



SECCIÓN DE POSTGRADO Y TÍTULOS PROPIOS
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

Proyecto Fin de Periodo Formativo Doctorado

ESQUEMAS DE MULTIRRESOLUCIÓN NO LINEALES APLICADOS A SUPER-RESOLUCIÓN

Autor/a: Concepción Solano Lorente
Director/a: Sergio Amat Plata
Co-director/a: Juan Ruiz Álvarez

Cartagena, Octubre de 2014



Índice general

Resumen	4
Abstract	4
1. Capítulo 1. Introducción.....	5
1.1. Objetivos del trabajo	5
1.2. Introducción a la multirresolución de imágenes	5
2. Capítulo 2. Multirresolución y sus aplicaciones.....	8
2.1. Relación entre los esquemas de Multirresolución y los esquemas de subdivisión (ZOOM).....	12
2.2. Compresión de Imágenes	12
2.3. Denoising.....	14
2.4. Ejemplos de esquemas de subdivisión mediante Multirresolución no lineal	17
2.4.1. Representación de esquemas no lineales de Multirresolución basados en la interpolación de Lagrange.....	17
2.4.2. Estudio de la eliminación de oscilaciones de Gibbs cerca de las discontinuidades en esquemas de subdivisión mediante Multirresolución no lineal	21
2.4.3. Ejemplo de Multirresolución por valores puntuales. PPH cuatro puntos ...	22
3. Capítulo 3. Super-resolución.....	29
3.1. Definición y aplicaciones	29
3.2. Sistema de Registro de Imágenes	31
3.3. Métodos de Super-resolución.....	32
3.3.1. Métodos de interpolación no uniforme.....	34
3.3.2. Métodos en el dominio de frecuencia	35
3.3.3. Métodos de reconstrucción regularizada	36
3.3.4. Métodos de proyección en conjuntos convexos (POCS)	36
3.4. Super-resolución aplicada a una secuencia de vídeo	37
4. Capítulo 4. Aplicación de algoritmos de multirresolución no lineales para la super-resolución.....	38
4.1. Algoritmo utilizado	38
4.2. Experimentos numéricos.....	40
Conclusiones y perspectivas	43
Referencias Bibliográficas	45



Índice de figuras

Capítulo 2. Multirresolución y sus aplicaciones

Figura 1. Relaciones existentes entre los operadores	9
Figura 2. Imagen original. A la izquierda imagen geométrica, y derecha imagen real	14
Figura 3. Modificación no lineal de los datos utilizando proyección	19
Figura 4. Truncación no lineal de orden cero	20

Capítulo 3. Super-resolución

Figura 5. Desplazamiento entre las imágenes de baja resolución	29
Figura 6. Resultados obtenidos del algoritmo de optimización	30
Figura 7. Super-resolución en imágenes de MRI	31
Figura 8. Sistema de adquisición de imagen común	32
Figura 9. Esquema para la super-resolución	34
Figura 10. Esquema de interpolación no uniforme	35
Figura 11. Relación de aliasing entre las imágenes HR y LR	36

Capítulo 4. Aplicación de algoritmos de multirresolución no lineales para la super-resolución

Figura 12. Mallado a alta resolución donde se han colocado las dos imágenes a baja resolución (representadas por \circ y \bullet) separadas por 0.5 píxeles en dirección diagonal. Los puntos donde no disponemos de información a partir de las dos imágenes de baja resolución se han representado por \cdot	39
Figura 13. Izquierda arriba, imagen a baja resolución 1. Derecha arriba, imagen a baja resolución 2. Izquierda abajo, imagen a alta resolución original. Derecha abajo, imagen a alta resolución reconstruida	41
Figura 14. Izquierda pirámide de multirresolución de la imagen a baja resolución 1. Derecha, pirámide de multirresolución de la imagen a baja resolución 2. Podemos ver que sólo hemos utilizado un nivel de resolución para obtener la imagen a alta resolución .	41
Figura 15. Izquierda arriba, imagen a baja resolución 1. Derecha arriba, imagen a baja resolución 2. Izquierda abajo, imagen a alta resolución original. Derecha abajo, imagen a alta resolución reconstruida	42
Figura 16. Izquierda pirámide de multirresolución de la imagen a baja resolución 1. Derecha, pirámide de multirresolución de la imagen a baja resolución 2. Podemos ver que sólo hemos utilizado un nivel de resolución para obtener la imagen a alta resolución .	42



Resumen

Este trabajo describe el estudio de esquemas de multirresolución no lineales y su posible aplicación al aumento de la resolución de una imagen usando super-resolución. Esta técnica se basa en aumentar la resolución espacial de un conjunto de datos (en nuestro caso, una imagen), partiendo de dos conjuntos de datos de menor resolución (en nuestro caso, dos imágenes de tamaño inferior), de las que sabemos que han sido registradas con un desplazamiento de tamaño inferior a un píxel, dato que conocemos con precisión.

En primer lugar, se describen y analizan diferentes esquemas de multirresolución no lineales, haciendo especialmente hincapié en la multirresolución de Harten. Posteriormente, se define la técnica de super-resolución, detallando su fundamentación, su metodología, y sus principales aplicaciones.

Finalmente, se desarrolla la aplicación de algoritmos de multirresolución de Harten como técnica para conseguir el aumento de resolución de una imagen.

Palabras clave. Imágenes, resolución, multirresolución, super-resolución, esquemas de subdivisión, no lineal, discretización.

Abstract

This paper describes the study of nonlinear multiresolution schemes and their possible application to the increase of the resolution of an image using super-resolution. This technique is based on increasing the spatial resolution of a dataset (in our case, an image), starting from two datasets of low resolution (in our case, two images of inferior size), of which we know they have been registered with a displacement of a smaller size than one pixel, data that we know precisely.

In the first place, different nonlinear multiresolution schemes are described and analyzed, with particular emphasis on the Harten multiresolution. Subsequently, the super-resolution technique is defined, detailing its rationale, its methodology, and their main applications.

Finally, the application of Harten multiresolution algorithms is developed as a technique to achieve the increase of resolution of an image.

Keywords. Images, resolution, multiresolution, super-resolution, subdivision schemes, nonlinear, discretization.



Capítulo 1.

Introducción

1.1 Objetivos

Los objetivos fundamentales propuestos para este trabajo Fin de Periodo Formativo han sido, por una lado, comenzar el estudio de esquemas de multirresolución no lineales, y por otro lado, investigar su posible aplicación para aumentar la resolución de un conjunto de imágenes empleando super-resolución.

Dentro de estos objetivos generales, los objetivos específicos planteados, han sido los siguientes:

- Evaluar el proceso de registro de imagen, su problemática, y describir las principales técnicas de reconstrucción de una función a partir de un conjunto de valores discretos, mediante esquemas de subdivisión y multirresolución no lineales.
- Analizar detalladamente el método de multirresolución no lineal de Harten, empleado posteriormente como algoritmo para obtener super-resolución.
- Definir el concepto de super-resolución, describiendo su fundamentación, su metodología y sus principales aplicaciones.
- Mostrar el aumento de resolución de una imagen, partiendo de dos imágenes de tamaño inferior, y aplicando para ello, algoritmos de super-resolución usando producto tensor y valores puntuales.

1.2 Introducción a la multirresolución de imágenes

En los últimos años, las investigaciones realizadas en el campo del tratamiento de señales, y más en particular, en problemas de compresión, eliminación de ruido, reconocimiento de patrones y otros, han hecho que dicho campo se convierta en uno de los más estudiados en el área de la matemática aplicada.

Un problema común en la teoría de aproximación, es la reconstrucción de una función a partir de un conjunto de datos discretos que dan información sobre la función misma. Esta información por lo general viene dada como valores puntuales o medias en celda de la función sobre un conjunto finito de puntos o celdas, respectivamente. La función entonces es aproximada por un interpolante, es decir, por otra función cuyos valores puntuales o medias en celda coinciden con los de la función original.



Este interpolante puede ser construido por interpolación lineal. En este caso la exactitud de la aproximación cerca de una singularidad está limitada y depende del orden de la singularidad, de modo que si construimos el polinomio interpolador basándonos en un conjunto de puntos (stencil) que cruzan la singularidad, obtendremos una aproximación pobre.

En la última década, varios intentos para mejorar las propiedades de los esquemas lineales de subdivisión, han dado lugar a esquemas de subdivisión no lineales, que estudian el comportamiento de la función en las discontinuidades. Estos esquemas dependen de los datos, por lo que el único inconveniente es considerar la estabilidad, que puede verse afectada por las perturbaciones realizadas en los datos.

Para los esquemas de subdivisión no lineales, pocos resultados generales de convergencia o estabilidad están disponibles; ver por ejemplo [4, 21, 22, 23, 27, 28, 39].

Comenzando con un conjunto discreto de datos, los esquemas de subdivisión generan nuevos datos siguiendo un conjunto de reglas bien establecidas, y consiguiendo así, otro nuevo conjunto de datos más denso que el anterior. Este proceso puede repetirse varias veces con el fin de refinar la secuencia de datos original.

Una manera de obtener esquemas de subdivisión surge de considerar los “operadores de discretización D_k ”, (siempre un operador lineal) que obtienen información discreta a un nivel particular de resolución k a partir de una señal continua, es decir, actúan entre un cierto espacio funcional F y un nivel discreto de resolución V^k (mayor k indica mayor resolución), y los “operadores de reconstrucción R_k , (pueden ser no lineales), que conectan los diferentes niveles discretos de resolución con el espacio funcional, es decir, producen una aproximación a una señal a partir de sus valores discretos. El único inconveniente, es que entre ellos se debe satisfacer el requerimiento de consistencia siguiente: $D_k R_k = I_{V^k}$, siendo I , la identidad.

Así pues, un esquema de subdivisión S puede definirse entonces como una aplicación $S: V^k \rightarrow V^{k+1}$ tal que $Sf^k = D_{k+1} R_k f^k$. Al operador $P_k^{k+1} := D_{k+1} R_k$, se le denota operador predicción y conecta dos escalas sucesivas de resolución [44].

Algunos ejemplos de esquemas de subdivisión, son la familia de esquemas basada en la interpolación de Lagrange, la familia de esquemas de subdivisión spline relacionados con los espacios spline [16], el algoritmo Chaikin [17] que es otro ejemplo de un esquema de subdivisión spline que converge hacia funciones C^2 , la interpolación ENO, mejorada por las interpolaciones WENO (weighted ENO), así como la interpolación PPH. Algunas de ellas son descritas y analizadas en el capítulo 2.

