

Análisis de la influencia del factor de giro en el problema de persecución-evasión en sistemas autopropulsados

(Recibido: 30/04/2016; Aceptado: 01/07/2016)

Caravaca, M.¹; Gimeno, F.¹; Soto-Meca, A.¹

¹Centro Universitario de la Defensa, Academia General del Aire

C/ Coronel López Peña s/n, 30720, San Javier

Teléfono: 968189979

Email: manuel.caravaca@ cud.upct.es

Resumen. En este trabajo se estudia el problema de caza-evasión de dos sistemas autopropulsados que se desplazan en un espacio bidimensional. El objetivo del perseguidor es situarse en la posición óptima para capturar al evasor, mientras que la estrategia del evasor consiste en evitar esa situación. El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que se obtiene se ha resuelto numéricamente mediante el Método de Simulación por Redes. Se ha analizado el efecto del factor de giro para un problema concreto. La eficiencia del Método de Simulación por Redes lo convierte en una alternativa óptima para el estudio de modelos complejos de caza-evasión.

Palabras clave. caza-evasión, Método de Simulación de Redes, simulación numérica.

Abstract. In this work the pursuit-evasion problem of two self-propelled systems moving in a bidimensional space is studied. The aim of the pursuer is to situate itself at the optimal position to capture the evader, meanwhile the strategy of the evader is to avoid that situation. The coupled differential equations obtained have been solved numerically by using the Network Simulation Method. The effect of the turning factor has been analyzed. The Network Simulation Method efficiency becomes an optimal alternative for the study of complex pursuit-evasion models.

Keywords. Pursuit-evasion, Network Simulation Method, numerical simulations.

1. Introducción

Los fenómenos de persecución y evasión aparecen en una gran cantidad de sistemas complejos, tanto biológicos, como captura de presas, luchas por territorio o comportamiento de apareamiento; en sistemas ingenieriles como sistemas robóticos o teoría de control; o en sistemas militares como el combate aéreo o el auto-guiado de misiles. Las estrategias de caza y evasión son un campo de estudio aplicable a las tecnologías de doble uso.

Se conocen diferentes estrategias de persecución y de evasión; cada estrategia se basa en una diferente ley diferencial de comportamiento. Ejemplos comunes son la persecución clásica, el movimiento de camuflaje o de orientación constante. En el caso de comportamientos de evasión encontramos la evasión clásica, de movimiento aleatorio o la detección óptica (Justh & Krishnaprasad, 2006; Wei, Justh, & Krishnaprasad, 2009).

En este estudio se analiza una estrategia de persecución por movimiento de camuflaje frente a la estrategia de evasión clásica (Pais & Leonard, 2010). El perseguidor (P) y el evasor (E) son partículas autopropulsadas a velocidad constante que se desplazan en el plano xy de acuerdo a sus estrategias de movimiento, que vienen dadas por un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. La velocidad de P siempre es superior a la de E, ya que esa condición garantiza que siempre se producirá el alcance. Para

un radio de captura $\varepsilon > 0$, y para los vectores de posición inicial de P y E, $\vec{r}_P(0)$ y $\vec{r}_E(0)$, tales que $|\vec{r}(0)| = |\vec{r}_P(0) - \vec{r}_E(0)| > \varepsilon$ existe siempre un tiempo finito de captura T tal que $|\vec{r}(0)| = \varepsilon$ (Justh & Krishnaprasad, 2006; Pais & Leonard, 2010).

La estrategia de movimiento de camuflaje es una estrategia de persecución en la cual P se dirige hacia E de forma que se mantiene constante el ángulo de aproximación. Con esta estrategia el perseguidor parece estacionario desde el punto de vista de la presa (movimiento de paralaje nulo), a excepción del cambio de tamaño de la sección transversal. Si este efecto es despreciable debido a sus dimensiones frente a la distancia, como es el caso de un caza o de un misil, el evasor es incapaz de discernir el movimiento del agresor, que aparece estacionario frente al fondo (Rawlins, 2011). Asimismo, la ley de control de la evasión clásica conduce al evasor hacia una trayectoria que se aleja directamente del perseguidor, alineando el vector velocidad con la línea de unión de ambos (Scott & Leonard, 2013).

