

# Simulación numérica del modelo de consolidación no lineal de Davis y Raymond

(Recibido: 26/04/2016; Aceptado: 22/06/2016)

García, G.; Alhama, I.

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos y de Ingeniería de Minas  
Unidad Predepartamental de Ingeniería Civil. Paseo Alfonso XIII 52, 30203 Cartagena  
email: gonzalo.garcia@upct.es

**Resumen.** La ecuación de gobierno que define el proceso de consolidación en suelos saturados viene regida por el coeficiente de consolidación  $c_v$ , de manera que, a valores mayores del mismo, el proceso de consolidación por disipación del exceso de presiones intersticiales es más rápido. El modelo de consolidación no lineal de Davis y Raymond asume que el valor de este coeficiente permanece constante durante todo el proceso, pero no así las propiedades del suelo de las cuales depende su valor. Empleando el método de redes, se ha resuelto numéricamente este modelo, obteniéndose soluciones muy precisas, con tiempos de computación mínimos.

**Palabras clave.** Consolidación de suelos; grado de consolidación promedio; no linealidad; presiones intersticiales.

**Abstract.** The governing equation that defines the consolidation process in saturated soils is governed by the coefficient of consolidation  $c_v$ , so that, for higher values of this, the consolidation process by dissipation of the excess pore pressure is faster. The nonlinear model of consolidation by Davis and Raymond considers that the value of this coefficient remains constant throughout the whole process, but not the soil properties of which depends on its value. Using the network method, the model has been solved numerically, obtaining very accurate solutions, with very low computing times.

**Keywords.** Average degree of settlement; nonlinearity; pore pressure; soil consolidation.

## 1. Introducción

La aplicación de cargas en la superficie de un depósito de suelo saturado provoca, inicialmente, un exceso de presión intersticial en el volumen de agua contenido en los poros del suelo, el cual comienza a disiparse de forma paulatina, de manera que las cargas pasan a ser soportadas por las partículas del suelo, a medida que aumenta la tensión efectiva. Este fenómeno es conocido en ingeniería civil como “consolidación de suelos”, ya que a medida que el exceso de presión intersticial disminuye, parte del agua contenida en los poros abandona los mismos, experimentándose una disminución del espesor de las capas de suelo, o lo que es lo mismo, un asentamiento.

Para el caso de consolidación unidimensional (hipótesis de carga uniformemente distribuida y expulsión de parte del agua intersticial a través de la superficie del terreno), Davis y Raymond (1965) proponen que el coeficiente de consolidación vertical que rige la ecuación de gobierno se mantiene constante durante todo el proceso de consolidación, pero no así las propiedades del suelo que determinan su valor. La Fig. 1 muestra un esquema físico del proceso de consolidación.

El coeficiente de consolidación vertical de un suelo viene definido por la expresión

$$c_v = \frac{k_v}{\gamma_w m_v} \quad (1)$$

donde  $k_v$  es la permeabilidad del suelo (conductividad hidráulica),  $\gamma_w$  la densidad del agua y  $m_v$  el coeficiente de compresibilidad volumétrico, definido como

$$m_v = -\frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial \sigma'} \quad (2)$$

siendo  $e$  el índice de poros (o relación de vacíos) del suelo y  $\sigma'$  la tensión efectiva del mismo. En cuanto al modelo de deformación del suelo, Davis y Raymond adoptan una relación  $e-\log_{10}\sigma'$ , ya que ésta se ajusta bien a los resultados obtenidos en pruebas edométricas para arcillas normalmente consolidadas.

$$e = e_0 - I_c \log_{10} \left( \frac{\sigma'}{\sigma'_0} \right) \quad (3)$$

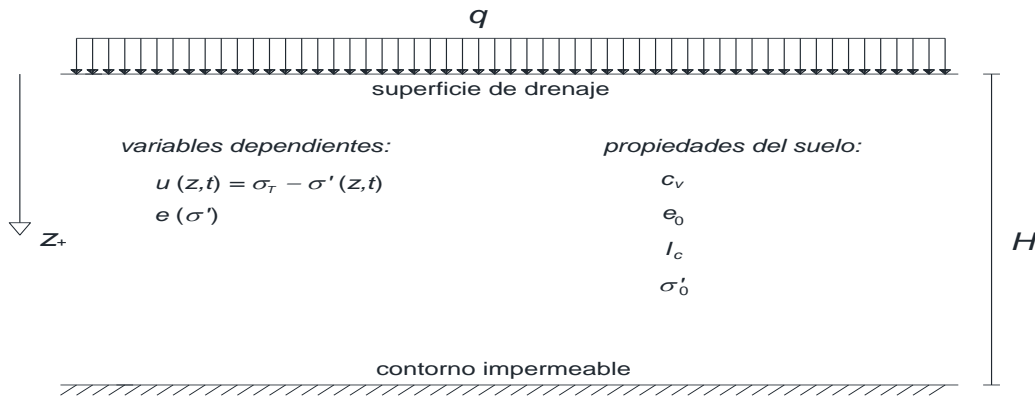


Fig. 1. Esquema físico del proceso de consolidación. Principales variables y parámetros.