En la construcción de los esquemas de subdivisión, la aplicación de las reglas que nos permiten crear a partir de un punto fijo inicial de puntos, otro conjunto más denso, nos permite también realizar varias etapas de zoom, y así sucesivas ampliaciones de la



imagen. Los esquemas de subdivisión pueden interpretarse a partir del operador de predicción que aparece en la multirresolución de Harten.

La multirresolución de Harten [7, 36, 37], es una herramienta muy eficaz para el procesamiento de imágenes. El objetivo de la multirresolución es obtener una reordenación multiescala de la información contenida en un conjunto de datos discretos. Para realizar la transformación entre los distintos niveles de multirresolución, utilizamos los operadores de decimación y predicción. El operador de predicción es el que nos sirve para llevar a cabo el zoom, ya que se encarga de aumentar la resolución del conjunto de datos iniciales. Los operadores de predicción y de decimación están íntimamente relacionados con los operadores de reconstrucción y de discretización, los cuales conectan los diferentes niveles discretos de resolución con un espacio funcional adecuado, el cual depende de las aplicaciones. La característica que hace más atractiva la multirresolución de Harten con respecto a otras técnicas, es el hecho de permitir de manera sencilla la introducción de no linealidad en los esquemas.

La técnica de multirresolución de Harten, es la que vamos a emplear posteriormente como técnica para obtener los algoritmos de super-resolución.

Las técnicas multiescala o de multirresolución, son ampliamente utilizadas en la actualidad en campos tales como la matemática aplicada, la industria o el diseño industrial, y en aplicaciones como la eliminación de ruido, la compresión de datos, la interpolación, etc. Dentro de dichas técnicas, un campo que se encuentra actualmente en expansión es la super-resolución de imágenes, ya que con el paso del tiempo, es cada vez mayor la demanda de imágenes de alta resolución.

En diversos campos como la medicina, la seguridad o el mundo del ocio, aparece la necesidad de trabajar con imágenes de alta calidad. Pero no siempre se dispone de imágenes de alta resolución, debido a una serie de factores que disminuyen la calidad de las imágenes, por ejemplo, la distorsión del sistema óptico de la cámara, el movimiento o el ruido del entorno.

Por estas razones, desde que se empezó a trabajar con imágenes fotográficas, se han investigado métodos y procedimientos para aumentar la calidad de las imágenes a partir de imágenes de baja calidad. Esta técnica se llama super-resolución, y consiste en la alineación de secuencias de fotogramas o de vídeos que permitan crear una imagen de alta resolución o vídeo, a partir de varias imágenes o vídeos de baja resolución de la misma escena.

Concretamente en este trabajo, en el capítulo 4, la técnica de super-resolución aplicada, se basa en aumentar la resolución espacial de una imagen partiendo de dos imágenes de menor resolución espacial que han sido registradas con un desplazamiento de tamaño inferior a un píxel.



Capítulo 2.

Multirresolución y algunas aplicaciones

El objetivo de la multirresolución es obtener una reordenación multiescala de la información contenida en un conjunto de datos discretos a una cierta resolución.

Para ello Harten en [29, 31] formula una multirresolución de datos utilizando ideas de tres campos diferentes: teoría de funciones wavelets, solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales (PDE) y esquemas de subdivisión. Así, reformula el problema dándole un enfoque de aproximación numérica.

La información contenida en el conjunto de datos discretos, puede ser el resultado de discretizar una función, denotada f , y es un elemento perteneciente a un espacio, V^k , en el que k indica el nivel de resolución. Un mayor valor de k indica una mayor resolución. Para realizar la transición entre distintos niveles de resolución se utilizan dos operadores llamados decimación y predicción.

El operador decimación, que debe ser lineal y sobreyectivo, proporciona información discreta a un nivel de resolución $k - 1$ a partir de la información contenida en el nivel k :

$$D_k^{k-1}: V^k \rightarrow V^{k-1}$$

Es decir, es el diseño de un operador D_k^{k-1} que pasa de una escala más “fina” a una escala más “gruesa”, es decir, que contiene menos puntos y por tanto menos información sobre la función real [9, 10].

Por el contrario, el operador predicción actúa en sentido opuesto, dando una aproximación a la información discreta en el nivel k a partir de la información contenida en el nivel $k - 1$:

$$P_{k-1}^k: V^{k-1} \rightarrow V^k$$

Además, al operador predicción no se le exige que sea lineal.

Los datos discretos se obtienen a partir de la discretización de una función f , para lo cual existen distintos operadores. Dependiendo del operador discretización utilizado, la secuencia de datos f^k que resulta es diferente. El objetivo del enfoque propuesto por Harten es la construcción de esquemas de multirresolución adaptados a cada proceso de discretización. Esto se consigue definiendo un operador reconstrucción apropiado.

Estos operadores, discretización y reconstrucción, son los elementos a partir de los cuales se construyen los operadores decimación y predicción del esquema de multirresolución.

Formalmente, sea F un espacio de funciones:

$$F \subset \{f | f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}\}$$

El operador discretización asigna a cada elemento de este espacio, $f \in F$ una secuencia f^k de datos discretos perteneciente al espacio V^k . De este modo se define el operador discretización: $D_k: F \rightarrow V^k$, que ha de ser lineal y sobreyectivo y que a cada $f \in F$ le asocia: $f^k = D_k(f)$

La reconstrucción opera en sentido inverso, tomando una secuencia de datos discretos para reconstruir, a partir de la información proporcionada por dichos datos, la función de la que provienen: $R_k: V^k \rightarrow F$

La principal novedad introducida por Harten, consiste en que a este operador reconstrucción no se le exige que sea lineal. Además, la reconstrucción y discretización de los operadores decimación y predicción, actúa entre los niveles continuos y discretos [11, 31].

Por motivos de consistencia, se requiere que los operadores discretización y reconstrucción satisfagan la siguiente condición:

$$D_k R_k f^k = f^k, \quad \forall f^k \in V^k$$

Expresado de otro modo: $D_k R_k = I_{V^k}$, siendo I , la identidad.

Es decir, si tomamos la información reconstruida a partir de unos datos discretos con una cierta resolución y la discretizamos a ese mismo nivel de resolución, la información discreta obtenida coincide con la original, (ver figura 1.).

Según estas relaciones, el operador decimación se define del siguiente modo:

$$D_k^{k-1} := D_{k-1} R_k$$

De forma similar, el operador predicción se construye según la expresión:

$$P_{k-1}^k := D_k R_{k-1}$$

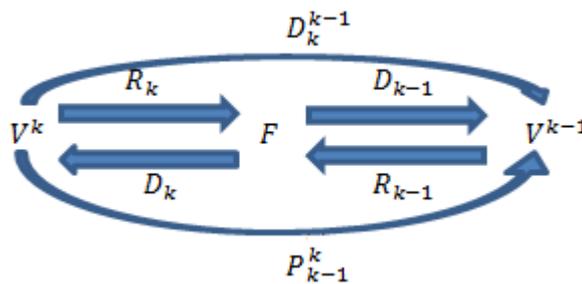


Figura 1. Relaciones existentes entre los operadores.

A partir de estas definiciones se obtiene la siguiente relación de consistencia para los operadores decimación y predicción:

$$D_k^{k-1} P_{k-1}^k = D_{k-1} R_k D_k R_{k-1} = D_{k-1} R_{k-1} = I_{V^{k-1}}$$

Esta última relación, significa, que cuando utilizamos estos operadores no inventamos información, es decir, si decimamos la información obtenida a partir de la



predicción realizada sobre una información con resolución dada por V^{k-1} , obtenemos exactamente la misma información de partida, sin introducir ningún elemento nuevo.

Consideremos ahora f^k , la información discreta en el nivel de resolución k .

Si aplicamos el operador decimación sobre f^k obtenemos f^{k-1} , es decir, la información contenida en el nivel de resolución $k - 1$:

$$f^{k-1} = D_k^{k-1} f^k$$

En este caso, podemos interpretar que $P_{k-1}^k f^{k-1}$ es una aproximación a f^k , con un error dado:

$$e^k := (I_{V^k} - P_{k-1}^k D_k^{k-1}) f^k := Q_k f^k \in V^k$$

De esta forma podemos representar la información contenida en f^k en la forma ya descrita, y recíprocamente, conociendo f^{k-1} y e^k se puede calcular f^k mediante la expresión:

$$P_{k-1}^k f^{k-1} + e^k = f^k.$$

El problema es que haciendo esto incluimos información redundante, ya que, si suponemos que V^k es un espacio de dimensión finita (como lo es habitualmente en la práctica), $\dim V^k = N_k$, tenemos por un lado f^k , que contiene la información codificada en N_k elementos, mientras que $\{f^{k-1}, e^k\}$ contiene la misma información codificada en $N_{k-1} + N_k$ elementos. Esta información redundante puede ser eliminada.

Para ello definimos un operador G_k que asocia a cada elemento $e^k \in N(D_k^{k-1})$ su correspondiente conjunto de coeficientes $\{d_j^k\}$, estableciendo la siguiente equivalencia $f^k \equiv \{f^{k-1}, d^k\}$, mediante las relaciones:

$$\begin{aligned} f^{k-1} &= D_k^{k-1} f^k \\ d^k &= G_k (I - D_{k-1}^k D_k^{k-1}) f^k \end{aligned}$$

Decimos entonces que los coeficientes $\{d_j^k\}$ contienen la información no redundante del error de predicción, y son llamados detalles.

Iterando este procedimiento en cada nivel de resolución, se consigue la descomposición multiescala que se muestra a continuación:

$$f^L \equiv \{f^0, d^L, \dots, d^1\}$$

Así pues, dado f^L , siendo L un nivel de resolución, se define una representación multirresolución de f^L , como cualquier secuencia del tipo $\{f^0, d^0, \dots, d^{L-1}\}$, donde f^j es una aproximación de f^L en resolución $j < L$, siendo d^j los detalles necesarios para recuperar f^{j+1} a partir de f^j .

La pareja $\{f^j, d^j\}$ contiene la misma información que f^{j+1} y por lo tanto, la misma condición se cumple con respecto a la secuencia $\{f^0, d^0, \dots, d^{L-1}\}$ y a f^L , [5].

Por tanto para resumir los algoritmos para la transformación directa e inversa de multirresolución son los siguientes:



- Directa:

$$f^L \rightarrow Mf^L = \{f^0, d^1, \dots, d^L\} \begin{cases} D_0 & k = L, \dots, 1 \\ f^{k-1} = D_k^{k-1} f^k \\ d^k = G_k(f^k - P_{k-1}^k f^{k-1}) \end{cases} \quad (2.1)$$

- Inversa:

$$Mf^L \rightarrow M^{-1}Mf^L \begin{cases} D_0 & k = L, \dots, 1 \\ f^k = P_{k-1}^k f^{k-1} + E_k d^k \end{cases} \quad (2.2)$$

El paso fundamental en la construcción de un esquema de multirresolución de Harten, es la definición de un operador reconstrucción apropiado para la discretización que se está considerando.

