



industriales
etsii

Escuela Técnica
Superior
de Ingeniería
Industrial

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial

Cinemática computacional basada en ecuaciones de grupo para sistemas multicuerpo planos con singularidades de tipo geométrico y cinemático.

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERIA MECANICA.



Universidad
Politécnica
de Cartagena

**Autor: EDGAR MICHELLE PRIETO
ALMANZA**
Director: MARIANO SAURA SANCHEZ

Cartagena, 17 ENERO 2018

Agradecimientos

En estas primeras líneas me gustaría expresar todo mi agradecimiento a las personas que a lo largo de mi vida y de esta carrera me han permitido desarrollarme tanto personal como intelectualmente. Sin ellos este tren no habría llegado a tiempo a su destino.

En primer lugar me gustaría dar las gracias a D. Mariano Saura Sánchez, director de mí trabajo, por haber confiado en mí para llevarlo a cabo y por toda su ayuda, compromiso y dedicación con el proyecto. Con él como profesor he aprendido muchísimo tanto a nivel personal como profesional y ha sido capaz de trasmitirme su pasión por el mundo del análisis cinemático de las mecanismos. Muchas gracias, profesor.

A los profesores, porque todos los conocimientos adquiridos y los retos que me han planteado durante las carrera me han permitido y me permitirán afrontar cualquier situación profesional con mayores garantías.

A mi madre, por darme la oportunidad de estudiar lo que más me gusta, por su confianza incondicional, por todo su apoyo, y por enseñarme desde pequeño que con esfuerzo, trabajo y perseverancia puedo alcanzar cualquier objetivo que me proponga. Gracias madre por ser tan luchadora y por hacer posible que cumpla con uno de mis sueños.

A mis hermanos por su apoyo, y toda la ayuda y consejos brindados para ayudarme a tomar las decisiones correctas en momentos importantes. Gracias gordo.

A mis amigos de la Universidad, por hacer más amenos estos años de carrera, por la convivencia, las risas y todas las fiestas compartidas. Por todas esas tardes de estudio maratonianos en la biblioteca, que al final del día esos esfuerzos han dado su fruto.

Y finalmente quiero dedicar este proyecto a mis abuelos Nahum y la Abuela. A la abuela por cuidarme desde donde esté y a Nahum por ser mi ejemplo de vida. Porque sé que ellos siempre estarán orgullosos de mí.

Índice general

Índice general	II
1. Introducción	3
1.1. Solución basada en ecuaciones de grupo (SBEG)	5
1.2. Objetivos	5
2. Fundamentos	7
2.1. Conceptos básicos topológicos	7
2.1.1. Pieza y eslabón	7
2.1.2. Par cinemático	8
2.1.3. Cadenas cinemáticas. Movilidad	8
2.1.4. Mecanismo, Máquina y Estructura	10
2.2. Teoría de Assur	10
2.3. Nuevo concepto de Grupo Estructural	14
2.3.1. Grafo estructural de un mecanismo	15
2.3.2. Análisis basado en el grafo. Diagrama estructural	16
2.4. Métodos de modelización matemática	17
2.4.1. Vector de posición	18
2.4.2. Método basado en ecuación de cierre de cadena	18
2.4.3. Análisis del grafo estructural	19
2.4.4. Elementos en la ecuación de cierre de cadena	20
2.5. Análisis cinemático	21
2.5.1. Derivación directa	22
2.5.2. Formulación matricial	23
2.5.3. Otros puntos de interés	25
3. Excepciones a los criterios de movilidad	27
3.1. Articulaciones múltiples	27

3.1.1.	Descripción de la singularidad	27
3.1.2.	Degeneración de un sólido ternario en un punto	28
3.1.3.	Dos articulaciones degeneran en una	30
3.2.	Redundancia tangente.	33
3.2.1.	Doble Paralelogramo	34
3.3.	Pares Deslizantes	37
3.4.	Rodadura Pura	39
3.5.	Piñón cremallera	40
3.5.1.	Sin Cierre de Cadena	40
3.5.2.	Con Cierre de Cadena	41
3.6.	Tren ordinario	41
3.6.1.	Solución	43
3.7.	Tren epicicloidal	44
3.7.1.	Solución	45
3.8.	Posiciones singulares	46
4.	Resultados	51
4.1.	Formulación basada en ecuaciones de grupo en coordenadas relativas	51
4.2.	Subrutinas para análisis cinemático de grupos estructurales básicos.	52
4.3.	Aplicación al análisis del cuadrilátero articulado con articulación múltiples.	52
4.4.	Aplicación al análisis del Tren Epicicloidal.	55
4.5.	Aplicación al análisis del doble paralelogramo.	58
4.6.	Aplicación al análisis para un mecanismo con diferentes tipos de singularidades combinadas.	61
5.	Conclusiones	63
5.1.	Resultados de los ensayos	63
	Bibliografía	66

Índice de figuras

2.1. Cuadrilatero articulado.	11
2.2. Diagrama estructural.	15
2.3. Cuadrilatero articulado.	16
2.4. Utilización del grafo estructural para obtención estructura cinemática	16
2.5. Vector de posición de un punto en diferentes sistemas de referencia	18
2.6. Solido rigido articulado	21
2.7. Posición, velocidad y aceleración de otros puntos de interés.	26
3.1. Mecanismo de 6 barras articulado sin articulación múltiple.	28
3.2. A: Mecanismo de 4 barras con articulación múltiple, B: Grafo estructural . .	28
3.3. Figura 3.2 con sus ecuaciones de posición representadas y sus ángulos. . . .	29
3.4. Grafo estructural de la Figura 3.2 teniendo en cuenta la articulación múltiple	30
3.5. Fig A: Mecanismo de 6 barras con articulacion multiple, Fig B: Grafo estructural	31
3.6. Mecanismo de 6 barras con articulación múltiple con sus vectores de posición representados.	31
3.7. Grafos estructurales de las posibles soluciones	32
3.8. Mecanismo de 5 barras articulado con su grafo estructural	33
3.9. Mecanismo con sus vectores de posición y ángulos correspondientes.	34
3.10. Doble paralelogramo de 5 barras articulado	34
3.11. Doble paralelogramo con la condición de redundancia tangente.	35
3.12. Grafo estructural con GDL y movimiento de entrada añadidos.	36
3.13. Doble paralelogramo con par superior entre eslabones 3 y 4 y con sus vectores de posición representados.	36
3.14. Solo Pares Deslizantes y uno de Rotación	37
3.15. Piñón-Cremallera sin cierre de cadena.	40
3.16. A: No añade GDL adicional. B: Sí añade GDL adicional	41
3.17. Tren Ordinario con su Grafo Estructural Topológico.	42
3.18. Grafo estructural con condición de rodadura pura.	43

3.19. Grafo estructural con condición de cierre de cadena.	44
3.20. A: Grafo estructural topológico. B: Grafo estructural con condición de rodadura pura	44
3.21. A: Grafo estructural con condición de rodadura pura.	45
3.22. Grafo estructural corregido Tren epicicloidal	46
3.23. Posición inalcanzable.	47
3.24. Posición de bloqueo.	47
3.25. Mecanismo de manivela, biela, corredera.	48
3.26. Posición de bifurcación.	49
4.1. Numeración global del cuadrilátero	52
4.2. Numeración local del cuadrilátero	53
4.3. Grafo estructural corregido Tren epicicloidal	57
4.4. Grafo estructural Tren Epicicloidal	57
4.5. Numeración global de los puntos del mecanismo	59
4.6. Numeración local de los grupos. A: Grupo 1R2DREL. B: Grupo 3R2DREL y C: Grupo ParSup	59
4.7. A:Mecanismo en el tiempo inicial del movimiento. B:Mecanismo en el instante final del movimiento.	61

Capítulo 1

Introducción

Este proyecto está enfocado al estudio de la estructura cinemática y análisis cinemático de sistemas multicuerpos planos en los que existen singularidades a la aplicación de los criterios de movilidad.

Un sistema multicuerpo es un conjunto de cuerpos, también denominados elementos o eslabones, rígidos o flexibles, interconectados de tal modo que existe movimiento relativo entre ellos. Entre los posibles análisis a realizar en este tipo de mecanismos: cinemático y dinámico; el presente proyecto se va a centrar en el análisis estructural y el análisis cinemático. El análisis estructural se encarga del estudio de la topología y la estructura cinemática de los sistemas multicuerpo mientras que el cinemático estudia las relaciones entre posiciones, velocidades y aceleraciones de sólidos y puntos del mismo; se trata de problemas puramente geométricos, independientes de las fuerzas causantes del movimiento y de las características inerciales de los cuerpos que componen el sistema.

En el análisis de mecanismos se tiene la necesidad de analizar teóricamente el comportamiento de los sistemas mecánicos para predecir, dentro de lo posible, su comportamiento.

Hasta la introducción del ordenador, el estudio debía hacerse planteando las ecuaciones diferenciales del sistema y resolviéndolas manualmente. La complejidad de esta tarea hacía que los sistemas mecánicos analizados fueran simplificados para plantear y resolver pocas ecuaciones, por lo que había que esperar a la construcción del prototipo para estudiar en profundidad el comportamiento del mecanismo.

Con la llegada del ordenador se solucionó uno de los problemas; ya se podían resolver fácilmente las ecuaciones, pero seguía existiendo la dificultad de plantearlas. El inconveniente radica en que incluso un experto en esta temática, difícilmente puede analizar un sistema de unos 6 ó 10 grados de libertad, ya que el planteamiento de las ecuaciones diferenciales, conforme se incrementa el número de grados de libertad, se complica enormemente hasta que la tarea se hace inviable.

Conscientes de la necesidad de incrementar las posibilidades de simular por ordenador cualquier comportamiento cinemático o dinámico de un sistema, en los últimos años se han desarrollado herramientas que pueden facilitar la creación de modelos teóricos. En este contexto han nacido programas como ADAMS, DADS, COMPAMM y otros. Todos ellos tienen la particularidad de plantear de una forma automática las ecuaciones diferenciales que caracterizan un modelo concreto, cualquiera que sea su número de grados de libertad.

Mediante la utilización de programas se puede simular por ordenador la cinemática y

la dinámica de cualquier mecanismo, analizando no sólo los valores que alcanzan las principales variables, sino incluso observando en la pantalla de un ordenador los movimientos del mecanismo.

En el presente documento realizaremos el estudio cinemático y su simulación mediante programas informáticos. Los problemas cinemáticos son aquellos en los que se estudia la posición o el movimiento de un sistema multicuerpo, independientemente de las fuerzas que lo producen.

Definiremos como elementos de entrada de un sistema multicuerpo aquellos cuya posición o movimiento son conocidos. La posición o movimiento de los restantes cuerpos del sistema puede determinarse de acuerdo con la correspondiente al elemento de entrada, existiendo tantos elementos de entrada como grados de libertad.

En la práctica, pueden presentarse diferentes tipos de problemas cinemáticos que describiremos a continuación:

- Problema de Posición Inicial. Consiste en encontrar la posición de todos los elementos del sistema multicuerpo que se esté analizando, para una posición inicial dada de los cuerpos de entrada.
- Problema de Desplazamientos. Finitos Desde una posición conocida del sistema multicuerpo, y un desplazamiento finito (no infinitesimal) de los cuerpos de entrada, este problema consiste en conocer la posición final de los restantes cuerpos del sistema.
- Análisis de Velocidades y Aceleraciones. Dada una posición del sistema multicuerpo y la velocidad de los elementos de entrada, el análisis de velocidades consiste en determinar las velocidades de todos los otros elementos.

Una vez conocida la velocidad de todos los cuerpos del sistema, el análisis de aceleraciones consiste en calcular la aceleración de cada uno de ellos para una aceleración determinada de los elementos de entrada.

La simulación cinemática proporciona una visión del rango completo de movimiento del sistema multicuerpo. La solución a este problema engloba todos los anteriores, con un especial énfasis en el caso de los desplazamientos finitos. Permite detectar colisiones, estudiar las trayectorias de diferentes puntos, secuencias en las posiciones de un determinado elemento del sistema, etc.

En todos estos casos, la solución del problema, cuando se aplican técnicas de análisis de sistemas multicuerpo, pasa por el planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones, denominadas ecuaciones de restricción, que expresan de forma analítica las limitaciones de movimiento impuestas por las juntas al movimiento relativo de los dos cuerpos unidos por ellas, y cuya primera y segunda derivadas respecto al tiempo son las ecuaciones de velocidad y aceleración, respectivamente.

Estas técnicas de análisis de sistemas mecánicos que se emplean en el desarrollo de los programas informáticos de simulación, tienen como objetivo el desarrollo de metodologías básicas que permitan plantear y resolver de manera automática las ecuaciones del movimiento, lo que requiere técnicas sistemáticas de formulación de ecuaciones y métodos numéricos para resolverlas.

1.1. Solución basada en ecuaciones de grupo (SBEG)

Las formulaciones llamadas globales no explotan la topología del sistema mecánico; por ello, sea cual sea el sistema a estudiar, su modelización y análisis cinemático o dinámico se puede llevar a cabo de forma muy sistemática. La ventaja que supone la modelización automática del sistema en las formulaciones globales se ha asociado, tradicionalmente, a una pérdida de eficiencia debido a la necesidad de emplear un elevado número de coordenadas en la definición del modelo y a que el sistema de ecuaciones diferenciales del movimiento se extiende a todo el conjunto de coordenadas.

Las formulaciones topológicas, por el contrario, sí explotan la topología del mecanismo, por lo que permiten generar un modelo matemático con un menor número de coordenadas; además, el sistema de ecuaciones del movimiento se extiende solo a un número de coordenadas igual en número a los grados de libertad (GDL) del mecanismo; esto las hace más eficientes que las globales, pero menos generales ya que la topología considerada inicialmente puede cambiar a lo largo del tiempo.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este trabajo es identificar y clasificar singularidades de tipo geométrico y cinemático en sistemas multicuerpos planos y estudiar cómo se puede abordar su análisis estructural y cinemático. Se tratará de aportar soluciones a ambos problemas estableciendo una metodología para generar un grafo estructural coherente y definiendo una formulación cinemática de las singularidades encontradas. Se implementarán rutinas de análisis cinemático basadas en ecuaciones de grupo para estas singularidades, y se aplicarán las mismas al análisis cinemático de sistemas multicuerpo sujetos a los tipos de singularidades encontrados.

Para la consecución de este objetivo principal se plantean una serie de objetivos específicos:

- Revisión bibliográfica para identificar y clasificar singularidades de tipo geométrico y cinemático en sistemas mecánicos planos.
- Desarrollar soluciones para el análisis cinemático computacional basado en ecuaciones de grupo para grupos estructurales básicos y sin singularidades.
- Desarrollar soluciones para el análisis cinemático computacional basado en ecuaciones de grupo para grupos estructurales con las singularidades detectadas en la revisión bibliográfica.
- Implementar las soluciones, mediante código, en el programa e interpretación MATLAB para una mejor visualización de los resultados

El proyecto se estructura en 5 capítulos.

- Capítulo 1: Introducción, se revisan los antecedentes en teoría del análisis estructural y cinemático computacional.

- Capítulo 2: Movilidad, se estudia qué es la movilidad de un mecanismo y por qué es importante conocerla, al igual que se nombran los distintos tipos de criterios de movilidad que existen y se explica el criterio de movilidad a utilizar en este proyecto.
- Capítulo 3: Fundamentos, se presentan los fundamentos teóricos sobre la movilidad de los mecanismos a estudiar, centrándose en ciertas singularidades del mecanismos. También se presenta la formulación del problema propuesto.
- Capítulo 4: Resultados, se aplican los métodos explicados en los fundamentos del capítulo anterior y se presentan los resultados obtenidos tras aplicar la formulación y su implementación en Matlab del análisis cinemático a mecanismos de diferente topología y complejidad.
- Capítulo 5: Conclusiones y desarrollos futuros, se explican los resultados obtenidos y se implementan casos los cuales se pueden desarrollar mas.

Capítulo 2

Fundamentos

En este capítulo se introduce el análisis estructural de los mecanismos planos. En primer lugar, se introducen conceptos básicos topológicos, se define el concepto de movilidad de las cadenas cinemáticas y, seguidamente, desarrolla la teoría de Assur para el análisis estructural de los mecanismos articulados planos. Posteriormente se extenderán los conceptos de esa teoría a mecanismos planos de cualquier tipo.

2.1. Conceptos básicos topológicos

2.1.1. Pieza y eslabón

Una **pieza** es cada uno de los elementos indivisibles que componen una máquina o mecanismo. Son, por tanto, cada uno de los elementos que obtendríamos al realizar el despiece completo del conjunto o bien todos aquellos elementos que vienen definidos en sus planos de despiece, sobre los que habrá que especificar dimensiones y propiedades en función de la utilidad para la que hayan sido concebidos

Eslabón es el conjunto de piezas rígidamente unidas entre sí y que posee movimiento relativo con cualquier otro. En los mecanismos planos cada eslabón considerado aisladamente puede poseer tres movimientos independientes: dos de traslación, según los ejes x e y de un sistema de coordenadas libremente elegido en el plano del mecanismo, y uno de rotación alrededor de un eje z , perpendicular a dicho plano. En los mecanismos espaciales, un eslabón puede poseer hasta seis movimientos independientes. A cada uno de estos movimientos independientes se le llama grado de libertad.

El eslabón es el elemento estructural básico con capacidad de movimiento en un mecanismo. En los mecanismos siempre se considerará que uno de los eslabones es fijo. A este eslabón se le llama Bastidor y normalmente se le identifica con el número 1. Sólo existe un único bastidor en todo mecanismo.

En Teoría de Mecanismos se considera la hipótesis de sólido rígido que implica que la distancia entre dos puntos de un mismo eslabón se mantiene independientemente de la carga externa a que se encuentre sometido.

2.1.2. Par cinemático

Par cinemático es cada conjunto formado por dos eslabones (par) de forma que entre ellos exista la posibilidad de movimiento relativo. Los pares se pueden clasificar según tres criterios, por la extensión del contacto, mediante la clasificación de Reuleaux, y por el grado del par, esta última es la forma más extendida de clasificar los pares cinemáticos y es en la que nos basaremos para el desarrollo de los capítulos siguientes.

Se define el **grado** de un par cinemático como el número de grados de libertad que permite el par; es decir, por el número de movimientos independientes que un eslabón tiene respecto al otro. Para identificar el grado de un par se separan los eslabones del resto del mecanismo y se estudia su movimiento relativo fijando uno de ellos. El número de movimientos independientes que tenga el eslabón móvil respecto al que se considera fijo establece el grado del par.

De acuerdo con el número de grados de libertad que les quedan, podemos considerar los pares cinemáticos de grado uno (par inferior) o grado dos (par superior) en mecanismos planos. En mecanismos espaciales, los pares se pueden clasificar en cinco grados.

2.1.3. Cadenas cinemáticas. Movilidad

La agrupación de pares cinemáticos constituye una cadena cinemática. Se clasifican según los siguientes criterios.

Por la unión de sus eslabones, en:

- Cerradas, cuando cada eslabón o miembro pertenece, al menos a dos pares.
- Abiertas, cuando al menos un eslabón no cumple la condición anterior.

