04	1,65E-04	-3,4
1400	1,93E-04	1,95E-04	1,1
1600	2,21E-04	2,31E-04	4,3
1800	2,50E-04	2,61E-04	4,4

Figura 5.15. Error entre el caudal experimental y el caudal teórico tras el reajuste del coeficiente de fricción

Como se puede comprobar, ahora el modelo teórico se ajusta más a los resultados experimentales, con un error no mayor al 4,4%.

5.1.6 Distribución de presiones

Una vez evaluado el caudal que circula por la instalación para cada régimen de funcionamiento, se puede determinar la distribución de presiones a lo largo de la instalación con la ecuación 5.5, y de una manera discretizada, quedando de la forma:

$$\left(\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gZ\right)_i - \left(\frac{P}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gZ\right)_{i+1} = Q^2 \left[\sum_i \frac{8f_i \Delta x}{\pi^2 D_i^5} + \sum_i \frac{8K_{i,i+1}}{\pi^2 D_i^4} \right] \quad [5.5]$$

Con 50 nodos, se obtiene una discretización de la instalación con $\Delta x = \frac{L}{n-1} = 0,5m$.

Nodo	Posición (m)	Z(m)	f	D(mm)	k
1	0	0,39	0,05	19	0,29
2	0,5	0	0,05	19	0
3	1	0	0,05	19	0
4	1,5	0	0,05	19	0
5	2	0	0,05	19	0
6	2,5	0	0,05	19	0,19
7	3	0	0,05	19	0,19
8	3,5	0,1	0,05	19	0
9	4	0,1	0,05	19	0
10	4,5	0,1	0,05	19	0
11	5	0,1	0,05	19	0
12	5,5	0,1	0,05	19	0,38
13	6	0,12	0,05	19	0
14	6,5	0,2	0,05	19	0
15	7	0,2	0,05	19	0
16	7,5	0,2	0,05	19	0
17	8	0,2	0,05	19	0
18	8,5	0,2	0,05	19	0,77
19	9	0,2	0,05	19	0
20	9,5	0,2	0,05	19	0
21	10	0,2	0,05	19	0
22	10,5	0,2	0,05	19	0
23	11	0,2	0,05	19	0
24	11,5	0,2	0,05	19	0,36
25	12	0,2	0,05	19	0,38
26	12,5	0,1	0,045	12	0
27	13	0,1	0,045	12	0
28	13,5	0,1	0,045	12	0
29	14	0,1	0,045	12	0
30	14,5	0,1	0,045	12	0
31	15	0,1	0,045	12	0,28
32	15,5	0	0,045	12	
33	16	0	0,045	12	0
34	16,5	0	0,045	12	0
35	17	0	0,045	12	0
36	17,5	0	0,045	12	0
37	18	0	0,045	12	24,5
38	18,5	0	0,045	12	0,38
39	19	0	0,045	12	0
40	19,5	0	0,045	12	0
41	20	0	0,045	12	0
42	20,5	0	0,045	12	0
43	21	0	0,045	12	0
44	21,5	0,235	0,045	12	0,19
45	22	0,735	0,045	12	0
46	22,5	1,235	0,045	12	0,19
47	23	1,26	0,045	12	0,13
48	23,5	1,26	0,045	12	1,12
49	24	1,26	0,045	12	1,04
50	24,5	1,08	0,05	19	

Figura 5.16. Tabla de distribución de presiones a lo largo de la tubería

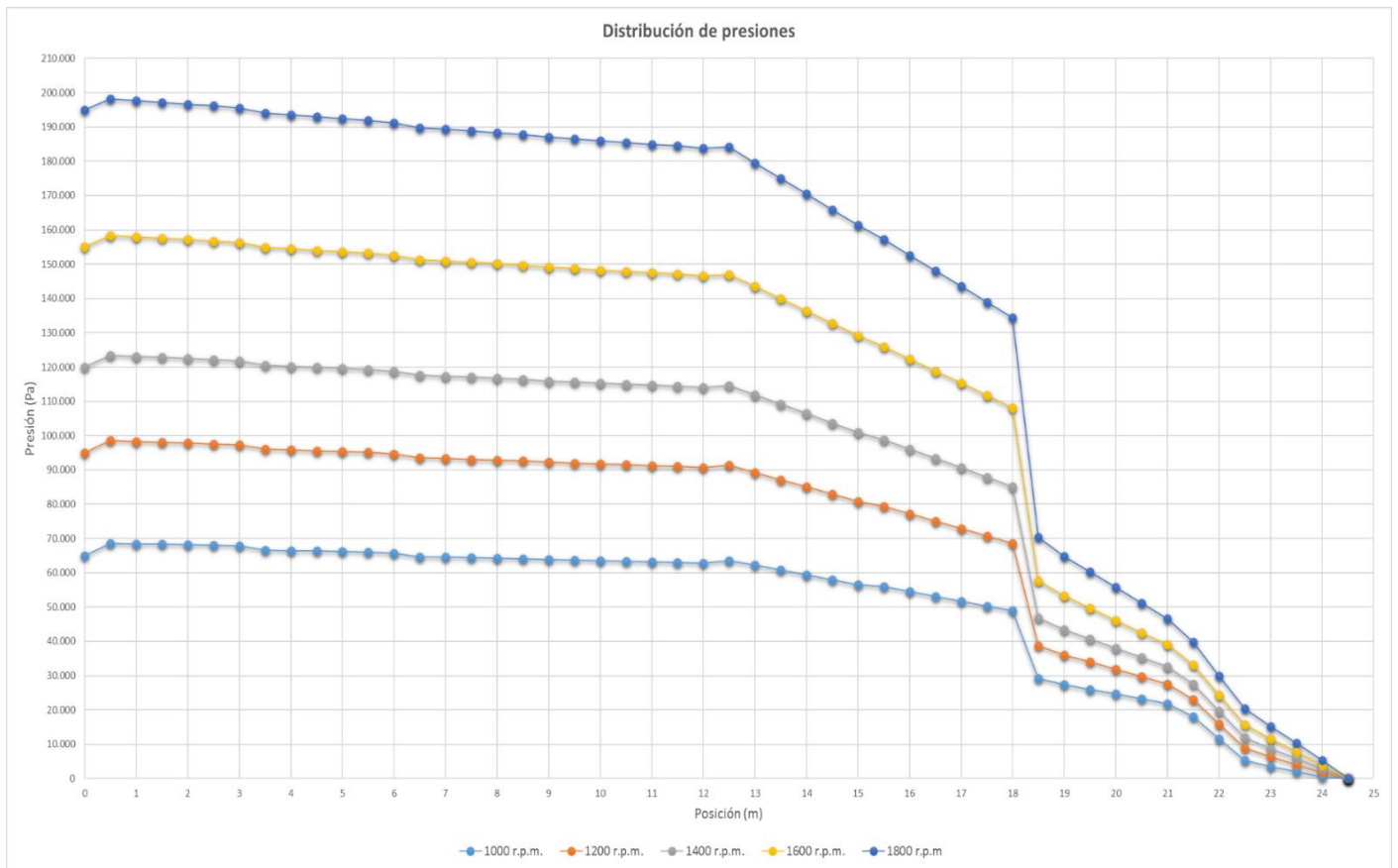


Figura 5.17. Gráfica de distribución de presiones a lo largo de la tubería

Como se puede observar, la caída de presión a lo largo de la tubería de 19 mm es muy baja, apenas el 15% de la caída total.

A 18,5 m recorridos de la instalación, se puede apreciar una gran caída de presión. Esta caída es la correspondiente al caudalímetro, que como se estableció anteriormente, tiene un coeficiente de pérdidas muy alto ($k = 24,5$).

6 Resultados experimentales del golpe de ariete en la instalación experimental

La instalación docente cuenta con un transductor de presión relativa, situado a 0,5 metros de la electroválvula, el cual transforma la presión (de 0 a 25 bares) en una señal analógica (de 0 a 5 v).

La salida del manómetro está conectada a un osciloscopio, en el que ajustando la pantalla se puede monitorizar la señal que se recibe a través del mismo.

Con el objetivo de mejorar el sistema actual de medida, primeramente, se ha sustituido el transductor de presión relativa por uno exactamente idéntico, pero de presión absoluta, ya que no era posible tomar lecturas de presiones relativas negativas, y la onda de presión generada por el transitorio no se veía en su totalidad.



Figura 6.1. Transductor de presión de la instalación docente

Una vez sustituido el transductor de presión, se ha propuesto la idea de generar una base de datos Presión/Tiempo, lo que permitirá enriquecer las prácticas realizables en la instalación.

Para generar la base de datos se ha utilizado la tarjeta Arduino UNO, que permite recibir datos del sensor y enviarlos a un ordenador con un desfase despreciable.

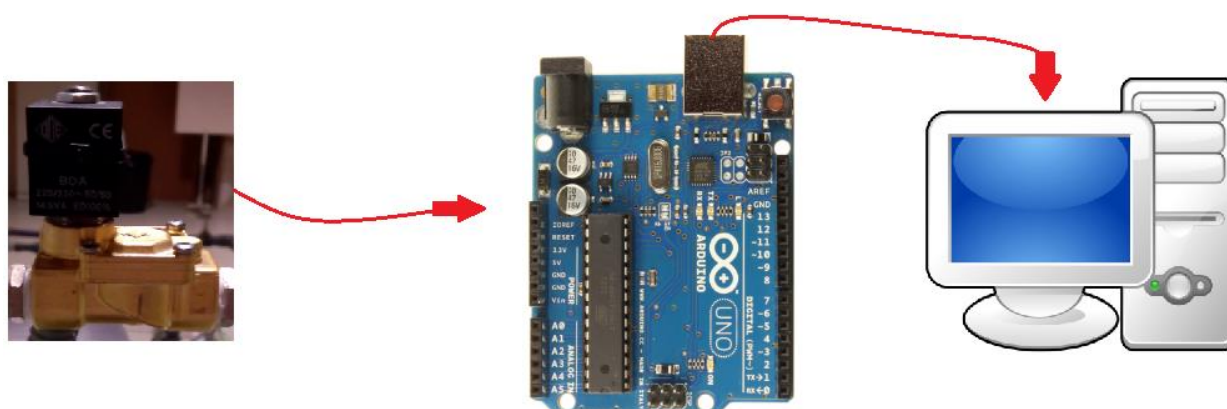


Figura 6.2. Esquema de transferencia de datos

Al igual que el manómetro de presión envía una señal de 0 a 5V en un rango de 0 a 25 bares (ahora absolutos) de presión, la tarjeta Arduino recibe la señal de voltaje y la transforma en un rango de 0 a 1023, enviándola al PC a una velocidad de unos 650 datos por segundo, suficiente para lo que se precisa (el programa insertado en Arduino será expuesto en el anexo).

Una vez enviados los datos al PC, a través de un programa llamado PLQ.DAQ, estos datos se transfieren a una hoja Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Time	Señal (0-1023)	t (microsegundos)					
2	10:12:25	60	800					
3	10:12:25	49	1.360					
4	10:12:25	49	1.960					
5	10:12:25	47	2.800					
6	10:12:25	49	4.320					
7	10:12:25	48	5.840					
8	10:12:25	47	7.360					
9	10:12:25	47	8.880					
10	10:12:25	49	10.400					
11	10:12:25	48	12.000					
12	10:12:25	48	13.600					
13	10:12:25	49	15.200					
14	10:12:25	49	16.800					
15	10:12:25	48	18.400					
16	10:12:25	45	20.000					
17	10:12:25	47	21.608					
18	10:12:25	51	23.200					
19	10:12:25	48	24.800					
20	10:12:25	46	26.400					
21	10:12:25	48	28.000					
22	10:12:25	47	29.600					
23	10:12:25	48	31.200					
24	10:12:25	49	32.808					
25	10:12:25	48	34.400					
26	10:12:25	51	36.000					
27	10:12:25	49	37.600					
28	10:12:25	50	39.200					

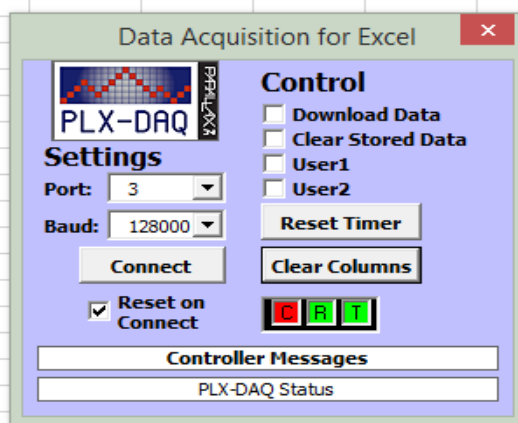


Figura 6.3. Recepción de datos en Excel

Como se puede observar, hay tres columnas:

- En la primera columna se anota la hora en la que se ha almacenado el dato.
- En la segunda columna se registra la señal enviada por Arduino.
- En la tercera columna se anota el tiempo de referencia de lectura de datos de Arduino, con el que se podrá hacer una gráfica Presión/Tiempo.

El inicio/fin de la lectura de datos se realiza con el botón “Connect”. Una vez iniciado y finalizado un proceso de lectura, al volver a iniciar el proceso, se borrarán los datos anteriores.

Una vez que Excel recibe la señal, esta es traducida a presión (en pascales), y representada gráficamente. También Excel se encarga de calcular la sobrepresión máxima. Se puede ver el siguiente ejemplo:

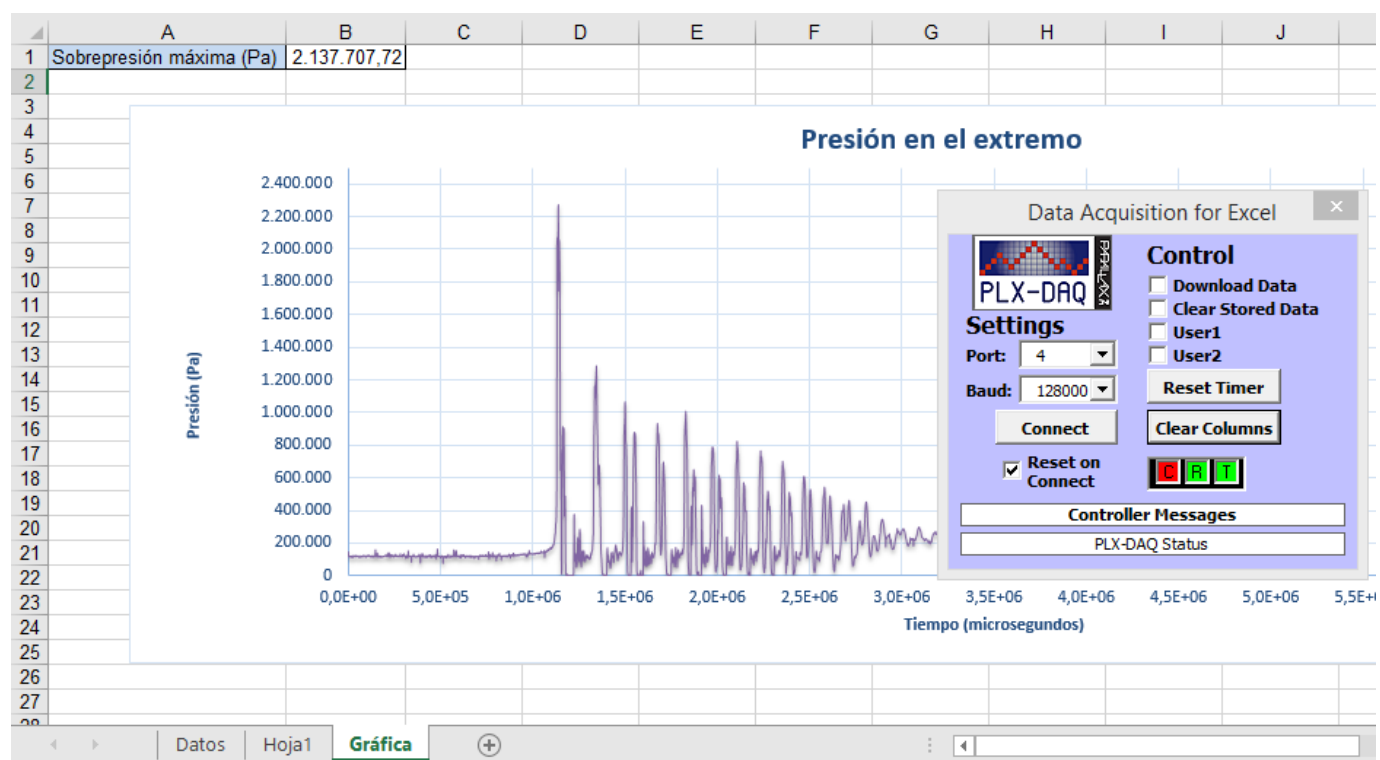


Figura 6.4. Gráfico de la señal en Excel

En este caso, por ejemplo, la señal máxima es de 940, que equivale a una presión máxima de

$$P = 25 * \frac{940}{1023} = 23 \text{ bares}$$

La sobrepresión máxima (21,4 bares) equivale a la presión máxima (23 bares) menos la presión en el régimen permanente.

