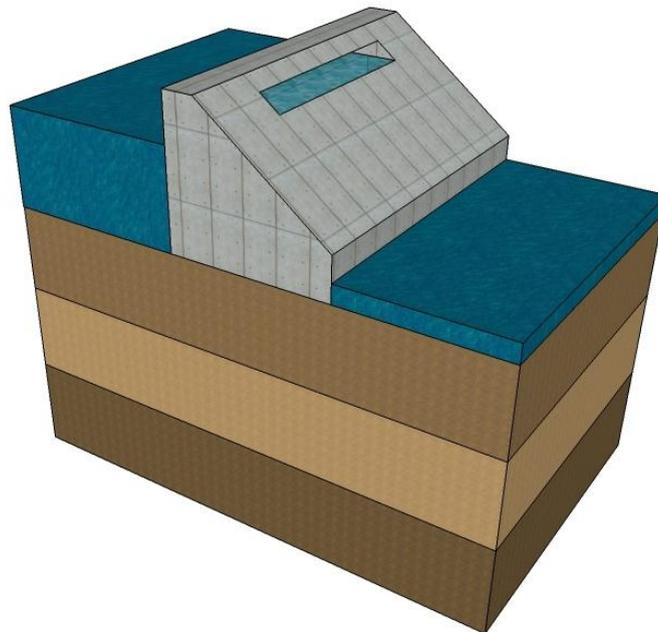




# ESTUDIO NUMÉRICO DEL CAUDAL DE AGUA SUBTERRÁNEA BAJO PRESA DE HORMIGÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE REDES

---

## TRABAJO FIN DE GRADO



**Autor: Juan Aguirre Cárcel**

**Directores: Iván Alhama  
Pablo Ortiz**

# Índice

Capítulo 1 Introducción y objetivos .....	2
1.1 Introducción .....	2
1.2 Objetivos .....	3
Capítulo 2 Fundamentos teóricos.....	5
2.1 Introducción.....	5
2.2 Ecuación de gobierno .....	10
2.3 Permeabilidad .....	14
2.4 Escenario.....	15
Capítulo 3 El método de simulación por redes (MESIR) .....	18
3.1 Introducción.....	18
3.2 Monopuertas básicas.....	20
3.3 El MESIR como método numérico .....	25
3.4 La simulación en Pspice .....	25
3.5 Rutinas de representación gráfica en Matlab.....	27
Capítulo 4 Modelo en red .....	29
4.1 Diseño de la celda elemental.....	29
4.2 Diseño de las condiciones de contorno .....	32
Capítulo 5 El programa de redes de flujo .....	36
5.1 Introducción de datos, geometrías y regiones .....	36
5.3 Archivo de texto del modelo (de extensión '.cir') .....	40
5.4 El proceso iterativo en MATLAB .....	45
Capítulo 6 Aplicaciones.....	51
6.1 Región finita/infinita .....	51
6.2 Curva de caudales .....	54
6.3 Comparación con otros métodos .....	56
6.4 Otras posibles aplicaciones.....	61
6.4.1 Escenario de presa y escenario de pantalla.....	61
6.4.2. Comprobación de la región finita/infinita. ....	74
Conclusiones .....	78
Resultados .....	79
Referencias .....	122

## Introducción y objetivos

### 1.1 Introducción

Este proyecto aborda numéricamente el estudio del flujo estacionario, 2-D, de agua subterránea bajo presas de hormigón, flujo producido por un gradiente piezométrico entre las regiones laterales de la presa (seepage flow).

Constituye el modelo matemático de este problema la ecuación de Laplace, cuyas soluciones analíticas o semi-analíticas, aun en casos sencillos (geometrías simples y medios isótropos), son de difícil y tedioso manejo al tratarse de desarrollos en series de convergencia más o menos lenta, (Harr, [1962] y Mandel, [1951]). Estas soluciones se complican si se trata de medios multicapa, de conductividad hidráulica anisótropa, o bien, si la geometría a la que se aplican las condiciones de contorno es compleja.

Otra forma de obtener la solución analítica es determinar las incógnitas de interés (caudal de infiltración, presiones en la base de la cimentación, presiones sobre las tablestacas, etc...) siguiendo un método gráfico. Éste se basa en la construcción de la llamada red de flujo, consistente en la representación sobre el dominio de un conjunto de curvas entrecruzadas, denominadas líneas equipotenciales y líneas de flujo, perpendiculares entre sí para medios isótropo.

Este trabajo propone una solución numérica muy precisa, basada en el "Método de Simulación por Redes" (MESIR), con el cual se realiza el diseño de un modelo en red del problema y su simulación en un código standard de resolución de circuitos. Por un lado, la aplicación de la ecuación de Laplace a una celda o volumen elemental del medio, convierte la ecuación en derivadas parciales en otra de diferencias finitas que constituye la base para el diseño del circuito eléctrico de la celda elemental (o modelo en red de ésta). Por otro lado, la asociación o conexión directa de estos modelos elementales hasta cubrir la geometría del dominio permite obtener el modelo en red de todo el medio. Finalmente, la implementación de las condiciones de contorno (también mediante componentes eléctricos adecuados) determina el modelo en red completo del problema. Con todo, se dispone de un circuito eléctrico cuyas ecuaciones son formalmente equivalentes a las del problema real y cuya solución en un código adecuado tal como Pspice, merced a los potentes algoritmos de computación matemática implementados en el mismo, sólo contiene errores asociados a la selección de un mallado finito.

Esta memoria presenta la siguiente estructura:

- 1º Capítulo: descripción de los objetivos.
- 2º Capítulo: breve recogida de los fundamentos teóricos del proceso de flujo de aguas subterráneas en medios porosos, ecuaciones constitutivas y de conservación que rigen estos problemas, condiciones de contorno y escenarios geométricos estudiados.
- 3º Capítulo: descripción de los fundamentos del método de redes.
- 4º Capítulo: diseño del modelo.
- 5º Capítulo: programa elaborado de redes de flujo.
- 6º Capítulo: aplicaciones.

Para terminar, se describe a modo de síntesis las conclusiones del trabajo.

## 1.2 Objetivos

- **Mejora de un programa en MATLAB** que permita definir la geometría y propiedades hidrológicas del medio, así como establecer una nomenclatura clara e intuitiva de las celdas, que constituyen el mallado elegido en cada región, y de los nudos (en el centro y en la frontera) de las mismas para el escenario de presa y presa con pantalla definido como problema de estudio.
- **Elaboración de una subrutina, en Matlab**, para la elaboración del archivo de texto del modelo, siguiendo las reglas de programación de Pspice, para conseguir los escenarios necesarios de simulación de una manera ágil y sistemática. Este archivo presentara el siguiente orden:
  - i) Enunciado, datos geométricos y físicos del problema a resolver, otros datos de interés para el usuario...
  - ii) Relación ordenada, por celdas, de los componentes (resistencias eléctricas) que constituyen del modelo
  - iii) Relación de las condiciones de contorno
  - iv) Circuitos auxiliares para cálculos específicos (con vistas a posteriores aplicaciones del programa)
  - v) Relación de las variables cuyos resultados de la simulación se requieren en forma tabulada
  - vi) Sentencias complementarias para la simulación.
- **Elaboración de un tercer programa o subrutina, también en Matlab**, que arranque el código de simulación (Pspice), lo ejecute y permita su lectura al archivo de salida de los resultados de la simulación.
- **Elaboración, por último, de un cuarto código o subrutina en Matlab**, capaz de leer los datos tabulados de la simulación y procesarlos convenientemente para su adecuada representación gráfica (patrones de líneas equipotenciales y de flujo dentro del dominio y a la escala conveniente).
- **Diseñar el modelo en red** de la celda elemental (único para todo tipo de problemas) y el modelo en red de las posibles +condiciones de contorno del problema.
- Incluir en la presente memoria **problemas ilustrativos y comparación con otras alternativas, tanto programas comerciales como procedimientos clásicos** de los diferentes casos abordados:
  - i) Presas simples
  - ii) Presas con tablestacas
- A partir de los datos resultantes del programa obtenido en Matlab se procede a la elaboración de una gráfica que nos permita **definir las regiones finita e infinita** a fin de reducir el escenario de presa.
- **Comprobación de la validez del ábaco.**
- Conseguir un mayor conocimiento de los procesos de infiltración bajo presa

- Desarrollo de un procedimiento automático para la creación de escenarios mediante la variación de sus variables geométricas y físicas.

### Fundamentos teóricos

#### 2.1 Introducción

A continuación relacionamos los aspectos teóricos más relevantes del flujo de agua en medios porosos que tiene lugar bajo presas de contención. Son numerosos los textos que recogen esta teoría y entre ellos cabe citar los siguientes: Berry y Reid [1993], Azizi [2000], Atkinson [2007], Taylor [1948], Das [2008] y González Vallejo [2005].

La presión intersticial que existe en un suelo con frecuencia no es la que corresponde a las condiciones hidrostáticas, sino aquella creada por el flujo de agua a través de los poros de suelo, como ocurre en las presas de hormigón sobre un estrato de suelo u otros escenarios de obras civiles. El agua se almacena a una altura determinada aguas arriba, la diferencia de nivel del agua entre los lados de la presa creará una filtración a través de la cimentación desde el lado de aguas arriba hasta el lado de aguas abajo. Cuando el flujo comienza, la presión intersticial en el suelo pasa de los valores iniciales a unos valores finales que deberán ser compatibles con las nuevas condiciones de frontera hidráulicas, y además con los cambios de volumen que se producen en la masa de suelo. Durante este periodo el flujo varía en función del tiempo y se denomina *flujo transitorio*. Cuando la presión intersticial en toda la masa de suelo se equilibra con las nuevas condiciones de frontera, el flujo se vuelve independiente del tiempo, y en ese caso se denomina *flujo estacionario*<sup>1</sup>.

Las presas de hormigón suelen ser muy extensas en una dirección como para poder asumir un comportamiento 2-D, que permite definir todas las variables del problema por unidad de longitud (o espesor) en la dirección seleccionada, sin perjuicio de la desviación de las soluciones en los extremos de la estructura.

Es interesante mencionar algunos casos históricos de fallos en presas por efecto del flujo de agua bajo las mismas (seepage flow). Uno de los casos más conocidos es el de la rotura de la presa de Puentes (Región de Murcia) el 2 de Abril de 1802, Foto 1. En el informe de D. Agustín de Betancourt se describe el proceso de sifonamiento inicial, que se manifestó como un surtidor 9 m aguas abajo de la presa, llegando a alcanzar los 5 m de altura para después producirse la rotura repentina, saliendo grandes cantidades de agua y arena procedentes de la zona inferior de la presa y produciéndose su derrumbe. En el momento de su construcción era la mayor presa en servicio del mundo.



Foto 1 Presa de Puentes tras la rotura

Otra gran catástrofe de este tipo fue la presa de St. Francis, el 12 de Marzo de 1928. Al aumentar el nivel aguas arriba de la presa se produjo el colapso de la misma, Foto 2.

En presas de tierra (cuya simulación mediante el método de redes está en proceso de estudio) también existen ejemplos de fallos por filtración. La Foto 3 muestra la presa de Teton, cuyo derrumbe comenzó con filtraciones en los estribos colapsando el 5 de junio de 1976.



Foto 2 Presa de St. Francis tras el colapso



Foto 3 Presa de Teton tras el derrumbe debido a las filtraciones

La catástrofe de Malpasset en 1959 (Foto 4), con fallo de la cimentación en el estribo izquierdo por filtración excesiva al carecer de red de drenaje, fue debida, al parecer, a fallos en el diseño.



Foto 4 Presa de Malpasset tras el fallo en la red de drenaje

Existen muchos ejemplos de fallos geotécnicos en presas que reflejan la importancia de la cimentación y la geotecnia en grandes infraestructuras, de las que se puede y debe aprender, mientras que son menos los ejemplos de diques y de muros pantalla que colapsaron por causas similares. El conocimiento de los errores pasados debe ser parte esencial en la formación en ingeniería.

Los poros de una masa de suelo están interconectados de una manera en extremo compleja y completamente aleatoria que origina en la masa de suelo canales de flujo estrechos, de forma irregular y entrelazados. En consecuencia, es imposible analizar el flujo en cada poro individualmente. Sin embargo, en los problemas de ingeniería en los que interviene la filtración de agua a través de los suelos no es de interés el microflujo en cada poro, sino el macroflujo a través de todos los poros de un elemento de suelo suficientemente grande para ser representativo de toda la masa de suelo<sup>1</sup>.

Daniel Bernoulli en 1856 describe el balance de energías a lo largo de una línea de corriente, que para un fluido incompresible (densidad constante) y no viscoso, en régimen laminar, puede escribirse mediante la ecuación:

$$h = z + \frac{u}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g}$$

$z$ : altura de posición (asociada a la posición del punto dentro de la línea de corriente).

$u/\gamma_w$ : altura asociada a la presión del fluido.

$v^2/2g$  : altura asociada a la velocidad.

Ésta es una ecuación homogénea en términos dimensionales ya que la ecuación de dimensión de todos los términos es la de una longitud (m). En el flujo de aguas subterráneas, los cambios de velocidad son despreciables por lo que la pérdida de energía cinética también lo es y la ecuación anterior puede simplificarse a la forma:

$$h=z+\frac{u}{\gamma w}$$

La pérdida de carga total entre dos puntos cualesquiera debido al flujo de agua en suelo saturado viene dada por:

$$\Delta h=h_1-h_2$$

con lo que, haciendo uso de la ecuación de Bernoulli, podemos escribir:

$$\Delta h=z_1-z_2+\frac{1}{\gamma}(u_1-u_2)$$

Por otro lado, Darcy estableció empíricamente, en París alrededor de 1850, con un dispositivo semejante al de la Figura 2.1, la siguiente relación constitutiva lineal entre el flujo de fluido o caudal,  $q$  ( $m^3/s$ ), y el gradiente hidráulico,  $i$  (adimensional), que representa la tasa de pérdida de carga:

$$q=k i A$$

donde  $k$  es la permeabilidad ( $m/s$ ), llamada en muchos textos conductividad hidráulica del medio poroso y  $A$  ( $m^2$ ) el área considerada. Se trata de una dependencia aproximada, para flujos laminares y determinadas condiciones (Bejan, 2004). A través de la relación entre el caudal,  $q$ , y la velocidad del fluido  $v$  ( $m/s$ ),  $q/A=v$ , la expresión anterior puede escribirse en la forma:

$$v=k i$$

En términos del nivel piezométrico, el gradiente hidráulico se define como:

$$i=\frac{\Delta h}{\Delta l}$$

Así, en definitiva, la ley de Darcy afirma que la velocidad de descarga es directamente proporcional al gradiente hidráulico, para medios de permeabilidad constante (medios saturados en general) y régimen laminar o de pequeña velocidad.

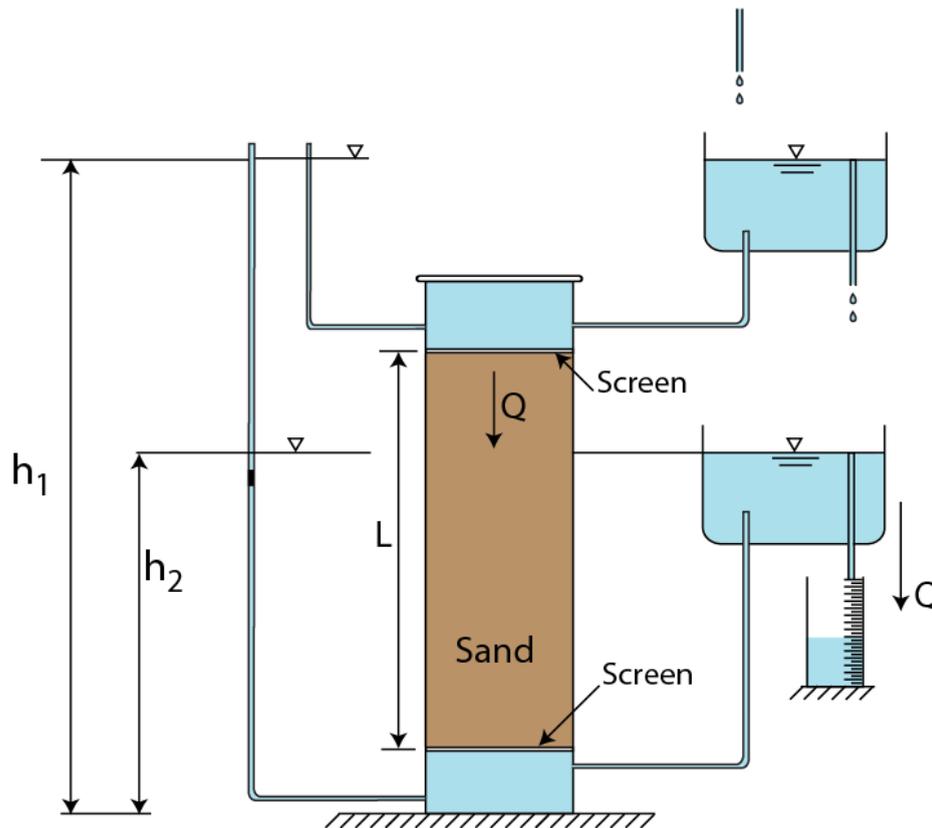


Figura 2.1 Esquema del experimento de Darcy

## 2.2 Ecuación de gobierno

Sea un elemento de suelo con fluido incompresible y completamente saturado, la condición de continuidad asociada a la conservación de la masa de fluido (condiciones estacionarias), debe satisfacer que la cantidad de flujo entrante en un elemento de volumen (o celda elemental) del medio debe ser igual a la cantidad de flujo saliente del mismo. Aplicando la ley de Darcy, el gradiente hidráulico a la entrada de cada cara es:

$$i_x = \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$i_y = \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$i_z = \frac{\partial h}{\partial z}$$

mientras que a la salida, usando las nociones elementales de cálculo diferencial (Figura 2.2), el gradiente se escribirá en la forma:

$$i_x + \frac{\partial i_x}{\partial x} dx = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx$$

$$i y + \frac{\partial i y}{\partial y} dy = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial^2 h}{\partial^2} dy$$

$$i z + \frac{\partial i z}{\partial z} dz = \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial^2} dz$$

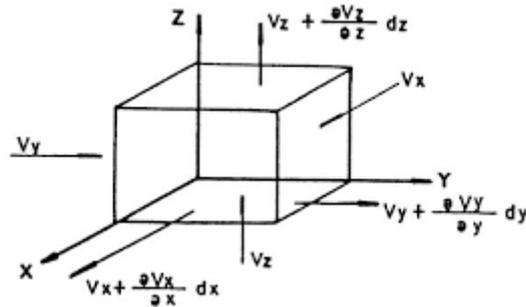


Figura 1.2 Elemento del medio y nomenclatura

La conservación del fluido implica, por tanto, que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

resultado que, haciendo uso de la ley de Darcy, puede escribirse en la forma:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

que es la ecuación general (local) del flujo, en términos de la variable dependiente  $h$  y en coordenadas cartesianas rectangulares, en un medio poroso de permeabilidad anisótropa dada por los coeficientes  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$ , asociados a las tres direcciones espaciales ortogonales  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Para flujos no estacionarios hay que añadir los términos asociados a las variaciones de flujo por efectos de compresibilidad y almacenamiento. Bajo estas condiciones, no estudiadas en la presente memoria, la expresión de la ecuación general de flujo es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) dz = S_s + \frac{\partial h}{\partial t}$$

donde los efectos anteriores quedan representados por los términos de la derecha de la ecuación, siendo  $\partial h/\partial t$  el almacenamiento y  $S_s$  la compresividad.

Para flujos 2-D en el plano XZ, estacionarios, en medios anisótropos, el movimiento de agua se produce principalmente en el plano XZ, quedando la ecuación de Laplace (ecuación lineal, en derivadas parciales de segundo orden y primer grado) en la forma:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

o bien:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

En medios isótropos,

$$\nabla^2 h = 0$$

La teoría de estas ecuaciones armónicas permite introducir una nueva magnitud, llamada potencial de velocidad, en la forma:

$$\Phi(x,z) = -kh$$

con lo que, usando la ecuación de Darcy:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Si sustituimos estas expresiones en la ecuación de Laplace, podemos escribir ésta en términos de la nueva variable potencial de velocidad, en la forma (también una ecuación de Laplace):

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Por otra parte podemos introducir también la llamada función de corriente,  $\psi(x,z)$  (m<sup>2</sup>/s), una magnitud muy útil ya que tiene la interesante propiedad de que sus iso-líneas representan directamente las trayectorias de las partículas de fluido. La relación entre velocidad y función de corriente:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$v_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

permite demostrar que esta magnitud satisface, asimismo, la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

y, por tanto, tiene las propiedades inherentes a este tipo de funciones. La solución de estas ecuaciones permite dibujar las iso-líneas de las correspondientes magnitudes potenciales  $\Phi$  y  $\psi$  a intervalos arbitrarios o, como es costumbre en general para una inspección inmediata de los resultados, a intervalos constantes. Ambas funciones potenciales se cortan formando siempre ángulos rectos en medios isótropos y determinando sobre el plano un mallado formado por cuadrados curvilíneos denominado red de flujo, como el de la Figura 2.3 (en inglés, seepage).

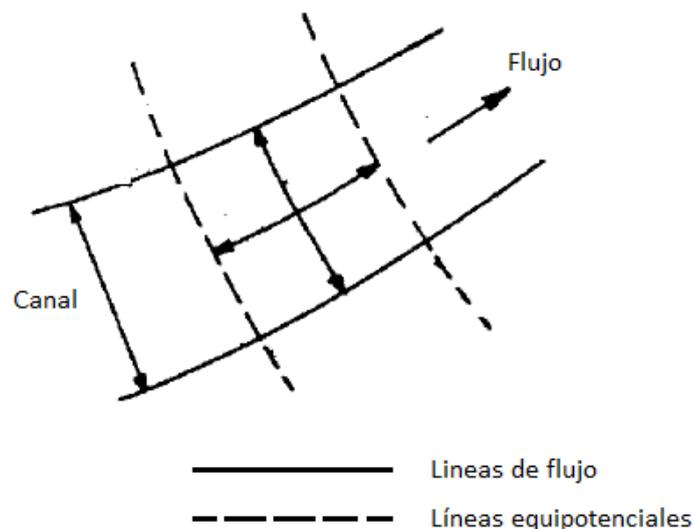


Figura 2.3 Líneas equipotenciales y líneas de flujo

Así, las líneas de corriente tienen gran importancia para evaluar la cantidad de flujo de filtración:

$$\Delta Q = \Delta Q_{bc} + \Delta Q_{ac} = \int_c^b v_z dx - \int_c^a v_x dz$$

Al sustituir  $v_x$  y  $v_z$  por sus expresiones en términos de la función de corriente, se obtiene:

$$\Delta Q = \int_c^b \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \int_c^a \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = [\psi]_c^b - [\psi]_a^c = \Delta \psi$$

## 2.3 Permeabilidad

Frecuentemente, los depósitos de suelo consisten en una sucesión o alternancia de estratos de diferente naturaleza. En estos casos puede resultar interesante definir una *permeabilidad equivalente* que represente el flujo a través del conjunto de estratos.

- Flujo vertical

En lo que respecta a las condiciones de flujo vertical a través de este medio estratificado, es sencillo comprender que el caudal que circula a través de cualquier sección horizontal del depósito resulta constante, y por lo tanto también lo será la velocidad.

Llamando  $k_v$  e  $i_v$  a la permeabilidad y a los gradientes equivalentes para todo el estrato, la observación anterior da lugar a:

$$v_z = k_z i_z = k_0 i_0 \rightarrow i_z = \frac{k_v i_v}{k_z}$$

dónde:

- $K_z$  es la permeabilidad vertical real del terreno a una cota genérica  $z$ .
- $i_z$  es el gradiente de flujo vertical real a una cota genérica  $z$ .

La pérdida de carga a lo largo de todo el espesor  $D$  del depósito del suelo será:

$$Ah = i_z d_z \rightarrow \int_0^D i_z dz = k_v i_v \int_0^D \frac{dz}{k_z}$$

Y despejando  $k_v$ :

$$k_v = \frac{D}{\int_0^D \frac{dz}{k_z}}$$

Así para un terreno formado por  $n$  estrato de espesor  $L_i$ , y permeabilidad  $k_i$ , la permeabilidad equivalente vertical resultaría:

$$k_v = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i}}$$

- Flujo horizontal

En este caso, es el gradiente el que ha de resultar el mismo para cualquier sección vertical del depósito de suelo. Por consiguiente, llamando  $k_h$  e  $i_h$  a la permeabilidad y el gradiente equivalente para flujo horizontal, el caudal que discurre a través de toda la masa de suelo será:

$$Q_h = k_h i_h D = \int_0^D k_z i_h dz$$

Y despejando  $k_h$ :

$$k_h = \frac{1}{D} \int_0^D k_z dz$$

Por lo tanto, para un terreno formado por  $n$  estratos de espesor  $L_i$ , y permeabilidad  $k_i$ , la permeabilidad equivalente vertical resultaría<sup>2</sup>:

$$k_h = \frac{\sum_{i=1}^n k_i L_i}{\sum_{i=1}^n L_i}$$

## 2.4 Escenario

La ecuación de Laplace se aplica en diferentes problemas, relacionados con el flujo de una magnitud, como la transmisión de calor, la conducción eléctrica o, como en el caso que estamos tratando, el flujo de agua a través de un medio poroso. Su resolución analítica depende del escenario o dominio del problema y de las condiciones de contorno del mismo pudiendo ser, con frecuencia, compleja al estar formada por desarrollos en serie de engorroso tratamiento matemático. La solución numérica es, sin embargo, rápida y muy precisa, en general, en términos de las exigencias propias del ingeniero y asumiendo un mallado suficientemente fino. A partir de ella es posible dibujar los patrones de familias de curvas (líneas equipotenciales y líneas de corriente o flujo) que nos permiten, por simple inspección directa, deducir cualitativa y cuantitativamente los valores de las magnitudes de interés.

El escenario geométrico a estudiar se muestra en la 2.4, escenario de presa de hormigón impermeable, con flujo a través de un estrato de suelo homogéneo de espesor infinito. Se trata de un caso especialmente relevante en el estudio de las redes de flujo confinado. La inclusión de capas o regiones de diferentes propiedades hidrológicas, así como la consideración de propiedades anisótropas, son variaciones posibles dentro del escenario básico mencionado.

Estas estructuras tienden a ser muy largas en la dirección perpendicular a la sección representada en las figuras, por lo que el movimiento de agua queda caracterizado, en esencia, por un patrón estacionario 2-D.

## ESCENARIOS DE PRESA

Estos escenarios contienen una presa de hormigón de gran longitud cimentada en un medio poroso (arena). Bajo éste existe una capa de permeabilidad mucho mayor, Figura 2.4. La nomenclatura se muestra en la Tabla 2.1.

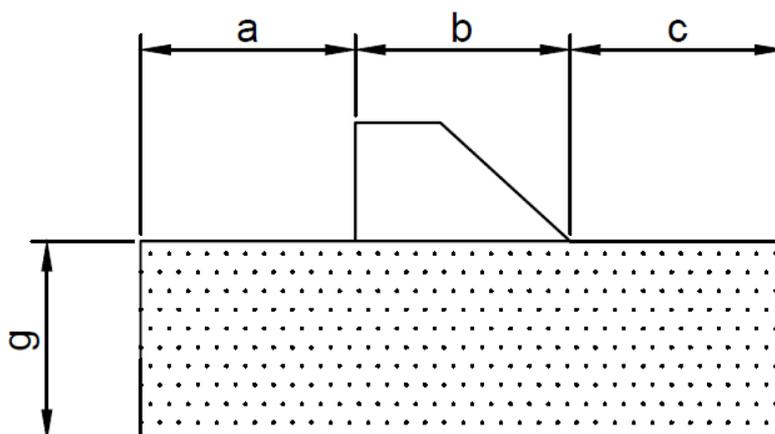


Figura 2.4

Problema presa tipo

Tabla 2.1 Parámetros físicos y geométricos del problema tipo presa

Parámetros físicos	$k_x$ : permeabilidad horizontal
	$k_y$ : permeabilidad vertical
Parámetros geométricos	a: longitud del dominio a la izquierda de la presa
	b: longitud de la base de la presa
	c: longitud del dominio a la derecha de la presa
	g: profundidad de estudio del dominio

Las condiciones de contorno en este caso son, impermeabilidad en los extremos del dominio, en el fondo y a los lados; carga total o potencial constante a la izquierda y derecha en función de los niveles

de agua en el embalse a la izquierda y derecha; impermeabilidad en la base de la presa. Formuladas mediante ecuaciones, estas condiciones son:

i)  $y=H, 0 < x < l_0$   $\Rightarrow h = h_a$

ii)  $y=H, l_0+l_1 < x < L$   $\Rightarrow h = h_b$

iii) (1):  $y=H, l_0 < x < l_1$ ;  
(2):  $x=0, y$ ;  
(3):  $x=L, y$  and  
(4)  $y=0, x$   $\Rightarrow$  no hay flujo

# El método de simulación por redes (MESIR)

### 3.1 Introducción

La analogía eléctrica para la resolución de problemas es una herramienta muy utilizada para el diseño de modelos en red de procesos físicos, los cuales posteriormente, pueden resolverse numéricamente mediante un código de computación de resolución de circuitos apropiado. Su aplicación es tanto educativa, permitiendo establecer equivalencias entre problemas de diferentes campos, (muy usada en libros de texto de transmisión de calor para demostrar la analogía entre la conducción del calor y la conducción eléctrica Mills, [1995]; Incropera y Dewit, [1996] y Chapman [1974]), como de investigación, permitiendo resolver problemas lineales y no lineales de compleja formulación matemática (Sánchez y col., [2013]; Marín y col., [2012], Morales y col., [2011] y Alhama y col., [2012]).

En este método se diseña un circuito (modelo en red) cuyas ecuaciones diferenciales (en diferencias finitas en el espacio, el tiempo en problemas transitorios se retiene como una variable continua) son formalmente equivalentes a las ecuaciones correspondientes del problema físico; asimismo, se establece una equivalencia formal entre las ecuaciones asociadas a las condiciones de contorno. Con esto, los errores de la simulación se reducen a los producidos por la selección del mallado ya que los códigos usados para la simulación del modelo reproducen de manera exacta (prácticamente) la solución del modelo.

A pesar del potencial de este método, el problema estudiado en este proyecto puede abordarse naturalmente por otras técnicas numéricas digamos, más clásicas, e incluso por aproximaciones analíticas o semi-analíticas en algunos casos sencillos. Descartamos el uso de métodos analíticos por su complejidad y limitaciones y optamos por la aplicación del método de redes por ser la técnica del grupo de investigación 'simulación por redes' de esta universidad y con la que se han abordado innumerables problemas de ingeniería en las dos últimas décadas para la realización de proyectos fin de carrera, de grado, trabajos fin de master y tesis doctorales.

Merced al fuerte desarrollo de los algoritmos de computación usados en los códigos de simulación de circuitos, el método de redes, como hemos mencionado antes proporciona resultados fiables suficientemente contrastados por la solución de diferentes problemas patrón (benchmark problems) ya publicados en la literatura científica.

En definitiva, podemos decir que el método de simulación por redes es una técnica numérica para el estudio de cualquier proceso físico que pueda describirse mediante un modelo matemático o conjunto completo de ecuaciones, normalmente en derivadas parciales, acopladas o no. En su aplicación, podemos distinguir dos fases diferenciadas:

- Elaboración del circuito o modelo en red equivalente del proceso físico, y
- Simulación del modelo en un programa de resolución de circuitos eléctricos para obtener la solución del mismo.

En el texto González-Fernández [2002] se describe detalladamente la aplicación del método, incluyendo numerosos ejemplos: i) transporte a través de membranas (Horno y col., [1990]), ii) transferencia de calor (Alhama y col., [2007]), iii) sistemas acoplados de reacciones químicas (González-Fernández y col., [1995]), iv) transferencia de masa en disoluciones electrolíticas y no electrolíticas (Horno y col., [2012]) y v) fenómenos electrocinéticos en suspensiones coloidales (López García y col. [1996]). Recientemente, el método ha sido aplicado con éxito por el grupo de investigación en otros campos de la ciencia e ingeniería: i) flujo de fluidos con transporte de calor (Soto y col., [2007]), ii) elasticidad (Morales y col., [2011]), iii) tribología (Marín y col. [2012]), iv) vibraciones mecánicas (Castro y col., [2004]), v) ondas sísmicas (Morales y col., [2013]), vi) sistemas caóticos (Mareca y col., [2010]), vii) corrosión (Sánchez y col., [2012]) y, viii) problema inverso en transmisión de calor (Zueco y Alhama, [2005]). Igualmente, se han desarrollado códigos de computación en lenguajes C# y (más recientemente) Matlab, para ser usados tanto en prácticas de laboratorio de diferentes asignaturas en la UPCT, como para investigación (PROCCA\_09 [2005], FATSIM\_A [2010], FAHET [2011], EPSNET\_10 [2011] y OXIPSIS [2013]).

Al aplicar las ecuaciones en diferencias finitas en el espacio a un elemento de volumen o celda del medio, cada uno de los términos de la ecuación se implementa mediante un componente eléctrico cuya corriente viene dada por la propia expresión del término; la topología de los componentes es tal que sus corrientes se balancean como lo hacen algebraicamente los términos de la ecuación. Los teoremas de unicidad y conservación propios de los circuitos (teoremas de Kirchhoff) reducen al mínimo las faltas de balance entre las fronteras de las celdas, por lo que no es preciso establecer rutinas de ajuste para este fin. Cuando se ha establecido la correspondencia entre las variables dependientes del problema y variables eléctricas (tensiones e intensidades) los resultados de la simulación se pueden interpretar en términos del proceso que se modela.

La asociación de celdas, de acuerdo con la geometría del problema, configura el modelo en red correspondiente a todo el medio finito, que será más preciso cuanto mayor sea el número de celdas. Las condiciones de contorno e iniciales se incorporan al modelo de manera simple.

El planteamiento formal que sirve de base para el desarrollo del MESIR es la `teoría de redes´ de Poesner [1987], en la que se basa su `termodinámica de redes´. Esta teoría de redes se sustenta en la teoría de circuitos a partir de una generalización de sus variables conjugadas, corriente eléctrica y diferencia de potencial (d.d.p). Así para Poesner el modelo en red es una representación exacta de las características matemáticas de los procesos que describen.