En cuanto al movimiento en:

- Bloqueadas, o de movimiento nulo, cuando entre sus eslabones resulte imposible cualquier movimiento relativo.
- Desmodrómicas, o de movimiento determinado, cuando entre sus eslabones exista movimiento relativo determinado, o sea, que al permanecer uno de los eslabones fijo e imprimir movimiento a otro, todos los puntos de los restantes se moverán sobre trayectorias determinadas y siempre sobre las mismas, con independencia del número de veces que se repita el movimiento.
- Libres o de movimiento indeterminado, cuando los movimientos relativos de sus eslabones no son determinados, o sea, que al fijar uno de ellos y repetir el movimiento de otro, los puntos de los restantes siguen en general distintas trayectorias.

Según la clase de pares que las constituyen, en:

- Cadenas cinemáticas de orden inferior, cuando todos los pares cinemáticos son inferiores.
- Cadenas cinemáticas de orden superior, cuando al menos uno de sus pares es superior.

Movilidad

La movilidad de una cadena cinemática es la dimensión de su espacio de configuraciones accesibles y coincide con la dimensión del conjunto de coordenadas independientes mínimo, necesario que permite definir la posición exacta de todos sus eslabones en cada fase de su ciclo cinemático.

Para determinar la movilidad de una cadena cinemática se pueden utilizar los conceptos introducidos sobre los grados de libertad o movimientos independientes que hay entre dos eslabones que elimina un par cinemático, en función de su clase o grado, sin tener que plantear las ecuaciones de restricción que introducen todos sus pares, lo que supondría un enorme trabajo en el análisis de mecanismos complejos. A partir de esos conceptos se pueden obtener expresiones sencillas enunciadas como criterios de movilidad.

Una de las razones por las que es importante determinar la movilidad de un mecanismo, es porque el número de acciones independientes que se deben ejercer sobre él para controlar en todo momento su movimiento coincide con su movilidad. Así, para mover un mecanismo con un grado de libertad, sólo será necesario introducir un accionamiento externo: motor eléctrico, pistón hidráulico o neumático, giro introducido por acción humana, etc.

Hay que destacar que el número de grados de libertad (GDL) de un mecanismo o una cadena cinemática sólo coincide con su Movilidad en el caso de sistemas holónomos, donde todas las restricciones impuestas están planteadas a nivel de posiciones y, en el caso de que alguna estuviera impuesta a nivel cinemático (ej. velocidades) ésta deberá ser integrable.

La movilidad de un mecanismo depende principalmente de su propia configuración: número de eslabones que lo constituyen y de la forma en que éstos estén conectados (tipo de pares cinemáticos que forman), o sea de las ecuaciones de restricción que se puedan establecer para los pares cinemáticos existentes. Pero, en determinados casos, puede ocurrir que aparezcan ecuaciones de restricción o grados de libertad, tanto adicionales como redundantes respecto a los definidos por la topología del sistema estudiado y por tanto la movilidad del mecanismo, como se verá, puede ser modificada.

Según su movimiento pueden ser espacial o plano; para el movimiento espacial el criterio más usado es el criterio de Malishev; en nuestro caso nos interesa estudiar los mecanismos con movimiento plano, dentro de los cuales se encuentran el criterio de Restricción, el criterio de Kutzbach, o su versión modificada, mejor conocida como el criterio de Grubler.

El criterio de Grubler puede aplicarse a cualquier tipo de cadena cinemática, abierta o cerrada y en la que aparezcan tanto pares cinemáticos superiores¹ como inferiores². Se basa en los dos principios siguientes:

1. El eslabón fijo o bastidor de un mecanismo plano carece de grados de libertad y los restantes, cuando no están ligados a otros, poseen cada uno tres grados de libertad: dos de traslación y uno de rotación.
2. Cuando un eslabón está conectado a otro a través de un par inferior, sus grados de libertad se reducen en dos, mientras que si la conexión tiene lugar a través de un par superior sólo pierde un grado de libertad.

¹Un par superior -par de grado 2 - elimina UN solo grado de libertad.

²Un par inferior, sea de rotación o de traslación, elimina DOS grados de libertad.

La expresión que ofrece este criterio para determinar la movilidad de un mecanismo se conoce como ecuación de Grübler:

$$L = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_i - p_s \quad (2.1)$$

2.1.4. Mecanismo, Máquina y Estructura

Se llama **mecanismo** a toda combinación de cuerpos rígidos dispuestos de forma que el movimiento de uno obligue a moverse a los demás, según leyes que dependen de la naturaleza de la combinación.

Una **máquina** es la combinación de cuerpos rígidos o resistentes agrupados y conectados de tal modo que tengan entre sí movimientos relativos determinados y transmitan esfuerzos desde la fuente de energía hasta el lugar donde han de ser vencidas las resistencias.

Una **estructura** es una combinación de miembros rígidos capaz de transmitir esfuerzos o soportar cargas, sin que haya movimiento relativo entre sus partes.

2.2. Teoría de Assur

El profesor L.V. Assur [1876-1921] sentó las bases del análisis estructural de los mecanismos articulados planos desarrollando un método sistemático que permite dividir un mecanismo, independientemente de su complejidad, en un número determinado de grupos de eslabones y pares cinemáticos básicos, conocidos como «grupos estructurales».

Además, comprobó que el número de grupos estructurales que existen es limitado y que por tanto, cualquier mecanismo está formado por una combinación de éstos. El análisis estructural de un mecanismo consiste, en obtener qué grupos estructurales lo forman y en qué orden.

Assur ha desarrollado también un método sistemático para el análisis cinemático y dinámico de cada uno de estos grupos individualmente, de forma que cuando se tiene la estructura de un mecanismo, para analizarlo completamente sólo será necesario aplicar los métodos de análisis establecidos a cada grupo en el orden en el que se han obtenido.

La principal ventaja de este método es que las rutinas de análisis de cada tipo de grupo se pueden programar independientemente, de forma que el programa raíz las vaya llamando cada vez que las necesite según la estructura que haya resultado para el mecanismo a analizar.

Según Assur, el número de grados de libertad L de un mecanismo puede representarse como la suma del número de grados de libertad de un determinado número de grupos estructurales, de forma que el primer grupo tiene el mismo número de grados de libertad que el mecanismo original «Grupo de elementos primarios» y el resto son grupos estructurales con movilidad nula «Grupos de Assur». De esta forma, para determinar la estructura de un mecanismo se deberá separar éste en un grupo de elementos primarios y uno o más grupos de Assur y definir la forma en que están unidos.

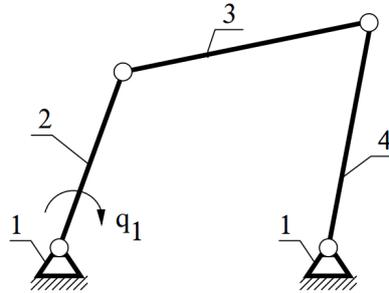


Figura 2.1: Cuadrilátero articulado.

Grupos estructurales

El grupo de elementos primarios es siempre un mecanismo «cadena cinemática con un eslabón fijo» con la misma movilidad que el mecanismo dado. Estará compuesto por:

1. El bastidor (todas las veces que aparezca en el mecanismo).
2. Aquellos miembros sobre los que actúan acciones externas y por tanto su movimiento es conocido.

Grupos de Assur

Los grupos de Assur son cadenas cinemáticas de movilidad nula. Están formados por eslabones y articulaciones del mecanismo original no considerados en el grupo de elementos primarios que los unen entre sí o con eslabones de otros grupos.

Sea N_m el número de miembros de un grupo de Assur, p_i el número de pares inferiores y p_s el de pares superiores. Según el criterio de Grübler y teniendo en cuenta que se trata de una cadena cinemática (no existe un miembro fijo), obtenemos:

$$L_c = 3N_m - 2p_i - p_s \quad (2.2)$$

Dado que no existen pares superiores, $p_s = 0$,

$$L_c = 3N_m - 2p_i \quad (2.3)$$

Como todo grupo de Assur tiene movilidad nula: $L_c = 0$,

$$3N_m = 2p_i \quad (2.4)$$

Como N_m y p_i son números enteros, $2p_i$ es una cantidad par y, por la ecuación, 2.4, $3N_m$ debe ser también par. Entonces N_m es múltiplo de 2 y puede expresarse como: $N_m = 2k$. De la ecuación ?? obtenemos $p_i = 3k$.

Así pues, el número de elementos y pares cinemáticos del grupo de Assur se determina por las fórmulas:

$$N_m = 2kp_i = 3k \quad (2.5)$$

donde k es un número entero positivo. Este factor define la clase del mecanismo: $k = 1$ mecanismo de clase I; $k = 2$ mecanismo de clase II, etc.

Consideraciones sobre los grupos de Assur

1. En un grupo de Assur, los pares que unen a sus miembros con los de otro Grupo son pares externos y se los lleva el eslabón de la cadena cinemática «que se separa».
2. El número de pares externos de un Grupo de Assur define el orden r del Grupo.
3. Los pares que unen los elementos del propio grupo de Assur se llaman «pares internos»
4. Al unir los pares externos de un grupo de Assur con un miembro fijo rígido, se obtiene un mecanismo con configuración de estructura ($L = 0$). A el mecanismo así obtenido se le llama Grupo básico de elementos de parámetro k , donde k es la clase del grupo de Assur del que se obtiene. Evidente, ya que:

$$L = 3(N_m - 1 + 1) - 2p_i = 3N_m - 2p_i = 0 \quad (2.6)$$

5. Los elementos de un grupo de Assur que tengan un par exterior se llaman «miembros de arrastre».
6. Sólo son grupos de Assur aquellos que no puedan ser descompuestos en grupos más simples.
7. Todo grupo de Assur puede añadirse a cualquier punto de un mecanismo dado, sin alterar su número de grados de libertad. (Evidente porque son grupos de movilidad cero).

Los pares de traslación, al igual que los de rotación disponen de un grado de libertad, por lo que el método de L.V. Assur también es aplicable a los mecanismos con este tipo de pares.

Clasificación de los grupos de Assur.

Como se ha visto hasta ahora, los grupos de Assur son muy diversos. Lo más fácil es determinar la clase de los grupos de Assur mediante el parámetro k .

Se entiende por grupo básico de elementos de parámetro k , al mecanismo resultante de unir mediante un nuevo eslabón, fijo, los pares cinemáticos exteriores de un grupo de Assur de clase k .

Al definir un grupo de Assur en clase k y orden y , se dispone de la siguiente información:

- Numero de eslabones de que dispone. $N_m = 2k$
- Número total de pares cinemáticos: $p_j = 3k$

- Número de pares cinemáticos exteriores: r
- Número de pares cinemáticos interiores: $p_j - r = 3k - r$
- Número de contornos cerrados: $k - (r - 1) = k - r + 1$

La expresión para el número de contornos cerrados de un grupo de Assur se justifica a partir de las siguientes consideraciones:

1. El grupo básico del que procede dispone de un número de contornos cerrados expresados por el valor de k
2. Al obtener un grupo de Assur se destruirán tanto los contornos cerrados de partida como pares exteriores menos uno resulten.

El orden de un grupo de Assur de clase k está limitado entre 2 y el valor máximo de pares exteriores. este valor máximo aparece cuando el número de contornos cerrados es nulo.

$$k + 1 - r = 0 \rightarrow r = k + 1 \quad (2.7)$$

Por tanto, el orden máximo es $k + 1$.

Pasos a seguir para realizar el análisis estructural

Hasta ahora se han presentado las bases para la clasificación y reconocimiento de los distintos grupos de Assur, pero no se ha establecido aún un método para el análisis estructural de mecanismos complejos, ése es el objetivo de este apartado. El orden en el que se van obteniendo los grupos de Assur es de gran importancia, porque indica precisamente el orden que se deberá seguir posteriormente para el análisis cinemático. El método consta de 5 pasos que describimos a continuación:

- Determinar la movilidad del mecanismo
- Obtener el grupo de elementos primarios
- Representar la cadena cinemática resultante de restar, al mecanismo original, el grupo de elementos primarios. Recuerde que las articulaciones entre los eslabones del grupo de elementos primarios y los de la cadena que queda se las lleva esta última (es la que se desprende).
- En la nueva cadena cinemática, tomar uno de los pares exteriores que la unían a un eslabón móvil del grupo de elementos primarios y tratar de formar grupos de Assur, comenzando por los de clase más baja, cogiendo el menor número de eslabones y pares necesarios con la condición de que siempre que con los eslabones y pares que se desprendan se puedan reunir las condiciones para formar nuevos grupos.
- Tras obtener un grupo repetir los pasos 2 a 4 mientras queden eslabones.

2.3. Nuevo concepto de Grupo Estructural

La teoría del análisis estructural propuesta por Assur que se ha expuesto en los apartados anteriores es aplicable a mecanismos articulados planos para los que los movimientos de entrada conocidos debían ser absolutos, es decir referidos a un sistema fijo.

Se hace necesario, por tanto, ampliar el concepto de grupo estructural y establecer nuevos métodos y bases para el análisis estructural de cualquier tipo de mecanismo. Sin embargo, esto no quiere decir que la teoría de Assur sea obsoleta, muy al contrario, resulta fundamental para el análisis por los nuevos métodos y como se verá, los grupos de Assur, ahora, pasan a ser un caso particular de grupo estructural.

Un **grupo estructural** es una cadena cinemática en la que el número de movimientos de entrada independientes n_c , sobre sus eslabones coincide con su movilidad L_c , y no puede subdividirse en otros grupos estructurales más reducidos.

$$L_c = n_c \quad (2.8)$$

La expresión del criterio de Grübler para determinar la movilidad de una cadena cinemática viene dada por:

$$L_c = 3N_m - 2p_i - p_s \quad (2.9)$$

Donde sí N_m es el número de eslabones móviles, $3N_m$ representa la movilidad de todos los eslabones móviles sin atender a la forma en que están conectados entre sí, el término $-2p_i - p_s$ son los grados de libertad que eliminan los pares cinemáticos el cual se puede expresar como:

$$-2p_i - p_s = 3P - S_c \quad (2.10)$$

donde P es igual al número de pares cinemáticos en la cadena cinemática (sin atender a su tipo) y S_c ; la movilidad que dejan los p_k pares cinemáticos de grado k dada por (en mecanismos planos):

$$S_c = \sum_{k=1}^2 k \cdot p_k = 1p_i + 2p_s \quad (2.11)$$

De modo que podemos expresar la movilidad de una cadena cinemática como:

$$L_c = 3(N_m - P) + S_c \quad (2.12)$$

Sustituyendo en la ecuación la definición dada de grupo estructural obtenemos la condición fundamental para que una cadena cinemática sea grupo estructural:

$$L_c = n_c = 3(N_m - P) + S_c \quad (2.13)$$

A partir de la definición dada se puede observar que el número de combinaciones que se pueden formar entre eslabones y pares cinemáticos para formar grupos estructurales, aunque limitado es muy superior a las que se obtenían aplicando la teoría de Assur.

Evidentemente se puede demostrar que los grupos de Assur cumplen la condición fundamental anterior 2.12. Ahora, un grupo de Assur cuenta como un caso particular de grupo estructural de movilidad cero, siempre que sobre sus eslabones no actúe ningún movimiento de entrada.

2.3.1. Grafo estructural de un mecanismo

Se puede observar fácilmente que los mecanismos pueden generarse por la unión sucesiva de grupos estructurales simples al bastidor.

Junto al esquema cinemático de un mecanismo y como base para su análisis estructural suele dibujarse el **grafo estructural**, otro esquema asociado al mecanismo en el que se muestran los pares existentes entre eslabones, su tipo y entre qué eslabones existe movimiento independiente de entrada.

El **grafo estructural** es, además, una herramienta muy útil que permite sistematizar el proceso de obtención de grupos estructurales y por tanto, el análisis estructural del mecanismo.

Una vez obtenida la estructura de un mecanismo se suele representar por su **diagrama estructural**, el cual muestra el acoplamiento entre los distintos grupos estructurales entre sí, junto con el número de eslabones de cada grupo y su número de grados de libertad.

El diagrama estructural está formado por tantos círculos como grupos estructurales simples formen el mecanismo más uno (este último corresponde al bastidor). En el círculo que corresponde al bastidor se escribe el número 0 porque no representa ningún grupo. Para el resto de grupos estructurales se escribe, en un círculo por grupo, el número de eslabones que lo forman y el número de grados de libertad del mismo. Dos círculos del diagrama se unen con flechas si contienen eslabones que en el mecanismo original están también unidos. Las líneas que unen dos círculos en el diagrama estructural llevan el mismo sentido que la asignación de los pares cinemáticos en el grafo. (Fig 2.2).

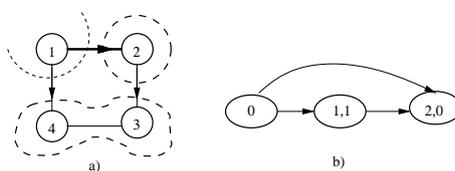


Figura 2.2: Diagrama estructural.

El **grafo estructural** está formado por tantos círculos como eslabones exista en el mecanismo. En el interior de cada círculo se escribe el número del eslabón al que representa. Estos círculos se unen, si entre ellos existe par cinemático en el mecanismo. En ese caso, se unen con tantas líneas como movilidad tenga el par que formen ($p_i = 1$, $p_s = 2$) y de esas líneas serán de trazo grueso tantas como movimientos de entrada independientes exista entre los dos eslabones del par.

2.3.2. Análisis basado en el grafo. Diagrama estructural

El análisis estructural de un mecanismo puede realizarse con ayuda del grafo estructural, aplicando la condición fundamental, ecuación (2.12). Para mostrarlo lo aplicaremos al análisis del cuadrilátero articulado.

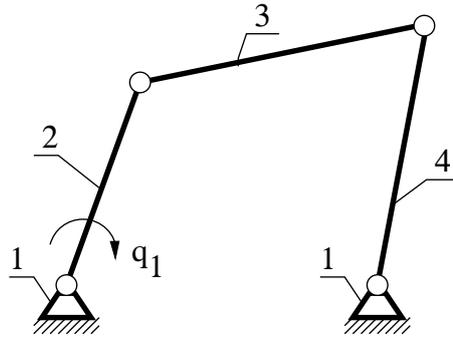


Figura 2.3: Cuadrilátero articulado.

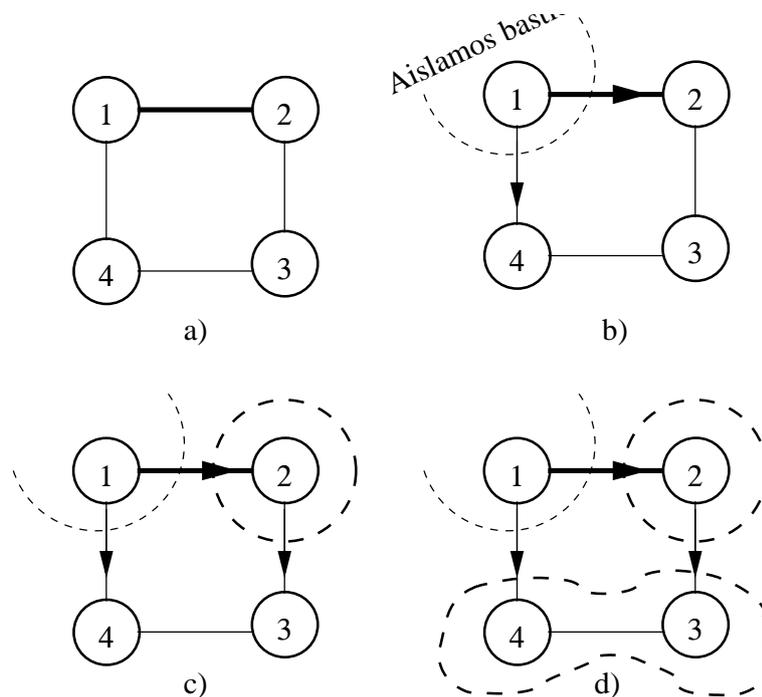


Figura 2.4: Utilización del grafo estructural para obtención estructura cinemática

Comenzamos representando el grafo estructural del mecanismo a analizar (Fig 2.3) y aislando del resto el círculo correspondiente al bastidor (Fig 2.4). (Se muestra rodeado de una línea de trazo discontinuo). Tal y como se expuso en la teoría de Assur, el par cinemático entre dos eslabones se lo lleva el que se separa. Esto se puede indicar en el grafo mediante una flecha sobre la línea que une dos eslabones. En la Figura (Fig 2.4), al aislar el bastidor, el par entre 1 – 2 se lo lleva 2 y entre 1 – 4 se lo lleva 4. Ahora comenzamos a buscar grupos a partir de uno de los pares externos representados.