En cuanto a sus aplicaciones, las representaciones de multirresolución de datos discretos son herramientas útiles en varias áreas de aplicación como la compresión de imágenes, el diseño asistido por ordenador geométrico (CAGD) o métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parciales. En estas aplicaciones, es interesante el poder obtener la aproximación de los datos de entrada con alta precisión utilizando un conjunto muy pequeño de coeficientes [1].

Además, la estabilidad de estas representaciones en presencia de perturbaciones o discontinuidades en los datos, es un punto clave.

Sin embargo, la eficacia de las descomposiciones de multirresolución lineales, basadas en los anteriores operadores lineales, está limitada por la presencia de discontinuidades o bordes, debido a que los coeficientes de detalle d^j cerca de las discontinuidades no dan buenos resultados y siguen siendo significativos incluso cuando $j \rightarrow \infty$.

En la última década, varios intentos para mejorar las propiedades de la clásica multirresolución lineal, han llevado a establecer esquemas de multirresolución no lineales. Desafortunadamente, en muchos casos, esta naturaleza no lineal dificulta las pruebas de convergencia y estabilidad.

Por dicho motivo, y a pesar de que posteriormente se emplea la multirresolución de Harten que se acaba de describir como técnica para obtener super-resolución, se presentan a continuación nuevos esquemas no lineales de multirresolución que es importante conocer y analizar, pero que no se aplica, ni estudia en el grupo de investigación.



2.1. Relación entre los esquemas de Multirresolución y los esquemas de subdivisión (ZOOM)

Hemos visto que, dado un vector de datos f^L donde L representa un nivel de resolución, una representación de multirresolución de f^L es cualquier secuencia del tipo $\{f^0, d^1, \dots, d^L\}$ donde f^k es una aproximación de f^L en la resolución $k < L$ y d^{k+1} representa los detalles requeridos para conseguir f^{k+1} a partir de f^k . Ver los algoritmos presentados en (2.1), y (2.2).

Si en estos algoritmos de multirresolución nos quedamos solamente con la etapa de decodificación de la señal o ascenso por la pirámide de multirresolución, entonces lo que tenemos es un esquema de subdivisión. Por tanto, un esquema de subdivisión S queda definido a través del operador de predicción P_k^{k-1} que se utilice.

En este caso, para una secuencia discreta queda definido como:

$$f^k = S f^{k-1} = P_k^{k-1} f^{k-1}$$

Como en la construcción del operador de predicción, interviene de forma decisiva el operador de reconstrucción, la construcción de éste será una etapa crucial en el diseño del esquema de subdivisión. La posibilidad de considerar reconstrucciones no lineales abre entonces un amplio espectro de posibilidades.

En el caso interpolatorio, en el que la discretización viene dada por los valores en una malla de una función, el esquema de subdivisión tiene la forma:

$$f^k = S f^{k-1} \begin{cases} f_{2j}^k = (S f^{k-1})_{2j} = f_j^{k-1} & 1 \leq j \leq J_{k-1} \\ f_{2j-1}^k = (S f^{k-1})_{2j-1} = I_{k-1}(x_{2j-1}^k; f^{k-1}) & 0 \leq j \leq J_{k-1} \end{cases}$$

El hecho de que en este caso las reconstrucciones equivalen a interpolaciones, simplifica mucho su diseño, y aún más si consideramos que las interpolaciones más usuales son polinómicas.

2.2. Compresión de Imágenes

Como se ha comentado anteriormente, las representaciones de multirresolución de datos discretos son herramientas útiles para la compresión de imágenes. El único problema es que la característica no lineal dificulta las pruebas de convergencia y estabilidad de los algoritmos.



Es evidente que si pudiéramos predecir exactamente los valores del nivel k desde los valores del nivel $k - 1$ entonces obtendríamos una gran compresión. Pero, en general esto no es posible, por lo que, tenemos que recuperar la información que hemos perdido al pasar al nivel $k - 1$, definiendo el error que se produce al predecir.

La forma más sencilla de obtener un mecanismo de compresión es, dada f^L , calcular la transformada $Mf^L = \{f^0, d^1, \dots, d^L\}$. Una vez tenemos esta descomposición, igualamos a cero todos los coeficientes de escala (detalles) que son menores que un cierto umbral. Nos referimos a esta operación como “truncamiento”, y queda descrita como [14]:

$$(\widehat{d}^k)_j = \text{tr}(d_j^k; \epsilon_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } |d_j^k| \leq \epsilon_k \\ d_j^k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Este tipo de compresión de datos se utiliza para reducir la dimensionalidad de los datos, cumpliéndose en cualquier caso que:

$$|d_j^k - \widehat{d}_j^k| \leq \epsilon_k$$

De forma esquemática el proceso sería el siguiente:

$$f^L \rightarrow f_d = Mf^L = (f^0, d^1, \dots, d^L) \rightarrow \widehat{f}_d = Q_\epsilon Mf^L = (\widehat{f}^0, \widehat{d}^1, \dots, \widehat{d}^L).$$

Si aplicamos la transformación de multirresolución inversa a la representación de multirresolución comprimida, obtenemos $\widehat{f}^L = M^{-1}\{\widehat{f}^0, \widehat{d}^1, \dots, \widehat{d}^L\}$, una aproximación a la señal original f^L que esperamos que sea parecida a esta. Para que eso suceda, la estabilidad del esquema de multirresolución con respecto a perturbaciones es esencial.

El estudio del efecto de utilizar \widehat{d}_j^k en vez de d_j^k en los datos a los que se aplica M^{-1} , es equivalente a estudiar el resultado que obtenemos al aplicar la transformada de multirresolución inversa cuando perturbamos los coeficientes de escala.

Por tanto, dada una sucesión discreta f^L , y un nivel de tolerancia ϵ , nuestro objetivo es obtener una transformación comprimida:

$$\{\widehat{f}^0, \widehat{d}^1, \dots, \widehat{d}^L\}, \text{ tal que si } \widehat{f}^L = M^{-1}\{\widehat{f}^0, \widehat{d}^1, \dots, \widehat{d}^L\}, \text{ entonces tenemos,}$$

$$\|f^L - \widehat{f}^L\| \leq C_\epsilon$$

Como observó Harten [30], una forma de conseguir esto es modificar la transformación directa de forma que se tenga controlado el error acumulado y truncar o cuantizar (reducir la representación digital de los datos), mientras se calcula la descomposición multirresolución.

- Estabilidad de la transformación multirresolución (compresión).

Definición 1: La transformada de multirresolución, asociada al esquema de subdivisión S_{NL} se dice que es estable, si existe C tal que $\forall L \in \mathbb{N}, \forall j_0 \leq L$, y $\forall f^L, \widehat{f}^L$, $j_0 \leq j \leq L$

$$\|f^j - \widehat{f}^j\|_\infty \leq C \left(\|f^{j_0} - \widehat{f}^{j_0}\|_\infty + \sum_{k=j_0}^{j-1} \|d^k - \widehat{d}^k\|_\infty \right)$$

$$\|f^{j_0} - \widehat{f}^{j_0}\|_\infty \leq C \|f^j - \widehat{f}^j\|_\infty$$

$$\|d^k - \widehat{d}^k\|_\infty \leq C \|f^j - \widehat{f}^j\|_\infty, \quad \forall j_0 \leq k \leq j-1$$

Siendo $\{\widehat{f}^{j_0}, \widehat{d}^{j_0}, \dots, \widehat{d}^{L-1}\}$ la descomposición multirresolución de \widehat{f}^L

2.3. Denoising (eliminación del ruido)

Para considerar técnicas multirresolución en los problemas de eliminación de ruido, son tres los aspectos importantes que hay que considerar. El primero es la elección del algoritmo de multirresolución, el segundo la elección de una función de filtro adecuada y el tercer aspecto la elección del parámetro de umbral.

Por un lado, tanto las multirresoluciones lineales como las descomposiciones wavelet, implican operadores lineales inter-resolución. La eficiencia de estas descomposiciones es generalmente limitada, como se ha comentado en varias ocasiones por la presencia de bordes y discontinuidades.

Por ello, el marco de multirresolución de Harten [30, 31] fue desarrollado con el fin de incorporar un tratamiento de adaptación específica a las singularidades.

En lo que concierne al problema de denoising en imágenes, las técnicas de filtrado han jugado un papel muy importante. Estas técnicas están relacionadas con el siguiente problema variacional:

Dado un parámetro positivo λ (que mide la calidad de la aproximación a la señal) y una imagen ruidosa $f(x, y)$, hay que encontrar una función g^* que minimice sobre todas las funciones posibles g en un espacio Y , el funcional:

$$\|f - g\|_{L^2(\Omega)} + 2\lambda \|g\|_Y$$

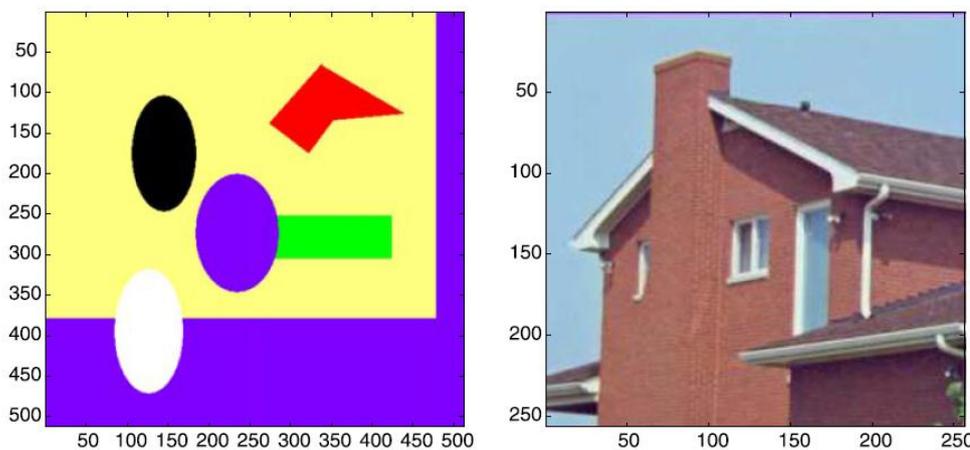


Figura 2. Imagen original. A la izquierda imagen geométrica, y derecha imagen real [6]



Donde (ver figura 2),

$$\|f - g\|_{L^2(I)} := \int_I |f(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy$$

Que mide el error cuadrático medio entre f y g , y $\|\cdot\|_Y$, una norma de suavidad del espacio Y .

