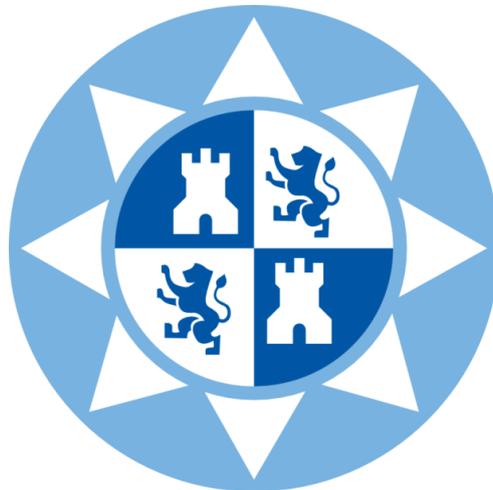


Universidad Politécnica de Cartagena  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Naval y Oceánica

## PROYECTO FIN DE CARRERA



***“Estudio sobre esquemas de subdivisión no lineales  
en mallados no uniformemente espaciados”***

Titulación: Ingeniería Naval y Oceánica  
Alumna: Cristina Cerón Colmena  
Director: D. Juan Carlos Trillo Moya

Mayo de 2015



**“Estudio sobre esquemas de subdivisión no  
lineales en mallados no uniformemente  
espaciados”**

Cristina Cerón Colmena

Universidad Politécnica de Cartagena



# **Agradecimientos**

A D. Juan Carlos Trillo Moya, director de este proyecto, por su dedicación y ayuda para poder llevarlo a cabo.

A mis padres y a mi hermana, por su apoyo y sus ánimos durante mis estudios, por valorarme y confiar en mí.

A Alberto, porque compartir el camino ha hecho que fuera más fácil.





---

# Índice del contenido

---

<b>Lista de Tablas</b>	III
<b>Lista de Figuras</b>	V
<b>Capítulo 1: Presentación del proyecto</b>	1
<b>Capítulo 2: Conceptos previos sobre diseño naval</b>	2
2.1. Planos y líneas de referencia del casco	2
2.2. Zonas de referencia del casco de un buque	4
2.3. Dimensiones principales del buque	6
<b>Capítulo 3: Representación de las formas de un buque</b>	10
3.1. Ejes de referencia	10
3.2. Cartilla de trazado	11
3.3. Plano de formas	12
3.4. Representación manual del plano de formas	15
3.5. Representación de un barco por ordenador	22
<b>Capítulo 4: Alisado de formas</b>	25
4.1. Alisado de Gálibo	25
4.2. Alisado a escala 1/10	26
4.3. Desventaja de los métodos antiguos	27
4.4. Alisado por métodos numéricos	28
4.5. Métodos gráficos iterativos	29
4.5.1. Modelos de alambre	29
4.5.2. Modelos de superficie	31
4.6. Métodos de comprobación del alisado	32
<b>Capítulo 5: Esquemas de subdivisión</b>	35
5.1. Esquemas de subdivisión	35
5.2. Esquemas no lineales. Interpolación PPH	36
5.3. Esquema de subdivisión PPH en un mallado no uniforme	38
<b>Capítulo 6: Test numéricos</b>	41
6.1. Introducción	41
6.2. Test de convergencia	42
6.3. Test de suavidad	61



---

6.4. Estabilidad del esquema de subdivisión	65
6.5. Conservación de la convexidad	71
<b>Capítulo 7: Conclusiones</b>	76
<b>Bibliografía</b>	77
<b>Anexo: Programación en Matlab</b>	79



## Lista de Tablas

<b>Tabla 6.1.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 1) para la función $f(x) = \sin(x)$	61
<b>Tabla 6.2.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 1) para la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$	61
<b>Tabla 6.3.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 1) para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $	62
<b>Tabla 6.4.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 1) para la función $f(x) = x^4$	62
<b>Tabla 6.5.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 2) para la función $f(x) = \sin(x)$	62
<b>Tabla 6.6.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 2) para la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$	63
<b>Tabla 6.7.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 2) para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $	63
<b>Tabla 6.8.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 2) para la función $f(x) = x^4$	63
<b>Tabla 6.9.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 3) para la función $f(x) = \sin(x)$	64
<b>Tabla 6.10.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 3) para la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$	64
<b>Tabla 6.11.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 3) para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $	64
<b>Tabla 6.12.</b> Estimación de la constante de suavidad (método 3) para la función $f(x) = x^4$	65
<b>Tabla 6.13.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función $f(x) = \sin(x)$ , con norma $\ \cdot\ _2$	66
<b>Tabla 6.14.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función $f(x) = \sin(x)$ , con norma $\ \cdot\ _\infty$	66
<b>Tabla 6.15.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , con norma $\ \cdot\ _2$	66
<b>Tabla 6.16.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , con norma $\ \cdot\ _\infty$	67
<b>Tabla 6.17.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $ , con norma $\ \cdot\ _2$	67
<b>Tabla 6.18.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $ , con norma $\ \cdot\ _\infty$	67
<b>Tabla 6.19.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función $f(x) = x^4$ , con norma $\ \cdot\ _2$	68



---

<b>Tabla 6.20.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función $f(x) = x^4$ , con norma $  \cdot  _\infty$	68
<b>Tabla 6.21.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función $f(x) = \sin(x)$ , con norma $  \cdot  _2$	68
<b>Tabla 6.22.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función $f(x) = \sin(x)$ , con norma $  \cdot  _\infty$	69
<b>Tabla 6.23.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , con norma $  \cdot  _2$	69
<b>Tabla 6.24.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , con norma $  \cdot  _\infty$	70
<b>Tabla 6.25.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $ , con norma $  \cdot  _2$	70
<b>Tabla 6.26.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $ , con norma $  \cdot  _\infty$	70
<b>Tabla 6.27.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función $f(x) = x^4$ , con norma $  \cdot  _2$	71
<b>Tabla 6.28.</b> Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función $f(x) = x^4$ , con norma $  \cdot  _\infty$	71



## Lista de Figuras

<b>Figura 2.1.</b> Planos de referencia del casco	3
<b>Figura 2.2.</b> Plano de formas	3
<b>Figura 2.3.</b> Zonas de referencia del casco de un buque	4
<b>Figura 2.4.</b> Sección transversal del casco	5
<b>Figura 2.5.</b> Arrufo de cubierta	6
<b>Figura 2.6.</b> Esloras del buque	7
<b>Figura 2.7.</b> Manga, puntal y calado del buque	8
<b>Figura 2.8.</b> Puntales	8
<b>Figura 2.9.</b> Calados del buque	9
<b>Figura 3.1.</b> Ejes de Referencia	11
<b>Figura 3.2.</b> Cartilla de trazado	11
<b>Figura 3.3.</b> Secciones y caja de cuadernas	12
<b>Figura 3.4.</b> Líneas de agua	12
<b>Figura 3.5.</b> Longitudinales	13
<b>Figura 3.6.</b> Planos diagonales	13
<b>Figura 3.7.</b> Trazas del plano en las tres proyecciones	16
<b>Figura 3.8.</b> Representación de las cuadernas	16
<b>Figura 3.9.</b> Representación del perfil longitudinal	17
<b>Figura 3.10.</b> Representación de las líneas de agua	17
<b>Figura 3.11.</b> Obtención de un longitudinal en la zona de proa	18
<b>Figura 3.12.</b> Longitudinal no alisado	19
<b>Figura 3.13.</b> Alisado de un longitudinal	19
<b>Figura 3.14.</b> Longitudinales alisados	20
<b>Figura 3.15.</b> Obtención de las diagonales	21
<b>Figura 3.16.</b> Rotulado del plano de formas	21
<b>Figura 3.17.</b> Curva NURBS	22
<b>Figura 3.18.</b> Superficie mostrando puntos de control y líneas de unión	24
<b>Figura 3.19.</b> Superficie mostrando puntos de control en la superficie	24
<b>Figura 4.1.</b> Container definido mediante estructura inalámbrica	30
<b>Figura 4.2.</b> Corbeta definida mediante un modelo de superficie	32
<b>Figura 4.3.</b> Comprobación del alisado mediante entorno, plata o pinceladas	33
<b>Figura 4.4.</b> Comprobación del alisado mediante una superficie zebra	33
<b>Figura 4.5.</b> Control de la curvatura mediante curvas de control	34
<b>Figura 6.1.</b> Mallado no uniforme	42
<b>Figura 6.2.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica (método 1) para la función $f(x) = \sin(x)$	43
<b>Figura 6.3.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica ponderada (método 2) para la función $f(x) = \sin(x)$	43
<b>Figura 6.4.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica modificada (método 3) para la función $f(x) = \sin(x)$	44
<b>Figura 6.5.</b> Esquema de subdivisión de Lagrange para la función $f(x) = \sin(x)$	45
<b>Figura 6.6.</b> Esquema de subdivisión lineal para la función $f(x) = \sin(x)$	45



<b>Figura 6.7.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica (método 1) para la función	
$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$	46
<b>Figura 6.8.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica ponderada (método 2) para la	
función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$	47
<b>Figura 6.9.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica modificada (método 3) para la	
función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$	48
<b>Figura 6.10.</b> Esquema de subdivisión de Lagrange para la función	
$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$	49
<b>Figura 6.11.</b> Esquema de subdivisión lineal para la función	
$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$	50
<b>Figura 6.12.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica (método 1) para la función	
$f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $	51
<b>Figura 6.13.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica ponderada (método 2) para la	
función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $	52
<b>Figura 6.14.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica modificada (método 3) para la	
función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $	53
<b>Figura 6.15.</b> Esquema de subdivisión de Lagrange para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $	54
<b>Figura 6.16.</b> Esquema de subdivisión lineal para la función $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $	55
<b>Figura 6.17.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica (método 1) para la función	
$f(x) = x^4$	56
<b>Figura 6.18.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica ponderada (método 2) para la	
función $f(x) = x^4$	57
<b>Figura 6.19.</b> Esquema PPH de subdivisión armónica modificada (método 3) para la	
función $f(x) = x^4$	58
<b>Figura 6.20.</b> Esquema de subdivisión de Lagrange para la función $f(x) = x^4$	59
<b>Figura 6.21.</b> Esquema de subdivisión lineal para la función $f(x) = x^4$	60
<b>Figura 6.22.</b> Esquema de subdivisión	72



# Capítulo 1

## PRESENTACIÓN DEL PROYECTO

---

Las bases y normas sobre la elaboración, matrícula, presentación, calificación y tramitación administrativa de este proyecto fin de carrera están recogidas en las Normas Académicas de la Universidad Politécnica de Cartagena (aprobadas por el Consejo de Gobierno en sesión de fecha de 23 de Octubre de 2006 y publicadas en el BORM nº 289, de 16 de Diciembre de 2006), Título XI (Realización y Presentación del Proyecto de Fin de Carrera).

Es un proyecto de carácter específico, llevado a cabo con el departamento de Matemática Aplicada y Estadística de la Universidad Politécnica de Cartagena, con D. Juan Carlos Trillo Moya como director.

Los esquemas de subdivisión son unas herramientas muy usadas en el diseño de curvas y superficies, y tienen también relación con otras aplicaciones interesantes en tratamiento digital de imágenes o en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Estos esquemas están basados en un conjunto de reglas, las cuáles aplicadas recursivamente permiten un refinamiento sucesivo de un conjunto inicial de puntos llamados puntos de control.

Este documento presenta un esquema no lineal que preserva la convexidad en mallados no uniformes. Se ha pretendido generalizar el esquema interpolatorio de subdivisión PPH, el cual no está definido para mallados no igualmente espaciados (ver [2]).

Se comenzará este proyecto con unas descripciones básicas sobre diseño naval, fundamental para poder entender el alcance de este proyecto. Posteriormente, se ha generalizado un esquema de subdivisión PPH en un mallado no igualmente espaciado, ya que este tipo de esquemas sólo estaban definidos para mallados igualmente espaciados. Se ha comprobado la estabilidad del esquema de subdivisión de manera numérica, así como la suavidad de la función límite.





## Capítulo 2

### CONCEPTOS PREVIOS SOBRE DISEÑO NAVAL

---

#### 2.1. Planos y líneas de referencia del casco

Los conceptos que a continuación se van a describir, son bastante básicos en el ámbito de la construcción naval, no obstante, es necesario conocer cada uno de ellos para poder comprender el proceso de diseño de una embarcación.

Se llama casco del buque al conjunto estructural del mismo formado por el forro exterior estanco y los refuerzos sobre los que se apoya. Estanco significa que es impermeable, es decir, no deja pasar el agua. El casco de un buque se puede cortar según un conjunto de tres planos perpendiculares entre sí, paralelos a los planos de un triedro.

Plano de crujía: es el plano de simetría del barco en sentido longitudinal. La intersección de este plano con el casco se llama línea de crujía. Los planos paralelos al de crujía que cortan al casco del buque se llaman planos longitudinales, y a las líneas de corte de los mismos con el casco, se llaman longitudinales.

Plano de flotación: es el plano perpendicular al de crujía que representa la superficie del agua sin oleaje. El plano de flotación de trazado, o flotación de trazado, es el situado al calado de trazado o proyecto del buque. La intersección de este plano con el casco se llama línea de flotación de trazado. Las intersecciones de planos paralelos al de flotación con el casco se llaman líneas de agua. Se llama plano base al plano paralelo a la flotación de trazado que pasa por el canto superior de la quilla en la sección media. A la intersección del plano base con el de crujía se le llama línea base.

Plano transversal: es un plano perpendicular a los dos anteriores. Las intersecciones de planos transversales con el casco se llaman cuadernas de trazado



o secciones. El conjunto de cuadernas que representan las formas de un barco se llama caja de cuadernas.

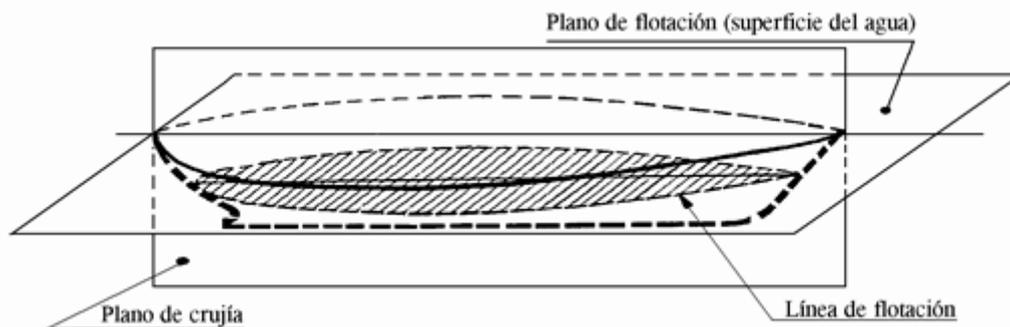


Figura 2.1. Planos de referencia del casco

Las formas del casco de un buque se representan mediante un conjunto de líneas de trazado según los tres tipos de planos anteriores, es decir, cuadernas, líneas de agua y longitudinales, formando el denominado plano de formas.

Hay que distinguir entre trazado fuera de miembros y fuera de forros. El trazado fuera de miembros se utiliza para representar las formas de buques realizados con materiales metálicos, y no tienen en cuenta el espesor del forro exterior, es decir, las dimensiones de las líneas de trazado excluyen el espesor del forro exterior. En el caso de embarcaciones de madera y fibra, el trazado se realiza fuera de forros, es decir, teniendo en cuenta el espesor del forro exterior.

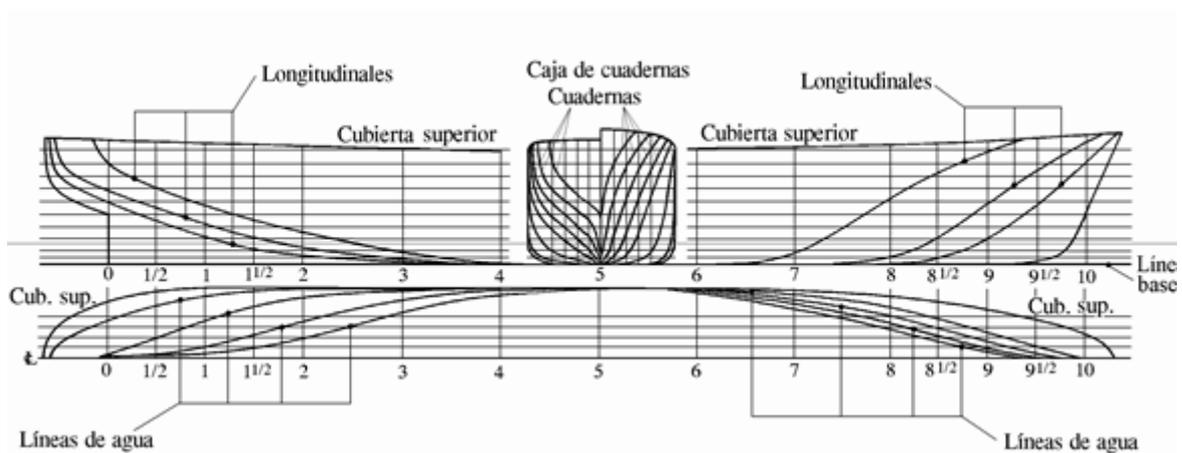


Figura 2.2. Plano de formas



## 2.2. Zonas de referencia del casco de un buque

Las zonas principales de referencia en las que se divide el casco de un buque son las siguientes,

**Proa:** es la parte delantera del buque en el sentido normal del movimiento.

**Popa:** es la parte posterior del buque en el sentido normal del movimiento. Hay popas de diferente forma, llamándose las más comunes: popa de espejo (plana), y popa de crucero (redonda).

**Estribor (Er):** es la banda o costado del buque que queda a la derecha de un observador colocado mirando de popa hacia proa.

**Babor (Br):** es la banda o costado del buque que queda a la izquierda de un observador colocado mirando de popa hacia proa.

**Amura:** zona de los costados de proa del buque, y puede ser amura de babor o de estribor.

**Aleta:** Zona de los costados de popa del buque, y puede ser aleta de babor o de estribor.

**Través:** dirección perpendicular al costado del buque, y puede ser través de babor o de estribor.

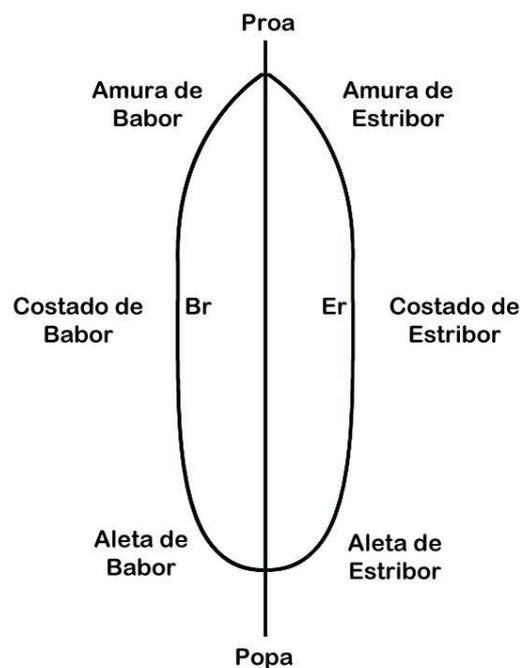


Figura 2.3. Zonas de referencia del casco de un buque



La nomenclatura que reciben las zonas del casco de un buque en sentido transversal es la siguiente,

Cubierta superior: Superficie de cierre superior del casco de un barco.

Forro: superficie que forma el cierre exterior del casco del barco. Según el material en el que se construya el casco, puede estar formada por planchas de acero, aluminio, listones de madera, o superficie de plástico reforzado con fibra de vidrio.

Quilla plana: zona inferior y en cruzía del forro del casco.

Fondo: parte inferior del casco del barco, junto a la quilla.

Pantoque: zona curva de unión entre el fondo y el costado del barco.

Costado: Cada uno de los laterales del casco, entre el pantoque y la cubierta superior.

Brusca: es la curvatura transversal de la cubierta medida por la altura de la cuerda en cruzía, desde la cara inferior de la cubierta hasta el punto más alto del costado.

Astilla muerta: elevación del fondo de la cuaderna sobre el plano base, medida en la mitad de la manga.

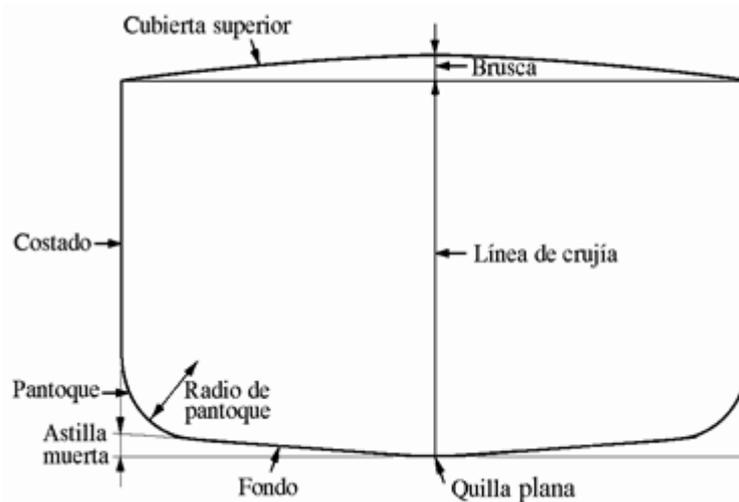


Figura 2.4. Sección transversal del casco



La nomenclatura que recibe el casco de un buque visto longitudinalmente es la siguiente,

**Roda:** es la zona más a proa del casco, donde se unen los costados. El perfil de roda más normal es el que forma la proa lanzada. A continuación de la roda seguiría la quilla a lo largo del plano de crujía, hasta su unión con el codaste.

**Codaste:** es la zona más a popa del casco, donde se unen los costados por debajo de la flotación.

**Arrufo de cubierta:** es la curvatura estructural que se le da a la cubierta en sentido longitudinal, medida en el costado por la altura sobre una línea paralela a la flotación y tangente a la cubierta en el punto más bajo. El arrufo varía a lo largo de la eslora siendo mayor en los extremos.

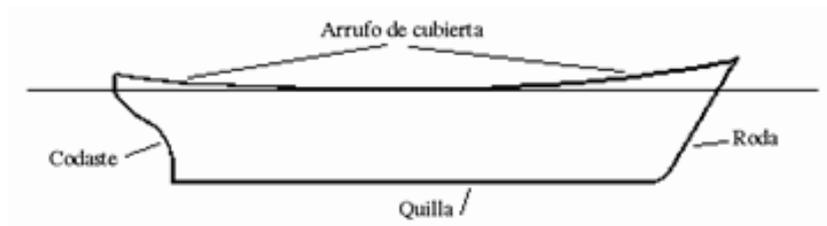


Figura 2.5. Arrufo de cubierta

### 2.3. Dimensiones principales del buque

Las dimensiones principales que definen a un buque son la eslora, la manga, el puntal y el calado. A continuación se va a detallar en que consiste cada una de ellas, así como sus tipos.

**Eslora:** dimensión del barco en sentido longitudinal, es decir, de proa a popa. Se pueden considerar las siguientes esloras:

**Eslora entre perpendiculares:** se representa por  $L_{pp}$ , y es la dimensión longitudinal de trazado del casco del buque, medida horizontalmente entre las perpendiculares de proa y de popa, siendo:

**Perpendicular de proa:** es la línea imaginaria perpendicular a la flotación de trazado o proyecto, que pasa por el punto de intersección de la roda con dicha flotación.



Perpendicular de popa: es la línea imaginaria perpendicular a la flotación de trazado o proyecto, que pasa por el eje del timón, o bien, por la cara de popa del codaste popel en caso de que el codaste sea cerrado.

La mitad del buque se considera que está en la mitad de la eslora entre perpendiculares, siendo la sección media la sección transversal que se encuentra en esa posición. Línea base es una línea paralela a la línea de flotación, que pasa por la intersección de la sección media con la cara alta de la quilla.

Eslora en una flotación: es la máxima longitud del buque en la intersección de esa flotación con la proa y popa del buque. Se representa por las letras  $L_f$ .

Eslora total: es la máxima longitud del buque entre los puntos más alejados a proa y popa. Se representa por las letras  $L_t$ .

Eslora de Francobordo: es el 96% de la eslora total en una flotación situada a una altura sobre el canto superior de la quilla igual al 85% del puntal de trazado, o bien, la eslora desde la cara de proa de la roda al eje de la mecha del timón en esa misma flotación, si este último valor es mayor.

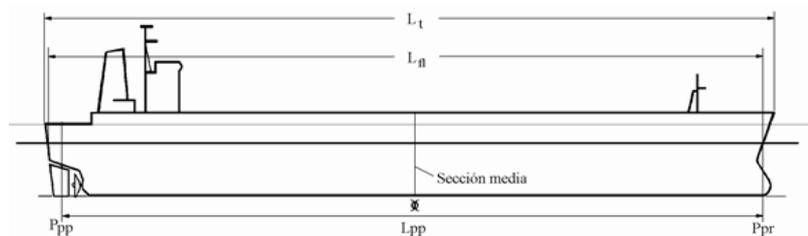


Figura 2.6. Esloras del buque

Manga: dimensión del barco en sentido transversal. Se pueden considerar las siguientes mangas:

Manga de trazado: es la máxima dimensión transversal de trazado del casco del buque a lo largo de la eslora. Se representa por la letra  $B$ . Hay que recordar que en barcos de madera y de fibra las dimensiones de trazado son fuera de forros, y en barcos metálicos son fuera de miembros. Por tanto, en buques metálicos, la manga fuera de forros es igual a la manga de trazado más el espesor del forro por ambos costados.

Manga en una flotación: es la manga máxima en la flotación considerada.

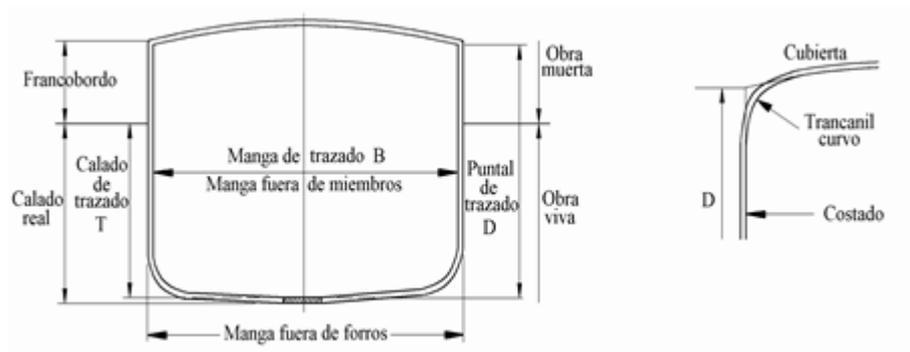


Figura 2.7. Manga, puntal y calado del buque

Puntal: dimensión en sentido vertical del buque. Se pueden considerar los siguientes puntales:

Puntal de trazado: es la máxima distancia vertical de trazado del casco del buque, medida en el costado y en la sección media. Se representa por la letra D.

Cuando el buque tenga trancanil curvo, el puntal se medirá hasta el punto de intersección de la línea de trazado de la cubierta con la del costado, prolongando imaginariamente las líneas, como se ve en el gráfico derecho de la figura 4.8. Trancanil es la zona de la cubierta en su unión con el costado del barco.

Puntal de bodega: distancia vertical desde la cara alta del fondo, o doble fondo, hasta la cara inferior de la cubierta más baja.

Puntal de entrepuente: distancia vertical entre dos cubiertas contiguas, dentro de una misma bodega. Entrepuente es la zona de bodega entre dos cubiertas de la misma, pues un barco puede tener más de una cubierta.