Estas dos leyes de control de movimiento se han planteado y resuelto numéricamente mediante el Método de Simulación por Redes (*Network Simulation Method*, NSM), método numérico basado en la analogía eléctrica de los procesos de transporte (Horno Montijano, 2002). La versatilidad, eficiencia y potencia computacional del NSM frente a otros métodos como Runge-Kutta (RK) o Bulirsch-Stöer (BS) facilita la resolución de sistemas de ecuaciones

diferenciales complejos. Por ejemplo el NSM resulta 100 veces más rápido que el RK, mientras que BS es incluso más lento. (Caravaca, Sanchez-Andrada, Soto, & Alajarin, 2014)

A continuación se exponen las ecuaciones diferenciales del movimiento del perseguidor. Estas leyes de control, basadas en el movimiento de camuflaje, son (Wei et al., 2009):

$$\frac{dx_p}{dt} = \cos \theta_p \quad (1)$$

$$\frac{dy_p}{dt} = \sin \theta_p \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_p}{dt} = -\frac{\mu}{\sqrt{(x_p - x_E)^2 + (y_p - y_E)^2}} \left[(x_p - x_E)(v \sin \theta_E - \sin \theta_p) - (y_p - y_E)(v \cos \theta_E - \cos \theta_p) \right] \quad (3)$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento del evasor, basadas en la evasión clásica (Wei et al., 2009), son:

$$\frac{dx_E}{dt} = v \cos \theta_E \quad (4)$$

$$\frac{dy_E}{dt} = v \sin \theta_E \quad (5)$$

$$\frac{d\theta_E}{dt} = \frac{\mu}{\sqrt{(x_p - x_E)^2 + (y_p - y_E)^2}} (x_p - x_E)(\sin \theta_E) - (y_p - y_E)(\cos \theta_E) \quad (6)$$

En estas expresiones (x_p, y_p) y θ_p son la posición cartesiana y el ángulo de orientación del perseguidor, mientras que (x_E, y_E) y θ_E representan, correspondientemente, la posición y orientación del evasor. El parámetro μ es una constante de control de dirección y v es la relación de velocidades entre el evasor y el perseguidor. Como la velocidad del perseguidor está normalizada a 1, v será siempre menor que 1 para cumplir la condición de alcance. El parámetro de control de dirección μ (rad/m) depende del tipo de mecanismo autopropulsado. Cada sistema tiene un valor diferente que dependerá de las características técnicas del vehículo. En nuestro ejemplo se ha elegido el mismo valor de μ para el perseguidor y el evasor y se estudiarán diversos valores para localizar el que sea compatible con el comportamiento real del F-5.

Las condiciones iniciales del evasor se eligen en el origen de coordenadas con ángulo inicial nulo, y las coordenadas y ángulo del perseguidor se eligen al azar. En nuestras simulaciones se han escogido los valores $x_p(0) = 1$, $y_p(0) = 1$ y $\theta_p(0) = \pi$ y $v = 0.5$. El valor de μ se ha probado con valores entre 1 y 10 para encontrar el más cercano a las condiciones reales de giro a velocidad máxima de los aviones de caza.