A continuación, se propone el uso de una técnica de multirresolución no lineal con un filtro de segundo orden (polinomio definido a trozos) y un parámetro de truncamiento universal. Este enfoque se relaciona con un nuevo problema variacional que parece estar más adaptado al problema de eliminación de ruido, ya que penaliza las regiones donde los detalles son más grandes, es decir, las regiones cerca de los bordes.

- Filtros de funciones polinómicas definidas a trozos.

La norma de una función en un espacio de Besov $B_q^\alpha(L_p(I))$, $\|f\|_{B_q^\alpha(L_p(I))}$, es equivalente a una norma en términos de una de sus representaciones de multirresolución si:

$$\|f\|_{B_q^\alpha(L_p(I))} = \left(\sum_k \left(\sum_j 2^{\alpha k p} 2^{k(p-2)} |d_j^k|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.3)$$

Siendo una buena opción para el espacio Y , el espacio de Besov $B_1^1(L_1(I))$. En este caso el problema se convierte en variacional:

$$\text{Min}_g \|f - g\|_{L_2(I)}^2 + 2\lambda \|g\|_{B_1^1(L_1(I))}$$

- Problema variacional.

Si consideramos una multirresolución que da normas equivalentes, por sustitución de f y g por sus expansiones de multirresolución y usamos la relación (2.3), se tiene:

$$\sum_{k,j} |d_j^k(f) - d_j^k(g)|^2 + 2\lambda \sum_{k,j} |d_j^k(g)|$$

El problema se puede separar, de forma que se tiene el mínimo minimizando cada término por separado: $|d_j^k(f) - d_j^k(g)|^2 + 2\lambda |d_j^k(g)|$

Demostrándose que el minimizador exacto viene dado por:

$$d_j^k(g) := \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{|d_j^k(f)|}\right) d_j^k(f) & \text{si } |d_j^k(f)| > \lambda \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por tanto, en el filtro asociado para truncamiento suave (soft thersholding) [18], es:

$$F(c, \lambda) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{|c|}\right) & \text{si } |c| > \lambda \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



Sin embargo, algunos autores proponen un nuevo filtro que da mejores resultados numéricos para el problema de eliminación de ruido [12]. Se basa en una función cuadrática de la siguiente forma:

$$F_2(c, \lambda) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right) & \text{si } |c| > \lambda \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Siendo este filtro cuadrático un minimizador exacto del problema variacional original. Se ha demostrado que el filtro cuadrático parece funcionar mejor entre los filtros del tipo,

$$F_2(c, \lambda) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda^m}{|c|^m}\right) & \text{si } |c| > \lambda \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Obteniéndose experimentalmente los mejores resultados para $m \in [2, 3]$, y más cercano a 2.

Así pues, se formula entonces el siguiente teorema:

Teorema 6: El minimizador exacto del problema:

$$\min_{g \in Y} \left\{ \sum_{k,j} |d_j^k(f)| \cdot |d_j^k(f) - d_j^k(g)|^2 + 2\lambda^2 \sum_{k,j} |d_j^k(g)| \right\}$$

Se obtiene por la contracción wavelet asociada al filtro cuadrático siguiente:

$$F_2(c, \lambda) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda^2}{c^2}\right) & \text{si } |c| > \lambda \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Algoritmo de multirresolución:

El análisis de multirresolución está directamente relacionado con la caracterización de suavidad de una función a través de la descomposición de los coeficientes de multirresolución. De hecho, se demuestra que las representaciones no lineales de multirresolución conducen a los mismos resultados de suavidad que las bases wavelet [38].

En muchos casos particulares, no es posible demostrar teóricamente la característica de suavidad deseada, de forma que no está claro si la norma de $B_1^1(L_1(I))$ se puede caracterizar por estos algoritmos de multirresolución.

El algoritmo de multirresolución que aquí se presenta, es un algoritmo basado en valores puntuales. Así pues, teniendo en cuenta el radio espectral del esquema S_1 , el esquema asociado para las primeras diferencias de orden es:

$$\rho_1(S_1) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sup_{(w^0, \dots, w^{k-1}) \in (l^\infty(\mathbb{Z}))^k} \|S_1(w^{k-1}) \dots S_1(w^0)\|_{l^p}^{1/k} < 1$$

Se puede entonces formular el siguiente teorema.



Teorema 7. Supongamos que S es un operador de predicción acotado, local y no lineal, que reproduce constantes. Para los datos (f^0, d^1, d^2, \dots) , si $\rho_p(S_1) < 2^{1/p}$ y el lado derecho de la función siguiente es finito, entonces la función límite f pertenece a $B_{p,q}^s$ y :

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \approx \|f^0\|_{l^p} + \left\| 2^{\left(s - \frac{1}{p}\right)k} \left\| d^k \right\|_{l^p} \right\|_{k \geq 0}$$

$$\text{Para } 0 < s < -\frac{\log(\rho_p(S_1))}{\log(2)} + \frac{1}{p}$$

Por definición de la reconstrucción PPH, el esquema de subdivisión asociado para las diferencias, $\delta^k = S_1(\delta^{k-1})$, está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \delta_{2j-1}^k &= \frac{1}{2} H(\delta_j^{k-1}, \delta_{j-1}^{k-1}) \\ \delta_{2j}^k &= \delta_j^{k-1} - \frac{1}{4} H(\delta_j^{k-1}, \delta_{j-1}^{k-1}) - \frac{1}{4} H(\delta_{j+1}^{k-1}, \delta_j^{k-1}) \end{aligned}$$

Teorema 8. El esquema de la subdivisión de las diferencias S_1 , asociadas a la reconstrucción PPH verifica que:

$$\|\delta^k\|_1 \leq \|\delta^{k-1}\|_1$$

Es decir, muestra contracción en las diferencias primeras. El teorema 7, dice que si el esquema es contractivo, entonces se puede decir que la norma en el espacio de Besov es igual a la norma presentada en términos de su representación multirresolución. Esto se verifica por tanto, mediante el teorema 8.

2.4. Ejemplos de esquemas de subdivisión mediante Multirresolución no lineal

A continuación, en las secciones, 2.4.1., y 2.4.2., se describen algunos esquemas de multirresolución no lineales, que a pesar de no emplearse posteriormente, es importante conocer. Sin embargo, el esquema de subdivisión mediante multirresolución basado en valores puntuales desarrollado en la sección 2.4.3., será empleado posteriormente como algoritmo para super-resolución, ver capítulo 4.

2.4.1. Representación de esquemas no lineales de Multirresolución basados en la interpolación de Lagrange

A través del siguiente algoritmo, se obtiene una multirresolución no lineal, basada en una transformación no lineal de los coeficientes de detalle de varias resoluciones [5].



Dados dos números enteros $r \geq 1$, $r \geq s > 0$, los datos de la interpolación de Lagrange se pueden definir mediante un conjunto fijo de índices

$$\{S = S(r, s) = \{-s, -s + 1, \dots, -s + r\}, r \geq s > 0, r \geq 1,$$

De esta manera, el valor predicho a escala $j + 1$ y la posición x_{2k+1}^{j+1} es el valor en la misma posición del polinomio de Lagrange $I_j(x, f^j)$, de grado r interpolando el conjunto de valores $\{f_{k+m}^j, m \in S\}$ y posiciones $\{x_{k+m}^j, m \in S\}$.

Linealidad y reproducción del polinomio de grado menor o igual a r , implica que para cualquier función $f \in C^{r+1}$,

$$\{f_j = f(x_k^j) \Rightarrow I_j(x_{2k+1}^{j+1}, f^j) = f(x_{2k+1}^{j+1}) + O(h_j)^{r+1}\}$$

El procedimiento de predicción para los datos, se dice entonces que es de precisión $p = r + 1$.

En el caso de aparecer discontinuidades aisladas, las técnicas de interpolación de Lagrange, pierden exactitud, obteniendo:

$$f(x) = I_l(x) + O(|f|)$$

Siendo $|f|$ el salto de f en la discontinuidad.

Por ello, se introduce un esquema inicial con el fin de obtener una adaptación específica a la presencia de discontinuidades.

- Esquema multiresolución basado en dos puntos interpolatorios.

El esquema de subdivisión llamado S_1 se denota como:

$$\begin{cases} (S_1 f^j)_{2k} = f_k^j \\ (S_1 f^j)_{2k+1} = \frac{f_k^j + f_{k+1}^j}{2} \end{cases}$$

Por tanto, la interpolación de dos puntos queda:

$$\left(\begin{array}{l} f_k^j = f_{2k}^{j+1} \\ dlin_k^j = f_{2k+1}^{j+1} - \frac{f_k^j + f_{k+1}^j}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} f_{2k}^{j+1} = f_k^j \\ f_{2k+1}^{j+1} = \frac{f_k^j + f_{k+1}^j}{2} + dlin_k^j \end{array} \right)$$

Siendo $dlin_k^j$, (detalle lineal), los coeficientes de detalle obtenidos de realizar la interpolación. Para este detalle lineal, se verifica que:

$$dlin_k^j = O(h_j^2)$$

O en presencia de discontinuidades:

$$|dlin_k^j| = \frac{1}{2} |\Delta_k^j| + O(h_j) \Rightarrow \Delta_k^j = f_k^j - f_{k-1}^j$$

Nuestro objetivo, es reducir el tamaño de los detalles en presencia de discontinuidades. Para ello, nos proponemos considerar el detalle en la normal a la línea $[(f_k^j, x_k^j), (f_{k+1}^j, x_{k+1}^j)]$, ver figura 3.

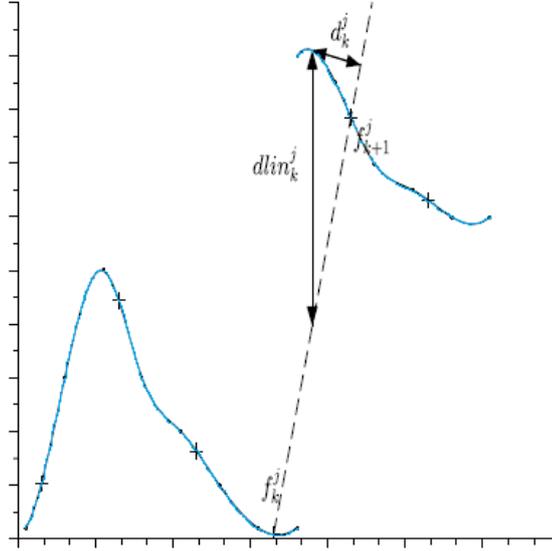


Figura 3. Modificación no lineal de los datos utilizando proyección [5]

Tras operar algebraicamente, obtenemos que la proyección normal del detalle $dlin_k^j$, es:

$$d_k^j = \frac{dlin_k^j}{2^j \sqrt{4^{-j} + (\Delta_k^j)^2}}$$

Sin embargo, esta reducción del tamaño del detalle, solo se puede aprovechar si se adapta mediante un truncamiento, que permita separar los datos que nos interesan.