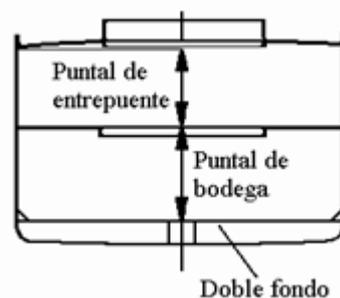


Figura 2.8. Puntales

Calado: distancia vertical correspondiente a la parte sumergida del buque. Se pueden considerar los siguientes calados:



Calado de trazado: distancia vertical de trazado de la parte sumergida del casco del buque por debajo de la flotación de trazado o proyecto, medida en la sección media. Se representa por la letra T. En barcos metálicos va desde el canto alto o parte superior de la plancha de quilla, a la flotación de trazado.

Calado en una flotación o calado real en esa flotación: es el calado medido desde la cara inferior o exterior de la quilla hasta el nivel de la flotación correspondiente.

Calado a proa ( $T_{pr}$ ): es el calado real del buque en la perpendicular de proa.

Calado a popa ( $T_{pp}$ ): es el calado real del buque en la perpendicular de popa.

Calado en la sección media: es el calado real en la sección media del buque.

Calado medio: es la semisuma de los calados a proa y popa.

Asiento o trimado: es la diferencia entre el calado de popa menos el calado de proa. Esa diferencia es mayor que cero cuando el calado de popa es mayor que el de proa, y se dice que el buque tiene asiento positivo. Cuando la diferencia es negativa se dice que el buque tiene asiento negativo.

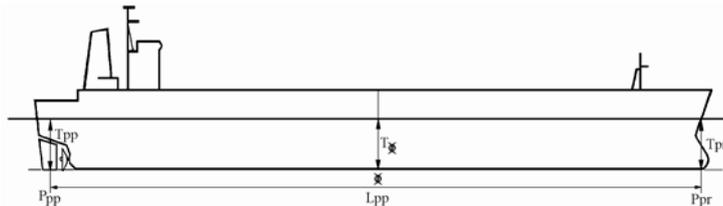


Figura 2.9. Calados del buque



## Capítulo 3

### REPRESENTACIÓN DE LAS FORMAS DE UN BUQUE

La base fundamental para poder estudiar las características geométricas que definen el casco de un buque es tener la representación de sus formas trazadas a escala. Dicho trazado es lo que se denomina plano de formas.

#### 3.1. Ejes de referencia

Para la representación de las formas de una embarcación es necesario considerar un sistema de referencia tridimensional ortogonal asociado al barco, es decir, el triedro trirrectángulo de tres ejes perpendiculares entre sí. El origen de referencia será el resultante de la intersección de dichos tres ejes. Aunque hay unos estándares establecidos para ubicar el origen y sentido de los ejes, no existe una única norma, por lo que es muy importante siempre que se haga referencia a ellos señalar cual es el criterio considerado. Se consideran como ejes: el eje OX, de dirección proa-popa o sentido longitudinal, el eje OY, de dirección estribor-babor o sentido transversal y el eje OZ, de dirección quilla-cubierta o sentido vertical. Respecto al eje OX longitudinal existen dos criterios fundamentales: criterio europeo, sentido positivo de popa a proa y criterio americano, sentido positivo de proa a popa. Respecto al eje OY transversal, criterio europeo: sentido positivo estribor a babor y criterio americano, sentido positivo de babor a estribor. Respecto al eje OZ vertical el sentido positivo es de quilla a cubierta.

El origen O, tiene su ubicación transversal siempre en el plano de crujía o plano de simetría del barco y su ubicación vertical varía al variar la línea base. Respecto a la ubicación longitudinal existen dos criterios, criterio europeo, está situado en la perpendicular de popa siendo la ubicación más utilizada desde el punto de vista de diseño y construcción y el criterio americano, está situado en la perpendicular de proa.

Desde el punto de vista hidrodinámico en canales de experiencias el origen se sitúa en la sección media, pues permite determinar de forma inmediata la posición



longitudinal del centro de carena respecto a dicha sección, dato muy importante en este campo.

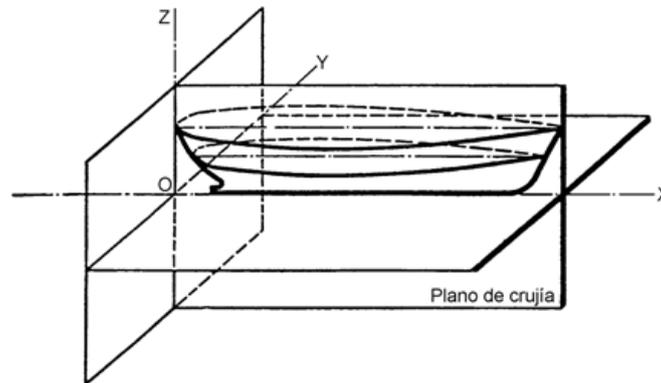


Figura 3.1. Ejes de Referencia

### 3.2. Cartilla de trazado

Las formas de un barco quedan definidas mediante la cartilla de trazado, consistente en una serie de cifras que representan puntos en el espacio, consistentes en las semimangas que corresponden a la intersección de las líneas de agua con las secciones. Además, se dispone en la cartilla de trazado de los pies de cuadernas y de las intersecciones de las cubiertas con las cuadernas, para tener definidos el principio y fin de las mismas. Es importante señalar que para una total definición de las formas es necesario disponer de croquis con los perfiles de proa y popa, para tener definida la parte superior de la roda, el codaste y la popa (espejo, crucero).

Secciones

	C0	C1/2	C1	C1 1/2	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
L.A. 0					0,15	0,46	0,6	0,2					
L.A. 1					0,46	1,91	3,11	3,16	2,49	1,61	0,83	0,31	
L.A. 2				0,48	1,49	3,28	4,13	4,18	3,68	2,74	1,66	0,7	
L.A. 3			0,38	1,64	2,83	4,14	4,62	4,66	4,22	3,3	2,11	0,94	
L.A. 4			1,63	3,05	3,85	4,58	4,87	4,91	4,54	3,64	2,42	1,12	
L.A. 5		1,92	3,28	3,98	4,43	4,81	4,98	5	4,72	3,9	2,66	1,27	
L.A. 6		3,39	4,04	4,43	4,71	4,93	5,02	5,03	4,84	4,11	2,88	1,43	0
L.A. 7		4,02	4,44	4,7	4,87	5,01	5,05	5,05	4,92	4,28	3,11	1,6	0,06
L.A. 8		4,28	4,61	4,84	4,97	5,04	5,06	5,07	4,98	4,43	3,34	1,8	0,13
L.A. 9		4,39	4,69	4,9	5,03	5,06	5,07	5,1	5,02	4,59	3,6	2,04	0,22
L.A. 10	3,99	4,46	4,76	4,94	5,05	5,09	5,1	5,11	5,05	4,76	3,89	2,32	0,35
Alt. Cub.	5,7	5,7	5,7	5,7	5,8	5,85	6,05	6,2	6,4	6,5	6,87	7,4	8,05
Sem. Cub.	4,02	4,48	4,78	4,95	5,06	5,1	5,12	5,12	5,1	5,05	4,7	3,77	1,62
Alt. Pie C.		2,235	1,448	0,635	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,13	0,225	0,32	0,4	0,33
Sem. Pie C.		0	0	0	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,15	0	0

Figura 3.2. Cartilla de trazado



### 3.3. Plano de Formas

El objetivo final de cualquier diseño es su construcción, y para poderla llevar a cabo es necesario trasladar las formas y dimensiones del objeto en cuestión al proceso constructivo. La forma de representación del casco de un barco es mediante su Plano de Formas. Un plano de formas consta de un conjunto de líneas representadas en tres proyecciones ortogonales, obtenidas al cortar el buque por un sistema de planos paralelos a los tres planos del triedro trirrectángulo.

Los cortes del casco con planos transversales, se denominan **cuadernas de trazado** o **secciones de trazado**, y el conjunto de todas ellas se dispone en una vista del plano que se denomina caja de cuadernas.

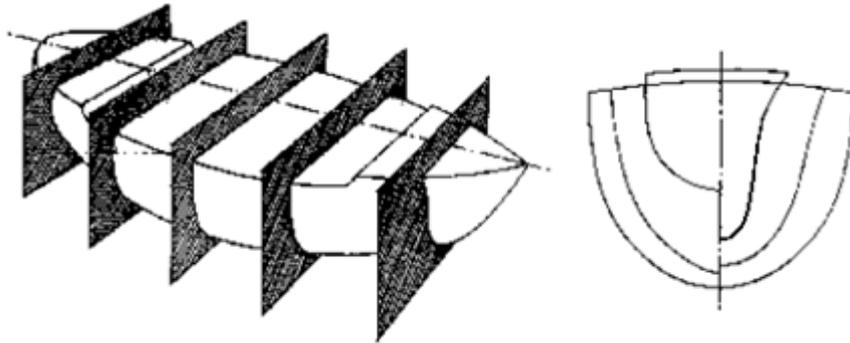


Figura 3.3. Secciones y caja de cuadernas

Los cortes del casco con planos paralelos horizontales, paralelos a la flotación, se denominan **Líneas de Agua**. Sólo se representan en la mitad del barco por ser simétrico.

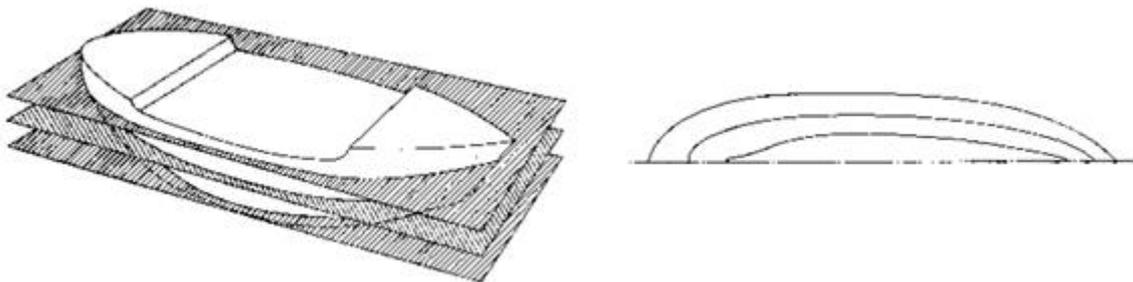


Figura 3.4. Líneas de agua



Los cortes del casco con planos longitudinales paralelos al plano de crujía, y por tanto perpendiculares a los dos anteriores, se denominan **Longitudinales**.

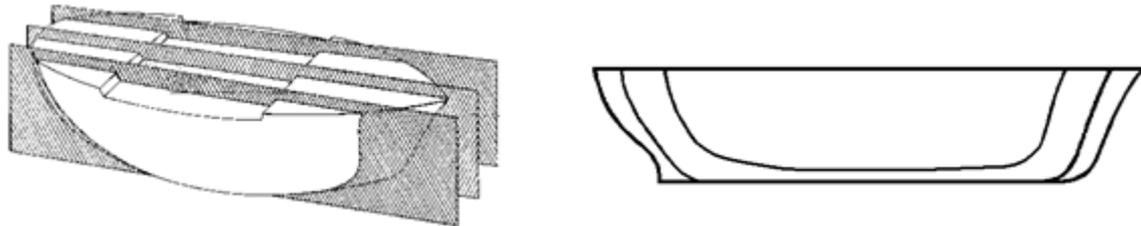


Figura 3.5. Longitudinales

Mediante estas tres proyecciones planas es posible situar en el espacio cualquier punto de la superficie del casco del buque. Además de estas líneas existen otras de apoyo a la definición de la formas del casco, denominadas **vagras** o **diagonales**. Las vagras o diagonales resultan de cortar el buque por planos perpendiculares al transversal y que forman un ángulo determinado con el plano de crujía. Con ello se obtiene una mayor precisión en determinadas zonas del buque, como el pantoque, evitando cometer errores sustanciales que producirían algunos "bollos" en la superficie de trazado del casco.

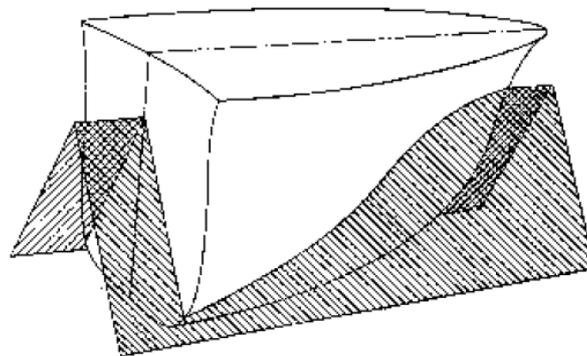


Figura 3.6. Planos diagonales

El plano diametral o plano de crujía en su intersección con los otros dos planos que forman el triedro de referencia da lugar a los ejes principales, denominándose Línea de Crujía a la intersección del casco con dicho plano, así como a su traza en las tres proyecciones. Se llama plano base al plano paralelo a la flotación de trazado que pasa por el canto superior de la quilla en la sección media. A la intersección del plano base con el de crujía se le llama línea base.

Con estas líneas de referencia, el conjunto de las proyecciones indicadas se disponen adecuadamente en un solo plano en lo que se denomina **Plano de Formas**.



La caja de cuadernas se puede colocar en el centro de la proyección longitudinal, en el caso de barcos con cuerpo cilíndrico, donde esta situación no quita información sobre las formas. En caso contrario, la caja de cuadernas se coloca a la derecha de la proyección longitudinal.

Hay que tener presente que en las proyecciones longitudinal y horizontal el barco se dibuja con la proa a la derecha. En la proyección horizontal, que se sitúa debajo de la proyección longitudinal, sólo se dibujan las líneas de agua de babor, al ser el barco simétrico. En la caja de cuadernas, se sitúan las secciones de proa a la derecha de la traza de la línea de crujía, y las de popa a la izquierda de la misma.

Se puede decir que no hay una normalización fija para todos los barcos, en cuanto al número de líneas de agua, secciones y cortes longitudinales que se representan en un plano de formas. Sin embargo si existen normas al respecto, con alguna diferencia entre barcos mercantes y embarcaciones menores.

La escala de dibujo será siempre una de las normalizadas (1/25, 1/50, 1/100,...), realizándose el plano de formas en papel de tamaño adecuado.

La caja de cuadernas o perfil transversal se traza dependiendo de la eslora del buque, dividiéndose ésta en diez partes iguales si el buque es pequeño y en veinte partes en buques medianos o grandes, por lo que el número de secciones será de 11 y 21 respectivamente. Por el mismo motivo de la precisión del trazado, en las zonas extremas, al ser mayor las curvaturas, se trazan secciones auxiliares cuya separación son cuartos o medios del intervalo normal. La numeración de las secciones empieza por popa en Europa, desde la 0 a la 10 o desde la 0 a la 20, y por proa en EEUU. Como origen de las secciones se considera la perpendicular de popa (la de proa en EE.UU.), atendiendo al criterio de numeración elegido.

La línea de agua cero será la correspondiente al plano base y la línea de agua seis se hace coincidir con la flotación de trazado o de proyecto, por lo que basta dividir el calado en seis partes iguales para obtener la separación entre ellas. En barcos de mayor calado se divide en diez partes en vez de seis, correspondiendo la flotación de trazado a la línea de agua número diez. En la zona más baja del buque y para aumentar la precisión del trazado se suele representar la línea de agua un medio, separada medio intervalo de la línea de base.

Las líneas longitudinales son equidistantes y suelen ser tres o cuatro. Se representan por números romanos. El número de diagonales o vagras, y su ángulo, es variable, siendo práctico realizar al menos dos de ellas. Se representan en la



proyección horizontal por la parte inferior de crujía, para no mezclarse con las líneas de agua.

En el plano de formas también se representan las cubiertas, denominadas vagras de doble curvatura. Su representación se hace de forma completa en la proyección transversal y en la longitudinal mediante las líneas resultantes de la intersección de la cubierta con el costado y con el plano de crujía.

### 3.4. Representación manual del plano de formas

El dibujo manual de las líneas del plano de formas se realiza mediante el empleo de reglas de gran tamaño, plantillas, y junquillos que se mantienen en posición mediante pesas para trazar las líneas curvas de gran curvatura. Los junquillos se realizan en un material flexible como talco, y tiene diferentes secciones rectangulares en función de la curvatura de la línea a dibujar.

Hoy en día este proceso se ha visto simplificado con la aparición de programas de ordenador que permiten de forma muy sencilla trabajar con el casco de forma tridimensional, y realizar a su superficie los distintos cortes con los planos referidos anteriormente. Estos cortes permiten obtener las distintas líneas sin dibujar ninguna, quedando el rotulado como única operación a realizar también en un programa de diseño. Existen diversos programas específicos de diseño naval, como Maxsurf, Prosurf, Prolines, Autoship, y diversos programas de dibujo auxiliares, como AutoCad, Rhinoceros y Microstation, algunos de ellos con aplicaciones navales. Nunca hay que olvidar que a la hora de construir el barco a tamaño real, o cualquier modelo para su ensayo, es imprescindible una representación de sus formas trazadas a escala.

Aunque hoy en día se utilice fundamentalmente el ordenador para representar las formas de un barco, es importante saber cómo se realiza este proceso manualmente, para comprender mejor aspectos de las mismas. Partiendo de la cartilla de trazado y de los croquis de proa y popa, se procede a dibujar el plano de formas en varias etapas.

La *primera etapa* es el dibujo de las trazas del plano, es decir, las líneas rectas que van a representar en las tres proyecciones, las intersecciones del conjunto de planos perpendiculares entre sí y paralelos respectivamente a cada uno de los planos de referencia del triedro trirrectángulo. Estas trazas definen el número de líneas en cada proyección.

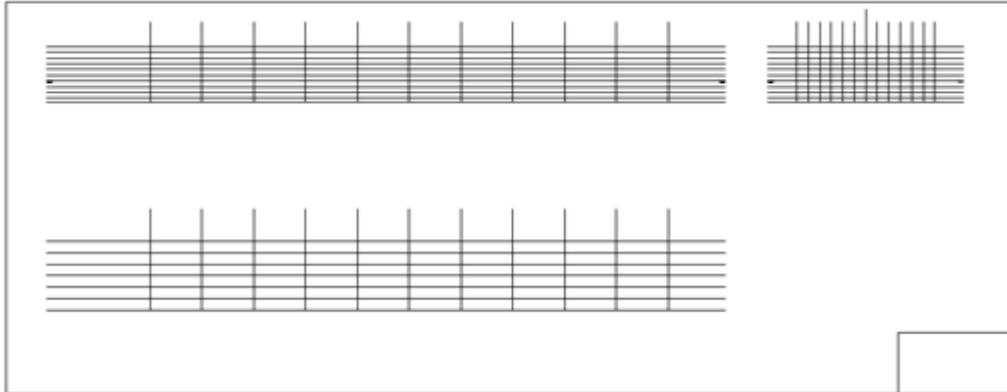


Figura 3.7. Trazas del plano en las tres proyecciones

La *segunda etapa* corresponde al dibujo de la caja de cuadernas en la proyección transversal, a partir de las semimangas contenidas en la cartilla de trazado. Las cuadernas de proa se representan a la derecha de crujía, y las de popa a la izquierda. Para representar una cuaderna, se toman las cifras contenidas en la columna correspondiente de la cartilla, pues representan las semimangas del corte de dicha cuaderna con todas las líneas de agua a las que corta más el pie de cuadernas y el punto de corte con la cubierta. La coordenada vertical que corresponde a cada semimanga es la altura de la línea de agua correspondiente.



Figura 3.8. Representación de las cuadernas

La *tercera etapa* consiste en la representación del perfil del casco en la proyección longitudinal. Para ello se utilizan las alturas y semimangas de los pies de cuaderna y de cubierta, obtenidos de la cartilla de trazado, así como los croquis de proa y popa.



Figura 3.9. Representación del perfil longitudinal

En la *cuarta etapa* se dibujan las líneas de agua y el perfil de cubierta en la proyección horizontal. Para ello, se utilizan nuevamente las semimangas de la cartilla de trazado, pero ahora en el sentido horizontal, ya que se están dibujando líneas de agua. Los extremos de proa y popa donde terminan las líneas de agua se obtienen de la proyección longitudinal, en los puntos de corte de la traza correspondiente a cada línea de agua con el perfil longitudinal. Análogamente se procede con el dibujo de la cubierta, donde sólo se utilizarán las semimangas correspondientes a cada cuaderna, reflejadas en la cartilla, y los extremos se obtendrán de sus correspondientes en la proyección longitudinal.

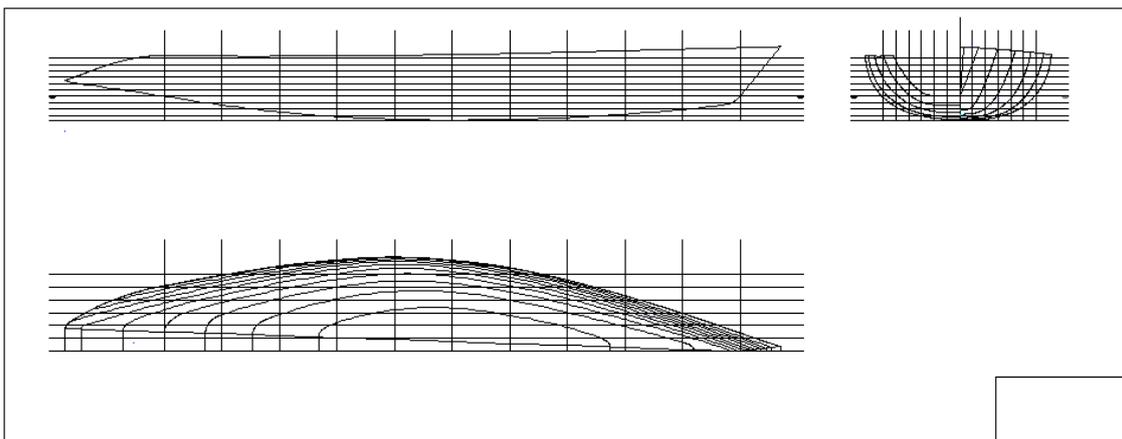


Figura 3.10. Representación de las líneas de agua

A partir de la quinta etapa, se prescinde de la cartilla de trazado y se obtienen los longitudinales basándose en lo ya dibujado. El procedimiento consiste, por un lado, en proyectar sobre la vista longitudinal los puntos de corte de la traza del longitudinal que se quiere dibujar, con las secciones a las que corte en la caja de cuadernas. Por otro lado, se proyectan también los puntos de corte de la traza del mismo longitudinal



con las líneas de agua a las que corte en la proyección horizontal. Los puntos obtenidos definen el longitudinal correspondiente.

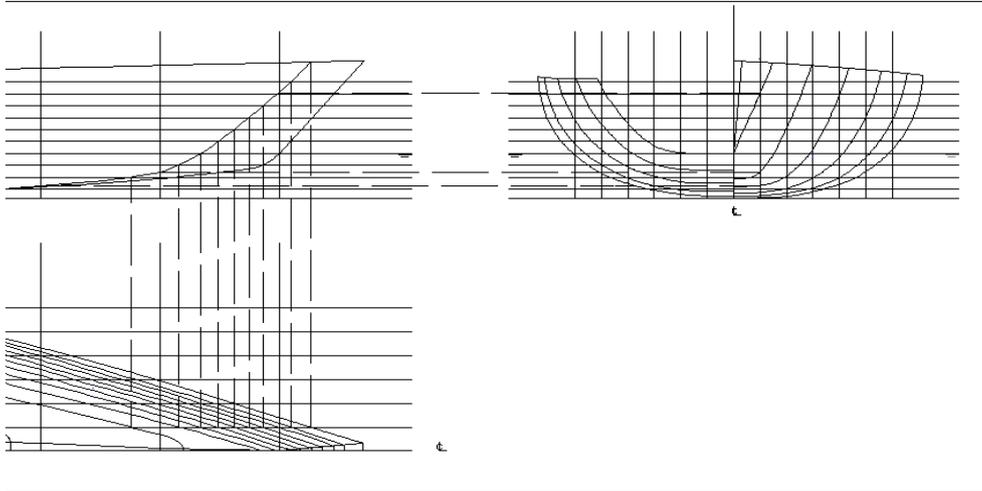


Figura 3.11. Obtención de un longitudinal en la zona de proa

Puede ocurrir que al dibujar el longitudinal la curva obtenida no esté alisada, presentando alguna abolladura. En este caso hay que proceder al alisado de las formas. El alisado es un proceso corrector de formas con el que se suavizan en el plano de formas las diferentes líneas representativas del buque hasta conseguir su armonía y acuerdo en las tres proyecciones.

Este proceso de suavizado de las formas es un proceso corrector de las mismas en el que intervienen las tres vistas o proyecciones del plano de formas, ya que una variación en una de ellas provoca automáticamente variaciones en las otras dos vistas. Estas variaciones pueden provocar a su vez otras, de tal manera que es un proceso en el que hay que hacer corresponder un mismo punto en las tres proyecciones, hasta llegar a obtener curvas suaves. Se deduce que es un procedimiento tedioso, que en el caso de la representación de formas manual, supone borrar muchas líneas con el consiguiente deterioro del papel y del dibujo.

En la siguiente figura se observa una vez obtenido el longitudinal, que presenta una abolladura en la zona señalada.

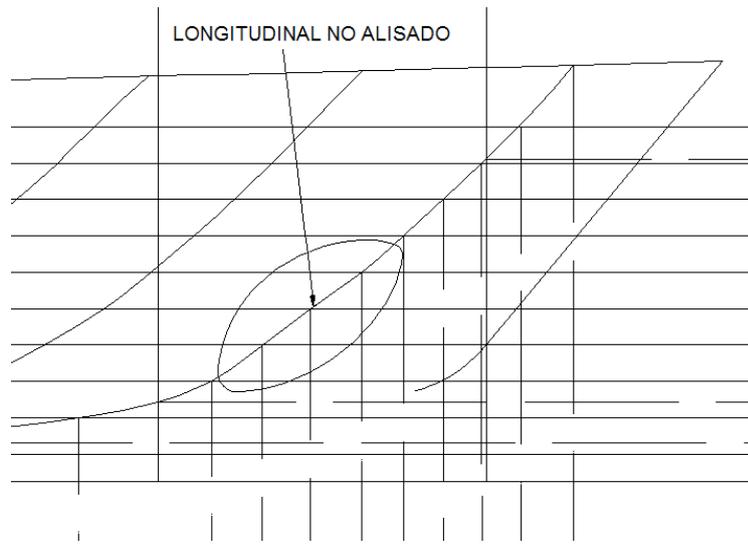


Figura 3.12. Longitudinal no alisado

Para proceder al alisado, se prescinde de los puntos que provocan la abolladura, simplemente dejando que el junquillo tome libremente una forma no forzada en esa zona. Esto provoca la existencia de nuevos puntos de corte del longitudinal con las líneas de agua de alrededor, debiendo proceder a llevar estos puntos de corte a la proyección horizontal y modificar las líneas de agua afectadas.

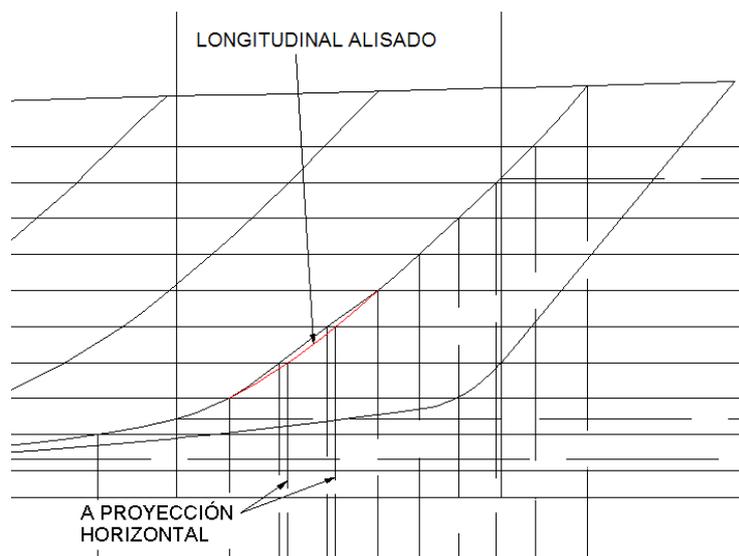


Figura 3.13. Alisado de un longitudinal

Las líneas de aguas modificadas deben ser alisadas. Si al modificar las líneas de agua, se viera afectado algún otro punto de intersección con las trazas de cuadernas o las trazas de longitudinales, se procedería a restablecer la correspondencia del punto



en las otras vistas hasta que las curvas afectadas estuvieran todas alisadas y con correspondencia en las tres vistas.