Podemos comenzar por estudiar si el eslabón 2 con el par que se ha llevado (la flecha sirve también para indicar que ese par tiene que ir con ese eslabón). Para ello rodeamos el eslabón 2 con una línea de trazo discontinuo y señalamos con una flecha que el par entre 2 – 3 se lo lleva el eslabón 3 (Fig 2.4) comprobamos si se cumple la condición fundamental (Observe que al eslabón 2 le llega un par sólo, el 1 – 2 y que ese par es línea gruesa): $S_c = 1; n_c = 1; P = 1; N_m = 1$

$$S_c - n_c = 3(P - N_m) \quad (2.14)$$

$$S_c - n_c = 3(P - N_m) \rightarrow 1 - 1 = 3(1 - 1) \quad (2.15)$$

Como sí se cumple, el eslabón 2 con ese par cinemático es un grupo estructural. Ahora tomando este par 2 – 3 junto con el eslabón 3 podemos comprobar si se cumple la condición para ese eslabón sólo:

$$S_c - n_c = 3(P - N_m) \rightarrow 1 - 0 = 3(1 - 1) \rightarrow 1 \neq 0 \quad (2.16)$$

por lo que no lo es.

Para que un eslabón sólo sea grupo estructural, debe estar unido al bastidor o a otro grupo estructural mediante sólo líneas gruesas, ya que como $P = 1; N_m = 1$ el segundo término de la condición se anula y para ello debe ser cero también el primero.

En el mecanismo cuadrilátero articulado, como el eslabón 3 sólo no cumple esa condición, el próximo grupo debe ser el formado por los eslabones 3 y 4, para el cual sí se cumple la condición fundamental: $3 - 0 = 3 \cdot (3 - 2)$

Ahora el número de pares es tres, entre los que se cuentan los dos externos: 1 – 4 y 2 – 3 y el interno 3 – 4 entre los dos eslabones. Para terminar marcamos con trazo discontinuo el grupo obtenido (Fig 2.4.d)

2.4. Métodos de modelización matemática

El primer problema que se aborda en el análisis cinemático de un mecanismo es el análisis de la posición de sus eslabones. Si no está resuelto este problema, no se pueden abordar los del análisis de velocidades y de aceleraciones.

En este capítulo se introduce un método para obtener las ecuaciones de posición de un mecanismo, considerando los diferentes tipos de pares cinemáticos que pueden aparecer. Estas ecuaciones de posición o, también, ecuaciones de restricción para las posiciones se resolverán, en general, con métodos numéricos que se introducirán en capítulos posteriores.

Las ecuaciones de posición de un mecanismo son, precisamente, el punto de partida de la mayoría de los métodos de análisis cinemático de velocidades y aceleraciones, ya sean métodos computacionales o métodos basados en las ecuaciones de movimiento relativo.

El análisis de posición tiene por objeto determinar la posición exacta de los eslabones de un mecanismo. Para poderlo llevar a cabo, el mecanismo debe ser desmodrómico, es decir que el número de movimientos de entrada definidos sobre sus eslabones debe coincidir con su movilidad.

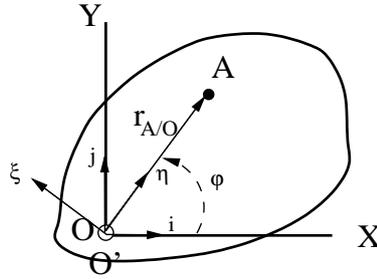


Figura 2.5: Vector de posición de un punto en diferentes sistemas de referencia

2.4.1. Vector de posición

El vector de posición define la posición de un punto respecto a otro, el sistema global de coordenadas $S(OXYZ)$ se utiliza como sistema de referencia fijo y las direcciones de sus ejes X , Y y Z vienen representadas por los vectores unitarios: \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} respectivamente.

Para analizar el movimiento de otro punto a veces interesa considerar un nuevo sistema de referencia local $S'(O'X'Y'Z')$, solidario al sólido en movimiento y definido por los vectores unitarios: $\hat{\eta}$, $\hat{\xi}$, \hat{k} . En la siguiente imagen?? podemos ver dos sistemas de referencia en el plano, estando girado el sistema local con respecto al global un ángulo φ .

La expresión para relacionar el vector de posición expresado en el sistema local con el vector de posición en el sistema global es la siguiente.

$$\vec{r}_{A/O}]_S = [R] \cdot \vec{r}_{A/O}]_{S'} \quad (2.17)$$

Siendo la matriz de rotación R ,

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

2.4.2. Método basado en ecuación de cierre de cadena

Análisis de una cadena cinemática abierta

El análisis cinemático de una cadena cinemática abierta es sencillo e inmediato, dado que el número de variables que intervienen para definir el movimiento del mecanismo coincide con su número de grados de libertad y, por tanto, deben venir definidas de antemano. El problema se complica en el análisis de cadenas cinemáticas cerradas.

Condición de cierre de cadena

En una cadena cinemática cerrada, todos los eslabones participan, al menos, en dos pares cinemáticos. Supongamos que abrimos la cadena de forma imaginaria. Cuando se abre una cadena por un par cinemático, la posición de sus extremos se puede definir mediante vectores de posición expresados en el sistema global. La condición de cierre de cadena implica

que estos vectores deben ser iguales ya que, en realidad, la cadena estaba cerrada en el punto por el que se ha abierto.

En general, el análisis de las cadenas cinemáticas cerradas es complejo por dos motivos: porque los sistemas de ecuaciones obtenidos son no lineales y para su resolución son necesarios métodos numéricos y porque no siempre es sencillo determinar cuáles son las ecuaciones que, formadas a partir de vectores de posición, permiten resolver mecanismos que son complejos, bien por el tipo de pares cinemáticos que los forman (por ejemplo, determinados tipos de pares superiores) bien porque presentan un número elevado de eslabones.

Sobre cómo resolver los sistemas de ecuaciones no lineales (primer obstáculo en los problemas de análisis de posición), se establecerán métodos computacionales en los temas sucesivos. Sobre la forma de obtener las ecuaciones necesarias para la resolución del problema de posiciones, se tratan de sistematizar en el apartado siguiente cómo son los vectores de posición a utilizar para formar las ecuaciones vectoriales de cierre y, a partir de ellas, las ecuaciones de restricción para las posiciones.

2.4.3. Análisis del grafo estructural

El Grafo estructural de un mecanismo ofrece una ayuda importante a la hora de determinar cuántas ecuaciones de posición se deben plantear para resolver un mecanismo y qué elementos deben intervenir en dichas ecuaciones.

1. Número Total de variables. Dado que cada línea de trazo fino representa un movimiento relativo posible entre dos eslabones, en general existen tantas variables como grados de libertad dejan los P pares cinemáticos (término que hemos llamado S_c en el análisis estructural).

$$N_{Variables} = S_c = 1 \cdot P_i + 2 \cdot P_s \quad (2.18)$$

2. Número de variables independientes. Las líneas de trazo grueso representan movimientos de entrada y, por tanto, variables independientes cuyos valores son conocidos. Por tanto, hay n_c variables independientes.

$$N_{Var.ind} = Dim[q] = n_c \quad (2.19)$$

3. Número de variables dependientes. De lo anterior se deduce que el número de variables dependientes es igual al número de líneas finas que quedan en el Grafo:

$$N_{Var.depend} = S_c - n_c = l_f + l_g - l_g = l_f \quad (2.20)$$

4. Número mínimo de variables dependientes. El número de variables dependientes mínimo necesario para determinar con precisión las posiciones de todos los eslabones del mecanismo define la dimensión del vector de coordenadas $[\varphi]$ y se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$m = Dim[\varphi] = 2 \cdot C^* + 1 \cdot P_{leva_{sup}/sup} + 1 \cdot P_{EngrOrd} + 1 \cdot P_{EngrEpic} + 2 \cdot P_{EngrP/C} \quad (2.21)$$

donde:

- $C^* = (P - N_m)^*$: Número ciclomático del mecanismo, sin contar los P^* pares cinemáticos de engranajes ordinarios y epicicloidales.
 - $P_{leva_{sup/sup}}$: Par de leva con contacto superficie curva a superficie curva. Introduce una variable dependiente más y, por tanto, deberá permitir formular una ecuación de posición adicional.
 - $P_{EngrOrd}$: Par de Engranaje ordinario. Introduce una variable dependiente más y, por tanto, deberá permitir formular una ecuación de posición adicional.
 - $P_{EngrEpic}$: Par de Engranaje epicicloidal. Introduce una variable dependiente más y, por tanto, deberá permitir formular una ecuación de posición adicional.
 - $P_{EngrP/C}$: Par de Engranaje piñón-cremallera o cremallera/piñón. Introduce dos variables dependientes más y, por tanto, deberá permitir formular dos ecuaciones de posición adicionales.
5. Número de Ecuaciones vectoriales de cierre. Cada condición de cierre de cadena establece una ecuación vectorial de cierre (salvo para pares de engranajes ordinarios y epicicloidales). El número de cadenas cerradas en un mecanismo (igual al número ciclomático) coincide en el Grafo con los lazos cerrados independientes que se pueden crear. Además, cada lazo cerrado identifica los eslabones que intervienen en la correspondiente ecuación vectorial de cierre. El número de ecuaciones vectoriales de cierre que se deben identificar en el análisis cinemático del mecanismo es, por tanto:

$$NEC_{vectoriales_{cierre}} = C^* = (P - N_m)^* \quad (2.22)$$

Cada ecuación vectorial de cierre ofrece dos ecuaciones escalares de posición, a considerar en el sistema de ecuaciones del mecanismo, junto con las ecuaciones adicionales que imponen ciertos tipos de pares superiores, como los vistos en el punto anterior.

6. Número de ecuaciones de restricción para las posiciones: El sistema de ecuaciones de posición o de restricción para las posiciones está formado por un conjunto de ecuaciones escalares obtenidas a partir de las ecuaciones vectoriales de cierre de cadena y de otras ecuaciones adicionales impuestas por pares de leva o de engranaje, cuya formulación se verá más adelante. Su número se calcula igual que el del número mínimo de variables dependientes:

$$n = 2 \cdot C^* + 1 \cdot P_{leva_{sup/sup}} + 1 \cdot P_{EngrOrd} + 1 \cdot P_{EngrEpic} + 2 \cdot P_{EngrP/C} \quad (2.23)$$

2.4.4. Elementos en la ecuación de cierre de cadena

Eslabón rígido articulado

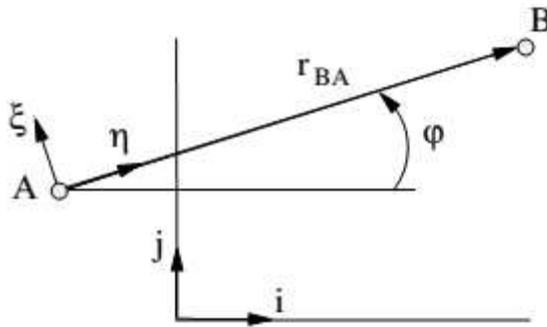
Supongamos, como caso general, un eslabón del mecanismo sobre el que tenemos situados dos puntos que, normalmente corresponderán a articulaciones en las que forma par con otros eslabones. La figura ?? muestra este sistema. Independientemente de su geometría se define el sistema de referencia local $(S', \hat{\eta}, \hat{\xi})$ solidario al sólido, de forma que el vector unitario quede alineado con las articulaciones A y B del eslabón. El vector de posición expresado en el sistema local de referencia es:

$$\vec{r}_{B/A]S'} = \overline{AB}\hat{\eta} + 0\hat{\xi} \quad (2.24)$$

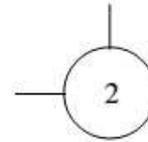
Expresado en el sistema global:

$$\vec{r}_{B/A]S} = [R] \cdot \vec{r}_{B/A]S'} \quad (2.25)$$

$$\vec{r}_{B/A]S} = \overline{AB} \cdot (\cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j}) \quad (2.26)$$



(a) Figura



(b) Grafo estructural

Figura 2.6: Sólido rígido articulado

2.5. Análisis cinemático

Las ecuaciones de cierre de cadena son el punto de partida para el análisis cinemático de un mecanismo, tanto por métodos computacionales, como por métodos basados en el campo de velocidades y aceleraciones relativas. Este capítulo se centra en el análisis computacional de mecanismos planos.

Dado un mecanismo y habiendo seleccionado un conjunto $[q]$ de coordenadas que permitirán definir la posición de sus eslabones en todo momento, cuando el movimiento de entrada está definido, se obtienen las ecuaciones de restricción por cualquiera de los métodos de análisis.

$$\Phi(q, t) = 0 \quad (2.27)$$

Donde $[q]$ es el conjunto de coordenadas utilizadas para determinar la posición de todos los eslabones y t es el tiempo.

En cualquier caso, este sistema de ecuaciones es no lineal y su solución, numérica, que ofrecerá los valores de $[q]$ correspondientes a unas determinadas condiciones iniciales, se obtiene a partir del método de Newton-Raphson en la forma:

$$[q]_n = [q]_{n-1} - [\Phi_q]_{n-1}^{-1} \cdot [\Phi]_{n-1} \quad (2.28)$$

Siendo $\Phi_q = [\frac{\partial \Phi}{\partial q}]$ la matriz jacobiana del sistema.

La ecuación de velocidades se obtiene derivando respecto al tiempo las ecuaciones de restricción.

$$\dot{\Phi}(q, t) = [\Phi_q] \cdot [\dot{q}] + [\Phi_t] = 0 \quad (2.29)$$

Siendo $\Phi_t = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right]$

Cuando en las ecuaciones de restricción no viene expresada la dependencia de las variables respecto al tiempo, el segundo sumando es nulo.

$$\dot{\Phi}(q, t) = [\Phi_q] \cdot [\dot{q}] = 0 \quad (2.30)$$

La ecuación de aceleraciones se obtiene derivando el sistema de ecuaciones ?? con respecto al tiempo.

$$\ddot{\Phi}(q, t) = [\Phi_q] \cdot [\ddot{q}] + ([\Phi_q] \cdot [\dot{q}])_q \cdot [\dot{q}] + 2 \cdot [\Phi_q]_t \cdot [\dot{q}] + [\Phi_t]_t = 0 \quad (2.31)$$

Al igual que en el caso anterior, si no aparece el tiempo como variable en las ecuaciones de restricción se puede simplificar:

$$\ddot{\Phi}(q, t) = [\Phi_q] \cdot [\ddot{q}] + ([\Phi_q] \cdot [\dot{q}])_q \cdot [\dot{q}] = 0 \quad (2.32)$$

Una vez planteadas las ecuaciones de cierre de cadena en un mecanismo, este se puede resolver por derivación directa o matricialmente.

2.5.1. Derivación directa

Cuando un mecanismo responde a una cadena cinemática cerrada es muy poco frecuente poder expresar las variables dependientes como una función de las independientes en forma explícita, según se muestra en la ecuación ?. Sin embargo, en algunos casos sencillos esto es posible y las velocidades y aceleraciones de las variables dependientes pueden obtenerse por derivación sucesiva, respecto al tiempo, de esas funciones. En este caso, dada una variable secundaria φ_s del conjunto de variables dependientes $[\varphi]$ expresada en forma explícita como una función de k variables independientes (q_k) , subconjunto del conjunto $[q]$ de variables independientes:

$$\varphi_s = \varphi_s(q_k, t) \quad (2.33)$$

Su velocidad se obtiene como la primera derivada respecto al tiempo:

$$\dot{\varphi}_s = \sum_{k=1}^L \frac{\partial \varphi_s}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k \quad (2.34)$$

Donde L es la movilidad del sistema. A los términos que multiplican a cada velocidad de variable independiente (\dot{q}_k) se les conoce como **coeficiente de velocidad** ($K_{\varphi_s k}$) y expresan la relación de proporcionalidad entre la velocidad de la variable dependiente $(\dot{\varphi}_s)$ y la de la variable independiente (\dot{q}_k) del sistema.

$$K_{\varphi_s k} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial q_k} \quad (2.35)$$

La aceleración de dicha variable secundaria se puede obtener mediante segunda derivada respecto al tiempo:

$$\ddot{\Phi}_s = \sum_{k=1}^L \frac{\partial \varphi_s}{\partial q_k} \cdot \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^L \sum_{r=1}^L \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial q_k \partial q_r} \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_r \quad (2.36)$$

A los coeficientes $L_{\varphi_s kr}$ se les conoce como derivada de los coeficientes de velocidad y son de gran utilidad en el análisis dinámico directo.

En mecanismos con un grado de libertad $L = 1$ y las ecuaciones velocidad y aceleración resultan:

$$\dot{\Phi}_s = \frac{\partial \varphi_s}{\partial q} \cdot \dot{q} = [K] \cdot \dot{q} \quad (2.37)$$

$$\ddot{\Phi}_s = \frac{\partial \varphi_s}{\partial q} \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial q^2} \cdot \dot{q}^2 = [K] \cdot \ddot{q} + [L] \cdot \dot{q}^2 \quad (2.38)$$

2.5.2. Formulación matricial

Supongamos un sistema de movilidad L para el que, definidos los valores de sus $k = L$ variables independientes, las posiciones de sus eslabones vienen completamente definidas por m variables dependientes, a través de n ecuaciones de restricción.

$$\Phi(q, \varphi) = 0 \quad (2.39)$$

Análisis de posiciones

Estas ecuaciones, obtenidas de la condición de cierre de cadena y que definen a las variables dependientes en forma implícita, permiten plantear la solución al problema de posición mediante la aplicación del método de Newton-Raphson:

$$[\varphi]_i = [\varphi]_{i-1} - [\Phi_\varphi]_{i-1}^{-1} \cdot [\Phi]_{i-1} \quad (2.40)$$

Donde $[\Phi_\varphi]$ es la matriz Jacobiana de las funciones de posición respecto a las variables dependientes y que, en adelante, llamaremos $[J]$.

$$[\Phi]_\varphi = [J] = \frac{\partial \Phi(q, \varphi)}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \varphi_m} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Consideraciones sobre el método:

- La matriz jacobiana debe ser cuadrada y su determinante no nulo.
- A medida que se buscan soluciones más exactas se requieren mayor número de iteraciones (convergencia cuadrática).
- Para comenzar con las iteraciones es preciso realizar una estimación inicial del valor de las variables dependientes (Problema del valor inicial).
- Las iteraciones terminan cuando el valor del residuo es inferior a la tolerancia definida para el tipo de análisis que se realiza.

$$Res = \sum_{j=1}^n |F_j| < tol \quad (2.41)$$

Análisis de velocidades

El problema del análisis de velocidades se plantea derivando respecto al tiempo las ecuaciones de restricción, obteniéndose el sistema:

$$\frac{d\Phi(q, \varphi)}{dt} = \frac{\Phi(q, \varphi)}{\partial[\varphi]} \cdot \frac{d[\varphi]}{dt} + \frac{\Phi(q, \varphi)}{\partial[q]} \cdot \frac{d[q]}{dt} = [J] \cdot [\dot{\varphi}] - [Q] \cdot [\dot{q}] = 0 \quad (2.42)$$

Siendo $[\dot{\varphi}]$ la matriz de velocidades de las variables dependientes y $[\dot{q}]$ la matriz de velocidad de las variables independientes.