Una vez desarrollado el sistema de toma de datos, los resultados experimentales obtenidos de la instalación experimental, para varios regímenes de la bomba (se recuerda que el transductor de presión está a 0,5 metros de la electroválvula), son:

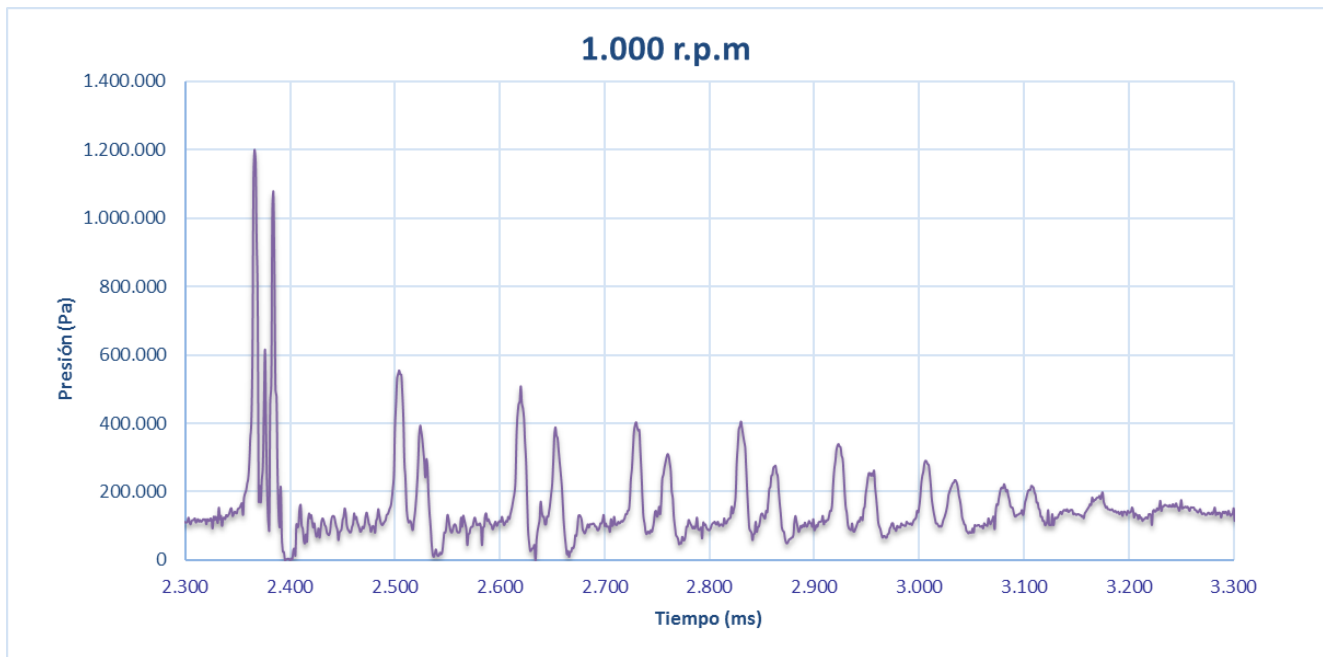


Figura 6.5. Onda de presión real. 1.000 r.p.m

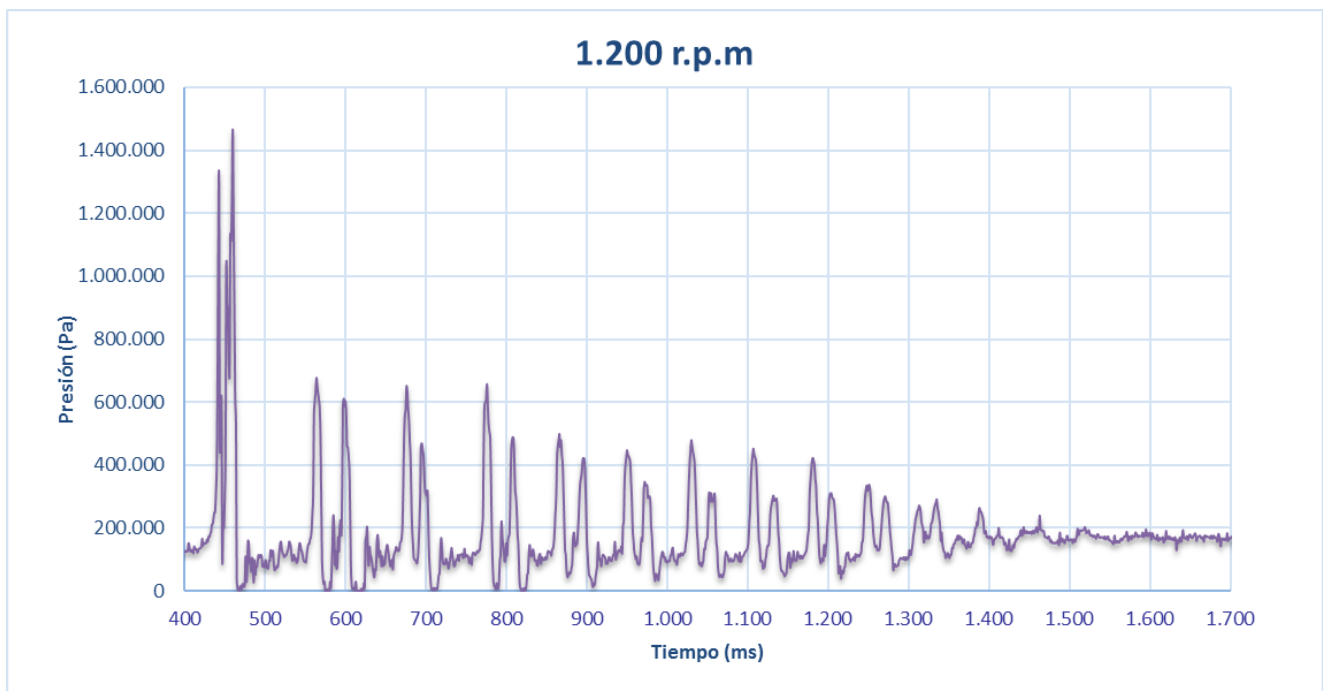


Figura 6.6. Onda de presión real. 1.200 r.p.m

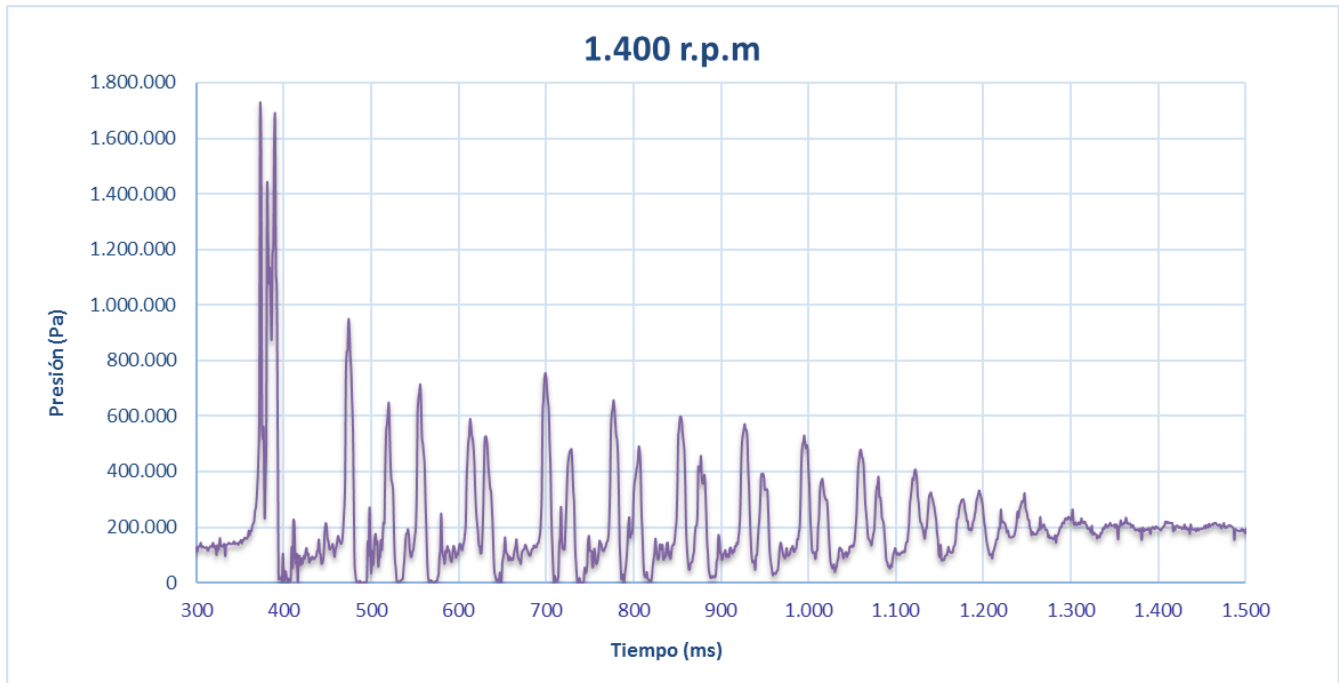


Figura 6.7. Onda de presión real. 1.400 r.p.m

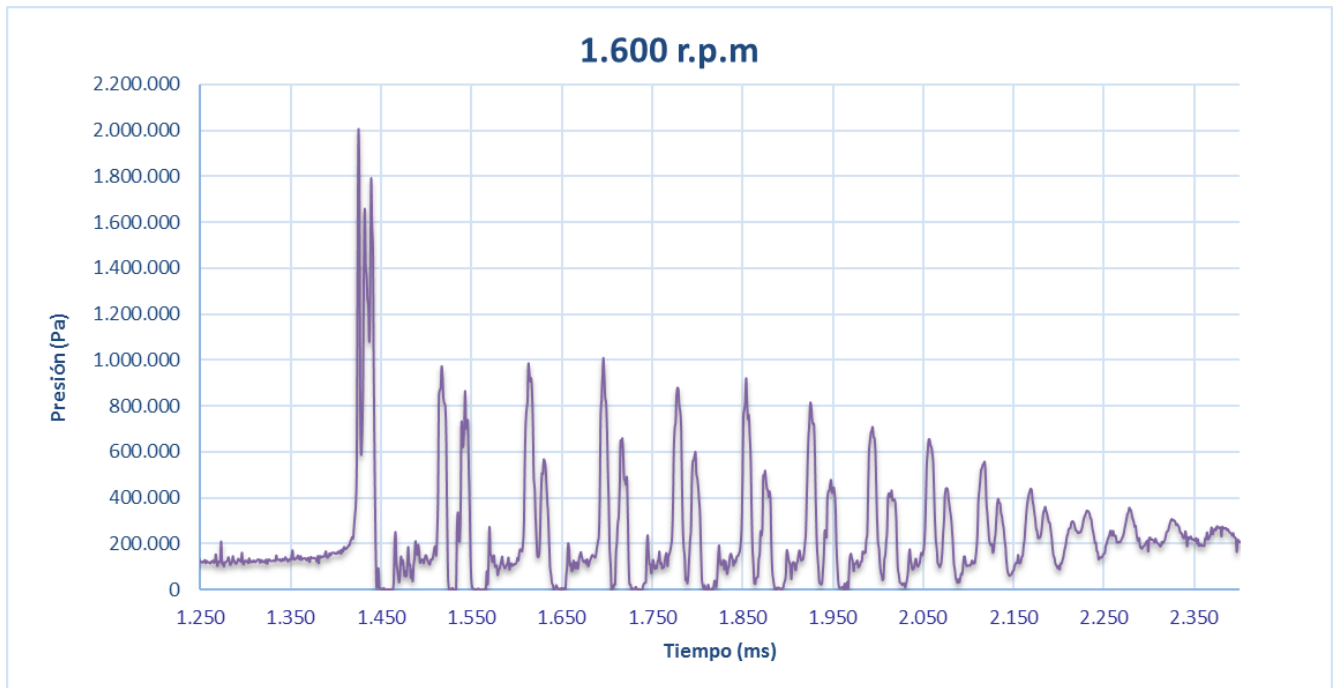


Figura 6.8. Onda de presión real. 1.600 r.p.m

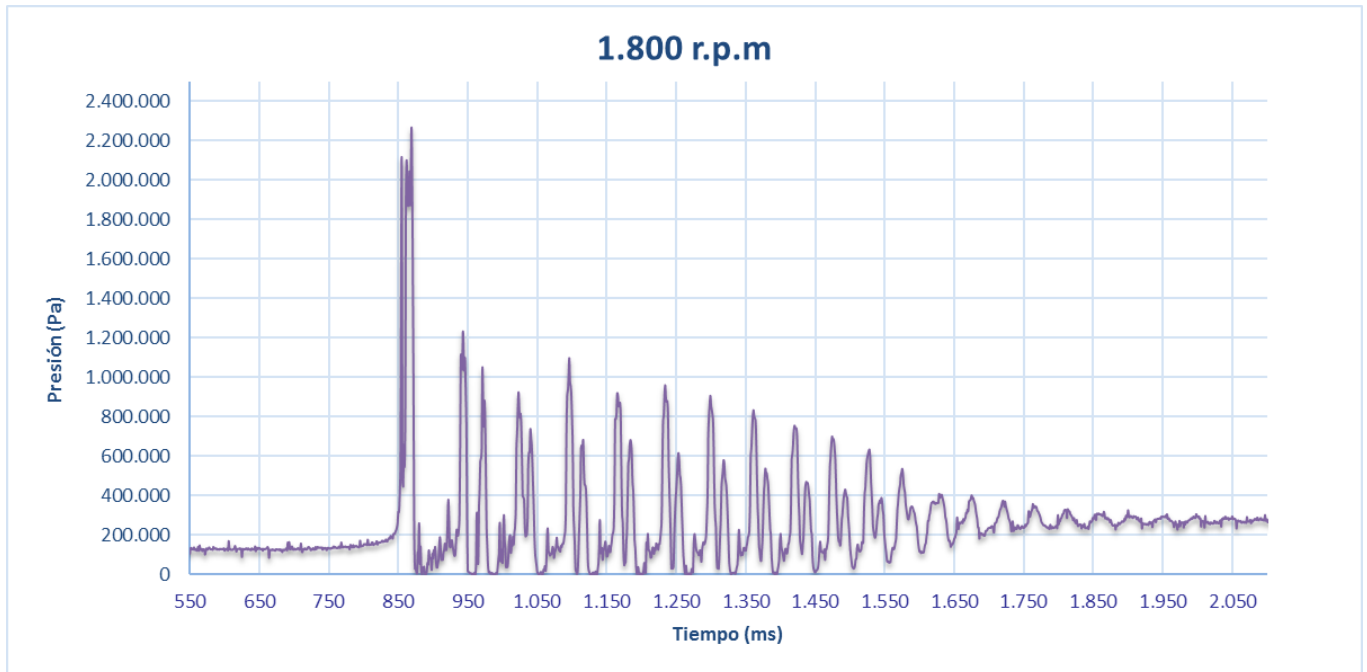


Figura 6.9. Onda de presión real. 1.800 r.p.m

A lo largo del transitorio, cuando la presión alcanza valores cercanos a la presión de vapor, en el interior de la instalación se forman burbujas de gas, fenómeno que se denomina cavitación, y es el encargado de que las presiones no sean negativas, algo físicamente imposible.