El método de simulación MESIR incluye, como hemos dicho, la resolución numérica del modelo en red; las variables flujo y fuerza, características del mismo, están ligadas por las relaciones constitutivas impuestas por los términos de la ecuación discretizada de gobierno (determinando el correspondiente elemento de circuito) y deben satisfacer las leyes o teoremas de Kirchhoff.

La viabilidad del modelo en red supone, en síntesis:

- i) La existencia de una red independiente del tiempo,
- ii) La existencia de una magnitud  $j_{N-N'}$  llamada flujo, asociada a cada rama que conecta los nudos  $N-N'$  y que va de  $N$  a  $N'$ .  $j_{N-N'}$  obedece las leyes de Kirchhoff para corrientes (LCK),
- iii) La existencia de una magnitud,  $\varphi$ , asociada a cada nudo, tal que la diferencia  $X_{N-N'} = \varphi_N - \varphi_{N'}$ , llamada fuerza, obedece la ley de los voltajes de Kirchhoff (LVK).

Además las relaciones entre el flujo y fuerza asociados a una rama y sus (dos) nudos límite, que pueden incluir o no variaciones temporales de estas variables que se dicen conjugadas, definen los

elementos concretos del circuito equivalente a esa rama. La relación causa-efecto entre las variables conjugadas es completamente arbitraria con tal que sea consistente con ii) y iii).

### 3.2 Monopuertas básicas

A la red se le asocia un conjunto de flujos que obedecen a una ley de balance local y un conjunto de fuerzas que satisfacen la condición de unicidad. Estos requisitos dan cuenta de la topología de la red relativa al proceso. Las propiedades topológicas dependen únicamente de la asignación de conexiones entre los diferentes puntos o de las posibles combinaciones de trayectorias que unen un nudo dado con otros nudos. Son independientes de las medidas y, desde un punto de vista topológico, dos grafos son iguales o isomorfos si las asignaciones de vértices y ramas son las mismas.

Las leyes de Kirchhoff establecen relaciones entre flujos y fuerzas por separado pero no expresan ningún tipo de relación entre flujos y fuerzas entre sí. Las relaciones entre el par conjugado flujo-fuerza se conocen como ecuaciones constitutivas o fenomenológicas y definen los elementos de circuito que expresan características específicas de cada proceso. Se dice que dos grafos son geoméricamente iguales si los potenciales y flujos de cada par de puntos y su rama correspondiente son iguales para cualquier conjunto de valores que puedan ser elegidos para los flujos o las fuerzas. Las propiedades geométricas de la red, es decir, sus características métricas, se siguen de las relaciones constitutivas.

Las relaciones constitutivas se pueden establecer entre las variables de un par flujo-fuerza, en cuyo caso se habla de monopuerta.

Podemos distinguir entre elementos pasivos y activos tal y como se hace en electricidad.

Los elementos pasivos no generan potencia; disipan (transformación energética), almacenan y/o entregan potencia a la red. Se conocen como monopuertas pasivas.

Los elementos activos son fuentes de tensión y corriente. Generan potencia de acuerdo a una determinada ley; son las denominadas monopuertas activas o fuentes.

No obstante es posible que una relación constitutiva correspondiente a una monopuerta pasiva sea representada mediante una monopuerta activa donde la función de control es una constante.

#### Monopuertas pasivas

En función de la relación expresa existente entre las variables LCK y LVK las monopuertas tienen nombre específicos:

Monopuerta resistiva. Es un elemento de circuito asociado a una relación entre las derivadas temporales de las variables flujo y fuerza de una misma rama, mediante una función independiente del tiempo que llamaremos resistencia, R, que puede depender o no del flujo o de la fuerza:

$$dX(t)/dt = R dJ(t) /dt$$

Por tanto,

$$R = dX(t)/ dJ(t) /dt$$

A partir de esta expresión es posible relacionar las variables en forma finita y escribir:

$$X(t) = FR^{-1}(J)$$

Expresiones que no contienen la variable tiempo.

Una monopuerta resistiva es lineal cuando la relación entre las variables  $X(t)$  y  $J(t)$  lo es, es decir  $X(t)=R J(t)$ ; naturalmente  $R$  es una constante en este caso. Su acción es instantánea, no importa cuál sea su estado anterior; en este sentido carecen de memoria. En su analogía física representan efectos disipativos, fricciones, efectos viscosos, energías de reacción, etc, y desde el punto de vista termodinámica son elementos generadores de entropía.

Las monopuertas resistivas no lineales se definen a través de las funciones que las caracterizan,  $J(t)=FR^{-1}(X)$  o  $X(t)= FR(J)$  . Constituyen, en definitiva fuentes controladas de corriente o tensión, respectivamente.

La representación simbólica de una monopuerta resistiva se muestra en la Figura 3.1. La traducción al modelo en red es una resistencia eléctrica de valor  $R$  ohmios para el caso lineal o una fuente controlada de corriente o tensión para el caso no lineal.

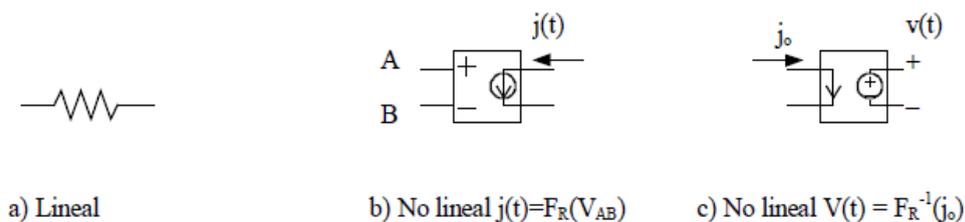


Figura 3.1 Representación simbólica de monopuertas resistivas

Monopuerta capacitiva. Elemento de circuito asociado a una relación entre la variables flujo y la derivada temporal de la variable fuerza, de un misma rama, mediante una función no dependiente del tiempo que designaremos como capacidad,  $C$ :

$$J(t) =C dX(t)/ dt$$

En este tipo de monopuertas se produce algún tipo de almacenamiento, sin pérdidas, ya que no hay disipación, y su estado tiene en cuenta todas las operaciones llevadas a cabo en el pasado (no cambia instantáneamente pero tiene memoria). Equivale a condensadores, tanques, etc. En términos de capacidad:

$$C= dq/dX=dF_c(X)/dX$$

valor constante cuando la dependencia  $q=F_c(X)$  es lineal,  $C=q/X$ . La representación simbólica de la monopuerta capacitiva lineal se muestra en la Figura 3.2. La traducción al modelo en red es un condensador eléctrico de valor  $C$  faradios.

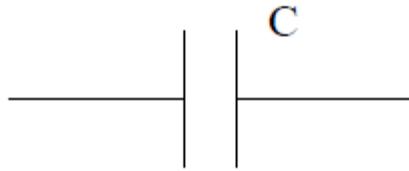


Figura 3.2 Representación simbólica de una monopuerta capacitiva lineal

Monopuerta inercial o inductiva. Es el elemento de circuito asociado a una relación entre la variable fuerza y la derivada temporal de la variable flujo, de una misma rama, mediante una función no dependiente del tiempo, que designaremos como inductancia, L:

$$X(t)=L dj(t)/dt$$

que equivale a la relación, no dependiente del tiempo, entre las variables flujo y momento:

$$P=FL(J)$$

Al igual que en el condensador se produce un almacenamiento de energía sin pérdidas y su estado tiene memoria. Representa procesos físicos en donde tiene lugar algún efecto de inercia (como la masa en los sistemas mecánicos). La relación constitutiva anterior puede expresarse en términos de la inductancia:

$$Y=dp/dJ = dFL(J)/dJ$$

que es constante cuando la dependencia  $p=FL(J)$  es lineal,  $L=p/J$ . La representación simbólica se muestra en la Figura 3.3.



Figura 3.3 Representación de una monopuerta inductiva real

Los procesos de almacenamiento y disipación de energía, bajo la hipótesis de continuidad del medio, se originan en todo los puntos del sistema. Los elementos R, C y L se identifican sin embargo con regiones pequeñas pero finitas del medio y sus conexiones con las otras puertas se realizan con enlaces ideales de energía, es decir, con conductores de resistencia nula.

El que cada elemento pueda ser caracterizado por un par de variables conjugadas con una única ecuación constitutiva entre ellas es una hipótesis básica en el MESIR que deriva de la teoría de redes. Físicamente equivale a decir que es posible elegir un elemento de volumen lo suficientemente

pequeño como para que su tiempo de relajación interna sea mucho menor que el del sistema global, pero suficientemente grande como para que las fluctuaciones de las variables que describe el sistema en él sean despreciables.

### Monopuertas activas

En éstas se produce una aportación o extracción de energía al sistema. Cabe distinguir las siguientes:

Fuentes constantes. Son monopuertas definidas de acuerdo con las expresiones  $FJ(J)=0$  y  $FX(X)=0$ , según se trate de fuentes de flujo o de fuerza, respectivamente. Tienen asignado un sentido (o signo) que indica la dirección en la que fluye la energía. La representación simbólica es la de la Figura 3.4. Eléctricamente se corresponde a pilas o generadores de corriente constante.

Fuentes dependientes del tiempo. La relación constitutiva entre las variables tiene la misma forma de las fuentes constantes; además  $X=X(t)$  y  $J=J(t)$  según se trate de fuentes de fuerza o de flujo, Figura 3.4.

Fuentes controladas. Se trata de monopuertas especiales asociadas a relaciones constitutivas entre variables, conjugadas o no, expresadas mediante cualquier función que no contiene explícitamente el tiempo. Son elementos de entradas múltiples con una única salida que corresponde a un flujo o una fuerza que depende funcionalmente de otros flujos o fuerzas de distintas ramas y nudos, del mismo o diferente circuito, permitiendo especificar acoplos energéticos de varios tipos.

Existen cuatro tipos de fuentes controladas por una sola variable:

$$X = FX(XC)$$

$$X = FJ(JC)$$

$$J = FJ(JC)$$

$$J = FX(XC)$$

según se trate de:

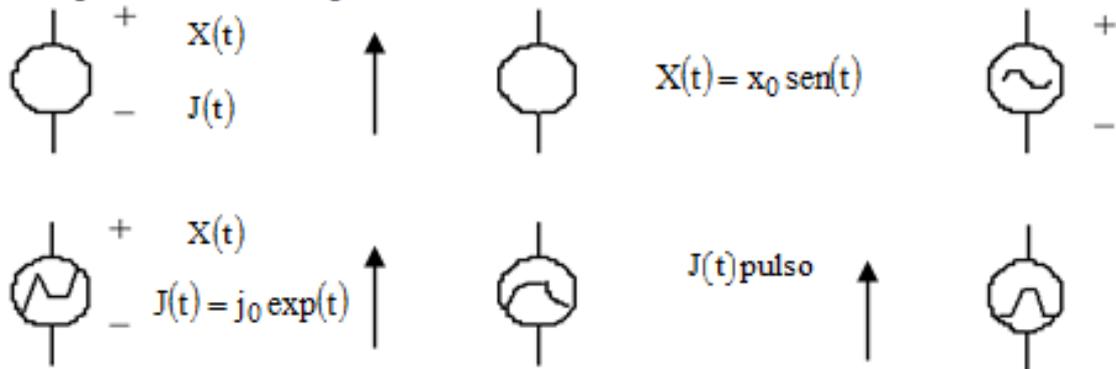
- i) Fuentes de tensión controladas por tensión,
- ii) De tensión controladas por corriente,
- iii) De corriente controladas por corriente, y
- iv) De corriente controladas por tensión, respectivamente.

La acción de control puede ser ejercida por más de una variable y las funciones de control pueden ser complejas. Aunque la monopuerta puede especificarse arbitrariamente, su implementación como elemento de circuito puede no ser posible en tanto que no esté contenida en las librerías del software elegido. Sin embargo, la teoría de circuitos permite, mediante circuitos auxiliares, resolver prácticamente todos los casos de diseño de la red eléctrica que se necesiten para cualquier tipo complejo de fuente controlada. La representación simbólica se muestra en la figura 3.4.

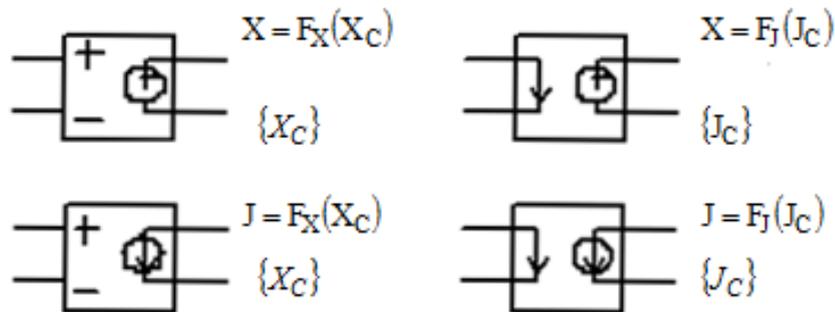
a) Fuentes constantes



b) Fuentes dependientes del tiempo



c) Fuente de tensión controlada por tensión      Fuente de tensión controlada por corriente



d) Fuente de corriente controlada por dos tensiones

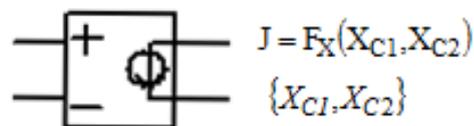


Figura 3.4 Representación simbólica de monpuertas activas

El potencial de estas monpuertas activas para establecer los modelos en red de sistemas fuertemente no lineales es inmenso ya que su uso permite imponer a la monpuerta el valor de una variable (en función de variables de otras monpuertas) sin influir en la otra variable, cuyo valor, se ajusta a la topología y geometría del modelo en red.

### 3.3 El MESIR como método numérico

En el MESIR, el punto de partida es siempre el modelo matemático de un cierto proceso, esto es, un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales (EDP) espacio-temporales; la discretización de la variable espacial permite establecer el modelo en red o red eléctrica equivalente. Ésta es la única manipulación directa que se hace de las ecuaciones. Así, el modelo en red es el formato que se da al modelo matemático para que pueda ser utilizado como entrada (fichero en un programa de resolución de circuitos tal como Pspice® [1994], Nagel [1977] y Vladimirescu [1994]).

La solución numérica del modelo matemático la proporciona este software resolviendo las ecuaciones de la red. Al realizar una doble reticulación, espacial (por el usuario, al elegir el mallado) para la creación del modelo y temporal (por el propio código) para la resolución del mismo en Pspice, las ecuaciones en derivadas parciales se sustituyen finalmente por aproximaciones algebraicas, que se resuelven en Pspice. En síntesis, el método de simulación por redes es un método numérico ya que la simulación del modelo en red implica la resolución numérica de sus ecuaciones.

Se diferencia en que los métodos numéricos convencionales se realizan una reticulación simultánea de las dos variables (espacio y tiempo), mientras que en el MESIR la reticulación es por etapas, empezando por la reticulación espacial para la obtención del modelo en red y en segundo lugar la reticulación temporal realizada por el software de simulación.

En el MESIR, previa definición de la variable flujo,  $j(q,t) = \partial\phi(q,t) / \partial q$ , (para problemas transitorios) las EDP toman la forma:

$$f[\phi, \partial\phi/\partial t, \partial^2\phi/\partial t^2, j, \partial j/\partial q, \partial j/\partial t, q, t] = 0$$

$$F[\phi, d\phi/dt, d^2\phi/dt^2, j, dj/dq, dj/dt, q, t] = 0$$

que son las ecuaciones del circuito (la conexión entre  $j(q,t)$  y  $\phi(q,t)$  no se deshace). Así,  $j(q,t) = \partial\phi(q,t) / \partial q$  no es una definición, sino una relación física entre variables definidas independientemente, por lo que la red puede considerarse como una descripción alternativa del sistema. Si además  $j$  corresponde a un flujo de transporte de una cierta magnitud, los elementos del circuito y ciertos parámetros derivados del conjunto de la red pueden dotarse de un significado físico equivalente al que tienen en el transporte de la carga eléctrica. En estos casos es evidente que el MESIR proporciona más información que la estricta respuesta numérica del sistema.

### 3.4 La simulación en Pspice

Cuando se ha definido completamente el modelo en red se realiza el análisis del mismo. Para realizar este análisis se ha utilizado el software de resolución de circuitos, mediante su lenguaje propio, pudiendo ser de texto o gráfico. Sus reglas de programación no son complicadas como tampoco son los circuitos o modelos, en general.

Pspice ha sido usado, tradicionalmente, para simulación por otros autores en problemas más sencillos de otras disciplinas como:

- Comportamiento de componentes integrados en diferentes rangos de temperatura,
- Resolución de problemas mecánicos,
- Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias,

□ Problemas estadísticos.

La amplia aplicación de Pspice muestra su potencial para el tratamiento de gran variedad de problemas en simulación de circuitos pudiendo resolver respuesta en corriente continua, respuesta transitoria en el tiempo con análisis de Fourier en el dominio de la frecuencia, y análisis de pequeña señal en corriente alterna y distorsión, ciñéndonos en nuestro caso al estudio de procesos estacionarios 2-D.

Durante el proceso de simulación, Pspice proporciona toda la información solicitada para cada tipo de análisis en forma gráfica o tabulada. Pueden alterarse las condiciones iniciales, las de contorno y las características del medio con cambios relativamente sencillos en el programa lo que permite obtener resultados sobre el comportamiento del circuito más allá de cualquier tipo de medida real.

La simulación está dividida en cinco subprogramas principales, Figura 3.5:

- Entrada: lee el archivo de entrada, construye una estructura de datos y chequea el circuito,
- Organización: ejecutado el programa con éxito construye las estructuras adicionales de datos requeridas para el subprograma de análisis,
- Análisis: parte más importante del programa de simulación, ya que ejecuta los análisis de los circuitos diseñados como se especifica en el subprograma entrada, almacenándose los resultados en la memoria central para ser procesados a posteriori. Este subprograma abarca la mayor parte del tiempo de computación,
  - Salida: genera y organiza la memoria central, de forma tabulada o gráfica,
  - Utilidades: no relacionado con la simulación de forma directa puede, entre otras cosas, almacenar componentes o partes de modelos para ser compartidos con otros usuarios.

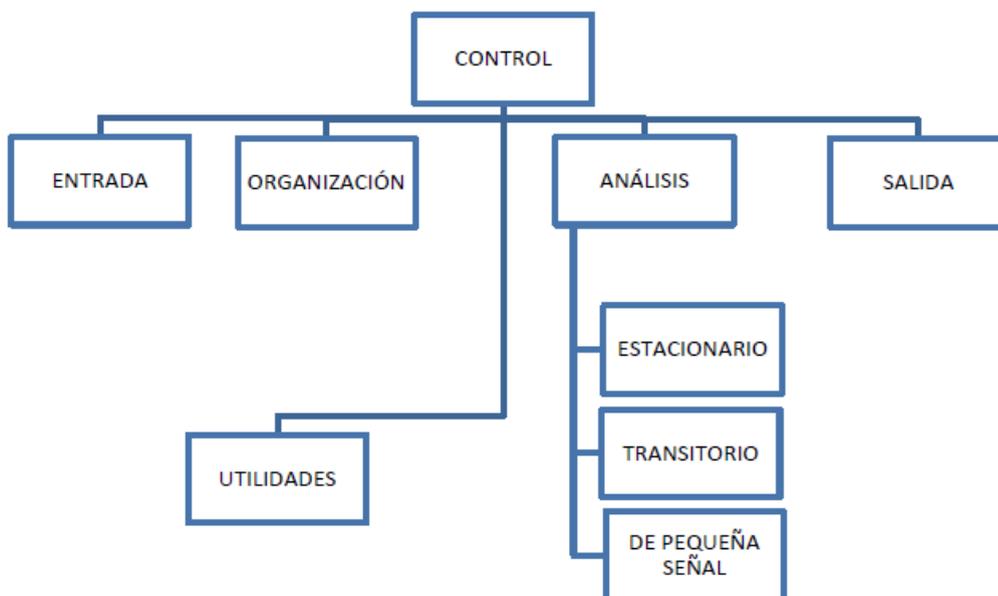


Figura 3.5 Esquema de funcionamiento de PSpice

En el proceso de simulación, se obtiene la solución numérica de la representación matemática del modelo en red, que contiene:

- i) Las ecuaciones matemáticas de los diferentes tipos de monopuertas,
- ii) Las ecuaciones de las restricciones impuestas por la leyes de Kirchhoff,
- iii) La información particular sobre la interconexión de los diferentes componentes eléctricos de cada modelo.

Todo lo cual forma un extenso sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales del tipo:

$$F[\varphi, d\varphi/dt, j, dj/dt, t] = 0$$

donde  $\varphi$  y  $j$  son vectores formados por las variables dependientes del circuito, corrientes tensiones, y  $F$  un operador no lineal.

El entorno de simulación de PSpice, es una pantalla separada en tres zonas. En la más grande se pueden visualizar el archivo de texto del modelo y los resultados

gráficos de la simulación. En la zona izquierda inferior de la pantalla se muestran los resultados de la verificación del modelo y los posibles errores de sintaxis o fallos de convergencia de la simulación. En la zona inferior derecha aparece la información sobre el tiempo de paso de computación y el tiempo restante de simulación. PSpice contiene un potente entorno gráfico que permite representar tensiones (eléctricas), corrientes y cualquier tipo de función u operación entre estas magnitudes durante el proceso de simulación.

### 3.5 Rutinas de representación gráfica en Matlab

El uso de Matlab® en esta memoria es doble. Por un lado, ha sido el código con el que se ha programado la elaboración del modelo en red en forma de archivo de texto, a partir de los datos requeridos (básicamente extraídos de los enunciados de los diferentes problemas estudiados: geometría del dominio, propiedades y condiciones de contorno). La organización de la estructura del medio en regiones y capas ha sido integrada previamente en el programa creado. Por otro lado, dado el interés de ciertas representaciones gráficas, tales como aquéllas en 2-D y eventualmente 3-D que involucran valores de salida de conjuntos de puntos o secciones del modelo, se ha hecho uso de Matlab también para la creación de nuevas rutinas de programación que permitan leer los datos de los archivos tabulados de salida de Pspice y tratarlos convenientemente para lograr nuevos y más completos tipos de representación.

MATLAB® es un lenguaje de alto nivel y un entorno interactivo para el cálculo numérico, la visualización y la programación. Mediante MATLAB, es posible analizar datos, desarrollar algoritmos y crear modelos. El lenguaje, las herramientas y las funciones matemáticas incorporadas permiten explorar diversos enfoques y llegar a una solución antes que con hojas de cálculo o lenguajes de programación tradicionales, como pueden ser C/C++ o Java™.

Dentro del programa podemos distinguir cuatro etapas diferenciadas: i) Introducción de datos, ii) Preproceso, iii) Proceso y, iv) Postproceso.

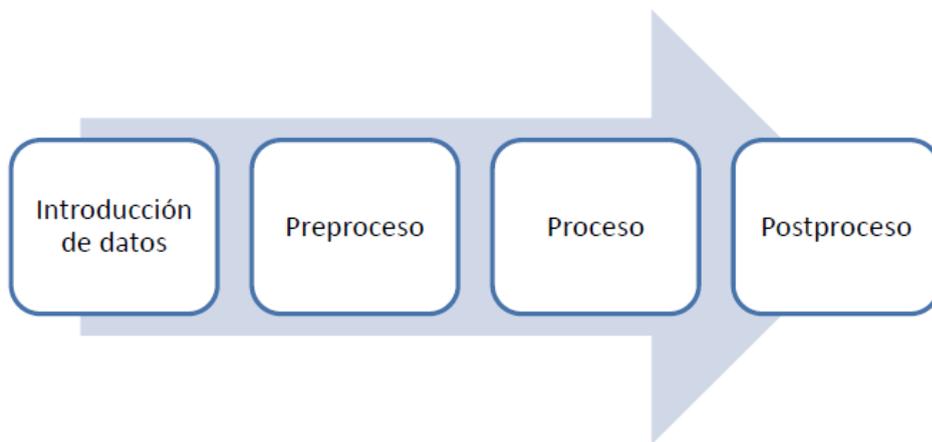


Figura 3.6 Esquema de funcionamiento de Matlab

La introducción de datos consiste fundamentalmente en definir el origen de coordenadas, la geometría del problema, su longitud, altura, densidad de mallado, regiones y huecos, todos con sus características correspondientes.

En el preproceso, mediante una serie de funciones o 'functions', se numeran los nodos y se calculan las coordenadas de las celdas creando una malla 'virtual' completa. Se determina la región a la que pertenece cada celda, se obtiene la posición de la celda perteneciente a una región activa haciendo posible así la posterior representación gráfica de las soluciones.

En el proceso se gestiona la escritura del CIR correspondiente al análisis, definiendo las líneas del CIR correspondientes al modelo 2D de flujo. Además se inicia el funcionamiento del programa Pspice con los datos proporcionados.

Durante el postproceso se recuperan los resultados del programa Pspice para el análisis de flujo 2D. Estos resultados son almacenados en matrices del tamaño de la malla virtual y en vectores correspondientes a la malla del modelo en red. Se aproximan los valores en puntos de la malla virtual a partir de los nodos del modelo en red (las esquinas de celdas). Opera aproximando por regiones, usando la función 'scatteredInterpolant.m' También asigna valores a los puntos del contorno que no pertenecen al modelo en red pero de los que se conoce su valor por las condiciones de contorno.

#### 4.1 Diseño de la celda elemental

El modelo sigue las reglas de diseño expuestas en “Applications of the network simulation method to transport processes”, González Fernández [2002]. El dominio del problema está estructurado en volúmenes finitos, llamados celdas elementales, en las que se implementa el circuito correspondiente al modelo en red de la ecuación en diferencias finitas deducida de la ecuación de gobierno en derivadas parciales. En el caso 2-D, las líneas o lados fronteras entre celdas se corresponden con los nudos exteriores del modelo en red de las mismas (geométricamente ubicados en el centro de cada lado de la frontera), que se unen, mediante conexiones eléctricas ideales a los correspondientes de las celdas adyacentes. Así, cada celda, diseñada en forma simétrica, contiene cuatro nudos, ubicados en el centro de los lados que la delimitan y uno central, Figura 4.1. Con todo, el modelo en red del dominio completo contiene un conjunto de nudos centrales (los del interior de cada celda) combinado con un conjunto de nudos correspondientes a los bordes comunes de las sucesivas celdas contiguas. Los nudos exteriores de las celdas del contorno del dominio constituyen los nudos exteriores del mismo en los que hay que aplicar las condiciones de contorno (ningún nudo debe tener menos de dos conexiones por imperativos de continuidad en corriente) impuestos por el código Pspice como uno de las pruebas de comprobación del mismo.

La ecuación del proceso, una vez transformada en diferencias finitas en el espacio, contienen un conjunto de términos que se balancean entre sí. En nuestro problema, cada término es la cantidad de agua que cruza una frontera particular de la celda, y está formulado en términos del potencial  $\Phi$ , merced a la ecuación constitutiva que relaciona esta variable con el flujo de agua. En el modelo en red equivalente, cada término se asocia a una corriente eléctrica que, fluyendo hacia el centro de la celda a través de una rama, se balancea con las del resto de los términos en el nudo central. Los nudos de las ramas no concurrentes en el nudo central son los de los extremos o bordes de la celda (la frontera correspondiente de donde viene el flujo de la rama). Con ello, teniendo en cuenta los signos de cada término de la ecuación, la topología del modelo satisface el balance impuesto por la ecuación.

El componente eléctrico que se asocia a cada término depende de la propia expresión del mismo y puede ser una resistencia, bobina o condensador (en el caso de términos lineales) u otro tipo de componente (generalmente, fuentes controladas, cuando se trata de términos no lineales o acoplados). Para la ecuación de Laplace, 2-D y sin términos transitorios, los componentes del modelo son resistencias eléctricas cuyo valor depende de la geometría de la celda y de la permeabilidad.

Dada la analogía impuesta:

Potencial hidráulico (m)  $\leftrightarrow$  Potencial eléctrico (v)

Flujo de fluido (m/s)  $\leftrightarrow$  Corriente eléctrica (A)

la condición de conexión eléctrica ideal entre bordes de celdas contiguas hace nula la caída de potencial entre éstos. Por otro lado, la conservación de la corriente eléctrica (o flujo de agua equivalente) impuesta por los propios teoremas de circuitos (teorema de Kirchhoff de las corrientes) evita implementar en el código rutinas de precisión, redondeo o truncamiento para realizar estos ajustes de balance (las exigencias del código de simulación Pspice, u otros del mismo nivel, contienen estas rutinas hasta el punto de dar la solución prácticamente exacta del circuito, con tres o más cifras decimales).

Los nudos de los bordes de celda deben estar identificados mediante un código apropiado, con un nombre que le asocie unívocamente a cada una de las dos celdas contiguas a las que están conectados. Así, deberá elegirse una nomenclatura adecuada de todos los nodos del modelo que, por otro lado, sea fácilmente identificable por el usuario para poder acceder a los mismos de manera intuitiva bien para solicitar datos una vez simulado el modelo, bien para investigar sus fallos cuando no exista convergencia (en problemas complejos, éste es, a veces, el único recurso del usuario para investigar los fallos de programación). Sobre este aspecto se volverá más adelante.

La nomenclatura general, se muestra en la siguiente figura, Figura 4.1.

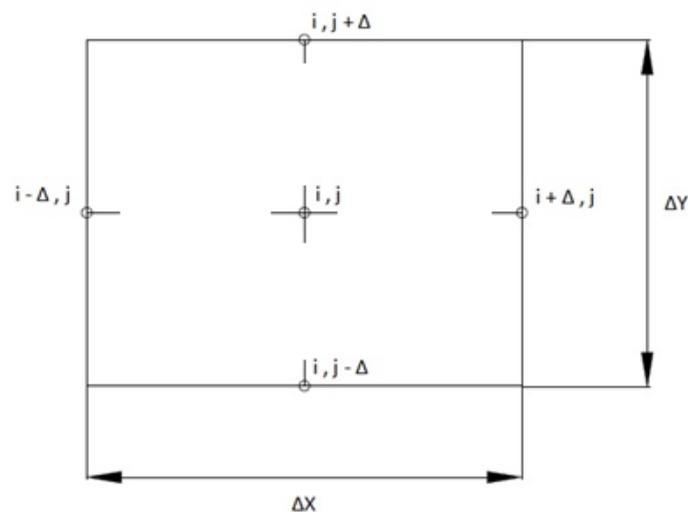


Figura 4.1 Nomenclatura de nudos de la celda elemental

Sean  $\Phi_{i-\Delta,j}$  y  $\Phi_{i+\Delta,j}$  los potenciales en los nudos 'i-Δ,j' e 'i+Δ,j', respectivamente,  $\Phi_{i,j-\Delta}$  y  $\Phi_{i,j+\Delta}$  los de 'i,j-Δ' e 'i,j+Δ', y  $\Phi_{i,j}$  el potencial en el nudo central 'i,j'. Aplicando la ley de Darcy entre los diferentes nudos de borde y el nudo central pares de nudos, podemos escribir las expresiones:

$$j_{i-\Delta,j} = kx \left( \frac{\Phi_{i-\Delta,j} - \Phi_{i,j}}{\frac{j\Delta x}{2}} \right)$$

$$j_{i+\Delta,j} = kx \left( \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i+\Delta,j}}{\frac{\Delta x}{2}} \right)$$

$$j_{i,j-\Delta} = \left( \frac{ky(\Phi_{i,j-\Delta} - \Phi_{i,j})}{\frac{j\Delta y}{2}} \right)$$

$$j_{i,j+\Delta} = \left( \frac{ky(\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j+\Delta})}{\frac{\Delta y}{2}} \right)$$

donde  $j_{i-\Delta,j}$ ,  $j_{i+\Delta,j}$ ,  $j_{i,j-\Delta}$  e  $j_{i,j+\Delta}$  son los flujos de agua por unidad de tiempo, entrantes (o salientes) por los bordes de la celda. En su analogía eléctrica, haciendo uso de la ley de Ohm ( $iR=VR/R$ , donde  $iR$  es la intensidad que circula por una resistencia,  $VR$  la diferencia de potencial en sus extremos y  $R$  el valor de dicha resistencia), las expresiones anteriores se implementan en el circuito mediante sendas resistencias cuyos valores son:

$$R_{i-\Delta,j} = R_{i+\Delta,j} = \frac{\Delta x}{2k_x}$$

$$R_{i,j-\Delta} = R_{i,j+\Delta} = \frac{\Delta y}{2k_y}$$

La disposición de estas resistencias en la celda (modelo en red) se muestra en la Figura 4.2. Como hemos mencionado, la conservación del caudal queda asegurado por la conservación de la corriente eléctrica con lo que queda satisfecha la ecuación de gobierno (ecuación de Laplace) del problema.

Para celdas de forma cuadrada,  $\Delta x = \Delta y$ , y en medios isótropos,  $k_x=k_y$ , todas las resistencias del modelo tienen el mismo valor:

$$R_{i-\Delta,j} = R_{i+\Delta,j} = R_{i,j-\Delta} = R_{i,j+\Delta} = \frac{\Delta x}{2k} = \frac{\Delta y}{2k}$$

La simulación proporciona una matriz escalar de  $m$  filas y  $n$  columnas de valores del potencial; solución con la que, mediante interpolación es posible representar las iso-líneas correspondientes a diferentes valores del potencial entre los extremos de valores de éste impuestos por las condiciones de contorno. Lógicamente, cuanto más fino sea el mallado mejor precisión se puede obtener para las representación de estas iso-líneas aunque valores de mallado del orden de  $30 \times 30$  proporcionan una precisión bastante aceptable.