Estando $[J]$ ya definida previamente como la como matriz Jacobiana de las funciones de posición respecto a las variables secundarias y $[Q]$ es la matriz Jacobiana de las funciones de posición respecto a las variables independientes (q), cambiada de signo.

$$[Q] = -\frac{\partial\Phi(q, \varphi)}{\partial[q]} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial q_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial q_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial q_1} & \frac{\partial F_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial q_m} \end{bmatrix}_{n \times k}$$

En mecanismos desmodrómicos, con $L = 1$, la matriz $[Q]_{n \times 1}$ es un vector columna.

La solución al problema de velocidades se obtiene premultiplicando por la inversa de la matriz Jacobiana, obteniendo el sistema:

$$[\dot{\varphi}] = [K] \cdot [\dot{q}] \quad (2.43)$$

Donde se ha definido la matriz $[K] = [J]^{-1} \cdot [Q]$ como la matriz de coeficientes de velocidad. Para poder obtener esta solución, la matriz Jacobiana debe ser cuadrada. Para ello, el número de ecuaciones de restricción debe ser igual al de variables dependientes: $n = m$.

En caso de no ser así, existen $n - m$ ecuaciones redundantes que deben ser identificadas y eliminadas, antes de proceder al análisis cinemático.

En mecanismos con un grado de libertad, $k = 1$ la ecuación 2.43 queda reducida a:

$$[\dot{\varphi}] = [K] \cdot \dot{q} \quad (2.44)$$

Análisis de aceleraciones

Se puede resolver el problema de aceleraciones, en mecanismos con $L = 1$, derivando la ecuación 2.45 Aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$[\ddot{\varphi}] = [K] \cdot \ddot{q} + \frac{d[K]}{dq} \cdot \dot{q}^2 \quad (2.45)$$

Donde falta definir un método que permita obtener $\frac{d[K]}{dq}$. Para ello, partimos de la expresión:

$$[J] \cdot [K] = [Q] \quad (2.46)$$

Derivamos esta última expresión respecto a la única variable independiente q :

$$\frac{d[J]}{dq} \cdot [K] + [J] \cdot \frac{d[K]}{dq} = \frac{d[Q]}{dq} \quad \rightarrow \quad [J] \cdot \frac{d[K]}{dq} = \frac{d[Q]}{dq} - \frac{d[J]}{dq} \cdot [K] \quad (2.47)$$

Definiendo la matriz $[R]$ como:

$$[R] = \frac{d[Q]}{dq} - \frac{d[J]}{dq} \cdot [K] \quad (2.48)$$

Obtenemos la expresión:

$$[J] \cdot \frac{d[K]}{dq} = [R] \quad \rightarrow \quad \frac{d[K]}{dq} = [L] = [J]^{-1} \cdot [R] \quad (2.49)$$

expresión que permite obtener $\frac{d[K]}{dq}$ y que representa la matriz $[L]$, introducida anteriormente como matriz de derivadas de los coeficientes de velocidad.

La solución al problema de aceleraciones se puede expresar, en mecanismos con 1 GDL como:

$$[\ddot{\varphi}] = [K] \cdot \ddot{q} + [L] \cdot \dot{q}^2 \quad (2.50)$$

2.5.3. Otros puntos de interés

Una vez que se ha resuelto el análisis cinemático del mecanismo, puede resultar de interés el determinar la posición, velocidad o aceleración de un punto concreto del mecanismo.

Supongamos que, habiendo resuelto el análisis cinemático de un mecanismo dado se precisa determinar la posición, velocidad y aceleración de un punto P cualquiera, solidario a uno de los eslabones del mecanismo (Figura 2.7) El sistema de coordenadas local sobre el sólido tiene su origen en el punto A y tiene su eje local η orientado un ángulo φ respecto al eje \hat{imath} del sistema global.

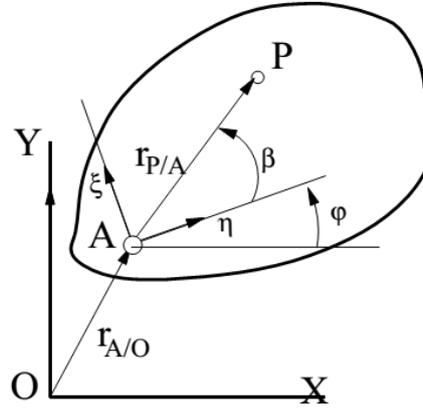


Figura 2.7: Posición, velocidad y aceleración de otros puntos de interés.

El vector de posición \vec{r}_{PA} , forma, a su vez, un ángulo β , constante, con la dirección η de su sistema local. La posición de P respecto al Origen del Sistema global de coordenadas viene dada por la ecuación vectorial:

$$\vec{r}_{PO} = \vec{r}_{AO} + \vec{r}_{PA} \quad (2.51)$$

Las coordenadas del punto P :

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{AP} \cdot \cos(\beta + \varphi) \\ \overline{AP} \cdot \sin(\beta + \varphi) \end{bmatrix}$$

La velocidad del punto P se puede referir, ahora, a cualquier punto fijo del bastidor. En general se buscará aquel punto fijo que permita describir la velocidad de P , de la forma más sencilla. La velocidad se obtiene derivando la ecuación de posición respecto al tiempo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\overline{AP} \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ \overline{AP} \cdot \cos(\beta + \varphi) \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}$$

La aceleración del punto P , también se medirá respecto al punto fijo que más simplifique los cálculos. En el caso más general, obtendremos:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\overline{AP} \cdot \sin(\beta + \varphi) \\ \overline{AP} \cdot \cos(\beta + \varphi) \end{bmatrix} \cdot \ddot{\varphi} + \begin{bmatrix} -\overline{AP} \cdot \cos(\beta + \varphi) \\ -\overline{AP} \cdot \sin(\beta + \varphi) \end{bmatrix} \cdot \dot{\varphi}^2$$

Capítulo 3

Excepciones a los criterios de movilidad

En determinados casos, la aplicación de los criterios de movilidad pueden ofrecer resultados erróneos. Esto puede ocurrir cuando aspectos no tenidos en cuenta en las ecuaciones de los criterios influyen en el resultado final: dimensiones de los eslabones, u otras propiedades dimensionales o específicas del contacto entre eslabones. Si se tuvieran que considerar de alguna manera todas las posibles excepciones a los criterios en sus ecuaciones, para que los resultados fueran siempre los reales, los criterios perderían totalmente su sencillez y no se distinguirían en mucho de los métodos predecesores.

Algunas de estas excepciones se presentan con frecuencia en mecanismos reales, otras aunque no aparezcan en mecanismos reales sí se pueden dar durante la fase de diseño de sistemas mecánicos; en ambos casos interesa tenerlas en consideración. Las que me han parecido de mayor interés para estudiarlas en este Trabajo Final de Carrera corresponden a los siguientes casos: Articulación múltiple, Redundancia tangente, Rodadura pura, Posiciones singulares.

3.1. Articulaciones múltiples

El mecanismo que se muestra en la figura (3.1) junto con su grafo es un ejemplo de mecanismos articulados planos y están compuestos por un conjunto de miembros o eslabones unidos mediante pares cinemáticos inferiores de rotación, de ejes paralelos.

3.1.1. Descripción de la singularidad

Analizamos el mecanismo de la Figura (3.1) con su grafo estructural y utilizando la ecuación de Grubler obtenemos la movilidad de este mecanismo.

$$L = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1. \quad (3.1)$$

A partir de este mecanismo, tendremos 2 casos.

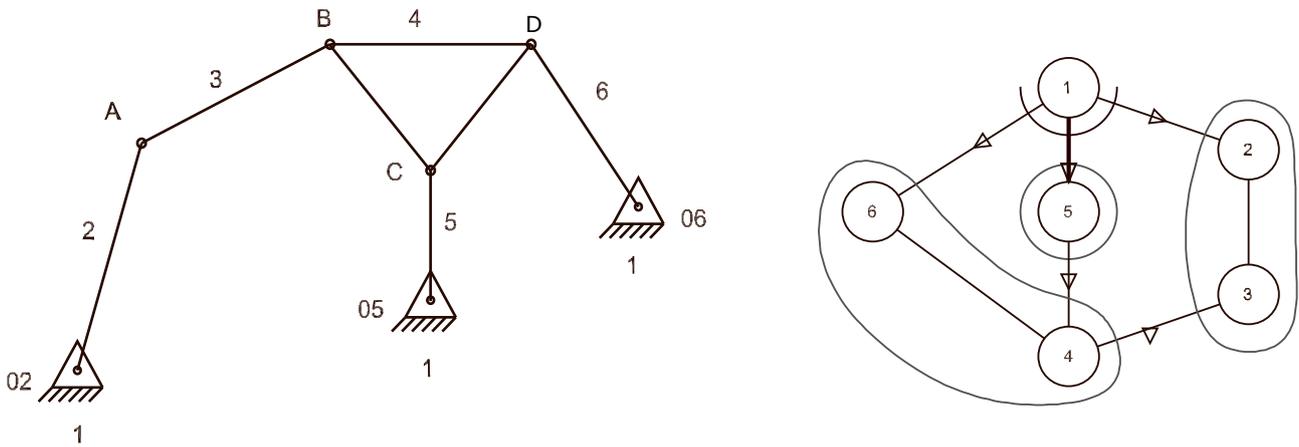


Figura 3.1: Mecanismo de 6 barras articulado sin articulación múltiple.

3.1.2. Degeneración de un sólido ternario en un punto

Cuando en el mecanismo de la (Figura 3.1) los puntos B,C,D degeneran en un único punto (Figura 3.2).

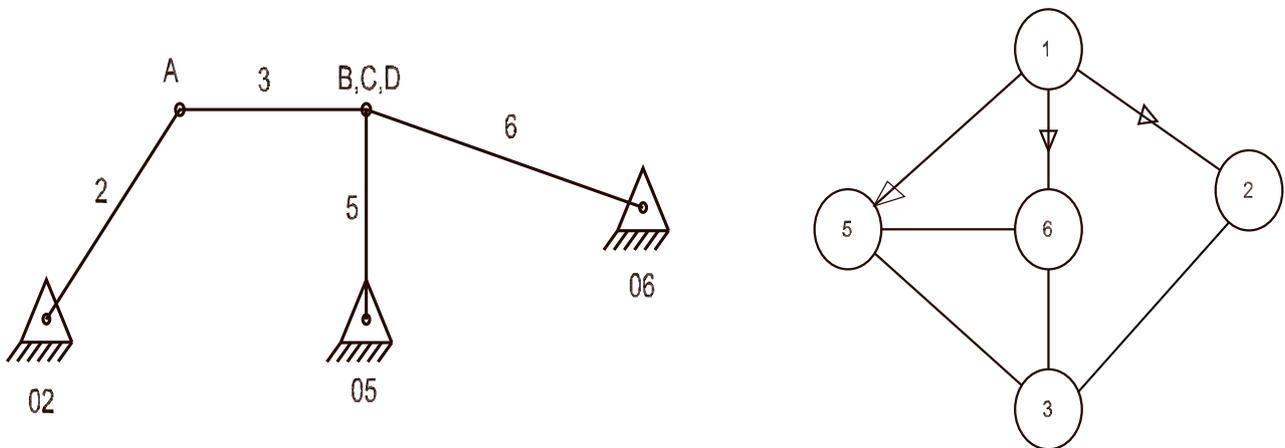


Figura 3.2: A: Mecanismo de 4 barras con articulación múltiple, B: Grafo estructural

Por lo que tendríamos una articulación múltiple.

Observamos que el Grafo estructural es erróneo ya que el eslabón 6 no cumple con la ecuación (2.14)¹ siendo:

$$S_p - n_c = 3 \cdot (P - Nm) \text{ entonces, } 7 \neq 9$$

Aplicando el criterio de Gröbler para este mecanismo se obtiene la siguiente movilidad:

$$L = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 7 = 12 - 14 = -2.$$

siendo esta una estructura hiperestática, por lo que no tendría movimiento.

¹Ley de formación de grupos estructurales (LFGE)

Para justificar que efectivamente el criterio de Grübler es erróneo, plantearemos el análisis cinemático de este mecanismo, siendo sus ecuaciones de posición :

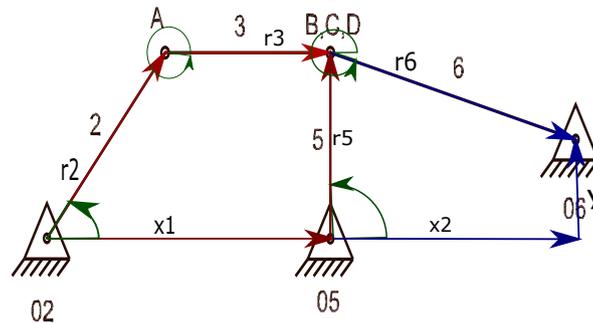


Figura 3.3: Figura 3.2 con sus ecuaciones de posición representadas y sus ángulos.

$$\begin{aligned}
 F1 &= r_2 \cos \varphi_2 + r_3 \cos \varphi_3 - x_1 - r_5 \cos \varphi_5 = 0 \\
 F2 &= r_2 \sin \varphi_2 + r_3 \sin \varphi_3 - r_5 \sin \varphi_5 = 0 \\
 F3 &= r_5 \cos \varphi_5 + r_6 \cos \varphi_6 - x_2 = 0 \\
 F4 &= r_5 \sin \varphi_5 + r_6 \sin \varphi_6 - y = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

que forman un sistema no lineal de cuatro ecuaciones de posición. Por otro lado, el grafo estructural ofrece las siguientes variables dependientes:

$$[\varphi_2], [\varphi_{32}], [\varphi_{63}], [\varphi_{65}], [\varphi_{53}], [\varphi_6], [\varphi_5], [\varphi_3],$$

De las cuales $[\varphi_{65}]$, $[\varphi_{63}]$, $[\varphi_{32}]$ y $[\varphi_{53}]$ aportarían 4 ecuaciones de ángulo, siendo estas :

- $[\varphi_{32}] = [\varphi_3] - [\varphi_2]$
- $[\varphi_{63}] = [\varphi_6] - [\varphi_3]$
- $[\varphi_{65}] = [\varphi_6] - [\varphi_5]$
- $[\varphi_{53}] = [\varphi_5] - [\varphi_3]$

pero se debe tener en cuenta que la ecuación de ángulo $[\varphi_{63}]$ es una combinación lineal de las ecuaciones $[\varphi_{65}]$ y $[\varphi_{53}]$ con lo que esto quita una ecuación, obteniendo un total de 8 incógnitas y 7 ecuaciones, confirmando que el mecanismo no tiene solución.

Solución propuesta

Para que el criterio de movilidad arroje un valor correcto de la movilidad de la cadena cinemática con articulaciones múltiples, se propone contar como pares en la articulación múltiple:

$$n_p = n_b - 1$$

, con lo que estaríamos eliminando un par en esa articulación, tal y como se observa en el grafo siguiente,

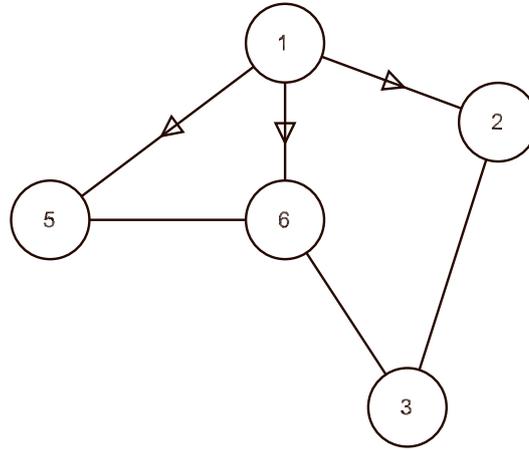


Figura 3.4: Grafo estructural de la Figura 3.2 teniendo en cuenta la articulación múltiple

analizandolo vemos la movilidad de este mecanismo

$$L_c = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0.$$

ahora, el número de variables se reduce a: $[\varphi_2]$, $[\varphi_{32}]$, $[\varphi_{63}]$, $[\varphi_{65}]$, $[\varphi_6]$, $[\varphi_5]$, de las cuales $[\varphi_{65}]$ aportaría una ecuación de ángulo, siendo esta:

- $[\varphi_{65}] = [\varphi_6] - [\varphi_5]$

y teniendo en cuenta las 4 ecuaciones de posición obtenidas por los 2 lazos del grafo, tendríamos 5 ecuaciones con 6 incógnitas. Por lo tanto, tendríamos que añadir una incógnita extra, $[\varphi_3]$, la cual aportaría otras 2 ecuaciones de ángulo:

- $[\varphi_{32}] = [\varphi_3] - [\varphi_2]$
- $[\varphi_{63}] = [\varphi_6] - [\varphi_3]$

obteniendo finalmente un mecanismo con 7 incógnitas y 7 ecuaciones. Este sistema de ecuaciones tiene una solución única para todas sus variables, de forma que para las longitudes y posiciones de articulaciones fijas especificadas, existe solo una posición del mecanismo, tal y como corresponde a una estructura estáticamente determinada.