Al aparecer este fenómeno en el transitorio, la solución de los anteriores modelos numéricos deja de ser válida en el momento en que la presión absoluta adquiere valores menores que la presión de vapor, como se dijo anteriormente.

Según la figura 6.10, la presión de vapor resulta ser aproximadamente $P_v = 25\text{mmHg}$, lo que equivale a $P_v = 3.333\text{ Pa}$.

Relación presión y temperatura

Temperatura (°C)	Presión de vapor en mm de Hg			
	Ácido acético	Agua	Benceno	Etanol
20	11,7	17,5	74,7	43,9
30	20,6	31,8	118,2	78,8
40	34,8	55,3	181,1	135,3
50	56,6	92,5	264,0	222,2
60	88,9	149,4	388,6	352,7
70	136,0	233,7	547,4	542,5
80	202,3	355,1	753,6	818,6

Figura 6.10. Presión de vapor

Otra observación de interés es la duración del transitorio: se puede observar cómo para un régimen de funcionamiento de la bomba de entre 1.000 y 1.800 r.p.m el golpe de ariete dura aproximadamente 1,5 segundos.

6.1.1.1 Periodo y forma de la onda de presión

En las siguientes gráficas se podrá observar el periodo de onda real (de la primera onda) para cada uno de los regímenes de funcionamiento de la bomba y, además, su forma de onda.

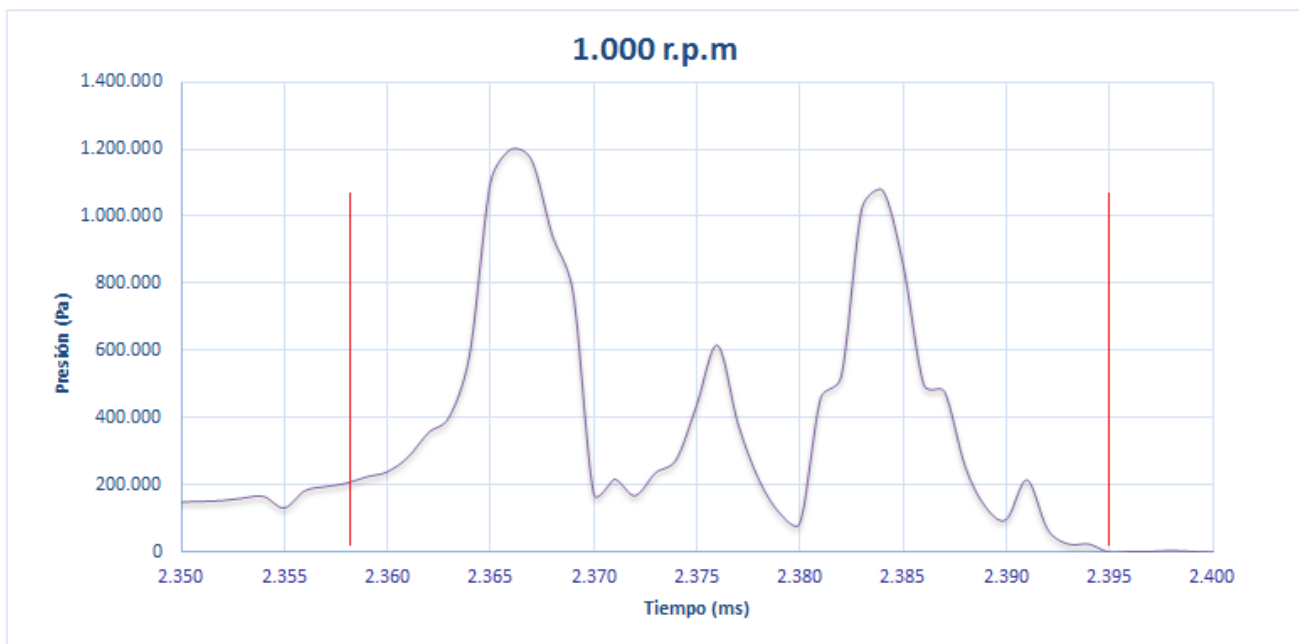


Figura 6.11. Semiperiodo real de la onda de presión. 1.000 r.p.m

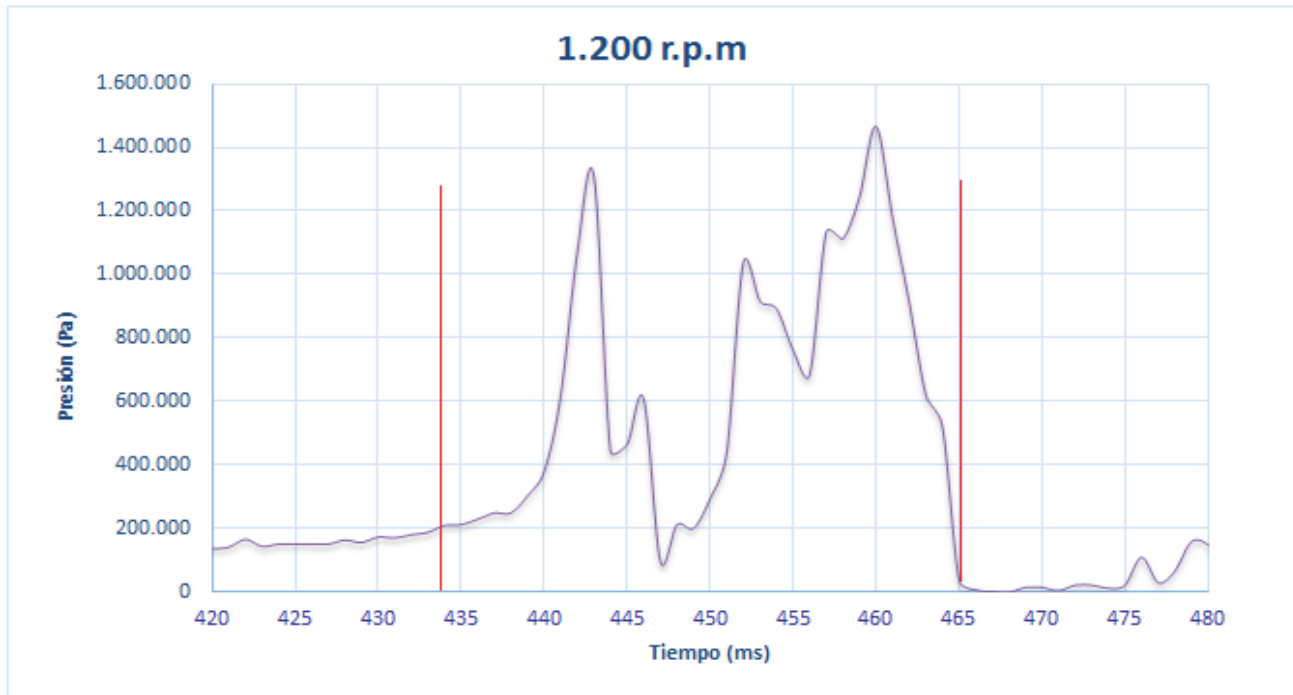


Figura 6.12. Semiperiodo real de la onda de presión. 1.200 r.p.m

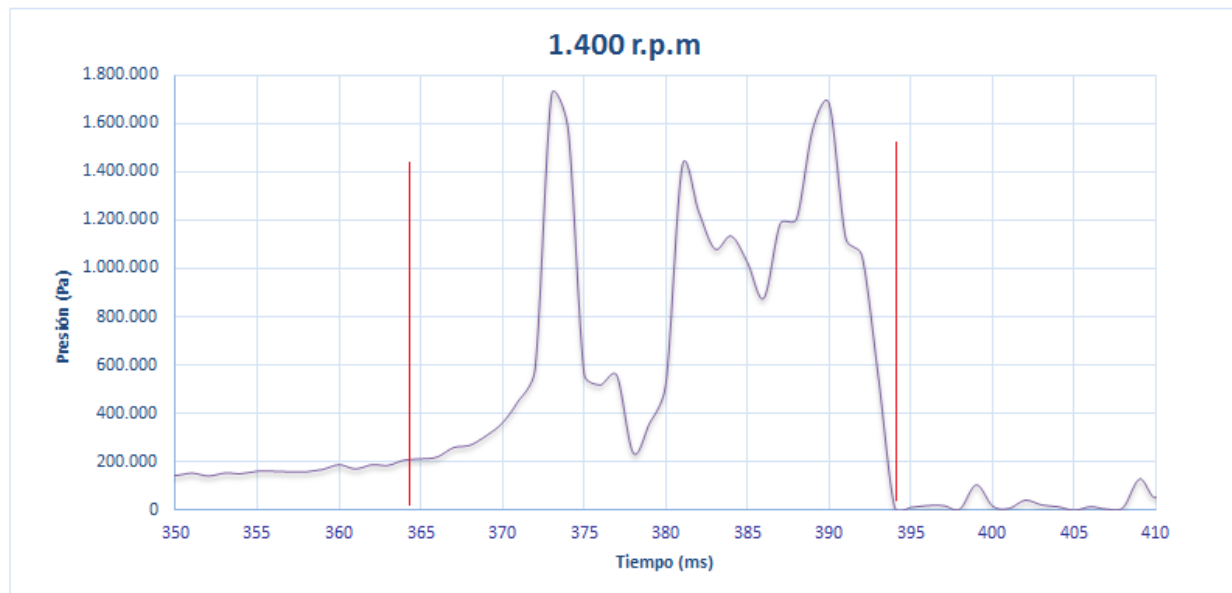


Figura 6.13. Semiperiodo real de la onda de presión. 1.400 r.p.m

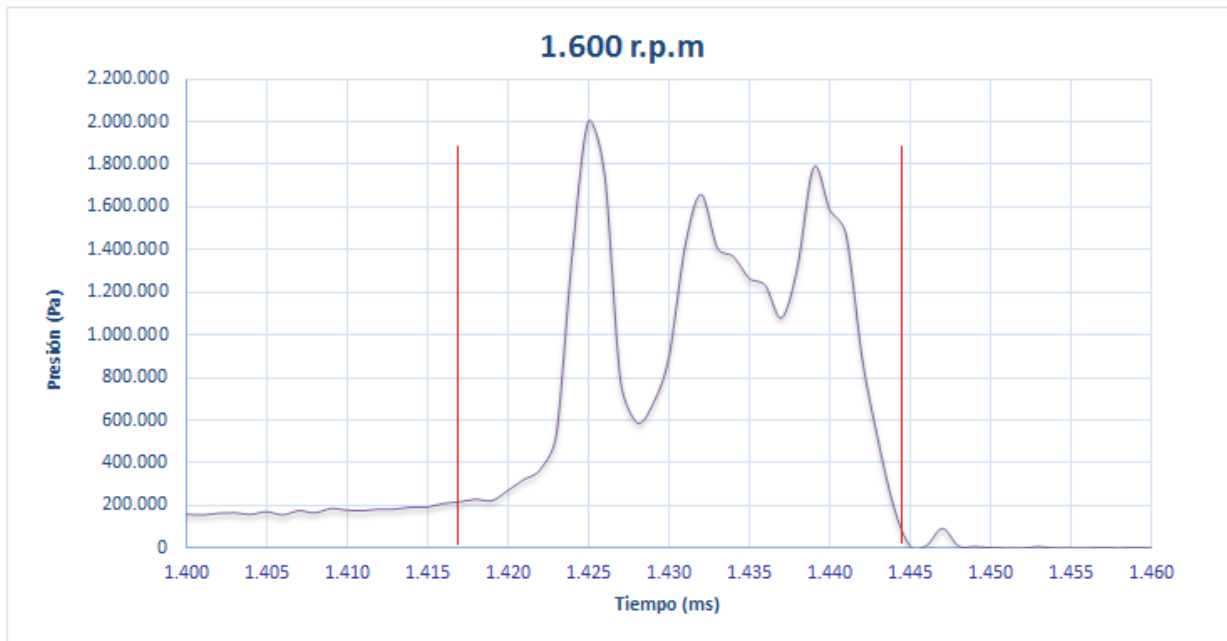


Figura 6.14. Semiperíodo real de la onda de presión. 1.600 r.p.m

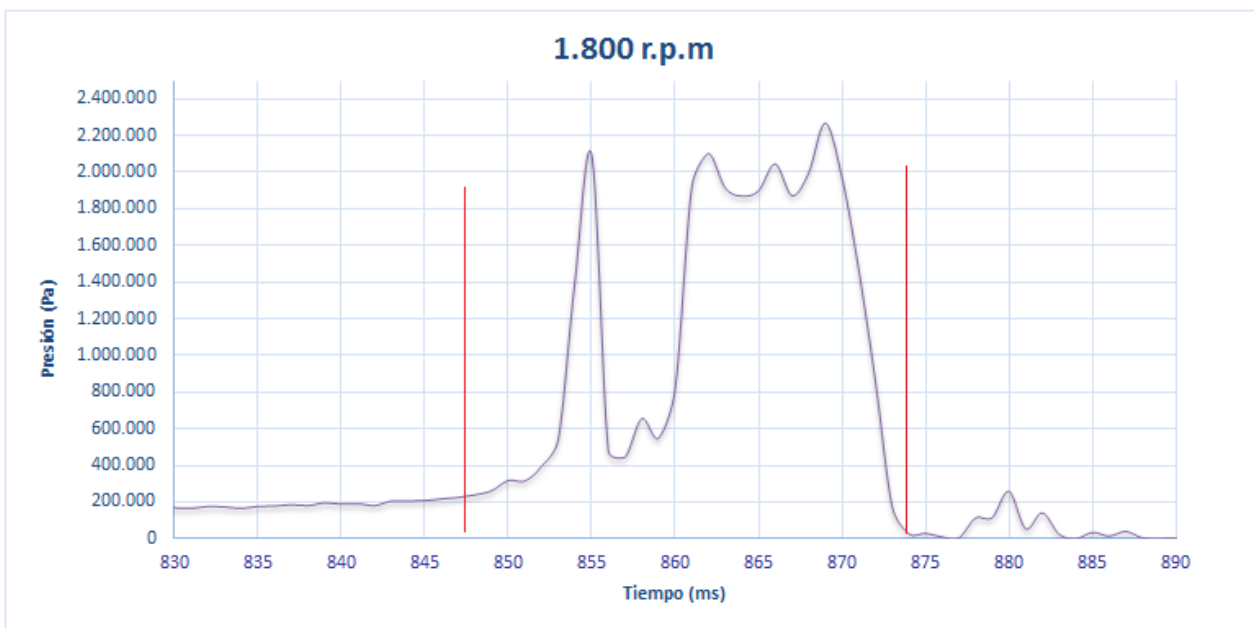


Figura 6.15. Semiperíodo real de la onda de presión. 1.800 r.p.m

El semiperíodo de onda, que teóricamente equivale a dos veces el tiempo de ida o vuelta de la onda ($T/2 = 2L/c = 35,5ms$) disminuye conforme aumenta el régimen de funcionamiento de la bomba:

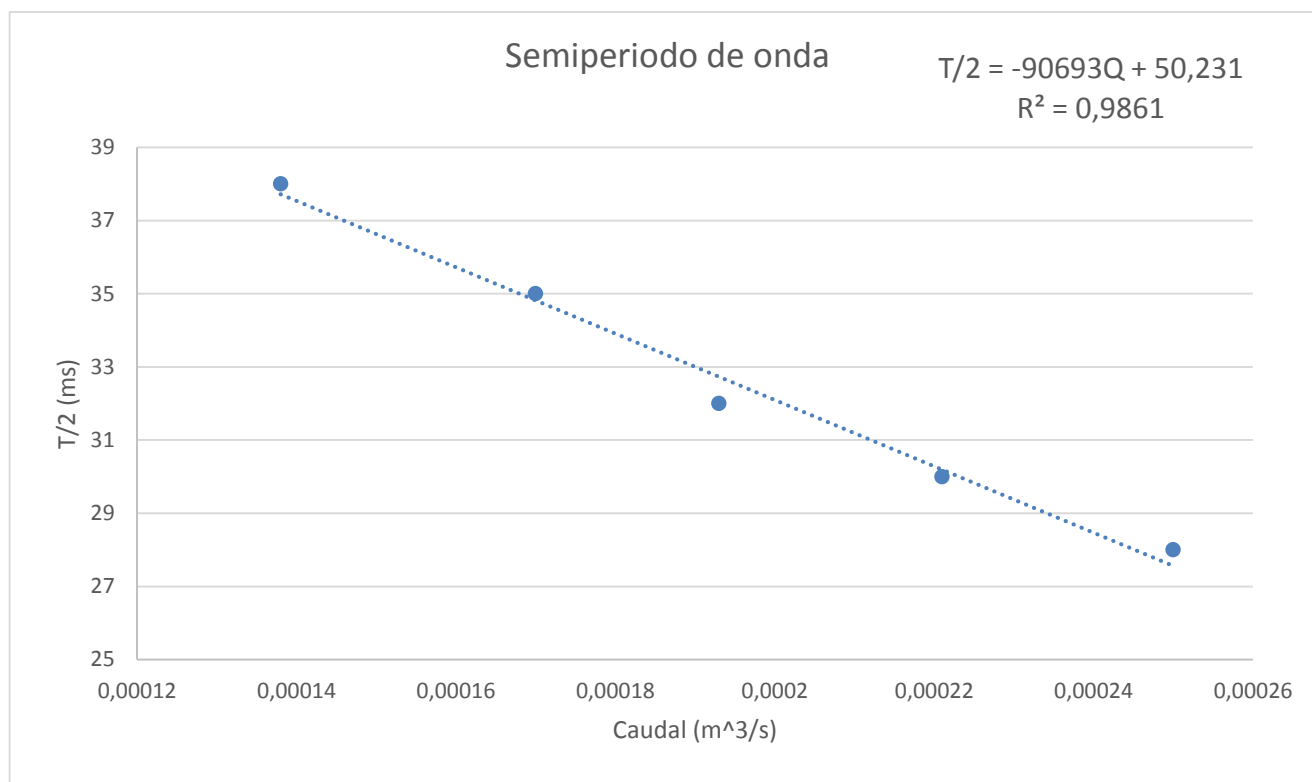


Figura 6.16. Variación del semiperiodo de onda en función del caudal inicial

Las sobrepresiones alcanzadas en el transitorio hidráulico son directamente proporcionales al caudal que circula por la instalación.

El módulo de compresibilidad de cualquier líquido aumenta con la presión, por lo tanto, cuanto más alta sea la presión alcanzada en el golpe de ariete, mayor será el módulo de compresibilidad y, por tanto, mayor será velocidad del sonido (a) (ver figura 2.6).

Al aumentar la velocidad del sonido, la velocidad de propagación de las ondas de presión en la tubería también aumenta, por lo que tiempo de ida o vuelta disminuye (ver ecuación 2.10).

Esto explica la pendiente negativa de la gráfica anterior (figura 6.1.6): a mayor caudal circulando por la instalación, mayores son las sobrepresiones alcanzadas en el transitorio, y por tanto menor es el tiempo de ida o vuelta de la onda.

En cuanto a la forma de onda, para los distintos regímenes de funcionamiento de la bomba se puede observar un valle a dos niveles. Atendiendo a la propagación de la onda de presión en la instalación, este valle puede ser debido a dos causas fundamentalmente, el cambio de diámetro que hay en la instalación o la pérdida de presión presente en el caudalímetro.

Más adelante, con el modelado numérico del transitorio, este tema podrá tratarse con mayor claridad.

7 Resolución numérica del golpe de ariete de la instalación experimental

A continuación, se va a proceder a la resolución numérica del golpe de ariete de la instalación experimental, para posteriormente ser comparada con los resultados obtenidos experimentalmente.

7.1 Velocidad de propagación en la instalación. Discretización

Al existir tuberías de distintas características, habrá también distintas velocidades de propagación según el tramo de la instalación en el que se encuentre la onda.

En este caso, la instalación consta de dos tipos de tuberías, de 12 y 19 mm de diámetro, por lo que hay dos velocidades de propagación a lo largo de la misma.

- Tubería de diámetro interior $D_1=12$ mm:

$$c_{12} = \frac{\sqrt{\frac{E_c}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E_c D_1}{eE}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\rho D_1}{eE}}} = 1349,73 \text{ m/s}$$

- Tubería de diámetro interior $D_2=19$ mm:

$$c_{19} = \frac{\sqrt{\frac{E_c}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{E_c D_2}{eE}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\rho D_2}{eE}}} = 1300,41 \text{ m/s}$$

7.2 Modelado del golpe de ariete en la instalación hidráulica docente

Anteriormente se han presentado/determinado todos los parámetros necesarios para el modelado de la instalación docente, excepto el tiempo de cierre de la electroválvula, que no se conoce.

7.2.1 Modelo numérico. Apreciaciones

Para el modelado numérico del golpe de ariete en la instalación docente se van a utilizar las ecuaciones 3.58 y 3.59.

A estas ecuaciones habrá que añadirles las condiciones iniciales y de contorno:

- Las condiciones iniciales de presión y caudal se obtienen del régimen permanente.
- En cuanto a las condiciones de contorno, por un lado, se tendrá la ecuación de cierre de la válvula, y, por otro lado, se considerará que la presión aguas arriba es constante (determinada experimentalmente).

De esta forma, la instalación docente queda definida totalmente (área variable, pérdidas localizadas, pérdidas por fricción...), a excepción de los cambios de dirección en la misma.

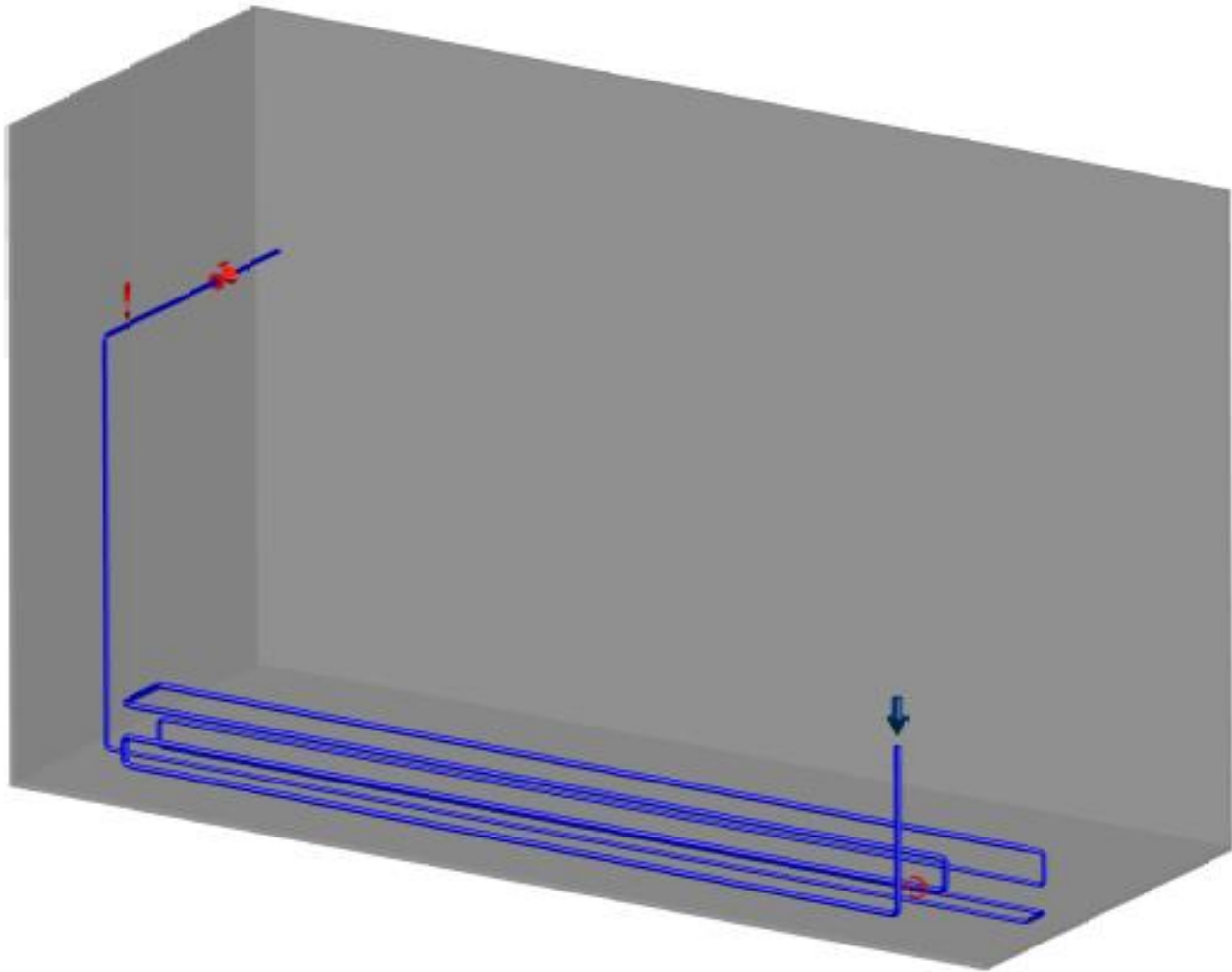


Figura 7.1. Esquema de la instalación en 3D dibujado en Autocad

7.2.1.1 Discretización de la instalación

De los 23,5 metros característicos del transitorio en la instalación, en los primeros 12 metros la tubería es de 19 mm, y en lo siguiente (11,5 metros), la tubería es de 12 mm.

Con objeto de discretizar la instalación en intervalos espaciales de unos 0,5 m de media, se procederá de la siguiente forma:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c_{eq}} = \frac{0,5}{1.324,09} = 0,377619 \text{ ms}$$

$$c_{eq} = \frac{L}{\frac{L_{12}}{c_{12}} + \frac{L_{19}}{c_{19}}} = \frac{23,5}{\frac{11,5}{1.349,73} + \frac{12}{1.300,41}} = 1.324,087 \text{ m/s}$$

$$\Delta x_{12} = c_{12} * \Delta t = 0,510 \text{ m}$$

$$\Delta x_{19} = c_{19} * \Delta t = 0,491 \text{ m}$$

De este modo, del nodo 1 al 25, el diámetro de la tubería es de 19 mm, y del nodo 26 al 48, el diámetro de la tubería es de 12 mm.

Entre los nodos 25 y 26 se tiene una parte a 12 y otra a 19 mm de diámetro interior.

El incremento espacial ya queda definido, al igual que la velocidad de propagación equivalente:

$$\Delta x(25,26) = \Delta x'_{12} + \Delta x'_{19} = 0,287 + 0,215 = 0,502 \text{ m}$$

$$c_{eq} = \frac{\Delta x(25,26)}{\frac{\Delta x'_{12}}{c_{12}} + \frac{\Delta x'_{19}}{c_{19}}} = 1328,179 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El incremento temporal resulta ser:

$$\Delta t(25,26) = \frac{\Delta x(25,26)}{c_{eq}} = 0,37762 \text{ ms} ,$$

lo que lleva a un pequeño error de ajuste en la discretización, ya que el incremento temporal es algo más bajo que el que debiera ser. No obstante, ese error es despreciable:

$$\text{Error}(\%) = \frac{\Delta t(25,26) - \Delta t}{\Delta t} 100 = 6,4601 * 10^{-3} \%$$

Se han establecido intervalos espaciales medios Δx de entre 0,1 y 1 m, buscando el menor error de ajuste, concluyendo que para $\Delta x = 0,5$ se consigue el mejor ajuste.

7.2.2 Resultados del modelo numérico. Cierre instantáneo

En este apartado se van a exponer los resultados obtenidos del modelado numérico del golpe de ariete de la instalación docente, usando el modelo de fricción transitoria n°2, que resultó ser más adecuado a este estudio.

Primeramente, para una mejor comprensión de los diferentes aspectos de la onda de presión resultante aguas abajo (donde se sitúa la electroválvula), se va a obtener la misma para un cierre instantáneo, y fricción transitoria nula.

7.2.2.1 Onda de presión en el extremo. Amplitud y periodicidad

A continuación, se presenta gráficamente la onda de presión en el extremo del conducto para distintos regímenes de la bomba, en un rango de 1.000 a 1.800 r.p.m.