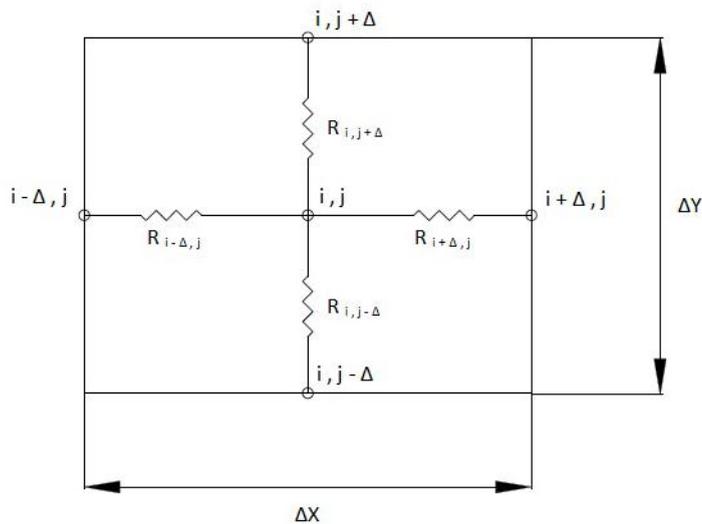


Figura 4.2 Modelo con cuatro resistencias dispuestas simétricamente

#### 4.2 Diseño de las condiciones de contorno

Las condiciones de contorno en estos problemas son de dos tipos:

- Adiabáticas
- De valor constante

La condición adiabática se implementa con una resistencia de valor elevado, teóricamente de valor infinito, condición que impide el paso de la corriente o flujo de agua, Figura 4.3. Esta condición se llama 'condición homogénea de segunda clase o condición homogénea de Newman. El valor de  $\Phi$  en el borde, derivado de esta condición, es consecuencia de los balances en dicho borde y se deriva en los cálculos realizados por el código de simulación.

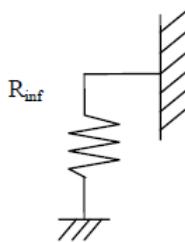


Figura 4.3 Representación simbólica de condición de contorno adiabática

La condición de potencial constante, llamada condición de primera clase o condición de Dirichlet, se implementa sencillamente mediante una fuente de tensión de valor constante igual al del potencial  $\Phi$ , Figura 4.4. El flujo de agua o corriente que proporciona esta fuente viene impuesto por las condiciones de balance establecidas en el borde y, como en el caso anterior, se deriva de los resultados de la simulación o cálculos.

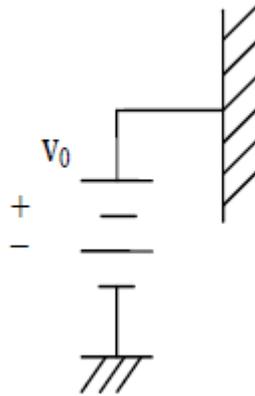


Figura 4.4 Representación simbólica de condición de contorno con valor constante

Existen otros tipos de condiciones de contorno que no han sido utilizados en esta memoria pero que podrían ser de interés en futuros estudios; entre ellos cabe citar las fuentes de infiltración constantes o potenciales dependientes del tiempo. Como decimos, su uso es limitado y de escasa aplicación pero su implementación es directa merced a la enorme variedad de componentes dispuestos en las librerías de los códigos de simulación.

En relación con las líneas de corriente, pueden usarse rutinas de programación de Matlab para la representación del gradiente de la función potencial. En esta memoria se ha seguido otro procedimiento consistente en definir una función de corriente (escalar) y construir un modelo en red para obtenerla y representar gráficamente las líneas iso-función de corriente, también por interpolación. Veamos.

La función de corriente,  $\Psi$ , se define en la forma clásica (Potter y Wiggert, [1997]):

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Dado que las velocidades ( $v$ ) son los flujos de corriente ( $j$ ) usados en el modelo anterior, derivando las expresiones

$$v_x = kx \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = ky \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

es inmediato obtener la ecuación del gobierno del problema en términos de la nueva variable  $\Psi$  (una nueva ecuación de Laplace):

$$\frac{1}{k_x} * \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{k_y} * \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

El modelo en red para la función de corriente es idéntico del obtenido para la variable potencial ya que se trata de la misma ecuación. La celda es, de nuevo, simétrica y las resistencias tienen ahora los valores siguientes:

$$R_{i-\Delta, j}(\psi) = R_{i+\Delta, j}(\psi) = \frac{k_x \Delta x}{2}$$

$$R_{i, j-\Delta}(\psi) = R_{i, j+\Delta}(\psi) = \frac{k_y \Delta y}{2}$$

En cuanto a las condiciones de contorno, en las regiones del contorno superior de potencial  $\Phi$  constante:

$$v_x = \frac{k_x \partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \Rightarrow \text{Condición adiabática para } \Psi$$

mientras que, en el resto de las regiones (impermeables al flujo de agua), la componente normal de la velocidad es nula. Esto lleva a:

$$\text{Paredes verticales laterales: } v_x = \frac{k_x \partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \Psi \text{ constante en toda la pared}$$

$$\text{Paredes horizontales: } v_y = \frac{k_y \partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \Psi \text{ constante en toda la pared}$$

La condición de continuidad en la impermeabilidad de las paredes laterales y de fondo, impone que el valor arbitrario  $\Psi_0$  que se da a estas paredes sea el mismo, eventualmente  $\Psi_0=0$ . Por último, aplicando la ecuación:

$$\frac{k_y \partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

entre los bordes de la región de entrada de agua, donde el caudal o velocidad ( $v_{ent}$ ) ya se ha resuelto con el modelo anterior, se obtiene el valor  $\Psi_a$ :

$$\Psi_a = \Psi_0 + v_{ent}(\Delta x_0)$$

donde  $\Delta x_0$  es la longitud de la región de entrada de agua. El mismo resultado hubiéramos deducido si la ecuación anterior se aplica a los bordes de la región de salida de agua. Con todo, tenemos tanto el modelo como las condiciones de contorno para resolver el circuito del modelo de la variable  $\Psi$  que nos proporciona las líneas de flujo (líneas iso- $\Psi$ ). Superponiendo la solución de ambos modelos obtenemos la red de flujo buscada.

Cabe señalar que el modelo propuesto trasciende de los dos esquemas clásicos que se estudian en esta memoria. Otras disposiciones que incluyan cualquier tipo de pantalla son posibles; se resuelve, en primer lugar, el modelo de la variable potencial, y con los flujos resultantes de las regiones de entrada y salida se obtienen las condiciones de contorno aplicables al modelo de la variable función de corriente, que permite dibujar las líneas de flujo. La superposición en un mismo esquema de curvas iso- $\Phi$  e iso- $\Psi$  reproduce la red de flujo de problema.

### El programa de redes de flujo

Un programa de redes de flujo, aún en el caso de ceñirlo a escenarios limitados como los estudiados en esa memoria, trasciendo el objetivo propuesto. Sin embargo, hemos creído conveniente considerar ciertos aspectos que creemos merece la pena integrar en un potencial y futuro código para hacerlo más potente y genérico. En primer lugar hemos considerado la posibilidad de definir diferentes capas y/o regiones del suelo bajo la presa, cada una con sus propiedades hidrológicas. Ello dará origen a un interface adecuado de entrada de datos y a una organización del modelo que sea ordenada y fácil de manipular por el usuario. Alguno de los problemas que surgen en relación con la asociación de subregiones y asignación de celdas ya han sido resueltos en esta fase inicial. Toda la programación se hace con el software MATLAB.

#### 5.1 Introducción de datos, geometrías y regiones

En primer lugar hay que introducir los siguientes datos como origen de coordenadas,  $x_0$  e  $y_0$ , conductividad hidráulica en las dos direcciones,  $k_x$  y  $k_y$ , y potencial en metros a la izquierda y a la derecha de la presa o pantalla,  $P_1$  y  $P_0$ . Esto se realiza directamente en las sentencias del programa que, como ejemplo, se presentan a continuación

```
clc, clear, close all
%caudales=zeros(1,1);
contador2=1;
for kx=6*10^-9:10^-9:7*10^-9
% kx=2;
ky=10^-8;
b=20;
g=1,25;
PI1=(kx/ky)*(g/b)^2
  contador=0;
  a1=110;
  a2=10;
  a3=120;
Q=zeros(1,1/1);
  for a = a1 : a2 : a3

jobname=['presa_a_',int2str(a)]
contador=contador+1;
TIPANA=20;
x0=0;
y0=0;
c=a;
A(:,contador)=[a];
Rinf=1E35;
T1=1;
T2=0;
% a=290
```

```
% h=5  
f=2
```

La geometría y el número de celdas asociados a cada región se introducen con los datos de altura H y longitud L de las regiones y su número de divisiones. Se ha integrado en el programa la posibilidad de realizar las discretizaciones dentro de cada región, dominio o capa, en forma constante, creciente o decreciente, ambos progresivamente, con objeto de aumentar la reticulación y, en consecuencia, la precisión de los resultados, en aquellas regiones más críticas o de mayor interés. También se incluye la posibilidad de crear regiones huecas y regiones impermeables al flujo. A modo de ejemplo, las sentencias relacionadas con este aspecto son

```
L=[a a*f 1;b b*f 1;c c*f 1];
```

```
H=[g g*f 1];
```

```
R=[kx ky;kx ky;kx ky];
```

Las sentencias asociadas a las condiciones de contorno son:

```
LBC_B1_Fi1=[1, 1,0, Rinf;  
            2, 1,0, Rinf;  
            3, 1,0, Rinf];
```

```
LBC_B2_Fi1=[3, 1,0, Rinf];
```

```
LBC_B3_Fi1=[1, 2, 0, T1;  
            2, 1,0, Rinf;  
            3, 3, 0, T2];
```

```
LBC_B4_Fi1=[1, 1,0, Rinf];
```

```
%PBC_Fi1=[ 1.0, 1.0, 0, 1, 0.0];
```

La nomenclatura 'LBC\_B1' corresponde a condiciones de contorno lineales en posición Sur (fondo del dominio), 'LBC\_B2' a las condiciones de contorno lineales en posición Este (derecha del dominio), 'LBC\_B3' a la posición Norte (frontera superior) y 'LBC\_B4' a la posición Oeste (izquierda del dominio). No obstante es posible implementar en el programa condiciones de contorno que afecten a un solo punto del contorno.

A continuación se muestra un ejemplo, correspondiente a la geometría mostrada en la Figura 5.1, de las reticulaciones creadas por el programa usando la herramienta gráfica del propio MATLAB, Figuras 5.2 a 5.4. Se ha elegido un número de regiones y celdas pequeño para una mejor apreciación de los resultados.

Para el desarrollo del modelo se comenzó con geometrías muy sencillas, y que, a priori, se sabía cómo funcionarían como modelos con una sola región y modelos unidimensionales con pocas celdas. Resuelta la obtención de la función potencial y verificado, que el caudal de descarga era correcto, así como la analogía con el modelo eléctrico se pasó a geometrías más complicadas y comparables con problemas habituales en libros de geotecnia, para algunas de las cuales se conocían tanto soluciones gráficas como teóricas.

El aumento de densidad de mallado aumenta la precisión en los resultados pero llegado un espaciamiento suficientemente pequeño, apenas mejora la solución y ralentiza los cálculos. Otro aspecto importante es la longitud tomada en el modelo a la izquierda y a la derecha de la estructura estudiada, ya que es una dimensión que se suele obviar en los problemas tradicionales de redes de flujo.

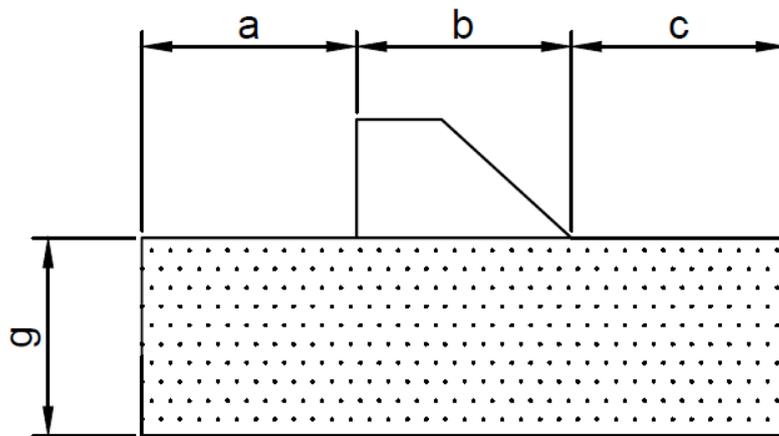
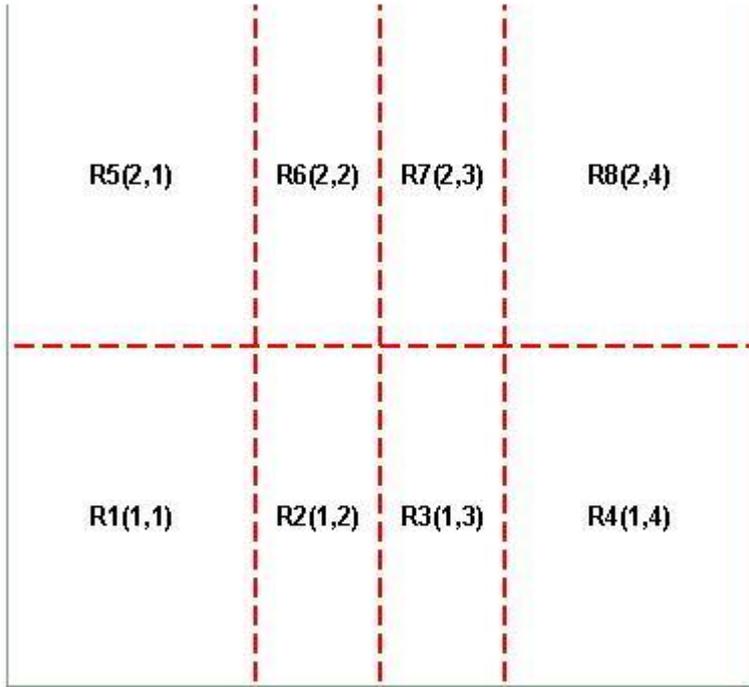
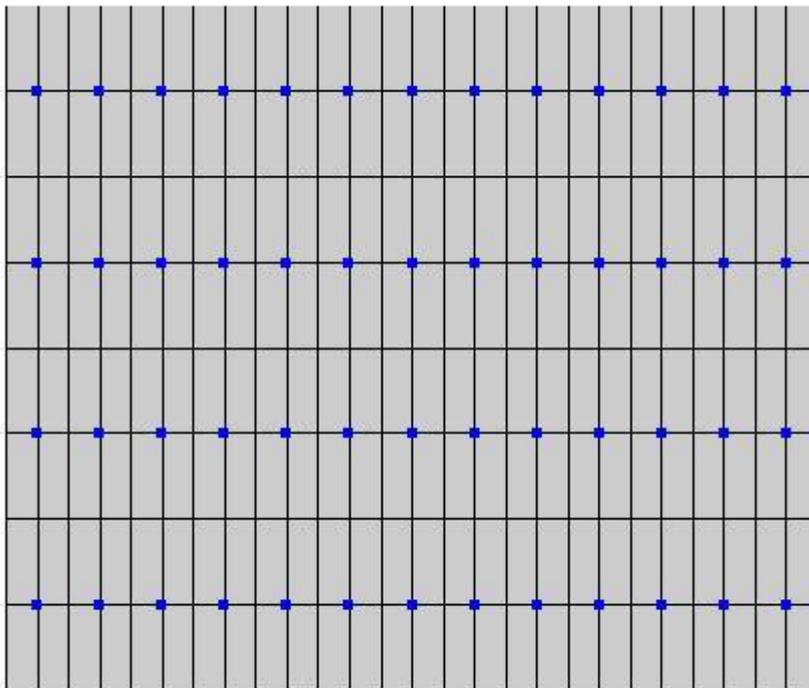


Figura 5.1 Ejemplo de problema de presa



Ejemplo de numeración de regiones

Figura 5.2



Ejemplo distribución de celdas

Figura 5.3

40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Figura 5.4

Ejemplo de numeración de celdas

### 5.3 Archivo de texto del modelo (de extensión ‘.cir’)

Lo esencial del modelo es su estructuración en celdas elementales, regiones o capas que contienen un número determinado de celdas, nudos interiores de celdas y regiones, y líneas de contorno de regiones y del dominio completo. El origen del dominio es el punto situado en la esquina inferior izquierda del mismo. La numeración es una sucesión ordenada de números naturales empezando por el 1 (celda inferior izquierda); las celdas se leen sucesivamente siguiendo líneas que van de abajo a arriba y de izquierda a derecha, mientras que los nudos se leen asignando el número 1 al borde inferior de la celda, el 2 al borde derecho, el 3 al superior y el 4 al inferior, Figura 5.5.

Dado que existen nudos que pertenecen a dos celdas, en los nudos comunes, para la numeración del nodo inferior se retiene el valor 3 (correspondiente a la celda contigua inferior) y el valor 2 (correspondiente a la celda situada a la izquierda); ello es necesario para identificar unívocamente cada nudo aunque se pierda cierta intuición en la nomenclatura.

Para acceder al entorno PSpice y editar el archivo de texto del modelo, con el explorador de archivos de Windows, se accede a la carpeta TEMPORAL “temp” ubicada en el mismo directorio donde está instalada la aplicación. Allí se encuentran los archivos de modelos, con extensión “.cir” y los archivos de salida de datos, con extensión “.out”. Cada problema genera dos archivos con los datos del modelo, uno con extensión “.cir”, con el nombre del modelo, y otro denominado “temporal.cir”. La simulación del modelo siempre se realiza sobre el “temporal.cir” por lo que los resultados de la simulación siempre se graban en el archivo “temporal.out”. De esta manera siempre quedan

guardados los archivos de datos de los modelos originales. Todos los archivos “.cir” se pueden manipular directamente en el entorno PSpice, lo que permite generar nuevos archivos “temporal.out” de versiones modificadas del modelo.

El uso del entorno gráfico PSpice requiere añadir al archivo de texto del modelo, de extensión “.cir”, una nueva línea “.PROBE” para que la simulación guarde todos los datos de la simulación en un nuevo archivo de extensión “.dat”.

Con todo, el archivo de texto del modelo que tiene que leer el programa Pspice está organizado en bloques ordenados de programa que definen sucesivamente:

- i) Información descriptiva del problema,
- ii) Organización de los parámetros geométricos y físicos, y de los parámetros de ajuste del programa,
- iii) Listado de componentes, uno por línea, con indicación de los nudos de conexión y valor,
- iv) Listado de los componentes que integran las condiciones de contorno organizados en líneas de contorno,
- v) Listado de las variables para las que se desea imprimir en forma tabulada los resultados de la simulación,
- vi) Sentencias complementarias finales.

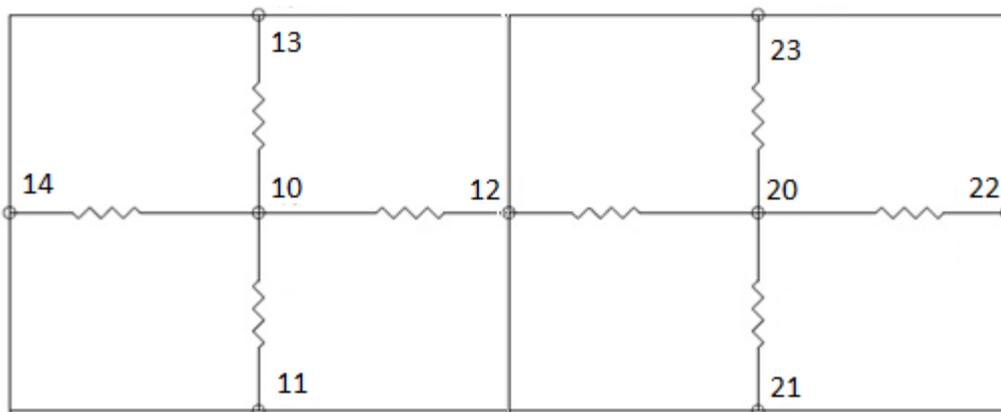


Figura 5.5 Ejemplo

de numeración y conexión de resistencias

Se describe, a continuación, un ejemplo de archivo de texto, separando los bloques o secciones que lo forman:

Bloque 1. Encabezado, parámetros del modelo

\*\* presa\_a\_920.cir Tipo de analisis: Seepageflow Analysis (2D cartesian coordinates)

\*\*\*\* CIRCUIT DESCRIPTION

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*EN PRUEBAS\*\*\*\*\*

\*\* PARAMETROS DEL MODELO

\* NX = 3700

\* NY = 20

\* NT(NXxNY)= 74000

\*\* PARAMETROS DE PSPICE

VPRU PRU1 0 1

RPRU PRU1 0 1

.OPTIONS NOPAGE RELTOL=2.00e-02

.OPTIONS NUMDGT=8

.DC VPRU 1 1 1

.PROBE

## Bloque 2. Listado de componentes (valor y nudos de conexión)

\*\* MODELO EN RED

\*\* Celdas Circuito A

R10\_11A 10A 11A 0.25

R10\_12A 10A 12A 1

R10\_13A 10A 13A 0.25

R10\_14A 10A 14A 1

\*\*

R20\_21A 20A 21A 0.25

R20\_22A 20A 22A 1

R20\_23A 20A 23A 0.25

R20\_12A 20A 12A 1

\*\*

R30\_31A 30A 31A 0.25

R30\_32A 30A 32A 1

R30\_33A 30A 33A 0.25

R30\_22A 30A 22A 1

\*\*

R40\_41A 40A 41A 0.25

R40\_42A 40A 42A 1

R40\_43A 40A 43A 0.25

R40\_32A 40A 32A 1

\*\*

R50\_51A 50A 51A 0.25

R50\_52A 50A 52A 1

R50\_53A 50A 53A 0.25

R50\_42A 50A 42A 1

\*\*

R60\_61A 60A 61A 0.25

R60\_62A 60A 62A 1

R60\_63A 60A 63A 0.25

R60\_52A 60A 52A 1

## Bloque 3. Listado de los elementos que componen las condiciones de contorno

```

**      IBC_B3 Bordes superiores en Circuito A
V9813A 9813A NrefSuperiorIso 5
V9823A 9823A NrefSuperiorIso 5
V9833A 9833A NrefSuperiorIso 5
V9843A 9843A NrefSuperiorIso 5
V9853A 9853A NrefSuperiorIso 5
V9863A 9863A NrefSuperiorIso 5
V9873A 9873A NrefSuperiorIso 5
V9883A 9883A NrefSuperiorIso 5
V9893A 9893A NrefSuperiorIso 5
V9903A 9903A NrefSuperiorIso 5
V9913A 9913A NrefSuperiorIso 5
V9923A 9923A NrefSuperiorIso 5
V9933A 9933A NrefSuperiorIso 5
V9943A 9943A NrefSuperiorIso 5
V9953A 9953A NrefSuperiorIso 5
V9963A 9963A NrefSuperiorIso 5
V9973A 9973A NrefSuperiorIso 5
V9983A 9983A NrefSuperiorIso 5
V9993A 9993A NrefSuperiorIso 5
V10003A 10003A NrefSuperiorIso 5
R9713A 9713A 0 1e+35
R9723A 9723A 0 1e+35
R9733A 9733A 0 1e+35
R9743A 9743A 0 1e+35
R9753A 9753A 0 1e+35
R9763A 9763A 0 1e+35
R9773A 9773A 0 1e+35
R9783A 9783A 0 1e+35
R9793A 9793A 0 1e+35
R9803A 9803A 0 1e+35
V9513A 9513A NrefSuperiorIso2 0
V9523A 9523A NrefSuperiorIso2 0
V9533A 9533A NrefSuperiorIso2 0
V9543A 9543A NrefSuperiorIso2 0

```

#### Bloque 4. Listado de la información tabulada de salida (datos para el postproceso)

```

** SECCION PRINT
PRINT DC V(10A,0)
PRINT DC V(11A,0)
PRINT DC V(12A,0)
PRINT DC V(13A,0)
PRINT DC V(14A,0)
PRINT DC V(20A,0)
PRINT DC V(21A,0)
PRINT DC V(22A,0)
PRINT DC V(23A,0)
PRINT DC V(12A,0)
PRINT DC V(30A,0)
PRINT DC V(31A,0)
PRINT DC V(32A,0)
PRINT DC V(33A,0)
PRINT DC V(22A,0)
PRINT DC V(40A,0)
PRINT DC V(41A,0)
PRINT DC V(42A,0)
PRINT DC V(43A,0)
PRINT DC V(32A,0)
PRINT DC V(50A,0)
PRINT DC V(51A,0)
PRINT DC V(52A,0)
PRINT DC V(53A,0)
PRINT DC V(42A,0)
PRINT DC V(60A,0)
PRINT DC V(61A,0)
PRINT DC V(62A,0)
PRINT DC V(63A,0)
PRINT DC V(52A,0)
PRINT DC V(70A,0)
PRINT DC V(71A,0)
PRINT DC V(72A,0)

```

Para finalizar este capítulo se muestra una sección del archivo de salida de Pspice, de extensión '.out', que contiene los datos (tabulados) solicitados de la simulación. La estructura de este archivo mezcla líneas de texto, con información específica de Pspice, y líneas que contienen los datos solicitados, organizados en columnas. Para convertir estos datos en matrices de valores numéricos se ha incluido en el programa de redes de flujo usado en esta memoria una subrutina que realiza esta función.

El bloque siguiente muestra la estructura del archivo de salida '.out' de Pspice.

### Bloque 5. Estructura del archivo de salida de Pspice

```
! ****      DC TRANSFER CURVES          TEMPERATURE =  27.000 DEG C

VPRU          V(739992A,0)
1.0000000E+00  3.5068879E-05

****      DC TRANSFER CURVES          TEMPERATURE =  27.000 DEG C

VPRU          I(vnu1aArrIso)
1.0000000E+00  -2.6801239E-09

****      DC TRANSFER CURVES          TEMPERATURE =  27.000 DEG C

VPRU          I(vnu1aArrIso2)
1.0000000E+00  2.6801239E-09
```

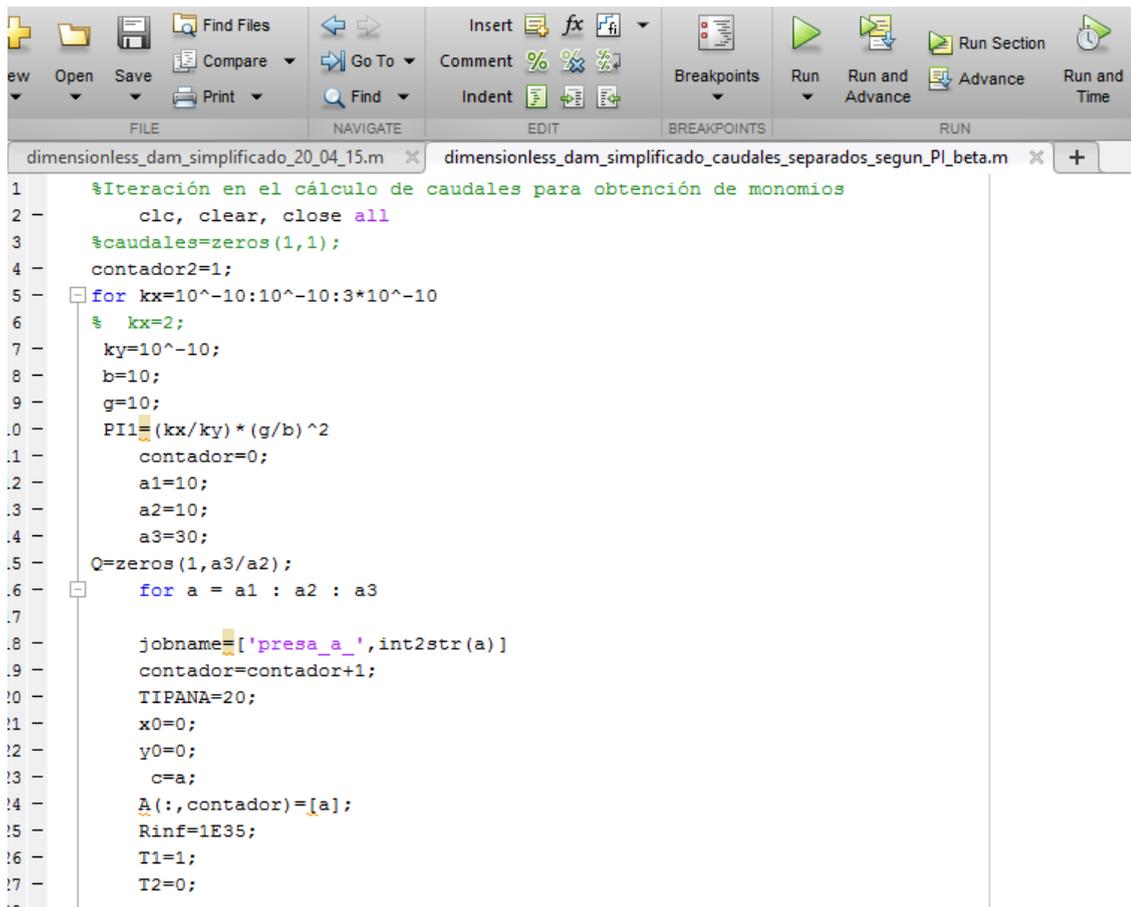
## 5.4 El proceso iterativo en MATLAB

Para conseguir los resultados de caudales buscados ha sido necesaria la creación de varias subrutinas de simulación y almacenamiento de datos, para la correcta organización de valores en función de las variables obtenidas. Además de ser posible la simulación de casos concretos para la obtención de resultados de un escenario concreto, gracias a esta variación es posible la simulación de distintos valores en un amplio rango para obtener una visión global del problema de flujo por debajo de presas impermeables.

Los monomios adimensionales utilizados en este programa para la obtención de los caudales son

$$\pi_2 = \frac{a}{e} \text{ y } \pi_1 = \left(\frac{K_x}{e^2}\right) \left(\frac{d^2}{K_y}\right)$$

Por otro lado, en algunas variables los valores se introducen de manera semejante a casos particulares y para lograr la iteración ha sido necesario establecer diferentes valores iniciales y finales, así como el salto entre los valores intermedios, es decir, el tamaño de paso.



```
1 %Iteración en el cálculo de caudales para obtención de monomios
2 -   clc, clear, close all
3   %caudales=zeros(1,1);
4   contador2=1;
5   for kx=10^-10:10^-10:3*10^-10
6     % kx=2;
7     ky=10^-10;
8     b=10;
9     g=10;
10    PI1=(kx/ky)*(g/b)^2
11    contador=0;
12    a1=10;
13    a2=10;
14    a3=30;
15    Q=zeros(1,a3/a2);
16    for a = a1 : a2 : a3
17
18      jobname=['presa_a_',int2str(a)]
19      contador=contador+1;
20      TIPANA=20;
21      x0=0;
22      y0=0;
23      c=a;
24      A(:,contador)=[a];
25      Rinf=1E35;
26      T1=1;
27      T2=0;
```

Como podemos ver en la captura de pantalla se establecen, teniendo en cuenta como han sido agrupados los monomios adimensionales, los valores iniciales y finales así como cada cuanto se realizarán simulaciones con valores intermedios. Consecuencia de este paso tendremos un número de simulaciones, que cuanto mayor sea, mayor será la optimización de nuestro resultado.

Las variables a, b, c y g corresponden al siguiente esquema:

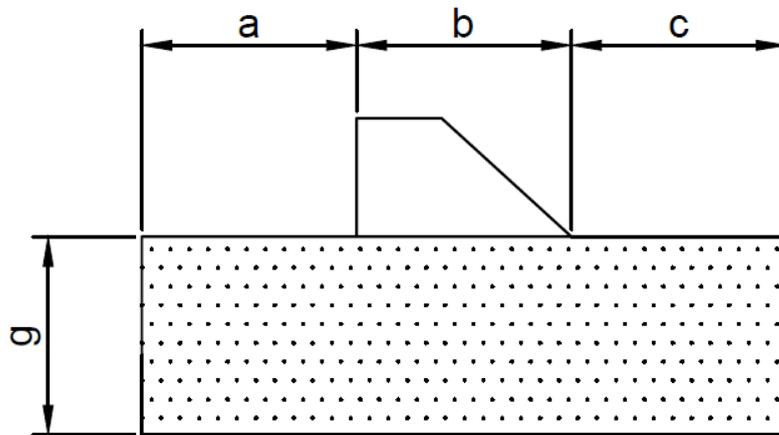


Figura 5.6 Esquema de las variables

En el caso que se muestra en la captura de pantalla tenemos que para la variación de los citados monomios mediante los valores de  $k_x$  y  $a$ :

$K_x = K_{xi} : K_{xp} : K_{xs}$

$K_{xi}$  es el primer valor de permeabilidad, el valor inicial desde el que se simula

$K_{xp}$  el tamaño de paso, es decir, cada cuanto se realiza la simulación

$K_{xs}$  el valor más alto hasta el que se realizarán simulaciones

Igual ocurre con los valores de  $a$  que se corresponde con el ancho de la presa donde encontramos:

$a_1$  longitud inicial

$a_2$  tamaño de paso

$a_3$  longitud final

```

res_ospice=cell2mat(lin_i');
Vk0(1)=eval(res_ospice(1,v)) ;
V(1,1)=[Vk0]
% Guarda los resultado de cada caudal en para un mismo valor de kx
Q(1,contador)=[V];
A(1,contador)=[a];
% -- salva los resultados del .out ospice
nombre_res_ospice=strcat(jobname,'_q');
save(nombre_res_ospice,'V');
% ['presa_a_',int2str(contador2)]
% ['presa_a_',int2str(contador2)]
    end

% Guarda los resultados de cada Q en función del kx y guardamos los
% valores de kx y ky empleados
contador2=1+contador2
save(nombre_res_ospice,'Q');
% caudales(1,:)=A];
caudales(contador2-1,:)=Q];
KX(contador2,:)=kx]'
KY(contador2,:)=ky]'

```

Además de establecer el rango de valores para el que variarán los valores de las variables es necesario el correcto almacenamiento de los datos de manera ordenada y clara para cada una de las veces que el programa lleva a cabo la simulación y que no se produzcan confusiones. Así las principales variables van siendo ordenadas en matrices con los diferentes valores para después ser interpretados y tratados.

```

% Guarda los resultados de cada Q en función del kx y guardamos los
% valores de kx y ky empleados
contador2=1+contador2
save(nombre_res_ospice,'Q');
% caudales(1,:)=A];
caudales(contador2-1,:)=Q];
KX(contador2,:)=kx]'
KY(contador2,:)=ky]'
end
Resultados=horzcat(KY,KX);
Acaudales=vertcat(A,caudales);
Resultados=horzcat(Resultados,Acaudales);
beep

```

Los valores quedan guardados en una matriz de tamaño considerable, que depende del número de valores que hayamos programado, siendo compatibles y coherentes entre sí.