3.1.3. Dos articulaciones degeneran en una

Se produce cuando en el mecanismo (Figura 3.1) los puntos B,C degeneran en una misma articulación, tal y como se muestra en (Figura 3.5) :

Observamos que el Grafo estructural es erróneo ya que ninguno de los eslabones restantes forman grupo estructural ya que no cumplen con la ecuación: ²

$$S_p - n_c = [3 \cdot (P - Nm)]$$

²Ley de formación de grupos estructurales (LFGE)

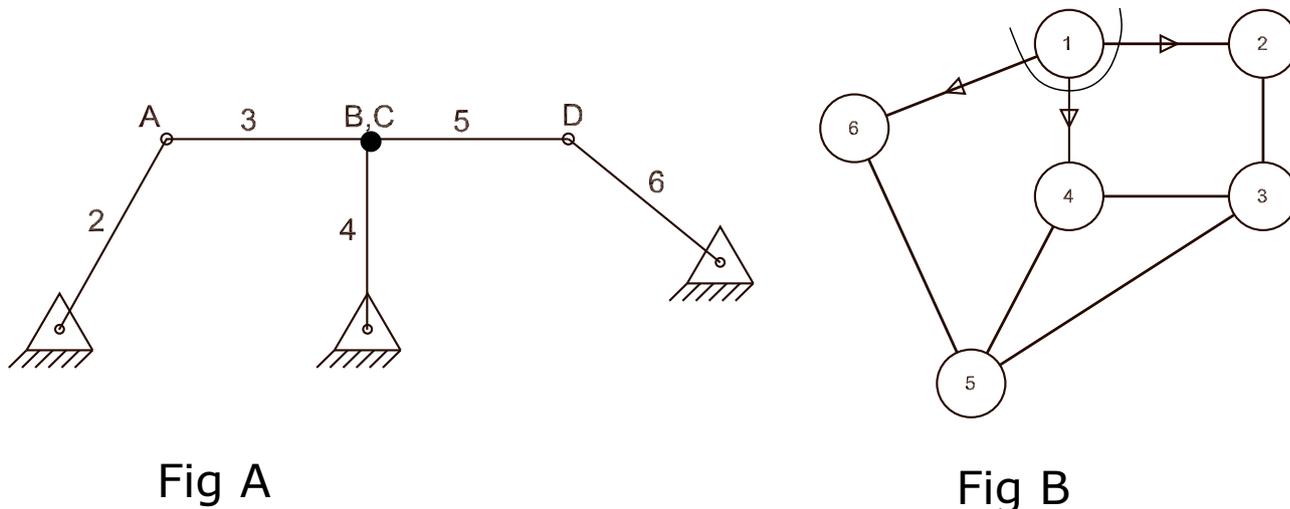


Figura 3.5: Fig A: Mecanismo de 6 barras con articulacion multiple, Fig B: Grafo estructural

Aplicando el criterio de Grübler para este mecanismo se obtiene la siguiente movilidad:

$$L = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 8 = 15 - 16 = -1.$$

Justificamos nuevamente que el criterio de Grübler es erróneo, planteando el análisis cinemático de este mecanismo, representando sus vectores de posición junto con sus ecuaciones :

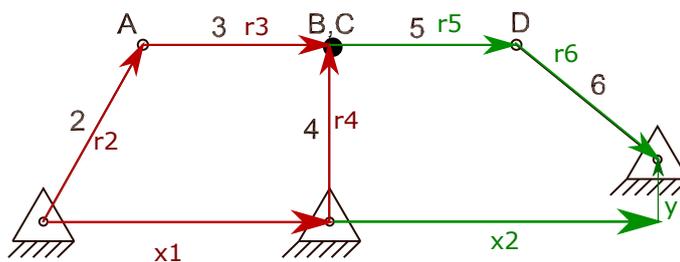


Figura 3.6: Mecanismo de 6 barras con articulación múltiple con sus vectores de posición representados.

$$\begin{aligned} F1 &= r_2 \cos \varphi_2 + r_3 \cos \varphi_3 - x_1 - r_4 \cos \varphi_4 = 0 \\ F2 &= r_2 \sin \varphi_2 + r_3 \sin \varphi_3 - r_4 \sin \varphi_4 = 0 \\ F3 &= r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \cos \varphi_5 - r_6 \cos \varphi_6 - x_2 = 0 \\ F4 &= r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \sin \varphi_5 - r_6 \sin \varphi_6 - y = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Teniendo así nuestras 4 ecuaciones de posición y obteniendo del grafo las siguientes incógnitas.

$$[\varphi_2] [\varphi_{32}] [\varphi_4] [\varphi_{43}] [\varphi_{54}] [\varphi_{53}] [\varphi_6] [\varphi_5] [\varphi_3]$$

De modo que se obtienen un total de 4 ecuaciones con 9 incógnitas, siendo este mecanismo un Sistema Compatible Indeterminado, ya que tendría infinitas soluciones.

Solución propuesta

Tal y como se ha comentado en el caso 1, la excepción al cálculo de la movilidad por articulación múltiple se resuelve contabilizando un número de pares cinemáticos igual al número de barras que llegan a la articulación, menos uno. De modo que, la movilidad del mecanismo tratado es este segundo caso es:

$$L = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 1.$$

Desde el punto de vista del análisis estructural, resulta importante identificar cuáles son los pares cinemáticos que se deben contabilizar, no solo su número. Para ello, se propone estudiar la estructura cinemática de los mecanismos que resultan de considerar las posibles combinaciones de pares cinemáticos correspondientes a la articulación múltiple y tomar como solución válida aquella que ofrezca mayor número de grupos estructurales, esto es, una estructura cinemática más sencilla de analizar. En el mecanismo a estudiar existen 3 posibles combinaciones para la elección de los dos pares cinemáticos a considerar :

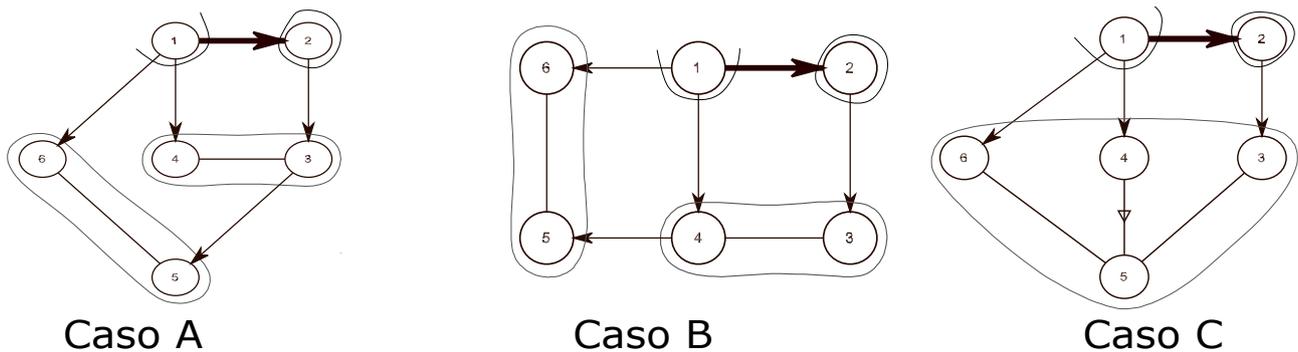


Figura 3.7: Grafos estructurales de las posibles soluciones

Caso a) Pares inferiores elegidos : (3-4) y (3-5)

Según el grafo tenemos 3 grupos estructurales con 2 eslabones cada uno.

Caso b) Pares inferiores elegidos : (3-4) y (4-5)

Observamos que nos sale el mismo grafo estructural del caso a, con 3 grupos estructurales con 2 eslabones cada uno.

Caso c) Pares inferiores elegidos : (3-5) y (4-5)

Observamos que el tanto el grafo de la opción A y B es el que mayor grupos estructurales ofrece. Aplicando la ecuación de Grubler, obtenemos la movilidad de este mecanismo

$$L_c = 3 \cdot (6 - 1) - 2 \cdot 7 = 15 - 14 = 0.$$

obteniendo 7 incógnitas: $[\varphi_2]$, $[\varphi_4]$, $[\varphi_{43}]$, $[\varphi_6]$, $[\varphi_{65}]$, $[\varphi_{53}]$, $[\varphi_{32}]$,

teniendo 7 incógnitas iniciales por 4 ecuaciones de posición iniciales; por lo que añadiríamos dos incógnitas extra, siendo esta $[\varphi_3]$ y $[\varphi_5]$ aportando así dos incógnitas extra, que introducen cuatro ecuaciones de ángulo adicionales:

- $[\varphi_{32}] = [\varphi_3] - [\varphi_2]$

- $[\varphi_{43}] = [\varphi_4] - [\varphi_3]$
- $[\varphi_{65}] = [\varphi_6] - [\varphi_5]$
- $[\varphi_{53}] = [\varphi_5] - [\varphi_3]$

De modo que se obtienen un total de 8 ecuaciones con 9 incógnitas, siendo este mecanismo un Sistema Compatible Indeterminado, ya que tendría infinitas soluciones; lo que nosotros haremos será dar un valor de entrada "q.^a la incógnita $[\varphi_2]$, por lo que al final tendremos un sistema con 8 ecuaciones con 8 agonistas, obteniendo así un mecanismo Compatible Determinado, que ofrece una solución única para cada valor de la coordenada seleccionada como independiente. También, para demostrar que el sistema es compatible determinado y que tiene solución después de la estrategia propuesta por el análisis estructural, habría que lanzar el análisis por grupos, tal y como se definen el título del trabajo.

3.2. Redundancia tangente.

El mecanismo que se muestra en la figura 1 junto con su grafo es un ejemplo de mecanismo articulados planos y están compuestos por un conjunto de miembros o eslabones unidos mediante pares cinemáticos inferiores de rotación, de ejes paralelos.

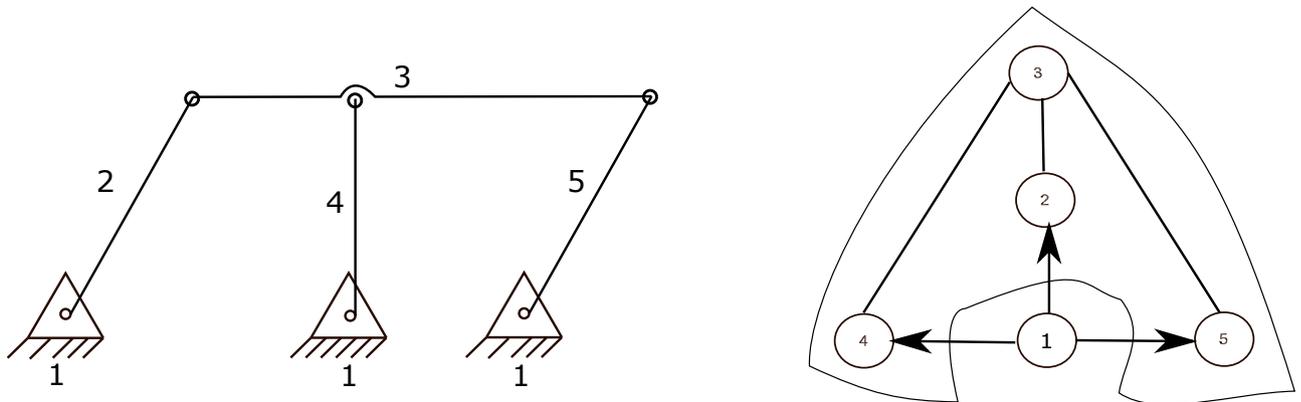


Figura 3.8: Mecanismo de 5 barras articulado con su grafo estructural

Aplicando el criterio de Grübler para este mecanismo se obtiene la siguiente movilidad:

$$L = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0.$$

Se observa que la movilidad según Grubler es nula, por lo que este mecanismo tiene una solución única para todas sus variables, existiendo una sola posición específica para cada valor de las variables, longitudes y posiciones fijas, tal y como corresponde a una estructura estáticamente determinada

Haremos su análisis cinemático para comprobar que lo anteriormente dicho, tal y como se hizo en el caso anterior de «articulaciones múltiples»

siendo sus 4 ecuaciones de posición:

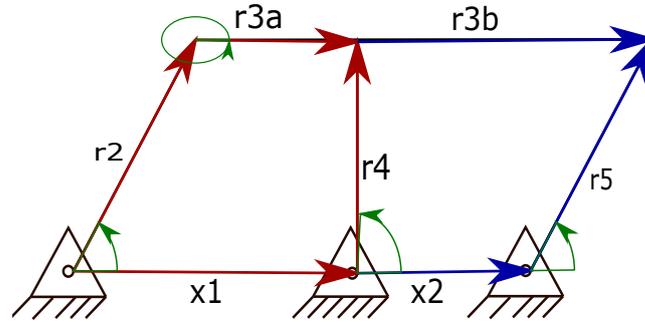


Figura 3.9: Mecanismo con sus vectores de posición y ángulos correspondientes.

$$\begin{aligned}
 F1 &= r_2 \cos \varphi_2 + r_{3a} \cos \varphi_3 - x_1 - r_4 \cos \varphi_4 = 0 \\
 F2 &= r_2 \sin \varphi_2 + r_{3a} \sin \varphi_3 - r_4 \sin \varphi_4 = 0 \\
 F3 &= r_4 \cos \varphi_4 + r_{3b} \cos \varphi_3 - x_2 - r_5 \cos \varphi_5 = 0 \\
 F4 &= r_4 \sin \varphi_4 + r_{3b} \sin \varphi_3 - r_5 \sin \varphi_5 = 0
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por otro lado, el grafo estructural ofrece las siguientes variables dependientes:

$$[\varphi_2], [\varphi_3], [\varphi_4], [\varphi_5],$$

obteniendo finalmente un mecanismo con 4 incógnitas y 4 ecuaciones. Este sistema de ecuaciones tiene una solución única para todas sus variables, de forma que para las longitudes y posiciones de articulaciones fijas especificadas, existe solo una posición del mecanismo, tal y como corresponde a una estructura estáticamente determinada.

3.2.1. Doble Paralelogramo

Si nos centramos en la situación especial de cuando las barras 2, 4, 5 del mecanismo (3.8) están alineadas paralelamente, entonces tendremos, un mecanismo de doble paralelogramo con la singularidad de redundancia tangente, la cual explicaremos un poco más adelante.

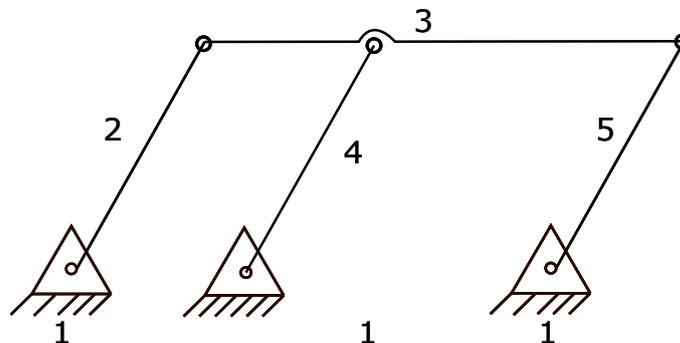


Figura 3.10: Doble paralelogramo de 5 barras articulado

Obtenemos su movilidad por medio de el criterio de Grübler siendo:

$$L = 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0.$$

siendo su grafo estructural el mismo que en el mecanismo (3.8).

Solución propuesta

Este mecanismo al tener las barras 2, 4 y 5 paralelas entre si, estaría aportando un GDL adicional por la condición de «redundancia tangente», la cual consiste en que las perpendiculares de los vectores de velocidad de los puntos A, B y C se cortan en un mismo punto, en este caso se cortarían en el infinito tal y como muestra la figura (3.11):

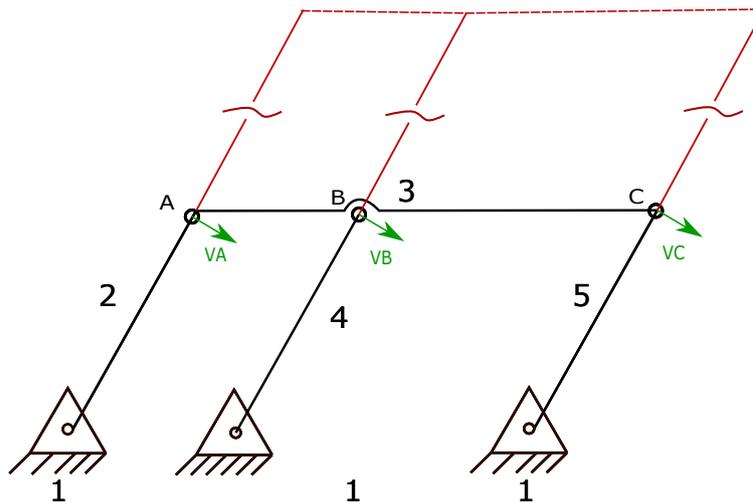


Figura 3.11: Doble paralelogramo con la condición de redundancia tangente.

por lo que ahora su movilidad sería:

$$L_{Real} = L_{Grubler} + 1G.D.L. = 0 + 1 = 1$$

y cumpliendo con el criterio de desmodromía,³

$$n_c = L_c = 1$$

, por lo que tendremos que añadir un movimiento de entrada, siendo el nuevo grafo estructural el siguiente:

Para añadir el GDL en el grafo estructural, se van formando grupos estructurales hasta que no podamos continuar, y entonces es cuando añadimos nuestro GDL para poder completar de formar los grupos estructurales.

Como se observa, al añadir el grado de libertad adicional, los eslabones 3 y 4 pasan a formar ahora un par superior. representando este par, tendríamos el siguiente mecanismo:

siendo sus 4 ecuaciones de posición:

³El cual nos indica que el número de movimientos de entrada tiene que coincidir con la movilidad

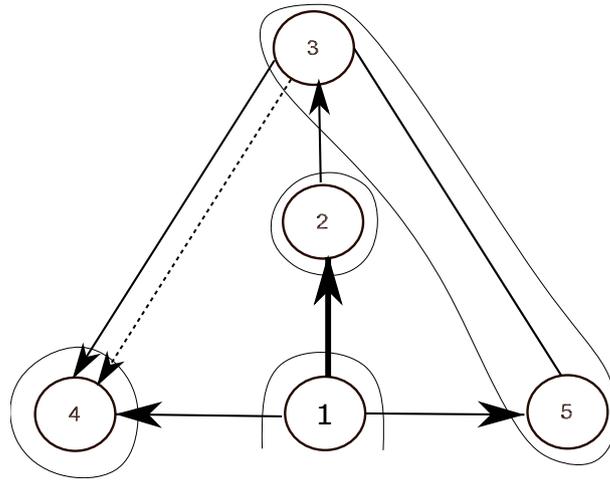


Figura 3.12: Grafo estructural con GDL y movimiento de entrada añadidos.

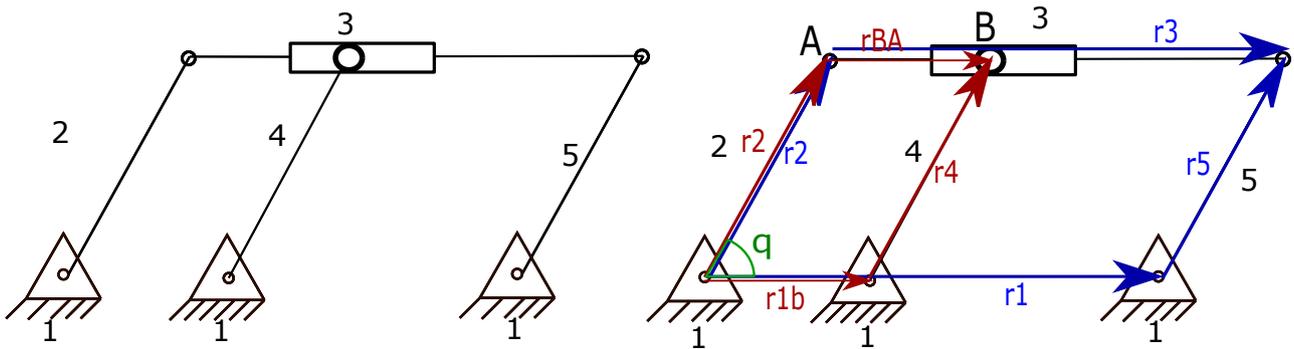


Figura 3.13: Doble paralelogramo con par superior entre eslabones 3 y 4 y con sus vectores de posición representados.

$$\begin{aligned}
 F1 &= r_2 \cos \varphi_2 + r_{BA} \cos \varphi_3 - r_{1b} \cos \varphi_1 - r_4 \cos \varphi_4 = 0 \\
 F2 &= r_2 \sin \varphi_2 + r_{BA} \sin \varphi_3 - r_{1b} \sin \varphi_1 - r_4 \sin \varphi_4 = 0 \\
 F3 &= r_2 \cos \varphi_2 + r_3 \cos \varphi_3 - r_1 \cos \varphi_1 - r_5 \cos \varphi_5 = 0 \\
 F4 &= r_2 \sin \varphi_2 + r_3 \sin \varphi_3 - r_1 \sin \varphi_1 - r_5 \sin \varphi_5 = 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por lo que hemos incorporado una incógnita dependiente extra r_{BA} ; teniendo ahora un sistema formado por 4 ecuaciones y 5 incógnitas. Esto nos permite tener controlado una variable dependiente, pasando así a tener 4 variables dependientes y una independiente, siendo esta, el movimiento de entrada «q» . Controlando el movimiento de entrada «q» , este mecanismo debería tener solución, aspecto que se comprobará en el próximo capítulo.