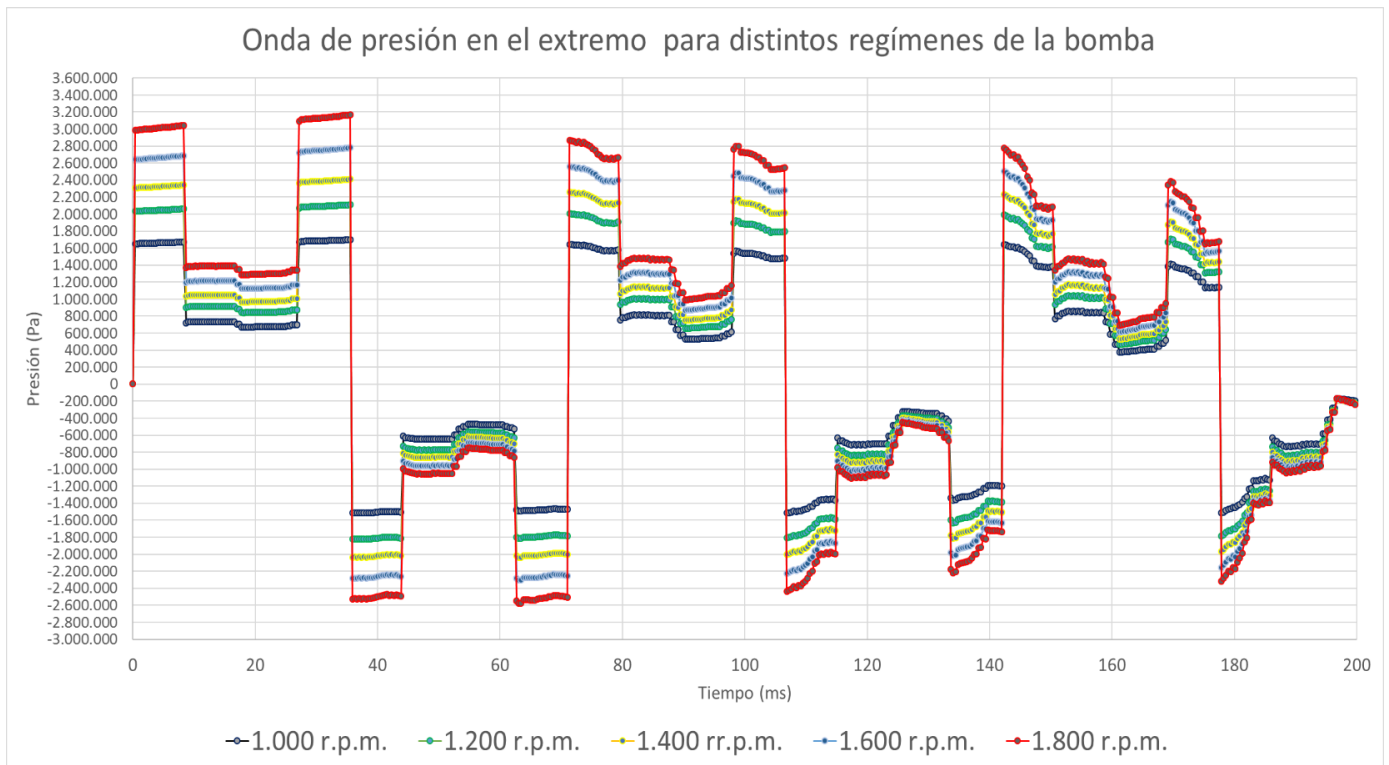


Figura 7.2. Presión en el extremo. Cierre instantáneo. Instalación docente

Los resultados obtenidos ayudan a comprender los valles observados anteriormente, en los resultados experimentales.

Se había planteado la cuestión de que estos valles podrían ser debidos al cambio de diámetro en la instalación, o a la pérdida de presión presente en el caudalímetro.

Para comprobar las causas, se ha resuelto el modelo numérico nuevamente, asumiendo una constante de pérdidas nula en el caudalímetro, y el resultado ha sido muy similar, por lo que se desestima que la caída de presión en el caudalímetro sea la causante de la forma de onda observada, solo se debe al cambio de diámetro en la instalación.

Este resultado era de esperar, ya que el tiempo en el que se observa una sobrepresión más baja (entre 7 y 30 ms), corresponde al tiempo en el que la onda de presión pasa a través del diámetro mayor.

La sobrepresión máxima (que aumenta con el caudal, y por tanto con el aumento del régimen de funcionamiento de la bomba) para cada uno de los regímenes de la bomba se relaciona con la fórmula de Allievi, atendiendo al apartado 4.2.4.2, de la forma:

$$-\Delta P_{max,numérica}^2 * \frac{m}{100} + \Delta P_{max,numérica} - \Delta P_{max,Allievi} = 0 \quad [7.1]$$

En este caso, la sobrepresión máxima según Allievi se calcula de la forma

$$\Delta P_{max,Allievi} = \rho c_i * \Delta U_i , \quad [7.2]$$

siendo c_i y ΔU_i la velocidad de propagación y el decremento de velocidad en la tubería de menor diámetro, respectivamente.

En este modelo, el exponente “m” del error (apartado 4.3.4.2) resulta ser $m = 2 * 10^{-6}$.

Régimen (r.p.m)	Sobrepresión teórica (Pa)	Sobrepresión numérica (Pa)	Error teórico (%)
1.000	1,65E+06	1,69E+06	-2,74
1.200	2,03E+06	2,10E+06	-3,71
1.400	2,30E+06	2,40E+06	-4,41
1.600	2,64E+06	2,78E+06	-5,26
1.800	2,98E+06	3,17E+06	-6,13

Figura 7.3. Error entre el modelo numérico y la fórmula de Allievi

No obstante, se recuerda que, tras el cierre brusco de la electroválvula, no tiene sentido que la presión siga aumentando. El error se debe, como se dijo en el apartado 3.2.4.2, a la discretización del término de pérdidas por fricción permanente.

El periodo de la onda de presión, como se vio anteriormente, equivale a dos veces el tiempo de ida y vuelta de la onda de presión, es decir:

$$T = 4 \sum \frac{L_i}{c_i} = 4 \left[\frac{L_1}{c_1} + \frac{L_2}{c_2} \right] = 4 \left[\frac{12}{1.300,41} + \frac{11,5}{1.349,73} \right] = 71ms$$

7.2.2.2 Influencia del tiempo y el exponente de cierre de la electroválvula

En este capítulo se va a graficar la onda de presión resultante en el extremo para distintos tiempos y exponentes de cierre, para un régimen de 1.000 r.p.m, con el fin de observar cómo influyen los mismos.

Al tratarse en este caso de tiempos de cierre no instantáneos, la forma y amplitud de onda sí va a depender de la fricción transitoria, por lo que es conveniente introducirla, es decir, hay que establecer un valor m (correspondiente al modelo 2 de fricción transitoria) no nulo.

En vista de la duración real del transitorio hidráulico (1,5 segundos, aproximadamente), se puede decir que el valor del exponente de aumento del coeficiente de fricción permanente más adecuado es m=4.

Se recuerda que en el transitorio hidráulico entra en juego la cavitación, fenómeno que no se ha tenido en cuenta en el modelo numérico, por lo tanto, el valor de m establecido en el párrafo anterior es meramente orientativo.

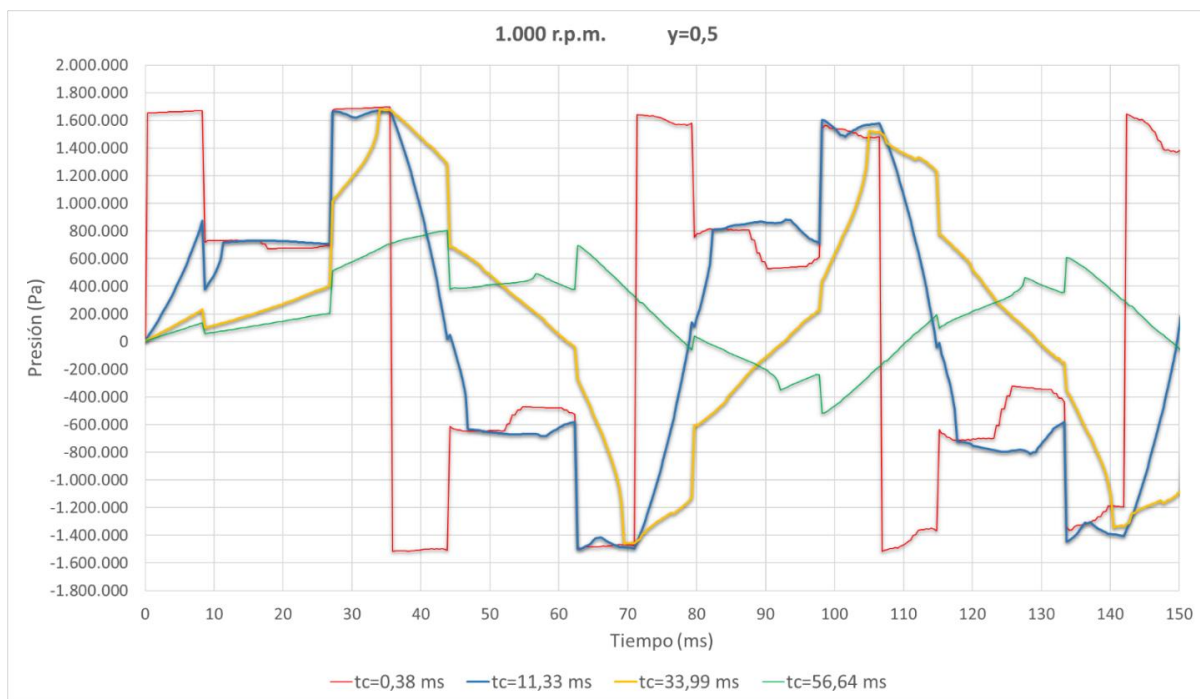


Figura 7.4. Onda de presión en el extremo para distintos tipos de cierre. $\gamma=0,5$

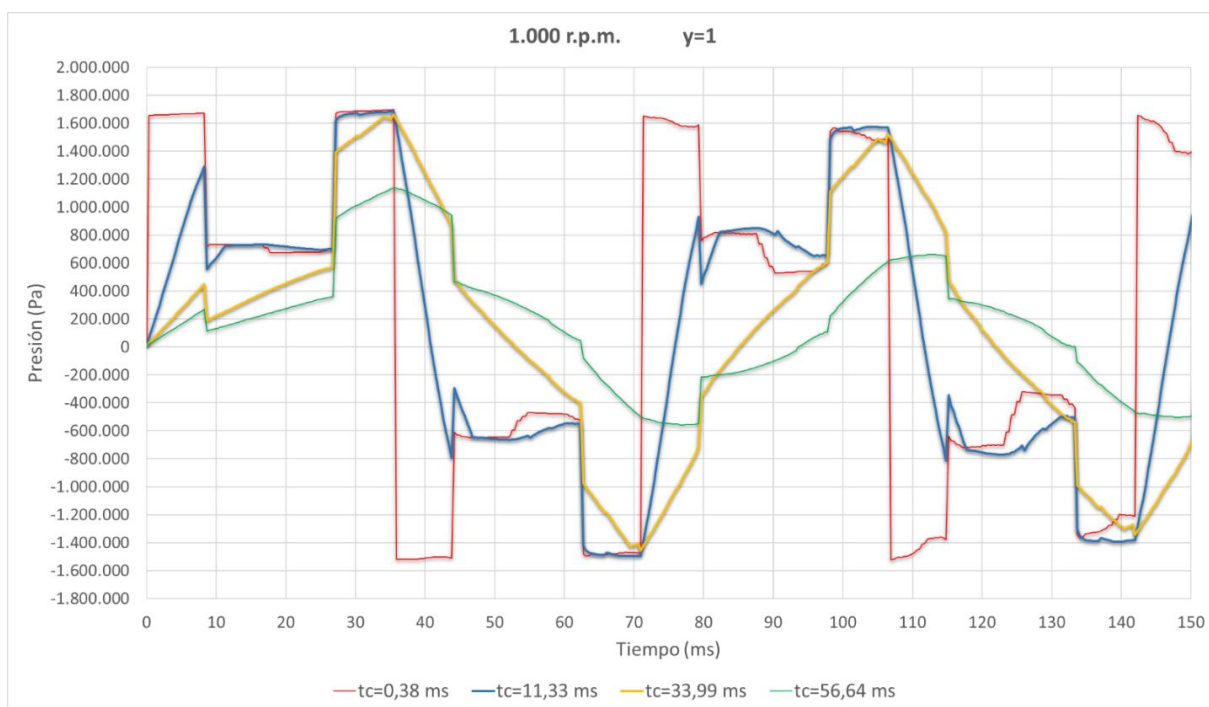


Figura 7.5. Onda de presión en el extremo para distintos tipos de cierre. $\gamma=1$

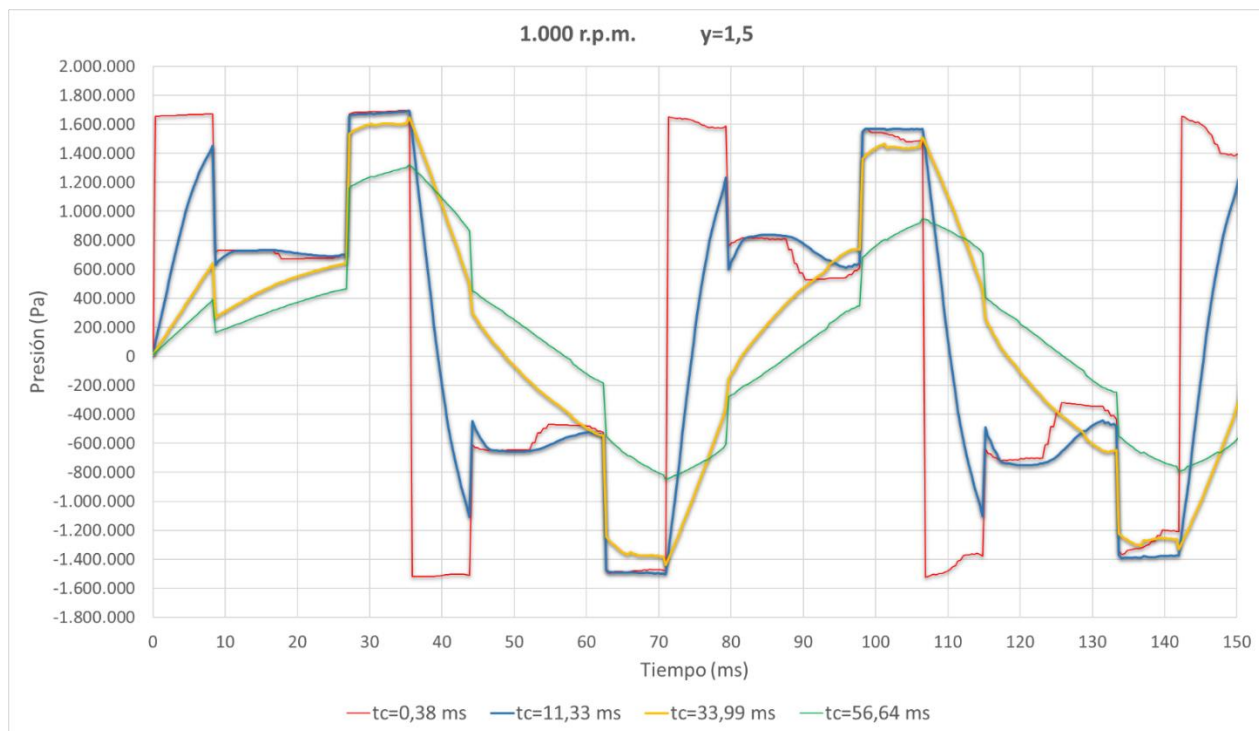


Figura 7.6. Onda de presión en el extremo para distintos tipos de cierre. $Y=1,5$