La forma de obtención de dicha matriz es también mediante la composición de distintas matrices

Variable KX

Variables - KX

KX x

KX <8x1 double>

	1	2
1	0	
2	1.0000e-10	
3	2.0000e-10	
4	3.0000e-10	
5	4.0000e-10	
6	5.0000e-10	
7	6.0000e-10	
8	7.0000e-10	
9		

Variable KY

Variables - KY

KY x

KY <8x1 double>

	1	2
1	0	
2	1.0000e-10	
3	1.0000e-10	
4	1.0000e-10	
5	1.0000e-10	
6	1.0000e-10	
7	1.0000e-10	
8	1.0000e-10	

Variable A

Variables - A

A x

A <1x5 double>

	1	2	3	4	5	6
1	10	20	30	40	50	
2						
3						
4						

Variable CAUDALES

Variables - caudales

Resultados x caudales x

caudales <7x5 double>

	1	2	3	4	5	6
1	5.0753e-11	5.2235e-11	5.2299e-11	5.2302e-11	5.2302e-11	
2	8.0838e-11	8.7343e-11	8.8072e-11	8.8152e-11	8.8160e-11	
3	1.0306e-10	1.1572e-10	1.1791e-10	1.1827e-10	1.1833e-10	
4	1.2102e-10	1.3981e-10	1.4404e-10	1.4494e-10	1.4512e-10	
5	1.3633e-10	1.6086e-10	1.6749e-10	1.6916e-10	1.6957e-10	
6	1.4984e-10	1.7963e-10	1.8884e-10	1.9148e-10	1.9222e-10	
7	1.6203e-10	1.9662e-10	2.0849e-10	2.1227e-10	2.1344e-10	
8						

### Variable ACAUDALES

Variables - Acaudales

A x Acaudales x

Acaudales <8x5 double>

	1	2	3	4	5	6
1	10	20	30	40	50	
2	5.0753e-11	5.2235e-11	5.2299e-11	5.2302e-11	5.2302e-11	
3	8.0838e-11	8.7343e-11	8.8072e-11	8.8152e-11	8.8160e-11	
4	1.0306e-10	1.1572e-10	1.1791e-10	1.1827e-10	1.1833e-10	
5	1.2102e-10	1.3981e-10	1.4404e-10	1.4494e-10	1.4512e-10	
6	1.3633e-10	1.6086e-10	1.6749e-10	1.6916e-10	1.6957e-10	
7	1.4984e-10	1.7963e-10	1.8884e-10	1.9148e-10	1.9222e-10	
8	1.6203e-10	1.9662e-10	2.0849e-10	2.1227e-10	2.1344e-10	
9						

Esta matriz se llama "Resultados" y ordena los valores siempre de la misma manera. Estos resultados pueden ser tratados y manipulados tanto por Matlab como exportados a Excel para una mejor asimilación, análisis y representación gráfica.

### Variable Resultados

Variables - Resultados

Resultados ×

Resultados <8x7 double>

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	10	20	30	40	50	
2	1.0000e-10	1.0000e-10	5.0753e-11	5.2235e-11	5.2299e-11	5.2302e-11	5.2302e-11	
3	1.0000e-10	2.0000e-10	8.0838e-11	8.7343e-11	8.8072e-11	8.8152e-11	8.8160e-11	
4	1.0000e-10	3.0000e-10	1.0306e-10	1.1572e-10	1.1791e-10	1.1827e-10	1.1833e-10	
5	1.0000e-10	4.0000e-10	1.2102e-10	1.3981e-10	1.4404e-10	1.4494e-10	1.4512e-10	
6	1.0000e-10	5.0000e-10	1.3633e-10	1.6086e-10	1.6749e-10	1.6916e-10	1.6957e-10	
7	1.0000e-10	6.0000e-10	1.4984e-10	1.7963e-10	1.8884e-10	1.9148e-10	1.9222e-10	
8	1.0000e-10	7.0000e-10	1.6203e-10	1.9662e-10	2.0849e-10	2.1227e-10	2.1344e-10	
9								

### 6.1 Región finita/infinita

Una de las posibles aplicaciones del programa es la creación de una gráfica (en función de los monomios  $\pi_1$  y  $\pi_2$  anteriormente descritos en el apartado 5.4), que separa la región finita de la infinita, con el objetivo de poder reducir el escenario de presa.

Es decir, si dicho escenario se encontrara en un punto superior a la curva (P1) este podría ser reducido a lo largo de  $\pi_2$  (eje y) hasta encontrarse con la región finita (P2), donde su caudal sería idéntico al que tenía al inicio (P1). Figura 6.1.

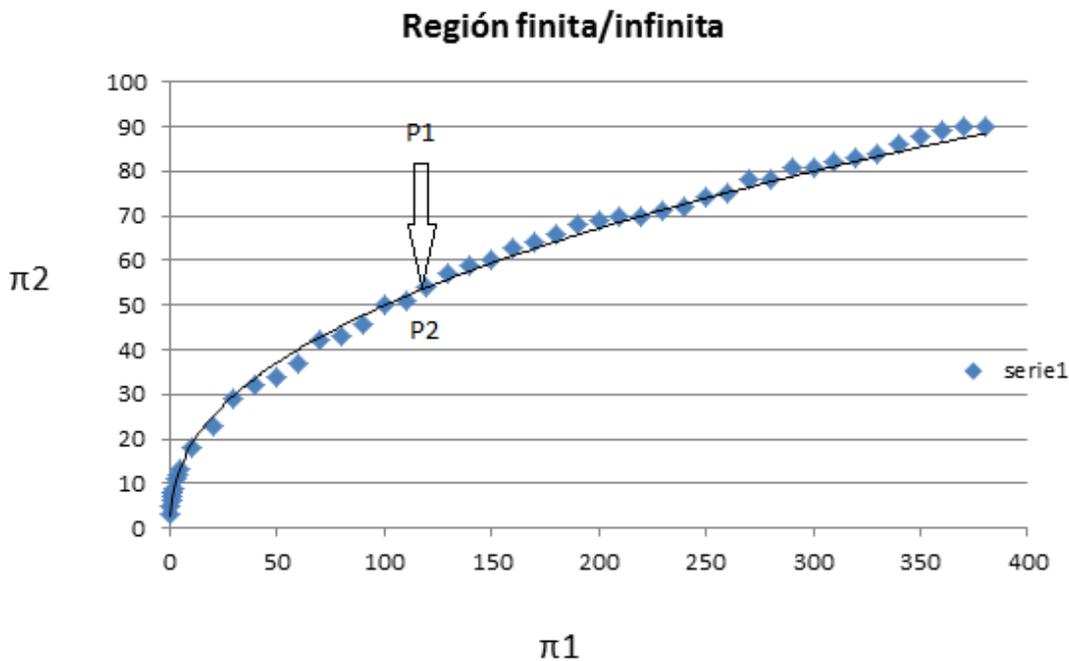


Figura 6.1 Región finita/infinita

La forma de obtener los puntos para crear la curva Región finita/ infinita es la siguiente.

Se han simulado monomios desde  $\pi_1 = 0.1$  hasta  $\pi_1 = 380$ , con un primer tramo de  $\pi_1 = 0.1$  hasta 5 con intervalos de 0.3, y un segundo tramo de  $\pi_1 = 10$  hasta 380 con intervalos de 10.

En cada uno de los  $\pi_1$  elegidos (en este caso ponemos de ejemplo  $\pi_1=40$ ) se ha realizado la simulación de los escenarios variando el monomio  $\pi_2$  (En nuestro caso empezamos desde  $\pi_2=30$ ), lo cual implica ir aumentando el escenario de presa, ya que este depende de la variable “a”, hasta que la diferencia de caudales obtenidos entre dos valores de  $\pi_2$  sea igual a cero, como se muestra en la figura 6.2.

a	300	310	320	330	340	350
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1
Kx	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08
Ky	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09
e	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10
c	300	310	320	330	340	350
$\pi_1$	40	40	40	40	40	40
$\pi_2$	30	31	32	33	34	35
f	2	2	2	2	2	2
NT	24400	25200	26000	26800	27600	28400
Q	4,00E-08	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09
$\Delta Q$		-3,3306E-08	9E-16	4E-16	5E-16	0
Resultado		continua	continua	continua	continua	exito

Figura 6.2 Ejemplo  $\pi_1=40$

Estos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  obtenidos se convierten en un punto de la curva de región finita/infinita (en nuestro ejemplo el punto será  $\pi_1=40$  y  $\pi_2=35$ ) consiguiendo una vez simulados todos los monomios, dicha Región. Figura 6.3

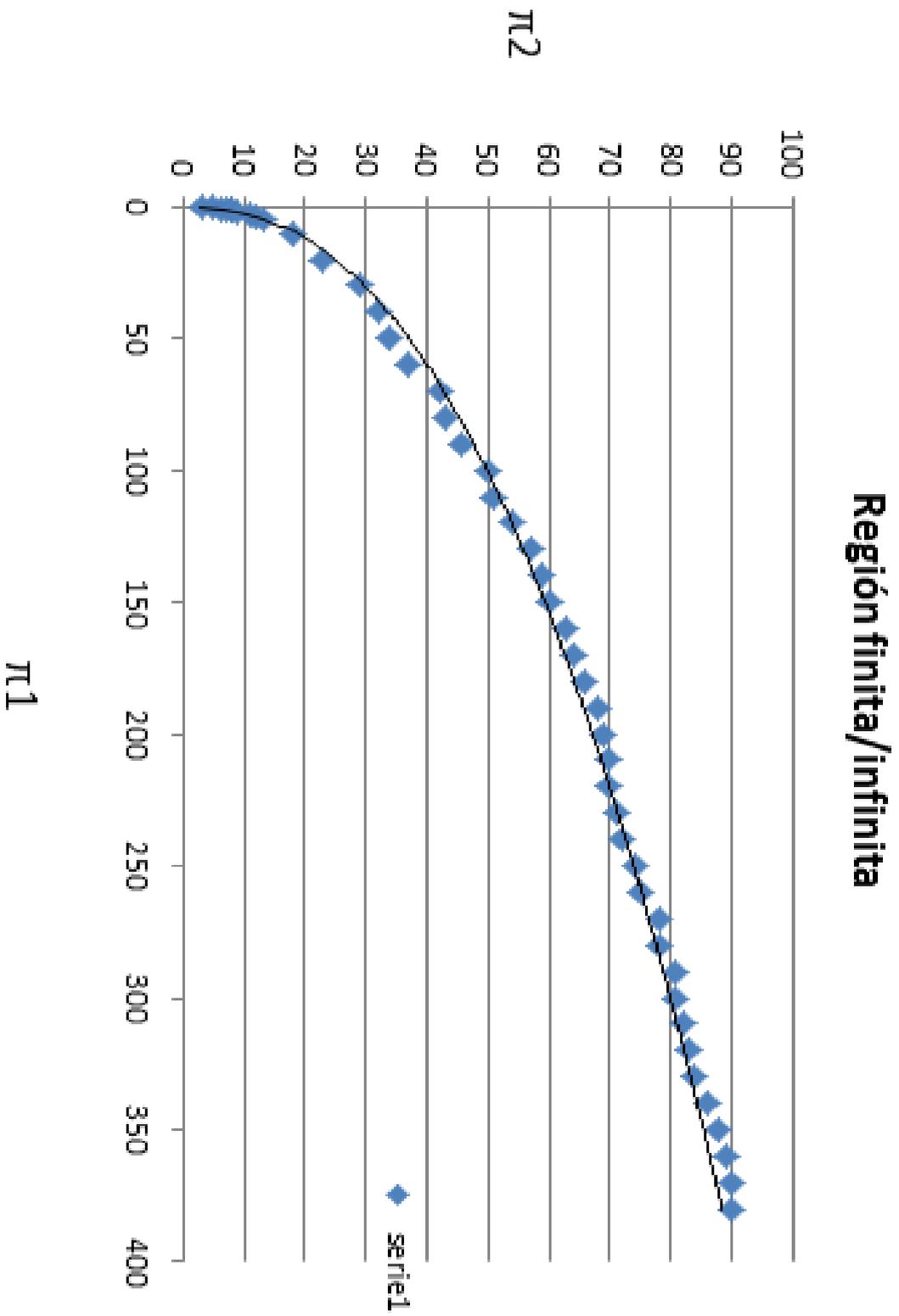


Figura 6.3 Región Finita/Infinita

## 6.2 Curva de caudales

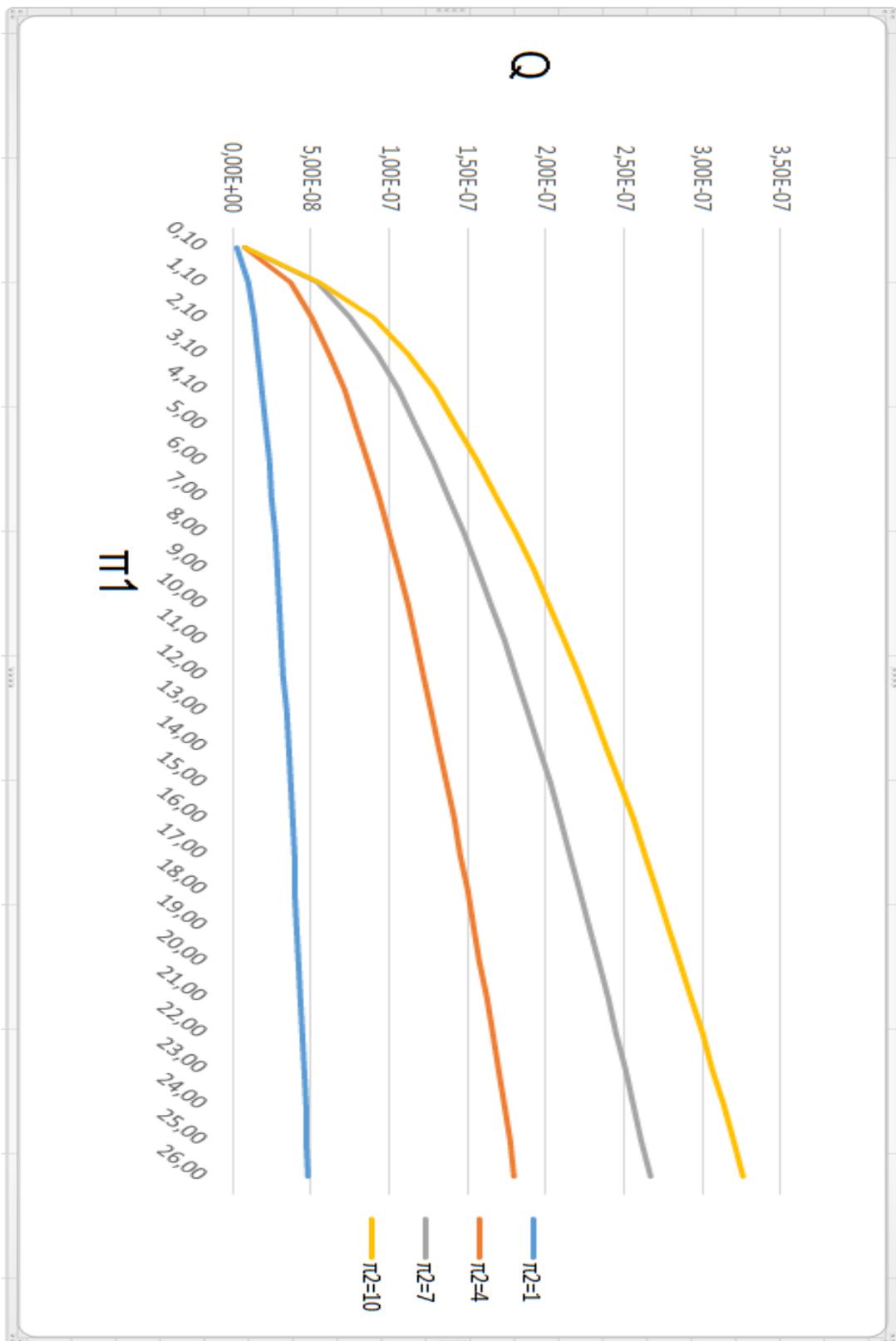
Una vez obtenido el valor de la expresión que nos permite la reducción del escenario:

$$Y = 0.0086X^{2.44}$$

Realizamos un barrido de valores de los monomios  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , en el que se establece en un primer lugar la variación del monomio  $\pi_1$  a partir de la modificación de la permeabilidad en el eje horizontal y para cada monomio  $\pi_1$  se realiza un 'barrido' de los valores de  $\pi_2$  posibles, teniendo un sentido físico. Repitiendo esto para diferentes valores de  $\pi_1$  podemos obtener las curvas de caudal adimensional, en función de los valores de las variables de cualquier problema.

Para la elaboración de dicho gráfico se ha llevado a cabo un proceso iterativo, adaptado del código para la elaboración del ábaco, que separaba la región finita e infinita para guardar los diferentes valores de las variables, de los monomios y sus caudales correspondientes.

Esto nos permite una rápida aproximación a la cantidad de flujo que pasa bajo la cimentación de la presa de una manera instantánea.



Los valores de los monomios para los caudales adimensionales, se han simulado para los valores de las variables con un sentido físico más útil.

### 6.3 Comparación con otros métodos

En este apartado se realiza la comparación de un ejemplo de la bibliografía del autor Lambe con el programa comercial Seep/W para comprobar los caudales adimensionales calculados en el apartado anterior.

Esto también permite confirmar que el ábaco de región finita/infinita que se ha deducido podría ser incorporado a estos programas comerciales para conseguir minimizar el escenario de presa, simplificando cálculos y reduciendo considerablemente el tiempo empleado en ello.

El ejemplo propuesto por Lambe es el siguiente y que a su vez utiliza como validación y verificación el programa PLAXIS :3D en su manual:

**Input:** The dams are founded on a impervious isotropic soil (Figure 1). The coefficient of permeability of the soil is  $5.0 \times 10^{-6}$  m/sec. Seepage under the dams and the uplift water pressure head at point A (the toe of the dam) are calculated for the three cases: one using the flow net method presented by (Lambe & Whitman, 1979), and one using PLAXIS. Note that the model is extended by 1 m in the y-direction in PLAXIS 3D.

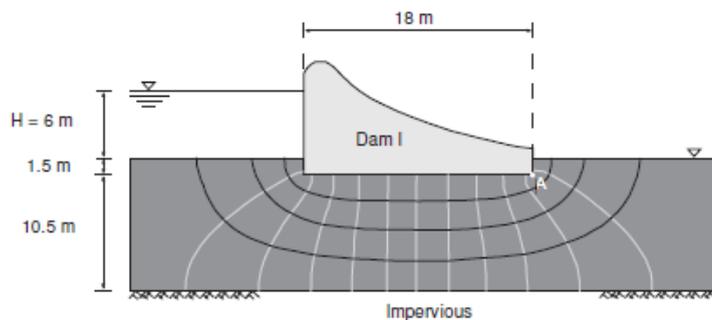


Figure 1 Geometry and the potential heads in dam I without a screen, (Lambe & Whitman, 1979)

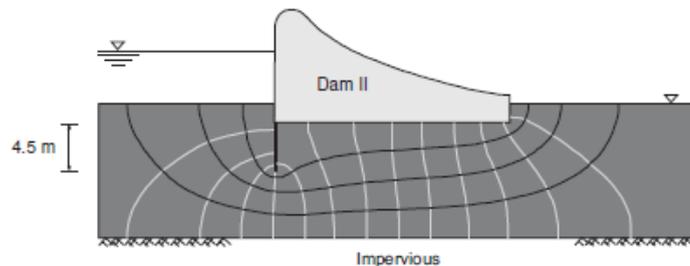


Figure 2 Geometry and the potential heads in dam II, with a screen at the upstream side, (Lambe & Whitman, 1979)

A continuación se presentan los dos ejemplos de escenario de Lambe en el programa Seep/W:



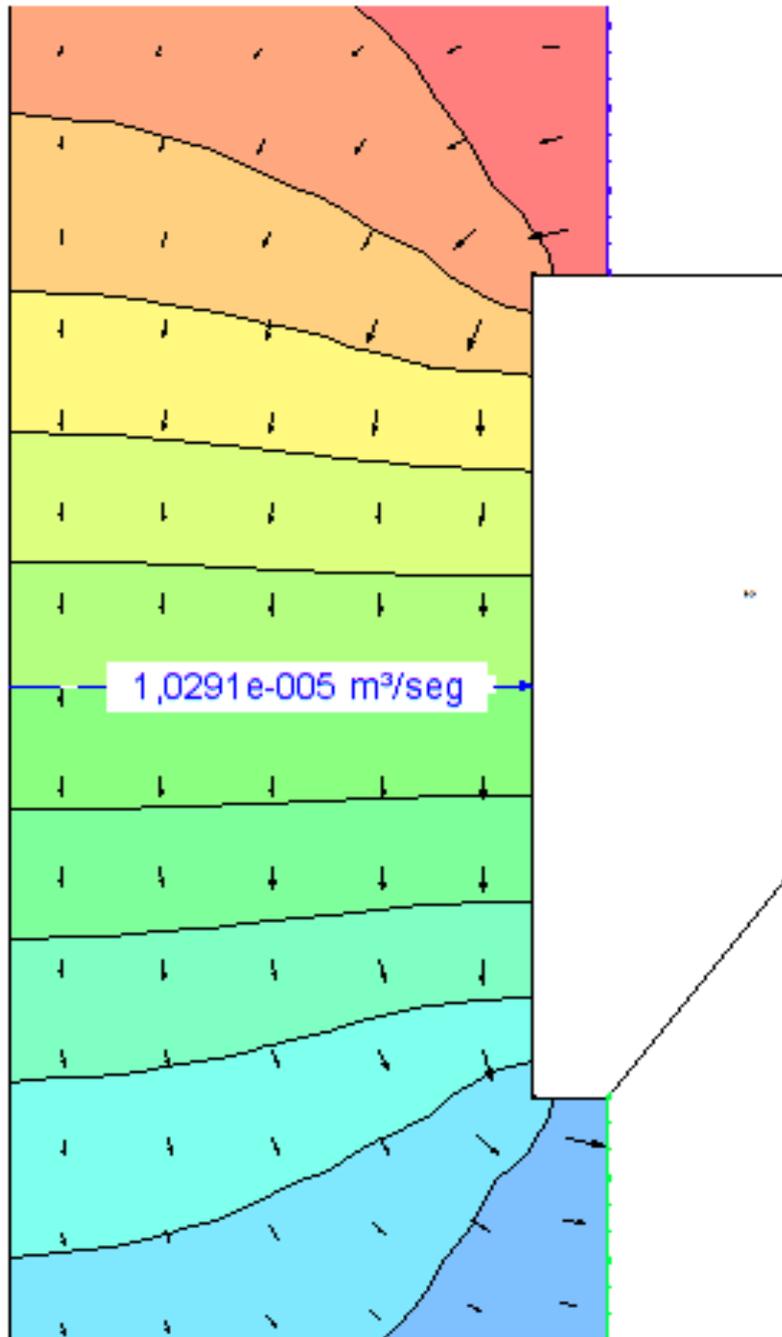


Figura 6.6 Caudal obtenido caso 1

## Caso2 (Con pantalla)

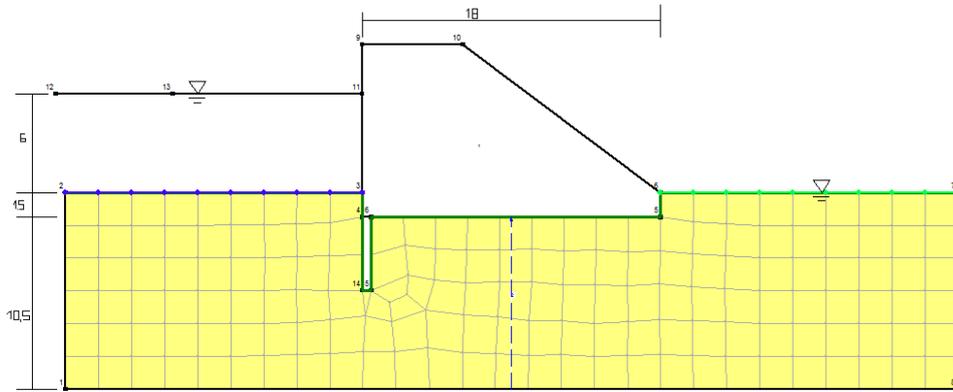


Figura 6.7 Definición en Seep/w caso 2

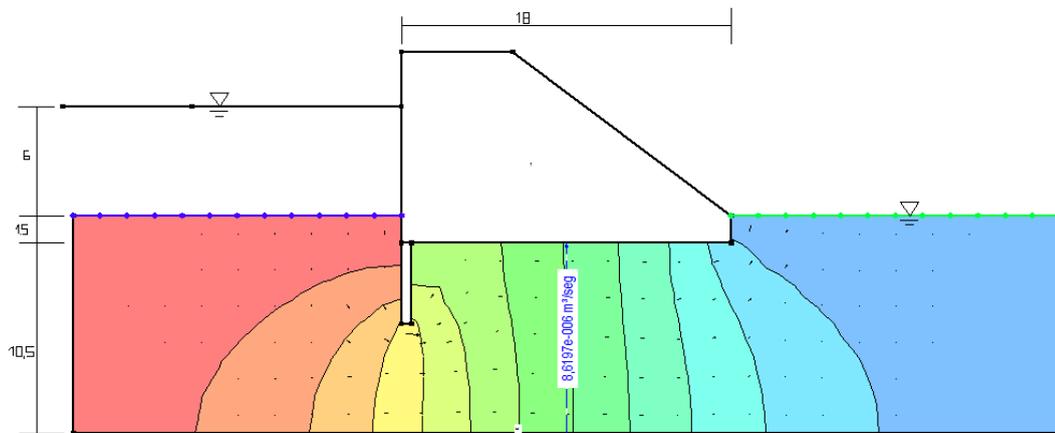


Figura 6.8 Resultados en seep/w caso 2

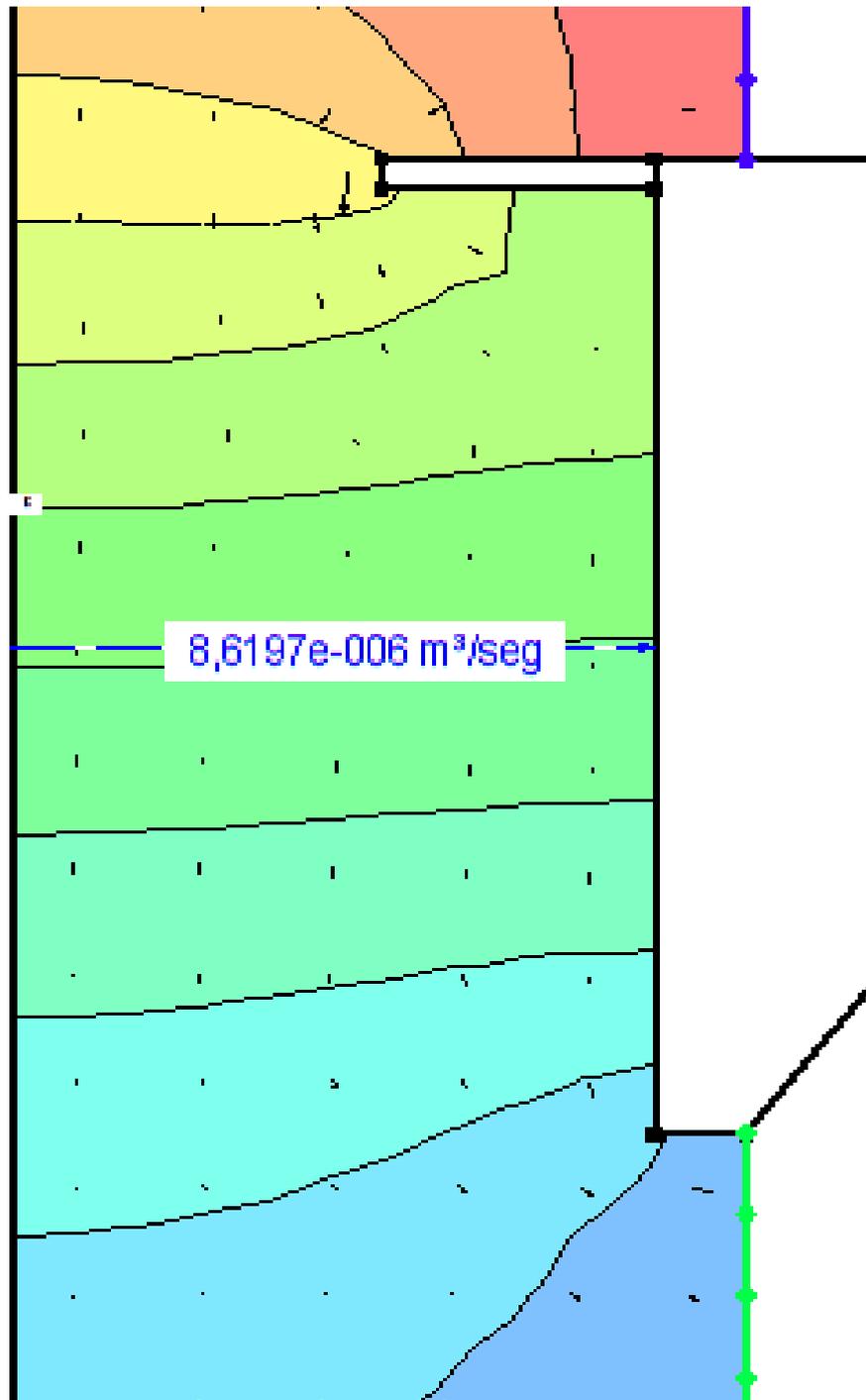


Figura 6.9 Caudal caso 2

Finalmente se muestra en la tabla 6.1 un resumen de los datos logrados en Seep/W comparados con los resultados de Lambe.

	<b>SEEP/W</b>	<b>Lambe</b>	<b>Plaxis</b>
<b>Caso1</b>	1,0291E-05	1,0290E-05	1,0300E-05
<b>caso2</b>	8,6197E-06	8,84E-06	8,70E-06

Tabla 6.1

Podemos observar que ambos resultados son prácticamente iguales por lo que se confirma la propuesta del inicio.

## 6.4 Otras posibles aplicaciones

### 6.4.1 Escenario de presa y escenario de pantalla

En este apartado vamos a mostrar dos posibles aplicaciones del programa de Matlab creado, que se basan en la modificación de este programa inicial:

El primer programa, llamado "*Presa sin pantalla*", nos permitirá centrarnos en un único escenario de presa obteniendo su correspondiente caudal y una manera cualitativa de interpretar los datos.

El segundo programa, "*Escenario de pantalla*", consigue representar otro tipo de escenario al introducir una pantalla bajo la presa, dando también como resultado su correspondiente caudal y la interpretación cualitativa de los datos.

- **Presa sin pantalla:**

Para conseguir lo anteriormente mencionado se toma como base el programa inicial que consta de una subrutina para poder ser leído por pspice, y una segunda subrutina con la que acceder y ser ejecutado por pspice, tal como se explica en el capítulo primero.

El escenario que vamos a estudiar es el siguiente:

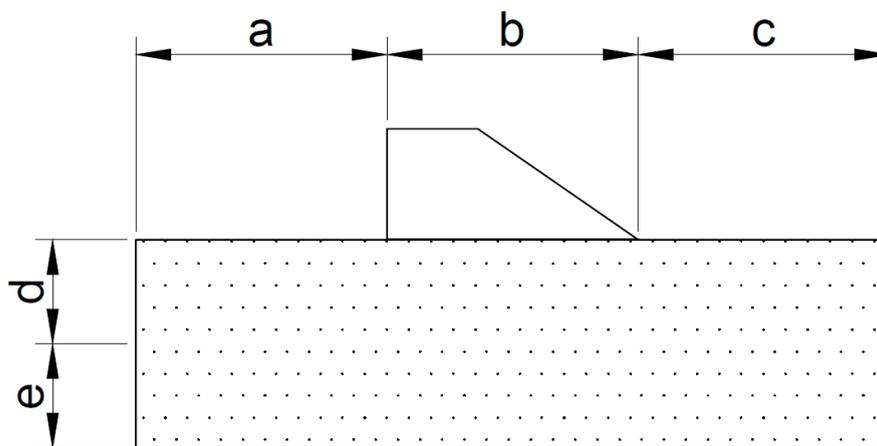


Figura 6.10 Escenario Presa sin pantalla

La forma de introducir los datos será similar: origen de coordenadas,  $x_0$  e  $y_0$ ; conductividad hidráulica en las dos direcciones,  $k_x$  y  $k_y$ ; potencial en metros a la izquierda y a la derecha de la presa o pantalla,  $T_1$  y  $T_0$ ; y las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  que se incorporaran conforme al esquema de la figura 6.10.

Esto se realiza directamente en las sentencias del programa que, como ejemplo, se presentan a continuación.

```
presa_10_9_2015_sin_pantalla.m x
1      %Prueba para el calculo de redes completas de flujo
2
3
4 -     clc, clear, close all
5 -     jobname='ppstream';
6 -     TIPANA=20;
7 -     x0=0;
8 -     y0=0;
9 -     kx=0.000005;
10 -    ky=kx;
11 -    Rinf=1E35;
12 -    T1=6;
13 -    T2=0;
14 -    a=18
15 -    b=18
16 -    c=18
17 -    d=5,5
18 -    e=5
19 -    f=1
```

De la misma manera que se hacía en el programa inicial, la geometría y el número de celdas asociados a cada región se introducen como datos de altura H y longitud L de las regiones y su número de divisiones.

```

20 -             ndiv=10;
21 -     L=[a a*f 1;1 1 1;b b*f 1;c c*f 1];
22 -     H=[d d*f 1;e e*f 1];
23 -     R=[kx ky;kx ky;kx ky;kx ky;kx ky;kx ky;kx ky;kx ky];

```

Las sentencias asociadas a las condiciones de contorno son:

```

24 -     LBC B1 Fi1=[1, 2,0, T2;
25 -             2, 2,0, T2;
26 -             3, 2,0, T2;
27 -             4, 2,0, T2;];
28 -     LBC B2 Fi1=[4, 2,0, T2;
29 -             8, 2,0, T2;];
30 -     LBC B3 Fi1=[8, 1, 0, Rinf;
31 -             6, 2,0, T1;
32 -             5, 1, 0, Rinf;
33 -             7, 2,0, T1;];
34 -     LBC B4 Fi1=[1, 2,0, T2;
35 -             5, 2,0, T2;];

```

La modificación del primer programa que permite mostrar la representación visual y interpretación cualitativa de la solución del problema es la siguiente.

```

138 -     load('pppotential_outspice.mat')
139 -     load('pppotential_res.mat')
140 -     %Dibujo equipotenciales y líneas de flujo
141 -     figure,
142 -     hold on
143 -     pintaregiones(L,H,R)
144 -     contour(X,Y,P)
145 -     contour(X,Y,Q,5,'b')
146 -     figure, contourf(X,Y,P)
147 -     [FX,FY]=gradient(P);
148 -     figure,quiver(X,Y,FX,FY)
149 -     i=((FX.^2+FY.^2)).^(1/2);
150 -     figure,surface(X,Y,i)
151 -     figure,surface(X,Y,FY)
152

```

Así en la figura 6.11 se representa las regiones definidas en el problema que os permite simular las condiciones de contorno del problema que estamos representado, mediante el código programado es

posible representar de la manera clásica las redes de flujo formadas por las líneas de flujo y equipotenciales, permitiéndonos una rápida interpretación del fenómeno físico (figura 6.12)., de manera separada es posible también representar las isolíneas de potencial y de flujo pudiéndolas estudiar de manera separada sin querer prestar atención a una de las dos en concreto, con las figuras 6.15 y 6.16 podemos ver tanto el gradiente como el modulo del vector velocidad del agua a través del terreno del que podemos interpretar las zonas en las que podría haber riesgo de sifonamiento, es decir, donde el vector velocidad vertical hacia arriba es mayor. Además Matlab nos permite la representación continua en la malla incorporando funciones de interpolación y extrapolación, como puede apreciarse en las figuras 6.17 y 6.18.