El resultado final del proceso es la obtención de los longitudinales y resto de líneas alisadas.

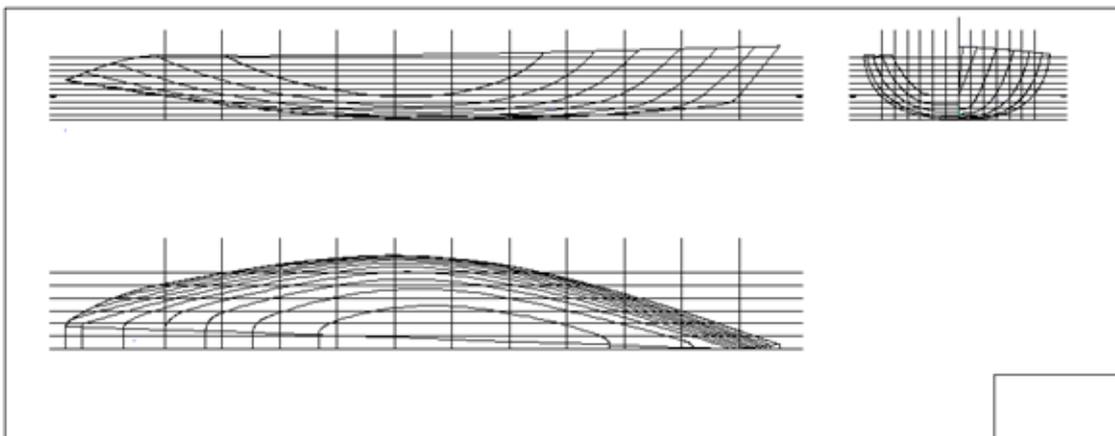


Figura 3.14. Longitudinales alisados

La *sexta etapa* consiste en la obtención de las diagonales o vagras. Las diagonales son muy útiles para ver si ciertas zonas del casco están alisadas, y que no se pueden ver con las otros tres tipos de curvas, como sucede en la zona del pantoque. Las diagonales se define por sus trazas en la caja de cuadernas, normalmente una va desde la flotación de trazado en su intersección con crujía hasta un punto de la línea base que permita un corte más perpendicular con las carena. Otras trazas pueden ir desde el corte con crujía de alguna traza de línea de agua por encima o por debajo de la flotación hasta la línea base de forma similar a lo dicho anteriormente.

Las diagonales se obtienen llevando desde la caja de cuadernas hasta la proyección horizontal en cada traza de cuaderna respectivamente, la distancia obtenida sobre la traza de la diagonal, desde el punto de la traza en crujía hasta el punto de corte con cada una de las cuadernas de proa y popa. Una vez llevadas estas distancias por debajo de la línea de crujía en la proyección horizontal, se procede a su trazado mediante junquillo, debiendo ser una curva diagonal perfectamente alisada. Si no es así, hay que proceder a alisar la diagonal, y las distancias modificadas llevadas a la caja de cuadernas, volver a dibujar las cuadernas afectadas, y hacer corresponder en las tres vistas todos los puntos de intersección en los que haya habido alguna variación, realizando un proceso bastante tedioso.

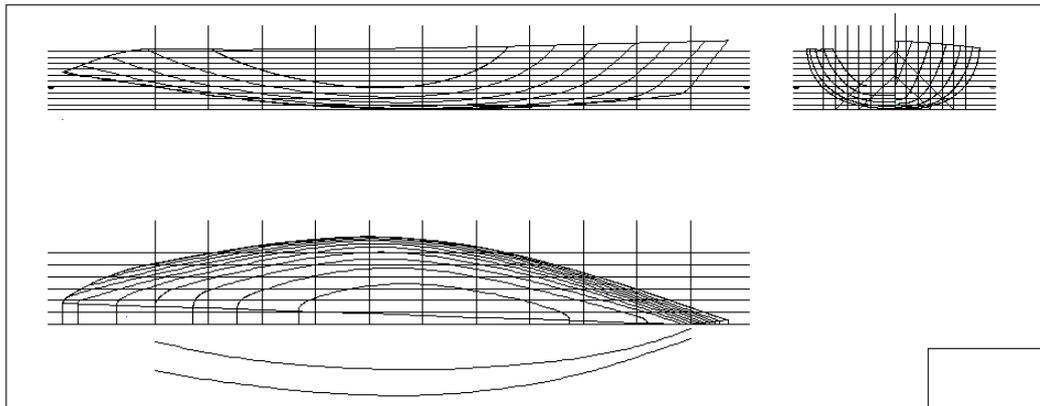


Figura 3.15. Obtención de las diagonales

Por último, se realiza el rotulado del plano de formas en la *séptima etapa*. Hay que rotular el número de las cuadernas en la caja de cuadernas, más o menos en diagonal, y en la parte inferior de las trazas en las otras dos vistas, comenzando por la sección 0 en la perpendicular de popa. Análogamente, hay que rotular las líneas de agua en la proyección horizontal a izquierda y derecha, más o menos en diagonal, y en las trazas de las otras dos vistas, a izquierda, derecha y entre la proyección longitudinal y la caja de cuadernas. Se empieza la numeración desde la línea base, que es la línea de agua 0. En cuanto a los longitudinales, se enumeran con números romanos empezando con el I por el más cercano a crujía, rotulando en la proyección longitudinal a izquierda y derecha, más o menos en diagonal, en la parte inferior de las trazas en la caja de cuadernas, y a izquierda y derecha de las trazas en la proyección horizontal. Las diagonales también se rotulan en la proyección horizontal y en las trazas en la caja de cuadernas. En el plano de formas también se ponen las características generales del barco en la parte derecha, encima de la carátula de identificación.

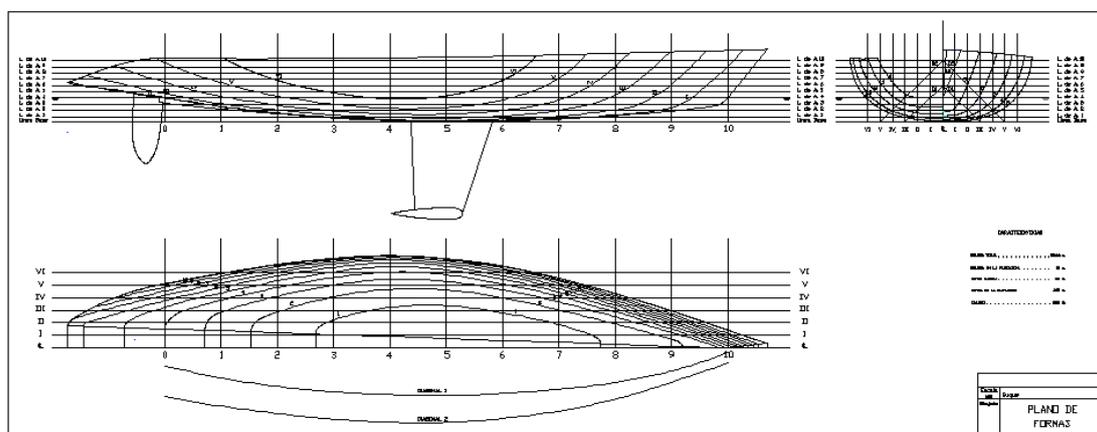


Figura 3.16. Rotulado del plano de formas



### 3.5. Representación de un barco por ordenador

Los programas de diseño de barcos están basados en su mayoría en el empleo de superficies NURBS, aunque normalmente se utilizarán superficies B-spline, es decir NURBS de peso uno en todos los puntos de control que las definen.

NURBS significa, B-splines racionales no uniformes. Se definen mediante ecuaciones que permiten representar curvas y superficies que simulan matemáticamente el junquillo en términos de rigidez y continuidad. En vez de tener una curva que pase por una serie de puntos, como un junquillo con sus correspondientes pesas, una curva NURBS es aquella que está influenciada por las posiciones de unos puntos de definición que se llaman puntos de control.

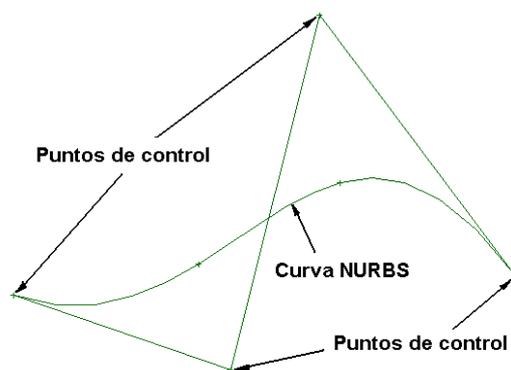


Figura 3.17. Curva NURBS

El proyectista cambia la forma de la curva moviendo la posición de los puntos de control que la definen. Cuando se mueve uno de esos puntos de control, la curva o superficie en la zona que controla el mismo, es empujada en la dirección del movimiento del punto, como si estuviera unida a él mediante un muelle.

Los puntos de control tienen una influencia local sobre la curva o superficie, lo cual significa que el desplazamiento de cualquier punto de control modifica solamente la zona de la curva o superficie sobre la que tiene influencia, y no la curva o superficie completa. Los puntos de control de una superficie NURBS están dispuestos en forma de malla rectangular con filas y columnas que definen explícitamente la forma de la superficie. El número de puntos de control no tiene que ser igual en cada dirección, es decir el número de filas y de columnas puede ser distinto, y cada punto de control pertenece a una fila y a una columna de la malla.

En el caso de superficies NURBS cúbicas, que son las más utilizadas para el diseño de barcos, cada punto de control influye aproximadamente hasta alrededor de dos puntos contiguos. Sin embargo, ocurre que si la malla es muy densa, el



desplazamiento de un punto de control afecta a un área tan pequeña de la superficie, que hace muy difícil el alisado de la misma. Por tanto, es una ventaja trabajar con una malla tan sencilla como sea posible, lo cual es necesario cuando el alisado es el requisito principal.

Una curva o superficie definida por puntos de control es más suave que una curva o superficie a la que se fuerza a pasar por una serie de puntos, pero eso no significa que estén alisadas automáticamente. Se pueden crear curvas y superficies no adecuadas con NURBS. En general, todos los programas de modelización con curvas y superficies NURBS, necesitan una herramienta de alisado.

La utilización de estas superficies para representar formas de barcos presenta las siguientes ventajas:

- ✓ Correspondencia automática de todas las líneas de trazado en todas las vistas al ser un modelo 3D.
- ✓ Trazado automático de las líneas y obtención de la cartilla de trazado.
- ✓ Plantillas muy precisas a escala real.
- ✓ Desarrollo de planchas.
- ✓ Cálculos hidrostáticos y de estabilidad.
- ✓ Renderización en 3D.

La mayor parte de los programas no muestran las imperfecciones de las superficies porque en el renderizado las procesan descomponiéndolas en triángulos, y las rutinas de sombreado suavizan los triángulos para no mostrar sus bordes. En el diseño por ordenador hay muchas ventajas, pero también algunos inconvenientes, que los conceptos y habilidades de los proyectistas solucionan practicando con los programas de definición y alisado de cascos de barcos. Los proyectistas deberían conocer todo lo posible acerca de las herramientas informáticas que utilizan, y entender las restricciones que presentan los programas que se utilizan para el diseño de cascos basados en superficies NURBS.

Una superficie NURBS define cada milímetro cuadrado de la misma. A efectos de edición, la superficie se representa en la pantalla mediante una malla de de tipo rectangular, formada por filas y columnas de puntos de control, que al desplazarse modifican la forma de la superficie. Maxsurf utiliza puntos de control que no pertenecen la superficie, excepto los cuatro puntos extremos de la malla, y se unen mediante líneas solamente para su mejor visualización. Si no se unieran los puntos, éstos quedarían sueltos en el espacio, y sería muy difícil saber a qué parte del casco afectan o influyen, especialmente en la vista transversal. Sin embargo, Prosurf utiliza puntos de control que pertenecen todos a la superficie y están unidos entre sí por curvas que también pertenecen a la superficie. Esto supone una ventaja



para realizar el alisado de la superficie al permitir una más fácil manipulación de la misma.

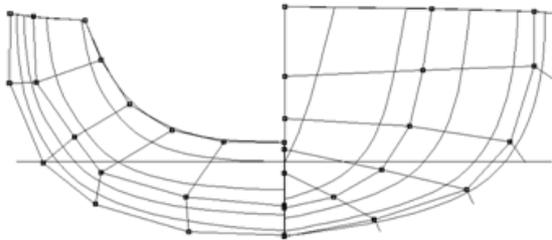


Figura 3.18. Superficie mostrando puntos de control y líneas de unión

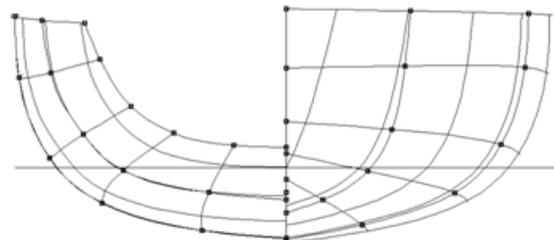


Figura 3.19. Superficie mostrando puntos de control en la superficie

Para poder utilizar superficies NURBS de forma efectiva, es necesario saber que medios se tienen para controlar su forma: los puntos de control, el grado, los pesos y el vector nudo. El proyectista debe tener algún conocimiento de cómo afectan estas variables a la forma de las superficies NURBS. Los programas no dejan modificar normalmente el vector nudo, el cual influye en la definición matemática de las superficies NURBS.

**Grado:** una superficie NURBS se representa matemáticamente por combinación de trozos o parches de funciones polinómicas racionales continuas. El exponente más alto utilizado en el polinomio es el grado de la misma. En las superficies NURBS se puede elegir el grado de la función y el número de puntos de control en cada una de las dos direcciones fila-columna. Cuanto mayor es el grado del polinomio, más flexibilidad tiene la superficie, pero más inflexiones pueden tener. Los polinomios cúbicos, o de grado 3, son los considerados como los que tienen mejor relación entre flexibilidad y rigidez.

**Valores de pesos de los puntos de control:** aunque los pesos tienen una influencia local sobre la forma de la superficie, puede ser difícil manipular sus valores. La solución normal es intentar obtener la forma de superficie deseada añadiendo y manipulando filas y columnas de puntos de control. Después de haber ajustado prácticamente la forma del casco que se quiere, se pueden cambiar los valores de pesos para obtener efectos locales específicos. La mayor parte de los barcos, sin embargo, pueden definirse sin cambiar los valores del peso de los puntos de control. Únicamente los usuarios experimentados deberían manipular estos valores.





## Capítulo 4

### ALISADO DE FORMAS

---

El proceso de alisado de formas es un proceso de suavizado, un proceso corrector de las formas con el objetivo de hacerlas aptas para los procesos posteriores, como el desarrollo de las mismas.

El método práctico manual consiste en levantar ciertas pesas para relajar el junquillo en la zona en la que está forzado y volver a colocarlas en la nueva posición. Esto suaviza y alisa la curva, pero no necesariamente mantiene la forma original. Así pues, este método basa su exactitud en la experiencia personal de quien realiza el alisado.

#### 4.1. Alisado de Gálibo

Tradicionalmente este método estaba extendido en los astilleros, especialmente en los de la escuela inglesa. Actualmente este método se puede considerar casi histórico, aunque no debemos dejarlo caer en el olvido.

La oficina técnica preparaba una cartilla de trazado que se enviaba a la *Sala de Gálibos* (Reefing Batten) para que el personal de ésta procediera al alisado y armonizado de formas del buque. Este trabajo se realizaba reproduciendo el plano de formas en la *Sala de Gálibos* a escala real. Como para esto hace falta una superficie plana de grandes dimensiones sobre un suelo de madera, y muchas veces no se disponía de tanto espacio, había que recurrir a dibujar solamente ciertas secciones del casco o bien se podía reducir a  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{4}$  la escala del longitudinal, obteniendo así una figura deformada que no afectaba a la continuidad de las líneas.

Para dibujar sobre el piso se empleaba una tiza dura que permitía trazar varias líneas sin que aumentara sensiblemente su espesor.

Las *líneas rectas* se trazaban con un cordón de algodón o lienza impregnada de polvo blanco de tiza que se tensaba pasando por los puntos que la definían y se



pulsaba como la cuerda de una guitarra, procurando que esta operación se efectuara en un plano perpendicular al suelo. Para segmentos de poca longitud, de hasta cinco metros, se utilizaban reglas contrastadas. El procedimiento del cordón no puede realizarse sin error apreciable en longitudes grandes, por lo que se marcaban puntos intermedios y la recta se iba trazando en distintos tramos.

Para definir las rectas de grandes longitudes se utilizaban métodos de mayor precisión. El método clásico consistía en tener un fino alambre de acero convenientemente lastrado y apoyado sobre tacos de la suficiente altura en los puntos extremos para que el alambre no rozara el suelo en el punto de flecha máxima de su seno. Para amortiguar las oscilaciones del hilo se suspendían de éste varios pesos colgando de otros hilos y los pesos se sumergían en agua contenida en cubetas. Una vez establecida la línea, con el auxilio de niveles verticales o escuadras se los puntos donde poner los pesos de la recta cada ocho o diez metros. Sirviéndose de estos puntos se trazaba la recta por tramos utilizando la lienza. Este proceso era indispensable para obtener la línea base del trazado y aun así convenía que se comprobara esta línea por métodos más precisos como podía ser el de servirse de un rayo de luz, o de un aparato óptico tal como un nivel o un taquímetro.

Para el trazado de las *curvas* se utilizaban *barrotes, listones o junquillos (splines)*, de sección rectangular o trapezoidal que generalmente eran de madera de abeto sin defectos. En cada curva, la sección del junquillo a utilizar debía ser lo mayor posible para que no sufriera deformación permanente, pero tampoco debía de ser excesiva para que se pudiera manejar cómodamente para adaptarlo a los puntos por donde debía de pasar. Con esto se imponía que las líneas de trazado respondieran a un junquillo deformado elásticamente, criterio fundamental del alisado naval de formas en una Sala de Gálivos.

## 4.2. Alisado a escala 1/10

En los astilleros continentales del centro y norte de Europa, a partir de 1945, se observó una tendencia muy marcada a obtener la cartilla definitiva de trazado sobre un dibujo a escala 1/10.

Los astilleros con práctica en ambos métodos, aseguran que el alisado por este procedimiento es de mayor exactitud que el que se practicaba en la Sala de Gálivos a escala real y el volumen de trabajo se reducía notablemente. Este método se basa en obtener de un dibujo a escala 1/10 una cartilla de trazado. El trazado se realiza en



una mesa de grandes dimensiones, uno, dos o tres metros de anchura y una longitud de hasta unos ocho metros.

El trazado de las curvas se hace con junquillos de rigidez adecuada a las curvas que se van a trazar. El personal debe ser muy cualificado, aunque dicha cualificación no es superior al trazador de una Sala de Gálivos.

A partir de la cartilla de trazado preliminar procedente de la sala de proyectos, se dibuja el plano de formas a escala 1/10, con lo cual con este método, al estar el plano de formas escalado, el tiempo a invertir será considerablemente menor. Normalmente se usaban unas 20 secciones de trazado además de las intermedias en las zonas de proa y popa, dándose aparte las dimensiones principales, la separación entre líneas de agua y la clara de cuadernas en cada zona del casco.

El trazado óptico y las máquinas de oxicorte dirigidas electrónicamente con dibujos a escala 1:10 contribuyeron a que éste método se impusiera en su día en todos los astilleros de cierta importancia. A este método se le exige mucha precisión.

### **4.3. Desventajas de los métodos antiguos**

- Requieren de grandes superficies con equipos costosos y mucha mano de obra.
- El alisado de líneas depende de los criterios del trazador y no de normas absolutas e independientes del operario.
- El proceso requiere de varias transmisiones de datos, que inevitablemente, conducirán a errores en el montaje con gastos elevados en las rectificaciones.
- Necesita mucho tiempo y no se puede esperar a que esté terminado para pedir los materiales, por lo que producirá una necesidad de mayor cantidad de materiales.
- Es difícil de convertir los datos del trazador en formas adecuadas para controlar las máquinas dirigidas electrónicamente. No es adecuado para el control numérico de las actuales máquinas de corte, y han de someterse a otro proceso intermedio para obtener los valores numéricos.



#### 4.4. Alisado por métodos numéricos

El alisado por métodos numéricos es también denominado *fairing* o *faireado* en inglés, o *Lissagre* en francés. Este método se desarrolló gracias al perfeccionamiento y la alta disponibilidad de ordenadores en los astilleros. En este método, la función que representa los valores discretos se desarrolla por aproximaciones de la curvatura, que se define por los puntos que se han dado y que se une por medio de integraciones sucesivas o por el método de mínimos cuadrados, utilizando para ello una función cubica o el ajuste de arcos circulares o parabólicos de manera que el círculo o parábola que representan las curvas pasen por tres puntos consecutivos, siendo el último de los puntos el primero del tramo siguiente.

Los datos que más tarde nos definirán las formas pueden ser introducidos en el ordenador mediante dos caminos diferentes, así podrán ser utilizados para cálculos de arquitectura naval como para ingeniería de producción. Los datos podrán ser introducidos mediante:

-Partiendo de un plano de formas a escala, o de una cartilla de trazado obtenida midiendo sobre dicho plano como mediante series sistemáticas o directamente de un buque o modelo existente.

-Generando directamente las formas a partir de una serie de parámetros fundamentales de la carena, y obteniendo superficies ya lisas definidas mediante ecuaciones que determinan las coordenadas numéricas de cualquier punto de la superficie.

Para obtener la suavidad de las líneas por medio de algoritmos matemáticos, hay que introducir en ellos criterios objetivos. Al realizar el alisado, inevitablemente se modificarán las formas de la carena inicial, y por ello hay que establecer unos criterios en cuanto a los límites permisibles de alejamiento de los valores del plano de formas original de la carena que se ha ensayado previamente en canal, la cual tendrá unas características determinadas.

La definición de la superficie del casco por métodos matemáticos tiene por objeto obtener con rapidez datos precisos que se puedan utilizar en el proyecto del buque y en su construcción, así como en la aplicación al control numérico de las diferentes máquinas y herramientas, como ya se indicó anteriormente.

Podríamos decir que los requisitos exigibles para la correcta definición matemática de las formas con el auxilio del ordenador son:



-Que no introduzcan variación alguna en los parámetros esenciales que caracterizan el proyecto, ni en el comportamiento de la carena.

- La superficie resultante debe satisfacer los criterios de suavidad y alisado.

- Debe lograrse la exactitud y precisión que se exija.

- La superficie del casco se expresa mediante una familia de curvas generadas por ecuaciones matemáticas.

- Su aplicación debe exigir un mínimo esfuerzo manual.

Entre los procedimientos de alisado por métodos numéricos existentes, se puede destacar el AUTOKON como uno de los de mayor difusión e importancia.

#### 4.5. Métodos gráficos iterativos

Los métodos numéricos que se han citado en el apartado anterior, fueron utilizados, tuvieron su época de "auge", pero sin embargo han sido sustituidos por la utilización de *métodos gráficos interactivos*. Entre éstos podemos destacar como más vanguardistas y con mayor futuro a dos de ellos:

- *Modelos de alambre*, mediante la definición matemática de líneas que estructuran el buque.

- *Modelos de superficie*, utilizando la definición de superficies que, mediante "parches", permiten "cubrir" toda la carena del barco.

A continuación, vamos a analizar cada uno de ellos.

##### 4.5.1. Modelos del alambre

Representan las formas exteriores del buque como un entramado de líneas. En los modelos de alambre, la definición matemática de las líneas curvas utiliza diferentes procedimientos, entre ellos destacan:

-**La simulación del junquillo.** Utilizan las ecuaciones de la deformada elástica y las líneas obtenidas pasan por todos los puntos que han sido previamente definidos. Requieren la definición adicional de dos puntos exteriores.



-**Bi-arcos**. Utilizan las ecuaciones de dos círculos tangentes entre sí, que también pasan por todos los puntos definidos. Adicionalmente a dichos puntos han de definirse dos tangentes en los extremos.

-**Splines**. Utilizan la ecuación de un polinomio de un cierto grado definido y que pueden pasar o no por todos los puntos definidos. Si pasan o no por los puntos dependerá del tipo de spline a utilizar.

-**Curvas de Bezier**. Utilizan la ecuación de Bezier, que obtiene líneas tangentes a poligonales de control, cuyos vértices son los puntos definidos, y sólo pasan por los puntos inicial y final.

-**B-splines**. Utilizan la ecuación de "B-Splines", que obtiene líneas tangentes a poligonales de control cuyos vértices son los puntos de control. Estas curvas se definen por su grado o su orden y por el número de vértices. Con el grado se controlará la proximidad de la tangente a la poligonal. Las curvas tampoco pasan por ninguno de los puntos de control, excepto el inicial y el final. Las curvas de Bezier son un caso particular de este tipo de curvas.

En la siguiente figura se observa el casco de una embarcación definida mediante curvas B-Splines.

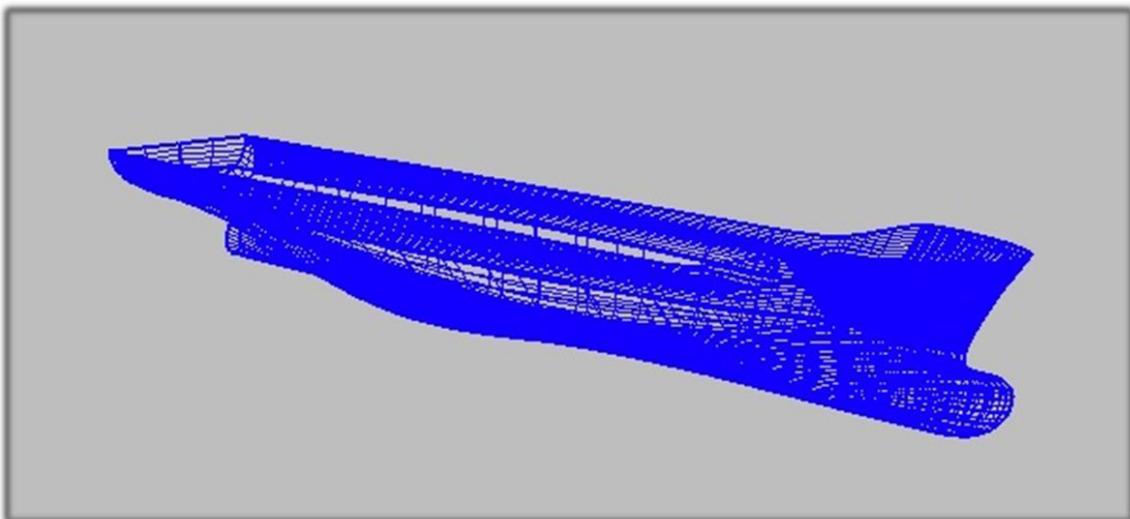


Figura 4.1. Container definido mediante estructura inalámbrica

Las herramientas de alisado permiten mover, borrar o añadir puntos, según se considere necesario, y el programa realiza el control de los puntos de inflexión que se puedan producir, así como la creación de una malla densa que permita la visualización de las zonas que no tengan un alisado correcto (por ejemplo, mostrando



con diferente coloración la zona afectada), fundamentalmente actuando sobre las diferencias producidas en las derivadas primeras.

Estas herramientas también permiten el manejo de diferentes curvaturas mediante el control de las diferencias segundas y, aunque menos utilizado, también el control de las diferencias terceras.