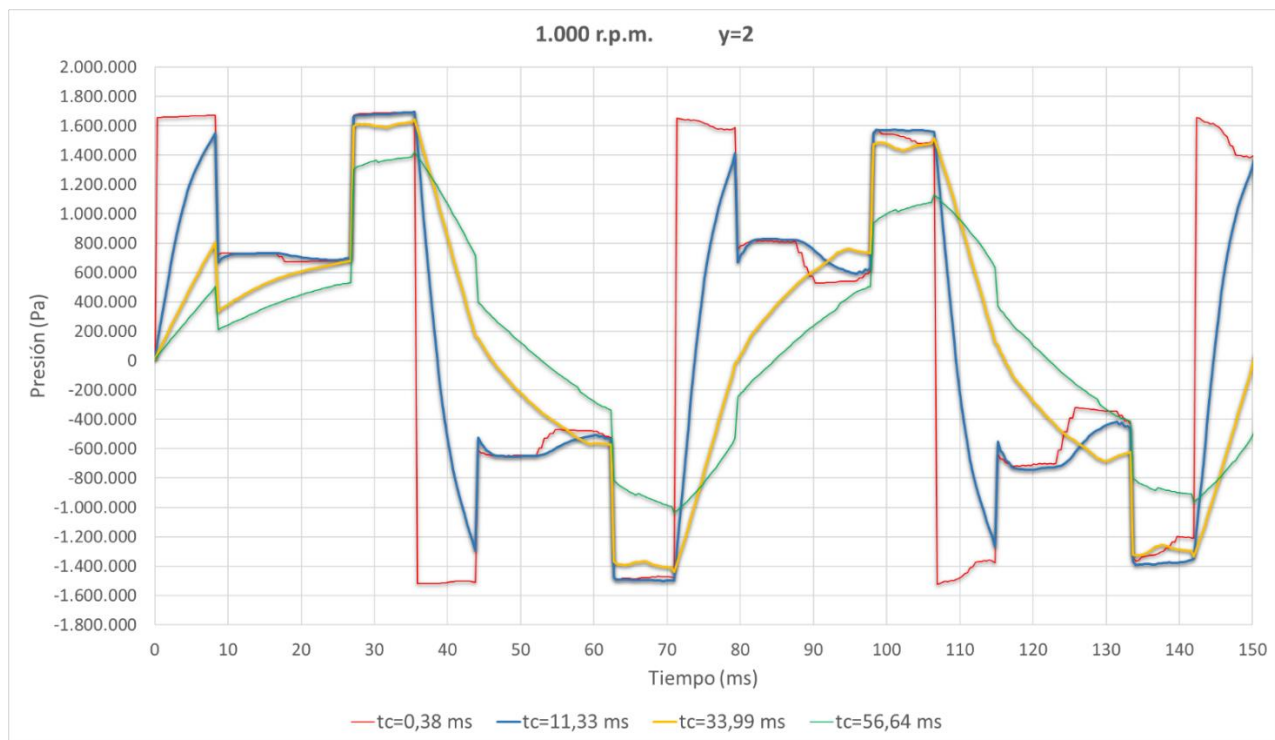


Figura 7.7. Onda de presión en el extremo para distintos tipos de cierre. $Y=2$

En cuanto a la forma de onda, cabe destacar los saltos de presiones que hay en las subidas y en las bajadas de la onda de presión debido al paso de la onda por tuberías de distinto diámetro, como se dijo anteriormente.

Las sobrepresiones alcanzadas pueden ser preferiblemente comentadas con ayuda del siguiente gráfico:

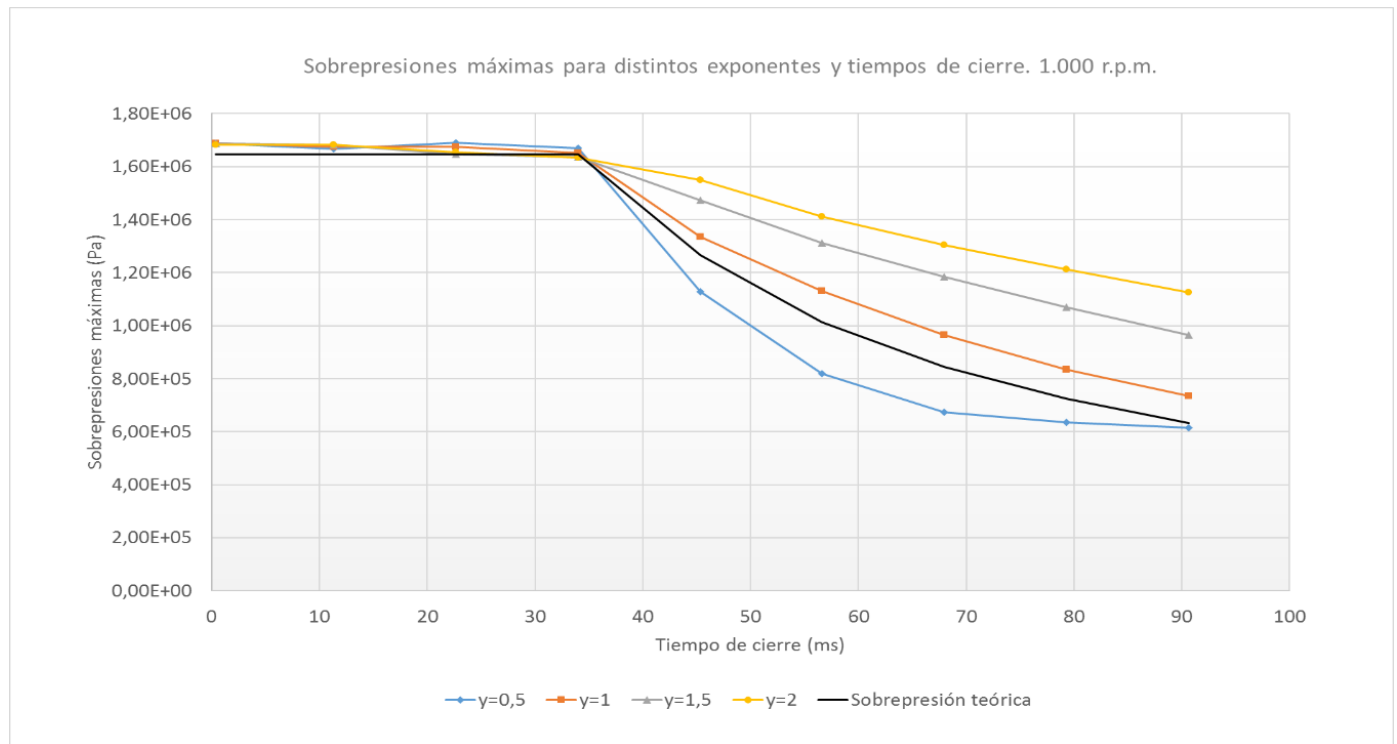


Figura 7.8. Sobrepresiones máximas para distintos tiempo y exponentes de cierre. Instalación docente

Para tiempos de cierre menores al tiempo de ida y vuelta, las sobrepresiones obtenidas por el modelo numérico son mayores que las sobrepresiones formuladas por Allievi, como ya se estudió anteriormente. No obstante, conforme aumenta el tiempo de cierre, la sobrepresión máxima se va acercando al valor teórico de sobrepresión máxima.

Para tiempos de cierre menores que el tiempo de ida y vuelta de la onda, es decir, cierres rápidos pero no instantáneos, las sobrepresiones máximas disminuyen conforme el tiempo de cierre aumenta, como era de esperar.

No obstante, la disminución de las sobrepresiones máximas con el aumento del tiempo de cierre depende del exponente de cierre de la válvula: conforme el exponente de cierre aumenta, el grado de disminución es menor.

La sobrepresión máxima según la fórmula de Michaud (sobrepresión máxima teórica) coincide aproximadamente con la sobrepresión máxima obtenida en el modelo numérico para un exponente de cierre de entre 0,5 y 1.

Al igual que se hizo con el esquema simple de estudio anteriormente, se puede determinar de una manera aproximada la relación general entre la sobrepresión máxima numérica obtenida, el tiempo de cierre y el exponente de cierre de la electroválvula, ahora en particular para la instalación experimental docente, en la que se tienen dos tipos de tuberías:

$$\Delta P_{max,numérica}(y, tc) = 2\rho L\Delta U \left[\frac{ay + c}{t_c} + 1000b \right] \quad [7.1]$$

```
Salida
lm(formula = Relación ~ tc.ms. + y, data = Datos)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.21864 -0.07375  0.01305  0.08102  0.15853

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.289116   0.109558   2.639 0.017232 *
tc.ms.       0.006992   0.001396   5.008 0.000108 ***
y            0.503916   0.040014  12.594 4.79e-10 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1 on 17 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9153, Adjusted R-squared:  0.9053
F-statistic: 91.84 on 2 and 17 DF,  p-value: 7.717e-10
```

Figura 7.9. Ventana de salida de R-Comander. Instalación docente

a	0,503916
b	0,006992
c	0,289116

Figura 7.10. Coeficientes de regresión resultantes para la instalación docente

El valor de R^2 resulta ser 0,8856, por lo que el ajuste el modelo de regresión lineal múltiple es bastante aceptable.

Sustituyendo valores, se obtiene

$$\Delta P_{max,numérica}(y, tc)(Pa) = 2\rho L\Delta U \left[\frac{ay + c}{t_c} + b \right] = 47.000\Delta U(m/s) \left[\frac{0,503916y + 0,289116}{t_c(s)} + 6,992 \right] \quad [7.2]$$

7.2.2.3 Tiempo de cierre en la instalación hidráulica

Se sabe que para un régimen de funcionamiento de la bomba de 1.000 r.p.m, las sobrepresiones que se dan en el transitorio son de unos 12 bares (ver figura 6.5).

Atendiendo a la gráfica 7.11, se puede determinar el tiempo de cierre de la válvula en la instalación en función del exponente de cierre de la misma (este dato aún es desconocido).

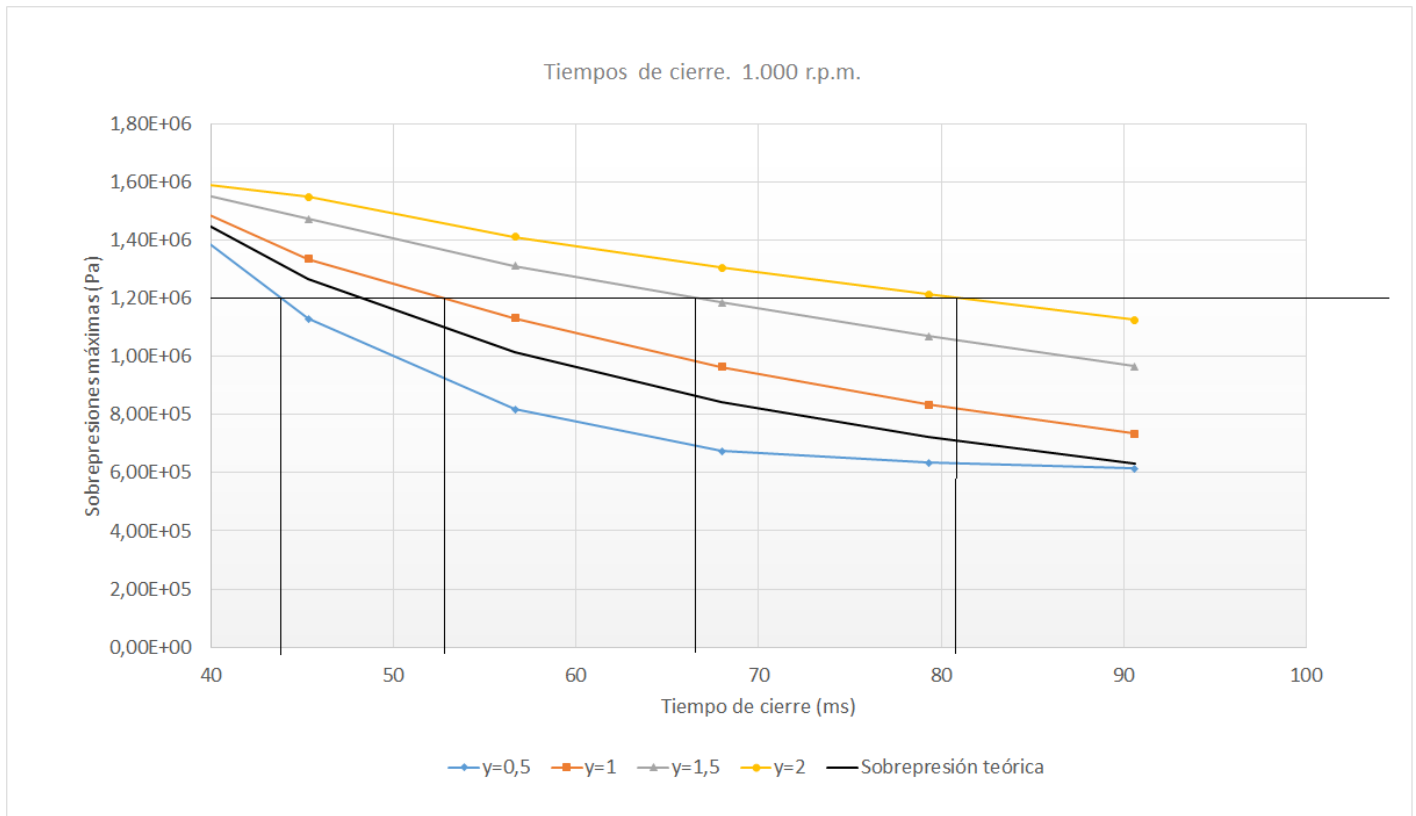


Figura 7.12. Gráfica. Tiempos de cierre de la electroválvula

Exponente de cierre	Tiempo de cierre (ms)
0,5	44,4
1	52,7
1,5	66,8
2	81,2

Figura 7.13. Tabla. Tiempos de cierre de la electroválvula

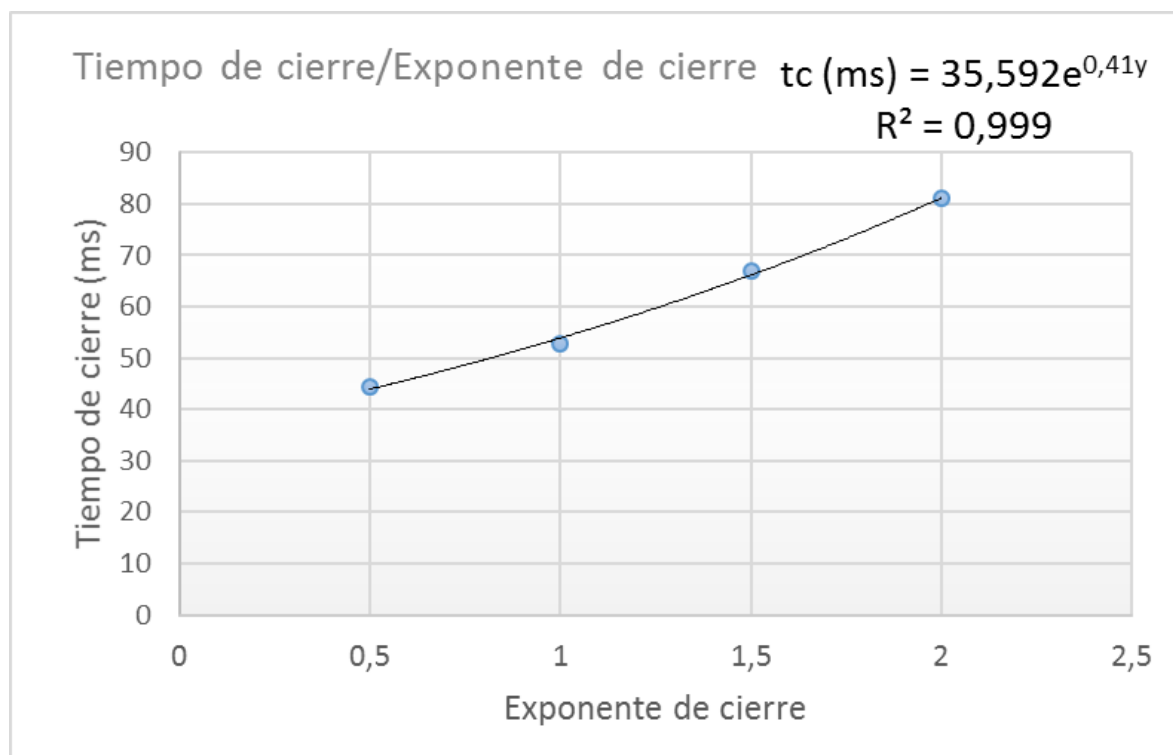


Figura 7.14. Tiempo de cierre de la electroválvula en función del exponente de cierre de la misma