donde  $e_0$  y  $\sigma'_0$  son los valores iniciales del índice de poros y tensión efectiva del suelo, antes de aplicar la carga, e  $I_c$  es el índice de compresión (pendiente de la recta  $e-\log_{10}\sigma'$ ). De esta manera, sustituyendo la ecuación (3) en la ecuación (2) y operando, tenemos que el coeficiente de compresibilidad volumétrico  $m_v$  varía en función de la tensión efectiva en la forma

$$m_v = \frac{I_c}{\ln(10)(1 + e)\sigma'} \quad (4)$$

Así, la permeabilidad del suelo  $k_v$  en este modelo dependerá de la tensión efectiva de la misma forma que  $m_v$ .

## 2. Modelo no lineal de Davis y Raymond. Ecuaciones matemáticas

Igualando la variación del volumen de agua respecto de la profundidad (variable espacial) con la variación de la deformación unitaria respecto del tiempo, y bajo las hipótesis anteriormente expuestas, se obtiene la ecuación diferencial de consolidación no lineal de Davis y Raymond:

$$c_v \left[ \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{\sigma'} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sigma'} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5)$$

donde  $u$  es el exceso de presión intersticial del agua residente en los poros del suelo, variable dependiente de la profundidad y del tiempo y que, según el principio de Terzaghi, es igual a la diferencia entre la tensión total existente en el suelo y la tensión efectiva. La expresión (5) es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, de segundo grado en la primera derivada y con coeficientes no constantes. A diferencia del modelo de Terzaghi (1943) – donde además de considerar constante el coeficiente de consolidación  $c_v$ , también se asumen invariantes la permeabilidad y el coeficiente de compresibilidad –, la aparición de coeficientes no constantes en al menos un sumando, además de la existencia de una derivada primera de grado distinto a la unidad, determinan la no linealidad de la ecuación diferencial y, por tanto, una resolución y una

interpretación más compleja de los fenómenos físicos que acontecen en el suelo durante el proceso de consolidación.

Como condiciones de contorno tenemos, en primer lugar, la condición de drenaje libre en la superficie – condición de primera clase de Dirichlet –, lo que se traduce en un valor nulo del exceso de presión intersticial en dicha cota. Si tomamos el origen de profundidades en la superficie y con sentido positivo hacia abajo, tenemos

$$u_{(z=0,t)} = 0 \quad (6)$$

También, al asumir que el drenaje sólo ocurre en la superficie del terreno, tendremos una frontera impermeable en el fondo del suelo, lo cual se traduce en una variación nula del exceso de presión intersticial respecto de la profundidad, ya que no existe flujo de agua a través de ese borde – condición de segunda clase, homogénea de Neumann –. Si  $H$  es la altura total de la capa de suelo, esta condición se escribe en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial z} (z=H,t) = 0 \quad (7)$$

En cuanto a la condición inicial, se asume que el exceso de presión intersticial es, en cualquier punto del suelo, igual al valor de la carga aplicada en superficie. Siendo  $q$  la magnitud de esta carga, esta condición se traduce en

$$u_{(z,t=0)} = q \quad (8)$$

Con todo, las ecuaciones (5), (6), (7) y (8) constituyen el modelo matemático de consolidación no lineal de Davis y Raymond, para el cual estos autores obtuvieron expresiones semianalíticas tanto para el exceso de presión intersticial como para el grado de consolidación promedio.

### 3. Soluciones numéricas mediante el método de redes

Una vez obtenidas las ecuaciones de gobierno, se ha procedido a su resolución numérica mediante el Método de Simulación por redes (González-Fernández, 2002). Para ello, en primer lugar, se procede a la reticulación del problema, es decir, la división de la capa de suelo en celdas de pequeño espesor ( $\Delta z$ ). Se ha adoptado un total de 40 celdas, lo que asegura una respuesta fiable sin problemas de convergencia. Cada celda o elemento de volumen consta de un nodo central y dos nodos exteriores (adelantado y atrasado). El método de redes se basa en establecer la analogía que existe entre los distintos términos de las ecuaciones de gobierno y los

correspondiente de la ecuación) que se balancea con el resto de ramas (de los otros términos) en el nodo central de acuerdo con la topología de la ecuación. Cada rama contiene un elemento de circuito cuya ecuación constitutiva es la expresión matemática del término correspondiente, asumiendo la analogía establecida entre variables eléctricas y variables del proceso físico.