Sin embargo, ningún método es infalible, y éste también genera algunos problemas. El primero que nos encontramos es que al generar un modelo básico, en ocasiones nos encontramos que no resulta éste del todo satisfactorio para su utilización en producción. Cuando hablamos de producción nos referimos a dar las instrucciones precisas a las máquinas de corte y conformado por ejemplo.

Además, este método no define completamente la superficie del casco. Necesitará simularla mediante interpolación de nuevas líneas entre las que ya se han definido. Esto puede dar lugar a que se definan líneas especiales que no fueran lisas ni precisas. Por último, a día de hoy existen varios caminos para llegar a una solución, es decir, existen diferentes métodos numéricos para obtener las curvas, lo cual puede dar lugar que se obtuvieran coordenadas distintas para un mismo punto.

#### **4.5.2. Modelos de superficie**

En este método se crea y ajusta una *superficie o parche*, la cual debe de pasar por una serie de puntos que definirán los puntos por los cuales deberá pasar el casco del buque. Estos puntos iniciales pueden ser definidos mediante refuerzos estructurales del casco como pueden ser puntales u otros elementos tales como los mamparos, saltillos o la curvatura de la cubierta. Las superficies que utilizan los programas de diseño actuales son:

- Superficies de COONS.
- Superficies de Bezier.
- B-splines.
- Superficies NURBS (Non Uniform Rational B-Splines).

Las principales dificultades de estos sistemas podríamos resumirlas en que su manejo no resulta por el momento demasiado sencillo y requiere un aprendizaje más o menos complejo y prolongado (experiencia). Además, aunque los “parches” se ajustan muy bien a los puntos que definen esa parte de la superficie, el alisado entre parches resulta también complicado y requiere, como en el caso anterior, de una importante experiencia para resolver los problemas que puedan surgir.



Debido a las dificultades mencionadas anteriormente, se están utilizando modelos mixtos, en los que se manejan líneas para introducir la información y para realizar las modificaciones, posteriormente a partir de estas líneas ya definidas se crea un superficie que cubrirá a las mismas como vemos en la siguiente figura.

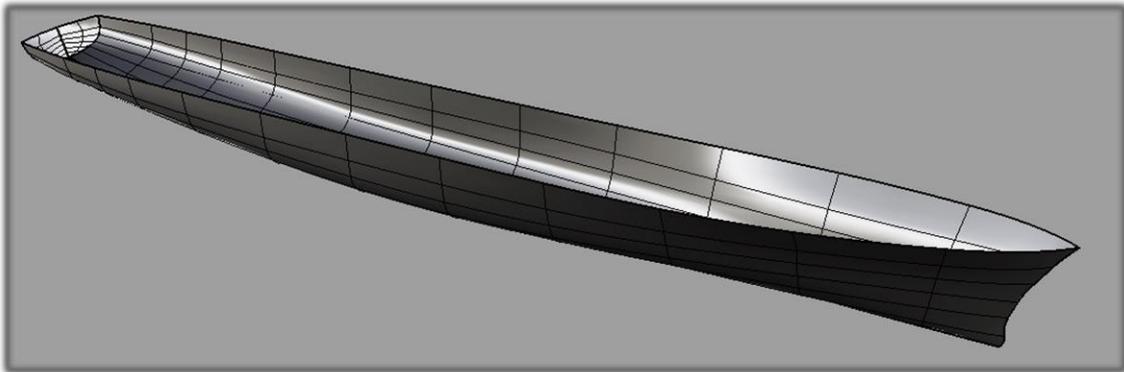


Figura 4.2. Corbeta definida mediante un modelo de superficie

#### 4.6. Métodos de comprobación del alisado

A la hora de asegurarse de qué formas de una embarcación están perfectamente lisas, no se puede acudir a herramientas como el renderizado. Cuando un usuario mira un casco renderizado y coloreado en la pantalla no puede apreciar lo que realmente se esconde detrás, en la mayoría de los casos un casco que presenta abolladuras.

Una imagen renderizada puede parecer a simple vista lisa, esto es debido a que los programas de diseño procesan las imágenes descomponiéndolas en triángulos y las rutinas de sombreado suavizan los bordes de los triángulos, sin embargo la geometría que realmente presenta una imagen renderizada y de apariencia lisa puede no ser útil para la construcción del buque.

Los programas de diseño CAD, como Rhinoceros, incorporan ciertas herramientas con las cuales es fácil comprobar la calidad del alisado realizado por el usuario, entre ellas encontramos las siguientes:

La *comprobación visual* mediante la aplicación de un rayo de luz sobre el casco renderizado o bien mediante un renderizado de tipo *entorno*, donde se aplica una textura metálica donde es fácil evaluar la existencia de *bollos* como vemos en la figura 4.3.:

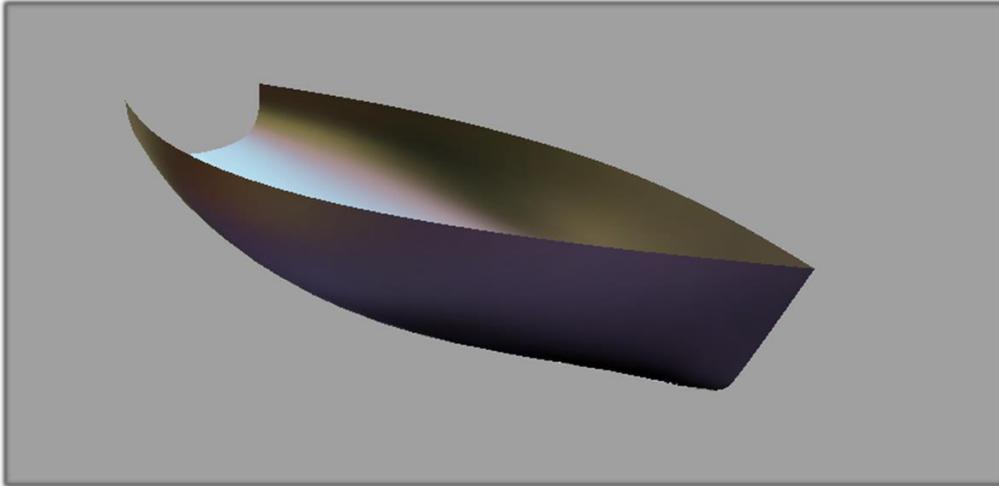


Figura 4.3. Comprobación del alisado mediante entorno, plata o pinceladas

También se puede comprobar el alisado mediante una *superficie del tipo cebra*, como vemos en la figura 4.4. Constituye otra opción para comprobar el alisado del modelo. Las regiones con una intensidad de luz reflejada constante se sombrean en bandas. Esto es similar a la manera en que el ojo humano detecta puntos discordantes en una superficie, puesto que el brillo y las sombras varían en esas áreas. Si los bordes de las rayas de la cebra se curvan suavemente entonces la superficie es lisa en estas regiones. En las líneas de codillos varían abruptamente.

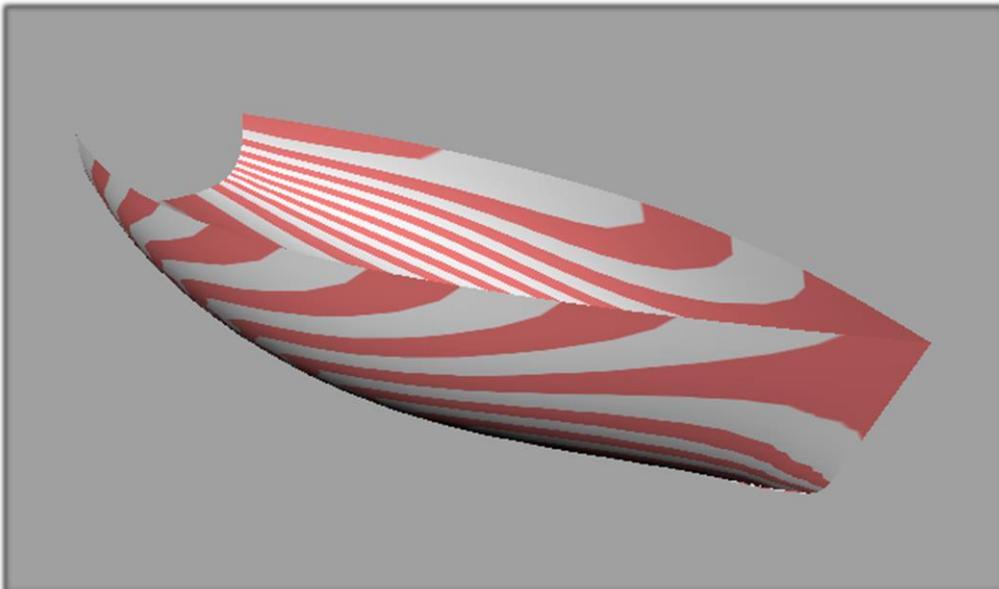


Figura 4.4. Comprobación del alisado mediante una superficie zebra



Otro medio de comprobación, es a través de un análisis de la *curvatura*. El modelo se sombrea en colores, basados en la Curvatura Gaussiana Discreta en cada punto. Los cascos están curvados en dos direcciones, denominadas curvaturas principales. La Curvatura Gaussiana es el producto de esas dos curvaturas principales.

Por último, el método más eficiente es comprobando la curvatura mediante curvas de control. Estas curvas pueden ser definidas como *el índice de cambio (en un punto) del ángulo entre una curva y la tangente a la curva*.

Si el trazado de curvaturas se usa e interpreta correctamente es posible producir un alisado perfecto de la superficie.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de curva de control de un yate a vela. La parte superior de la imagen muestra un alisado deficiente de la curva. En ella se puede ver un cambio en el signo de la curvatura muy pronunciado, seguida de un súbito incremento en la medida de la curvatura. Después de esto la medida de la curvatura disminuye rápidamente hasta que se vuelve a incrementar hacia la proa. La mitad inferior de la imagen muestra la misma curva de control después de alisarse bien. Es obvio que la curvatura cambia gradualmente ahora y que la curva es muy suave.

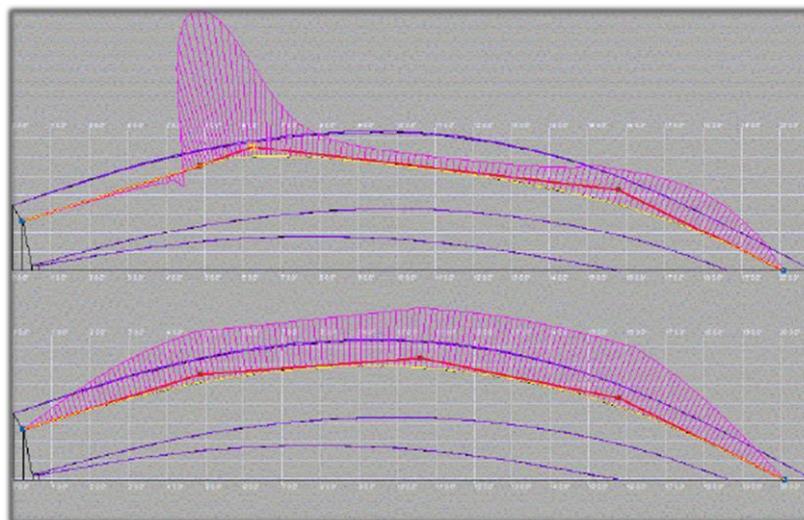


Figura 4.5. Control de la curvatura mediante curvas de control



## Capítulo 5

### ESQUEMAS DE SUBDIVISIÓN

---

#### 5.1. Esquemas de subdivisión

Los esquemas de subdivisión son una de las herramientas más utilizadas en el diseño asistido por ordenador para diseñar curvas y superficies, aunque también tienen otras aplicaciones, empleándose en el tratamiento digital de imágenes o en la resolución de ecuaciones diferenciales.

En un principio, estos algoritmos fueron lineales, pero en los últimos años buena parte de la investigación se basa en la búsqueda de sistemas adaptativos y en particular no lineales. Las técnicas son distintas según se trate de una u otra familia de esquemas.

Los esquemas de subdivisión están basados en un conjunto de reglas, las cuales aplicadas recursivamente permiten un refinamiento sucesivo de un conjunto inicial de puntos, llamados puntos de control.

Durante su estudio aparecen temas tales como probar la convergencia del proceso de iteración, investigar la suavidad de la función límite del proceso, así como la estabilidad de los esquemas, y también propiedades de preservación de la monotonía, de la positividad o de la convexidad.



## 5.2. Esquemas no lineales. Interpolación PPH

El método de interpolación PPH (Piecewise Polynomial Harmonic), se basa en una interpolación polinómica a trozos. Vamos a definir como construir un trozo polinómico de orden 4, partiendo de los siguientes datos centrados,

$$(x_{j-1}^k, f_{j-1}^f), (x_j^k, f_j^f), (x_{j+1}^k, f_{j+1}^f), (x_{j+2}^k, f_{j+2}^f).$$

Tiene el mismo orden que la interpolación de Lagrange en regiones de suavidad, el orden se reduce cerca de singularidades, pero se mantiene lo suficiente para no generar el fenómeno de Gibbs.

Si consideramos las siguientes diferencias divididas,

$$p_{j-\frac{1}{2}}^k = f[x_{j-1}^k, x_j^k], p_{j+\frac{1}{2}}^k = f[x_j^k, x_{j+1}^k], p_{j-\frac{3}{2}}^k = f[x_{j+1}^k, x_{j+2}^k], \\ D_j^k = f[x_{j-1}^k, x_j^k, x_{j+1}^k], D_{j+1}^k = f[x_j^k, x_{j+1}^k, x_{j+2}^k],$$

la interpolación PPH, asociada al siguiente conjunto centrado, cuando se evalúa en el punto central tiene la forma,

$$\check{P}_j \left( x_{j+\frac{1}{2}}^k \right) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} H(D_j^k, D_{j+1}^k) h^2, \quad (5.1)$$

donde,

$$H = \begin{cases} \frac{2D_j^k D_{j+1}^k}{D_j^k + D_{j+1}^k} & \text{si } D_j^k D_{j+1}^k > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.2)$$

Si la comparamos con la interpolación de Lagrange, vemos que la diferencia entre las dos sustituciones en el punto medio es el cambio de la media aritmética por la media armónica,

$$P_j \left( x_{j+\frac{1}{2}}^k \right) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} \frac{D_j^k + D_{j+1}^k}{2} h^2, \quad (5.3)$$

y sabiendo que,



$$\left| 2 \frac{D_j^k D_{j+1}^k}{D_j^k + D_{j+1}^k} \right| \leq 2 \min(|D_j^k|, |D_{j+1}^k|) = O(1), \quad (5.4)$$

se obtiene que  $D^k = O(1)$ , en lugar de  $O\left(\frac{1}{h}\right)$ , como en el caso lineal cuando una discontinuidad existe en  $[x_{j-1}^k, x_j^k]$  o en  $[x_{j+1}^k, x_{j+2}^k]$ .

Cuando los valores son próximos, las dos medias son parecidas, pero la media armónica siempre es dos veces más pequeña que el mínimo de los valores. Propiedad importante para la no aparición del fenómeno de Gibbs en la reconstrucción PPH.

Con todo lo anteriormente expuesto se ha obtenido el siguiente esquema de subdivisión PPH,

$$Sf_j^k = \begin{cases} f_i^k, & \text{si } j = 2i, \\ \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} - \frac{1}{4} H(D_i^k, D_{i+1}^k) h^2, & \text{si } j = 2i + 1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Este esquema presenta las siguientes propiedades:

1. El operador de subdivisión no lineal asociado a la reconstrucción PPH:
  - a. Reproduce polinomios de grado  $N \leq 2$ .
  - b. Está acotado.
  - c. Es Lipschitz continuo.
2. El esquema de subdivisión no lineal asociado a la reconstrucción PPH es uniformemente convergente. Además, para cualquier  $f \in l_\infty(\mathbb{Z})$ , el límite de la función  $S^\infty(f)$  satisface que existe  $C$ , tal que para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|S^\infty(f)(x) - S^\infty(f)(y)| \leq C|x - y|. \quad (5.6)$$

3. Estabilidad del esquema de subdivisión PPH. Dados  $f, \tilde{f} \in l_\infty$ , se tiene

$$\|S^\infty(f) - S^\infty(\tilde{f})\|_{L^\infty} \leq 9\|f - \tilde{f}\|_{l^\infty(\mathbb{Z})}. \quad (5.7)$$

4. Mantiene la convexidad de los datos iniciales. Es decir, si partimos de una secuencia de datos  $f^0$  tal que sus diferencias divididas de segundo orden cumplan,

$$Df_i^0 = f_{i-1}^0 - 2f_i^0 + f_{i+1}^0 > 0, \quad (5.8)$$

entonces, para todo  $k$  nivel de subdivisión más fino,  $Df_i^k > 0$ .



### 5.3. Esquema de subdivisión PPH en un mallado no uniforme

Se define un mallado no uniforme,

$$X^k = \{x_j^k\}_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Los valores de los puntos en dicho mallado vienen dados por,

$$f^k = (f_j^k)_{j \in \mathbb{Z}} = (f(x_j^k))_{j \in \mathbb{Z}}.$$

A continuación se describe el operador de reconstrucción PPH, el cual se denotará como  $\mathcal{R}_k(x, f^k)$ . Dado  $x \in \mathbb{R}$ , se tomará  $j$  tal que

$$x \in [x_j^k, x_{j+1}^k].$$

Entonces  $\mathcal{R}_k(x, f^k)(x) = \tilde{P}_k(x, f^k)$ , donde  $\tilde{P}_j(x, f^k)$  es un polinomio construido a partir de los datos centrados  $(x_{j-1}^k, f_{j-1}^k), (x_j^k, f_j^k), (x_{j+1}^k, f_{j+1}^k)$  y  $(x_{j+2}^k, f_{j+2}^k)$  y se denotará  $\tilde{P}_j(x) = \tilde{P}_j(x, f^k)$ .

Para definir  $\tilde{P}_j(x)$  primero se considera el polinomio interpolante de Lagrange centrado de grado tres,  $P_j(x)$ , definido por las siguientes condiciones de interpolación,

$$P_j(x_m) = f_m^k, \quad j-1 \leq m \leq j+2. \quad (5.9)$$

Se puede escribir  $P_j(x)$  como,

$$P_j(x) = a_0 + a_1 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}^k\right) + a_2 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}^k\right)^2 + a_3 \left(x - x_{j+\frac{1}{2}}^k\right)^3, \quad (5.10)$$

donde,

$$x_{j+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{2}(x_j^k + x_{j+1}^k).$$

Llamemos al espaciado de la siguiente manera,

$$h_j^k = x_j^k - x_{j-1}^k, h_{j+1}^k = x_{j+1}^k - x_j^k, h_{j+2}^k = x_{j+2}^k - x_{j+1}^k.$$



Para un esquema lineal centrado, las cuatro condiciones de interpolación en los puntos  $x_{j-1}^k, x_j^k, x_{j+1}^k, x_{j+2}^k$  son,

$$a_0 - a_1 \left( h_j^k + \frac{h_{j+1}^k}{2} \right) + a_2 \left( h_j^k + \frac{h_{j+1}^k}{2} \right)^2 - a_3 \left( h_j^k + \frac{h_{j+1}^k}{2} \right)^3 = f_{j-2}, \quad (5.11)$$

$$a_0 - a_1 \left( \frac{h_{j+1}^k}{2} \right) + a_2 \left( \frac{h_{j+1}^k}{2} \right)^2 - a_3 \left( \frac{h_{j+1}^k}{2} \right)^3 = f_{j-1}, \quad (5.12)$$

$$a_0 + a_1 \left( \frac{h_{j+1}^k}{2} \right) + a_2 \left( \frac{h_{j+1}^k}{2} \right)^2 + a_3 \left( \frac{h_{j+1}^k}{2} \right)^3 = f_j, \quad (5.13)$$

$$a_0 + a_1 \left( h_{j+2}^k + \frac{h_{j+1}^k}{2} \right) + a_2 \left( h_{j+2}^k + \frac{h_{j+1}^k}{2} \right)^2 + a_3 \left( h_{j+2}^k + \frac{h_{j+1}^k}{2} \right)^3 = f_{j+1}. \quad (5.14)$$

Finalmente obtenemos,

$$a_0 = P_j \left( x_{j+\frac{1}{2}}^k \right) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} h_{j+1}^2 (\omega_j D_j^k + \omega_{j+1} D_{j+1}^k), \quad (5.15)$$

donde,

$$\begin{aligned} D_j^k &= f[x_{j-1}^k, x_j^k, x_{j+1}^k], & D_{j+1}^k &= f[x_j^k, x_{j+1}^k, x_{j+2}^k], \\ \omega_j &= \frac{h_{j+1}^k + 2h_{j+2}^k}{2(h_j^k + h_{j+1}^k + h_{j+2}^k)}, & \omega_{j+1} &= \frac{h_{j+1}^k + 2h_j^k}{2(h_j^k + h_{j+1}^k + h_{j+2}^k)}. \end{aligned}$$

Entonces, queda definido el PPH en el punto central como,

$$\tilde{p} \left( x_{j+\frac{1}{2}}^k \right) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} (h_{j+1}^k)^2 \frac{D_j^k D_{j+1}^k}{\omega_j D_{j+1}^k + \omega_{j+1} D_j^k}. \quad (5.16)$$

Cambiando en la expresión anterior la media armónica ponderada por la media armónica, se llega a la siguiente expresión,

$$\bar{p} \left( x_{j+\frac{1}{2}}^k \right) = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{1}{4} (h_{j+1}^k)^2 \frac{2D_j^k D_{j+1}^k}{D_{j+1}^k + D_j^k}. \quad (5.17)$$

Finalmente, se define el siguiente esquema de subdivisión PPH usando la media armónica,

$$Sf_j^k = \begin{cases} f_i^k, & \text{si } j = 2i, \\ \left( \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} - \frac{1}{4} H(D_i^k, D_{i+1}^k) (h_{j+1}^k)^2 \right), & \text{si } j = 2i + 1, \end{cases} \quad (5.18)$$



o alternativamente, se define el siguiente esquema de subdivisión PPH usando la media armónica ponderada,

$$Sf_j^k = \begin{cases} f_i^k, & \text{si } j = 2i, \\ \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} - \frac{1}{4} M_p(D_i^k, D_{i+1}^k) (h_{j+1}^k)^2, & \text{si } j = 2i + 1. \end{cases} \quad (5.19)$$

Se ha considerado la media aritmética ponderada como,

$$A_p(x, y) = \omega_1 x + \omega_2 y, \quad (5.20)$$

y la media armónica ponderada,

$$M_p(x, y) = \frac{1}{\omega_1 \frac{1}{x} + \omega_2 \frac{1}{y}} = \frac{xy}{\omega_1 y + \omega_2 x}. \quad (5.21)$$

Las propiedades de la media armónica ponderada se definen de la siguiente manera.

Para la primera propiedad, supongamos  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x \leq y$ , entonces,

$$\left| \frac{xy}{\omega_1 y + \omega_2 x} \right| \leq \frac{1}{\omega_1} |x|.$$

La segunda propiedad queda,

$$x = O(1), y = O(1), |x - y| = O(h), \text{ entonces } |A_p(x, y) - M_p(x, y)| = O(h^2).$$

Otra posibilidad también sería y será analizada en los experimentos numéricos el considerar la media armónica de los valores  $2w_j D_j^k$  y  $2w_{j+1} D_{j+1}^k$ .

Se define,

$$H_p(D_j^k, D_{j+1}^k) = \frac{4w_j w_{j+1} D_j^k D_{j+1}^k}{w_j D_j^k + w_{j+1} D_{j+1}^k}. \quad (5.22)$$

Con esta media intuitivamente se persigue el poder garantizar el orden 4 de aproximación, aunque habría que estudiar teóricamente si este hecho es cierto.



## Capítulo 6

### TEST NUMÉRICOS

#### 6.1. Introducción

Se va a proceder a realizar una serie de experimentos numéricos para estudiar la convergencia de los esquemas de subdivisión, la suavidad de la función límite y la propiedad de mantener la convexidad. Los esquemas de subdivisión a considerar son los siguientes:

Método 1: coincide con el esquema de subdivisión PPH usando la media armónica,

$$Sf_j^k = \begin{cases} f_i^k, & \text{si } j = 2i, \\ \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} - \frac{1}{4}H(D_i^k, D_{i+1}^k)(h_{j+1}^k)^2, & \text{si } j = 2i + 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

Método 2: coincide con el esquema de subdivisión PPH usando la media armónica ponderada,

$$Sf_j^k = \begin{cases} f_i^k, & \text{si } j = 2i, \\ \frac{f_i^k + f_{i+1}^k}{2} - \frac{1}{4}M_p(D_i^k, D_{i+1}^k)(h_{j+1}^k)^2, & \text{si } j = 2i + 1. \end{cases} \quad (6.2)$$

Método 3: coincide con el esquema de subdivisión armónica definido en el capítulo anterior a través del uso de la media  $H_p$ , como otra modificación posible del esquema propuesto.

Usaremos un mallado no uniforme entre (0,1), como el que se representa en la siguiente figura,

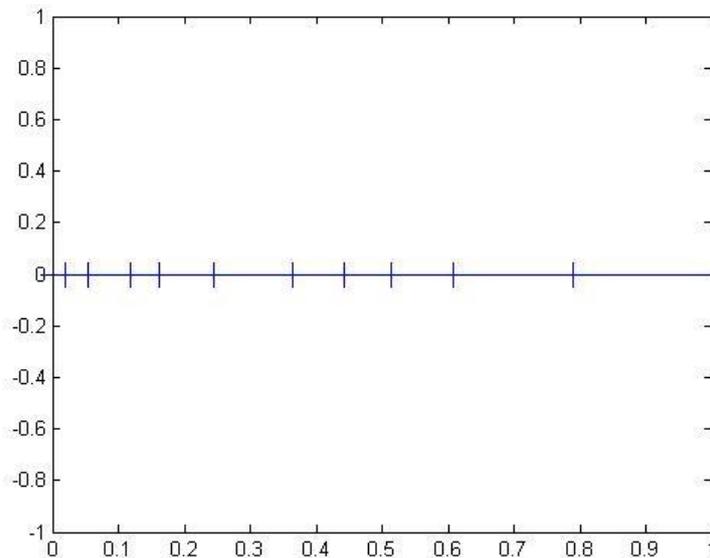


Figura 6.1. Mallado no uniforme

Se han usado los valores discretos de las siguientes funciones,

- Una función trigonométrica del tipo,  $f(x) = \sin(x)$ ,
- una función con saltos del tipo,  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ ,
- una función con esquinas del tipo,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ ,
- una función polinómica del tipo,  $f(x) = x^4$ .

## 6.2. Test de convergencia

Para realizar el test de convergencia se ha partido de los 29 puntos del mallado y se ha subido 10 escalas, obteniendo un total de 28673 puntos.

Atendiendo al esquema de subdivisión para las funciones anteriormente descritas, se han obtenido los siguientes resultados.

Para una función trigonométrica del tipo  $f(x) = \sin(x)$ , se muestra en la Figura 6.2 el resultado del esquema PPH con subdivisión armónica (método 1). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste.