3.3. Pares Deslizantes

En determinados casos, la aplicación de los criterios de movilidad pueden ofrecer resultados erróneos. Esto puede ocurrir cuando aspectos no tenidos en cuenta en las ecuaciones de los criterios influyen en el resultado final: dimensiones de los eslabones u otras propiedades dimensionales o específicas del contacto entre eslabones. Si se tuvieran que considerar de alguna manera todas las posibles excepciones a los criterios en sus ecuaciones, para que los resultados fueran siempre los reales, los criterios perderían totalmente su sencillez en mucho de los métodos predecesores.

Afortunadamente estas excepciones raras veces se presentan en mecanismos reales. La que nos interesa en este caso es la siguiente:

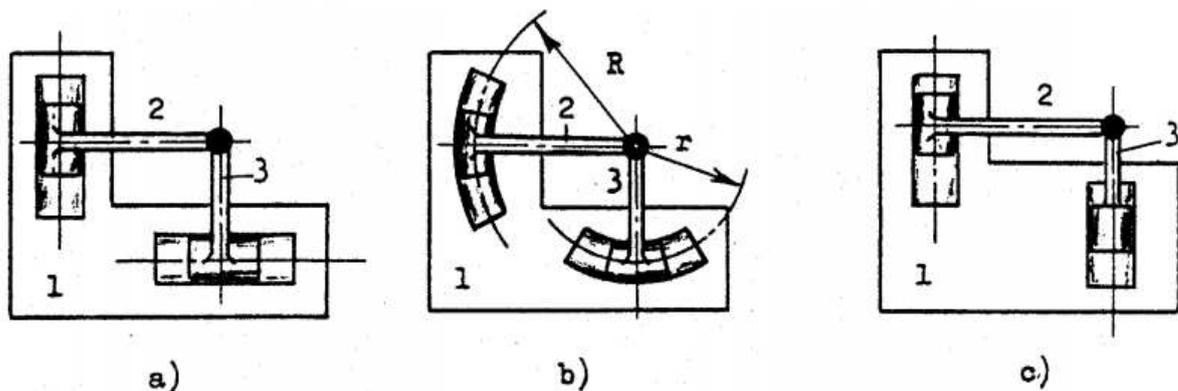


Figura 3.14: Solo Pares Deslizantes y uno de Rotación

Así, por ejemplo los criterios no establecen diferencia entre la estructura que presenta la Figura (3.14-a) y los mecanismos de doble entrada Figura (3.14-b) y de movimiento relativo imposible entre los dos eslabones 2 y 3 Figura (3.14-c), ya que las cadenas cinemáticas que los constituyen poseen el mismo número de pares y eslabones.

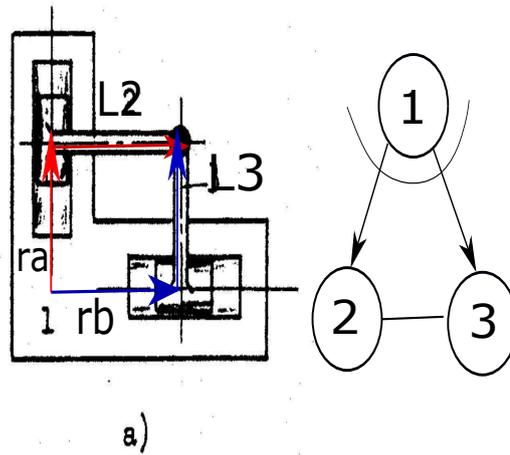
G.D.L de los mecanismos :

Grubler: $n=3$; $p_i=3$, $p_s=0$; siendo:

$$L = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0.$$

En las cadenas cinemáticas constituidas sólo por pares deslizantes excepto uno de rotación, la aplicación de los criterios nos dará valores erróneos para el número de grados de libertad.

Haremos el estudio cinemático de los 3 diferentes casos por separado para ver que realmente no se puede usar el mismo criterio para los 3 diferentes mecanismos.



Las dos traslaciones rectas se cortan

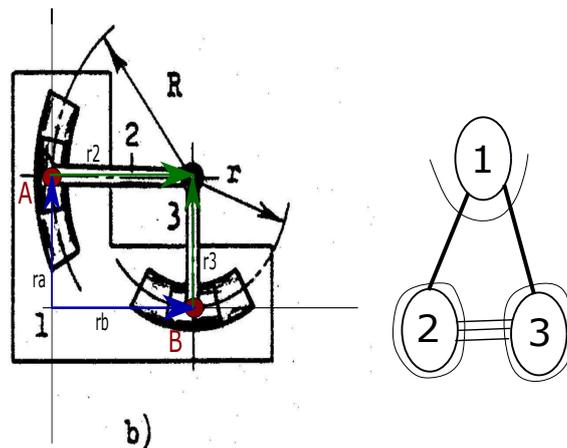
siendo sus ecuaciones de posición:

$$\begin{aligned} F1 &= L_2 - r_b = 0 \\ F1 &= L_3 - r_a = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

siendo; $r_b = L_2$ y $r_a = L_3$.

En este caso, su movilidad sí sería nula, siendo una estructura, teniendo una única solución determinada ya que teniendo los valores de L_2 y L_3 , sabremos el valor de las variables r_a y r_b ; siendo L_2 y L_3 valores fijos y constantes.

Las dos traslaciones son curvas



En este caso, los valores de r_a y r_b , al tener un movimiento curvo, van variando, por lo que haremos será definirlos dándoles coordenadas según vayan cambiando de posición, en este caso, el punto A, tendrá dada las coordenadas X_A y Y_A y el punto B, tendrá dada las coordenadas X_B y Y_B . Resumiendo, en este caso tendremos 6 incógnitas siendo estas :

$[\theta_2], [\theta_3], [X_A], [Y_A], [X_B], [Y_B]$

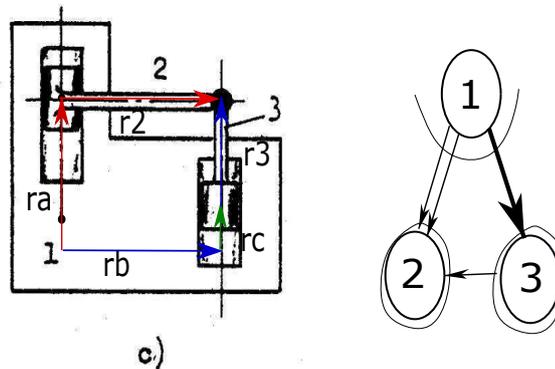
Y tendríamos 4 ecuaciones; siendo estas, nuestras 2 ecuaciones del lazo mas 2 ecuaciones de circunferencia

$$\begin{aligned}
 F1 &= L_2 \cos \theta_2 - r_b - L_3 \cos \theta_3 &= 0 \\
 F1 &= L_2 \sin \theta_2 + r_a - L_3 \sin \theta_3 &= 0 \\
 F3 &= (X_A - X_{A0})^2 + (Y_A - Y_{A0})^2 - R_2^2 &= 0 \\
 F4 &= (X_B - X_{B0})^2 + (Y_B - Y_{B0})^2 - R_3^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Obteniendo así, 6 incógnitas con 4 ecuaciones, con lo que dando valores a X_A, Y_A, X_B, Y_B obtendremos los valores de r_a y r_b .

Siendo así la movilidad de este mecanismo $L=2$

Las dos traslaciones rectas son paralelas



Observando sus ecuaciones de posición:

$$\begin{aligned}
 F1 &= L_2 - r_b &= 0 \\
 F1 &= r_a - L_3 - r_c &= 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

siendo; siendo; $L_2 = r_b$ y $r_a = L_3 + r_c$.

Vemos que a diferencia que en el caso A que su movilidad sí era cero, en este caso nos encontramos con 2 variables $[r_a]$ y $[r_c]$, y una ecuación; lo que nos dejaría con un mecanismo con un grado de libertad, pudiendo hacer a elección una variable cualquiera independiente, por lo que controlando $[r_a]$ o $[r_c]$, podremos obtener el valor de la variable dependiente. Teniendo así un mecanismo desmodrómico.

3.4. Rodadura Pura

En un par cinemático de rodadura pura, la velocidad relativa entre los sólidos en el punto de contacto es nula. Se puede presentar esta condición entre ruedas dentadas (engranajes) o

ruedas de fricción, si bien estas últimas pueden transmitir menor potencia. Hay tres formas diferentes en la que esta condición puede producirse:

- Piñón-cremallera
- Tren ordinario
- Tren epicicloidal

3.5. Piñón cremallera

Usaremos el caso de piñón-cremallera para explicar los términos de rodadura pura y cierre de cadena. Para el caso piñón-cremallera, la ecuación adicional que introduce la condición de rodadura permite relacionar el avance del centro de la rueda respecto a la cremallera, con el giro absoluto de la rueda.

Tendremos dos casos a estudiar:

- Sin Cierre de Cadena
- Con Cierre de Cadena

3.5.1. Sin Cierre de Cadena

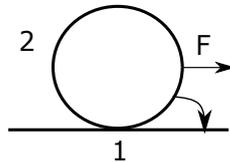


Figura 3.15: Piñón-Cremallera sin cierre de cadena.

Este mecanismo nos introduce la condición de Rodadura Pura. Se observa que la movilidad según Grubler es :

$$L_c = 3 \cdot (2 - 1) - 1 \cdot 1 = 3 - 1 = 2.$$

Metiendo la condición de Rodadura Pura, la movilidad se ve disminuida en una unidad :

$$L_r = 2 - 1 = 1.$$

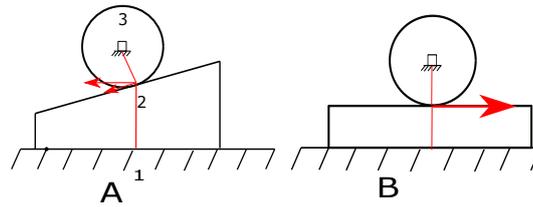


Figura 3.16: A: No añade GDL adicional. B: Sí añade GDL adicional

3.5.2. Con Cierre de Cadena

En la figura (Fig. 3.16) vemos 2 casos distintos de Piñón Cremallera con cierre de cadena. Aquí vamos a justificar en que casos el cierre de cadena introduce un GDL adicional.

Calculamos la movilidad para ambos mecanismos:

$$L_c = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 = 6 - 5 = 1.$$

Metiendo la condición de Rodadura Pura, la movilidad se ve disminuida en una unidad

:

$$L_r = 1 - 1 = 0.$$

Vemos que la movilidad usando Grubler sería cero en ambos casos. Ahora aplicamos la condición de cierre de cadena, la cual dice que si entre dos sólidos en contacto directo existe cierre de cadena por par inferior respecto a un tercero, la movilidad del sistema se ve incrementada en +1 GDL siempre que $V_{P2-1} \nparallel V_{P3-1}$

Por este motivo en el mecanismo en la figura (3.16-A) sus vectores de velocidades con respecto al bastidor no son paralelos, en este caso, no añade un GDL, por lo que su movilidad permanece igual. Por otro lado en el mecanismo en la figura (3.16-B) los vectores de velocidad de los eslabones dos y tres con respecto al bastidor sí son paralelos entre si, por lo que añade +1GDL. Siendo su movilidad:

$$L_r = 0 + 1 = 1.$$

3.6. Tren ordinario

Este tipo de par superior se da cuando en la transmisión entre ruedas dentadas o discos de fricción, todos los ejes de las ruedas que intervienen en la transmisión son fijos. La relación entre las velocidades angulares de los sólidos, llamada relación de transmisión (μ) está en

razón inversa (Ec. 3.9) a los números de dientes o de sus radios, según sean ruedas dentadas o discos de fricción, respectivamente.

$$\mu_{ES} = \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_3} = \pm \frac{Z_3}{Z_2} \quad (3.9)$$

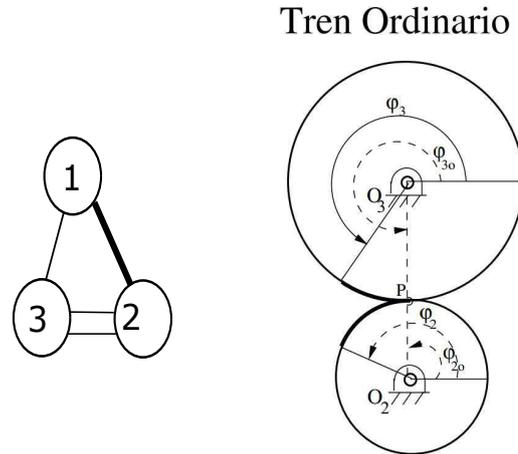


Figura 3.17: Tren Ordinario con su Grafo Estructural Topológico.

Se observa que según la disposición de este mecanismo su grafo estructural topológico sí es correcto, ya que tanto los eslabones 2 y 3 forman GE porque cumplen con la ecuación (??) ⁴.

Se puede establecer una ecuación de restricción para las posiciones integrando la ecuación (3.9), en la forma: (3.10). Esta ecuación implica la igualdad en el arco recorrido por un punto P, inicialmente situado en el punto de contacto entre ambas ruedas, cuando éstas han girado un determinado ángulo.

$$[\varphi_3 - \varphi_{3o}] \cdot Z_3 \pm [\varphi_2 - \varphi_{2o}] \cdot Z_2 = 0 \quad (3.10)$$

Donde se tiene que $[\varphi_3, \varphi_2]$ son el giro absoluto de las ruedas tres y dos con respecto al eje global horizontal, $[\varphi_{3o}, \varphi_{2o}]$ el giro en un instante determinado de las ruedas respectivas y Z_2 y Z_3 el número de dientes de las ruedas.

A partir de una posición inicial conocida $[\varphi_{3o}, \varphi_{2o}]$ y conocidos los números de dientes de las ruedas en contacto, es posible determinar, para un nuevo valor del ángulo girado por la rueda de entrada $[\varphi_2]$, la posición final de la rueda de salida $[\varphi_3]$.

El signo \pm indica si la rueda de salida gira en el mismo sentido o en sentido opuesto a la de entrada. Se considera negativo en ruedas con contacto externo y positivo en ruedas con contacto interno. El contacto externo aparece cuando el punto de contacto P se establece en la línea de centros, en el segmento que une a los centros de ambas ruedas y es interno cuando se establece fuera de ese segmento. Según esto, en el tren ordinario representado en la figura punto de contacto P se localiza en el interior del segmento que une los centros de ambas ruedas ($\overline{O_2O_3}$) y ambas ruedas giran en sentidos opuestos.

⁴Ley de formación de grupos estructurales (LFGE)

Obteniendo la movilidad según Grubler tenemos:

$$n = 3; p_i = 2; p_s = 1;$$

Luego:

$$L_c = 3 \cdot (3 - 1) - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 6 - 5 = 1.$$

Pero al obtener la ecuación de restricción 3.10, estamos relacionando $[\varphi_3]$ con $[\varphi_2]$, con lo que al relacionar 2 variables del sistema, la movilidad se reduce en una unidad por cada condición que aparezca de este tipo.

$$L_R = L_c - 1C_R = 1 - 1 = 0.$$

Lo que supondría que el mecanismo tendría movilidad nula.

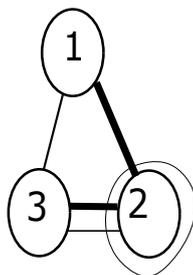


Figura 3.18: Grafo estructural con condición de rodadura pura.

En este grafo estructural se observa claramente que al relacionar el giro de la rueda tres con el giro de la rueda dos, una línea de trazo fino ha pasado a ser una línea de trazo grueso, por lo que el eslabón tres no estaría cumpliendo con la ecuación (??).

Sin embargo, es evidente que el sistema tiene un grado de libertad. Se comprueba, por tanto, que el criterio de movilidad falla en este caso, lo que genera un grafo estructural erróneo, ya que no permite obtener la estructura cinemática del sistema mecánico.

3.6.1. Solución

Como vemos, este mecanismo siguiendo el criterio de Grübler, tendría una movilidad nula, siendo una estructura. En nuestro caso, al estar tanto el eslabón 2 como el eslabón 3, existe la condición de cierre de cadena, haciendo que el vector de velocidades de los eslabones 2 y 3 sean paralelos entre sí; lo que añadiría un grado de libertad adicional.

$$L_{Real} = L_R + 1GDL = 0 + 1 = 1$$

Siendo su grafo:

Se observa que al aplicar al mecanismo la condición de cierre de cadena, el grafo estructural vuelve a tener la misma topología que al principio, formando tanto los eslabones dos y tres GE.

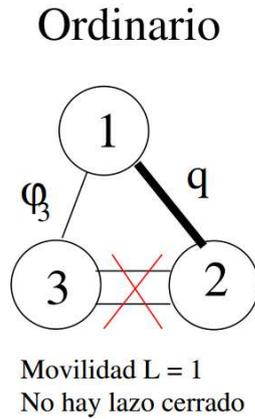


Figura 3.19: Grafo estructural con condición de cierre de cadena.

3.7. Tren epicycloidal

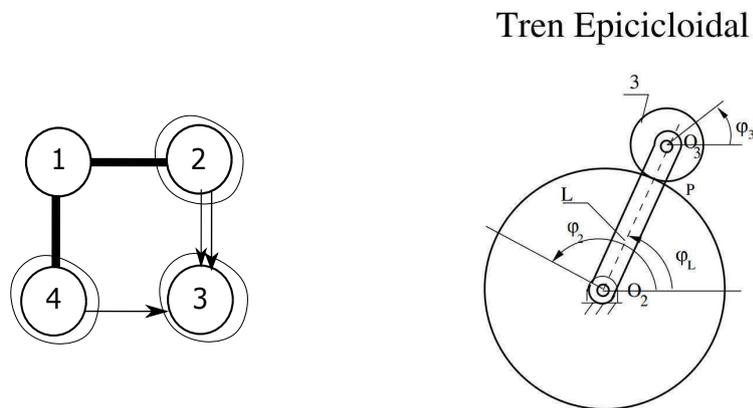


Figura 3.20: A: Grafo estructural topológico. B: Grafo estructural con condición de rodadura pura .

Un tren de ruedas es epicycloidal cuando alguno de los ejes de las ruedas que intervienen en la transmisión es móvil. En la Figura (3.20) el eje de la rueda 3 (satélite) se ve arrastrado por el brazo L (brazo porta satélites o chasis). En este caso se observa claramente como el grafo estructural es correcto ya que cada uno de sus eslabones son GE cumpliendo con la ecuación (??).