Así, una vez diseñado el circuito eléctrico, el problema puede ser resuelto mediante un código estándar de resolución de circuitos. El programa usado para la elaboración del circuito eléctrico es MATLAB, con el cual se han creado todas las sentencias necesarias para la escritura del archivo de texto, que será analizado por el código de simulación de circuitos Ngspice, un software libre para la

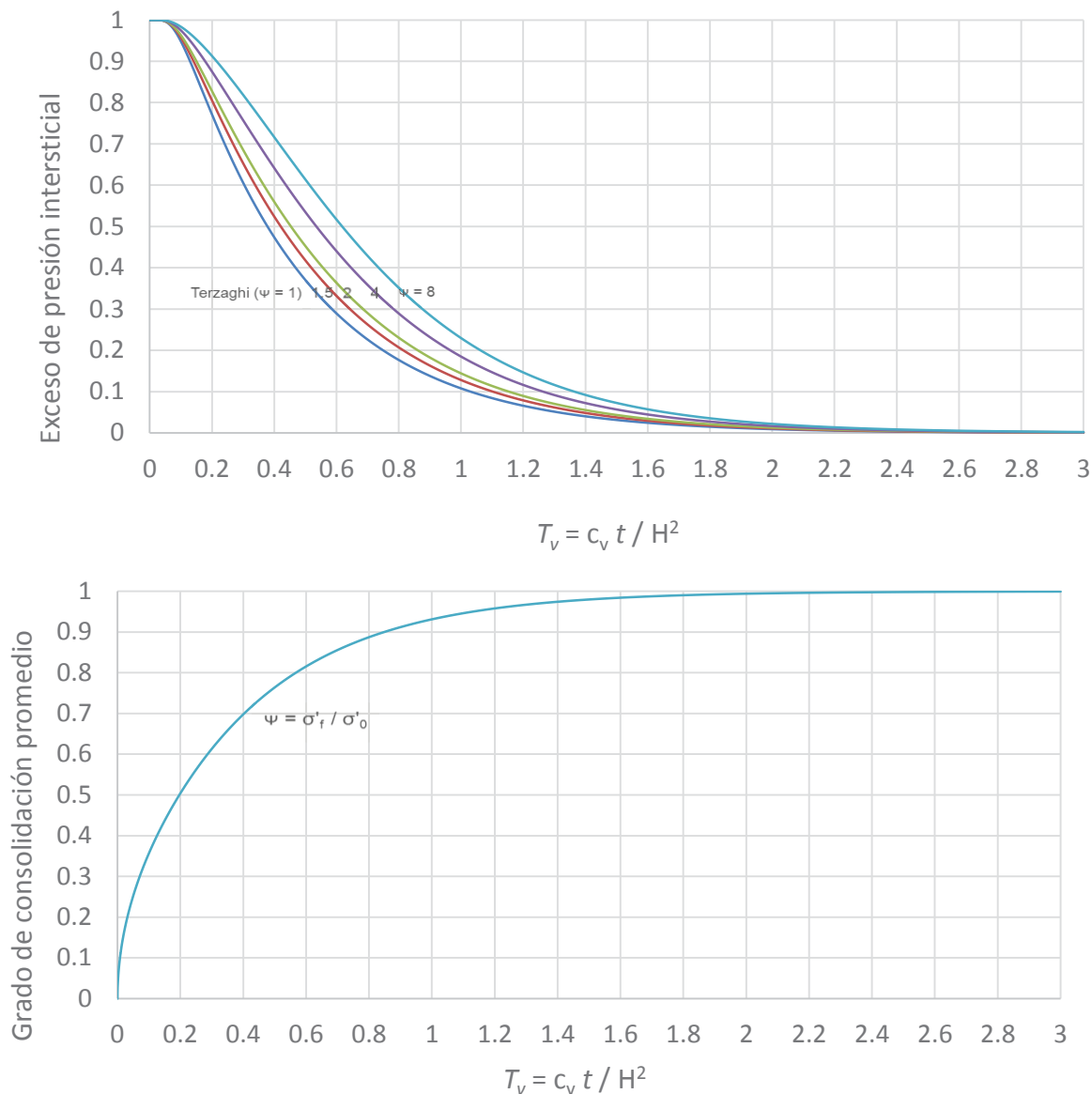


Fig. 3. Evolución del grado de consolidación promedio.

elementos o dispositivos que componen un circuito eléctrico (resistencias, generadores de corriente, fuentes o pilas generadoras de tensión y condensadores). Para implementar el modelo, cada término de la ecuación de gobierno se asume como la corriente de una rama (asociada al término

resolución de circuitos eléctricos. Una vez completada la simulación, los resultados son importados de nuevo a MATLAB, donde se procede a realizar las operaciones necesarias para el cómputo de los mismos y su representación gráfica.