Como se puede observar, el tiempo de cierre de la válvula aumenta exponencialmente con el aumento del exponente de cierre de la misma, de la forma

$$t_c(ms) = 35,592e^{0,41y} \quad [7.3]$$

7.2.3 Exponente y tiempo de cierre de la electroválvula de la instalación docente

Anteriormente se determinó una relación aproximada entre el tiempo de cierre y el exponente de cierre de la electroválvula de la instalación docente. Introduciendo esta relación en el modelo numérico, se pueden obtener varias formas de onda que alcancen los 12 bares con un régimen de funcionamiento de la bomba de 1.000 r.p.m.

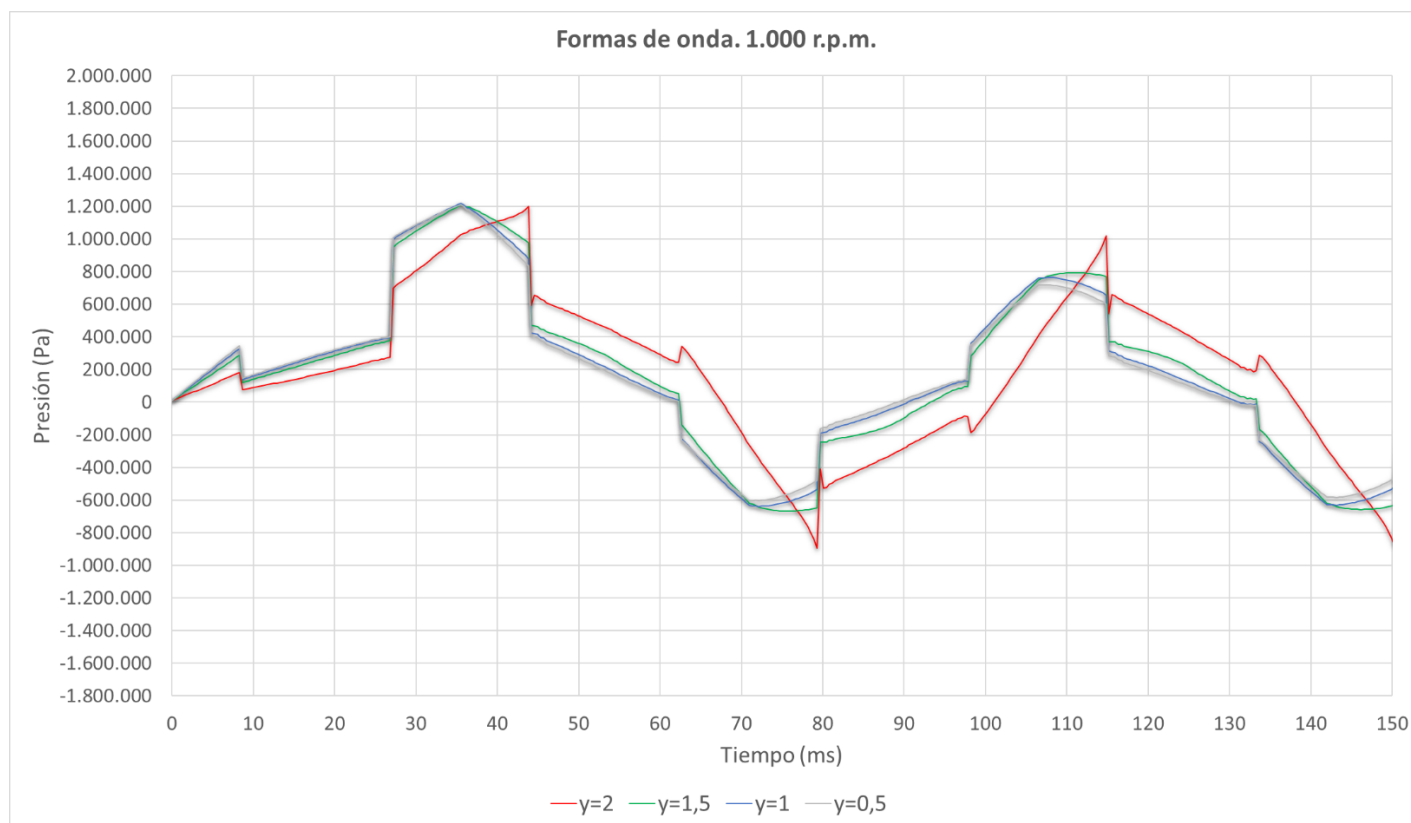


Figura 7.15. Ondas de presión del modelo numérico para un régimen de la bomba de 1.00 r.p.m y una sobrepresión de 12 bares

Se puede observar cómo para valores del exponente de cierre de entre $y=0,5$ e $y=1,5$, las formas de onda resultantes son muy parecidas.

Puesto que no se sabe qué tipo de cierre tiene realmente la electroválvula, en adelante, se considerará un cierre lineal ($y=1$).

Con un exponente de cierre de $y=1$, el tiempo de cierre de la electroválvula ha de ser, según la ecuación 7.3,

$$t_c(\text{ms}) = 35,592e^{0,41y} \approx 53 \text{ ms}$$

8 Comparación entre el modelo numérico y los resultados experimentales

La comparación entre los resultados del modelo numérico y los resultados experimentales se realizará a 0,5 m de la electroválvula, ya que experimentalmente no hay otra opción.

8.1.1.1 Onda de presión a 0,5m de la electroválvula. Modelo numérico

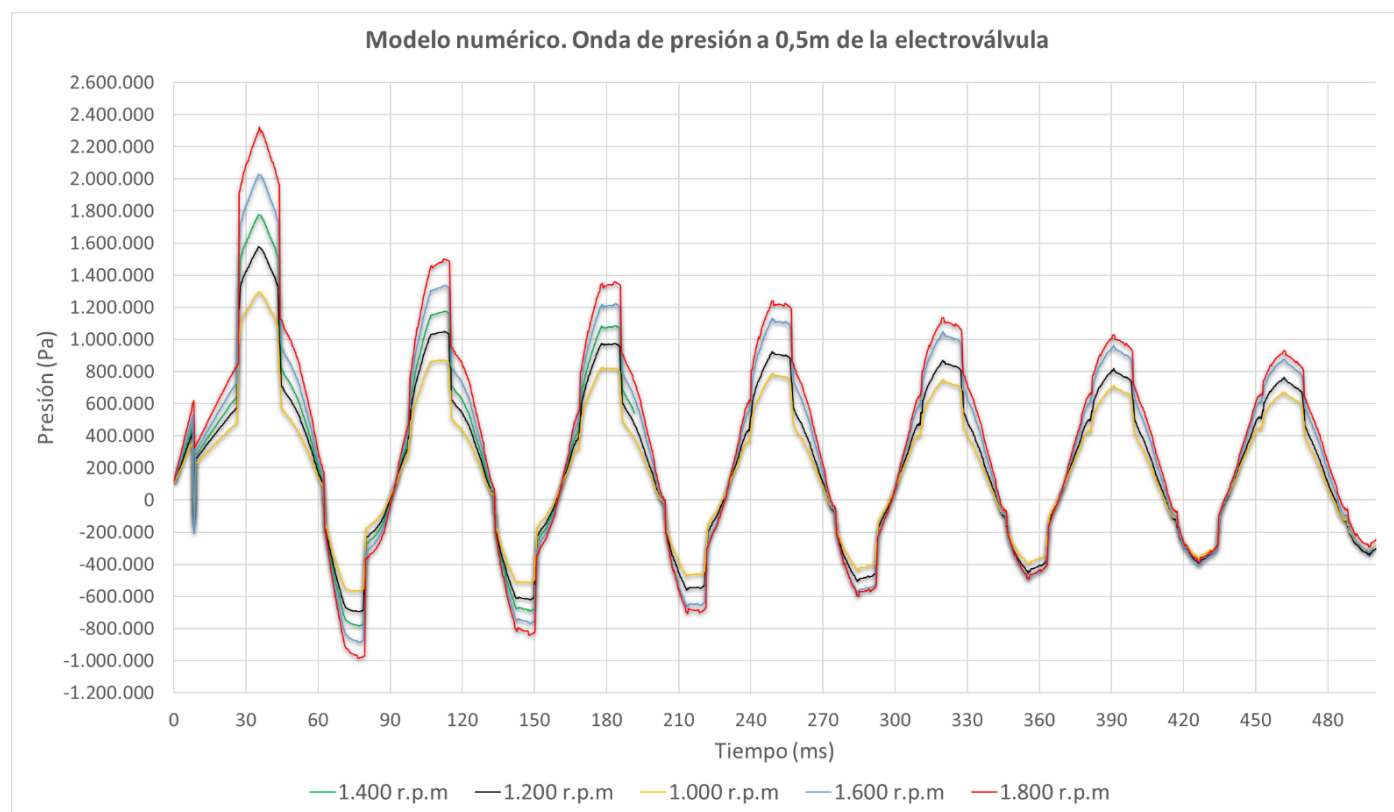


Figura 8.1. Onda de presión resultante del modelo numérico. $t_0 = 53 \text{ ms}$. $Y=1$

En la primera onda de presión (la que realmente es de interés), para los distintos regímenes de funcionamiento, se observa la presencia de un valle, al igual que se pudo ver en los resultados experimentales. Como ya se dijo, este valle (caída de presión) es debido fundamentalmente al cambio de diámetro.

En este caso, a diferencia de los resultados experimentales, el periodo de onda no varía en función de las condiciones del transitorio. Esto es debido a que en la resolución numérica se ha supuesto una velocidad de propagación constante, que en realidad no lo es, ya que aumenta para presiones altas.

8.1.1.2 Sobrepresiones

Comparando las sobrepresiones obtenidas por el modelo numérico con las sobrepresiones reales que se dan en la instalación para distintos regímenes de la bomba, se obtienen los siguientes resultados:

Régimen (r.p.m)	Caudal (m ³ /s)	Sobrepresión numérica (bar)	Sobrepresión experimental (bar)	Error (%)
1.000	0,000138	12	12	0,00
1.200	0,00017	14,9	14,9	0,00
1.400	0,000193	17,3	16,9	2,37
1.600	0,000221	19,6	20,1	-2,49
1.800	0,00025	22	22,8	-3,51

Figura 8.2. Sobrepresiones numéricas y sobrepresiones según Allievi. Error

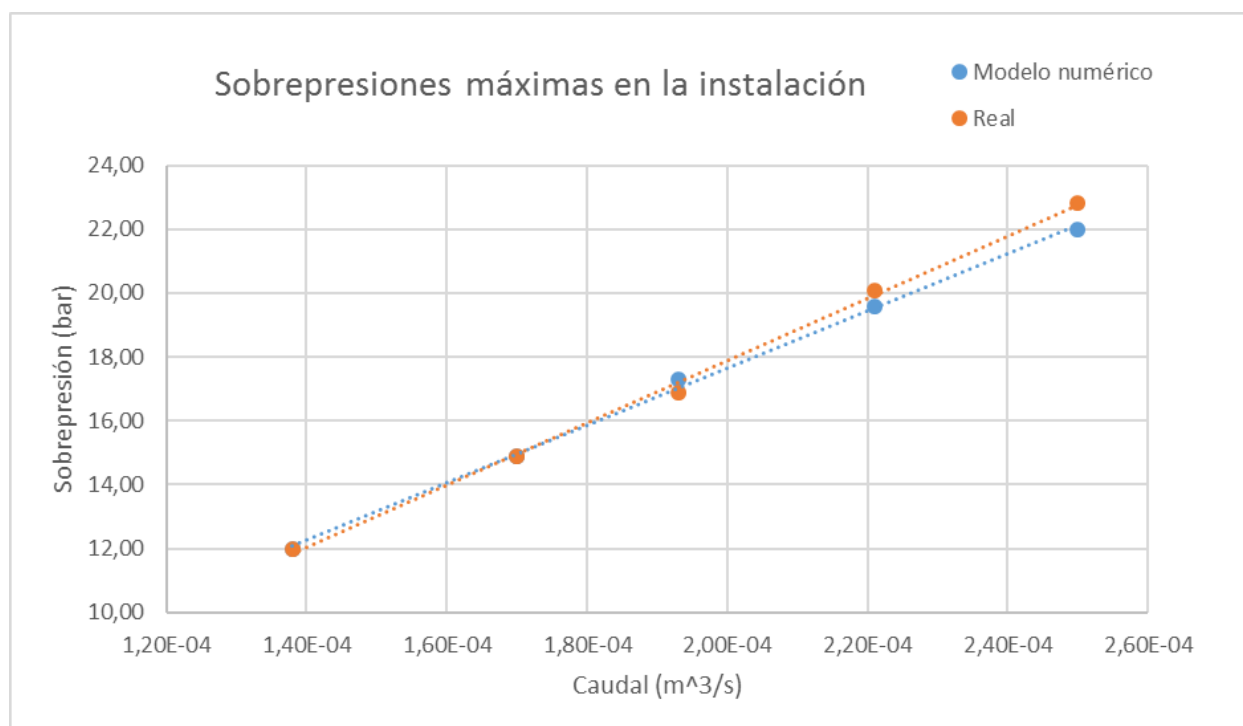


Figura 8.3. Tendencia de las sobrepresiones numéricas y sobrepresiones según Allievi

El error en el modelo numérico respecto de los valores reales de sobrepresión máxima se debe fundamentalmente al modelo teórico de la instalación del régimen permanente, en la que para regímenes de la bomba superiores a 1.400 r.p.m, el caudal resultante en el modelo teórico resulta ser menor que el real.