Un tren epicycloidal se comporta como si fuera ordinario cuando las velocidades que se relacionan son las relativas al chasis. Existe, por tanto, una relación de tipo cinemático (Ec. 3.11) obtenida a partir de la condición de rodadura pura, que expresa que la relación entre las velocidades de las ruedas *relativas al brazo* está en razón inversa al número de dientes de las ruedas que engranan o a sus radios si la transmisión se establece entre discos con rodadura pura.

$$\frac{\dot{\varphi}_{2/4}}{\dot{\varphi}_{3/4}} = \frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_4}{\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4} = \frac{Z_3}{Z_2} \quad (3.11)$$

Análogamente al caso anterior, se puede integrar esta ecuación y obtener una ecuación de restricción para la posición de un tren epicicloidal (Ec. 3.12)

$$[(\varphi_2 - \varphi_{2o}) - (\varphi_4 - \varphi_{4o})] \cdot Z_2 \pm [(\varphi_3 - \varphi_{3o}) - (\varphi_4 - \varphi_{4o})] \cdot Z_3 = 0 \quad (3.12)$$

Obteniendo la movilidad según Grubler tenemos:

$$n = 4; p_i = 3; p_s = 1;$$

Luego:

$$L_c = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 9 - 7 = 2.$$

Pero al igual que el caso anterior, al obtener la ecuación de restricción (3.12), se establece una relación entre las coordenadas del sistema, reduciendo en 1 los GDL de este sistema.

$$L_R = L_c - 1C_R = 2 - 1 = 1.$$

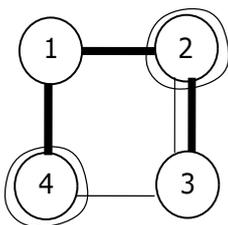


Figura 3.21: A: Grafo estructural con condición de rodadura pura.

donde se observa claramente que el grafo estructural es erróneo ya que el eslabón tres no cumple con la ecuación (??).

Sin embargo, se sabe que este sistema tiene dos grados de libertad. Se comprueba nuevamente, que el criterio de movilidad falla, generando un grafo estructural erróneo.

3.7.1. Solución

Al igual que en el caso anterior, en este mecanismo vuelve a existir claramente la condición de cierre de cadena, añadiendo un GDL adicional a la movilidad del mecanismo.

$$L_{Real} = L_R + 1G.D.L. = 1 + 1 = 2$$

siendo su grafo estructural: (Fig. 4.3)

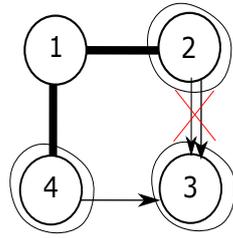


Figura 3.22: Grafo estructural corregido Tren epicicloidal .

3.8. Posiciones singulares

En otras ocasiones, un sistema multicuerpo presenta una movilidad que coincide con la determinada con los criterios de movilidad, sin embargo, por consideraciones, también de tipo constructivo, se alcanzan posiciones en las que la solución al problema de posiciones presenta algún problema, de forma que su movimiento es distinto del que cabía esperar: a estas posiciones se las conoce como posiciones singulares.

Se dice que un mecanismo alcanza una posición singular cuando su matriz Jacobiana $[J]$ se vuelve deficiente de rango. Esto sucede cuando alguna de sus filas es nula, para esa posición, o es combinación lineal de otras. En estos casos el determinante de la matriz Jacobiana se anula $Det[J] = 0$, y se alcanza una singularidad en el espacio de configuraciones accesibles del mecanismo (en esta posición, no puede resolverse la expresión obtenida de la aplicación del método de Newton-Raphson, ya que, si el determinante de la matriz jacobiana es nulo, los elementos de la matriz inversa tienden a infinito).

Se puede utilizar esta expresión para determinar cuáles son las posiciones singulares del mecanismo dado. Hay que tener en cuenta que esta es una condición matemática cuya interpretación física corresponde a quien está analizando el mecanismo, es decir, es posible que esa condición no ocurra porque la propia geometría del mecanismo lo impida, pero esto no se deduce de la expresión del determinante, sino que se debe analizar a cada mecanismo en cada caso.

La posición singular puede clasificarse en tres tipos:

1. La posición singular se clasifica como **inalcanzable** cuando es imposible que la variable independiente q alcance un determinado valor, porque la configuración del mecanismo no se lo permite

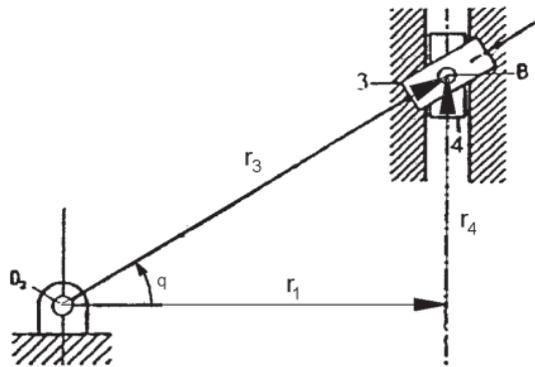


Figura 3.23: Posición inalcanzable.

La matriz Jacobiana respecto a las variables secundarias:

$$[J] = \begin{bmatrix} \cos q & 0 \\ \sin q & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |J| = \cos q$$

Las posiciones singulares se obtienen para los valores de q que anulan el determinante:

$$q = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (3.13)$$

- La posición singular se clasifica como de **bloqueo** cuando el movimiento no es posible más allá del valor alcanzado para la variable independiente q .

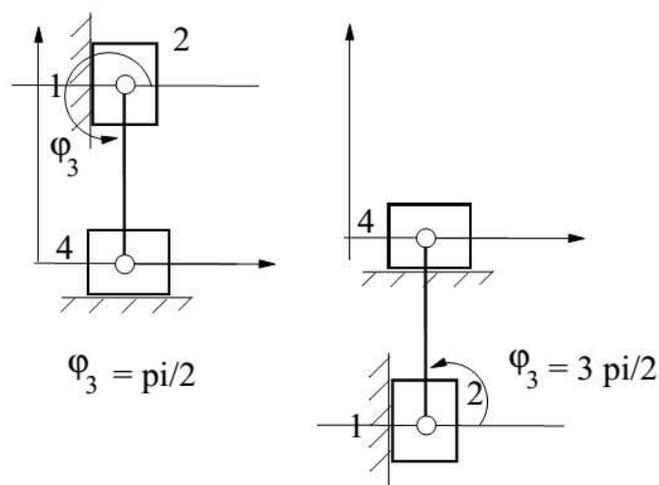


Figura 3.24: Posición de bloqueo.

La matriz Jacobiana respecto a las variables secundarias:

$$[J] = \begin{bmatrix} -L_3 \cdot \sin \varphi_3 & -1 \\ L_3 \cdot \cos \varphi_3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |J| = L_3 \cdot \cos \varphi_3$$

Las posiciones singulares se obtienen para los valores de q que anulan el determinante:

$$\varphi_3 = (2\dot{n} + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (3.14)$$

3. La posición singular se llama de **bifurcación** cuando el movimiento si es posible, pero no se sabe cómo se va a producir, porque hay más de una opción (ejemplo 5.9).

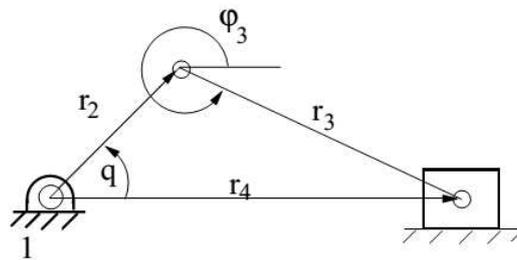


Figura 3.25: Mecanismo de manivela, biela, corredera.

La matriz Jacobiana respecto a las variables secundarias:

$$[J] = \begin{bmatrix} -L_3 \cdot \sin \varphi_3 & -1 \\ L_3 \cdot \cos \varphi_3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |J| = L_3 \cdot \cos \varphi_3$$

Las posiciones singulares se obtienen para los valores de q que anulan el determinante:

$$\varphi_3 = (2\dot{n} + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (3.15)$$

La Figura 3.25 muestra las posiciones singulares que se pueden dar en este mecanismo.

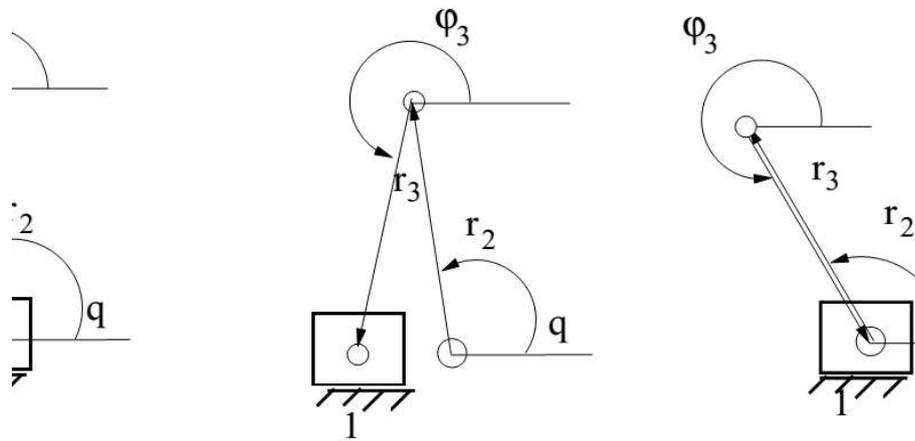


Figura 3.26: Posición de bifurcación.

Las posiciones singulares sólo podrían aparecer en el caso de que $L_2 = L_3$. Se observa que una vez alcanzada la posición de bifurcación, el mecanismo puede seguir avanzando, pero existen las dos opciones representadas: o bien la corredera 4 avanza hacia la izquierda o bien se queda junto a la articulación fija del eslabón 2 y giran solidarias las barras 2 y 3.

Capítulo 4

Resultados

Una vez presentados todos los estudios e hipótesis realizados en cada caso dicho , en este capítulo nos centraremos en las comprobaciones que hemos hecho.

En este capítulo explicaremos primero en que consiste la solución por ecuaciones de grupo así como los pasos que hemos seguido para la solución de cada mecanismo según su singularidad. Y nos centraremos en los resultados que hemos obtenido en cada una de las posiciones y ángulos, comprobando así que lo que se dijo en el capítulo anterior es correcto. Para visualizarlos mejor, los representaremos en Matlab para estudiarlos y compararlos.

4.1. Formulación basada en ecuaciones de grupo en coordenadas relativas

La formulación basada en ecuaciones de grupo permite la modelización automática de sistemas multicuerpo sin dejar de ser eficiente a nivel computacional

La descomposición en grupos estructurales ya fue comentada en el capítulo 2, donde se introdujo la condición necesaria que debe cumplirse para formar un grupo estructural.

No obstante, la resolución por descomposición en grupos estructurales tiene una forma de resolución determinada, que presentaremos a continuación.

Como se comentó en el capítulo anterior, en este Trabajo Final de carrera nos centraremos en 3 singularidades :

- Articulación múltiple

- Rodadura pura

- Redundancia tangente

4.2. Subrutinas para análisis cinemático de grupos estructurales básicos.

Para el análisis cinemático de un sistema multicuerpo por descomposición en grupos estructurales se sigue una secuencia concreta. La cual consiste en cargar desde el fichero de Matlab el código del programa principal que incluye 3 bucles. En cada paso de tiempo (primer bucle) el tiempo de ejecución aumenta y se definen los valores de las variables independientes de todo el sistema. Entonces, para cada GE de la estructura cinemática (segundo bucle), se identifica el GE y, en función de su tipo (tercer bucle), se utiliza la subrutina adecuada para resolver su cinemática.

Así pues, la resolución de cada mecanismo se basa en analizar su estructura cinemática, identificar los grupos de que está compuesto y lanzar subrutinas que resuelvan dichos grupos.

En los apartados subsiguientes se presentarán los ejemplos de las singularidades que se han estudiado en este TFG y se incluirá la explicación de las subrutinas en coordenadas relativas que resuelven sus grupos.

4.3. Aplicación al análisis del cuadrilátero articulado con articulación múltiples.

Un cuadrilátero articulado con articulación múltiples se puede descomponer en tres grupos estructurales en el plano: un grupo estructural compuesto por la manivela (1 par de rotación, SG 1R2DREL) y otro dos grupo (diada) compuesto por tres pares de rotación (SG 3R2DREL).

En la figura (4.1) se muestra la numeración global establecida de puntos y eslabones del cuadrilátero, mientras que en la figura (4.2) se muestra la numeración local establecida de puntos y eslabones del cuadrilátero.

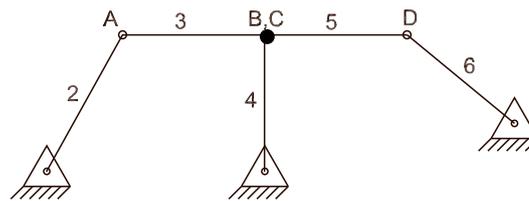


Figura 4.1: Numeración global del cuadrilátero

En el fichero MBDatos.m es donde se realiza esta identificación de puntos y eslabones. A continuación se definen las subrutinas empleadas para resolver cada grupo estructural:

- SG 1R2DREL. Este grupo presenta un único par de rotación y su resolución es inmediata, es decir, no requiere calcular jacobianas de las funciones de restricción. Para la resolución de las subrutinas se han empleado estructuras de datos en Matlab, para almacenar la información de los puntos y de los ángulos en ellas de una forma más ordenada.

Las estructuras de datos son:

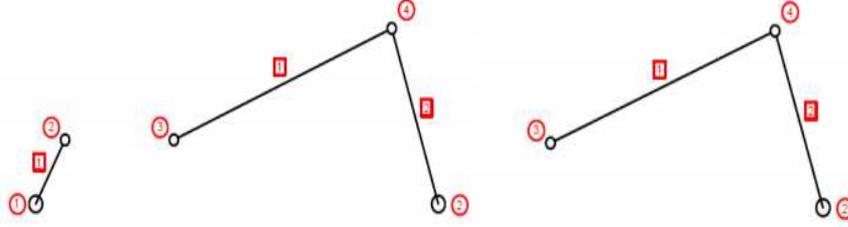


Figura 4.2: Numeración local del cuadrilátero

$$\text{POI}(\text{numGlo}).\text{PVA}(1:9)=[x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \ddot{x} \ \ddot{y} \ \ddot{z}]$$

Se utiliza para incluir en una estructura de datos los valores posición, velocidad y aceleración de los puntos.

$$\text{Fi}(\text{numGlo}).\text{PVA}(1:9)=[\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\psi}]$$

Se utiliza para incluir en una estructura de datos los valores posición, velocidad y aceleración de los ángulos.

En este grupo la resolución a su cinemática se obtiene de forma inmediata por derivación respecto al tiempo:

$$x_2 = x_1 + L_1 \cdot \cos \alpha y_2 = y_1 + L_1 \cdot \sin \alpha \quad (4.1)$$

Derivando respecto al tiempo obtenemos la velocidad:

$$\dot{x} = -L_1 \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \dot{y} = L_1 \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \quad (4.2)$$

Derivando por segunda vez se obtiene las aceleraciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -L_1 \cdot \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha} - L_1 \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 \\ \ddot{y} &= L_1 \cdot \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} - L_1 \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

- SG 3R2DREL. Este grupo tiene 3 pares de rotación, requiere obtener funciones de restricción y jacobianas.

Siendo las ecuaciones de restricción:

$$\begin{aligned} F1 &= L_3 \cos \varphi_1 - L_4 \cos \varphi_2 - x_2 - x_3 = 0 \\ F2 &= L_3 \sin \varphi_1 - L_4 \sin \varphi_2 - y_2 - y_3 = 0 \end{aligned}$$

siendo las coordenadas dependientes:

$$q_d = [\varphi_1, \varphi_2]$$

y las coordenadas independientes :

$$h = [x_3, y_3]$$

Y después de haber obtenido las matrices jacobianas del grupo estructural respecto a las variables dependientes φ e independientes h , se ha empleado una estructura de datos para el desarrollo de la subrutina del grupo.

La subrutina del grupo se programa en base a los siguientes pasos:

1. Identificación de los puntos, numeración global.
2. Escribir en 'POI' los valores de posición de las coordenadas cartesianas de los puntos que se pretenden calcular.
3. Escribir en 'Fi' los valores de los ángulos φ_1, φ_2 que en este caso constituyen las coordenadas dependientes
4. Método de Newton-Raphson para resolver el problema de posición. Se leen las funciones de las funciones de restricción y jacobiana respecto a los términos dependientes que obtuvimos con el script simbólico del grupo estructural en cuestión.
5. Solución del problema de posición:

$$q^d = q^d - \phi_q^d \cdot \phi$$

siendo q^d el vector de coordenadas dependientes, ϕ_q^d la matriz jacobiana de las funciones de restricción respecto a las variables dependientes y ϕ las funciones de restricción.

6. Escribir en 'Fi' las variables dependientes calculadas. Escribir en 'POI' los valores del punto (x_4, y_4) (punto 4 en numeración local) (Ver Figura 4.2)
7. Solución al problema de velocidades:

$$\dot{q}^d = -(\phi_q^d)^{-1} \cdot \phi_q^i \cdot \dot{h}$$

siendo \dot{q}^d el vector de velocidades de las variables dependientes, ϕ_q^d la matriz jacobiana de las funciones de restricción respecto a las variables dependientes, ϕ_q^i la matriz jacobiana de las funciones de restricción respecto a las variables independientes y \dot{h} la velocidad de la coordenada independiente

8. Escribir en 'Fi' las velocidades de las variables dependientes calculadas. Escribir en 'POI' las velocidades del punto (\dot{x}_4, \dot{y}_4)
9. Solución al problema de aceleraciones:

$$\ddot{q}^d = -(\phi_q^d)^{-1} \cdot (\dot{\phi}_q \cdot \dot{q} + \phi_q^i \cdot \ddot{h})$$

siendo \ddot{q}^d el vector de aceleraciones de las variables dependientes, $\dot{\phi}_q$ es la derivada temporal del jacobiano de las funciones de restricción, \dot{q} es el vector de velocidades y \ddot{h} es la aceleración de la coordenada independiente.

10. Escribir en 'Fi' las aceleraciones de las variables dependientes calculadas. Escribir en 'POI' las aceleraciones del punto (\ddot{x}_4, \ddot{y}_4)

Giro del eslabón 3 ($\times 1,0e + 002$)			
φ_2	φ_3	$\dot{\varphi}_3$	$\ddot{\varphi}_3$
0.6	0.3434	-0.0027	0.0026
0.9	0.2944	-0.0006	0.0022
1.2	0.2948	0.0006	0.0031
1.5	0.3344	0.0019	0.0045
1.8	0.4140	0.0033	0.0058
2.1	0.5323	0.0044	0.0062
2.4	0.6769	0.0050	0.0053
2.7	0.8257	0.0046	0.0028
3.0	0.9434	0.0027	-0.0033
3.3	0.9574	-0.0026	-0.0178
3.6	0.7552	-0.0100	-0.0151
3.9	0.4815	-0.0068	0.0033
4.2	0.3434	-0.0027	0.0026

Giro del eslabón 4 ($\times 1,0e + 002$)			
φ_2	φ_4	$\dot{\varphi}_4$	$\ddot{\varphi}_4$
0.6	2.6565	0.0027	0.0089
0.9	2.7742	0.0046	0.0065
1.2	2.9230	0.0050	0.0047
1.5	3.0676	0.0044	0.0027
1.8	3.1859	0.0033	0.0008
2.1	3.2655	0.0019	-0.0005
2.4	3.3051	0.0006	-0.0017
2.7	3.3055	-0.0006	-0.0036
3.0	3.2565	-0.0027	-0.0081
3.3	3.1184	-0.0068	-0.0171
3.6	2.8447	-0.0100	-0.0048
3.9	2.6425	-0.0026	0.0125
4.2	2.6565	0.0027	0.0089

A continuación se mostrará los resultados obtenidos por medio del programa informático Matlab.