Figuras resultantes:

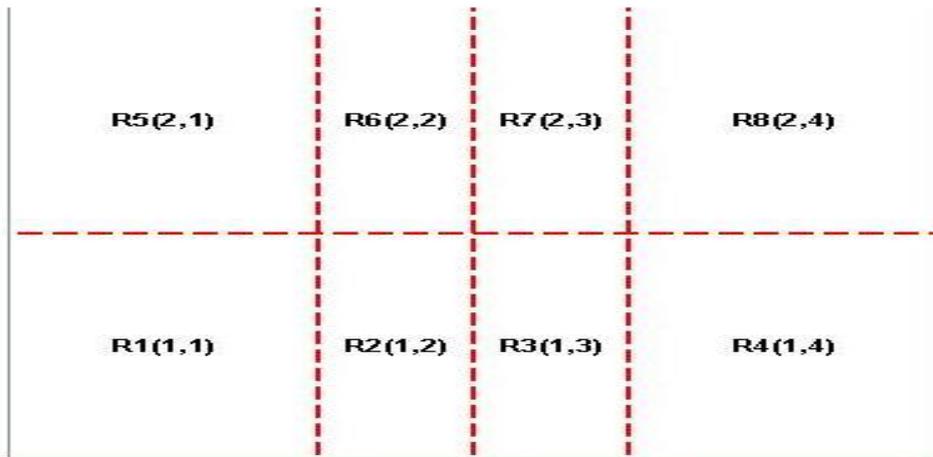
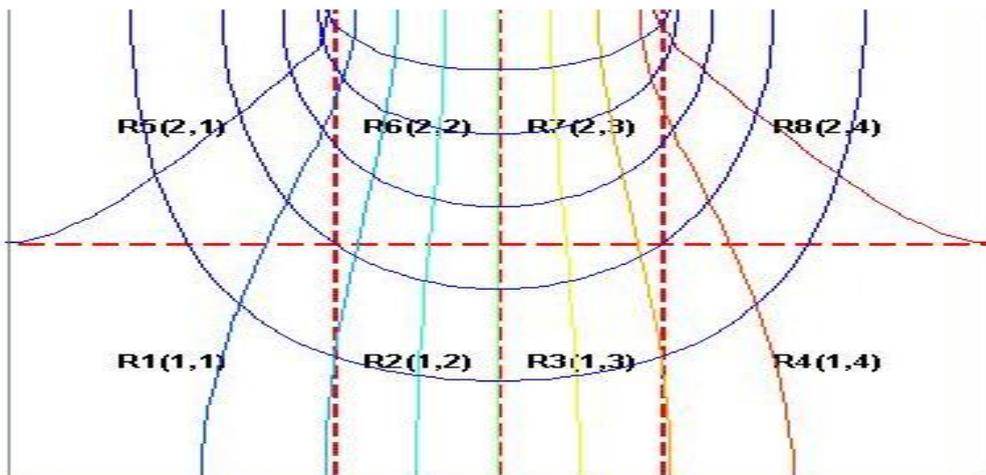


Figura 6.11 Representación de la regiones



6.12 Representación de la red de flujo

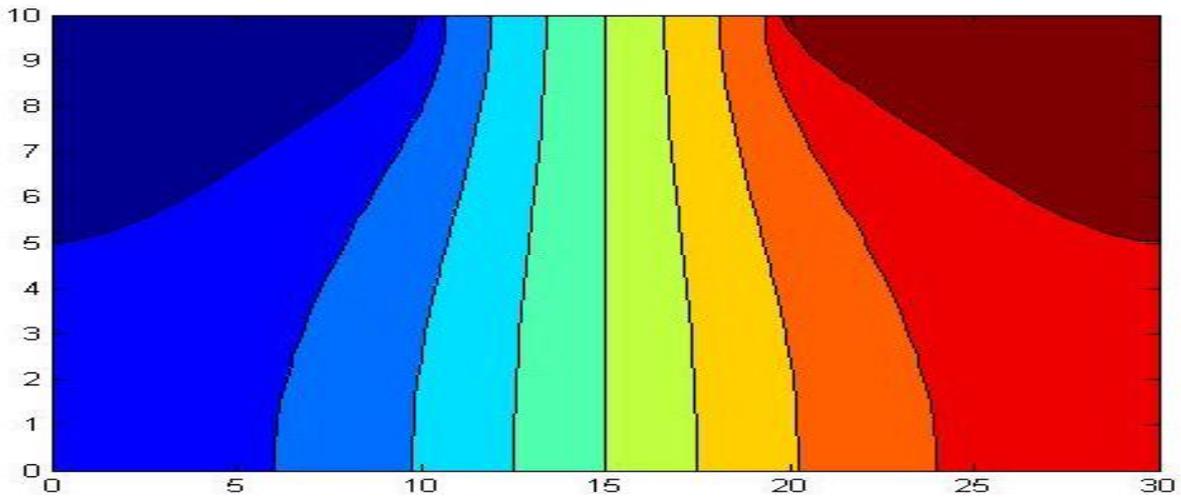


Figura 6.13 Representación de las líneas equipotenciales

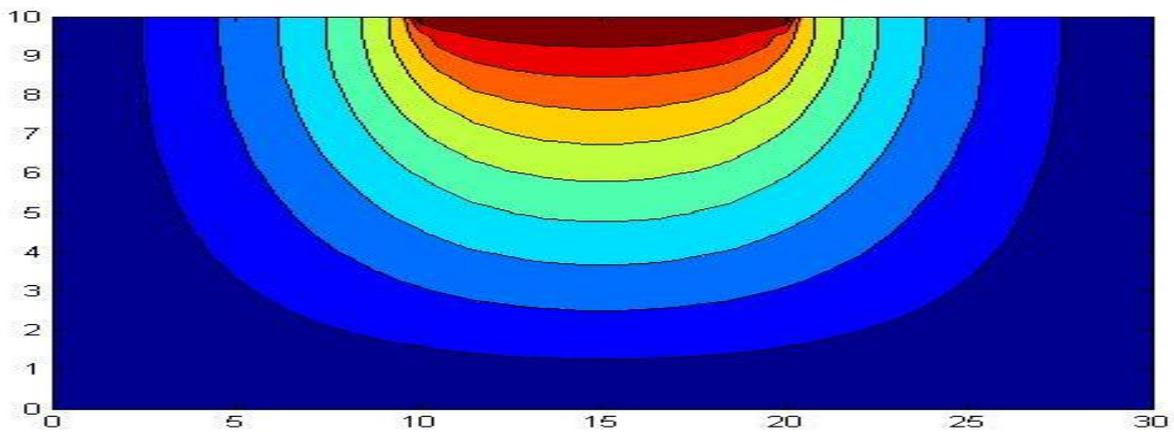


Figura 6.14 Representación de las isolíneas de flujo

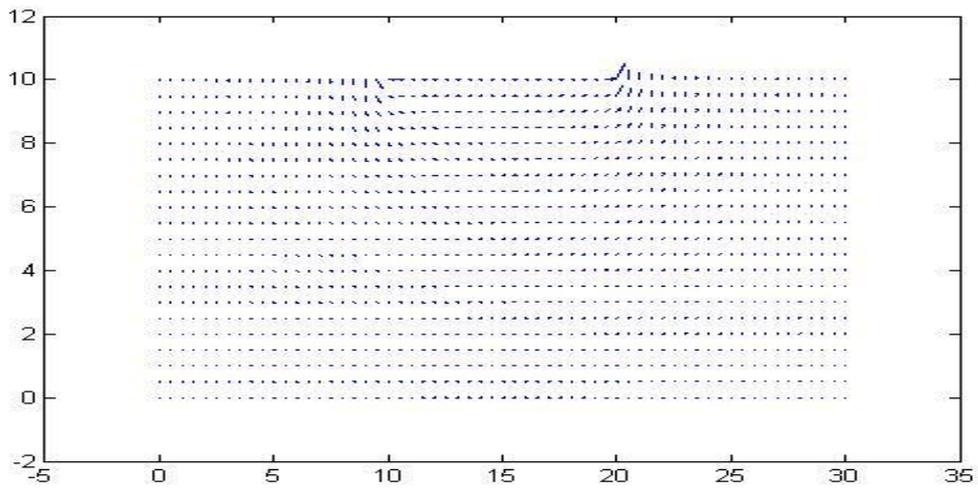


Figura 6.15 Representación del vector velocidad

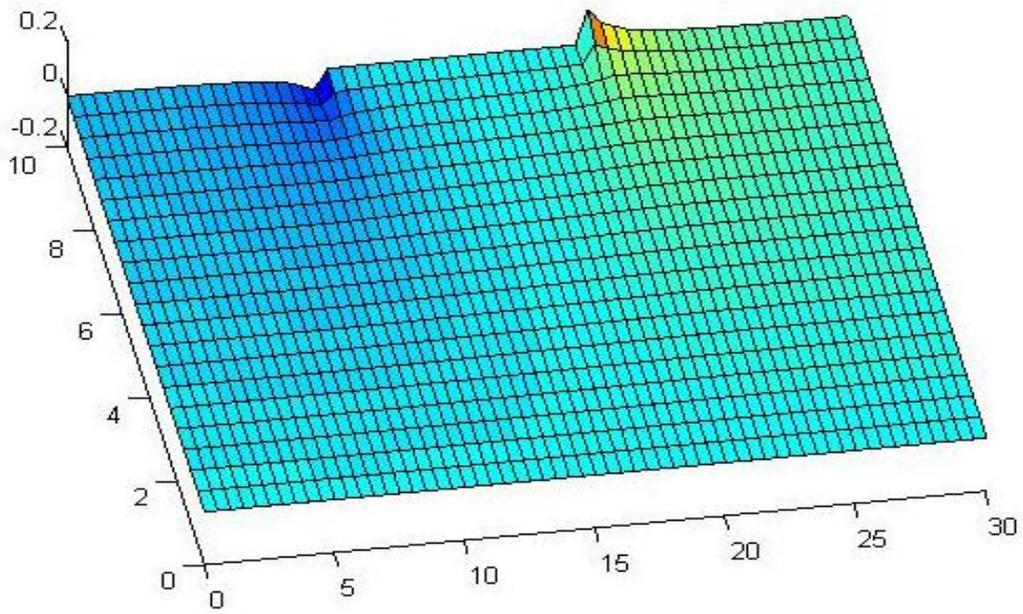


Figura 6.16 Representación del gradiente de velocidad

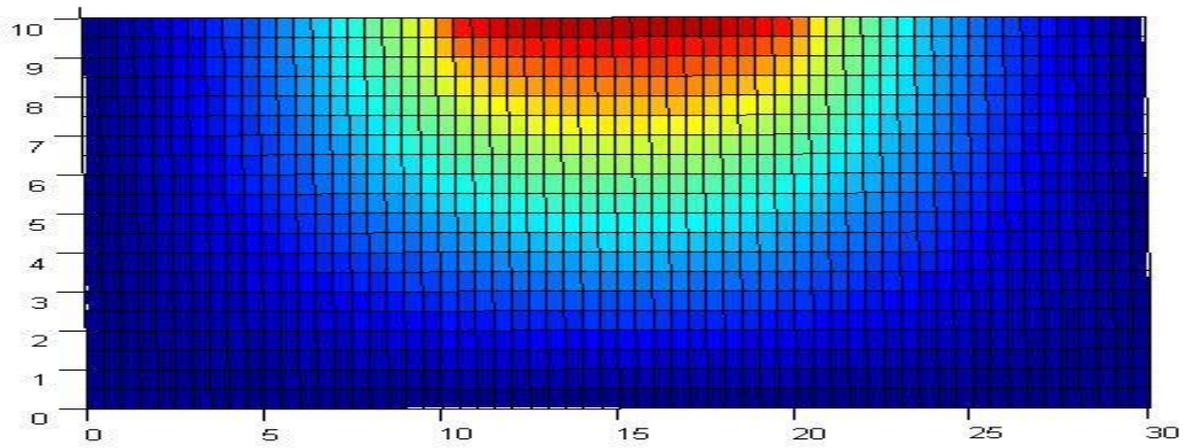


Figura 6.17 Representación de la función  $\Psi$

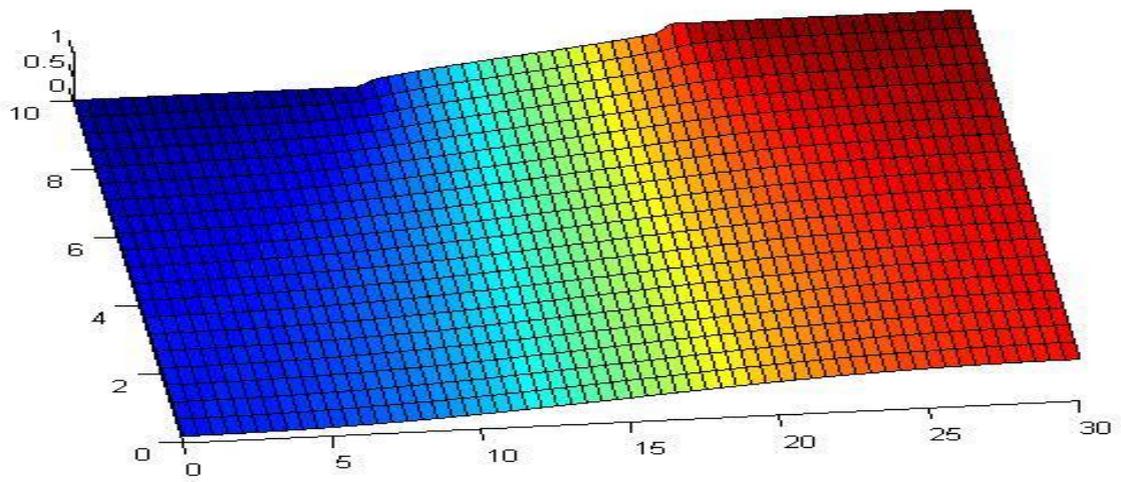


Figura 6.18 Representación de la función  $\phi$

- **Escenario de pantalla.**

De igual manera que el programa anterior, y para conseguir lo expuesto al inicio, se toma como base el programa inicial que consta de una subrutina para poder ser leído por pspice, y una segunda subrutina con la que acceder y ser ejecutado por pspice, tal como se explica en el capítulo primero.

En el escenario que vamos a estudiar es este segundo caso, se incorpora una pantalla bajo la presa, donde la variable "d" definirá su longitud, el esquema es el siguiente:

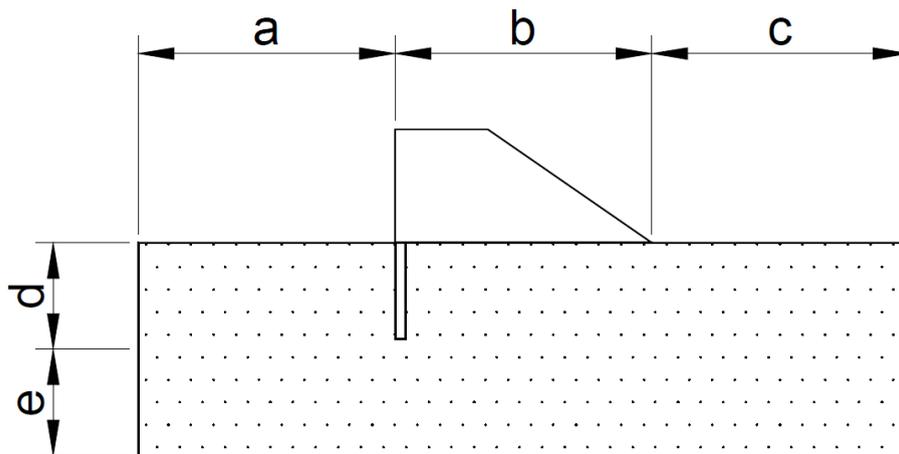


Figura 6.21 Escenario de pantalla

La forma de introducir los datos será similar: origen de coordenadas,  $x_0$  e  $y_0$ ; conductividad hidráulica en las dos direcciones,  $k_x$  y  $k_y$ ; potencial en metros a la izquierda y a la derecha de la presa o pantalla,  $T_1$  y  $T_0$ ; y las variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  que se incorporarán conforme al esquema de la figura 6.21.

Esto se realiza directamente en las sentencias del programa que, como ejemplo, se presentan a continuación.

```

pantallapresa_10_9_2015.m x
1      %Prueba para el calculo de redes completas de flujo
2
3
4      clc, clear, close all
5      jobname='ppstream';
6      TIPANA=20;
7      x0=0;
8      y0=0;
9      kx=0.001;
10     ky=0.001;
11     Rinf=1E35;
12     T1=1;
13     T2=0;
14     a=10
15     b=5
16     c=10
17     d=2
18     e=2
19     f=1

```

De la misma manera que se hacía en el programa inicial, la geometría y el número de celdas asociados a cada región se introducen como datos de altura H y longitud L de las regiones y su número de divisiones.

```

20     ndiv=10;
21     L=[a a*f 1;0.5 1 1;b b*f 1;c c*f 1];
22     H=[d d*f 1;e e*f 1];
23     R=[kx ky;kx ky;kx ky;kx ky;0 0;kx ky;kx ky];

```

Las sentencias asociadas a las condiciones de contorno son:

```

24     LBC_B1_Fi1=[1, 2,0, T2;
25                2, 2,0, T2;
26                3, 2,0, T2;
27                4, 2,0, T2];
28     LBC_B2_Fi1=[4, 2,0, T2;
29                8, 2,0, T2;
30                5, 2,0, T1];
31     LBC_B3_Fi1=[8, 1, 0, Rinf;
32                2, 2,0, T1;
33                5, 1, 0, Rinf;
34                7, 2,0, T1];
35     LBC_B4_Fi1=[1, 2,0, T2;
36                5, 2,0, T2;
37                7, 2,0, T1];

```

La modificación del primer programa que permite mostrar la representación visual de la solución del problema es la siguiente.

```

141 - load('pppotential_outspice.mat')
142 - load('pppotential_res.mat')
143 %Dibujo equipotenciales y lineas de flujo
144 - figure,
145 - hold on
146 - pintaregiones(L,H,R)
147 - contour(X,Y,P)
148 - contour(X,Y,Q,5,'b')
149 - figure, contourf(X,Y,P)
150 - [FX,FY]=gradient(P);
151 - figure, quiver(X,Y,FX,FY)
152 - i=((FX.^2+FY.^2)).^(1/2);
153 - figure,surface(X,Y,i)
154 - figure,surface(X,Y,FY)
155

```

Así en la figura 6.11 se representa las regiones definidas en el problema que nos permite simular las condiciones de contorno del problema que estamos representado, mediante el código programado es posible representar de la manera clásica las redes de flujo formadas por las líneas de flujo y equipotenciales, permitiéndonos una rápida interpretación del fenómeno físico (figura6.12)., de manera separada es posible también representar las isolíneas de potencial y de flujo pudiéndolas estudiar de manera separada sin querremos prestar atención a una de las dos en concreto, con las figuras 6.15 y 6.16 podemos ver tanto el gradiente como el modulo del vector velocidad del agua a través del terreno del que podeos interpretar las zonas en las que podría haber riesgo de sifonamiento , es decir, donde el vector velocidad vertical hacia arriba es mayor. Además Matlab nos permite la representación continua en la malla incorporando funciones de interpolación y extrapolación, como puede apreciarse en las figuras 6.17 y 6.18.

Figuras resultantes:

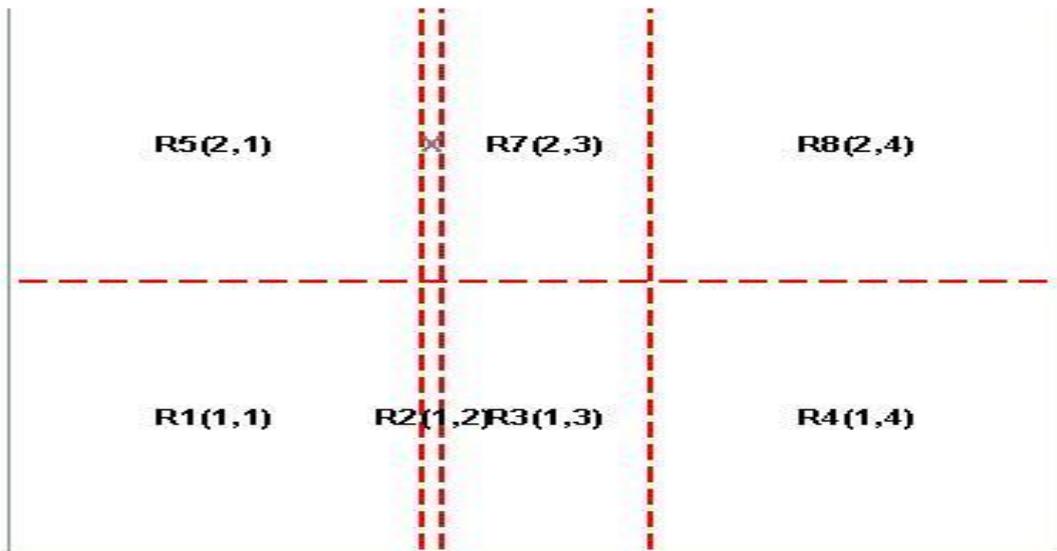


Figura 6.19 Representación de la regiones

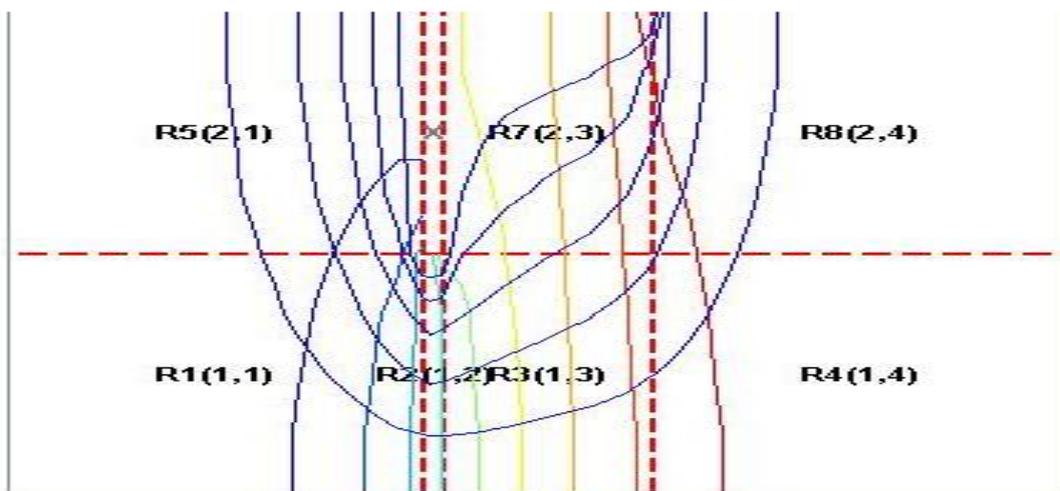


Figura 6.20 Representación de la red de flujo

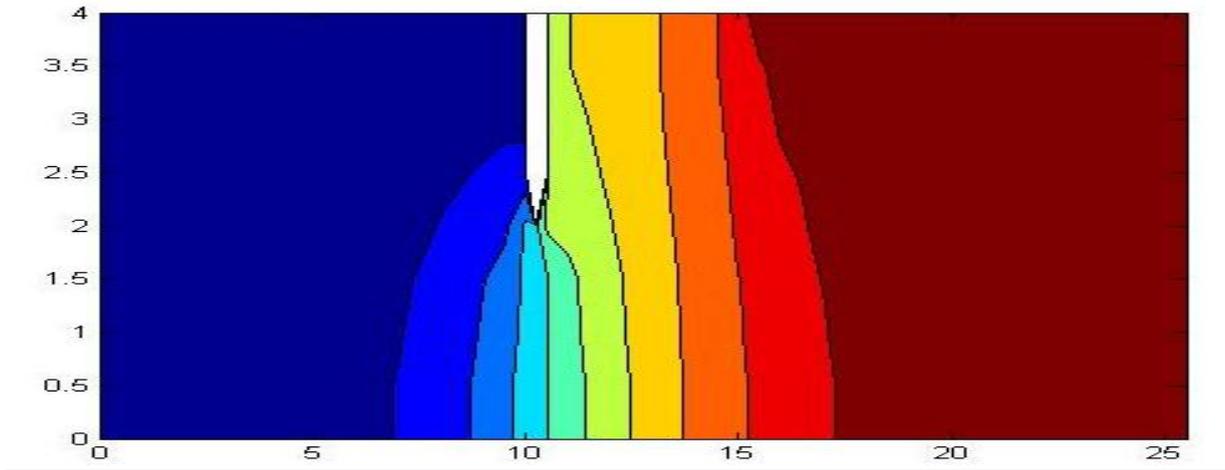


Figura 6.21 Representación de las líneas equipotenciales

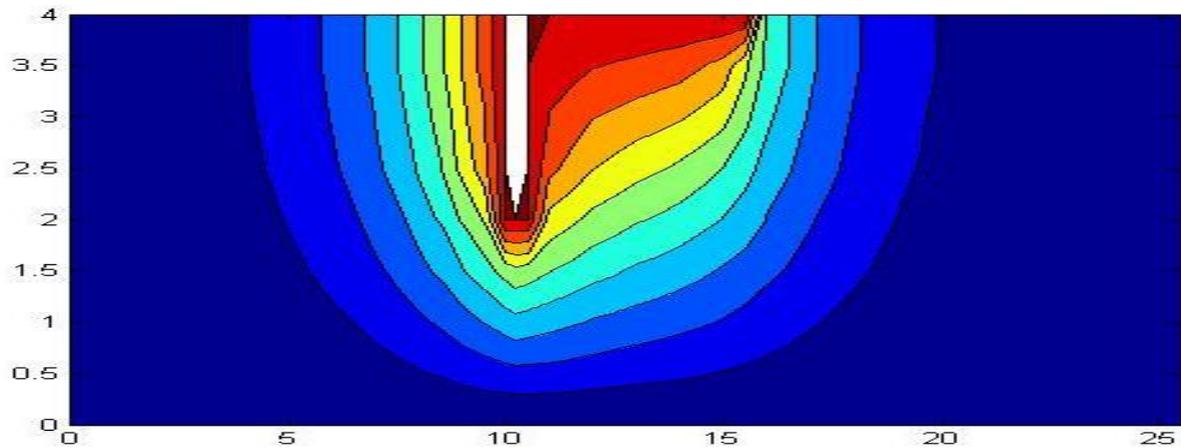


Figura 6.22 Representación de las isolíneas de flujo

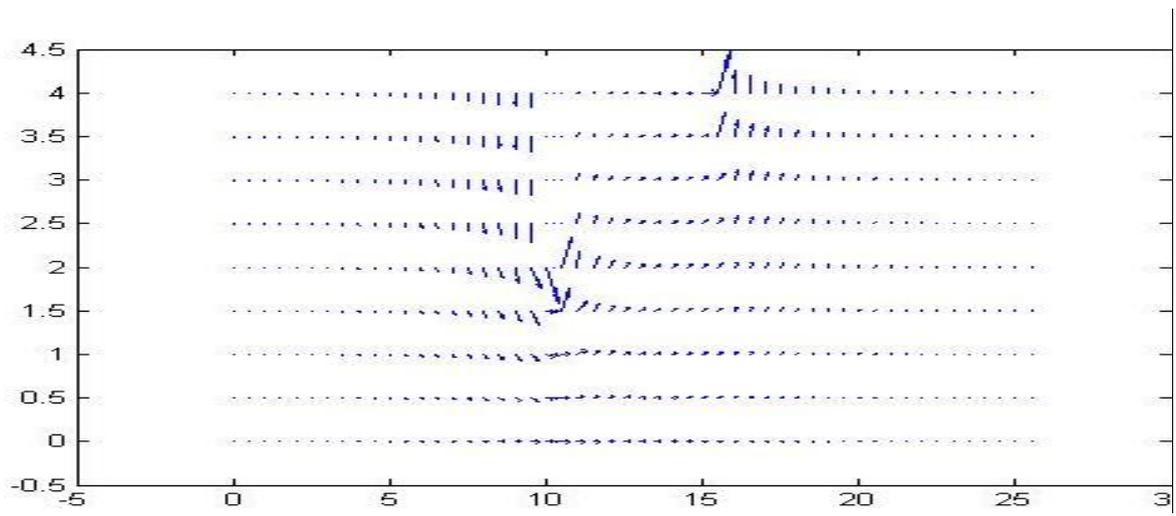


Figura 6.23 Representación del vector velocidad

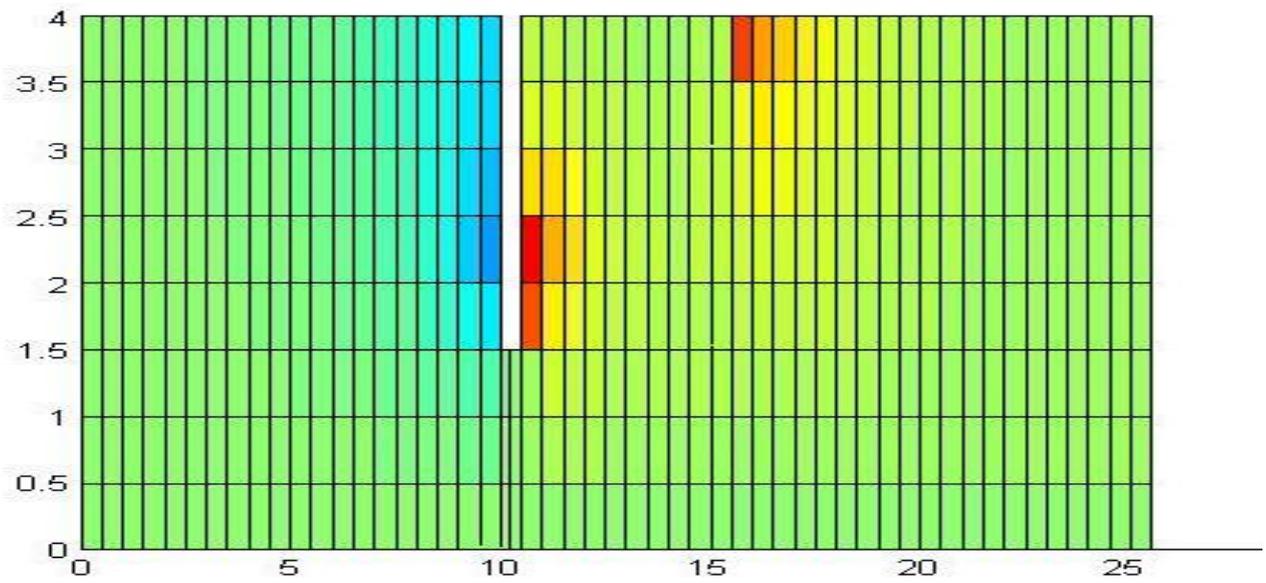


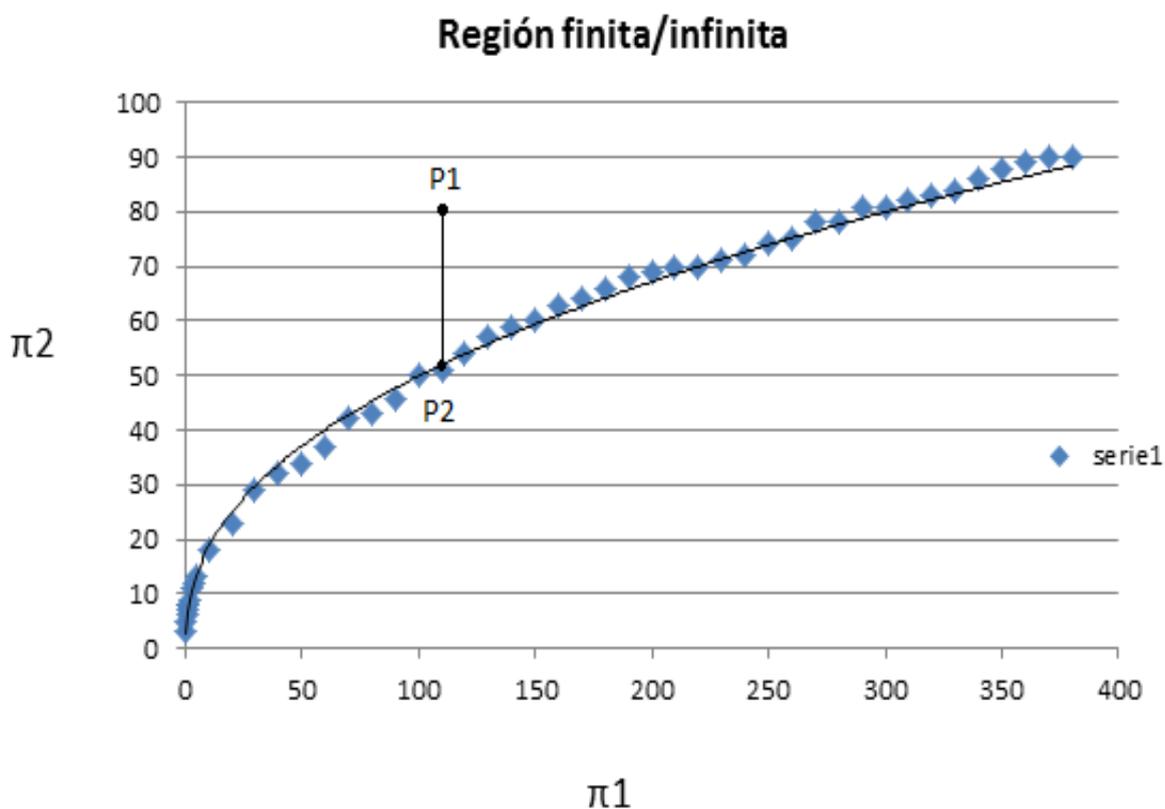
Figura 6.24 Representación del gradiente de velocidad

#### 6.4.2. Comprobación de la región finita/infinita.

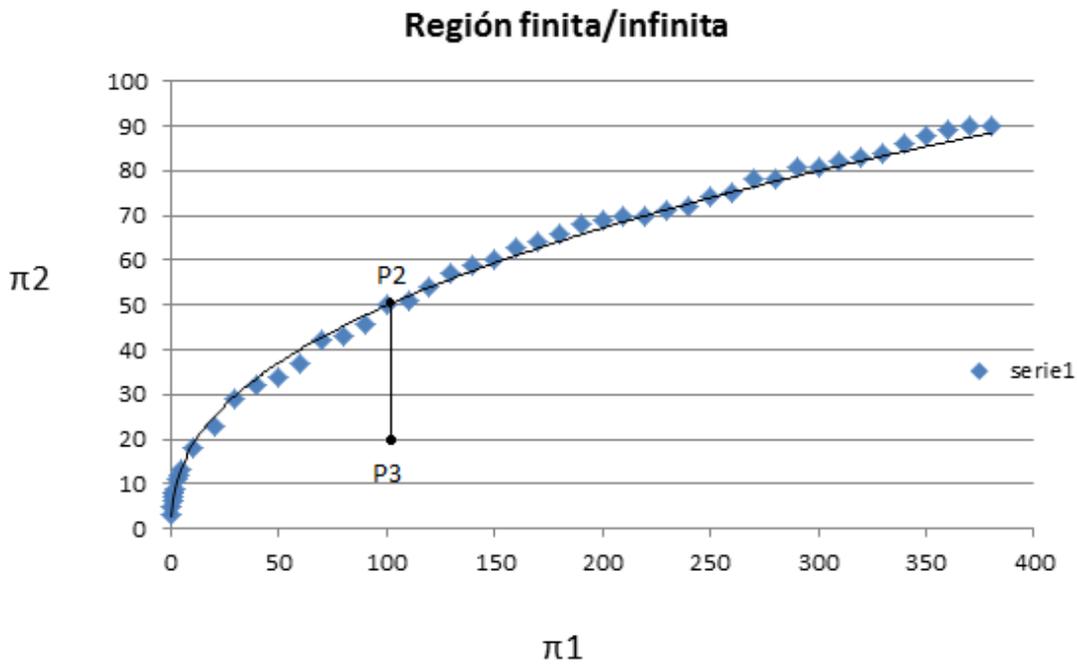
En esta última parte se procede a confirmar el ábaco de región finita/infinita obtenido al principio de este capítulo. El proceso que vamos a seguir es el siguiente.