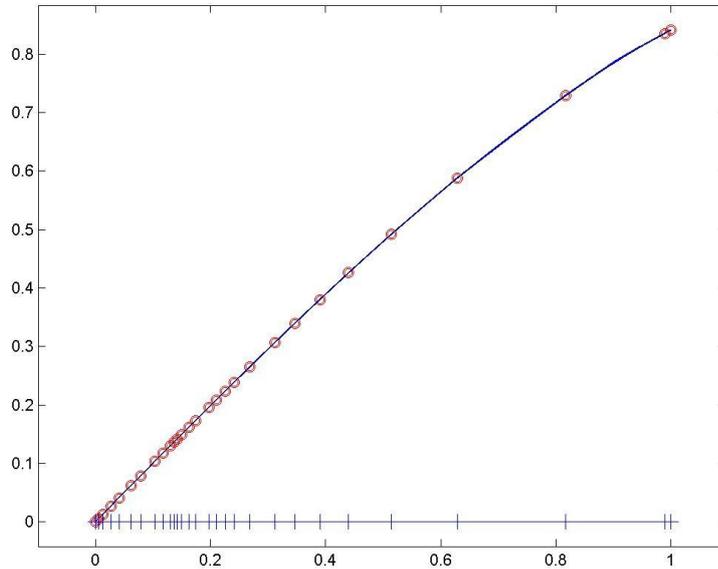


Figura 6.2. Esquema PPH de subdivisión armónica (método 1) para la función  $f(x) = \sin(x)$

Para una función trigonométrica del tipo  $f(x) = \sin(x)$ , se muestra en la Figura 6.3 el resultado del esquema PPH para la subdivisión armónica ponderada (método 2). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste.

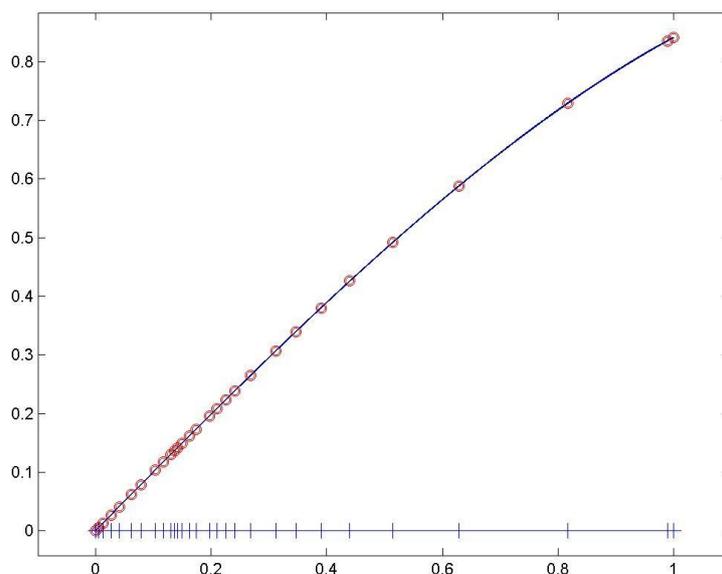


Figura 6.3. Esquema PPH de subdivisión armónica ponderada (método 2) para la función  $f(x) = \sin(x)$



Para una función trigonométrica del tipo  $f(x) = \sin(x)$ , se muestra en la Figura 6.4 el resultado del esquema PPH para la subdivisión armónica con otra modificación del algoritmo propuesto PPH (método 3). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste.

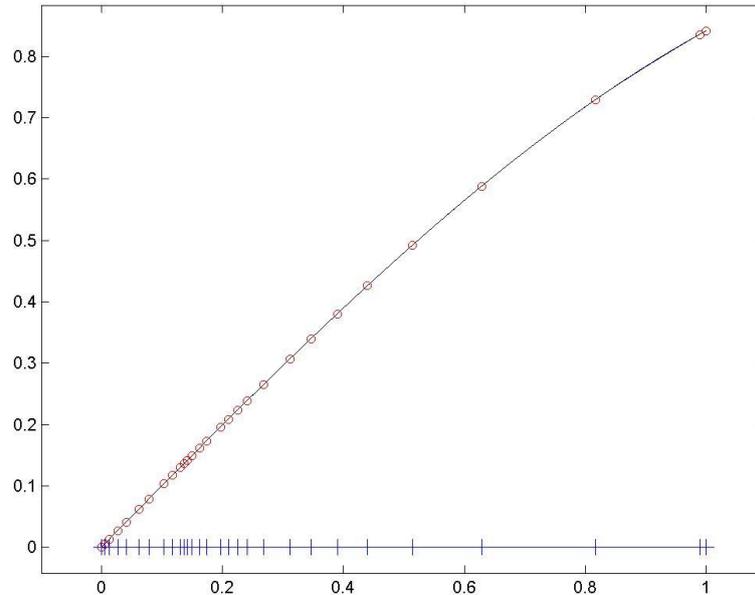


Figura 6.4. Esquema PPH de subdivisión armónica modificada (método 3) para la función  $f(x) = \sin(x)$

Para una función trigonométrica del tipo  $f(x) = \sin(x)$ , se muestra en la Figura 6.5 el resultado del esquema de la subdivisión de Lagrange. En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Se puede observar que el ajuste no es tan preciso como en el esquema PPH mostrado en los casos anteriores.

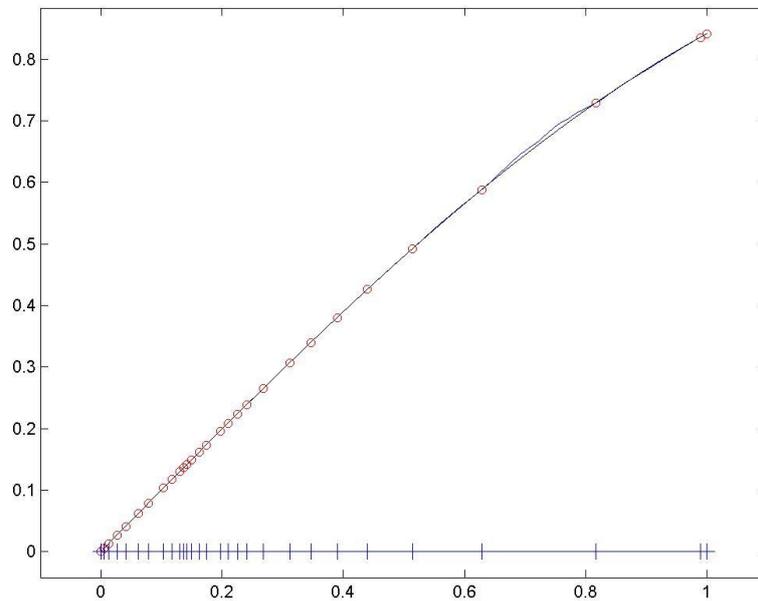


Figura 6.5. Esquema de subdivisión de Lagrange para la función  $f(x) = \sin(x)$

Para una función trigonométrica del tipo  $f(x) = \sin(x)$ , se muestra en la Figura 6.6 el resultado del esquema de la subdivisión lineal. En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. En la imagen se observa que se obtiene un ajuste por trozos rectilíneos.

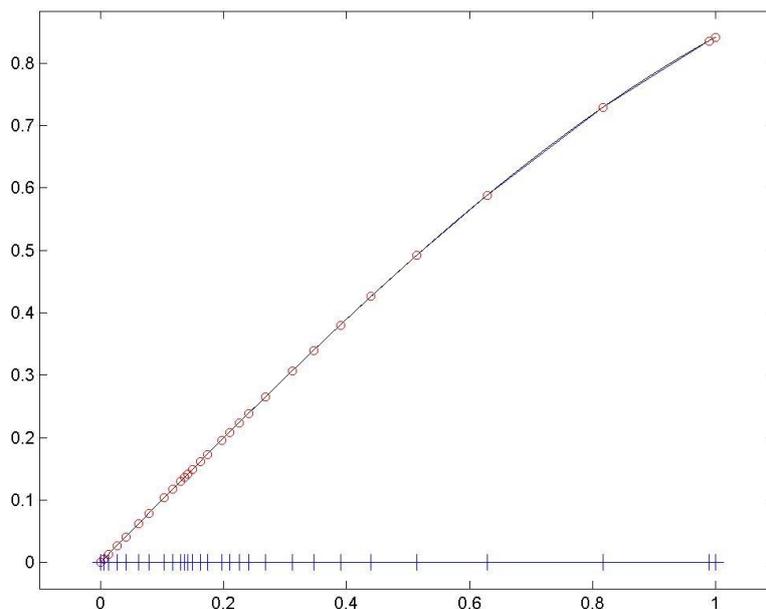


Figura 6.6. Esquema de subdivisión lineal para la función  $f(x) = \sin(x)$



Para una función con saltos del tipo  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

muestra en la Figura 6.7 el resultado del esquema de la subdivisión armónica (método 1). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, exceptuando el ajuste obtenido alrededor de los dos saltos.

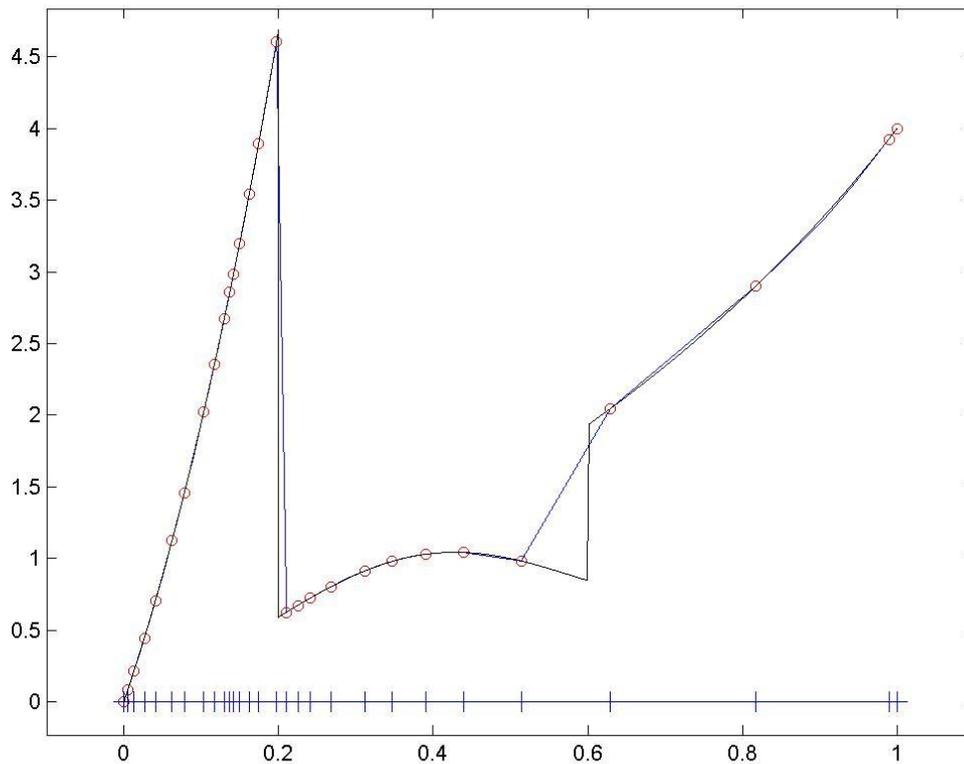


Figura 6.7. Esquema PPH de subdivisión armónica (método 1) para la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$$



Para una función con saltos del tipo  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

muestra en la Figura 6.8 el resultado del esquema de la subdivisión armónica ponderada (método 2). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, exceptuando el ajuste obtenido alrededor de los dos saltos.

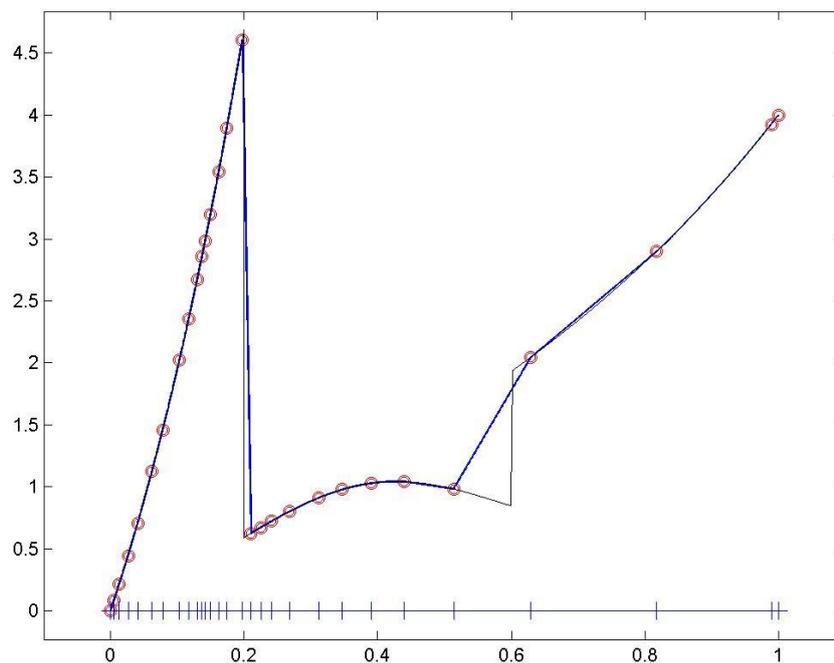


Figura 6.8. Esquema PPH de subdivisión armónica ponderada (método 2) para la función  $f(x) =$

$$\begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$$



Para una función con saltos del tipo  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

muestra en la Figura 6.9 el resultado del esquema de la subdivisión armónica con otra modificación del algoritmo propuesto PPH (método 3). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, exceptuando el ajuste obtenido alrededor de los dos saltos.

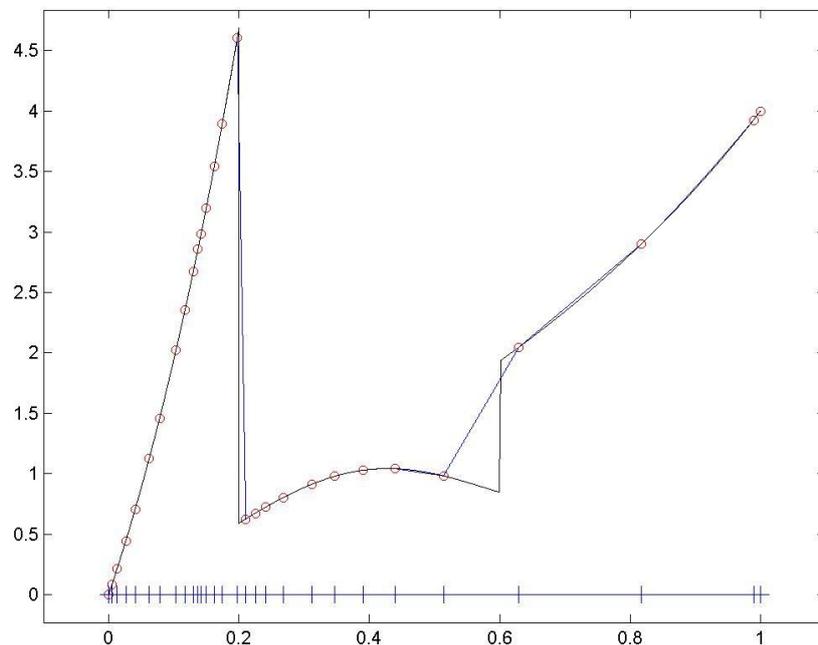


Figura 6.9. Esquema PPH de subdivisión armónica modificada (método 3) para la función  $f(x) =$

$$\begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$$



Para una función con saltos del tipo  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

muestra en la Figura 6.10 el resultado del esquema de la subdivisión de Lagrange. En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen tiene un ajuste alrededor de las zonas donde se producen los saltos pero que el obtenido mediante esquema PPH.

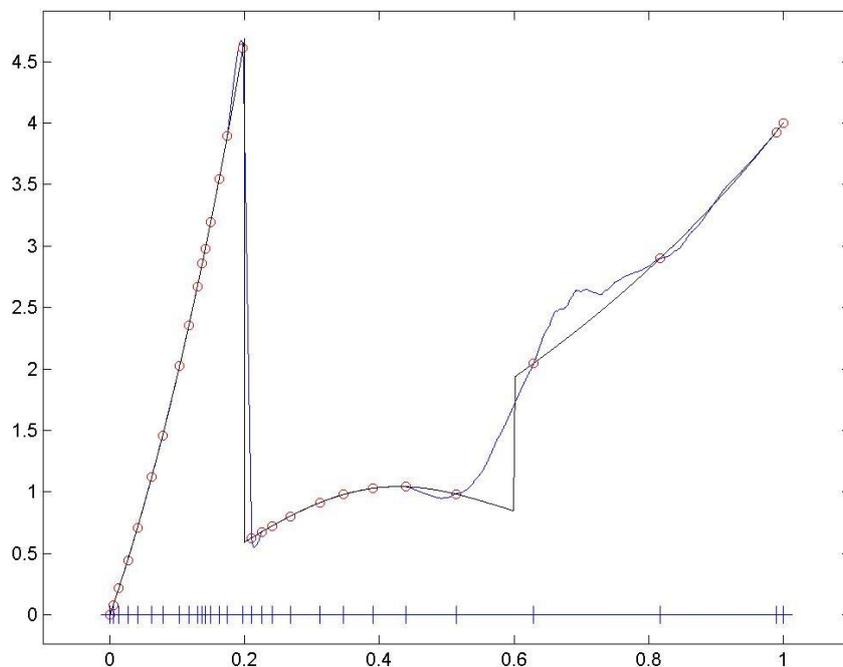


Figura 6.10. Esquema de subdivisión de Lagrange

para la función  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$



Para una función con esquinas del tipo  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

muestra en la Figura 6.11 el resultado del esquema de la subdivisión lineal. En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene una mala aproximación en los saltos y en las demás zonas no se ajusta tan bien como en el esquema PPH.

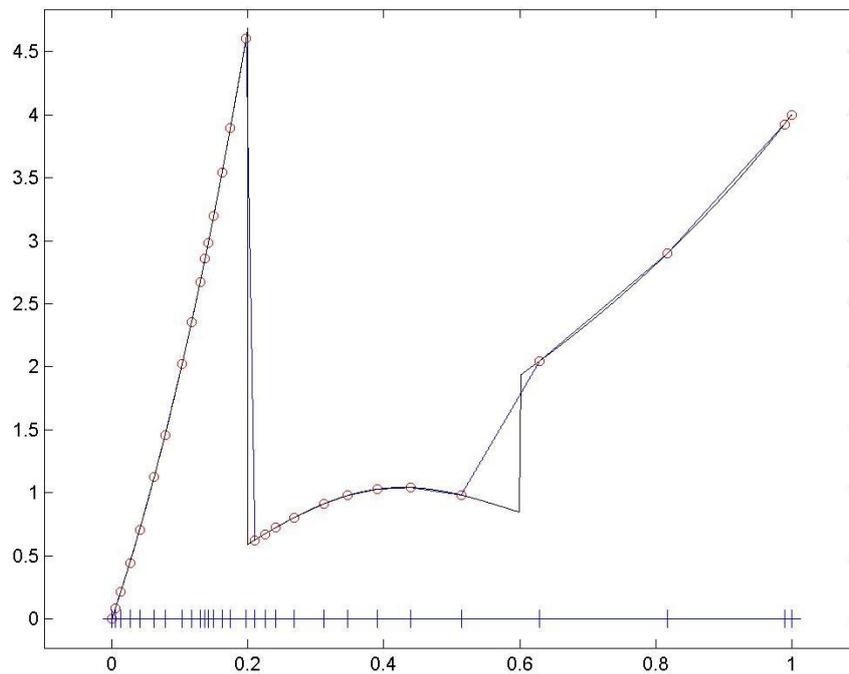


Figura 6.11. Esquema de subdivisión lineal

para la función  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$



Para una función con esquinas del tipo  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se muestra en la Figura 6.12 el resultado del esquema de la subdivisión armónica (método 1). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, exceptuando las esquinas y las zonas donde hay una mayor convexidad.

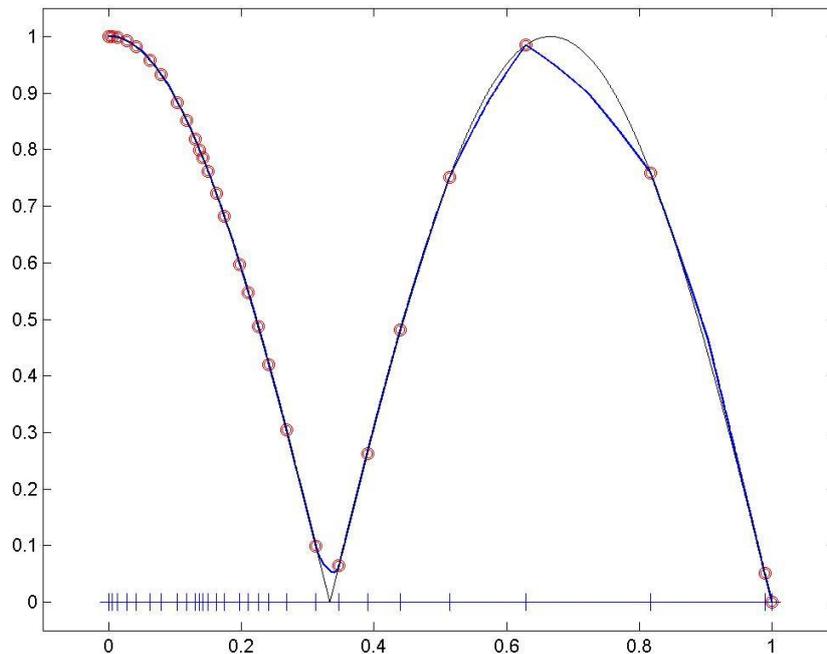


Figura 6.12. Esquema PPH de subdivisión armónica (método 1) para la función  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$



Para una función con esquinas del tipo  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se muestra en la Figura 6.13 el resultado del esquema de la subdivisión armónica ponderada (método 2). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, mejor que en el caso del esquema PPH de subdivisión armónica, mostrado en la Figura 6.10, únicamente se obtiene un resultado peor del ajuste en las esquinas.

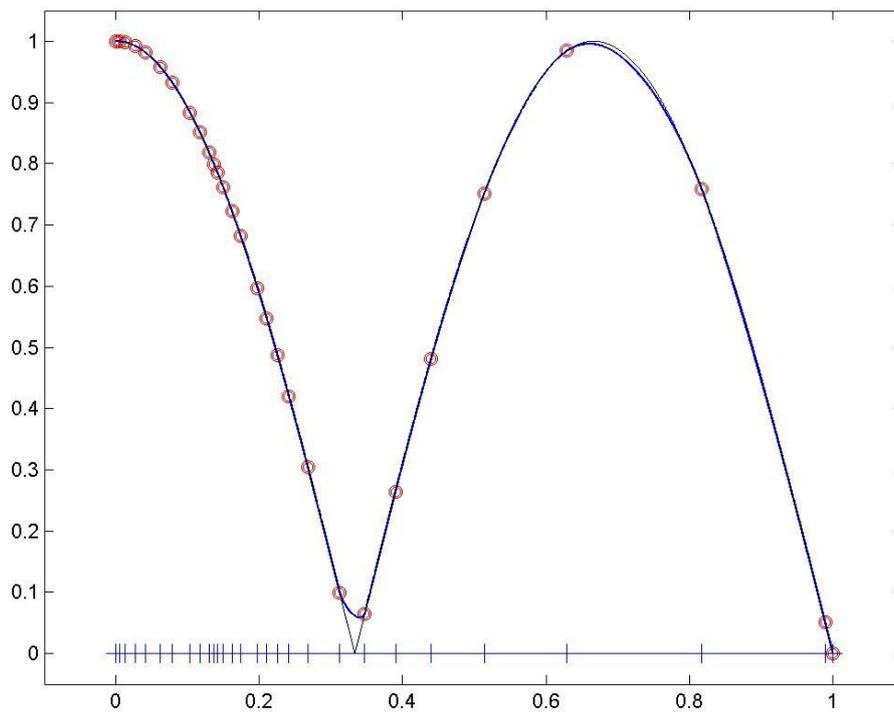


Figura 6.13. Esquema PPH de subdivisión armónica ponderada para la función  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$



Para una función con esquinas del tipo  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se muestra en la Figura 6.14 el resultado del esquema de la subdivisión armónica con otra modificación del algoritmo propuesto PPH (método 3). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, mejor que en el caso del esquema PPH de subdivisión armónica, mostrado en la Figura 6.12, aunque algo pero que en el esquema PPH de subdivisión armónica ponderada, mostrado en la Figura 6.13, únicamente se obtiene un resultado peor del ajuste en las esquinas.

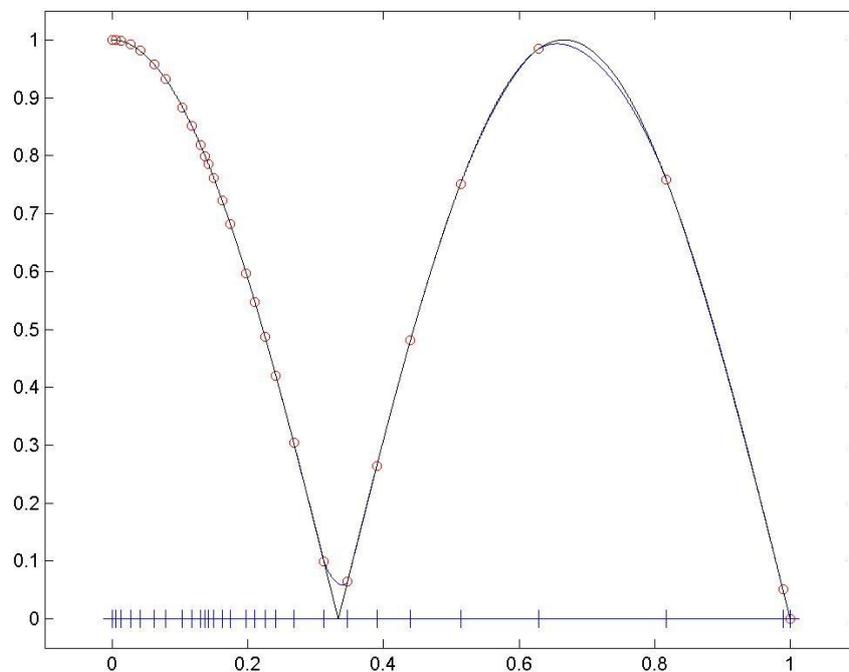


Figura 6.14. Esquema PPH de subdivisión armónica modificada (método 3) para la función

$$f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$$



Para una función con esquinas del tipo  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se muestra en la Figura 6.15 el resultado del esquema de la subdivisión de Lagrange. En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen no se obtiene un buen ajuste, esto es debido a que los puntos tienen mucha separación y a que hay un cambio de convexidad importante que le afecta al esquema de subdivisión de Lagrange.

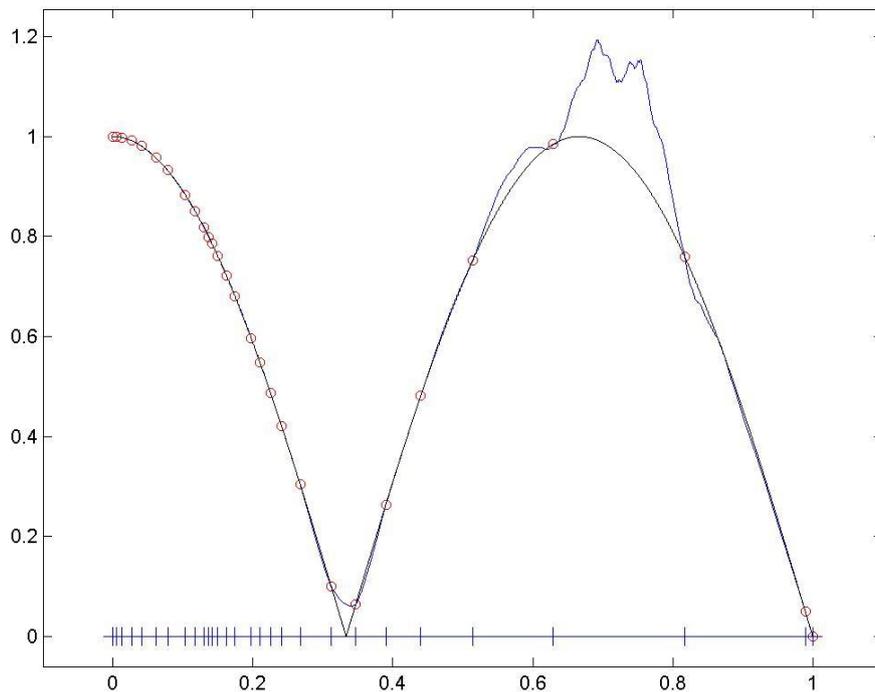


Figura 6.15. Esquema de subdivisión de Lagrange para la función  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$



Para una función con esquinas del tipo  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se muestra en la Figura 6.16 el resultado del esquema de la subdivisión lineal. En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen no se obtiene un ajuste muy bueno, ni en las esquinas ni en los cambios de convexidad.