Se observa que el giro de los eslabones cuatro y seis, es exactamente el mismo ya que son eslabones que son paralelos entre si.

Como se puede observar en la figura, el eslabón cinco es el único eslabón que no gira, siempre se mantiene en su misma posición horizontal.

4.4. Aplicación al análisis del Tren Epicicloidal.

Para la solución del mecanismo con la condición de Rodadura Pura, nos enfocamos en un Tren Epicicloidal; aunque la solución también valdría para un Tren Ordinario.

Giro del eslabón 6 ($\times 1,0e + 002$)			
φ_2	φ_6	$\dot{\varphi}_6$	$\ddot{\varphi}_6$
0.6	0.3434	-0.0027	0.0026
0.9	0.2944	-0.0006	0.0022
1.2	0.2948	0.0006	0.0031
1.5	0.3344	0.0019	0.0045
1.8	0.4140	0.0033	0.0058
2.1	0.5323	0.0044	0.0062
2.4	0.6769	0.0050	0.0053
2.7	0.8257	0.0046	0.0028
3.0	0.9434	0.0027	-0.0033
3.3	0.9574	-0.0026	-0.0178
3.6	0.7552	-0.0100	-0.0151
3.9	0.4815	-0.0068	0.0033
4.2	0.3434	-0.0027	0.0026

Giro del eslabón 5 ($\times 1,0e + 002$)			
φ_2	φ_5	$\dot{\varphi}_5$	$\ddot{\varphi}_5$
0.6	0	0	0
0.9	0	0	0
1.2	0	0	0
1.5	0	0	0
1.8	0	0	0
2.1	0	0	0
2.4	0	0	0
2.7	0	0	0
3.0	0	0	0
3.3	0	0	0
3.6	0	0	0
3.9	0	0	0
4.2	0	0	0

Para poder resolver el mecanismo por medio de ecuaciones de grupo nos fijamos en el grafo estructural para saber el orden en que tienen que ser resueltos los grupos estructurales

Tal y como se observa en la figura, este mecanismo se puede descomponer en tres grupos estructurales en el plano: un grupo estructural compuesto por el brazo porta satélites (1 par de rotación, SG 1R2DREL), otro grupo (Rueda) (SG 1R2DREL) y otro grupo compuesto por el Satélite (SG RodPura).

A continuación definiremos las subrutinas empleadas para resolver cada grupo estructural

- SG 1R2DREL y SG 1R2DREL. Estos dos grupo presentan un único par de rotación y su resolución es inmediata, es decir, no requiere calcular jacobianas de las funciones de restricción, ya que las variables que recibe son los movimientos de entrada, es decir, las variables independientes. Al igual que en el caso anterior, para la resolución de

Tren Epicicloidial

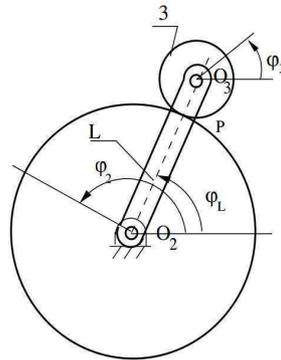


Figura 4.3: Grafo estructural corregido Tren epicicloidial .

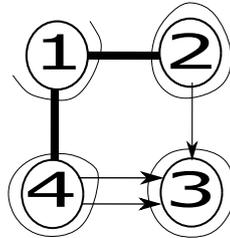


Figura 4.4: Grafo estructural Tren Epicicloidial

las subrutinas se han empleado estructuras de datos en Matlab, para almacenar la información de los puntos y de los ángulos en ellas de una forma más ordenada.

POI(numGlo).PVA(1:9)=[x y z \dot{x} \dot{y} \dot{z} \ddot{x} \ddot{y} \ddot{z}] .

Fi(numGlo).PVA(1:9)=[ϕ , θ , ψ , $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\ddot{\phi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\psi}$]

De estos 2 primeros G.E. obtenemos la posición, velocidad y aceleración de los giros tanto de la rueda fija [φ_2], [$\dot{\varphi}_2$], [$\ddot{\varphi}_2$], así como del brazo porta satélites [φ_4], [$\dot{\varphi}_4$], [$\ddot{\varphi}_4$] Siendo el eslabón 2 la rueda , el eslabón 4 el brazo porta satélites, y el eslabón 3 siendo el satélite.

- SG RodPura. Como se dijo en el capítulo anterior, el Tren Epicicloidial introduce una ecuación de restricción siendo esta :

$$[(\varphi_2 - \varphi_{2o}) - (\varphi_4 - \varphi_{4o})] \cdot Z_2 \pm [(\varphi_3 - \varphi_{3o}) - (\varphi_4 - \varphi_{4o})] \cdot Z_3 = 0 \quad (4.3)$$

Como se observa en el grafo para poder obtener el giro de 3, se necesita la posición, velocidad y aceleración de los eslabones 2 y 4.

siendo las coordenadas dependientes:

$$q_d = [\varphi_2, \varphi_4]$$

y las coordenadas independientes :

$$h = [\varphi_3]$$

Para obtener la velocidad y aceleración de $[\varphi_3]$, aprovechando la ecuación que introduce la condición de rodadura pura, usamos en este caso el método de derivación directa sobre la ecuación de restricción, no teniendo que hacer uso del método matricial; siendo la velocidad :

$$\dot{\varphi}_3 = -(Z_2/Z_3) \cdot \dot{\varphi}_2 + (Z_2/Z_3 + 1) \cdot \dot{\varphi}_4 \quad (4.4)$$

y la aceleración siendo:

$$\ddot{\varphi}_3 = -(Z_2/Z_3) \cdot \ddot{\varphi}_2 + (Z_2/Z_3 + 1) \cdot \ddot{\varphi}_4 \quad (4.5)$$

A continuación se mostrará los resultados obtenidos por medio del programa informático Matlab, siendo la solución

Evolución del mecanismo respecto al tiempo ($\times 1,0e + 003$)			
Tiempo	φ_2	φ_3	φ_4
0	0	0	0
0.001	0.1145	0.0200	0.0572
0.0020	0.2291	0.0401	0.1145
0.0030	0.3437	0.0601	0.1718
0.0040	0.4583	0.0802	0.2291
0.0050	0.5729	0.1002	0.2864
0.0060	0.6875	0.1203	0.3437
0.0070	0.8021	0.1403	0.4010
0.0080	0.9167	0.1604	0.4583
0.0090	1.0313	0.1804	0.5156
0.0100	1.1459	0.2005	0.5729

Se observa como evoluciona tanto el giro de las dos ruedas así como el giro del brazo en el tiempo.

4.5. Aplicación al análisis del doble paralelogramo.

Este mecanismo al igual que en los otros 2 casos anteriores se puede descomponer en 3 grupos estructurales en el plano: un grupo estructural compuesto por la manivela (1 par de rotación, SG 1R2DREL) y otro grupo (diada) compuesto por tres pares de rotación (SG 3R2DREL) y un último grupo nuevo implementado compuesto por dos pares de rotación y un par superior (SG ParSup)

Tal y como se observa en el grafo de la Figura (3.12) primero se resuelven los grupos tanto de la manivela seguido del grupo de la diada. La resolución de estos 2 grupos esta ya explicada en los casos anteriores.

No obstante el Grupo ParSup sigue la misma metodología de solución del grupo 3R2DREL, cambiando claramente sus funciones de restricción. A continuación se explicará la solución de este grupo:

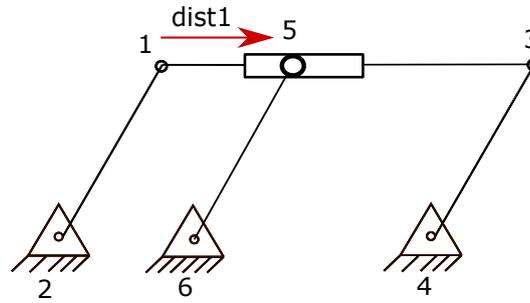


Figura 4.5: Numeración global de los puntos del mecanismo

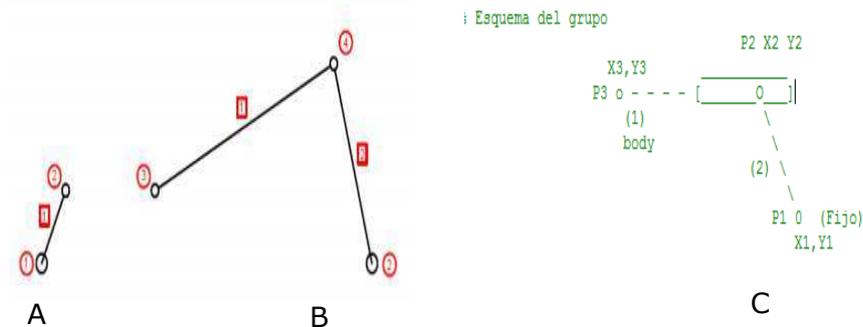


Figura 4.6: Numeración local de los grupos. A: Grupo 1R2DREL. B: Grupo 3R2DREL y C: Grupo ParSup

- SG ParSup. Este grupo tiene 2 pares de rotación y un par superior, requiere obtener funciones de restricción y jacobianas. Siendo las ecuaciones de restricción:

$$F1 = dist1 \cos \varphi_1 - L_2 \cos \varphi_2 - (x_1 - x_3) = 0$$

$$F2 = dist1 \sin \varphi_1 - L_2 \sin \varphi_2 - (y_1 - y_3) = 0$$

siendo las coordenadas dependientes:

$$q_d = [\varphi_2, dist1]$$

y las coordenadas independientes :

$$h = [x_3, y_3, \varphi_1]$$

En este caso para poder ir almacenando los resultados del vector «dist1» hemos tenido que crear una estructura nueva de datos para poder ir almacenando esta información, llamada DIST, con la siguiente estructura:

DIST(numGlo).PVA(1:9)=[dist1, 0, 0, $\dot{dist1}$, 0, 0, $\ddot{dist1}$, 0, 0] Se utiliza para incluir en una estructura de datos los valores posición, velocidad y aceleración de dist1.

Y al igual que en el caso anterior, se crearan las estructura FI y POI, las cuáles sus funciones fueron explicadas anteriormente.

La subrutina para la solución de este grupo, sigue la misma estructura de la subrutina del grupo SG 3R2DREL.

A continuación se mostrarán los resultados en MATLAB para una mejor visualización.

Giro del eslabón 4 con respecto al eslabón 2 ($\times 1,0e + 002$)	
φ_2	φ_4
Fi2	Fi4
60	60
70	70
80	80
90	90
100	100
110	110
120	120
130	130
140	140
150	150
160	160
170	170
180	179
190	-530
200	-520

Este mecanismo tiene una posición singular cuando las barras dos y cuatro se encuentran en posición horizontal, es decir, cuando están tienen un giro de cero grados o de 180 grados. Se observa claramente que el mecanismo una vez que pasa por esta posición hace un movimiento no controlado.

Evolución de la variable Dist1 ($\times 1,0e + 002$)			
φ_2	Dist1	<i>Dist1</i>	<i>Dist1</i>
60	9.000	0.0000	0.0000
65	9.000	0.0000	0.0000
70	9.000	0.0000	0.0000
75	9.000	0.0000	0.0000
80	9.000	0.0000	0.0000
85	9.000	0.0000	0.0000
89	9.000	0.0000	0.0000

Observamos en los resultados, que efectivamente tal y como comentamos en el capítulo anterior, para que este mecanismo se pueda mover de manera controlada, el valor de Dist1, es decir, la distancia variable entre el punto uno y el punto cinco tiene que coincidir con la distancia fija entre los bastidores dos y seis. También se observa que al ocurrir esto, tanto la velocidad y aceleración de este vector es nula.

Se observa que el mecanismo al alcanzar la posición vertical, la barra cinco se encuentra en una posición singular de bifurcación, teniendo un movimiento no controlado.

Evolución de la variable Dist1 ampliado en la zona de bifurcación			
φ_2	Dist1	<i>Dist1</i>	<i>Dist1</i>
89.85	9.000	0.0000	0.0000
89.90	9.000	0.0000	0.0000
89.95	9.000	0.0000	0.0000
89.99	9.000	0.0000	0.0000
90	9.000	50.000	-6.23e+9

4.6. Aplicación al análisis para un mecanismo con diferentes tipos de singularidades combinadas.

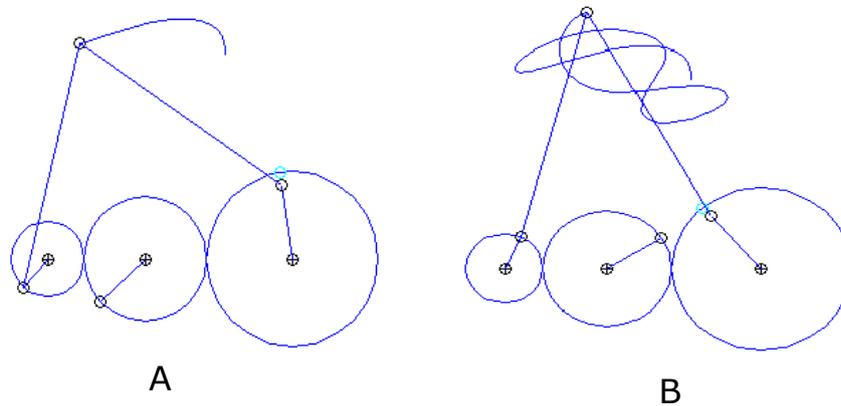


Figura 4.7: A:Mecanismo en el tiempo inicial del movimiento. B:Mecanismo en el instante final del movimiento.

A lo largo de este trabajo hemos visto las soluciones y aplicaciones que se han hecho a las singularidades estudiadas por separado, por lo que en este último mecanismo, se ha planteado la idea de ver la solución a un mecanismo con más de una singularidad de las que hemos estudiado.

Este mecanismo está formado por tres ruedas en posición de tren ordinario entre ellas, con una diada anclada en la rueda 1 y en la rueda 3. Observaremos como evoluciona el mecanismo al aplicar las soluciones ya obtenidas anteriormente según el tipo de singularidad que tenga.

En la Figura A se observa el mecanismo en el instante que está iniciando su movimiento, en la figura B, se observa la trayectoria recorrida por el punto durante todo su movimiento.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones sobre los casos estudiados, así como sus resultados, para el análisis cinemático de los mismos. También se citan una serie de mejoras para una futura continuación del estudio iniciado en este proyecto.

- Se ha empleado una formulación matemática para el análisis cinemático de los casos estudiados, basada en el criterio de Grübler en la que estudiaremos para cada caso si se cumplen sus criterios de movilidad
- De cada cada mecanismo estudiado, se ha propuesto una solución o alternativa cinemática al problema de movilidad que presentaba el criterio de Grubler.
- Para la solución cinemática de cada mecanismo, se ha usado el método de formulación matricial Newton-Rapson o bien por el método de derivación directa.
- Se han empleado programa computacional MATLAB para la una mejor visualización de los resultados obtenidos.
- Para la solución de los mecanismos en el programa computacional se ha empleado la solución por ecuaciones de grupo, la cual se ha individualizado según la singularidad que presentaba el mecanismo.

5.1. Resultados de los ensayos

Primero decir que no se observan errores acumulativos en ningún caso estudiado. Esto confirma, dado que los programas se basan en un análisis cinemático y la eficacia de la formulación implementada. A continuación estudiaremos caso por caso:

- Cuadrilátero con articulación múltiple: Se observa que al separar el mecanismo en los grupos estructurales correspondientes y contabilizar un par menos en la articulación múltiple tal como se explico en el capitulo 3, el mecanismo no presenta ningún fallo.
- Rodadura Pura: Para la solución de este mecanismo se uso el método de derivación directa, ya que este mecanismo implementaba una ecuación mas por cierre de cadena, lo cual nos facilito obtener la solución. Como se observan en todas las gráficas son totalmente coherentes, los resultados son los esperados.

- Doble Paralelogramo: Tal y como muestra el capítulo anterior, este mecanismo presenta 2 posiciones singulares, cuando los eslabones 3, 4 y 5 se encuentran en una posición vertical, ya sea cuando tengan 90 grados o 270 grados, o bien, cuando estos mismos eslabones se encuentren en una posición horizontal, 0 o 180 grados. Tal y como se observa en el capítulo de resultados, cuando este mecanismo alcanza alguna de estas posiciones, tiene un movimiento impredecible y no controlado.

Bibliografía

- [1] D. B. P. Saravia, M. J. H. Lopez, H. F. Q. Riaza, Revisión del estado del arte de manipuladores paralelos, *Scientia Et Technica* 15 (2009) 81–86.
- [2] O. S. Picon, Síntesis, análisis y diseño de manipuladores paralelos de baja movilidad, Master's thesis, Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea (2008).
- [3] C. Gosselin, J. Angeles, Singular analysis of closed-loop kinematic chains, *Transactions on Robotics and Automation* 6 (1990) 281–290.
- [4] Y. Takeda, H. Funabashi, Kinematics and static characteristics of inparallel actuated manipulators at singular points and in their neighborhood, *JSME International Journal* 39 (1996) 85–93.
- [5] L. Tsai, *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, Wiley-Interscience New York, 1999.
- [6] L.-W. Tsai, G. Walsh, R. Stamper, Kinematics and workspace of a novel three dof translational plataform, *Institute for Systems Research* 8 (1996) 74–93.
- [7] A. Majarena, J.Santolaria, D.Samper, J.J.Aguilar, Identificación de parámetros cinemáticos de una plataforma paralela pan-tilt basada en cinemática inversa y directa, Master's thesis, Universidad de Zaragoza (2003).
- [8] H. A. C. Hernandez, Desarrollo de la plataforma stewart basada en microcontroladores, para simular el comportamiento de una aeronave en tres grados de libertad, Master's thesis, Universidad de México DF, Unidad Ticomán (2013).
- [9] J. Gallardo-Alvarado, J. M. R. Martínez, H. Orozco-Mendoza, Un algoritmo para resolver la cinemática directa de plataformas goughstewart tipo 6-3, *Computación y Sistemas* 8 (2004) 132–149.
- [10] J. M. R. Martínez, *Introducción a la Cinemática de las Máquinas.*, División de Ingenierías, Universidad de Guanajuator., 2015.
- [11] J. B. Ramírez, *Análisis y síntesis estructural. Conceptos generales.*, Oulu, Finland., 2007.
- [12] S. C. Foix, *Teoría de máquinas.*, 1st Edition, Universitat Politècnica de Catalunya., 2001.
- [13] A. C. Ramírez, *Cinemática de las máquinas.*, Universidad autónoma de San Luis Potosí., 2005.
- [14] E. Haug, *Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems*, Allyn and Bacon, Boston, MA, 1989.

- [15] J. G. de Jalón, E. Bayo, Kinematic Simulation of Multibody Systems, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [16] P. Nikravesh, Computer Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [17] M. kolovsky, A. Evgrafov, Y. Semenov, A. Slousch, Advanced theory of mechanism and machines, Springer, 2000.
- [18] T. Mruthyunjaya, Kinematic structure of mechanisms revisited, Mechanism and Machine Theory 38 (2003) 279–320.