Comenzaremos eligiendo cuatro puntos pertenecientes a la curva, que son  $\pi_1=100$ , 150 y 300, de los cuales ya conocemos su caudal.

A continuación se procederá a calcular el caudal en un punto superior (P1) al elegido en la curva, de mismo  $\pi_1$  (P2). Estos caudales obtenidos deberán tener valores iguales para poder validar la región finita/infinita.



Como última comprobación se medirá el caudal en un punto inferior (P3) al elegido en la curva, de mismo  $\pi_1$  (P2). A diferencia del anterior, el valor de este último caudal deberá ser inferior al caudal en la curva.



Los caudales se obtendrán mediante el programa “Escenario de Presa” que permite realizar la simulación de un escenario concreto, poniendo como ejemplo de los tres puntos realizados ( $\pi_1=100$ , 150 y 200), el correspondiente a  $\pi_1=100$ . El resto, debido a la repetición del proceso, se mostraran en una tabla resumen al final del apartado.

- **Punto  $\pi_1=100$ ,  $\pi_2=50$**

Caudal obtenido en el punto perteneciente a la región finita/infinita: **1.1090669E-08**

```
**** DC TRANSFER CURVES TEMPERATURE = 27.000 DEG C
```

```
VPRU I(Vnu1aArrIso)
1.000000E+00 -1.1090669E-08
```

```
**** DC TRANSFER CURVES TEMPERATURE = 27.000 DEG C
```

```
VPRU I(Vnu1aArrIso2)
1.000000E+00 1.1090669E-08
```

```
JOB CONCLUDED
```

```
**** JOB STATISTICS SUMMARY
```

Punto superior a las curva:  $\pi_1=100$ ,  $\pi_2=70$

Caudal obtenido: **1.1090671E-08**

```
**** DC TRANSFER CURVES TEMPERATURE = 27.000 DEG C
```

```
VPRU I(Vnu1aArrIso)
1.0000000E+00 -1.1090671E-08
```

```
**** DC TRANSFER CURVES TEMPERATURE = 27.000 DEG C
```

```
VPRU I(Vnu1aArrIso2)
1.0000000E+00 1.1090671E-08
```

JOB CONCLUDED

Punto inferior a las curva:  $\pi_1=100$ ,  $\pi_2=20$

Caudal obtenido: **1.10070281E-08**

```
**** DC TRANSFER CURVES TEMPERATURE = 27.000 DEG C
```

```
VPRU I(Vnu1aArrIso)
1.0000000E+00 -1.1070281E-08
```

```
**** DC TRANSFER CURVES TEMPERATURE = 27.000 DEG C
```

```
VPRU I(Vnu1aArrIso2)
1.0000000E+00 1.1070281E-08
```

JOB CONCLUDED

A continuación se muestra una tabla resumen de todos los resultados:

	$\pi 1=100$	$\pi 1=150$	$\pi 1=300$
Punto en la curva	1,1090669E-08	1,4087599E-08	2,1005832E-08
Punto superior a la curva	1,1090671E-08	1,4087601E-08	2,1005835E-08
Punto inferior a la curva	1,1007028E-08	1,4000659E-08	1,9999987E-08

Tabla 6.2 Resumen caudales

Todos los caudales que se situaban por encima son iguales al perteneciente a la curva, en cambio los inferiores presentan valores menores, confirmando las condiciones propuestas al inicio, dando validez a la curva obtenida.

## Conclusiones

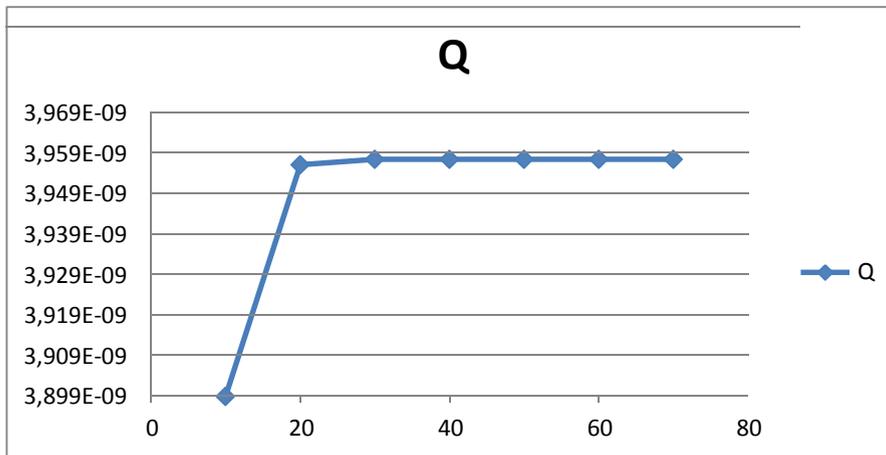
Todos los objetivos iniciales descritos en el primer capítulo de este proyecto han sido alcanzados. En primer lugar se ha conseguido un mayor conocimiento de los procesos de infiltración bajo presa, así como el uso de programas informáticos, tales como Matlab o Seep/W. Por otro lado se ha demostrado la validez de la curva finita/infinita y finalmente este programa aporta unas herramientas que, a diferencia de otros programas, nos posibilitan simular escenarios de forma más sencilla y teniendo que invertir menos tiempo y esfuerzo, consiguiendo agilizar los procesos de creación.

# Resultados

a	20	30	40	50	60	70	80
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	7,00E-09	7,00E-09	7,00E-09	7,00E-09	7,00E-09	7,00E-09	7,00E-09
Ky	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	20	30	40	50	60	70	80
$\pi_1$	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
$\pi_2$	2	3	4	5	6	7	8
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	2000	2800	3600	4400	5200	6000	6800
Q	3,9567E-09	3,958E-09	3,958E-09	3,958E-09	3,958E-09	3,958E-09	3,958E-09
$\Delta Q$	3,9567E-09	1,3465E-12	3,15E-14	9E-16	0	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	exito	exito	exito

## Input Resultados

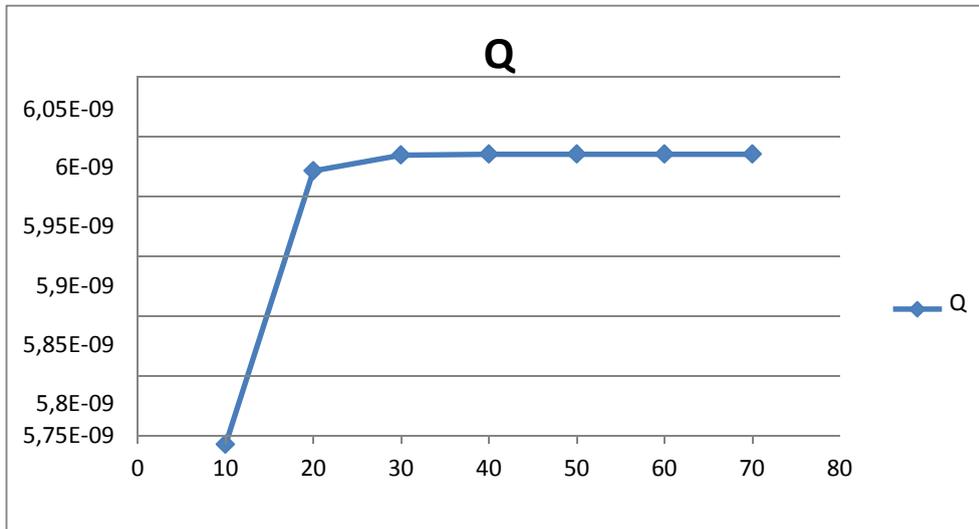
KY	KX	Qi					
1,00E-08	7,00E-09	3,90E-09	3,96E-09	3,96E-09	3,96E-09	3,96E-09	3,96E-09
3,96E-09	3,96E-09	3,96E-09	3,96E-09	3,96E-09			



a	40	50	60	70	80	90	100
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08
Ky	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	40	50	60	70	80	90	100
$\pi_1$	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2
$\pi_2$	4	5	6	7	8	9	10
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	3600	4400	5200	6000	6800	7600	8400
Q	6,0148E-09	6,0148E-09	6,0148E-09	6,0149E-09	6,0149E-09	6,01E-09	6,01E-09
$\Delta Q$	6,0148E-09	4,26E-14	2,2E-15	5E-16	0	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	exito	exito	exito

Input Resultados

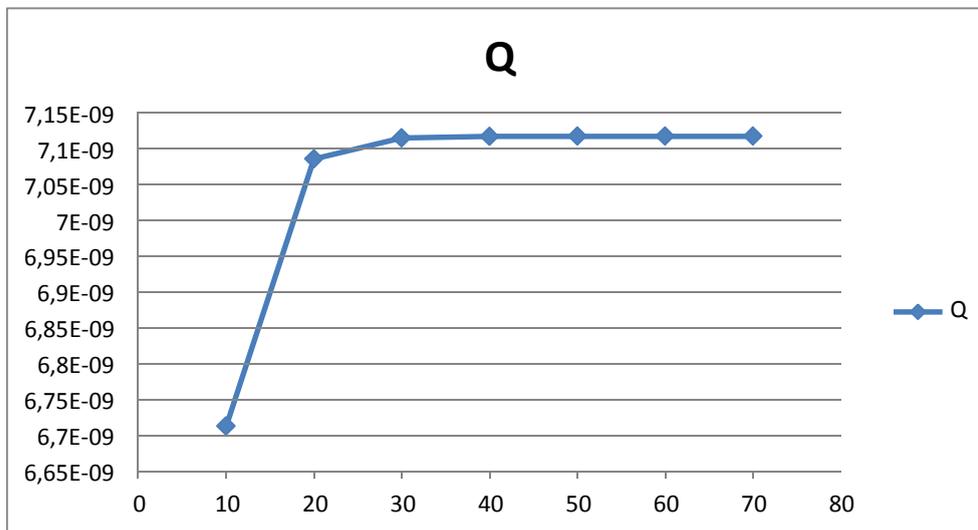
KY	KX	Qi						
1,00E-08	1,20E-08	5,77E-09	6,00E-09	6,01E-09	6,01E-09	6,01E-09	6,01E-09	6,01E-09
6,01E-09								



a	40	50	60	70	80	90	100
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,50E-08	1,50E-08	1,50E-08	1,50E-08	1,50E-08	1,50E-08	1,50E-08
Ky	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	40	50	60	70	80	90	100
$\pi_1$	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
$\pi_2$	4	5	6	7	8	9	10
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	3600	4400	5200	6000	6800	7600	8400
Q	7,1197E-09	7,1199E-09	7,1199E-09	7,1199E-09	7,1199E-09	7,12E-09	7,12E-09
$\Delta Q$	7,1197E-09	1,736E-13	1,33E-14	9E-16	0	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	exito	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-08	1,50E-08	6,72E-09	7,09E-09	7,12E-09	7,12E-09	7,12E-09	7,12E-09
7,12E-09	7,12E-09	7,12E-09	7,12E-09	7,12E-09	7,12E-09		

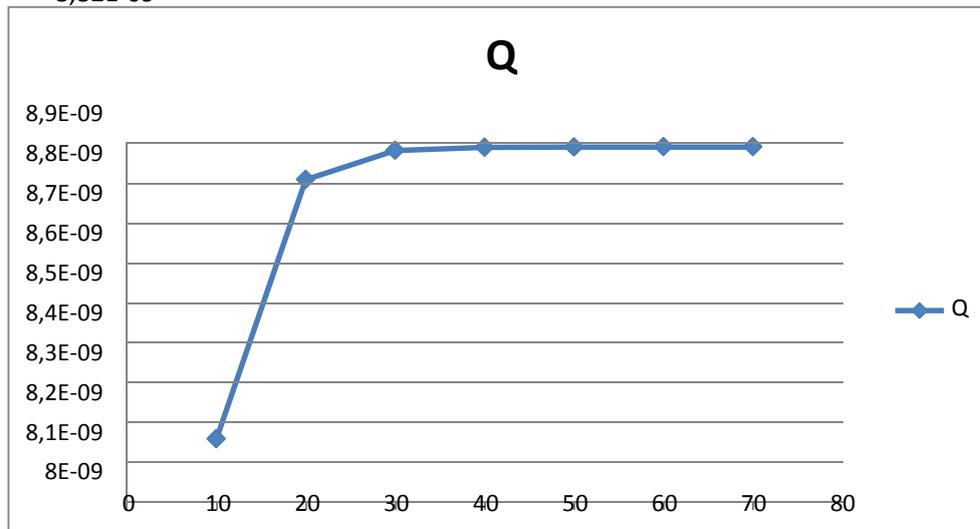


a	50	60	70	80	90	100	110
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,00E-08	2,00E-08	2,00E-08	2,00E-08	2,00E-08	2,00E-08	2,00E-08
Ky	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	50	60	70	80	90	100	110
$\pi_1$	2	2	2	2	2	2	2
$\pi_2$	5	6	7	8	9	10	11
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	4400	5200	6000	6800	7600	8400	9200
Q	8,816E-09	8,8161E-09	8,8161E-09	8,8161E-09	8,82E-09	8,82E-09	8,8161E-09
$\Delta Q$	8,816E-09	9,33E-14	1,06E-14	9E-16	0	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	exito	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-08    2,00E-08    8,08E-09    8,73E-09    8,81E-09    8,82E-09    8,82E-09    8,82E-09

8,82E-09    8,82E-09

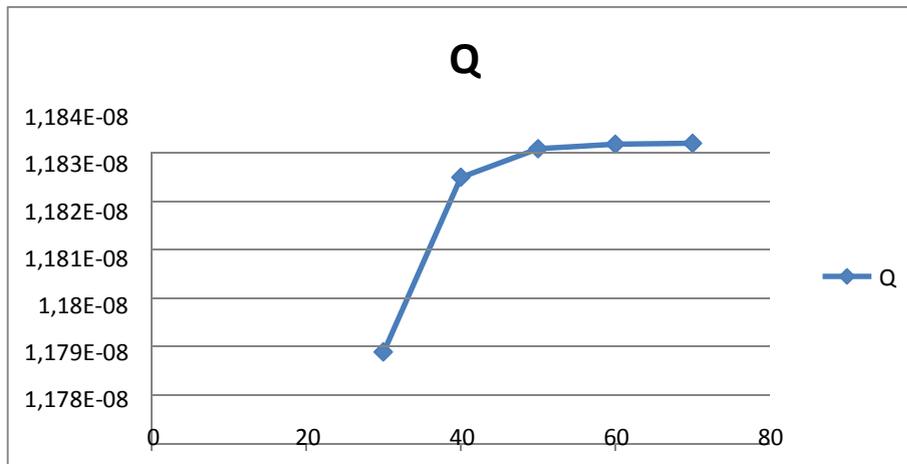


a	60	70	80	90	100	110	120
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	3,00E-08	3,00E-08	3,00E-08	3,00E-08	3,00E-08	3,00E-08	3,00E-08
Ky	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	60	70	80	90	100	110	120
$\pi_1$	3	3	3	3	3	3	3
$\pi_2$	6	7	8	9	10	11	12
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	5200	6000	6800	7600	8400	9200	10000
Q	1,1834E-08	1,1834E-08	1,1834E-08	1,18E-08	1,18E-08	1,1834E-08	1,1834E-08
$\Delta Q$	1,1834E-08	1,56E-13	2,6E-14	4E-15	1E-15	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-08	3,00E-08	1,18E-08

1,18E-08      1,18E-08      1,18E-08      1,18E-08      1,18E-08      1,18E-08

1,18E-08

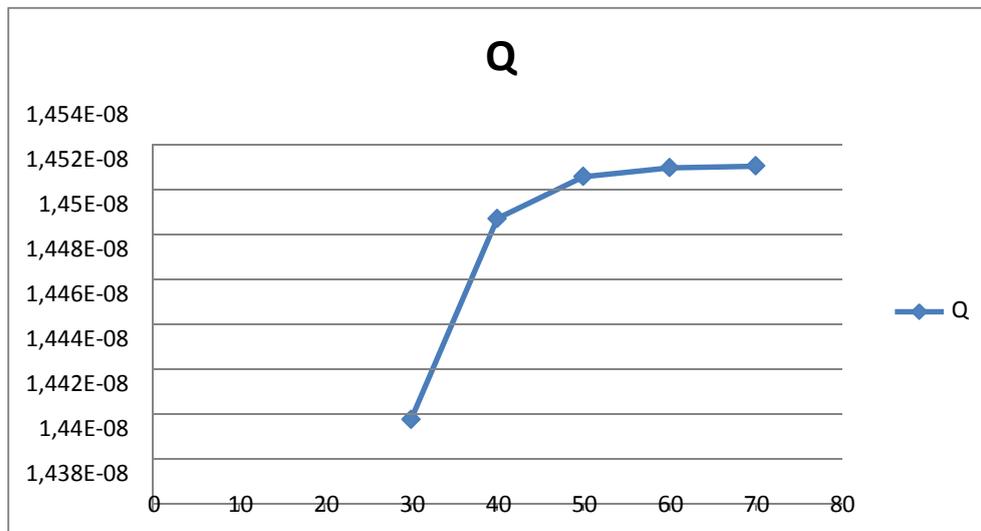


a	60	70	80	90	100	110	120
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08
Ky	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	60	70	80	90	100	110	120
$\pi_1$	4	4	4	4	4	4	4
$\pi_2$	6	7	8	9	10	11	12
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	5200	6000	6800	7600	8400	9200	10000
Q	1,4516E-08	1,4517E-08	1,4517E-08	1,45E-08	1,45E-08	1,4517E-08	1,4517E-08
$\Delta Q$	1,4516E-08	8,09E-13	1,69E-13	3,5E-14	7E-15	2E-15	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-08	4,00E-08	1,44E-08

1,45E-08    1,45E-08    1,45E-08    1,45E-08    1,45E-08

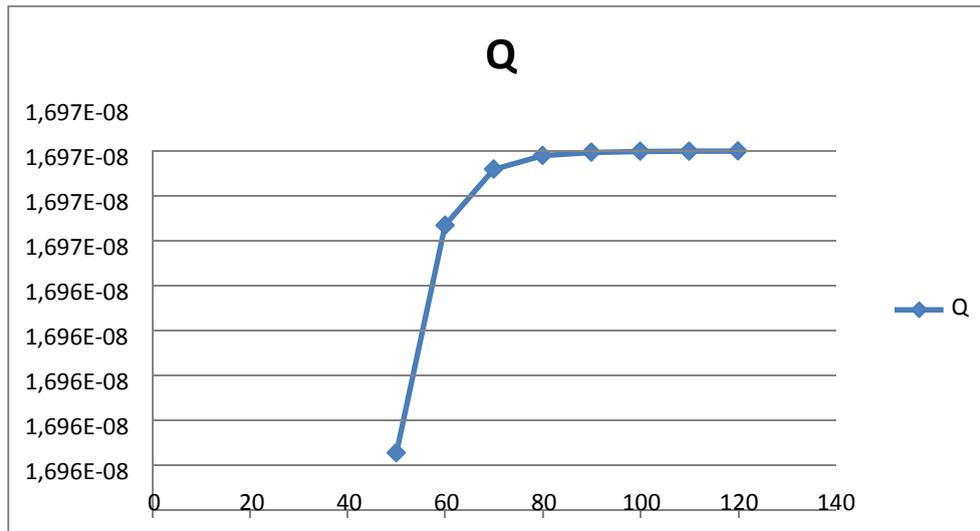
1,45E-08



a	80	90	100	110	120	130	140
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08
Ky	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08	1,00E-08
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	80	90	100	110	120	130	140
$\pi_1$	5	5	5	5	5	5	5
$\pi_2$	8	9	10	11	12	13	14
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	6800	7600	8400	9200	10000	10800	11600
Q	1,697E-08	1,70E-08	1,70E-08	1,697E-08	1,697E-08	0	0
$\Delta Q$	1,697E-08	1,51E-13	3,6E-14	9E-15	3E-15	-1,697E-08	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados

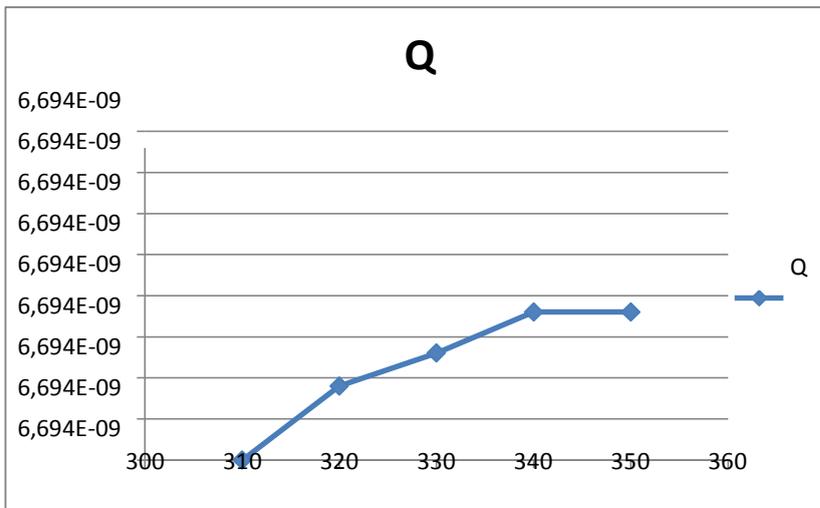
KY	KX	Qi						
1,00E-08	5,00E-08	1,70E-08						



a	300	310	320	330	340	350
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1
Kx	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08
Ky	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09
e	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10
c	300	310	320	330	340	350
$\pi_1$	40	40	40	40	40	40
$\pi_2$	30	31	32	33	34	35
f	2	2	2	2	2	2
NT	24400	25200	26000	26800	27600	28400
Q	4,00E-08	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09
$\Delta Q$		-3,3306E-08	9E-16	4E-16	5E-16	0
Resultado		continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados

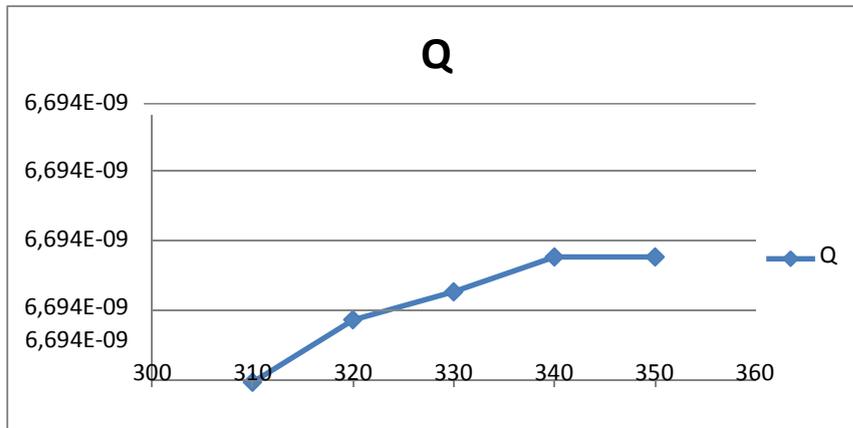
KY	KX	Qi						
1,00E-09	0,00000004	4,00E-08	6,69E-09	6,69E-09	6,69E-09	6,69E-09	6,69E-09	6,69E-09



a	300	310	320	330	340	350
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1
Kx	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08	4,00E-08
Ky	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09
e	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10
c	300	310	320	330	340	350
$\pi_1$	40	40	40	40	40	40
$\pi_2$	30	31	32	33	34	35
f	2	2	2	2	2	2
NT	24400	25200	26000	26800	27600	28400
Q	4,00E-08	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09	6,6936E-09
$\Delta Q$		-3,3306E-08	9E-16	4E-16	5E-16	0
Resultado		continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-09	0,00000004	4,00E-08

6,69E-09    6,69E-09    6,69E-09    6,69E-09    6,69E-09



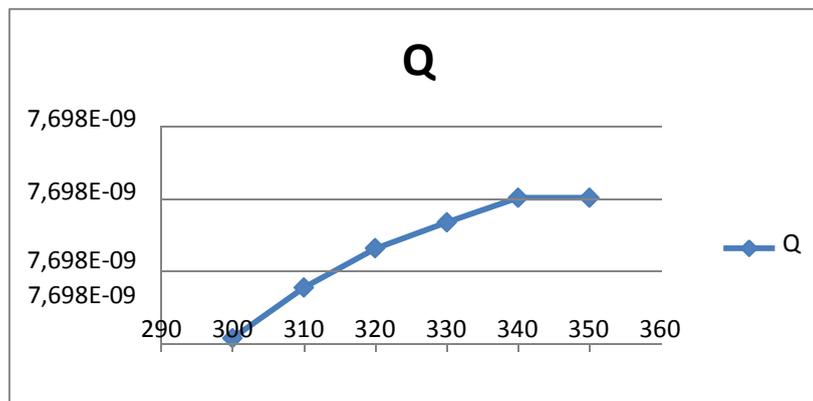
a	300	310	320	330	340	350
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1
Kx	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08	5,00E-08
Ky	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09
e	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10
c	300	310	320	330	340	350
$\pi_1$	50	50	50	50	50	50
$\pi_2$	30	31	32	33	34	35
f	2	2	2	2	2	2
NT	24400	25200	26000	26800	27600	28400
Q	7,70E-09	7,70E-09	7,70E-09	7,70E-09	7,70E-09	7,70E-09
$\Delta Q$		3,5E-15	2,7E-15	1,8E-15	1,7E-15	0
Resultado		continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados

KY	KX	Qi
----	----	----

1E-09 0,00000005 7,6982E-09 7,6983E-09 7,6983E-09 7,6983E-09 7,6983E-09

7,6983E-09



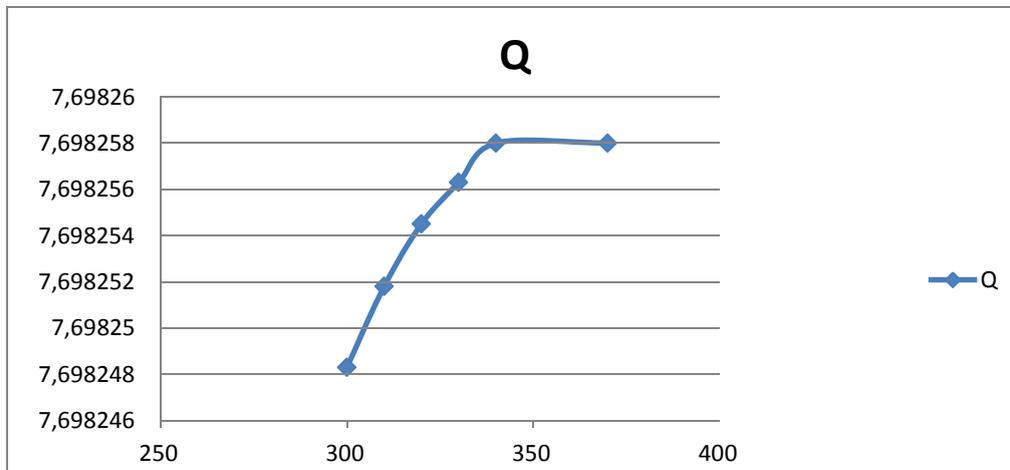
a	300	310	320	330	340	370
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1
Kx	6,00E-08	6,00E-08	6,00E-08	6,00E-08	6,00E-08	6,00E-08
Ky	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09
e	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10
c	300	310	320	330	340	370
$\pi_1$	60	60	60	60	60	60
$\pi_2$	30	31	32	33	34	37
f	2	2	2	2	2	2
NT	24400	25200	26000	26800	27600	30000
Q	7,70E-09	7,70E-09	7,70E-09	7,70E-09	7,70E-09	7,70E-09
$\Delta Q$		3,5E-15	2,7E-15	1,8E-15	1,7E-15	0
Resultado		continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados

KY	KX	Qi
----	----	----

1E-09    0,00000006    7,6982E-09    7,6983E-09    7,6983E-09    7,6983E-09    7,6983E-09

7,6983E-09



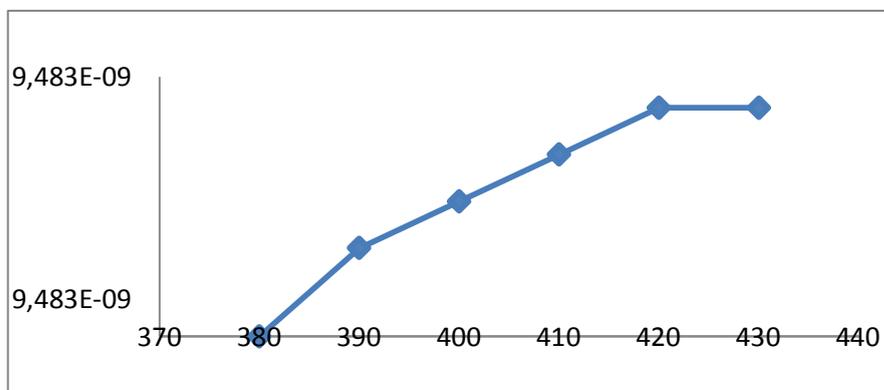
a	380	390	400	410	420	430
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1
Kx	0,00000007	0,00000007	0,00000007	0,00000007	0,00000007	0,00000007
Ky	1E-09	1E-09	1E-09	1E-09	1E-09	1E-09
e	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10
c	380	390	400	410	420	430
$\pi_1$	70	70	70	70	70	70
$\pi_2$	38	39	40	41	42	43
f	2	2	2	2	2	2
NT	30800	31600	32400	33200	34000	34800
Q	9,4833E-09	9,4833E-09	9,4833E-09	9,4833E-09	9,4833E-09	9,4833E-09
$\Delta Q$		1,7E-15	9E-16	9E-16	9E-16	0
Resultado	exito	continua	continua	continua	continua	exito

### Input Resultados

KY	KX	Qi
----	----	----

1E-09    0,00000007    9,4833E-09    9,4833E-09    9,4833E-09    9,4833E-09    9,4833E-09

9,4833E-09

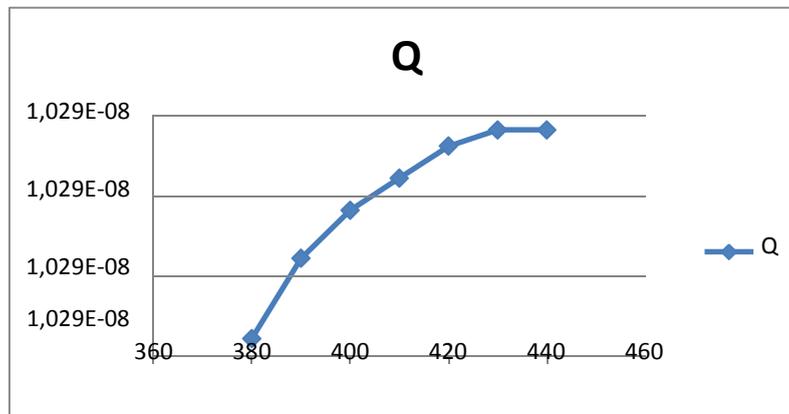


a	380	390	400	410	420	430	440
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	0,00000008	0,00000008	0,00000008	0,00000008	0,00000008	0,00000008	0,00000008
Ky	1E-09						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	380	390	400	410	420	430	440
$\pi_1$	80	80	80	80	80	80	80
$\pi_2$	38	39	40	41	42	43	44
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	30800	31600	32400	33200	34000	34800	35600
Q	1,0294E-08						
$\Delta Q$		5E-15	3E-15	2E-15	2E-15	1E-15	0
Resultado	exito	continua	continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados

KY	KX	Qi						
1E-09	0,00000008	1,0294E-08						

1,0294E-08

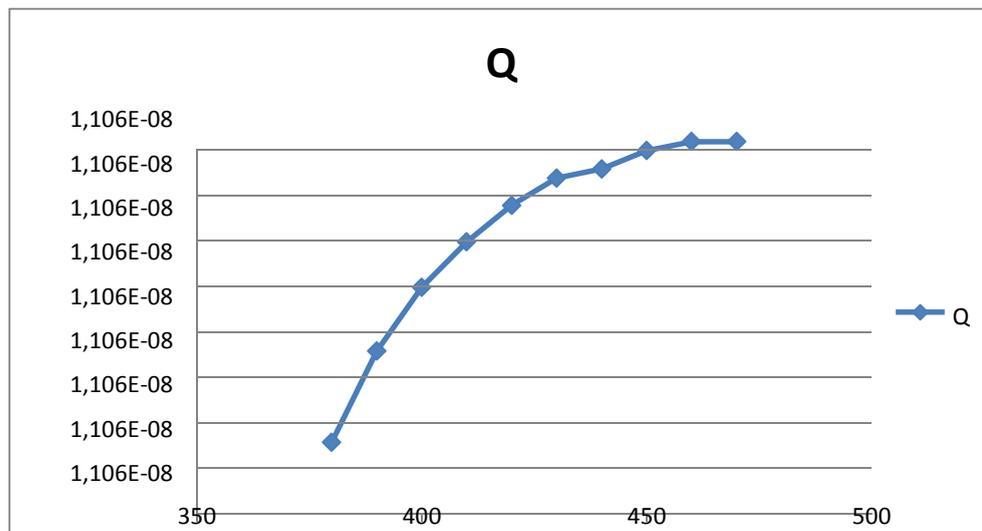


a	410	420	430	440	450	460	470
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	9,00E-08						
Ky	1,00E-09						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	410	420	430	440	450	460	470
$\pi_1$	90	90	90	90	90	90	90
$\pi_2$	41	42	43	44	45	46	47
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	33200	34000	34800	35600	36400	37200	38000
Q	1,11E-08						
$\Delta Q$	1,11E-08	4E-15	3E-15	1E-15	2E-15	1E-15	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-09    9,00E-08    1,11E-08    1,11E-08    1,11E-08    1,11E-08    1,11E-08    1,11E-08

1,11E-08

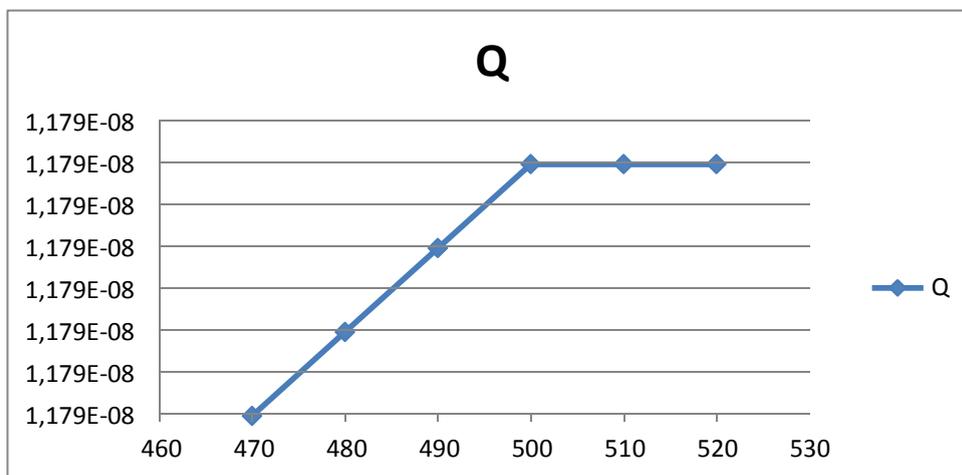


a	470	480	490	500	510	520
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1
Kx	0,0000001	0,0000001	0,0000001	0,0000001	0,0000001	0,0000001
Ky	1E-09	1E-09	1E-09	1E-09	1E-09	1E-09
e	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10
c	470	480	490	500	510	520
$\pi_1$	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>	<b>100</b>
$\pi_2$	<b>47</b>	<b>48</b>	<b>49</b>	<b>50</b>	<b>51</b>	<b>52</b>
f	2	2	2	2	2	2
NT	38000	38800	39600	40400	41200	42000
Q	1,1795E-08	1,1795E-08	1,1795E-08	1,1795E-08	1,1795E-08	1,1795E-08
$\Delta Q$		1E-15	1E-15	1E-15	0	0
Resultado	exito	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados

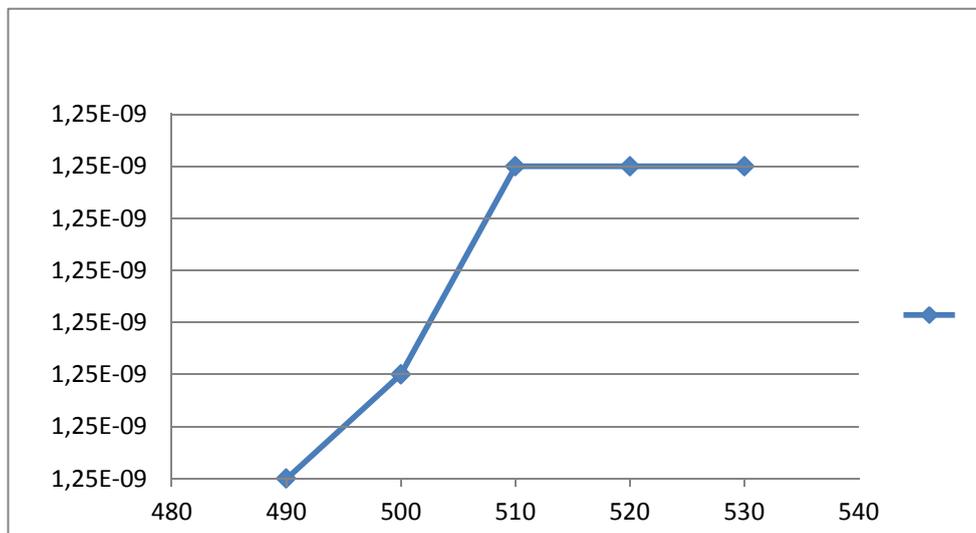
KY	KX	Qi				
1E-09	0,0000001	1,1795E-08	1,1795E-08	1,1795E-08	1,1795E-08	1,1795E-08

1,1795E-08



a	490	500	510	520	530
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1
Kx	1,10E-08	1,10E-08	1,10E-08	1,10E-08	1,10E-08
Ky	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10
e	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10
c	490	500	510	520	530
$\pi_1$	110	110	110	110	110
$\pi_2$	49	50	51	52	53
f	2	2	2	2	2
NT	39600	40400	41200	42000	42800
Q	1,25E-09	1,25E-09	1,25E-09	1,25E-09	1,25E-09
$\Delta Q$		1,00E-16	2,00E-16	0,00E+00	0,00E+00
Resultado		continua	continua	exito	exito

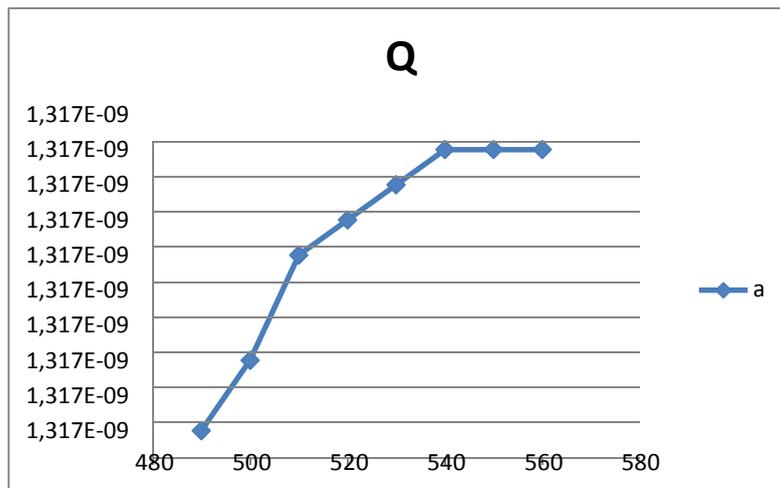
Input Resultados					
KY	KX	Qi			
1,00E-10	1,10E-08	1,25E-09	1,25E-09	1,25E-09	1,25E-09



a	500	510	520	530	540	550	560
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08	1,20E-08
Ky	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	500	510	520	530	540	550	560
$\pi_1$	120	120	120	120	120	120	120
$\pi_2$	50	51	52	53	54	55	56
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	40400	41200	42000	42800	43600	44400	45200
Q	1,32E-09	1,32E-09	1,32E-09	1,32E-09	1,32E-09	1,32E-09	1,32E-09
$\Delta Q$	1,32E-09	-3,00E-16	1,00E-16	1E-16	-1E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

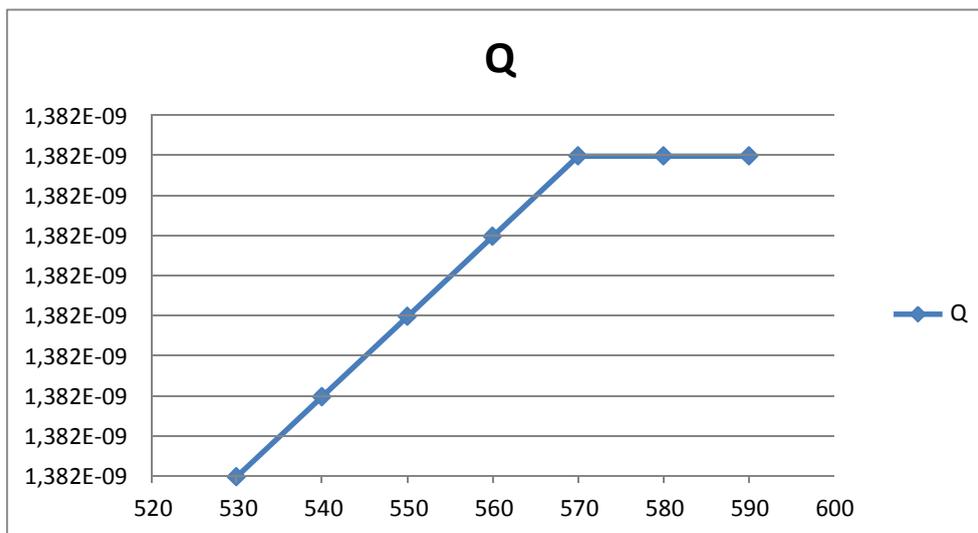
Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-10	1,20E-08	

1,32E-09    1,32E-09    1,32E-09    1,32E-09    1,32E-09



a	530	540	550	560	570	580	590
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,30E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	530	540	550	560	570	580	590
$\pi_1$	130	130	130	130	130	130	130
$\pi_2$	53	54	55	56	57	58	59
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	42800	43600	44400	45200	46000	46800	47600
Q	1,38E-09						
$\Delta Q$		1,00E-16	1E-16	1E-16	1E-16	0	0
Resultado		continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-10	1,30E-08	1,38E-09
		1,38E-09

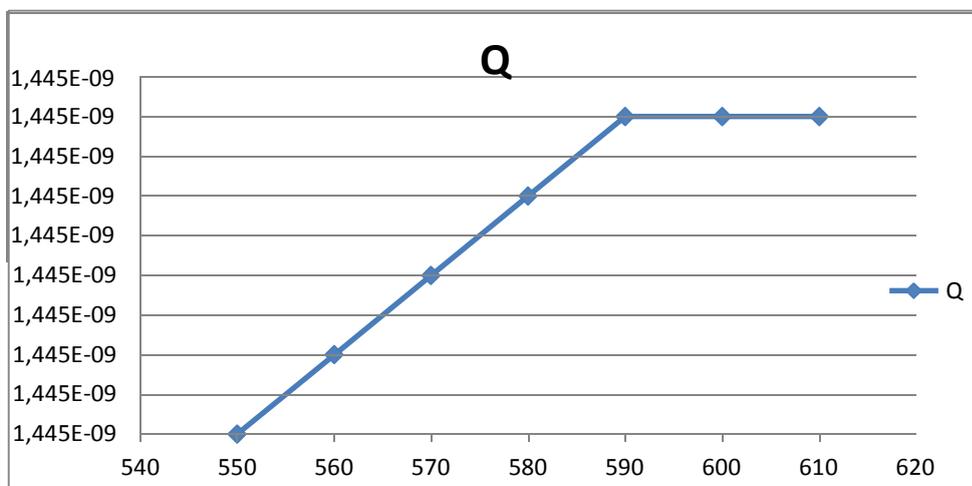


a	550	560	570	580	590	600	610
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,40E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	550	560	570	580	590	600	610
$\pi_1$	140	140	140	140	140	140	140
$\pi_2$	55	56	57	58	59	60	61
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	44400	45200	46000	46800	47600	48400	49200
Q	1,45E-09						
$\Delta Q$		1E-16	1E-16	1,00E-16	1E-16	0	0
Resultado		continua	continua	continua	continua	exito	exito

1,45E-09 1,45E-09

### Input Resultados

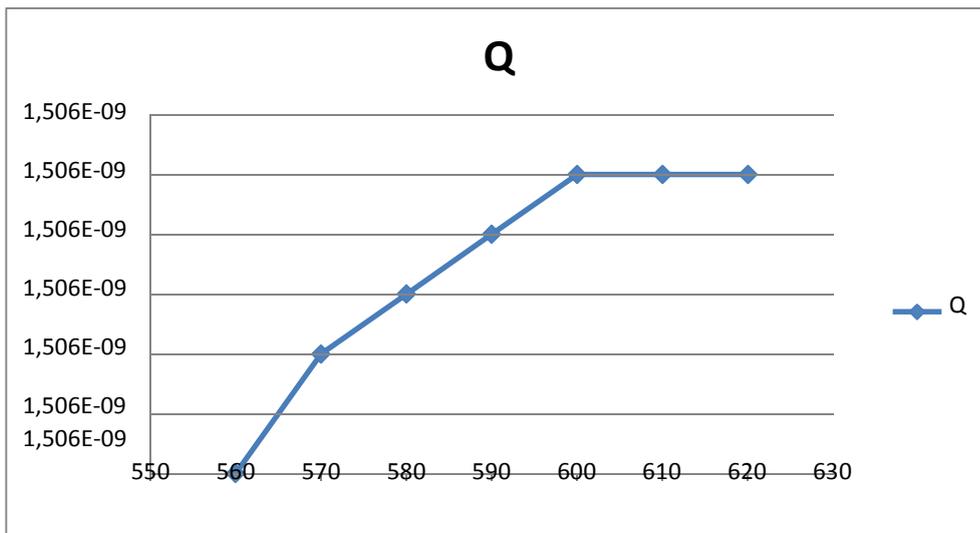
KY	KX	Qi						
1,00E-10	1,40E-08	1,45E-09						



a	560	570	580	590	600	610	620
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,50E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	560	570	580	590	600	610	620
$\pi_1$	150	150	150	150	150	150	150
$\pi_2$	56	57	58	59	60	61	62
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	45200	46000	46800	47600	48400	49200	50000
Q	1,51E-09						
$\Delta Q$		2E-16	1E-16	1E-16	1E-16	0	0
Resultado	exito	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

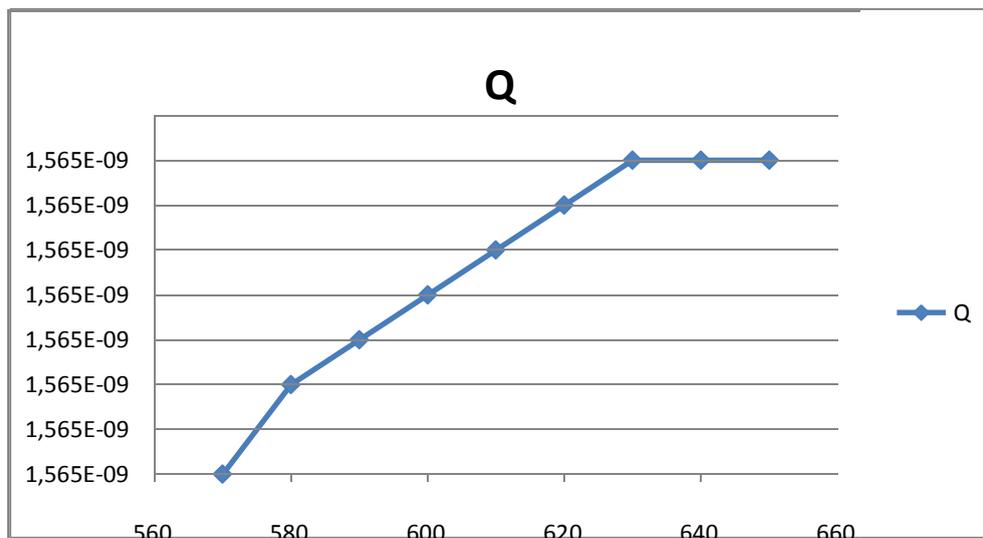
1,00E-10    1,50E-08    1,51E-09    1,51E-09    1,51E-09    1,51E-09    1,51E-09



a	590	600	610	620	630	640	650
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,60E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	590	600	610	620	630	640	650
$\pi_1$	160	160	160	160	160	160	160
$\pi_2$	59	60	61	62	63	64	65
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	47600	48400	49200	50000	50800	51600	52400
Q	1,57E-09						
$\Delta Q$	1,57E-09	1E-16	1E-16	1E-16	1E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-10	1,60E-08	1,57E-09

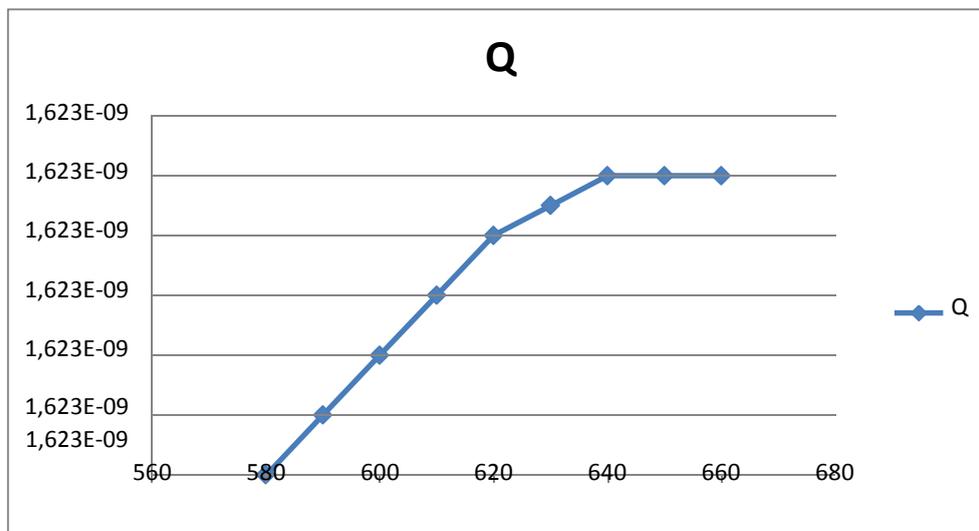
1,57E-09    1,57E-09    1,57E-09    1,57E-09    1,57E-09    1,57E-09



a	600	610	620	630	640	650	660
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,70E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	600	610	620	630	640	650	660
$\pi_1$	170	170	170	170	170	170	170
$\pi_2$	60	61	62	63	64	65	66
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	48400	49200	50000	50800	51600	52400	53200
Q	1,62E-09						
$\Delta Q$	1,62E-09	2E-16	2E-16	1E-16	1E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

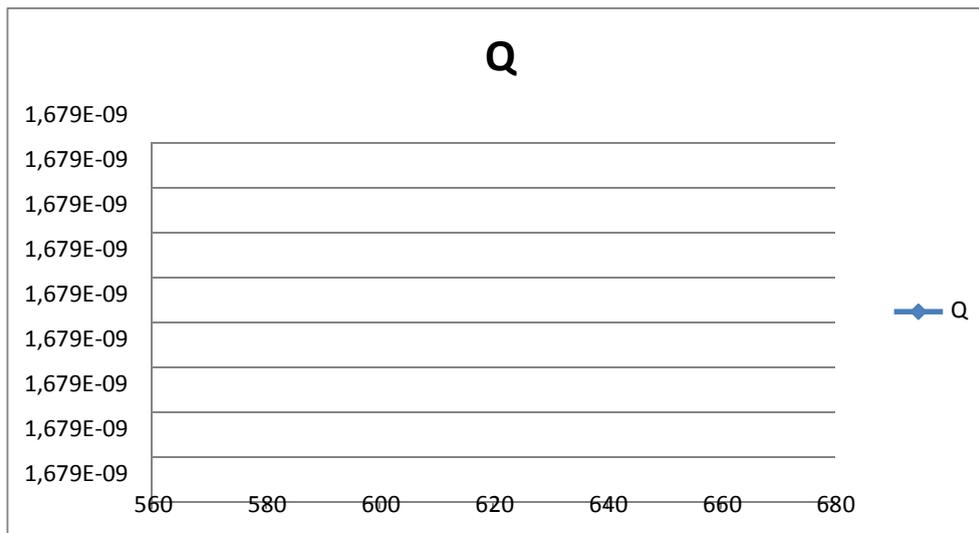
1,00E-10    1,70E-08    1,62E-09    1,62E-09    1,62E-09    1,62E-09    1,62E-09    1,62E-09



a	600	630	640	650	660	670	680
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,90E-08	1,80E-08	1,80E-08	1,80E-08	1,80E-08	1,80E-08	1,80E-08
Ky	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	600	630	640	650	660	670	680
$\pi_1$	190	180	180	180	180	180	180
$\pi_2$	60	63	64	65	66	67	68
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	48400	50800	51600	52400	53200	54000	54800
Q	1,73E-09	1,68E-09	1,68E-09	1,68E-09	1,68E-09	1,68E-09	1,68E-09
$\Delta Q$		-5,4764E-11	2E-16	1E-16	1E-16	0,00E+00	0,00E+00
Resultado	exito	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

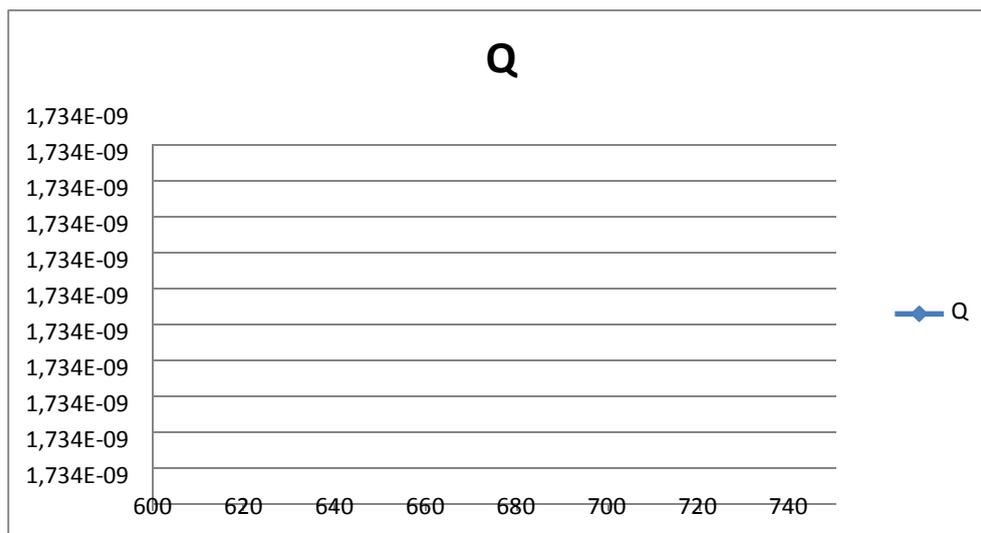
1,00E-10    1,80E-08    1,73E-09    1,68E-09    1,68E-09    1,68E-09    1,68E-09    1,68E-09



a	640	650	660	670	680	690	700
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	1,90E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	640	650	660	670	680	690	700
$\pi_1$	190	190	190	190	190	190	190
$\pi_2$	64	65	66	67	68	69	70
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	51600	52400	53200	54000	54800	55600	56400
Q	1,73E-09						
$\Delta Q$		1E-16	2E-16	1E-16	1E-16	0	0,00E+00
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

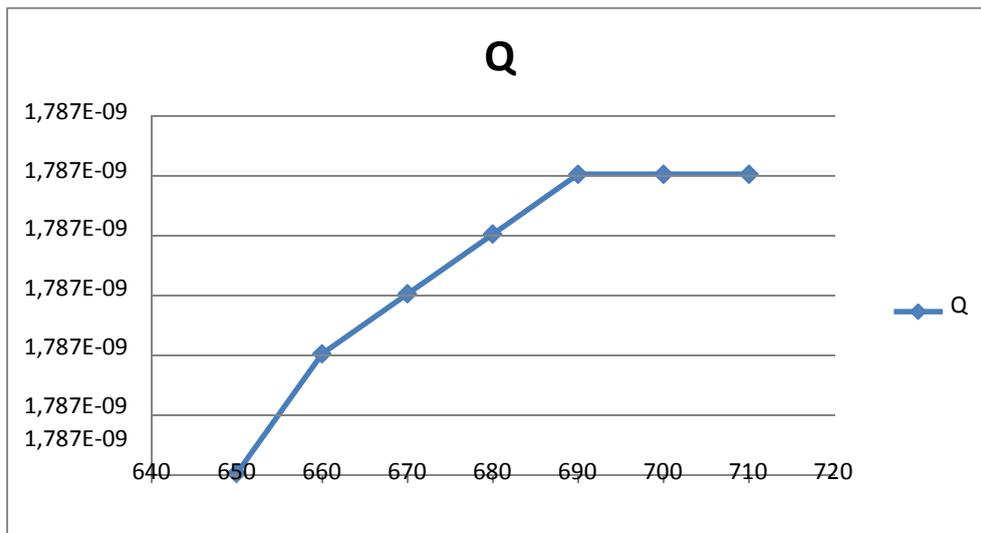
1,00E-10    1,90E-08    1,73E-09    1,73E-09    1,73E-09    1,73E-09    1,73E-09    1,73E-09



a	650	660	670	680	690	700	710
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,00E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	650	660	670	680	690	700	710
$\pi 1$	200	200	200	200	200	200	200
$\pi 2$	65	66	67	68	69	70	71
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	52400	53200	54000	54800	55600	56400	57200
Q	1,79E-09						
$\Delta Q$		2E-16	1E-16	1E-16	1E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados

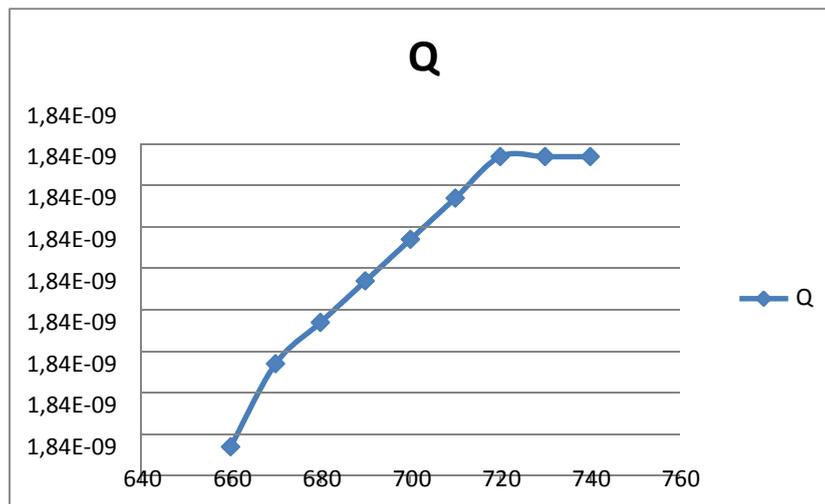
KY	KX	Qi						
1,00E-10	2,00E-08	1,79E-09						



a	680	690	700	710	720	730	740
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,10E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	680	690	700	710	720	730	740
$\pi_1$	210	210	210	210	210	210	210
$\pi_2$	68	69	70	71	72	73	74
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	54800	55600	56400	57200	58000	58800	59600
Q	1,84E-09						
$\Delta Q$	1,84E-09	1E-16	1E-16	1,00E-16	1,00E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados

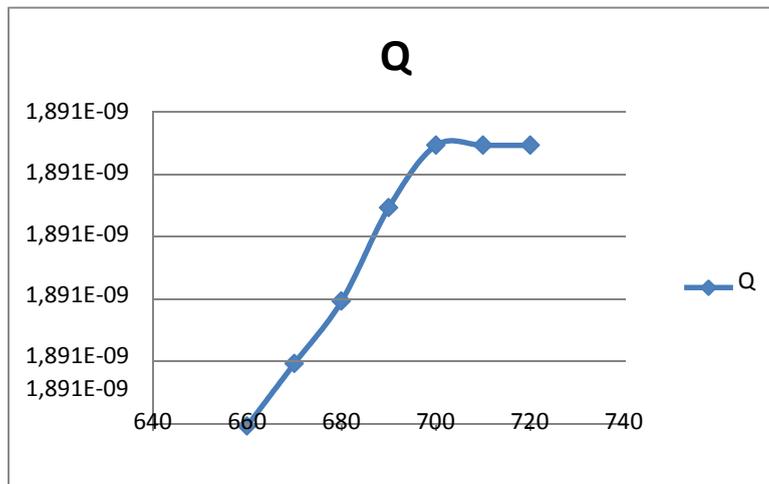
KY	KX	Qi						
1,00E-10	2,10E-08	1,84E-09						



a	660	670	680	690	700	710	720
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,20E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	660	670	680	690	700	710	720
$\pi 1$	220	220	220	220	220	220	220
$\pi 2$	66	67	68	69	70	71	72
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	53200	54000	54800	55600	56400	57200	58000
Q	1,89E-09						
$\Delta Q$		2E-16	2E-16	3E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados

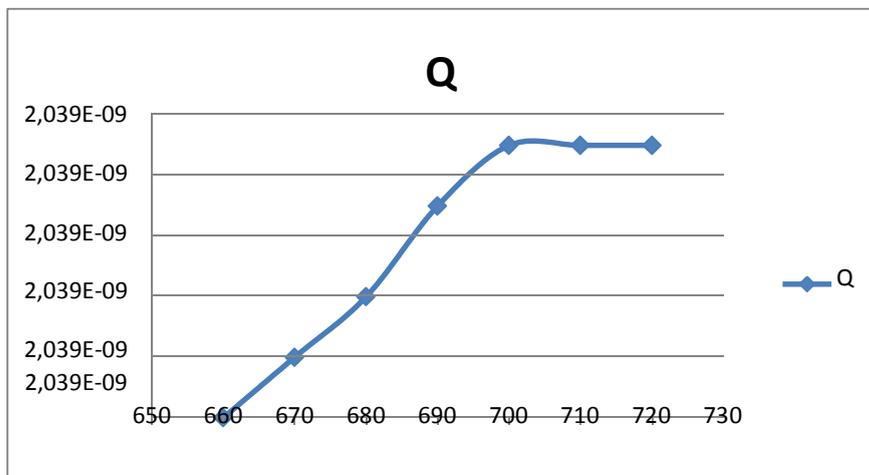
KY	KX	Qi						
1,00E-10	2,20E-08	1,89E-09						
1,89E-09	1,89E-09	1,89E-09	1,89E-09					



a	660	670	680	690	700	710	720
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,30E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	660	670	680	690	700	710	720
$\pi_1$	230	230	230	230	230	230	230
$\pi_2$	66	67	68	69	70	71	72
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	53200	54000	54800	55600	56400	57200	58000
Q	2,04E-09						
$\Delta Q$		2E-16	2E-16	3E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-10    2,30E-08    2,04E-09    2,04E-09    2,04E-09    2,04E-09    2,04E-09

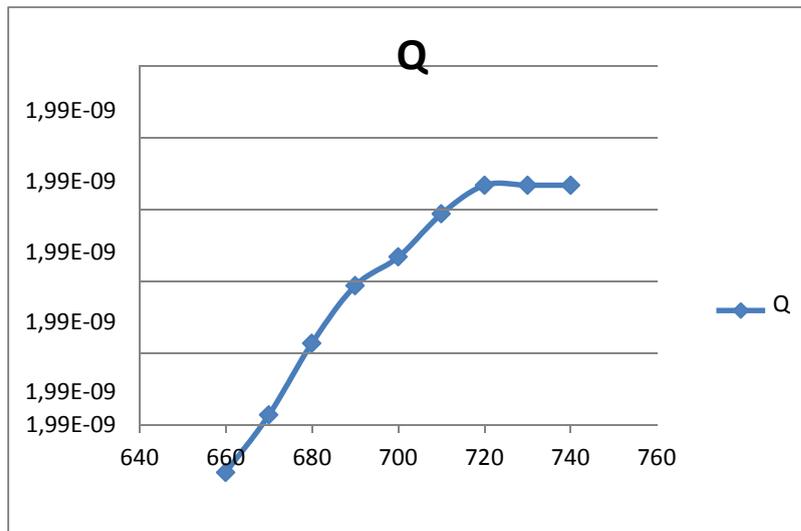


a	680	690	700	710	720	730	740
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,40E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	680	690	700	710	720	730	740
$\pi_1$	240	240	240	240	240	240	240
$\pi_2$	68	69	70	71	72	73	74
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	54800	55600	56400	57200	58000	58800	59600
Q	1,99E-09						
$\Delta Q$	1,99E-09	4E-16	2E-16	3E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-10    2,40E-08    1,99E-09    1,99E-09    1,99E-09    1,99E-09    1,99E-09