La Fig. 2 es una representación gráfica de la evolución del exceso de presión intersticial en el fondo del dominio, es decir, en el punto más alejado de la superficie de drenaje y, por tanto, el lugar donde la disipación del exceso de presión ocurre más tarde. Los ejes de la Fig. 2 se han normalizado usando las referencias clásicas (carga en superficie y tiempo característico, para los ejes vertical y horizontal respectivamente). Como se puede observar, y a diferencia del modelo de consolidación lineal de Terzaghi, la evolución del exceso de presión intersticial depende del valor del escalón de carga adoptado, que viene representado por el factor adimensional  $\psi$ ,

$$\psi = \frac{\sigma'_f}{\sigma'_0} \tag{9}$$

donde  $\sigma'_f$  y  $\sigma'_0$  se corresponden con los valores de la tensión efectiva final e inicial del proceso, respectivamente. Se puede comprobar como para el límite  $\psi \rightarrow 1$  se obtiene la solución de Terzaghi.

La evolución del grado de consolidación promedio (relación entre el asiento total alcanzado en un tiempo dado respecto del asiento total al final de la consolidación) viene representada en la Fig. 3. A la vista de estos resultados, se observa como esta relación es independiente del escalón de carga aplicado, a pesar de que los asientos totales ( $S$ ) experimentados sí que varían, obviamente, con la carga aplicada, tal y como se puede ver en la Tabla 1, donde se recogen los resultados de varias simulaciones realizadas a un mismo suelo (con igual espesor inicial  $H$ , índice de poros inicial  $e_0$ , índice de compresión  $I_c$  y tensión efectiva inicial  $\sigma'_0$ ) para distintos escalones de carga ( $\psi$ ) adoptados. En la tabla también se incluyen los valores de la tensión efectiva final ( $\sigma'_f$ ) y el índice de poros final ( $e_f$ ). En todos los casos el tiempo de computación es del orden de 1 s., para un ordenador personal con procesador INTEL I7 y 8 GB de memoria RAM.

Tabla 1. Asientos obtenidos para un mismo suelo sometido a diferentes escalones de carga.

	$\psi = 1$ (teórico)	$\psi = 1.5$	$\psi = 2$	$\psi = 4$	$\psi = 8$
$H$ (m)	1	1	1	1	1
$e_0$	1	1	1	1	1
$I_c$	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33
$\sigma'_0$ (N/m <sup>2</sup> )	30.000	30.000	30.000	30.000	30.000
$\sigma'_f$ (N/m <sup>2</sup> )	30.000	45.000	60.000	120.000	240.000
$e_f$	1.00	0.94	0.90	0.80	0.70
$S$ (m)	0	0.029	0.050	0.100	0.150

### 4. Conclusiones

La rutina de cálculo y resolución numérica del modelo de consolidación no lineal de Davis y Raymond, basada en el método de redes, ha demostrado ser una herramienta muy precisa y rápida para obtener una amplia información acerca de la evolución de los asientos durante el proceso de consolidación de un suelo uniformemente cargado en su superficie. Los errores registrados son siempre inferiores al 0.5 % respecto de las soluciones semianalíticas existentes, margen muy aceptable dentro del campo de ingeniería civil. La herramienta programada permite conocer el valor del exceso de presión intersticial en cualquier instante y en cualquier profundidad del medio, el grado de

consolidación promedio y el valor del asiento total instantáneo y final. En definitiva, merced a su simplicidad, el método propuesto es un ventaja interesante para el ingeniero, muy remiso al uso de complejas expresiones matemáticas de desarrollos en series de convergencia más o menos rápida.

### Referencias

[1] Davis, E. H and Raymond, G. P. (1965). *A nonlinear theory of consolidation*. Geotechnique, pp. 161-173, vol. 15.  
 [2] González-Fernández. C.F. (2002). *Heat Transfer and the Network Simulation Method*. Ed. Research Signpost, Kerala.  
 [3] Terzaghi, K. (1943). *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley and Sons.