Otra fuente de error es que el régimen de la bomba varía a lo largo de su funcionamiento, debido a las variaciones de potencia que recibe del variador.

9 Conclusiones

El objetivo de este proyecto era mejorar el sistema de medida en la instalación experimental y desarrollar un modelo numérico del golpe de ariete en la misma.

Los resultados del modelo numérico y los resultados experimentales obtenidos debían converger para enriquecer el contenido de las prácticas realizables en la instalación.

En cuanto a la mejora del sistema de medida, con el nuevo sistema de adquisición de datos se ha logrado obtener una onda muchísimo más clara que con el sistema de medida anterior (osciloscopio). Por otro lado, se ha conseguido obtener no solo una gráfica, sino una base de datos que podrá ser muy útil para los alumnos.

En cuanto al modelo numérico, se ha conseguido un modelo en el que se han tenido en cuenta los cambios de diámetro, las pérdidas localizadas, el tiempo y el exponente de cierre de la electroválvula, las diferentes velocidades de propagación presentes en la instalación, etc.

En cuanto a la convergencia de los resultados experimentales con los resultados numéricos se puede decir que ha sido buena: el régimen permanente determinado teóricamente es muy aproximado, y la amplitud y el periodo de onda del transitorio también. No obstante, al no haber tenido en cuenta el fenómeno de la cavitación, el modelo numérico carece de validez tras el primer periodo de onda, por lo que no ha resultado posible realizar una comparativa entre la atenuación de la onda de presión real y la resultante en el modelo numérico.

Bibliografía

- Jorge Aguerre, R. (Enero de 2011). Golpe de ariete: simulación del transitorio amortiguado. *Mecánica Computacional*; ISSN 1666-6070, 10.
- Pérez Farrás, L. E. (22 de Agosto de 2005). Estudio de transitorios: Golpe de ariete. Universidad de Buenos aires: Departamento de Hidráulica.
- Provenano, P., & Aguerre, R. (2003). *Golpe de ariete: efecto de la velocidad de cierre de la válvula*. Bahía Blanca, Argentina, Noviembre 2003: Mecánica Computacional Vol. XXII.
- Rodríguez Calderón, W., & Muñoz, P. (Diciembre de 2007). Modelo numérico del golpe de ariete con Scilab. *Ingeniería e investigación Vol. 27 n°3*, 98-105.
- Sevilla, U. d. (s.f.). <http://ocwus.us.es/ingenieria-agroforestal/hidraulica-y-riegos/temario/Tema%203.Golpe%20ariete/index.htm>.
- Viedma Robles, A. (2012). *Apuntes de Ingeniería de Fluidos*. Cartagena.
- Viedma Robles, A. (2012). Práctica n°5. En *Prácticas de Ingeniería de Fluidos*. Cartagena.
- Zetina Robleda, F. (2015). *Simulación de flujo en tuberías aplicando un modelo de fricción transitorio*. México: Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería Civil.

Anexos

I. Programa de resolución del modelo numérico de la instalación docente

Como ya se ha dicho anteriormente, se ha utilizado Matlab para la resolución de los modelos numéricos.

El scrib de resolución del modelo numérico correspondiente a la instalación docente es el siguiente:

(Conviene aclarar que los valores de k_1 y k_2 son nulos, ya que pertenecen al término de fricción transitoria introducido en el modelo 1, el cual no resultó válido).

```
n=48;  
m=1000;  
  
Caudal=0.000138;  
Pinicio=65000;  
tc=130;  
  
L=23.5;  
D1=0.019;  
D2=0.012;  
  
f1=0.045;  
f2=0.05;  
k1=0.00;  
k2=0.00;  
expo=5;  
y=0.5;  
  
den=1000;  
g=9.8;  
  
c1=1300.41;  
c2=1349.73;  
ceq=1328.18;
```

Figura I.I. Programa de resolución del modelo numérico del golpe de ariete en la instalación docente I



```
incrementox1=c1*0.5/1324.09;
incrementox2=c2*0.5/1324.09;
incrementoq=0.501545128;
incrementot=0.5/1324.09;

K=zeros(n,n);
K(1,2)=0.29;
K(6,7)=0.19;
K(7,8)=0.19;
K(12,13)=0.38;
K(18,19)=0.77;
K(24,25)=0.36;
K(25,26)=0.38;
K(31,32)=0.28;
K(37,38)=24.5;
K(38,39)=0.38;
K(44,45)=0.19;

Z=zeros(n,n);
Z(1,2)=-0.39;
Z(7,8)=0.1;
Z(12,13)=0.02;
Z(13,14)=0.08;
Z(25,26)=-0.1;
Z(7,8)=0.1;
Z(31,32)=-0.1;
Z(43,44)=0.235;
Z(44,45)=0.5;
Z(45,46)=0.5;
Z(46,47)=0.025;

for i=1:25
    A(i)=pi*D1^2/4;
end

for i=26:48
    A(i)=pi*D2^2/4;
end

for i=1:24
    c(i,i+1)=c1;
    alfa(i,i+1)=c1*den;
    Perdidasp(i,i+1)=f1*incrementox1/D1+K(i,i+1);
    Perdidasast(i,i+1)=c1*k1;
    Perdidas(i,i+1)=Caudal^2*(8*f1*incrementox1/(pi^2*D1^5)+8*K(i,i+1)/(pi^2*D1^4));
end
for i=26:n-1
    c(i,i+1)=c2;
    alfa(i,i+1)=c2*den;
    Perdidasp(i,i+1)=f2*incrementox2/D2+K(i,i+1);
    Perdidasast(i,i+1)=c2*k2;
    Perdidas(i,i+1)=Caudal^2*(8*f2*incrementox2/(pi^2*D2^5)+8*K(i,i+1)/(pi^2*D2^4));
end

c(25,26)=ceq;
alfa(25,26)=ceq*den;
Perdidasp(25,26)=f1*0.214579086/D1+f2*0.286966042/D2+K(25,26);
Perdidasast(25,26)=c1*k1+c2*k2;
Perdidas(25,26)=Caudal^2*(8*f1*0.214579086/(pi^2*D1^5)+8*f2*0.286966042/(pi^2*D2^5)+8*K(25,26)/(pi^2*D2^4));
```

Figura I.II. Programa de resolución del modelo numérico del golpe de ariete en la instalación docente II

```

P=zeros(n,m);
Q=zeros(n,m);

for i=1:n
    Q(i,1)=Caudal;
end

for j=1:m
    P(1,j)=Pinicio;
end

for i=1:n-1
    P(i+1,1)=P(i,1)-den*(Perdidas(i,i+1)+Caudal^2*0.5*(1/A(i+1)-1/A(i))
    +g*(Z(i+1)-Z(i)));
end

for j=1:m
    if j<=tc
        Gradodeapertura(j)=(1-(j-1)/tc)^y;
        Kv(j)=421*0.93*2.718281828^(-6.043*Gradodeapertura(j));

    else
        Gradodeapertura(j)=0;
        Kv(j)=421;
    end
end

for a=1:1
    for j=1:m-1
        for i=1:n

            mayor=0;
            for b=1:n
                if abs(Q(b,j))>mayor
                    mayor=abs(Q(a,j));
                end
            end
            AUMENTO=(1+(Q(1,1)-mayor)/Q(1,1))^expo;
        end
    end
end

```

Figura I.III. Programa de resolución del modelo numérico del golpe de ariete en la instalación docente III



```
        if i==1
            tau2p=(Perdidasp(i,i+1)*AUMENTO*den*abs(Q(i+1,j))*Q(i+1,j))/(2*A(i+1)^2);
            tau2t=den*Perdidast(i,i+1)*sign(Q(i+1,j))*abs(Q(i,j+1)/A(i)-Q(i+1,j)/A(i+1));
            Q(i,j+1)=(P(i,j+1)/alfa(i,i+1)-P(i+1,j)/alfa(i,i+1)-tau2p/alfa(i,i+1)-
            tau2t/alfa(i,i+1)+Q(i+1,j)/A(i+1))*A(i);
        end

        if i==n
            if j<tc
                tau1p=(Perdidasp(i-1,i)*AUMENTO*den*abs(Q(i-1,j))*Q(i-1,j))/(2*A(i-1)^2);
                tau1t=den*Perdidast(i-1,i)*sign(Q(i-1,j))*abs(Q(i,j+1)/A(i)-Q(i-1,j)/A(i-1));
                r=((421*2.718281828^(-6.043*Gradodeapertura(j+1)))*Gradodeapertura(j+1)/Q(i,1))^2*P(i,
                1);
                s=den*c2/(A(i)*Gradodeapertura(j+1));
                t=-P(i-1,j)-den*c2*Q(i-1,j)/A(i)+tau1p+tau1t;
                Q(i,j+1)=(-s+sqrt(s^2-4*r*t))/(2*r);
                P(i,j+1)=P(i-1,j)-alfa(i-1,i)*(Q(i,j+1)/A(i)-Q(i-1,j)/A(i-1))-tau1p-tau1t;
            else
                tau1p=(Perdidasp(i-1,i)*AUMENTO*den*abs(Q(i-1,j))*Q(i-1,j))/(2*A(i-1)^2);
                tau1t=den*Perdidast(i-1,i)*sign(Q(i-1,j))*abs(Q(i,j+1)/A(i)-Q(i-1,j)/A(i-1));
                P(i,j+1)=P(i-1,j)-alfa(i-1,i)*(0-Q(i-1,j)/A(i-1))-tau1p-tau1t;
            end
        end

        if i>1 && i<n
            tau1p=(Perdidasp(i-1,i)*AUMENTO*den*abs(Q(i-1,j))*Q(i-1,j))/(2*A(i-1)^2);
            tau2p=(Perdidasp(i,i+1)*AUMENTO*den*abs(Q(i+1,j))*Q(i+1,j))/(2*A(i+1)^2);
            tau1t=den*Perdidast(i-1,i)*sign(Q(i-1,j))*abs(Q(i,j+1)/A(i)-Q(i-1,j)/A(i-1));
            tau2t=den*Perdidast(i,i+1)*sign(Q(i+1,j))*abs(Q(i,j+1)/A(i)-Q(i+1,j)/A(i+1));
            P(i,j+1)=(P(i-1,j)/c(i-1,i)+P(i+1,j)/c(i,i+1)+den*(-Q(i+1,j)/A(i+1)+Q(i-1,j)/A(i-1))-
            (tau1p+tau1t)/c(i-1,i)+(tau2p+tau2t)/c(i,i+1))/(1/c(i,i+1)+1/c(i-1,i));
            Q(i,j+1)=(P(i-1,j)-P(i+1,j)+den*(c(i-1,i)*Q(i-1,j)/A(i-1)+c(i,i+1)*Q(i+1,j)/A(i+1))-
            tau1p-tau2p-tau1t-tau2t)*A(i)/(den*(c(i,i+1)+c(i-1,i)));
        end

    end

end

end

end

Presion=zeros(m,n);
Caudal=zeros(m,n);
mayor=0;
for j=1:m
    for i=1:n
        Presion(j,i)=P(i,j);
        Caudal(j,i)=Q(i,j);
        if Presion(j,i) > mayor
            mayor=Presion(j,i);
        end
    end
end
disp((mayor-P(n,1)-den*c2*Q(45,1)/A(45))/(den*c2*Q(45,1)/A(45))*100)
disp(mayor-P(n,1))
```

Figura I.IV. Programa de resolución del modelo numérico del golpe de ariete en la instalación docente IV

II. Programa de Arduino UNO

El programa introducido en la tarjeta de adquisición de datos Arduino UNO es el siguiente:



```
Programa Arduino 1.6.7
Archivo Editar Programa Herramientas Ayuda
Programa
int row = 0;
void setup() {
  Serial.begin(128000);
  Serial.println("CLEARDATA");
  Serial.println("LABEL,Time,x,t(s)");
}

void loop() {
  Serial.print ("DATA,TIME,"); Serial.print(analogRead(A0)); Serial.print(","); Serial.println(micros());
  row++;
  if (row > 10000)
  {
    row=0;
    Serial.println("ROW,SET,2");
  }
}
```

Figura II.I. Programación de la tarjeta Arduino UNO

III. Esquema y procedimiento de toma de datos en la instalación

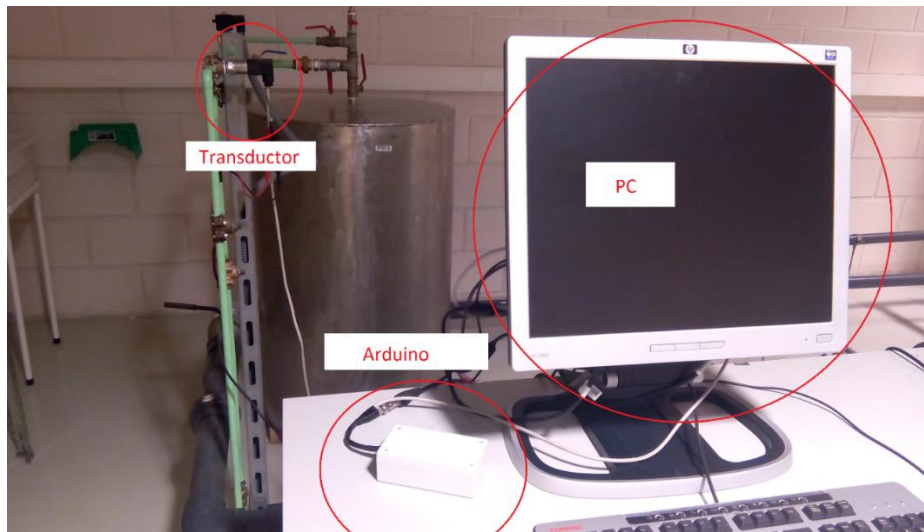


Figura III.I. Esquema de toma de datos de la instalación

Procedimiento:

- I. Se enciende el ordenador (torre y pantalla).
- II. Se abre el Excel ubicado en el escritorio para la toma de datos.
- III. Aceptar la ventana emergente. Se observará algo similar a la figura 6.3.
- IV. Poner en marcha la instalación, con el régimen de funcionamiento de la bomba deseado.
- V. Situarse en la hoja “Gráfica”.
- VI. Con el botón “connect” se inicia la toma de datos (unos 650 datos por segundo). Estos datos se van almacenando (como también se ve en la figura 6.3.).
- VII. Una vez pulsado el botón, hay que esperar aproximadamente un segundo y cerrar la electroválvula.
- VIII. Los datos se van graficando en tiempo real, como se irá observando.
- IX. Cuando finalice el transitorio se ha de volver a pulsar el botón nuevamente (ahora ha pasado a llamarse “disconnect”).
- X. En el archivo Excel quedará tanto la base de datos como la gráfica de la señal.
- XI. Al reiniciar la toma de datos se borrará la lectura anterior, por lo que previamente las tomas de datos han de guardarse:

- Archivo.
- Guardar como.
- Nombre que se quiera.
- Tipo de archivo: Libro de Excel 97-2003 (‘xls).