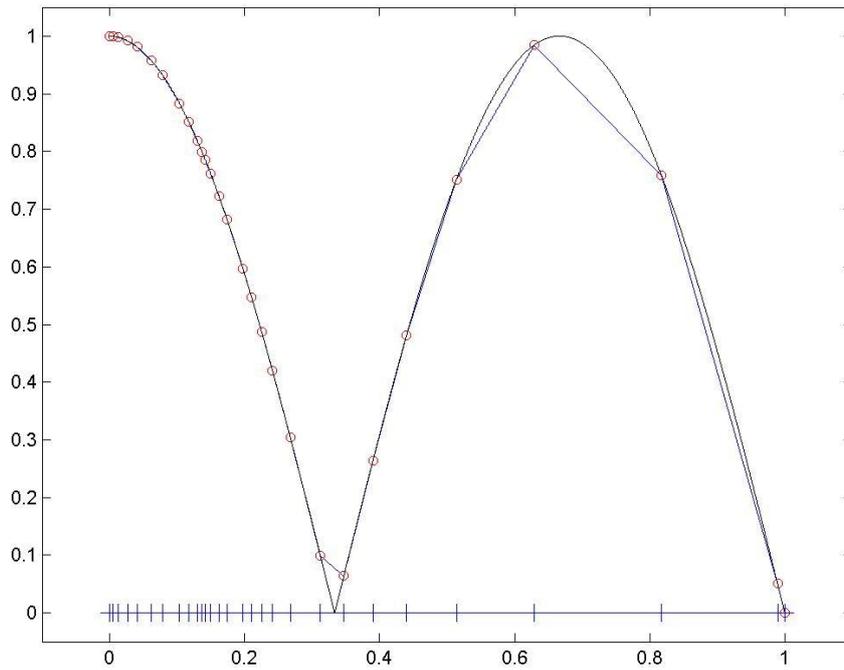


Figura 6.16. Esquema de subdivisión lineal para la función  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$



Para una función con polinómica del tipo  $f(x) = x^4$ , se muestra en la Figura 6.17 el resultado del esquema de la subdivisión armónica (método 1). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste.

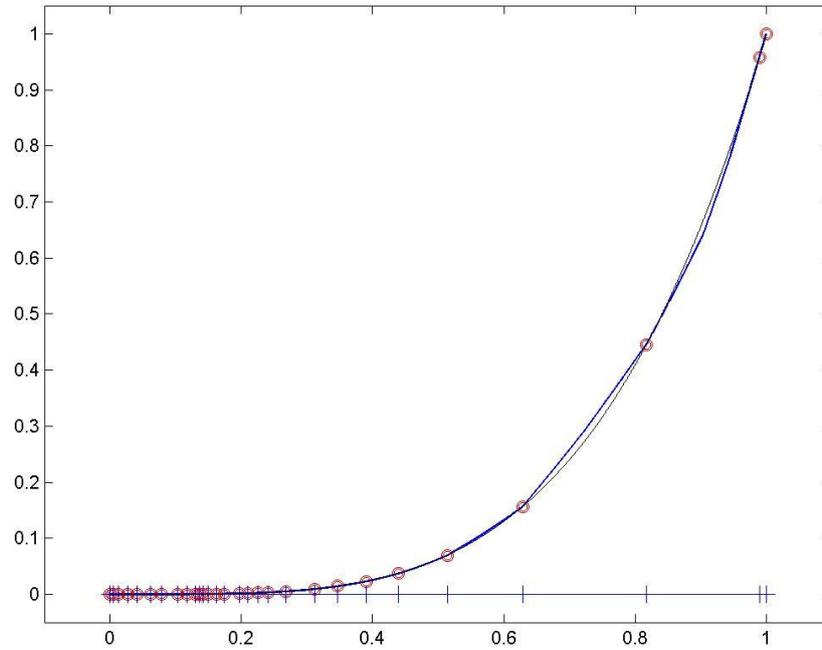


Figura 6.17. Esquema PPH de subdivisión armónica (método 1) para la función  $f(x) = x^4$



Para una función polinómica del tipo  $f(x) = x^4$ , se muestra en la Figura 6.18 el resultado del esquema PPH de la subdivisión armónica ponderada (método 2). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, mejor que en el caso del esquema PPH de subdivisión armónica mostrado en la Figura 6.17.

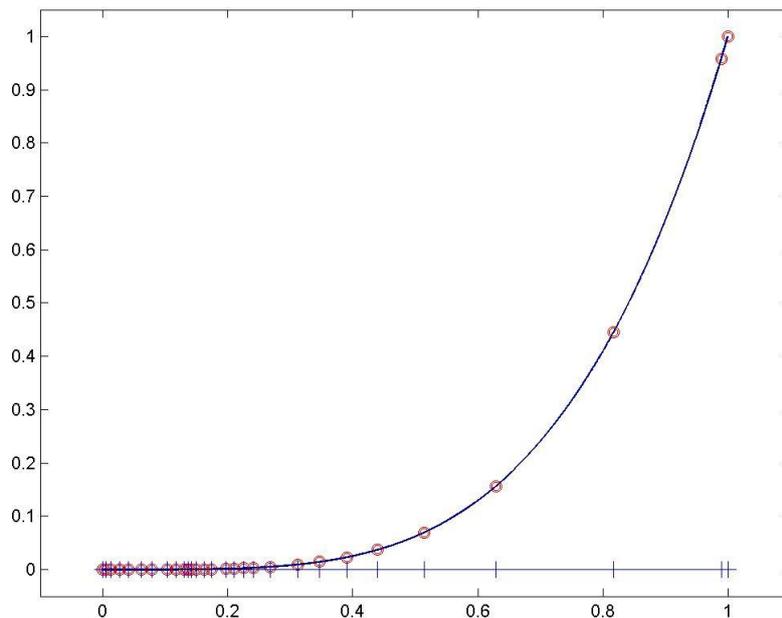


Figura 6.18. Esquema PPH de subdivisión armónica ponderada (método 2) para la función  $f(x) = x^4$



Para una función polinómica del tipo  $f(x) = x^4$ , se muestra en la Figura 6.19 el resultado del esquema PPH de la subdivisión armónica con otra modificación del algoritmo propuesto PPH (método 3). En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, mejor que en el caso del esquema PPH de subdivisión armónica mostrado en la Figura 6.17.

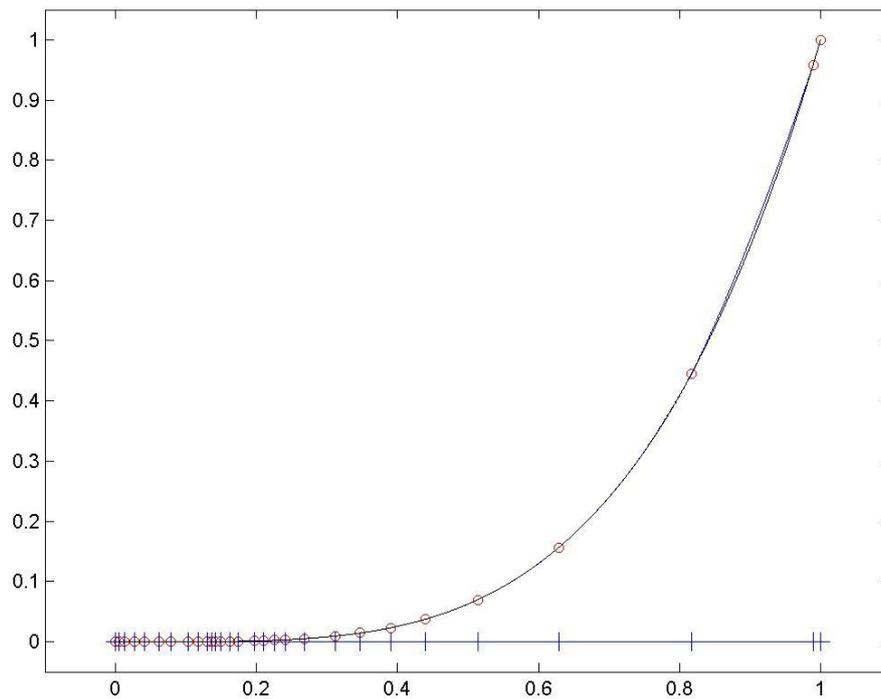


Figura 6.19. Esquema PPH de subdivisión armónica modificada (método 3) para la función  $f(x) = x^4$



Para una función polinómica del tipo  $f(x) = x^4$ , se muestra en la Figura 6.20 el resultado del esquema de la subdivisión de Lagrange. En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen el ajuste que se obtiene no es demasiado bueno, ya que el esquema de subdivisión de Lagrange cuando las abscisas están muy separadas no obtiene un buen ajuste.

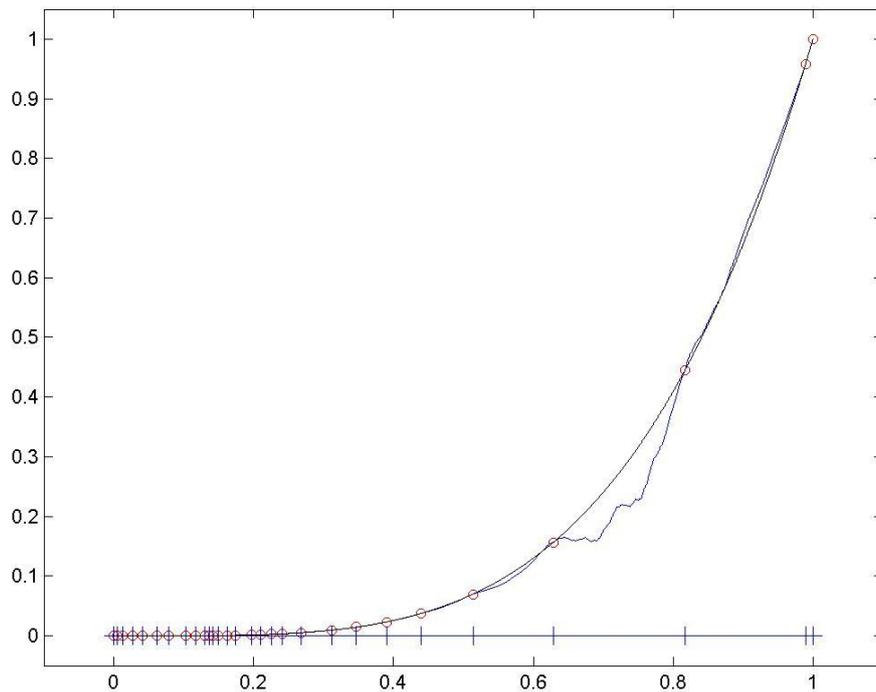


Figura 6.20. Esquema de subdivisión de Lagrange para la función  $f(x) = x^4$



Para una función polinómica del tipo  $f(x) = x^4$ , se muestra en la Figura 6.21 el resultado del esquema de la subdivisión lineal. En rojo se han dibujado los puntos de control y las líneas azules corresponden al resultado obtenido al realizar la subdivisión. Como se observa en la imagen se obtiene un buen ajuste, aunque no tan bueno como el obtenido en los esquemas PPH.

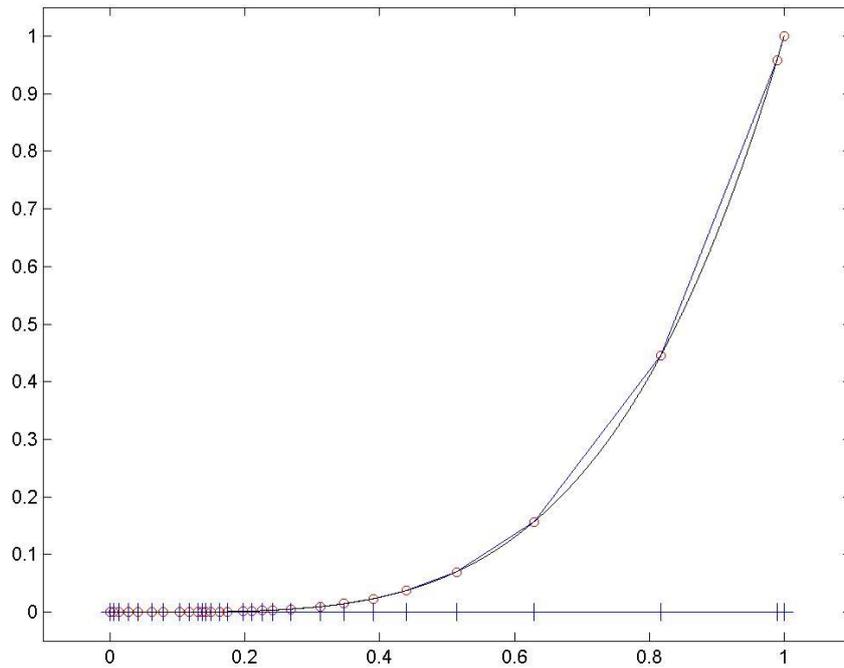


Figura 6.21. Esquema de subdivisión lineal para la función  $f(x) = x^4$



### 6.3. Test de suavidad

Se ha comprobado la suavidad de la función límite, para ello se han tomado unos puntos de subdivisión, a partir de ellos se ha subido 10 escalas calculando el cociente  $\frac{|S^\alpha f(x) - S^\alpha f(y)|}{|x-y|}$ , para distintos valores de  $\alpha$ , en torno a  $\alpha=1$ , que suponemos que es la suavidad. Esta suposición se basa en que para esquemas de subdivisión igualmente espaciados se ha comprobado que  $\alpha=1$ .

Atendiendo a la expresión anteriormente detallada,

$$|S^\alpha f(x) - S^\alpha f(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \quad (6.3)$$

se han obtenido los siguientes valores para la constante de suavidad.

Para una función trigonométrica del tipo,  $f(x) = \sin(x)$ , se recogen en la Tabla 6.1 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), como se observa, la constante k se estabiliza para  $\alpha=1$ .

<b>Tabla 6.1. Estimación de la constante de suavidad (método 1) para la función <math>f(x) = \sin(x)</math></b>			
<b>k</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>17</b>
<b><math>\alpha=0.75</math></b>	0.088900	0.037378	0.026430
<b><math>\alpha=0.99</math></b>	0.897350	0.866783	0.854850
<b><math>\alpha=1.00</math></b>	1.000088	1.000124	1.000285
<b><math>\alpha=1.01</math></b>	1.130118	1.170088	1.186613
<b><math>\alpha=1.25</math></b>	21.495470	51.238098	72.461614

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

recogen en la Tabla 6.2 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1).

<b>Tabla 6.2. Estimación de la constante de suavidad (método 1) para la función <math>f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 &amp; 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 &amp; 0.2 &lt; x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 &amp; 0.6 &lt; x \leq 1 \end{cases}</math></b>			
<b>k</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>17</b>
<b><math>\alpha=0.75</math></b>	18.428721	7.748323	5.478896
<b><math>\alpha=0.99</math></b>	276.523735	267.104340	263.427239
<b><math>\alpha=1.00</math></b>	309.558190	309.558211	309.558450
<b><math>\alpha=1.01</math></b>	346.539052	358.759750	363.768131
<b><math>\alpha=1.25</math></b>	5199.833166	12367.358022	17490.098976



Para una función con esquinas del tipo,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se recogen en la Tabla 6.3 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1).

<b>Tabla 6.3. Estimación de la constante de suavidad (método 1) para la función</b> $f(x) = \left  \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right $			
<b>k</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>17</b>
<b><math>\alpha=0.75</math></b>	0.550012	0.231252	0.163520
<b><math>\alpha=0.99</math></b>	4.429123	4.278251	4.219351
<b><math>\alpha=1.00</math></b>	4.831316	4.831316	4.831316
<b><math>\alpha=1.01</math></b>	5.334101	5.526693	5.615828
<b><math>\alpha=1.25</math></b>	83.518179	198.802200	281.750031

Para una función polinómica del tipo,  $f(x) = x^4$ , se recogen en la Tabla 6.4 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1).

<b>Tabla 6.4. Estimación de la constante de suavidad (método 1)</b> para la función $f(x) = x^4$			
<b>k</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>17</b>
<b><math>\alpha=0.75</math></b>	0.453141	0.190522	0.134720
<b><math>\alpha=0.99</math></b>	3.649046	3.524747	3.476220
<b><math>\alpha=1.00</math></b>	3.992490	3.994339	3.994339
<b><math>\alpha=1.01</math></b>	4.477379	4.637420	4.702156
<b><math>\alpha=1.25</math></b>	70.104137	166.813911	235.910497

Para una función trigonométrica del tipo,  $f(x) = \sin(x)$ , se recogen en la Tabla 6.5 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2).

<b>Tabla 6.5. Estimación de la constante de suavidad (método 2) para la función</b> $f(x) = \sin(x)$			
<b>k</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>17</b>
<b><math>\alpha=0.75</math></b>	0.094139	0.039584	0.027990
<b><math>\alpha=0.99</math></b>	0.897071	0.866514	0.854585
<b><math>\alpha=1.00</math></b>	1.000011	1.000011	1.000011
<b><math>\alpha=1.01</math></b>	1.130103	1.169956	1.186288
<b><math>\alpha=1.25</math></b>	21.473503	51.072901	72.227990



Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

recogen en la Tabla 6.6 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2).

**Tabla 6.6. Estimación de la constante de suavidad (método 2) para la función**

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$$

k	10	15	17
$\alpha=0.75$	18.428721	7.748323	5.478891
$\alpha=0.99$	276.523735	267.104322	263.427018
$\alpha=1.00$	309.558190	309.558190	309.558190
$\alpha=1.01$	346.539052	358.759726	363.767825
$\alpha=1.25$	5199.833165	12367.357195	17490.084276

Para una función con esquinas del tipo,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se recogen en la Tabla 6.7 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2).

**Tabla 6.7. Estimación de la constante de suavidad (método 2) para la función**

$$f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$$

k	10	15	17
$\alpha=0.75$	0.532310	0.223822	0.158266
$\alpha=0.99$	4.286574	4.140805	4.083802
$\alpha=1.00$	4.744680	4.745376	4.745392
$\alpha=1.01$	5.320922	5.509372	5.586300
$\alpha=1.25$	83.311834	198.179118	280.268590

Para una función polinómica del tipo,  $f(x) = x^4$ , se recogen en la Tabla 6.8 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2).

**Tabla 6.8. Estimación de la constante de suavidad (método 2) para la función  $f(x) = x^4$**

k	10	15	17
$\alpha=0.75$	0.441437	0.185654	0.131278
$\alpha=0.99$	3.559091	3.438825	3.391505
$\alpha=1.00$	3.991343	3.992469	3.992497
$\alpha=1.01$	4.476093	4.635249	4.699987
$\alpha=1.25$	70.084005	166.735817	235.801663



Para una función trigonométrica del tipo,  $f(x) = \sin(x)$ , se recogen en la Tabla 6.9 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica sin reducir el orden de aproximación (método 3).

**Tabla 6.9. Estimación de la constante de suavidad (método 3) para la función  $f(x) = \sin(x)$**

k	10	15	17
$\alpha=0.75$	0.094184	0.039606	0.028006
$\alpha=0.99$	0.897066	0.866509	0.854580
$\alpha=1.00$	1.000011	1.000011	1.000011
$\alpha=1.01$	1.130103	1.169956	1.186288
$\alpha=1.25$	21.473909	51.073929	72.229453

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

recogen en la Tabla 6.10 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica sin reducir el orden de aproximación (método 3).

**Tabla 6.10. Estimación de la constante de suavidad (método 3) para la función  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6 \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$**

k	10	15	17
$\alpha=0.75$	18.428721	7.748323	5.478891
$\alpha=0.99$	276.523735	267.104322	263.427018
$\alpha=1.00$	309.558190	309.558190	309.558190
$\alpha=1.01$	346.539052	358.759726	363.767825
$\alpha=1.25$	5199.833165	12367.357195	17490.084277

Para una función con esquinas del tipo,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se recogen en la Tabla 6.11 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica sin reducir el orden de aproximación (método 3).

**Tabla 6.11. Estimación de la constante de suavidad (método 3) para la función  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$**

k	10	15	17
$\alpha=0.75$	0.533169	0.224180	0.158520
$\alpha=0.99$	4.293489	4.147426	4.090334
$\alpha=1.00$	4.744680	4.745376	4.745392
$\alpha=1.01$	5.320922	5.509372	5.586300
$\alpha=1.25$	83.311834	198.179118	280.268590



Para una función polinómica del tipo,  $f(x) = x^4$ , se recogen en la Tabla 6.12 los valores obtenidos para un esquema PPH con la subdivisión armónica sin reducir el orden de aproximación (método 3).

**Tabla 6.12. Estimación de la constante de suavidad (método 3) para la función  $f(x) = x^4$**

k	10	15	17
$\alpha=0.75$	0.401158	0.168711	0.119298
$\alpha=0.99$	3.559091	3.438825	3.391505
$\alpha=1.00$	3.991343	3.992469	3.992497
$\alpha=1.01$	4.476093	4.635249	4.699987
$\alpha=1.25$	70.084004	166.735817	235.801663

Como se puede observar en los datos recogidos en las diferentes tablas, para el valor de  $\alpha=1$  se estabiliza el valor de la constante, cuando  $\alpha$  aumenta el valor de la constante aumenta y, si por el contrario,  $\alpha$  decrece, el valor de la constante también lo hace. Es por esto que podemos asumir que para esquemas de subdivisión no igualmente espaciados, también podemos asumir que  $\alpha=1$ .

#### 6.4. Estabilidad del esquema de subdivisión

Definición: diremos que un esquema de subdivisión convergente es estable cuando para todo  $f^0, g^0$ , secuencias iniciales, se cumple que existe la constante C, tal que,

$$\|S^\infty(f) - S^\infty(g)\| \leq C \|f^0 - g^0\|. \quad (6.4)$$

Se han introducido diferentes valores de ruido para observar la variación de la constante. Así pues los resultados obtenidos para las distintas funciones probadas han sido las siguientes.

Para una función trigonométrica del tipo,  $f(x) = \sin(x)$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.13 para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), para norma 2,



**Tabla 6.13.** Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función  $f(x) = \sin(x)$ , con norma  $||\cdot||_2$

ruído \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	0.643174	0.441859	0.155129	0.027433	0.004849	0.002424
$10^{-3}$	0.647792	0.438954	0.152545	0.026972	0.004768	0.002384
$10^{-6}$	0.994396	0.751217	0.260828	0.046124	0.008153	0.004076
$10^{-8}$	0.967032	0.668391	0.231977	0.041026	0.007252	0.003626

Para una función trigonométrica del tipo,  $f(x) = \sin(x)$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.14 para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), para norma infinito,

**Tabla 6.14.** Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función  $f(x) = \sin(x)$ , con norma  $||\cdot||_\infty$

ruído \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	1.079863	1.089368	1.236882	1.254312	1.254662	1.254723
$10^{-3}$	1.795242	1.795242	1.795242	1.797493	1.797652	1.797655
$10^{-6}$	4.1960073	5.419653	5.419653	5.419653	5.419653	5.419653
$10^{-8}$	3.0314421	3.031442	3.031442	3.031442	3.037012	3.044085

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.15 para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), para norma 2,

**Tabla 6.15.** Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}, \text{ con norma } ||\cdot||_2$$

ruído \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	0.702571	0.547499	0.205689	0.036423	0.006438	0.003219
$10^{-3}$	0.663593	0.485245	0.256196	0.057840	0.057840	0.005112
$10^{-6}$	0.904631	0.694282	0.241039	0.042624	0.007535	0.003767
$10^{-8}$	0.881405	0.620537	0.216659	0.038321	0.006798	0.003396



Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se han

obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.16 para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), para norma infinito,

**Tabla 6.16. Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función**  
 $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , con norma  $|| \cdot ||_{\infty}$

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	1.744586	3.566334	4.787940	5.144462	5.158578	5.159047
$10^{-3}$	1.100195	2.001660	15.965906	34.168383	34.748509	34.785319
$10^{-6}$	3.705188	5.030741	5.030741	5.030741	5.030741	5.030741
$10^{-8}$	2.972196	2.972196	2.972196	2.972196	35.903243	35.903243

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.17 para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), para norma 2,

**Tabla 6.17. Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función**  
 $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , con norma  $|| \cdot ||_2$

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	0.652546	0.448021	0.157168	0.027792	0.004913	0.002456
$10^{-3}$	0.803964	0.547431	0.189936	0.033589	0.005938	0.002969
$10^{-6}$	1.383152	0.908140	0.313179	0.055383	0.009790	0.004895
$10^{-8}$	1.016996	0.670686	0.232070	0.041042	0.007256	0.003628

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.18 para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), para norma infinito,

**Tabla 6.18. Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función**  
 $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , con norma  $|| \cdot ||_{\infty}$

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	1.062548	1.093334	1.218518	1.228978	1.228978	1.228978
$10^{-3}$	1.939078	1.939078	1.939078	1.939078	1.939078	1.939078
$10^{-6}$	7.947948	7.947948	7.947948	7.947948	7.947948	7.947948
$10^{-8}$	3.985912	3.985912	3.985912	3.985912	10.527194	10.527194



Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = x^4$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.19 para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), para norma 2,

**Tabla 6.19. Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función  $f(x) = x^4$ , con norma  $||\cdot||_2$**

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	0.647569	0.445148	0.156835	0.027737	0.004903	0.002451
$10^{-3}$	0.660033	0.449009	0.156448	0.027664	0.004890	0.002445
$10^{-6}$	0.975380	0.731385	0.253765	0.044875	0.007933	0.003966
$10^{-8}$	1.083130	0.730878	0.252367	0.044630	0.007889	0.003944

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = x^4$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.20 para un esquema PPH con la subdivisión armónica (método 1), para norma infinito,

**Tabla 6.20. Estimación de la constante de estabilidad (método 1) para la función  $f(x) = x^4$ , con norma  $||\cdot||_\infty$**

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	1.081796	1.089312	1.237055	1.254571	1.256119	1.256119
$10^{-3}$	1.795559	1.795559	1.795559	1.795559	1.795559	1.795559
$10^{-6}$	3.705188	5.030741	5.030741	5.030741	5.030741	5.030741
$10^{-8}$	3.355366	3.355366	3.355366	3.355366	3.355366	3.355366

Por otro lado para la subdivisión armónica ponderada se han obtenido los siguientes valores.