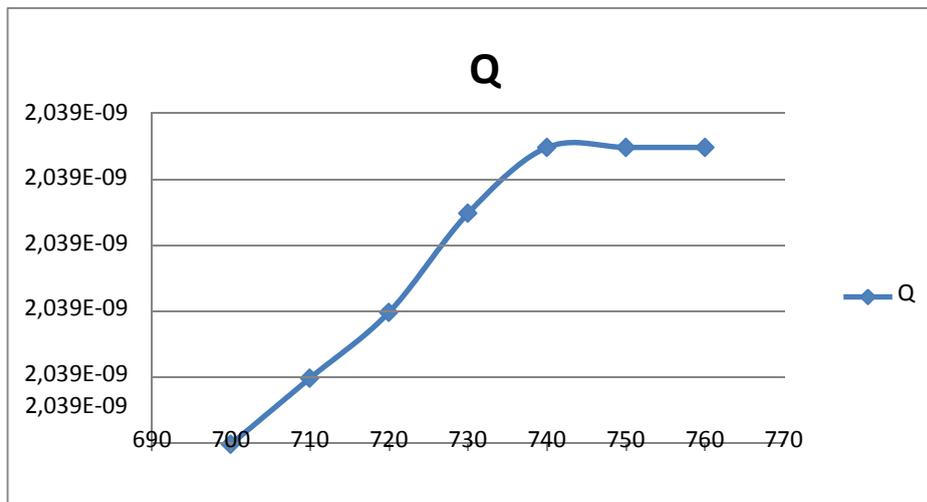
1,99E-09    1,99E-09



a	700	710	720	730	740	750	760
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,50E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	700	710	720	730	740	750	760
$\pi_1$	250	250	250	250	250	250	250
$\pi_2$	70	71	72	73	74	75	76
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	56400	57200	58000	58800	59600	60400	61200
Q	2,04E-09						
$\Delta Q$		2E-16	2E-16	3E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-10	2,50E-08	2,04E-09

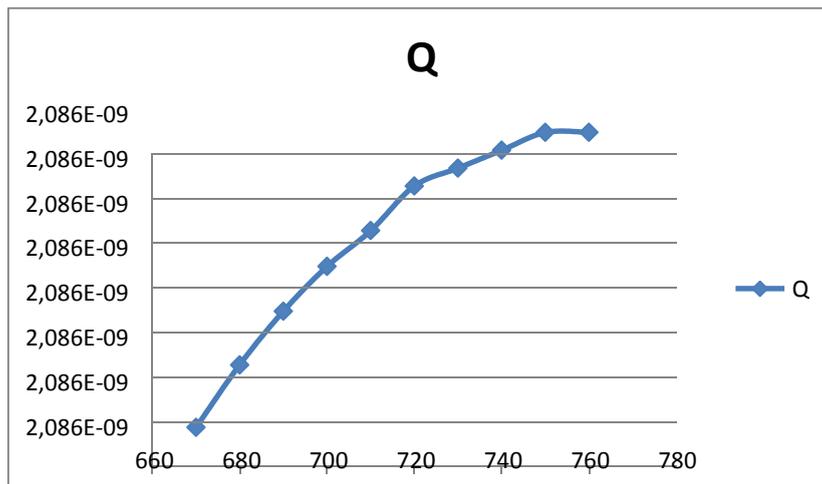
2,04E-09    2,04E-09    2,04E-09    2,04E-09    2,04E-09    2,04E-09



a	700	710	720	730	740	750	760
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,60E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	700	710	720	730	740	750	760
$\pi_1$	260	260	260	260	260	260	260
$\pi_2$	70	71	72	73	74	75	76
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	56400	57200	58000	58800	59600	60400	61200
Q	2,09E-09						
$\Delta Q$	2,09E-09	4E-16	5E-16	2E-16	2E-16	2E-16	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	continua	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

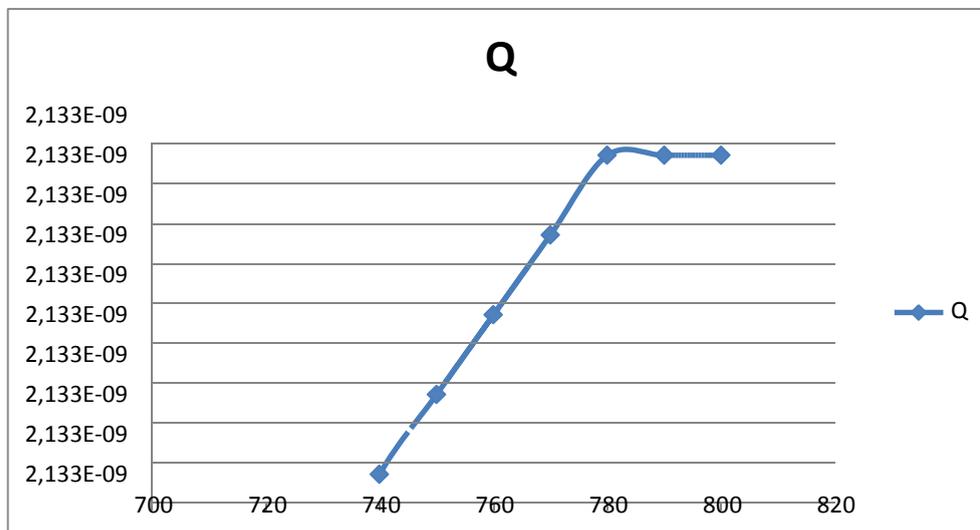
1,00E-10    2,60E-08    2,09E-09    2,09E-09    2,09E-09    2,09E-09    2,09E-09



a	740	750	760	770	780	790	800
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,70E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	740	750	760	770	780	790	800
$\pi_1$	270	270	270	270	270	270	270
$\pi_2$	74	75	76	77	78	79	80
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	59600	60400	61200	62000	62800	63600	64400
Q	2,13E-09						
$\Delta Q$	2,13E-09	2E-16	2E-16	2E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-10	2,70E-08	2,13E-09	2,13E-09	2,13E-09	2,13E-09	2,13E-09	2,13E-09
2,13E-09	2,13E-09	2,13E-09	2,13E-09				

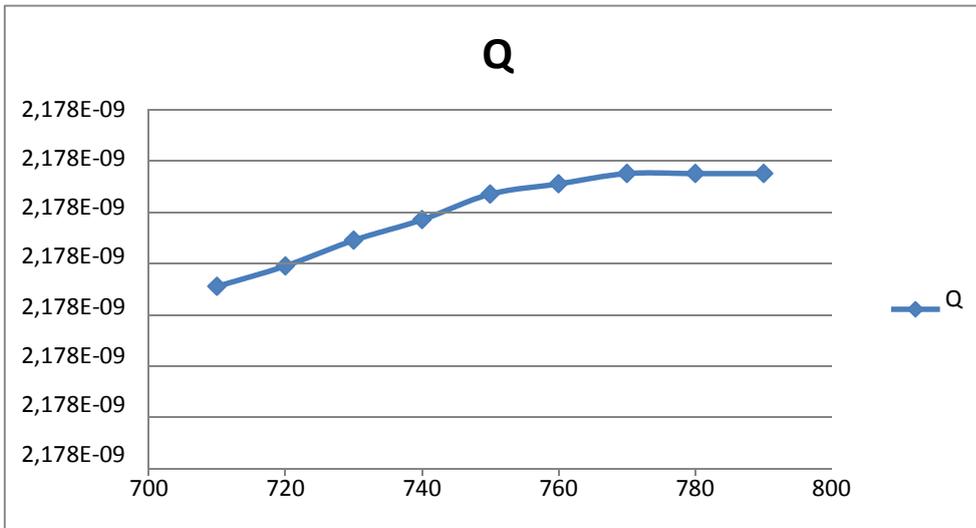


a	730	740	750	760	770	780	790
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,80E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	730	740	750	760	770	780	790
$\pi 1$	280	280	280	280	280	280	280
$\pi 2$	73	74	75	76	77	78	79
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	58800	59600	60400	61200	62000	62800	63600
Q	2,18E-09						
$\Delta Q$	2,18E-09	4E-16	5E-16	2E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-10    2,80E-08    2,18E-09    2,18E-09    2,18E-09    2,18E-09    2,18E-09    2,18E-09

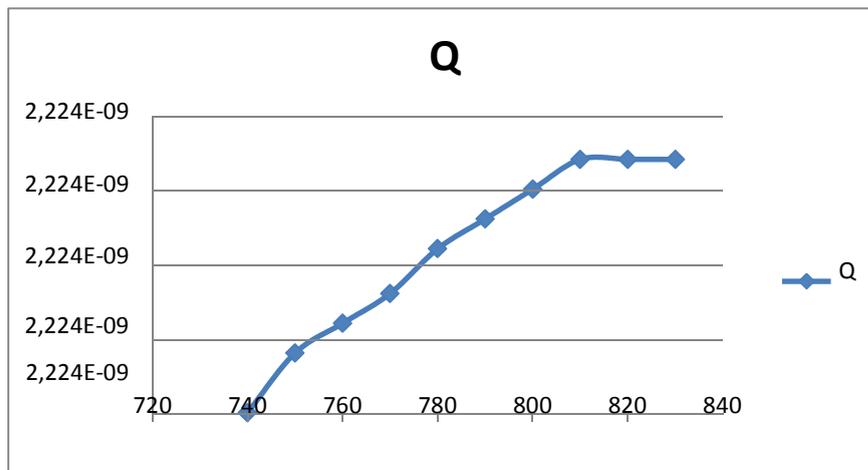
2,18E-09    2,18E-09



a	770	780	790	800	810	820	830
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	2,90E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	770	780	790	800	810	820	830
$\pi 1$	290	290	290	290	290	290	290
$\pi 2$	77	78	79	80	81	82	83
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	62000	62800	63600	64400	65200	66000	66800
Q	2,22E-09						
$\Delta Q$	2,22E-09	3E-16	2E-16	2E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

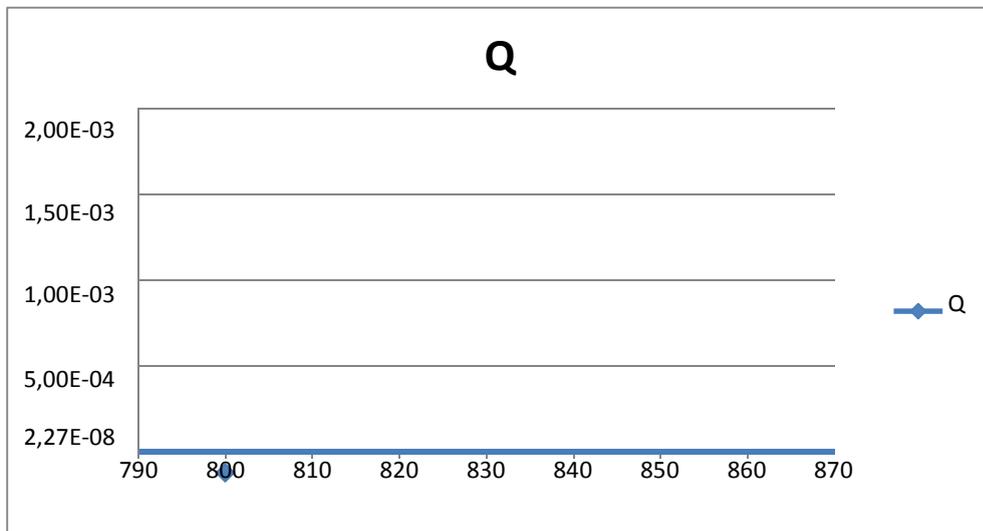
1,00E-10	2,90E-08	2,22E-09	2,22E-09	2,22E-09	2,22E-09	2,22E-09	2,22E-09
2,22E-09	2,22E-09	2,22E-09	2,22E-09				



a	800	810	820	830	840	850	860
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	3,00E-07	3,00E-07	3,00E-07	3,00E-07	3,00E-07	3,00E-07	3,00E-07
Ky	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09	1,00E-09
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	800	810	820	830	840	850	860
$\pi_1$	300	300	300	300	300	300	300
$\pi_2$	80	81	82	83	84	85	86
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	64400	65200	66000	66800	67600	68400	69200
Q	2,27E-08	2,27E-09	2,27E-09	2,27E-09	2,27E-09	2,27E-09	2,27E-09
$\Delta Q$	2,27E-08	-2,0413E-08	2E-16	3E-16	0	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	exito	exito	exito

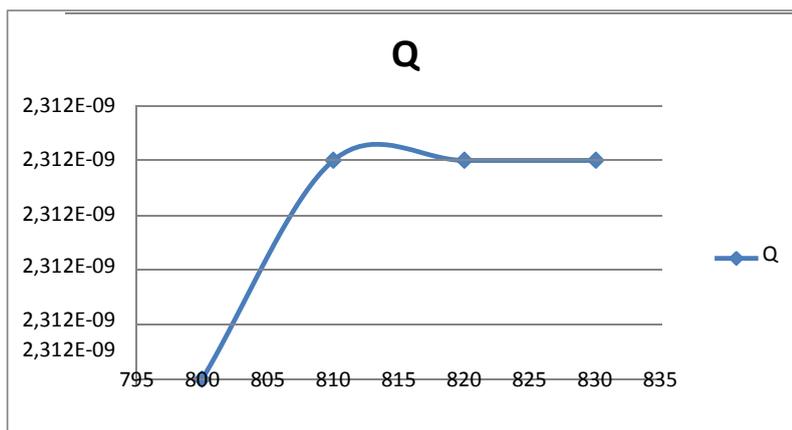
Input Resultados

KY	KX	Qi						
1,00E-09	3,00E-07	2,27E-08						
2,27E-08	2,27E-08							



a	800	810	820	830
$\Delta\phi$	1	1	1	1
Kx	3,10E-08	3,10E-08	3,10E-08	3,10E-08
Ky	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10
e	10	10	10	10
d	10	10	10	10
c	800	810	820	830
$\pi 1$	310	310	310	310
$\pi 2$	80	81	82	83
f	2	2	2	2
NT	64400	65200	66000	66800
Q	2,31E-09	2,31E-09	2,31E-09	2,31E-09
$\Delta Q$		2,00E-16	0	0
Resultado	continua	continua	exito	exito

Input Resultados				
KY	KX	Qi		
1,00E-10	3,10E-08	2,31E-09	2,31E-09	2,31E-09

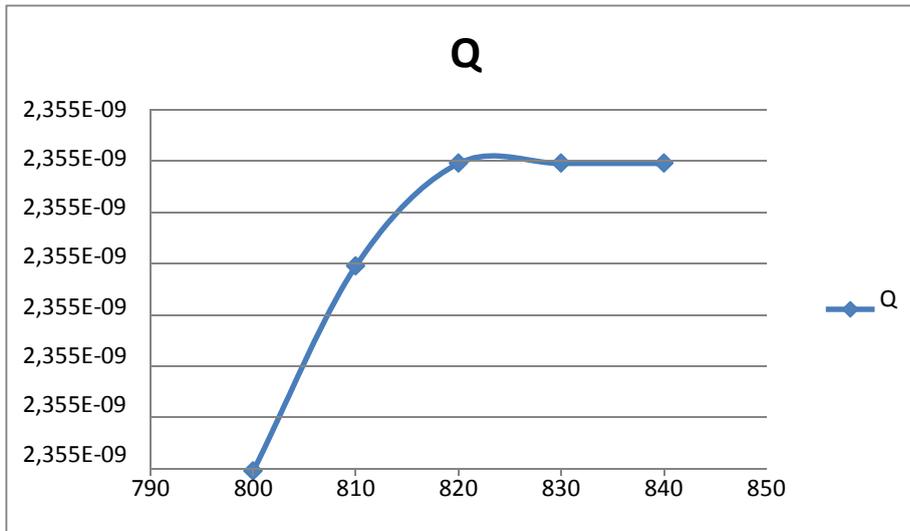


a	800	810	820	830	840
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1
Kx	3,20E-08	3,20E-08	3,20E-08	3,20E-08	3,20E-08
Ky	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10	1,00E-10
e	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10
c	800	810	820	830	840
$\pi_1$	320	320	320	320	320
$\pi_2$	80	81	82	83	84
f	2	2	2	2	2
NT	64400	65200	66000	66800	67600
Q	2,35E-09	2,35E-09	2,35E-09	2,35E-09	2,35E-09
$\Delta Q$		4,00E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados

KY	KX	Qi
----	----	----

1,00E-10    3,20E-08    2,35E-09    2,35E-09    2,35E-09    2,35E-09

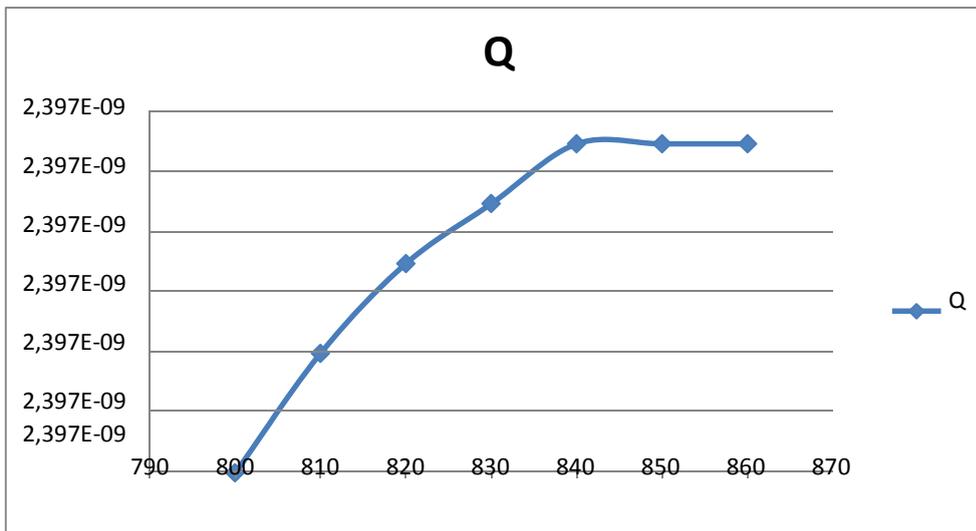


a	800	810	820	830	840	850	860
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	3,30E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	800	810	820	830	840	850	860
$\pi 1$	330	330	330	330	330	330	330
$\pi 2$	80	81	82	83	84	85	86
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	64400	65200	66000	66800	67600	68400	69200
Q	2,40E-09						
$\Delta Q$		4,00E-16	3E-16	2E-16	2E-16	0	0
Resultado	exito	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-10    3,30E-08    2,40E-09    2,40E-09    2,40E-09    2,40E-09    2,40E-09

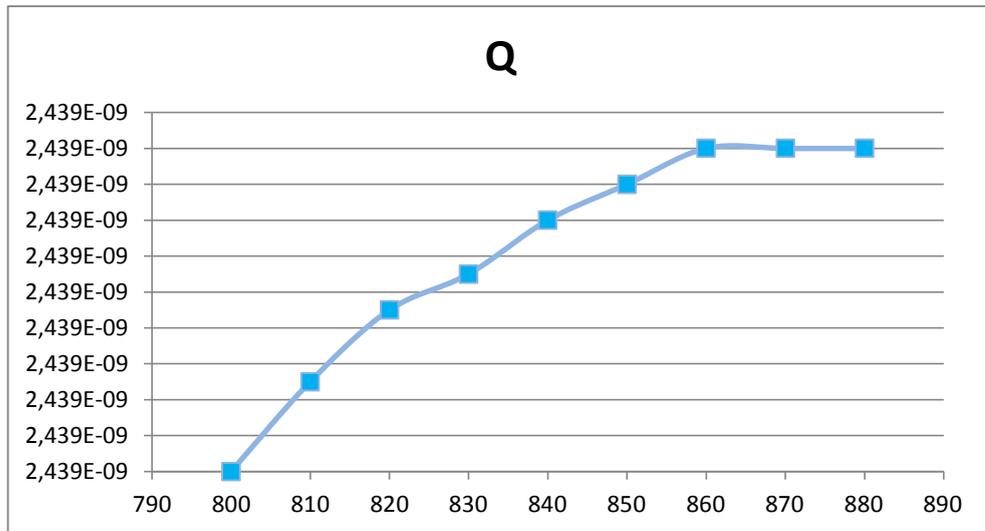
2,40E-09



a	820	830	840	850	860	870	880
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	3,40E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	820	830	840	850	860	870	880
$\pi_1$	340	340	340	340	340	340	340
$\pi_2$	82	83	84	85	86	87	88
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	66000	66800	67600	68400	69200	70000	70800
Q	2,44E-09						
$\Delta Q$	2,44E-09	2E-16	3E-16	2E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-10    3,40E-08    2,44E-09    2,44E-09    2,44E-09    2,44E-09    2,44E-09    2,44E-09

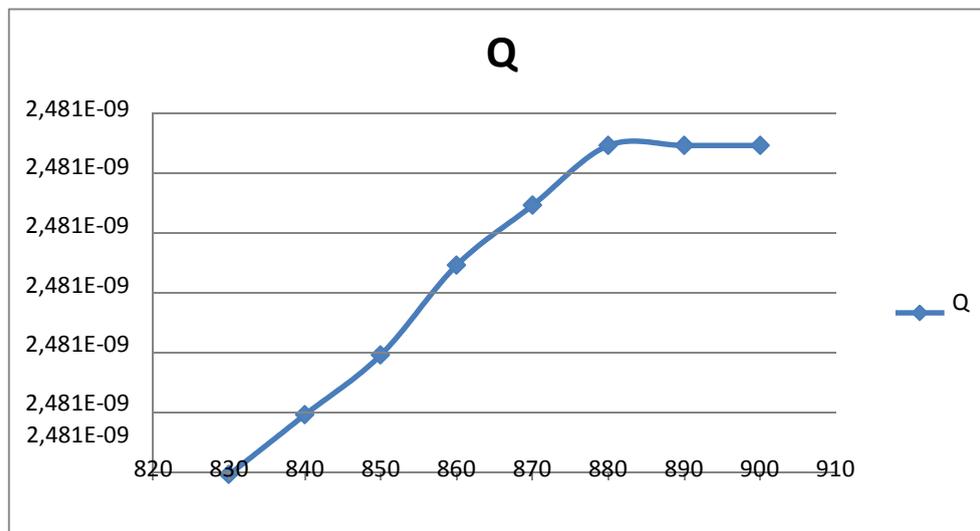


a	840	850	860	870	880	890	900
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	3,50E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	840	850	860	870	880	890	900
$\pi 1$	350	350	350	350	350	350	350
$\pi 2$	84	85	86	87	88	89	90
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	67600	68400	69200	70000	70800	71600	72400
Q	2,48E-09						
$\Delta Q$	2,48E-09	2E-16	3E-16	2E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi

1,00E-10    3,50E-08    2,48E-09    2,48E-09    2,48E-09    2,48E-09    2,48E-09    2,48E-09

2,48E-09    2,48E-09

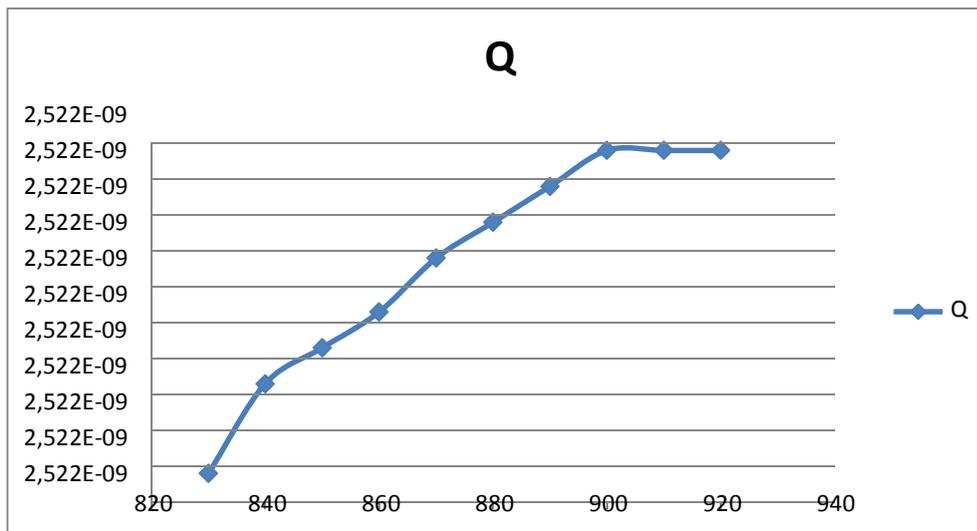


a	860	870	880	890	900	910	920
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	3,60E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	860	870	880	890	900	910	920
$\pi_1$	360	360	360	360	360	360	360
$\pi_2$	86	87	88	89	90	91	92
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	69200	70000	70800	71600	72400	73200	74000
Q	2,52E-09						
$\Delta Q$	2,52E-09	3E-16	2E-16	2E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados

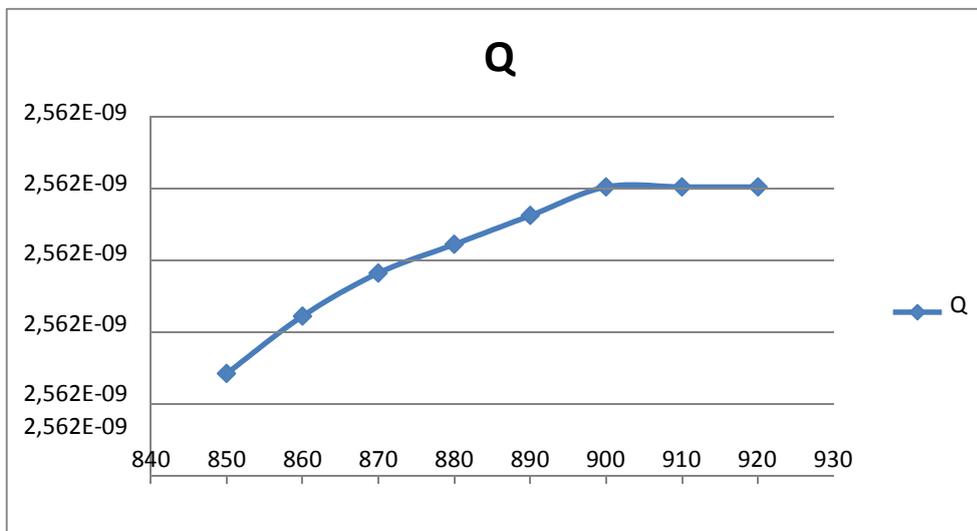
KY	KX	Qi
----	----	----

1,00E-10    3,60E-08    2,52E-09    2,52E-09    2,52E-09    2,52E-09    2,52E-09    2,52E-09



a	860	870	880	890	900	910	920
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	3,70E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	860	870	880	890	900	910	920
$\pi 1$	370	370	370	370	370	370	370
$\pi 2$	86	87	88	89	90	91	92
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	69200	70000	70800	71600	72400	73200	74000
Q	2,56E-09						
$\Delta Q$	2,56E-09	3E-16	2E-16	2E-16	2E-16	0	0
Resultado	continua	continua	continua	continua	continua	exito	exito

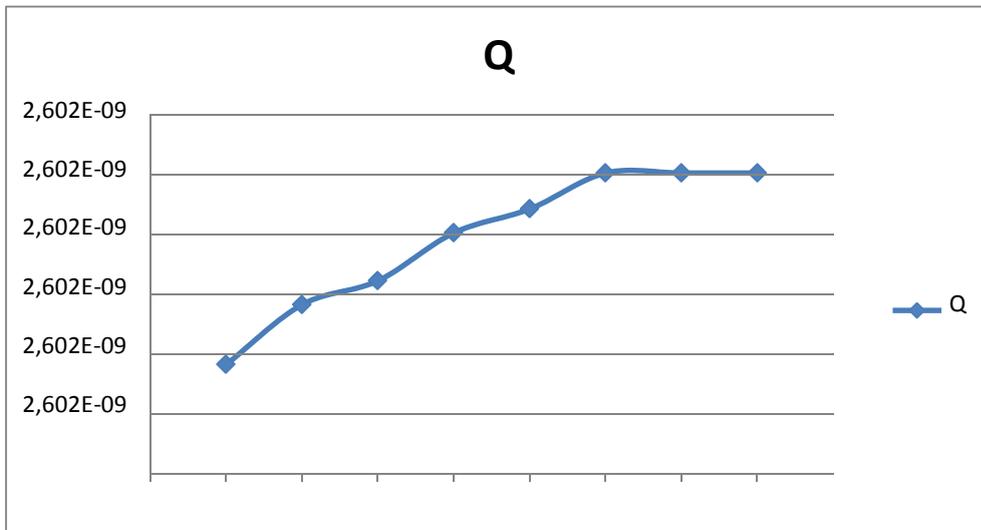
Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-10	3,70E-08	2,56E-09
		2,56E-09



a	860	870	880	890	900	910	920
$\Delta\phi$	1	1	1	1	1	1	1
Kx	3,80E-08						
Ky	1,00E-10						
e	10	10	10	10	10	10	10
d	10	10	10	10	10	10	10
c	860	870	880	890	900	910	920
$\pi_1$	380	380	380	380	380	380	380
$\pi_2$	86	87	88	89	90	91	92
f	2	2	2	2	2	2	2
NT	69200	70000	70800	71600	72400	73200	74000
Q	2,60E-09						
$\Delta Q$	#¡REF!	2E-16	4E-16	2E-16	3E-16	0	0
Resultado	#¡REF!	continua	continua	continua	continua	exito	exito

Input Resultados		
KY	KX	Qi
1,00E-10	3,80E-08	2,60E-09

2,60E-09    2,60E-09    2,60E-09    2,60E-09    2,60E-09



## Referencias

Alhama Manteca, I., Alhama, F., Rodríguez Estrella, T. "Chemical and physical parameters as trace markers of anthropogenic-induced salinity in the Agua Amarga coastal aquifer (southern Spain)", Hydrogeology Journal, 133(3) 40-50 (2012)

Alhama, I., Alhama, F. y Soto, A. "Mathematical characterization of scenarios of fluid flow and solute transport in porous media by discriminated non-dimensionalization". Int. J. Eng. Science, 50 1-9 (2012)

Alhama I., Soto A. and Alhama F. "Simulador de flujo y transporte FATSIM-A.", Servicio de publicaciones UPCT, Cartagena (2010)

Alhama, F., Zueco, J. "Application of a lumped model to solids with linearly temperature-dependent thermal conductivity". Applied Mathematical Modelling 31, 302-310 (2007)

Atkinson, J. "The Mechanics of Soils and Foundations", Taylor and Francis, New York (2007)

Azizi, F. "Applied analyses in geotechnics." Taylor and Francis, New York (2000)

Bejan A. "Convection heat transfer", 3ª ed. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey (2005)

<sup>1</sup> Berry, P.L. Reid, D. "An Introduction to Soil Mechanics", McGraw-Hill, New York (1993)

Castro, E., García Hernández, M.T. y Gallego, A. "Transversal waves in beams via the network simulation method". Journal of Sound and Vibration (2004)

Chapman, J.A. "Heat transfer", Mcmillan Publishing Company, New York (1984)

Das, B.M. "Advanced Soil Mechanics." Taylor and Francis, New York (2008)

EPSNET\_10 Elasticity problems simulation network. Alhama, F., Morales, J.L, y Moreno, J.A. 2011)

FAHET Flow and Heat Transport simulator Alhama, I., Soto, A., y Alhama, F. (2011)

FATSIM-A Fluid Flow and Solute Transport simulator Alhama, I., Soto, A., Alhama, F. (2010)

Gonzalez-Fernández, C.F., García Hernández, M.T. y Horno, J. "Computer simulation of a square scheme with reversible and irreversible charge transfer by the network method", J. Electroanal. Chem., 395, 39-44 (1995)

González-Fernández, C.F., Horno J. "Heat Transfer and the Network Simulation Method". Research Signpost, Kerala (2002)

<sup>2</sup>González de Vallejo, L., "Ingeniería Geológica", Pearson Educación, Madrid (2002)

GeoStudio2012. GeoSlope International, Calgary, Canada (2013)

Horno, J., Gonzalez Caballero, A., Hayas, A. y Gonzalez-Fernández, C.F., "The effect of previous convective flux on the nonstationary diffusion through membranes". J. Membr. Sci, 48, 67-77(1990)

Incropera, F.P. and DeWitt, D.P. "Introduction to heat transfer", John Wiley, New York (1996)

Harr, M. E. "Groundwater and Seepage", McGraw-Hill, New York (1962)

Horno, J., García Hernández, M.T., y González Fernandez, C.F. "Digital simulation of electrochemical processes by network approach", Journal Electroanal. Chem. 352, 8397 57-64 (2012)

Lopez-García, J.J., Moya, A.A., Horno, J., Delgado, A. Y Gonzalez-Caballero, F. "A network model of the electrical double layer around a colloid particle". J. Colloid Interface Sci. 183, 124-130 (1996)

Mandel, J. "Ecoulement de l'eau sous une ligne de palplanches: Abaque pour la condition de renard." Travaux, 197, pp.273-281 (1951)

Mareca, P., Alcover, V. y Alhama, F. "Una herramienta docente para analizar el caos en circuitos electrónicos." Conferencia Ibérica de Sistemas y Tecnología de la Información (2010)

Marín, F., Alhama, F., Moreno, J.A. "Modelling of stick-slip behaviour with different hypotheses on friction forces". International Journal of Engineering Science (2012)

MATLAB 6. Matworks, Natic, MA (1997)

Mills, A.F. "Heat and Mass Transfer", Irvin, New York (1995)

Morales, J.L., Moreno, J.A. Alhama, F. "Numerical Solutions of 2-D Linear Elastostatic Problems by Network Method", CMES 76 (1) 1-18 (2011)

Morales, J.L., Alhama, I., Alcaraz, M. y Alhama, F. "Numerical simulation of 2-D transversal seismic waves by network method" CMES 94(3) 261-277 (2013)

Nagel, L.W., "SPICE (Simulation program with integrated circuit emphasis)", Berkeley, CA; University of California, Electronics Res. Lab., ERL-M382 (1977)

Peusner, L. "The principles of network thermodynamics. Theory and biophysical application" Ph. D. Thesis. Harvard Univ., Cambridge, Massachusetts, (1970)

Potter, M. C. y Wiggert, D. C. Mechanics of fluids. Prentice Halls, New York (1997)

PROCCA-09 Programa de conducción de calor Alhama, I. Soto, A. y Alhama, F. (2005)

PSPICE, versión 6.0: Microsim Corporation, 20 fairbanks, Irvine, California 92718 (1994)

Sanchez, J.F., Alhama, F. y Moreno Nicolás, J.A. "An efficient and reliable model based on network method to simulate CO<sub>2</sub> corrosion with protective iron carbonate films", Computers and Chemical Engineering, 39 57-64 (2012)

Sanchez, J.F., Alhama, F. y Moreno Nicolás, J.A. "Numerical simulation of high temperature oxidation of lubricants using the network method", Chemical engineering Communications (2014)