2. Método de Simulación por Redes

El método de simulación por redes es un método numérico que establece una analogía formal entre un sistema de ecuaciones diferenciales y una red eléctrica. El origen de esta metodología se encuentra en los primeros años setenta, desarrollada a partir del estudio de sistemas termodinámicos a través de los algoritmos conocidos como *network thermodynamics* (Oster, Perelson, & Katchalsky, 1973). A día de hoy, su aplicación a diferentes campos resulta muy extendida, incluyendo estudios de transferencia de calor, difusión-reacción y estudio de esquemas cinéticos complejos en sistemas químicos, flujo de aguas subterráneas, problemas inversos o sistemas ecológicos, entre otros. En general, este procedimiento resulta una alternativa eficiente para resolución de problemas de ecuaciones diferenciales (Horno Montijano, 2002). Entre las ventajas que presenta, destaca la selección automática del tiempo de paso en la simulación. En los últimos años, se ha empleado con éxito en el estudio de esquemas cinéticos químicos complejos, donde las simulaciones se han llevado a cabo aproximadamente 100 veces más rápido que las simulaciones mediante algoritmos de Runge-Kutta de cuarto orden (Caravaca et al., 2014). En otros trabajos, el método de redes se establece como un procedimiento rápido y estable para el estudio de una gran variedad de sistemas dinámicos (Hewlett & Wilamowski, 2011). En concreto, las subrutinas de tipo Gear que emplea Pspice adquieren ventaja con respecto a la ODE45 de Matlab en el estudio de sistemas caóticos y, sobre todo, en problemas de tipo *stiff*, donde la comparación en tiempo es de minutos frente a años. Otras subrutinas más eficientes de Matlab, como la ODE15s, ofrecen resultados similares en tiempo de simulación con respecto a PSpice incluso en el problema *stiff*, pero resultan estables sólo cuando se definen los parámetros de la subrutina adecuadamente, tarea que, en primera instancia, no resulta evidente. Pspice, por su parte, no presenta este problema. Por todo ello, se le considera un método versátil y rápido, y una eficiente alternativa para el estudio de sistemas dinámicos complejos.

Para resolver por medio del NSM el problema de persecución-evasión, ecuaciones 1-6, es necesario diseñar, en primera instancia, el modelo de red eléctrica equivalente al problema matemático, para después simular el circuito mediante un software adecuado de análisis de circuitos, tal como PSpice. Para diseñar la red eléctrica, primeramente se asigna un circuito eléctrico independiente a cada ecuación diferencial del modelo, que estará conectado con el resto de circuitos a través de un nodo común. Por lo tanto, el problema global equivale a una red eléctrica que contiene tantos circuitos como ecuaciones, en este caso cuatro. Cada sumando de cada ecuación diferencial se considera como una rama de corriente que converge en un nodo apropiado, en el cuál se satisface la ley de los nodos de Kirchhoff. Debido al signo matemático de los sumandos de cada ecuación,

sus corrientes asociadas serán de dos tipos: ramas de corriente entrantes (signo negativo) y salientes (signo positivo). La analogía eléctrica establece que, para el problema que nos ocupa, el voltaje de dicho nodo es precisamente el valor de la variable que aparece en la derivada temporal de cada ecuación.

Cada rama de corriente de la red se implementa mediante un determinado dispositivo eléctrico. En general, se emplean tres:

Un condensador, asociado a la derivada de la variable en las ecuaciones (1-6). La corriente I_c en los extremos del capacitor es $I_c = C dV/dt$, por lo que las derivadas de cada una de nuestras ecuaciones pueden modelarse con un condensador de 1F, con corriente saliente, dado que sus signos se tomarán siempre como positivos.

Fuentes de corriente controladas por voltaje. Estos dispositivos permiten definir en su circuito una función que dependa de cualesquiera voltajes de la red, aun cuando se encuentren en otros circuitos. De este modo, todos los sumandos que sean función de una o más de las variables incógnita de las ecuaciones diferenciales pueden modelarse sencillamente con estas fuentes. Para el criterio de signos, atenderemos al signo global del sumando en la ecuación.

Un resistor de valor muy alto, que se emplea únicamente para garantizar la convergencia en el circuito.

Con todos estos elementos estamos en disposición de modelar por completo el equivalente eléctrico del problema (1-6). Como ejemplo, tomemos la ecuación (6), que reescribimos en la forma de la ley de Kirchoff de los nodos $\sum I_i = I_1 + I_2 = 0$:

$$I_1 = \frac{d\theta_E}{dt}$$

$$I_2 = - \frac{\mu}{\sqrt{(x_p - x_E)^2 + (y_p - y_E)^2}} \cdot [(x_p - x_E)(\text{sen } \theta_E) - (y_p - y_E)(\text{cos } \theta_E)]$$

Como se observa en la Figura 1, el circuito asociado a esta ecuación contiene un condensador de capacidad 1F conectado a tierra. Por lo tanto, el voltaje del nodo es precisamente el valor de θ_E , y la corriente es saliente. El otro sumando es una función compleja de las variables del problema. No tenemos más que implementar dicha función en la fuente de corriente controlada por voltaje, G y, finalmente, acoplar el circuito global a la tierra común. Debido a su signo, la corriente de la fuente es entrante hacia el nodo. Para terminar el circuito, colocamos el resistor de alto valor en la última rama en paralelo, tal y como se muestra en la figura 1.