Para ello, se coge un operador umbral $\tau_e^{j_0}$ en función del error de truncación ϵ_j , definido de la forma siguiente:

$$\text{Para cualquier } j_0 \leq j \leq L-1, \text{ con } \epsilon_j > 0, \text{ siendo } \sum_{j_0}^{L-1} \epsilon_j = \epsilon$$

Entonces se dice que:

Si $|dlin_k^j| \leq \epsilon_j$, entonces $\widehat{d}_k^j = \tau_e^{j_0}(d_k^j) = 0 \Rightarrow \text{ZONAS DE CONTINUIDAD (SIN RUIDO)}$

$$\text{Si } |d_k^j| \leq \epsilon_j \text{ y } |dlin_k^j| > \epsilon_j \text{ entonces } \begin{cases} \widehat{d}_k^j = \tau_e^{j_0}(d_k^j) = \frac{\frac{1}{2}\Delta_k^j}{2^j \sqrt{4^{-j} + (\Delta_k^j)^2}} \Rightarrow \text{if } d_k^j \geq 0 \\ \widehat{d}_k^j = \tau_e^{j_0}(d_k^j) = -\frac{\frac{1}{2}\Delta_k^j}{2^j \sqrt{4^{-j} + (\Delta_k^j)^2}} \Rightarrow \text{if } d_k^j < 0 \end{cases}$$



Es decir, el detalle lineal es $1/2$ de Δ_k^j . Por tanto, se puede calcular el detalle lineal, en función de las coordenadas de la posición $\left(2^j \sqrt{4^{-j} + (\Delta_k^j)^2}\right)$. Ver figura 4.

Finalmente,

$$\text{Si } |d_k^j| > \epsilon_j \text{ y } |dlin_k^j| > \epsilon_j \text{ entonces } \widehat{d}_k^j = \tau_e^{j_0}(d_k^j) = d_k^j$$

Como aproxima los saltos de una función definida a trozos, el procedimiento sólo tiene en cuenta las discontinuidades de orden cero. También es compatible con las discontinuidades de orden 1, tan solo hay que cambiar al esquema anterior S_1 .

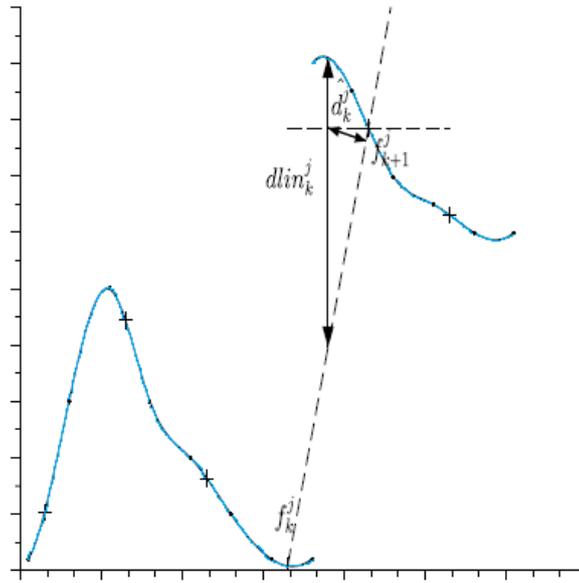


Figura 4. Truncación no lineal de orden cero [5]

- Estabilidad del esquema.

Dado que $d_k^j \rightarrow 0$, en las zonas de continuidad o cerca de las discontinuidades ($\Delta_k^j \rightarrow 0$ y $dlin_k^j$ van a cero al menos como 2^{-j}), está claro que el umbral propuesto reduce significativamente el número de detalles no ceros.

Un punto crucial es el estudio de la estabilidad, es decir, estudiar que la secuencia reconstruida de detalles a través del procedimiento de truncamiento, está a una distancia controlada por el valor de umbral de la secuencia original.

Considerando, $\{f_k^L\}_{k \in \mathbb{Z}} \ 0 \leq L-1$ y $\epsilon = \sum_{j_0}^{L-1} \epsilon_j$, llamamos $\{\widehat{f}_k^L\}_{k \in \mathbb{Z}}$, a la secuencia obtenida después de la descomposición con el procedimiento de truncamiento (eliminación de ruido), obteniendo el siguiente resultado.

Teorema 1. Si la secuencia , $\{f_k^L\}_{k \in \mathbb{Z}}$ proviene de la toma de muestras de una función suave, pero posee un número finito de puntos de discontinuidad aislada,



entonces, existe una escala J_0 tal que para cualquier umbral $\tau_e^{J_0}$, con $J_0 \leq j_0$, y $\epsilon_j > O(2^{-(j+1)})$, se cumple:

$$\|f^L - \hat{f}^L\|_\infty \leq \sum_{j=j_0}^L \epsilon_j := \epsilon$$

Cabe destacar, que el error de truncamiento no va a ser evaluado en los esquemas de multirresolución no lineales que vamos a aplicar en capítulos posteriores para obtener super-resolución.

2.4.2. Estudio de la eliminación de oscilaciones de Gibbs cerca de las discontinuidades en esquemas de subdivisión mediante Multirresolución no lineal

El problema de la interpolación anterior definida a trozos, es que solamente garantiza un orden de continuidad C , [2].

Siguiendo con el estudio de esquemas que aborden la presencia de discontinuidades, este punto permite analizar un nuevo esquema de subdivisión no lineal que estudia la eliminación de oscilaciones de Gibbs cerca de las discontinuidades. El esquema, está formulado utilizando un desplazamiento de $1/4$ para los esquemas del tipo PPH (piecewise polynomial harmonic). El resultado se obtiene mediante la modificación del esquema de subdivisión de cuatro puntos de interpolación clásico, pero sustituyendo la media aritmética por la media armónica.

Se ha demostrado que dicho esquema converge a las curvas C^2 . Su regla de refinamiento se basa en la interpolación local de Lagrange cúbica que usa los valores basada en los valores $\{f_{n-1}, f_n, f_{n+1}, f_{n+2}\}$, en las posiciones $\{-1, 0, 1, 2\}$, seguido de una evaluación en la posición $1/4$.

Para todo $f \in l^\infty(\mathbb{Z})$, el esquema viene dado por:

$$(Sf)_{2n} = -\frac{7}{128}f_{n-1} + \frac{105}{128}f_n + \frac{35}{128}f_{n+1} - \frac{5}{128}f_{n+2}$$

A continuación sustituimos la media aritmética por la media armónica, representada por PPH. La motivación de la sustitución de la media aritmética por la armónica, es la eliminación de las oscilaciones, variando fuertemente los datos gracias al hecho de que $|\text{PPH}(x, y)| \leq 2 \min(|x|, |y|)$, en comparación con la media aritmética, que es $\left|\frac{x+y}{2}\right| \leq \max(|x|, |y|)$.

Con este cambio, se obtienen dos nuevas formulaciones del esquema:



$$\begin{aligned} \text{Si } |d^2 f_n| \geq |d^2 f_{n+1}| &\Rightarrow (Sf)_{2n} = \frac{49}{64}f_n + \frac{14}{64}f_{n+1} + \frac{1}{64}f_{n+2} - \frac{7}{64} \frac{(d^2 f_n + d^2 f_{n+1})}{2} \\ &= \frac{49}{64}f_n + \frac{14}{64}f_{n+1} + \frac{1}{64}f_{n+2} - \frac{7}{64}PPH(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } |d^2 f_n| < |d^2 f_{n+1}| &\Rightarrow (Sf)_{2n} = -\frac{1}{64}f_{n-1} + \frac{50}{64}f_n + \frac{15}{64}f_{n+1} - \frac{5}{64} \frac{(d^2 f_n + d^2 f_{n+1})}{2} \\ &= -\frac{1}{64}f_{n-1} + \frac{50}{64}f_n + \frac{15}{64}f_{n+1} - \frac{5}{64}PPH(d^2 f_n, d^2 f_{n+1}) \end{aligned}$$

Donde $d^2 f$, derivada de segundo orden, está definida como: $d^2 f_n = f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}$, y PPH, la media armónica por:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow PPH(x, y) := \frac{xy}{x+y} (\text{sgn}(xy) + 1)$$

Con $\text{sgn}(xy) = 1$ if $x > 0$ y $\text{sgn}(x) = -1$ if $x < 0$.

2.4.3. Ejemplo de multirresolución por valores puntuales. PPH cuatro puntos

Vamos a definir los operadores de reconstrucción y de predicción asociados a la multirresolución por valores puntuales, ya que es en este entorno donde la definición es más intuitiva. Además será el tipo de configuración que utilizaremos para nuestros experimentos de super-resolución.

- Entorno de multirresolución para valores puntuales

Consideramos el conjunto de mallas anidadas en el intervalo $[0,1]$ dado por:

$$X^k = \{x_j^k\}_{j=0}^{J_k}, \quad x_j^k = jh_k, \quad h_k = \frac{2^{-k}}{J_0}, \quad J_k = 2^k J_0$$

Donde J_0 es un entero fijo. La discretización por valores puntuales viene dada por:

$$D_k: \begin{cases} C([0,1]) \rightarrow V^k \\ f \rightarrow f^k = (f_j^k)_{j=0}^{J_k} = (f(x_j^k))_{j=0}^{J_k} \end{cases}$$

Donde V^k es el espacio de secuencias reales de dimensión $J^k + 1$. Un operador de reconstrucción para esta discretización es cualquier operador R_k tal que:

$$R_k : V^k \rightarrow C([0,1]); \text{ y satisface } D_k R_k f^k = f^k,$$

Lo que significa que

$$(R_k f^k)(x_j^k) = f_j^k = f(x_j^k)$$

En otras palabras $(R_k f^k)(x)$ es una función continua que interpola el vector de datos f^k en X^k .