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \sin(x)$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.21 para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2), para norma dos,

**Tabla 6.21. Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función  $f(x) = \sin(x)$ , con norma  $||\cdot||_2$**

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	0.621031	0.422690	0.147748	0.026123	0.004618	0.002309
$10^{-3}$	0.613398	0.418839	0.146817	0.025962	0.004589	0.002294
$10^{-6}$	0.837917	0.607486	0.216934	0.038378	0.006784	0.003392
$10^{-8}$	0.705555	0.502782	0.179036	0.031675	0.005599	0.002799



Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \sin(x)$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.22 para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2), para norma infinito,

**Tabla 6.22. Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función  $f(x) = \sin(x)$ , con norma  $||\cdot||_\infty$**

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	1.089668	1.089668	1.090064	1.090084	1.090084	1.090084
$10^{-3}$	1.006706	1.141732	1.183004	1.183405	1.183405	1.183405
$10^{-6}$	3.657791	3.657791	3.755878	3.756511	3.756511	3.756511
$10^{-8}$	1.419292	1.459466	1.571067	1.572422	1.572422	1.572422

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.23 para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2), para norma dos,

**Tabla 6.23. Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , con norma  $||\cdot||_2$**

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	0.621635	0.423149	0.148062	0.026180	0.004628	0.002314
$10^{-3}$	0.606865	0.413886	0.145099	0.025657	0.004535	0.002267
$10^{-6}$	0.808626	0.587681	0.209867	0.037127	0.006563	0.003281
$10^{-8}$	0.692898	0.492346	0.175015	0.030962	0.005473	0.002736

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$ , se

han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.24 para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2), para norma infinito,



**Tabla 6.24.** Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^4 & 0 \leq x \leq 0.2 \\ \sin(2\pi x) + 2 & 0.2 < x \leq 0.6, \text{ con norma } ||\cdot||_{\infty} \\ x^3 + 3 & 0.6 < x \leq 1 \end{cases}$$

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	1.075075	1.075075	1.075290	1.075299	1.075299	1.075299
$10^{-3}$	1.000000	1.000000	1.010752	1.010770	1.010771	1.010771
$10^{-6}$	3.414882	3.414882	3.529554	3.531325	3.531326	3.531326
$10^{-8}$	1.324288	1.378349	1.441755	1.442208	1.442208	1.442208

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.25 para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2), para norma dos,

**Tabla 6.25.** Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función

$$f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|, \text{ con norma } ||\cdot||_2$$

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	0.628069	0.428885	0.150075	0.026535	0.004690	0.002345
$10^{-3}$	0.623005	0.431232	0.152276	0.026932	0.004761	0.002380
$10^{-6}$	0.958103	0.697529	0.249211	0.044092	0.007794	0.003897
$10^{-8}$	0.734284	0.521495	0.185359	0.032793	0.005797	0.002898

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.26 para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2), para norma infinito,

**Tabla 6.26.** Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función

$$f(x) = \left| \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|, \text{ con norma } ||\cdot||_{\infty}$$

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	1.070261	1.086322	1.088744	1.089072	1.089072	1.089072
$10^{-3}$	1.019039	1.019039	1.106509	1.106626	1.106628	1.106628
$10^{-6}$	4.905032	4.905032	4.905032	4.905032	4.905032	4.905032
$10^{-8}$	2.214207	2.214207	2.227233	2.227493	2.227494	2.227494

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = x^4$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.27 para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método 2), para norma dos,



**Tabla 6.27.** Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función  $f(x) = x^4$ , con norma  $||\cdot||_2$

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	0.622902	0.426105	0.149555	0.026446	0.004675	0.002337
$10^{-3}$	0.623583	0.429422	0.151140	0.026729	0.004725	0.002362
$10^{-6}$	0.820862	0.596106	0.212921	0.037668	0.006659	0.003329
$10^{-8}$	0.705770	0.503158	0.179126	0.031690	0.005602	0.002801

Para una función con saltos del tipo,  $f(x) = x^4$ , se han obtenido los valores mostrados en la Tabla 6.28 para un esquema PPH con la subdivisión armónica ponderada (método2), para norma infinito,

**Tabla 6.28.** Estimación de la constante de estabilidad (método 2) para la función  $f(x) = x^4$ , con norma  $||\cdot||_\infty$

ruido \ k	1	2	5	10	15	17
$10^{-1}$	1.091798	1.091798	1.092198	1.092222	1.092222	1.092222
$10^{-3}$	1.006796	1.192812	1.245264	1.245416	1.245416	1.245416
$10^{-6}$	3.414882	3.414882	3.542581	3.544051	3.544051	3.544051
$10^{-8}$	1.343157	1.378349	1.449056	1.449185	1.449185	1.449185

## 6.5. Conservación de la convexidad

**Definición 1:** se dice que una secuencia de datos  $(x^k, f^k)$  es estrictamente convexa si para todo  $j$  perteneciente al conjunto de los números naturales  $D_j^k > 0$ , donde,

$$D_j^k = \frac{f_{j-1}^k}{h_j^k(h_j^k + h_{j+1}^k)} - \frac{f_j^k}{h_j^k h_{j+1}^k} + \frac{f_{j+1}^k}{h_{j+1}^k(h_j^k + h_{j+1}^k)}. \quad (6.5)$$

**Definición 2:** se dice que un esquema de subdivisión  $S$  mantiene la convexidad si para todo  $(x^0, f^0)$ , secuencia inicial de datos estrictamente convexa se cumple que la subdivisión en el nivel  $k$ ,  $(x^k, f^k) := (x^k, S^k f^0)$ , es también una secuencia de datos estrictamente convexa para todo  $k$  perteneciente al conjunto de los números naturales.

Se va a estudiar la conservación de los esquemas de subdivisión estudiados. Se define la siguiente situación,

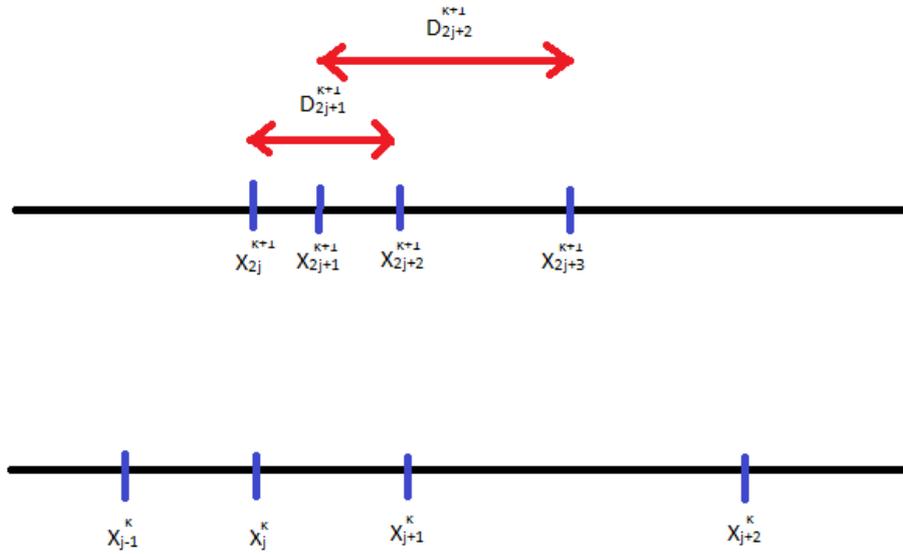


Figura 6.22. Esquema de subdivisión

Se supone  $D_j^k > 0$  para todo  $j$ .

Se va a comprobar que  $D_{2j+1}^{k+1}, D_{2j+2}^{k+1} > 0$  y si se sube una escala en el esquema de subdivisión se sigue cumpliendo esta condición.

Se va a proceder a calcular  $D_{2j+1}^{k+1}$  y  $D_{2j+2}^{k+1}$ ,

$$D_{2j+1}^{k+1} = \frac{f_{2j}^{k+1}}{h_{2j+1}^{k+1}(h_{2j+1}^{k+1} + h_{2j+2}^{k+1})} - \frac{f_{2j+1}^{k+1}}{h_{2j+1}^{k+1}h_{2j+2}^{k+1}} + \frac{f_{2j+2}^{k+1}}{h_{2j+2}^{k+1}(h_{2j+1}^{k+1} + h_{2j+2}^{k+1})}, \quad (6.6)$$

teniendo en cuenta las relaciones con el nivel inferior entre  $k+1$  y  $k$ ,

$$D_{2j+1}^{k+1} = \frac{2f_j^k}{(h_{j+1}^k)^2} - \frac{4f_{2j+1}^{k+1}}{(h_{j+1}^k)^2} + \frac{2f_{j+1}^k}{(h_{j+1}^k)^2}. \quad (6.7)$$

Ahora, se ha de notar que los puntos impares son predichos por el esquema de subdivisión como sigue,

$$f_{2j+1}^{k+1} = \frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{(h_{j+1}^k)^2}{4} \cdot V(D_j^k, D_{j+1}^k), \quad (6.8)$$

donde  $D_j^k, D_{j+1}^k > 0$ , y  $V(D_j^k, D_{j+1}^k)$  es una media de los valores  $D_j^k$  y  $D_{j+1}^k$ .



Se sustituye y queda,

$$D_{2j+1}^{k+1} = V(D_j^k, D_{j+1}^k) > 0. \quad (6.9)$$

Por otro lado,

$$D_{2j+2}^{k+1} = \frac{f_{2j+1}^{k+1}}{h_{2j+2}^{k+1}(h_{2j+2}^{k+1} + h_{2j+3}^{k+1})} - \frac{f_{2j+2}^{k+1}}{h_{2j+2}^{k+1}h_{2j+3}^{k+1}} + \frac{f_{2j+3}^{k+1}}{h_{2j+3}^{k+1}(h_{2j+2}^{k+1} + h_{2j+3}^{k+1})}. \quad (6.10)$$

Si se sustituyen las predicciones del nivel de subdivisión inferior,

$$D_{2j+2}^{k+1} = \frac{\frac{f_j^k + f_{j+1}^k}{2} - \frac{(h_{j+1}^k)^2}{4} V(D_j^k, D_{j+1}^k)}{\frac{h_{j+1}^k}{2} \left( \frac{h_{j+1}^k}{2} + \frac{h_{j+2}^k}{2} \right)} - \frac{f_{j+1}^k}{\frac{h_{j+1}^k}{2} \cdot \frac{h_{j+2}^k}{2}} + \frac{\frac{f_{j+1}^k + f_{j+2}^k}{2} - \frac{(h_{j+2}^k)^2}{4} V(D_{j+1}^k, D_{j+2}^k)}{\frac{h_{j+2}^k}{2} \left( \frac{h_{j+1}^k}{2} + \frac{h_{j+2}^k}{2} \right)}, \quad (6.11)$$

y sabiendo que,

$$D_{j+1}^k = \frac{f_j^k}{h_{j+1}^k(h_{j+1}^k + h_{j+2}^k)} - \frac{f_{j+1}^k}{h_{j+1}^k h_{j+2}^k} + \frac{f_{j+2}^k}{h_{j+2}^k(h_{j+1}^k + h_{j+2}^k)}, \quad (6.12)$$

entonces se llega a,

$$\begin{aligned} D_{2j+2}^{k+1} &= 2D_{j+1}^k - \frac{h_{j+1}^k}{h_{j+1}^k + h_{j+2}^k} V(D_j^k, D_{j+1}^k) - \frac{h_{j+2}^k}{h_{j+1}^k + h_{j+2}^k} V(D_{j+1}^k, D_{j+2}^k) \\ &> 2D_{j+1}^k - \frac{h_{j+1}^k}{h_{j+1}^k + h_{j+2}^k} \frac{2(h_j^k + h_{j+1}^k + h_{j+2}^k)}{h_{j+1}^k + 2h_j^k} D_{j+1}^k \\ &\quad - \frac{h_{j+2}^k}{h_{j+1}^k + h_{j+2}^k} \frac{2(h_{j+1}^k + h_{j+2}^k + h_{j+3}^k)}{h_{j+2}^k + 2h_{j+3}^k} D_{j+1}^k. \end{aligned} \quad (6.13)$$

**Corolario 1:**

Si  $V(D_j^k, D_{j+1}^k) < 2\min(D_j^k, D_{j+1}^k)$ , para todo  $j$ . Entonces,  $D_{2j+2}^{k+1} > 0$ , y en este caso se tendrá un esquema de subdivisión que conserva la convexidad.

Se va a estudiar separadamente cada uno de los casos que se han tratado en este proyecto.



CASO 1: Media Aritmética Ponderada.

Se define,

$$V(D_j^k, D_{j+1}^k) := w_j D_j^k + w_{j+1} D_{j+1}^k. \quad (6.14)$$

En este caso no se tiene ninguna garantía de que  $D_{2j+2}^{k+1} > 0$ .

CASO 2: Media Armónica.

Queda definido,

$$V(D_j^k, D_{j+1}^k) = \frac{2D_j^k D_{j+1}^k}{D_j^k + D_{j+1}^k}. \quad (6.15)$$

En este caso, como es bien sabido,  $V(D_j^k, D_{j+1}^k) < 2\min(D_j^k, D_{j+1}^k)$  para todo  $j$ , y por tanto, debido al corolario 1 mantiene la convexidad.

CASO 3: Subdivisi3n Lineal por trozos rectilíneos.

Se define,

$$V(D_j^k, D_{j+1}^k) = 0. \quad (6.16)$$

En este caso, no conserva la convexidad estricta ya que,  $D_{2j+1}^{k+1} = 0$ .

CASO 4: Media Armónica de los valores  $2w_j D_j^k$  y  $2w_{j+1} D_{j+1}^k$ .

Se define,

$$V(D_j^k, D_{j+1}^k) = \frac{4w_j w_{j+1} D_j^k D_{j+1}^k}{w_j D_j^k + w_{j+1} D_{j+1}^k}. \quad (6.17)$$

En este caso,  $V(D_j^k, D_{j+1}^k) \leq 2\min(2w_j D_j^k, 2w_{j+1} D_{j+1}^k) \leq 4\min(w_j D_j^k, w_{j+1} D_{j+1}^k)$ ,

y no se puede asegurar que,  $D_{2j+2}^{k+1} > 0$ .



CASO 5:

Definiendo,

$$V(D_j^k, D_{j+1}^k) = \frac{D_j^k D_{j+1}^k}{w_{j+1} D_j^k + w_j D_{j+1}^k}. \quad (6.18)$$

En este caso tampoco se puede asegurar que  $D_{2j+2}^{k+1} > 0$  porque la propiedad,  
$$\begin{cases} V(D_j^k, D_{j+1}^k) < \frac{1}{w_j} D_j^k & \text{si } D_j^k < D_{j+1}^k \\ V(D_j^k, D_{j+1}^k) < \frac{1}{w_{j+1}} D_{j+1}^k & \text{si } D_{j+1}^k < D_j^k \end{cases},$$
 no lo permite en todas las situaciones.





## Capítulo 7

### CONCLUSIONES

---

En este proyecto hemos estudiado esquemas de subdivisión no lineales en mallados no uniformes, definiendo nuevos esquemas de subdivisión siguiendo las mismas ideas que en el caso uniformemente espaciado.

Posteriormente hemos analizado dichos esquemas y testado su aplicabilidad mediante diversos experimentos numéricos. En particular se ha estudiado la convergencia de los esquemas, la suavidad de la función límite, la estabilidad de los esquemas y la conservación de la convexidad.

Los resultados obtenidos han sido bastante satisfactorios, dando lugar al esquema de subdivisión PPH en mallados no uniformes que presenta orden 4 de aproximación, que numéricamente se comporta de manera estable, que genera curvas límites de clase  $C^1$  y que mantiene la convexidad de los datos iniciales bajo ciertas condiciones.

Además también hemos conseguido otro esquema de subdivisión en mallados no uniformes que mantiene siempre la convexidad de los datos iniciales, aunque para ello sacrifica el orden de aproximación, que baja a ser 2.





---

## Bibliografía

---

- [1] Amat, S.; Donat, R.; Trillo, J.C. *Proving convexity preserving properties of interpolatory subdivision schemes trough reconstruction operators*. Appl. Math. Comput. 219 (2013), no. 14, 7413-7421.
- [2] Amat, S.; Donat, R.; Liandrat, J.; Trillo, J.C. *Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing*. Found. Comput. Math. 6 (2006), no. 2, 193-225.
- [3] Amat, S.; Dadourian, K.; Donat, R.; Liandrat, J.; Trillo, J.C. *Error bounds for a convexity-preserving interpolation and its limit function*. J. Comput: Appl. Math – 211 (2008), no. 1, 36-44.
- [4] Arándiga, F.; Baeza, A.; Donat, R. *Discrete multiresolution base don Hermite interpolation: computing derivatives. Recent advances in computational and mathematical methods for science and engineering*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. (2004), 9 2,263-273.
- [5] Cohen, A.; Dyn, N. *Nonstationary subdivision schemes and multiresolution analysis*. SIAM J. Math. Anal. (1996), 27 6, 1745-1769.
- [6] Daubechies, I.; Runborg, O; Sweldens, W. *Normal multiresolution approximation of curves*. Const. Approx. (2004), 20 3, 399-463.
- [7] Dyn, N.; Levin, D. *Subdivision schemes in geometric modelling*. (2002). Acta Numer., 11, 73-144.
- [8] Chorro Oncina, Rosendo. *Construcción Naval III*. ETSIN Universidad Politécnica de Madrid. Madrid (1960).
- [9] Gallego Valdellós, Irene.[Proyecto Fin de Carrera] *Splines cúbicos interpolantes en el diseño naval*. Universidad Politécnica de Cartagena. Cartagena (2012).
- [10] González López, Primitivo B. *Técnicas de Construcción Naval. 2ª Edición*. Universidad da Coruña. La Coruña (2005).
- [11] Kuijt, F.; van Damme, R. *Convexity preserving interpolatory subdivision schemes*. Const. Approx., 14, (1998), 609-630. 15.
- [12] Martínez García, Alfonso. *Apuntes de Sistemas de Construcción de Buques y Artefactos*. Universidad Politécnica de Cartagena. Cartagena (2012).



[13] Ortega Sanz de la Maza, Manuel. [Proyecto Fin de Carrera] *Esquemas de subdivisión preservadores de la convexidad como herramienta en el diseño del buque*. Universidad Politécnica de Cartagena. Cartagena (2008).

[14] Roncero Peña, Blanca. [Proyecto Fin de Carrera] *Splines cúbicos suavizantes en el diseño naval*. Universidad Politécnica de Cartagena. Cartagena (2013).



## Anexo: PROGRAMACIÓN EN MATLAB

---

```
function [xs,fs]=prediccion_armonica(x,f)

% Esta función calcula un nivel de subdivisión del esquema tipo PPH
con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
armónica
%
% [xs,fs]=prediccion_armonica(x,f)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Número de elementos del vector X
n=length(x);

% Separación entre puntos
h=diff(x);

% Abscisas de la escala superior
xs(1:2:2*n-1)=x(1:n);
xs(2:2:2*n-2)=(x(1:n-1)+x(2:n))/2;

% Proyectamos en la escala superior los valores de las ordenadas de
% la escala inferior

fs(1:2:2*n-1)=f(1:n);

% Subdividimos el extremo izquierdo

D2=((f(3)-f(2))/h(2)-(f(2)-f(1))/h(1))/(h(1)+h(2));
fs(2)=(f(1)+f(2))/2-1/4*h(1)^2*D2;

% Bucle en el que se hace la subdivisión en la parte central del
intervalo

for j=2:n-2

    % Cálculo de los pesos
    w1=n/(1/h(j-1)+1/h(j)+1/h(j+1));
    w2=n/(1/h(j-1)+1/h(j)+1/h(j+1));

    % Cálculo de las diferencias divididas

    D1=((f(j+1)-f(j))/h(j)-(f(j)-f(j-1))/h(j-1))/(h(j-1)+h(j));
    D2=((f(j+2)-f(j+1))/h(j+1)-(f(j+1)-f(j))/h(j))/(h(j)+h(j+1));
```



```
if D1*D2>0
    fs(2*j)=(f(j)+f(j+1))/2-1/4*h(j)^2*(D1*D2)/(w1*D2+w2*D1);
else
    fs(2*j)=(f(j)+f(j+1))/2;
end
end

% Subdividimos el extremo derecho

D1=((f(n)-f(n-1))/h(n-1)-(f(n-1)-f(n-2))/h(n-2))/(h(n-2)+h(n-1));
fs(2*n-2)=(f(n-1)+f(n))/2-1/4*h(n-1)^2*D1;

end
```



```
function [xs,fs]=prediccion_armonica_ponderada(x,f)

% Esta función calcula un nivel de subdivisión del esquema tipo PPH con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
armónica
% ponderada
%
% [xs,fs]=prediccion_armonica_ponderada(x,f)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Número de elementos del vector X
n=length(x);

% Separación entre puntos
h=diff(x);

% Abscisas de la escala superior
xs(1:2:2*n-1)=x(1:n);
xs(2:2:2*n-2)=(x(1:n-1)+x(2:n))/2;

% Proyectamos en la escala superior los valores de las ordenadas de
% la escala inferior

fs(1:2:2*n-1)=f(1:n);

% Subdividimos el extremo izquierdo

D2=((f(3)-f(2))/h(2)-(f(2)-f(1))/h(1))/(h(1)+h(2));
fs(2)=(f(1)+f(2))/2-1/4*h(1)^2*D2;

% Bucle en el que se hace la subdivisión en la parte central del
intervalo

for j=2:n-2

    % Cálculo de los pesos
    w1=(h(j)+2*h(j+1))/(2*(h(j-1)+h(j)+h(j+1)));
    w2=(h(j)+2*h(j-1))/(2*(h(j-1)+h(j)+h(j+1)));

    % Cálculo de las diferencias divididas

    D1=((f(j+1)-f(j))/h(j)-(f(j)-f(j-1))/h(j-1))/(h(j-1)+h(j));
```



```
D2=((f(j+2)-f(j+1))/h(j+1)-(f(j+1)-f(j))/h(j))/(h(j)+h(j+1));

if D1*D2>0

    fs(2*j)=(f(j)+f(j+1))/2-1/4*h(j)^2*(D1*D2)/(w1*D2+w2*D1);

else

    fs(2*j)=(f(j)+f(j+1))/2;
end
end

% Subdividimos el extremo derecho

D1=((f(n)-f(n-1))/h(n-1)-(f(n-1)-f(n-2))/h(n-2))/(h(n-2)+h(n-1));
fs(2*n-2)=(f(n-1)+f(n))/2-1/4*h(n-1)^2*D1;

end
```



```
function [xs,fs]=prediccion_armonica_metodo3(x,f)

% Esta función calcula un nivel de subdivisión del esquema tipo PPH con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
armónica
% sin reducir el orden de aproximación
%
% [xs,fs]=prediccion_armonica_metodo3(x,f)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Número de elementos del vector X
n=length(x);

% Separación entre puntos
h=diff(x);

% Abscisas de la escala superior
xs(1:2:2*n-1)=x(1:n);
xs(2:2:2*n-2)=(x(1:n-1)+x(2:n))/2;

% Proyectamos en la escala superior los valores de las ordenadas de
% la escala inferior

fs(1:2:2*n-1)=f(1:n);

% Subdividimos el extremo izquierdo

D2=((f(3)-f(2))/h(2)-(f(2)-f(1))/h(1))/(h(1)+h(2));
fs(2)=(f(1)+f(2))/2-1/4*h(1)^2*D2;

% Bucle en el que se hace la subdivisión en la parte central del
intervalo

for j=2:n-2

    % Cálculo de los pesos
    w1=(h(j)+2*h(j+1))/(2*(h(j-1)+h(j)+h(j+1)));
    w2=(h(j)+2*h(j-1))/(2*(h(j-1)+h(j)+h(j+1)));

    % Cálculo de las diferencias divididas

    D1=((f(j+1)-f(j))/h(j)-(f(j)-f(j-1))/h(j-1))/(h(j-1)+h(j));
```



```
D2=((f(j+2)-f(j+1))/h(j+1)-(f(j+1)-f(j))/h(j))/(h(j)+h(j+1));

if D1*D2>0

    fs(2*j)=(f(j)+f(j+1))/2-h(j)^2*(D1*D2*w1*w2)/(w1*D1+w2*D2);

else

    fs(2*j)=(f(j)+f(j+1))/2;
end
end

% Subdividimos el extremo derecho

D1=((f(n)-f(n-1))/h(n-1)-(f(n-1)-f(n-2))/h(n-2))/(h(n-2)+h(n-1));
fs(2*n-2)=(f(n-1)+f(n))/2-1/4*h(n-1)^2*D1;

end
```



```
function [xs,fs]=prediccion_lagrange(x,f)

% Esta función calcula un nivel de subdivisión del esquema tipo PPH con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
%
% [xs,fs]=prediccion_lagrange(x,f)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Número de elementos del vector X
n=length(x);

% Separación entre puntos
h=diff(x);

% Abscisas de la escala superior
xs(1:2:2*n-1)=x(1:n);
xs(2:2:2*n-2)=(x(1:n-1)+x(2:n))/2;

% Proyectamos en la escala superior los valores de las ordenadas de
% la escala inferior

fs(1:2:2*n-1)=f(1:n);

% Subdividimos el extremo izquierdo

D2=((f(3)-f(2))/h(2)-(f(2)-f(1))/h(1))/(h(1)+h(2));
fs(2)=(f(1)+f(2))/2-1/4*h(1)^2*D2;

% Bucle en el que se hace la subdivisión en la parte central del
intervalo

for j=2:n-2

    % Cálculo de los pesos
    w1=n/(1/h(j-1)+1/h(j)+1/h(j+1));
    w2=n/(1/h(j-1)+1/h(j)+1/h(j+1));

    % Cálculo de las diferencias divididas

    D1=((f(j+1)-f(j))/h(j)-(f(j)-f(j-1))/h(j-1))/(h(j-1)+h(j));
    D2=((f(j+2)-f(j+1))/h(j+1)-(f(j+1)-f(j))/h(j))/(h(j)+h(j+1));
```



$$fs(2*j) = (f(j) + f(j+1)) / 2 - 1/4 * h(j)^2 * (w1*D1 + w2*D2);$$

end

% Subdividimos el extremo derecho

$$D1 = ((f(n) - f(n-1)) / h(n-1) - (f(n-1) - f(n-2)) / h(n-2)) / (h(n-2) + h(n-1));$$
$$fs(2*n-2) = (f(n-1) + f(n)) / 2 - 1/4 * h(n-1)^2 * D1;$$

end



```
function [xs,fs]=prediccion_lineal(x,f)

% Esta función calcula un nivel de subdivisión del esquema tipo PPH con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
%
% [xs,fs]=prediccion_lineal(x,f)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Número de elementos del vector X
n=length(x);

% Separación entre puntos
h=diff(x);

% Abscisas de la escala superior
xs(1:2:2*n-1)=x(1:n);
xs(2:2:2*n-2)=(x(1:n-1)+x(2:n))/2;

% Proyectamos en la escala superior los valores de las ordenadas de
% la escala inferior

fs(1:2:2*n-1)=f(1:n);

% Subdividimos el extremo izquierdo

fs(2)=(f(1)+f(2))/2;

% Bucle en el que se hace la subdivisión en la parte central del
intervalo

for j=2:n-2

    fs(2*j)=(f(j)+f(j+1))/2;

end

% Subdividimos el extremo derecho

fs(2*n-2)=(f(n-1)+f(n))/2;

end
```



```
function [xs,fs]=subdivision_armonica(x,f,k)

% Esta función calcula varios niveles de subdivisión del esquema tipo PPH
con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
armónica
%
% [xs,fs]=subdivision_armonica(x,f,k)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
% k: número de veces que subdivide
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Inicializamos variables antes del bucle
xs=x;
fs=f;

% Bucle para los niveles de subdivisión

for i=1:k

    % Llama a la función que sube un nivel

    [xs,fs]=prediccion_armonica(xs,fs);

end

% Sacamos gráficamente los resultados

%figure(1)
%plot(x,f,'ro','MarkerSize',7);
%hold on
%plot(xs,fs,'b','LineWidth',1);
```



```
function [xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k)

% Esta función calcula varios niveles de subdivisión del esquema tipo PPH
con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
armónica
% ponderada
%
% [xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
% k: número de veces que subdivide
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Inicializamos variables antes del bucle
xs=x;
fs=f;

% Bucle para los niveles de subdivisión

for i=1:k

    % Llama a la función que sube un nivel

    [xs,fs]=prediccion_armonica_ponderada(xs,fs);

end

% Sacamos gráficamente los resultados

%figure(1)
%plot(x,f,'ro','MarkerSize',7);
%hold on
%plot(xs,fs,'b','LineWidth',1);
```



```
function [xs,fs]=subdivision_armonica_metodo3(x,f,k)

% Esta función calcula varios niveles de subdivisión del esquema tipo PPH
con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
armónica
% sin reducir el orden de aproximación
%
% [xs,fs]=subdivision_armonica_metodo3(x,f,k)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
% k: número de veces que subdivide
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Inicializamos variables antes del bucle
xs=x;
fs=f;

% Bucle para los niveles de subdivisión

for i=1:k

    % Llama a la función que sube un nivel

    [xs,fs]=prediccion_armonica_noreducida(xs,fs);

end

% Sacamos gráficamente los resultados

%figure(1)
%plot(x,f,'ro','MarkerSize',7);
%hold on
%plot(xs,fs,'b','LineWidth',1);
```



```
function [xs,fs]=subdivision_lagrange(x,f,k)

% Esta función calcula varios niveles de subdivisión del esquema tipo PPH
con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
%
% [xs,fs]=subdivision_lagrange(x,f,k)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
% k: número de veces que subdivide
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Inicializamos variables antes del bucle
xs=x;
fs=f;

% Bucle para los niveles de subdivisión

for i=1:k

    % Llama a la función que sube un nivel

    [xs,fs]=prediccion_lagrange(xs,fs);

end

% Sacamos gráficamente los resultados

%figure(1)
%plot(x,f,'ro','MarkerSize',7);
%hold on
%plot(xs,fs,'b','LineWidth',1);
```



```
function [xs,fs]=subdivision_lineal(x,f,k)

% Esta función calcula varios niveles de subdivisión del esquema tipo PPH
con
% puntos que no estén igualmente espaciados. Se mantiene la media
%
% [xs,fs]=subdivision_lineal(x,f,k)
%
% Variables de entrada:
% x: vector de abscisas de los puntos
% f: vectos de ordenadas de los puntos
% k: número de veces que subdivide
%
% Variable de salida:
% xs: valores correspondientes a las abscisas en la escala superior
% fs: valores correspondientes a las ordenadas en la escala superior

% Inicializamos variables antes del bucle
xs=x;
fs=f;

% Bucle para los niveles de subdivisión

for i=1:k

    % Llama a la función que sube un nivel

    [xs,fs]=prediccion_lineal(xs,fs);

end

% Sacamos gráficamente los resultados

%figure(1)
%plot(x,f,'ro','MarkerSize',7);
%hold on
%plot(xs,fs,'b','LineWidth',1);
```



```
function [x,h]=malla_irregular(a,b,hin)

% Esta función genera un mallado de puntos no igualmente espaciados
% en el intervalo [a,b] cumpliendo el requisito  $h_j < 2h_{j+1}$ ,
%  $h_{j+1} < 2h_j$ 
% para todo j
%
% [x,h]=malla_irregular(a,b,hin);
%
% Variables de entrada:
%
% a,b extremos del intervalo
% hin espaciado entre los dos primeros puntos del mallado
%
% Variables de salida
%
% x vector que contiene los puntos del mallado
% h espaciado entre los puntos del vector x
%
% Ejemplo:
% [x,h]=malla_irregular(0,1,1/50);

% definimos los dos primeros puntos del mallado
x(1)=a;
x(2)=a+hin;

% vamos definiendo el espaciado entre los puntos
h(1)=hin;

% bucle que va generando las diferentes abscisas

fallo=1;

while fallo==1

    j=2;
    while x(j)<b

        h(j)=h(j-1)/2+3*h(j-1)/2*rand(1);
        x(j+1)=x(j)+h(j);

        if x(j+1)>=b
            if b-x(j)<2*h(j-1)
                h(j)=b-x(j);
                x(j+1)=b;
                fallo=0;
                break;
            end
        end
    end
end
```



```
        % actualizamos el valor de j
        j=j+1;
    end

end

plot(x,zeros(size(x)), '+', 'MarkerSize',12); hold on;
plot(x,zeros(size(x)))
```