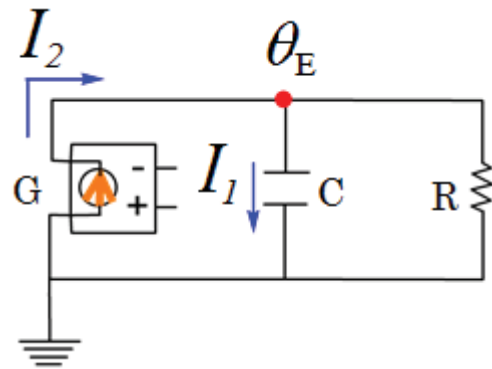


Figura 1. Circuito eléctrico equivalente a la ecuación diferencial (6).

Para completar la red, repetiremos el proceso para cada ecuación, y así tendremos una red eléctrica con seis circuitos principales, de dos nodos cada uno: uno común (tierra) y el nodo independiente cuyo voltaje es, en cada momento, el valor de la variable independiente. Tras este proceso, únicamente hemos de fijar los valores iniciales de los condensadores.

3. Resultados

En esta sección se muestran los resultados de la persecución y evasión detallados en los apartados anteriores. En la Figura 2 se muestra el mapa de persecución en dos dimensiones correspondiente a la estrategia de persecución en movimiento de camuflaje y evasión clásica. La curva negra corresponde al persecutor y la roja al evasor. A raíz de los resultados se observa que el movimiento de ambos cumple el tipo de trayectoria prevista. El evasor, a partir del inicio, gira rápidamente para escapar del perseguidor y, en algunos determinados instantes cambia repentinamente su trayectoria para seguir alejándose, lo que es compatible con la evasión clásica. Por su parte, se observa como el perseguidor mantiene un paralaje aproximadamente constante con un acercamiento permanente al blanco, coherente con el movimiento de camuflaje.

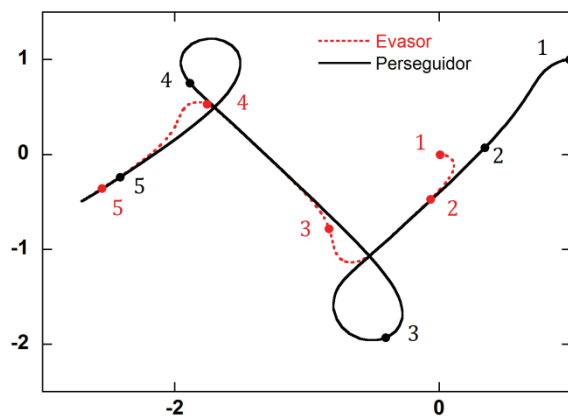


Figura 2. Mapa de persecución-evasión en 2D para las estrategias de persecución por movimiento de camuflaje (curva negra sólida) y evasión clásica (curva roja punteada), con $\mu = 5$.

Sin embargo, resulta necesario adecuar el parámetro μ a situaciones reales de persecución entre aviones,

de manera que el radio de giro de los *loops* de persecución represente una situación realista. A este efecto, se ha realizado un barrido del parámetro μ para el caso real de persecución de aviones del tipo F-5, dentro del entorno del Ejército del Aire del Ministerio de Defensa. Supondremos que ambos aviones son iguales, y que el persecutor opera a una velocidad de 166 m/s, para la cual el radio mínimo de giro es, en media, de 500 m. Dado que en las ecuaciones 1-6 la velocidad está normalizada a 1, ello implica que cada unidad en las gráficas corresponde a 166 m. Por lo tanto, en la Figura 2 el radio de giro corresponde, aproximadamente, a 66,4 m, lejos del valor real. Tras realizar el barrido, se ha encontrado que $\mu = 2.5$ otorga un valor mínimo cercano a 500 m para los loops en el mapa de persecución, tal y como se observa en la Figura 3. Este valor se establece como el mínimo deseable para el estudio teórico de los aviones de tipo F-5.