Si escribimos $(R_k f^k)(x) = I_k(x; f^k)$, entonces podemos definir las transformadas directa (2.4) e inversa (2.5) de multirresolución como:

$$f^L \rightarrow Mf^L \begin{cases} D_0 & k = L, \dots, 1 \\ f_j^{k-1} = f_{2j}^k & 0 \leq j \leq J_{k-1} \\ d_j^k = f_{2j-1}^k - I_{k-1}(x_{2j-1}^k; f^{k-1}) & 1 \leq j \leq J_{k-1} \end{cases} \quad (2.4)$$

y

$$Mf^L \rightarrow M^{-1}Mf^L \begin{cases} D_0 & k = 1, \dots, L \\ f_{2j-1}^k = I_{k-1}(x_{2j-1}^k; f^{k-1}) + d_j^k & 1 \leq j \leq J_{k-1} \\ f_{2j}^k = f_j^{k-1} & 0 \leq j \leq J_{k-1} \end{cases} \quad (2.5)$$

- Esquemas de reconstrucción lineal: Interpolación de Lagrange

Tomando S como el conjunto:

$$S = S(r, s) = \{-s, -s+1, \dots, -s+r\}, \quad r \geq s > 0, \quad r \geq 1,$$

Y $\{L_m(y)\}_{m \in S}$ como los polinomios interpoladores de Lagrange de grado r que pasan por los elementos de $S(r, s)$, entonces,

$$L_m(y) = \prod_{\substack{l=-s \\ l \neq m}}^{-s+r} \left(\frac{y-l}{m-l} \right) \quad L_m(j) = \delta_j^m, \quad j \in S$$

La interpolación de Lagrange para $\{x_{j+m}^k\}_{m \in S}$, se escribe

$$I_k(x, f^k) = \sum_{m=-s}^{-s+r} f_{j+m}^k L_m\left(\frac{x-x_j^k}{h_k}\right), \quad x \in [x_{j-1}^k, x_j^k], \quad 1 \leq j \leq J_k$$

Es importante observar que si $f(x) = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que r , entonces $I_k(x, f^k) = f(x)$ para $x \in [x_{j-1}^k, x_j^k]$. Lo cual significa que, para funciones suaves:

$$I_k(x, f^k) = f(x) + O(h_k)^{r+1}$$

Por lo tanto, el orden de la reconstrucción, que caracteriza su precisión, será $p = r + 1$. La situación particular para el valor $r = 2s - 1$ se corresponde con un stencil de interpolación simétrico respecto del intervalo $[x_{j-1}^k, x_j^k]$. Por ejemplo, para $s = 2$ ($r = 3$) se obtiene la siguiente transformada de multirresolución:

$$\begin{cases} D_0 & k = L, \dots, 1 \\ f_j^{k-1} = f_{2j}^k & 0 \leq j \leq J_{k-1} \\ d_j^k = f_{2j-1}^k - \left(\frac{-f_{j-2}^{k-1} + 9f_{j-1}^{k-1} + 9f_j^{k-1} - f_{j+1}^{k-1}}{16} \right) & 1 \leq j \leq J_{k-1} \end{cases} \quad (2.6)$$



$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 \quad k = L, \dots, 1 \\ f_{2j}^k = f_j^{k-1} \\ f_{2j-1}^k = d_j^k + \left(\frac{-f_{j-2}^{k-1} + 9f_{j-1}^{k-1} + 9f_j^{k-1} - f_{j+1}^{k-1}}{16} \right) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 0 \leq j \leq J_{k-1} \\ \\ 1 \leq j \leq J_{k-1} \end{array} \quad (2.7)$$

Las técnicas de interpolación de Lagrange pierden mucha de su precisión en presencia de singularidades, por ejemplo en presencia de saltos en la función el error se comporta como:

$$f(x) = I_k^L(x, f^k) + O(|f|) \quad (2.8)$$

Cuando se utiliza interpolación lineal, cada stencil (conjunto de puntos usados para interpolar) se elige de forma independiente de los datos, es decir, no se tiene en cuenta la suavidad de la función que se interpola. Esto significa que una discontinuidad aislada en un intervalo I_k producirá una pérdida de exactitud en las cercanías de dicha discontinuidad, ya que los stencils correspondientes a los subintervalos adyacentes a I_k contendrán también la singularidad, con lo que el error de interpolación vendrá dado por la expresión (2.8).

- Técnicas de reconstrucción no lineal: La reconstrucción PPH

En esta sección se describe un esquema de interpolación no lineal de cuarto orden dependiente de los datos, denominado PPH [3]. Esta técnica de interpolación no lineal conduce a un operador de reconstrucción con varias características deseables. En primer lugar, utiliza un stencil fijo centrado de cuatro puntos. Además, la reconstrucción es tan exacta como su equivalente lineal en las regiones suaves. Cerca de las singularidades la exactitud se reduce, pero no se pierde completamente como ocurre en con los esquemas lineales.

A continuación se describe el operador de reconstrucción PPH, que denotamos como $I_k^P(x, f^k)$. Al igual que con todas las otras técnicas de interpolación, dado $x \in R$, tomemos j tal que $x \in [x_{j-1}^k, x_j^k]$. Entonces, $I_k^P(x, f^k) = \widehat{P}_k(x, f^k)$, donde $\widehat{P}_k(x, f^k)$ es un polinomio construido a partir de los datos centrados $f_{j-2}^k, f_{j-1}^k, f_j^k, f_{j+1}^k$, y tal que $\widehat{P}_k(x_{j-1}^k, f^k) = f_{j-1}^k$, y $\widehat{P}_k(x_j^k, f^k) = f_j^k$. En lo que sigue, suprimiremos el superíndice k para simplificar la notación.

Consideremos el conjunto de puntos $\{f_{j-2}^k, f_{j-1}^k, f_j^k, f_{j+1}^k\}$, y vamos a describir la predicción para el punto medio $f_{j-1/2}$. Según lo expuesto anteriormente, si la función no tiene ninguna discontinuidad de salto en el intervalo $[x_{j-2}, x_{j+1}]$, una interpolación centrada proporciona una buena aproximación. No obstante, cuando la función presenta una discontinuidad, la aproximación pierde orden de aproximación. A continuación se discute la modificación propuesta sobre la interpolación de Lagrange



cuando se detecta una singularidad en $[x_j, x_{j+1}]$. Supongamos que la diferencia dividida $f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$ es mayor o igual que $f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j]$ en valor absoluto. Esto indica la posible presencia de una singularidad en un punto $x_d \in [x_j, x_{j+1}]$. Consideremos el polinomio interpolador de Lagrange,

$$P_j(x) = a_0 + a_1 \left(x - x_{j-\frac{1}{2}}\right) + a_2 \left(x - x_{j-\frac{1}{2}}\right)^2 + a_3 \left(x - x_{j-\frac{1}{2}}\right)^3 \quad (2.9)$$

Para obtener el polinomio interpolador de Lagrange de 4 puntos, que pase por $\{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}\}$ hemos de imponer las siguientes condiciones a la expresión anterior

$$\begin{cases} a_0 - a_1 \frac{3}{2}h + a_2 \left(\frac{3}{2}h\right)^2 - a_3 \left(\frac{3}{2}h\right)^3 = f_{j-2} \\ a_0 - a_1 \frac{1}{2}h + a_2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2 - a_3 \left(\frac{1}{2}h\right)^3 = f_{j-1} \\ a_0 + a_1 \frac{1}{2}h + a_2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{2}h\right)^3 = f_j \\ a_0 + a_1 \frac{3}{2}h + a_2 \left(\frac{3}{2}h\right)^2 + a_3 \left(\frac{3}{2}h\right)^3 = f_{j+1} \end{cases} \quad (2.10)$$

Es fácil comprobar que

$$a_1 = \frac{f_{j-2} - 27f_{j-1} + 27f_j - f_{j+1}}{24h}$$

De ese modo, el sistema de ecuaciones anterior es equivalente a

$$\begin{cases} a_0 - a_1 \frac{3}{2}h + a_2 \left(\frac{3}{2}h\right)^2 - a_3 \left(\frac{3}{2}h\right)^3 = f_{j-2} \\ a_0 - a_1 \frac{1}{2}h + a_2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2 - a_3 \left(\frac{1}{2}h\right)^3 = f_{j-1} \\ a_0 + a_1 \frac{1}{2}h + a_2 \left(\frac{1}{2}h\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{2}h\right)^3 = f_j \\ a_1 = \frac{f_{j-2} - 27f_{j-1} + 27f_j - f_{j+1}}{24h} \end{cases}$$

Se introducen las diferencias divididas primeras, definidas por

$$\delta_{j-\frac{3}{2}} = f[x_{j-2}, x_{j-1}]$$

$$\delta_{j-\frac{1}{2}} = f[x_{j-1}, x_j]$$

$$\delta_{j+\frac{1}{2}} = f[x_j, x_{j+1}]$$

y las diferencias divididas segundas,

$$D_{j-1} = f[x_{j-2}, x_{j-1}, x_j]$$

$$D_j = f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$$

Después de algunas manipulaciones algebraicas se llega fácilmente a

$$a_1 = \frac{-\delta_{j-\frac{3}{2}} + 13\delta_{j-\frac{1}{2}}}{12} - \frac{1}{12} \frac{D_{j-1} + D_j}{2} h$$



En particular, se observa que en presencia de una discontinuidad de salto en $[x_j, x_{j+1}]$, $a_1 = O\left(\frac{1}{h}\right)$, ya que $D_j = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$. Este comportamiento es debido a la mala aproximación de la reconstrucción en presencia de discontinuidades. Destacando que D_{j-1} sigue siendo de orden $O(1)$, se sustituye la media aritmética $\frac{D_{j-1}+D_j}{2}$ por la media armónica $\frac{2D_{j-1}D_j}{D_{j-1}+D_j}$ siempre que $D_{j-1}D_j > 0$. Se obtiene así la siguiente expresión modificada para a_1 ,

$$\widetilde{a}_1 := \frac{-\delta_{j-\frac{3}{2}} + 13\delta_{j-\frac{1}{2}}}{12} - \frac{1}{12} \frac{2D_{j-1}D_j}{D_{j-1}+D_j} h$$

Por un lado, debido al hecho que

$$\left| 2 \frac{D_{j-1}D_j}{D_{j-1}+D_j} \right| \leq 2 \min(|D_{j-1}|, |D_j|) = O(1), \quad (2.11)$$

Asumiendo $D_{j-1}D_j > 0$, la media armónica está bien adaptada a la presencia de singularidades porque, cuando $|D_{j-1}|$ es $O(1)$ y $|D_j|$ es $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$, la media armónica es $O(1)$, y en consecuencia, $\widetilde{a}_1 = O(1)$. Por otro lado, en las regiones suaves $a_1 - \widetilde{a}_1 = O(h^3)$, ya que la diferencia entre la media armónica y la aritmética es $O(h^2)$. Por consiguiente, la reconstrucción es de cuarto orden, y en particular,

$$f_{j-\frac{1}{2}} - \widetilde{P}_j\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) = O(h^4)$$