### Guión para la ejecución de los experimentos numéricos.

```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con esquinas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=abs(cos(3*pi/2*x));

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=abs(cos(3*pi/2*xs));
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg esquinas_armonica_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con esquinas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=abs(cos(3*pi/2*x));

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_metodo3(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=abs(cos(3*pi/2*xs));
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg esquinas_armonica_noreducida_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con esquinas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=abs(cos(3*pi/2*x));

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs, fs]=subdivision_lagrange(x, f, k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs, fs, 'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x, f, 'or', 'MarkerSize', 5);
plot(x, zeros(size(x)), '+', 'Markersize', 10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=abs(cos(3*pi/2*xs));
plot(xs, fe, 'k')

% guardamos la figura

print -djpeg esquinas_lagrange_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con esquinas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=abs(cos(3*pi/2*x));

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_lineal(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=abs(cos(3*pi/2*xs));
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg esquinas_lineal_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con esquinas
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=abs(cos(3*pi/2*x));

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=abs(cos(3*pi/2*xs));
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg esquinas_armonica_ponderada_k10.jpeg
```



```
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función de cuarto grado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=x.^4;

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% guardamos la figura

print -djpeg grado4_armonica_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función polinómica de cuarto grado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=x.^4;

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_metodo3(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=xs.^4;
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg poligrado4_armonica_noreducida_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función polinómica de cuarto grado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=x.^4;

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_lagrange(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=xs.^4;
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg poligrado4_lagrange_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función polinómica de cuarto grado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=x.^4;

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_lineal(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=xs.^4;
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg poligrado4_lineal_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función polinómica de cuarto grado
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=x.^4;

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=xs.^4;
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg poligrado4_armonica_ponderada_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con saltos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

x1=(x<=0.2).*x;
x2=( (x>0.2) & (x<=0.6) ).*x;
x3=(x>0.6).*x;
f=x1.*(x+2).^4+x2.*(sin(2*pi*x)+2)+x3.*(x.^3+3);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)));
plot(x,zeros(size(x)),'+', 'Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

x1=(xs<=0.2).*xs;
x2=( (xs>0.2) & (xs<=0.6) ).*xs;
x3=(xs>0.6).*xs;
fe=x1.*( (xs+2).^4)+x2.*(sin(2*pi*xs)+2)+x3.*(xs.^3+3);
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg saltos_armonica_k10.jpeg

% imprimimos el error cometido entre la función exacta de la que
proviene
% los datos y la aproximación por subdivisión

n2=norm(fe-fs,2)/length(fs)
n8=norm(fe-fs,inf)
% cargamos el mallado no uniforme
```



```
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con saltos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

x1=(x<=0.2).*x;
x2=( (x>0.2) & (x<=0.6) ).*x;
x3=(x>0.6).*x;
f=x1.*(x+2).^4+x2.*(sin(2*pi*x)+2)+x3.*(x.^3+3);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_metodo3(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)));
plot(x,zeros(size(x)),'+', 'Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

x1=(xs<=0.2).*xs;
x2=( (xs>0.2) & (xs<=0.6) ).*xs;
x3=(xs>0.6).*xs;
fe=x1.*( (xs+2).^4)+x2.*(sin(2*pi*xs)+2)+x3.*(xs.^3+3);
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg saltos_armonica_noreducida_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con saltos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

x1=(x<=0.2).*x;
x2=( (x>0.2) & (x<=0.6) ).*x;
x3=(x>0.6).*x;
f=x1.*(x+2).^4+x2.*(sin(2*pi*x)+2)+x3.*(x.^3+3);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_lagrange(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)));
plot(x,zeros(size(x)),'+', 'Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

x1=(xs<=0.2).*xs;
x2=( (xs>0.2) & (xs<=0.6) ).*xs;
x3=(xs>0.6).*xs;
fe=x1.*( (xs+2).^4)+x2.*(sin(2*pi*xs)+2)+x3.*(xs.^3+3);
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg saltos_lagrange_k10.jpeg

% imprimimos el error cometido entre la función exacta de la que
proviene
% los datos y la aproximación por subdivisión

n2=norm(fe-fs,2)/length(fs)
n8=norm(fe-fs,inf)
% cargamos el mallado no uniforme
```



```
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con saltos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

x1=(x<=0.2).*x;
x2=((x>0.2)&(x<=0.6)).*x;
x3=(x>0.6).*x;
f=x1.*(x+2).^4+x2.*(sin(2*pi*x)+2)+x3.*(x.^3+3);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_lineal(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)));
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con saltos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

x1=(x<=0.2).*x;
x2=( (x>0.2) & (x<=0.6) ).*x;
x3=(x>0.6).*x;
f=x1.*(x+2).^4+x2.*(sin(2*pi*x)+2)+x3.*(x.^3+3);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)));
plot(x,zeros(size(x)),'+', 'Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

x1=(xs<=0.2).*xs;
x2=( (xs>0.2) & (xs<=0.6) ).*xs;
x3=(xs>0.6).*xs;
fe=x1.*( (xs+2).^4)+x2.*(sin(2*pi*xs)+2)+x3.*(xs.^3+3);
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg saltos_armonica_ponderada_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función con saltos
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

x1=(x<=0.2).*x;
x2=( (x>0.2) & (x<=0.6) ).*x;
x3=(x>0.6).*x;
f=x1.*(x+2).^4+x2.*(sin(2*pi*x)+2)+x3.*(x.^3+3);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)));
plot(x,zeros(size(x)),'+', 'Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

x1=(xs<=0.2).*xs;
x2=( (xs>0.2) & (xs<=0.6) ).*xs;
x3=(xs>0.6).*xs;
fe=x1.*( (xs+2).^4)+x2.*(sin(2*pi*xs)+2)+x3.*(xs.^3+3);
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg saltos_armonica_ponderada_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función tipo seno
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=sin(x);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_metodo3(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=sin(xs);
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg sin_armonica_noreducida_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función tipo seno
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=sin(x);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs, fs]=subdivision_lagrange(x, f, k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs, fs, 'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x, f, 'or', 'MarkerSize', 5);
plot(x, zeros(size(x)));
plot(x, zeros(size(x)), '+', 'Markersize', 10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=sin(xs);
plot(xs, fe, 'k')

% guardamos la figura

print -djpeg sin_lagrange_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función tipo seno
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=sin(x);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_lineal(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)),'+','Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=sin(xs);
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg sin_lineal_k10.jpeg
```



```
% cargamos el mallado no uniforme
load('mallado no uniforme.mat');

% número de subdivisiones
k=10;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejecución para una función tipo seno
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f=sin(x);

% llamamos a la función de subdivisión con la media
% armónica

[xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k);

% dibujamos el resultado en una gráfica

plot(xs,fs,'b');
hold on
ymin=min(fs);
ymax=max(fs);
d=0.05*(ymax-ymin);
axis([-0.1 1.1 ymin-d ymax+d]);
plot(x,f,'or','MarkerSize',5);
plot(x,zeros(size(x)));
plot(x,zeros(size(x)),'+', 'Markersize',10);

% añadimos el dibujo de la función exacta de la que procedían los datos

fe=sin(xs);
plot(xs,fe,'k')

% guardamos la figura

print -djpeg sin_armonica_ponderada_k10.jpeg
```



### Guión para la comprobación de la suavidad de las funciones

```
% Define las funciones con las que vamos a trabajar

nombres_funciones={'tipo_seno','saltos','esquinas','poli_grado4'};

nfun=length(nombres_funciones);

% Define los niveles de subdivisión

k=[10,15,17];

nk=length(k);

% Definimos el mallado inicial no uniforme en una variable x
load('mallado no uniforme.mat');

% Abrimos ficheros donde guardar los datos de las estimaciones
% de la constante de suavidad y del exponente hölderiano
delete('constantes_suavidad_armonica.txt');
fid1=fopen('constantes_suavidad_armonica.txt','w');

for ifun=1:nfun    % bucle para cada función

    cd('./funciones test');
    met=str2func(nombres_funciones{ifun});
    f=met(x);
    cd ..

    fprintf(fid1,'función: %s \n',nombres_funciones{ifun});
    fprintf(fid1,'***** \n \n \n \n');

    for ik=1:nk

        fprintf(fid1,'Nivel de subdivisión: %d \n \n \n \n',k(ik));
        [xs,fs]=subdivision_armonica(x,f,k(ik));

        % calculamos la constante de suavidad para difirentes
        posibilidades
        % de exponente de Hölder alpha e imprimimos en un fichero
```



```
for alpha=[0.25,0.50,0.75,0.99,1,1.01,1.25:0.25:3]
    C=max(abs(diff(fs(10:length(fs)-
10),1))./(abs(diff(xs(10:length(fs)-10),1)).^alpha));
    fprintf(fid1,'Constante suavidad estimada para alpha %1.2f :
%f \n \n \n \n',alpha,C);
end
end

end

fclose(fid1);
```



```
% Define las funciones con las que vamos a trabajar

nombres_funciones={'tipo_seno','saltos','esquinas','poli_grado4'};

nfun=length(nombres_funciones);

% Define los niveles de subdivisión

k=[10,15,17];

nk=length(k);

% Definimos el mallado inicial no uniforme en una variable x
load('mallado no uniforme.mat');

% Abrimos ficheros donde guardar los datos de las estimaciones
% de la constante de suavidad y del exponente hölderiano
delete('constantes_suavidad_ponderada.txt');
fid1=fopen('constantes_suavidad_ponderada.txt','w');

    for ifun=1:nfun    % bucle para cada función

        cd('./funciones test');
        met=str2func(nombres_funciones{ifun});
        f=met(x);
        cd ..

        fprintf(fid1,'función: %s \n',nombres_funciones{ifun});
        fprintf(fid1,'***** \n \n \n \n');

    for ik=1:nk

        fprintf(fid1,'Nivel de subdivisión: %d \n \n \n \n',k(ik));
        [xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k(ik));

        % calculamos la constante de suavidad para difirentes
posibilidades
        % de exponente de Hölder alpha e imprimimos en un fichero

        for alpha=[0.25,0.50,0.75,0.99,1,1.01,1.25:0.25:3]
            C=max(abs(diff(fs(10:length(fs)-
10),1))./(abs(diff(xs(10:length(fs)-10),1)).^alpha));
```



```
fprintf(fid1,'Constante suavidad estimada para alpha %1.2f :  
%f \n \n \n \n',alpha,C);  
  
    end  
end  
  
end  
  
fclose(fid1);
```



```
% Define las funciones con las que vamos a trabajar

nombres_funciones={'tipo_seno','saltos','esquinas','poli_grado4'};

nfun=length(nombres_funciones);

% Define los niveles de subdivisión

k=[10,15,17];

nk=length(k);

% Definimos el mallado inicial no uniforme en una variable x
load('mallado no uniforme.mat');

% Abrimos ficheros donde guardar los datos de las estimaciones
% de la constante de suavidad y del exponente hölderiano
delete('constantes_suavidad_armonica_noreducida.txt');
fid1=fopen('constantes_suavidad_armonica_noreducida.txt','w');

    for ifun=1:nfun    % bucle para cada función

        cd('./funciones test');
        met=str2func(nombres_funciones{ifun});
        f=met(x);
        cd ..

        fprintf(fid1,'función: %s \n',nombres_funciones{ifun});
        fprintf(fid1,'***** \n \n \n \n');

    for ik=1:nk

        fprintf(fid1,'Nivel de subdivisión: %d \n \n \n \n',k(ik));
        [xs,fs]=subdivision_armonica_noreducida(x,f,k(ik));

        % calculamos la constante de suavidad para difirentes
posibilidades
        % de exponente de Hölder alpha e imprimimos en un fichero

        for alpha=[0.25,0.50,0.75,0.99,1,1.01,1.25:0.25:3]
            C=max(abs(diff(fs(10:length(fs))-
10),1))./(abs(diff(xs(10:length(fs))-10),1).^alpha);
```



```
fprintf(fid1,'Constante suavidad estimada para alpha %1.2f :  
%f \n \n \n \n',alpha,C);  
  
    end  
end  
  
end  
  
fclose(fid1);
```



### Guión para comprobar la estabilidad de las funciones

```
% Define los archivos que contienen los diferentes ruidos

% ficheros_ruido={'ruido_m10^-1_n29.mat','ruido_m10^-
3_n29.mat','ruido_m10^-1_n29.mat'};
ficheros_ruido={'ruido_m10^-1_n29.mat'};

nr=length(ficheros_ruido);

% Define las funciones con las que vamos a trabajar

%nombres_funciones={'tipo_seno','saltos','esquinas','poli_grado4'};
nombres_funciones={'prueba'};

nfun=length(nombres_funciones);

% Define los niveles de subdivisión

%k=[5,10,15];
k=[5];

nk=length(k);

% Definimos el mallado inicial no uniforme en una variable x
load('mallado no uniforme.mat');

% Abrimos un fichero donde guardar los datos de las estimaciones
% de la constante de estabilidad

fid=fopen('constantes_estabilidad_armonica.txt','a');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Con norma 2

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for ir=1:nr % bucle para cada tipo de ruido

    load(ficheros_ruido{ir}); % carga el ruido correspondiente
```



```
fprintf(fid, 'ruido: %s\n', ficheros_ruido{ir});

for ifun=1:nfun % bucle para cada función

    cd('./funciones test');
    met=str2func(nombres_funciones{ifun});
    f=met(x);
    cd '..

    fprintf(fid, 'función: %s\n', nombres_funciones{ifun});

    % modificamos los datos iniciales de la función añadiendo ruido
    ftilde=f+r;

    % calculamos la norma 2 del ruido
    n2f=norm(r,2)/length(x);

    fprintf(fid, 'norma 2 inicial: %f\n', n2f);

    for ik=1:nk
        [xs, fs]=subdivision_armonica(x, f, k(ik));
        [xs, fstilde]=subdivision_armonica(x, ftilde, k(ik));

        % medimos la diferencia entre fs y fstilde
        n2fk=norm(fs-fstilde,2)/length(xs);

        fprintf(fid, 'norma 2 final: %f\n', n2fk);

        % calculamos la constante de estabilidad e imprimimos en un
        % fichero

        C=n2fk/n2f;
        fprintf(fid, 'Constante de estabilidad estimada:
%f\n\n\n\n', C);

    end
end

clear r;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Con norma infinito

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```



```
% Define los archivos que contienen los diferentes ruidos

ficheros_ruido={'ruido_m10^-1_n29.mat','ruido_m10^-
3_n29.mat','ruido_m10^-6_n29.mat','ruido_m10^-8_n29.mat'};

nr=length(ficheros_ruido);

% Define las funciones con las que vamos a trabajar
nombres_funciones={'tipo_seno','saltos','esquinas','poli_grado4'};

nfun=length(nombres_funciones);

% Define los niveles de subdivisión
k=[1,2,5,10,15,17];

nk=length(k);

% Definimos el mallado inicial no uniforme en una variable x
load('mallado no uniforme.mat');

% Abrimos ficheros donde guardar los datos de las estimaciones
% de la constante de estabilidad
delete('constantes_estabilidad_armonica_norma2.txt');
delete('constantes_estabilidad_armonica_norma8.txt');
fid1=fopen('constantes_estabilidad_armonica_norma2.txt','w');
fid2=fopen('constantes_estabilidad_armonica_norma8.txt','w');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Con norma 2 y con norma infinito

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for ir=1:nr % bucle para cada tipo de ruido

    load(ficheros_ruido{ir}); % carga el ruido correspondiente
```



```
fprintf(fid1, 'ruido: %s \n', ficheros_ruido{ir});
fprintf(fid2, 'ruido: %s \n', ficheros_ruido{ir});

for ifun=1:nfun % bucle para cada función

    cd('./funciones test');
    met=str2func(nombres_funciones{ifun});
    f=met(x);
    cd ..

    fprintf(fid1, 'función: %s \n', nombres_funciones{ifun});
    fprintf(fid2, 'función: %s \n', nombres_funciones{ifun});

    % modificamos los datos iniciales de la función añadiendo ruido
    ftilde=f+r;

    % calculamos la norma 2 del ruido
    n2f=norm(r,2)/length(x);
    fprintf(fid1, 'norma 2 inicial: %2.16f \n', n2f);

    % calculamos la norma infinito del ruido
    n8f=norm(r,inf);
    fprintf(fid2, 'norma infinito inicial: %2.16f \n', n8f);

    fprintf(fid1, '***** \n \n \n \n');
    fprintf(fid2, '***** \n \n \n \n');

for ik=1:nk

    [xs, fs]=subdivision_armonica(x, f, k(ik));
    [xs, fstilde]=subdivision_armonica(x, ftilde, k(ik));

    % medimos la diferencia entre fs y fstilde en norma 2
    n2fk=norm(fs-fstilde,2)/length(xs);
    fprintf(fid1, 'niveles de subdivisión: %d \n', k(ik));
    fprintf(fid1, 'norma 2 final: %2.16f \n', n2fk);

    % medimos la diferencia entre fs y fstilde en norma infinito
    n8fk=norm(fs-fstilde,inf);
    fprintf(fid2, 'niveles de subdivisión: %d \n', k(ik));
    fprintf(fid2, 'norma infinito final: %2.16f \n', n8fk);

    % calculamos la constante de estabilidad e imprimimos en un
    % fichero

    C2=n2fk/n2f;
    fprintf(fid1, 'Constante de estabilidad estimada en norma 2:
%2.16f \n \n \n \n', C2);
```



```
C8=n8fk/n8f;  
fprintf(fid2,'Constante de estabilidad estimada en norma  
infinito: %2.16f \n \n \n \n',C8);  
  
    end  
end  
  
clear r;  
end  
  
fclose(fid1);  
  
fclose(fid2);
```



```
% Define los archivos que contienen los diferentes ruidos

ficheros_ruido={'ruido_m10^-1_n29.mat','ruido_m10^-
3_n29.mat','ruido_m10^-6_n29.mat','ruido_m10^-8_n29.mat'};

nr=length(ficheros_ruido);

% Define las funciones con las que vamos a trabajar

nombres_funciones={'tipo_seno','saltos','esquinas','poli_grado4'};

nfun=length(nombres_funciones);

% Define los niveles de subdivisión

k=[1,2,5,10,15,17];

nk=length(k);

% Definimos el mallado inicial no uniforme en una variable x
load('mallado no uniforme.mat');

% Abrimos ficheros donde guardar los datos de las estimaciones
% de la constante de estabilidad
delete('constantes_estabilidad_ponderada_norma2.txt');
delete('constantes_estabilidad_ponderada_norma8.txt');
fid1=fopen('constantes_estabilidad_ponderada_norma2.txt','w');
fid2=fopen('constantes_estabilidad_ponderada_norma8.txt','w');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Con norma 2 y con norma infinito

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for ir=1:nr % bucle para cada tipo de ruido

    load(ficheros_ruido{ir}); % carga el ruido correspondiente

    fprintf(fid1,'ruido: %s \n',ficheros_ruido{ir});
    fprintf(fid2,'ruido: %s \n',ficheros_ruido{ir});
```



```
for ifun=1:nfun    % bucle para cada función

    cd('./funciones test');
    met=str2func(nombres_funciones{ifun});
    f=met(x);
    cd ..

    fprintf(fid1,'función: %s \n',nombres_funciones{ifun});
    fprintf(fid2,'función: %s \n',nombres_funciones{ifun});

    % modificamos los datos iniciales de la función añadiendo ruido
    ftilde=f+r;

    % calculamos la norma 2 del ruido
    n2f=norm(r,2)/length(x);
    fprintf(fid1,'norma 2 inicial: %2.16f \n',n2f);

    % calculamos la norma infinito del ruido
    n8f=norm(r,inf);
    fprintf(fid2,'norma infinito inicial: %2.16f \n',n8f);

    fprintf(fid1,'***** \n \n \n \n');
    fprintf(fid2,'***** \n \n \n \n');

for ik=1:nk

    [xs,fs]=subdivision_armonica_ponderada(x,f,k(ik));
    [xs,fstilde]=subdivision_armonica_ponderada(x,ftilde,k(ik));

    % medimos la diferencia entre fs y fstilde en norma 2
    n2fk=norm(fs-fstilde,2)/length(xs);
    fprintf(fid1,'niveles de subdivisión: %d \n',k(ik));
    fprintf(fid1,'norma 2 final: %2.16f \n',n2fk);

    % medimos la diferencia entre fs y fstilde en norma infinito
    n8fk=norm(fs-fstilde,inf);
    fprintf(fid2,'niveles de subdivisión: %d \n',k(ik));
    fprintf(fid2,'norma infinito final: %2.16f \n',n8fk);

    % calculamos la constante de estabilidad e imprimimos en un
    % fichero

    C2=n2fk/n2f;
    fprintf(fid1,'Constante de estabilidad estimada en norma 2:
    %2.16f \n \n \n \n',C2);
    C8=n8fk/n8f;
```



```
fprintf(fid2, 'Constante de estabilidad estimada en norma  
infinito: %2.16f \n \n \n \n', C8);  
  
    end  
end  
  
clear r;  
end  
  
fclose(fid1);  
  
fclose(fid2);
```



```
% Define los archivos que contienen los diferentes ruidos

ficheros_ruido={'ruido_m10^-1_n29.mat','ruido_m10^-
3_n29.mat','ruido_m10^-6_n29.mat','ruido_m10^-8_n29.mat'};

nr=length(ficheros_ruido);

% Define las funciones con las que vamos a trabajar

nombres_funciones={'tipo_seno','saltos','esquinas','poli_grado4'};

nfun=length(nombres_funciones);

% Define los niveles de subdivisión

k=[1,2,5,10,15,17];

nk=length(k);

% Definimos el mallado inicial no uniforme en una variable x
load('mallado no uniforme.mat');

% Abrimos ficheros donde guardar los datos de las estimaciones
% de la constante de estabilidad
delete('constantes_estabilidad_armonica_noreducida_norma2.txt');
delete('constantes_estabilidad_armonica_noreducida_norma8.txt');
fid1=fopen('constantes_estabilidad_armonica_noreducida_norma2.txt','w');
fid2=fopen('constantes_estabilidad_armonica_noreducida_norma8.txt','w');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Con norma 2 y con norma infinito

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for ir=1:nr % bucle para cada tipo de ruido

    load(ficheros_ruido{ir}); % carga el ruido correspondiente

    fprintf(fid1,'ruido: %s \n',ficheros_ruido{ir});
    fprintf(fid2,'ruido: %s \n',ficheros_ruido{ir});
```



```
for ifun=1:nfun % bucle para cada función

    cd('./funciones test');
    met=str2func(nombres_funciones{ifun});
    f=met(x);
    cd ..

    fprintf(fid1,'función: %s \n',nombres_funciones{ifun});
    fprintf(fid2,'función: %s \n',nombres_funciones{ifun});

    % modificamos los datos iniciales de la función añadiendo ruido
    ftilde=f+r;

    % calculamos la norma 2 del ruido
    n2f=norm(r,2)/length(x);
    fprintf(fid1,'norma 2 inicial: %2.16f \n',n2f);

    % calculamos la norma infinito del ruido
    n8f=norm(r,inf);
    fprintf(fid2,'norma infinito inicial: %2.16f \n',n8f);

    fprintf(fid1,'***** \n \n \n \n');
    fprintf(fid2,'***** \n \n \n \n');

for ik=1:nk

    [xs,fs]=subdivision_armonica_noreducida(x,f,k(ik));
    [xs,fstilde]=subdivision_armonica_noreducida(x,ftilde,k(ik));

    % medimos la diferencia entre fs y fstilde en norma 2
    n2fk=norm(fs-fstilde,2)/length(xs);
    fprintf(fid1,'niveles de subdivisión: %d \n',k(ik));
    fprintf(fid1,'norma 2 final: %2.16f \n',n2fk);

    % medimos la diferencia entre fs y fstilde en norma infinito
    n8fk=norm(fs-fstilde,inf);
    fprintf(fid2,'niveles de subdivisión: %d \n',k(ik));
    fprintf(fid2,'norma infinito final: %2.16f \n',n8fk);

    % calculamos la constante de estabilidad e imprimimos en un
    % fichero

    C2=n2fk/n2f;
    fprintf(fid1,'Constante de estabilidad estimada en norma 2:
    %2.16f \n \n \n \n',C2);
    C8=n8fk/n8f;
```



```
fprintf(fid2, 'Constante de estabilidad estimada en norma  
infinito: %2.16f \n \n \n \n', C8);  
  
    end  
end  
  
clear r;  
end  
  
fclose(fid1);  
  
fclose(fid2);
```