Las simulaciones se han comparado con las subrutinas ODE45 y ODE15s de Matlab. Para tiempos de persecución largos, PSpice es más de 10 veces más rápida que ODE45, mientras que ODE15s ejecuta el problema en el mismo orden de magnitud, tras una laboriosa selección de los parámetros.

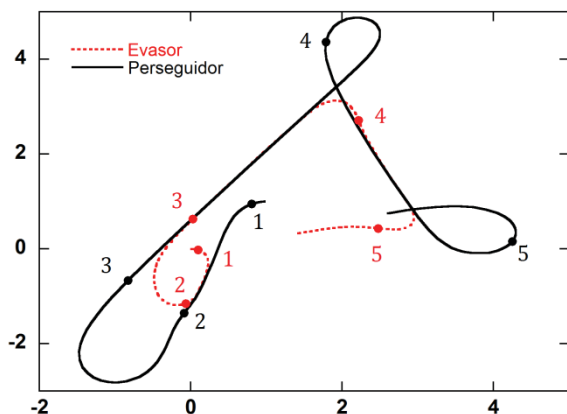


Figura 3. Mapa de persecución-evasión en 2D para las estrategias de persecución por movimiento de camuflaje (curva negra sólida) y evasión clásica (curva roja punteada), con $\mu = 2.5$.

4. Conclusiones

Se ha realizado un estudio de la influencia del parámetro de giro en el problema de persecución-evasión en sistemas autopropulsados. Como novedad, se ha adecuado el problema a un caso real del entorno de las Fuerzas Aéreas Españolas. Las simulaciones numéricas, realizadas mediante el Método de Simulación por Redes, indican que la elección precisa del parámetro de giro es crucial para una correcta descripción del problema. En concreto, para aviones del tipo F-5 el valor óptimo es $\mu = 2.5$. Como objetivo futuro se pretende implementar el modelo para situaciones en tres dimensiones con efecto de resistencia del aire, y particularizar el estudio para diferentes sistemas autopropulsados.

Referencias

- [1] Caravaca, M., Sanchez-Andrada, P., Soto, A., & Alajarin, M. (2014). The network simulation method: a useful tool for locating the kinetic-thermodynamic switching point in complex kinetic schemes. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 16(46), 25409–25420.
- [2] Hewlett, J. D., & Wilamowski, B. M. (2011). SPICE as a fast and stable tool for simulating a wide range of dynamic systems. *International Journal of Engineering Education*, 27(2), 217.
- [3] Horno Montijano, J. (2002). *Network simulation method*. Research Signpost.
- [4] Justh, E. W., & Krishnaprasad, P. S. (2006). Steering laws for motion camouflage. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 462(2076), 3629-3643. <http://doi.org/10.1098/rspa.2006.1742>
- [5] Oster, G. F., Perelson, A. S., & Katchalsky, A. (1973). Network thermodynamics: dynamic modelling of biophysical systems. *Quarterly reviews of Biophysics*, 6(01), 1–134.
- [6] Pais, D., & Leonard, N. (2010). Pursuit and Evasion: Evolutionary Dynamics and Collective Motion. En *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. Recuperado a partir de <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2010-7584>
- [7] Rawlins, A. D. (2011). A Note on a Camouflage Pursuit Problem. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 64(1), 47-56. <http://doi.org/10.1093/qjmam/hbq022>
- [8] Scott, W., & Leonard, N. E. (2013). Pursuit, herding and evasion: A three-agent model of caribou predation. En *American Control Conference (ACC), 2013* (pp. 2978-2983). <http://doi.org/10.1109/ACC.2013.6580287>
- [9] Wei, E., Justh, E. W., & Krishnaprasad, P. S. (2009). Pursuit and an evolutionary game. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 465(2105), 1539-1559. <http://doi.org/10.1098/rspa.2008.0480>