Si $D_{j-1}D_j \leq 0$ la media armónica no está bajo control, ya que en algunos casos $D_{j-1} + D_j \approx 0$. Se considera por lo tanto en esta situación

$$\widetilde{\widetilde{a}}_1 := \frac{-\delta_{j-\frac{3}{2}} + 13\delta_{j-\frac{1}{2}}}{12} \quad (2.12)$$

Entonces $a_1 - \widetilde{\widetilde{a}}_1 = O(h)$. La reconstrucción está adaptada en este caso a la presencia de singularidades aunque la exactitud se reduce hasta grado dos. El operador de reconstrucción PPH estará dado por la expresión polinomial de la ecuación (2.8) con los nuevos coeficientes $\widetilde{\widetilde{a}}_0, \widetilde{\widetilde{a}}_1, \widetilde{\widetilde{a}}_2$ y $\widetilde{\widetilde{a}}_3$ si $D_{j-1}D_j > 0$, con $\widetilde{\widetilde{a}}_0, \widetilde{\widetilde{a}}_1, \widetilde{\widetilde{a}}_2$ y $\widetilde{\widetilde{a}}_3$ si $D_{j-1}D_j \leq 0$. Es fácil comprobar que la predicción se convierte en

$$f_{j-\frac{1}{2}} \approx \frac{-f_{j-2} + 18f_{j-1} - 9f_j}{8} - \frac{1}{8} 12\widetilde{\widetilde{a}}_1 h = \frac{f_j + f_{j-1}}{2} - \frac{1}{4} \frac{(f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2})(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1})}{(f_{j+1} - f_j - f_{j-1} - f_{j-2})}, \quad (2.13)$$

$$f_{j-\frac{1}{2}} \approx \frac{-f_{j-2} + 18f_{j-1} - 9f_j}{8} - \frac{1}{8} 12\widetilde{\widetilde{a}}_1 h = \frac{f_j + f_{j-1}}{2} \quad (2.14)$$



respectivamente. Por razones de simetría la modificación es la misma cuando la singularidad pertenece a $[x_{j-2}, x_{j-1}]$. Podemos ver que la reconstrucción PPH siempre usa un stencil centrado. La meta del operador de reconstrucción no lineal propuesta es mejorar la exactitud de la predicción en los alrededores de las discontinuidades. Así, podemos esperar un mejor comportamiento de los algoritmos en zonas cercanas a los ejes de las imágenes.

El algoritmo de multirresolución queda,

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 \quad k = L, \dots, 1 \\ f_j^{k-1} = f_{2j}^k \\ d_j^k = \begin{cases} f_{2j-1}^k - \left(\frac{-f_{j-1}^k + f_j^k}{2} - \frac{1}{4} \frac{Df_{j-1}^k Df_j^k}{Df_{j-1}^k + Df_j^k} \right), & \text{si } Df_{j-1}^k Df_j^k > 0 \\ f_{2j-1}^k - \left(\frac{-f_{j-1}^k + f_j^k}{2} \right) & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_0 \quad k = 1, \dots, L \\ f_{2j}^k = f_j^{k-1} \\ f_{2j-1}^k = \begin{cases} d_j^k + \left(\frac{f_{j-1}^k + f_j^k}{2} - \frac{1}{4} \frac{Df_{j-1}^k Df_j^k}{Df_{j-1}^k + Df_j^k} \right), & \text{si } Df_{j-1}^k Df_j^k > 0 \\ d_j^k + \left(\frac{f_{j-1}^k + f_j^k}{2} \right) & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

De $Df_{j-1}^k = f_{j-2}^k - 2f_{j-1}^k + f_j^k$ y $Df_j^k = f_{j-1}^k - 2f_j^k + f_{j+1}^k$

- Algoritmos basados en producto tensor para datos bidimensionales

Para generalizar los algoritmos arriba definidos para datos en dos dimensiones (en nuestro caso utilizaremos imágenes), se ha usado la aproximación por producto tensor que se presenta a continuación.

Representaremos el conjunto bidimensional de datos originales por la matriz $A = A^L$.

La representación de multirresolución de A^L es entonces,

$$Mf = \{A^0, (\{\Delta_i^1\}_{i=1}^3, \dots, \{\Delta_i^L\}_{i=1}^3)\},$$

$$A_{i,j}^{k-1} = A_{2i,2j}^k, \quad 0 \leq i, j \leq J_{k-1}$$

$$(\Delta_1^k) = E_{2i-1, 2j-1}^k, \quad 1 \leq i, j \leq J_{k-1}$$

$$(\Delta_2^k) = E_{2i-1, 2j}^k, \quad 1 \leq i \leq J_{k-1}, \quad 0 \leq j \leq J_{k-1}$$

$$(\Delta_3^k) = E_{2i, 2j-1}^k, \quad 0 \leq i \leq J_{k-1}, \quad 1 \leq j \leq J_{k-1}$$



Donde E^k son los errores de reconstrucción

$$E_{2i-1, 2j-1}^k = A_{2i-1, 2j-1}^k - (D_k R_{k-1} A^{k-1})_{2i-1, 2j-1}$$

$$E_{2i-1, 2j}^k = A_{2i-1, 2j}^k - (D_k R_{k-1} A^{k-1})_{2i-1, 2j}$$

$$E_{2i, 2j-1}^k = A_{2i, 2j-1}^k - (D_k R_{k-1} A^{k-1})_{2i, 2j-1}$$

Tradicionalmente, un paso de la pirámide de multirresolución se representa en forma matricial de la siguiente manera

$$A^k \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} A^{k-1} & A_2^k \\ \hline A_3^k & A_1^k \end{array} \right)$$

Capítulo 3.

Super-resolución

3.1. Definición y aplicaciones

Se conoce como super-resolución al conjunto de técnicas y algoritmos diseñados para aumentar la resolución espacial de una imagen, normalmente a partir de una secuencia de imágenes de más baja resolución.

La super-resolución fue sugerida por primera vez en 1955 [26], y se diferencia de las técnicas tradicionales de escalado de imagen en que estas últimas, solo utilizan una imagen para el aumento de resolución, centrandose su objetivo en mantener los bordes afilados, sin la aparición de nuevos detalles. En cambio, en la super-resolución se trata de fusionar la información de varias imágenes tomadas a partir de una misma escena, para poder representar detalles que en un principio no son apreciables en las imágenes originales [50].

Por tanto, un enfoque prometedor es el uso de técnicas de procesamiento de señal para obtener una imagen o secuencia de alta resolución (HR) de múltiples imágenes de baja resolución (LR). Recientemente, la super-resolución (SR), se ha convertido en un área de investigación muy activa.

Por lo tanto, a partir de un conjunto de imágenes de baja resolución con un desplazamiento relativo entre ellas muy pequeño, se puede conseguir una imagen de mayor definición.

A continuación, se describe un ejemplo dónde la imagen es estática, siendo la cámara la que proporciona el desplazamiento entre imágenes, ver figura 5.

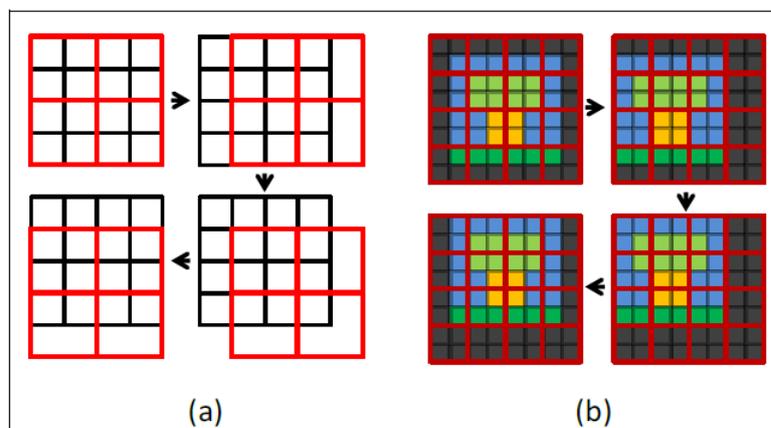


Figura 5. Desplazamiento entre las imágenes de baja resolución [25]

De esta forma, se puede ver el movimiento que debe realizar la cámara (rejilla roja) para obtener, en este caso cuatro imágenes distintas. La rejilla negra indica el grado de resolución que se obtendrá; para este ejemplo 4×4 , a partir de cuatro imágenes de 2×2 (rejilla roja).

De la misma forma, en la figura 6 se puede ver la mejora de calidad obtenida con este algoritmo.

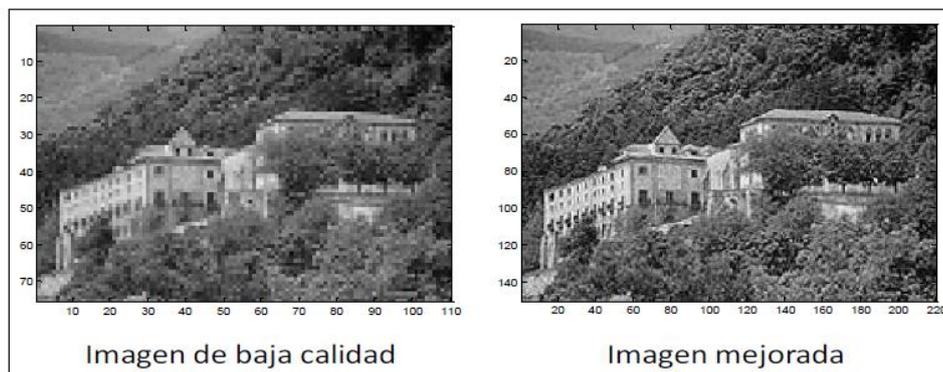


Figura 6. Resultados obtenidos del algoritmo de optimización [25]

Posteriormente, se describe otro ejemplo, dónde si existe movimiento de imágenes sobre un fondo estático. En el caso de que la imagen sea mayor que el tamaño de la rejilla de baja resolución, se puede aplicar el mismo algoritmo de optimización para la imagen que se desplaza. Al igual que ocurría en el caso anterior, el movimiento debe ser conocido previamente por el algoritmo (figura 5 (b)) para obtener, de esta manera un conjunto de imágenes de baja resolución de partida.

En cuanto a las aplicaciones de la técnica de super-resolución, se incluyen varios casos prácticos como el campo de la vigilancia, la parte forense, científico-médica, y/o las imágenes por satélite. Para la vigilancia o incluso para fines forenses, un grabador de vídeo digital (DVR) está reemplazando el sistema de circuito cerrado de televisión, y que a menudo es necesario para magnificar objetos en la escena, por super-resolución, para observar por ejemplo el rostro de un criminal o la placa de matrícula de un coche.

La técnica de super-resolución es también útil en imágenes médicas, tales como la tomografía computerizada (TC) y la resonancia magnética (MRI), donde es posible la adquisición de múltiples imágenes, mientras que la calidad de la resolución es limitada.

En aplicaciones de imágenes por satélite, como la teledetección, se utilizan frecuentemente varias imágenes de la misma zona, por tanto, la técnica de super-resolución permite mejorar la resolución final de la imagen [41].

Otra aplicación es la conversión de una señal de vídeo NTSC a una señal de televisión de alta definición ya que hay una necesidad clara y presente para mostrar una señal de SDTV en la televisión de alta definición sin artefactos visuales.

Se presenta a continuación, un ejemplo de super-resolución en imágenes de resonancia magnética cardíaca (MRI). La adquisición de datos en tiempo real se ve limitada por el movimiento del corazón y los periodos de apnea, condiciones que afectan a la resolución. El método de super-resolución usa una representación bayesiana dispersa, generando una reconstrucción precisa, y recuperando la forma original con pocos artefactos y bajo ruido, (ver figura 7).

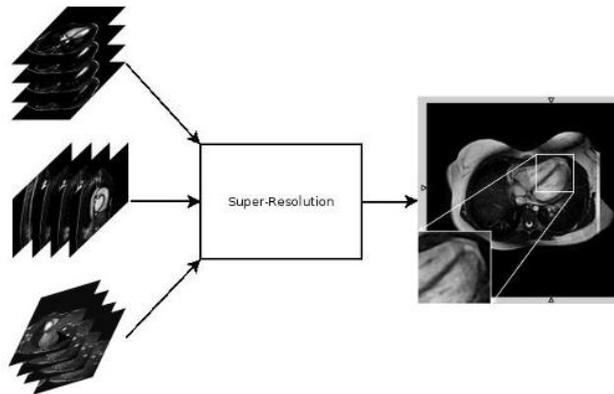


Figura 7. Super-resolución en imágenes de MRI [43]

3.2. Sistema de Registro de Imágenes

Por lo tanto, ¿Cómo podemos obtener una imagen de alta resolución a partir de múltiples imágenes de baja resolución?

En el proceso de grabación de una imagen digital, hay una pérdida natural de resolución espacial causada por las distorsiones ópticas, el desenfoque de movimiento debido a la limitada velocidad de obturación, el ruido que se produce dentro del sensor o durante la transmisión, o la densidad del sensor insuficiente. Por lo tanto, la imagen grabada por lo general sufre falta de definición, ruido, y efectos de distorsión.

La idea fundamental para obtener alta resolución de imágenes en baja resolución, es restablecer la alta frecuencia que se pierde por el proceso de captura de imagen de la cámara, debido a la distorsión que origina el CCD de la cámara.

El CCD, es el sensor con diminutas células fotoeléctricas que registran la imagen. Desde ahí, la imagen es procesada por la cámara y registrada en la tarjeta de memoria. La capacidad de resolución o detalle de la imagen depende del número de células fotoeléctricas del CCD. Este número se expresa en píxeles

Al discretizar una imagen, como es obvio, se pierde información ya que se toman un número finito de muestras. A pesar de este inconveniente, se presenta la ventaja de poder trabajar con estas imágenes de forma más sencilla con cualquier ordenador y, por tanto, poder elaborar algoritmos que mejoren la calidad de dichas imágenes.

Por lo tanto, en el proceso de captura de una imagen se tienen una serie de factores que reducen significativamente la calidad de la misma. En la figura 8, se muestra el proceso de adquisición más común de una imagen. Como ya se ha visto, se produce una pérdida de información debida al sistema óptico y al límite de difracción anteriormente citado (“Optical Distortion”). La segunda pérdida de información, se produce al digitalizar la información (“Aliasing”). En aplicaciones profesionales y cámaras digitales los sensores más populares son los CCD (“Charge-Coupled Device”). Éstos constan de un conjunto de diminutas células fotoeléctricas que registran la imagen. La capacidad de resolución dependerá del número de células que tenga el sensor. Tampoco hay que olvidarse de otros factores ambientales como son el ruido y el movimiento (“Noise and Motion Blur”) que también participan en la distorsión de la imagen. Finalmente se obtiene una imagen distorsionada, muestreada, emborronada y con ruido, con una calidad muy inferior a la imagen que se pretendía capturar.

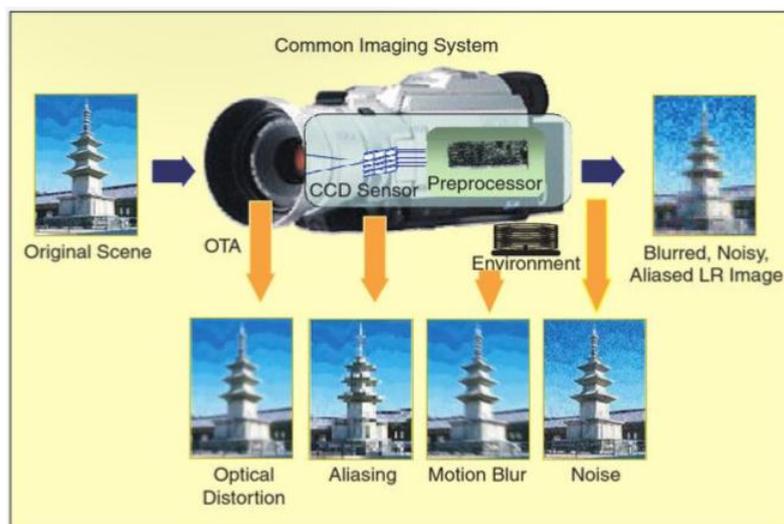


Figura 8. Sistema de adquisición de imagen común [41]

3.3. Métodos de Super-Resolución

Durante muchos años la potencia de cálculo ha limitado la aplicación práctica de super-resolución. Desde entonces, como la potencia de cálculo se ha incrementado, se han propuesto varios algoritmos [13, 24, 32, 33, 42, 45, 49], que incorporan técnicas como la estimación bayesiana (ver figura 7), y el filtrado de Kalman.

Todos los métodos de super-resolución, además de requerir del proceso de registro de imagen, trabajan con un conjunto de imágenes de baja resolución con unas determinadas características o requisitos, como pueden ser por ejemplo, la existencia de un determinado movimiento relativo entre imágenes, determinados niveles de



emborronamiento o la obtención de una misma imagen desde diferentes puntos de vista. Dependiendo de qué proceso se vaya a llevar a cabo, se necesitarán unas imágenes u otras.

Los métodos de captura o registro de imágenes se pueden clasificar en cuatro grandes grupos [25]:

- Escena desde diferentes puntos de vista.
- Escena en diferentes tiempos (análisis multitemporal).
- Escena con diferentes sensores (análisis multimodal).
- Escena con registro de imágenes y modelo.

Además, la mayoría de los métodos de registro constan de una serie de pasos que son los siguientes:

- Detección de características (“Feature Detection”): en este primer paso se deben registrar todos los patrones y objetos distintivos de forma manual o, preferiblemente, de forma automática para su posterior procesamiento. Estas características pueden ser identificadas por sus puntos más representativos (centros de gravedad, finales de línea, puntos distintivos), los cuales son denominados “puntos de control” (CP’s).

- Coincidencia de características (“Feature Matching”): se debe establecer una correspondencia entre las características detectadas en la imagen percibida y en la imagen de referencia. Para este fin se utilizan varios descriptores de características y medidas de similitud.

- Estimación del modelo de transformación (“Transform Model Estimation”): se deben estimar una serie de parámetros de la función denominada “mapping” alineando la imagen percibida con la de referencia.

- Re-muestreo de la imagen y transformación (“Image Re-sampling and Transformation”): la imagen percibida debe ser transformada por medio de las funciones “mapping”.

Finalmente, en relación al tema de la mejora de la calidad de imágenes, un gran número de personas han investigado sobre el tema, y se pueden encontrar varios métodos para obtener imágenes de alta resolución a partir de imágenes de baja resolución. Sin embargo, la mayoría de los métodos son pequeñas variaciones de otros ya creados.

Por lo tanto, de forma general, los métodos de súper resolución se pueden dividir de la siguiente manera:

- Métodos de interpolación no uniforme.
- Métodos en el dominio de la frecuencia.
- Métodos de reconstrucción regularizada.

- Métodos de proyección en conjuntos convexos (POCS).

Fuera de esta pequeña división se pueden encontrar otros métodos que usan filtros, procesos iterativos o incluso, algunos métodos que pueden construir una imagen de alta resolución a partir de imágenes de baja resolución con distintos factores de emborronamiento o distorsión.

3.3.1. Métodos de interpolación no uniforme

Este enfoque es el método más intuitivo para la reconstrucción de imágenes de súper resolución. Las tres etapas de la figura 9, se realizan sucesivamente en este enfoque:

- Estimación del movimiento relativo, es decir, del registro (si la información del movimiento no es conocida).
- Interpolación no uniforme para producir una imagen de mejor resolución.
- En función del modelo de observación, el proceso para eliminar el emborronamiento.

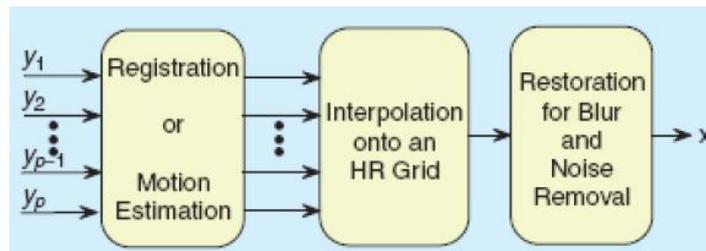


Figura 9. Esquema para la super-resolución [41]

En la figura 10, se puede ver de forma esquemática el proceso. Con la información del movimiento relativo estimado, se obtiene la imagen de alta resolución con puntos de muestreo espaciados de manera no uniforme.

Entonces, se sigue un proceso de reconstrucción directa o iterativa para producir puntos de muestreo uniformemente espaciados. Una vez que se ha obtenido la imagen de alta resolución por interpolación no uniforme, se trata el problema de la restauración para eliminar el ruido y el emborronamiento.

La reconstrucción se puede llevar a cabo aplicando cualquier método de deconvolución que considere la presencia de ruido. En relación a este tipo de proceso véase el trabajo realizado por Ur y Gross [49] en el que se realiza una interpolación no uniforme de un conjunto de imágenes de baja resolución desplazadas espacialmente utilizando el teorema de muestreo multicanal generalizado de Papoulis [40] y Brown [15]. Por otro lado, Komatsu [34] realizó un método para adquirir una mejor resolución de imágenes aplicando el algoritmo de Landweber [35] a partir de varias imágenes tomadas simultáneamente con múltiples cámaras.

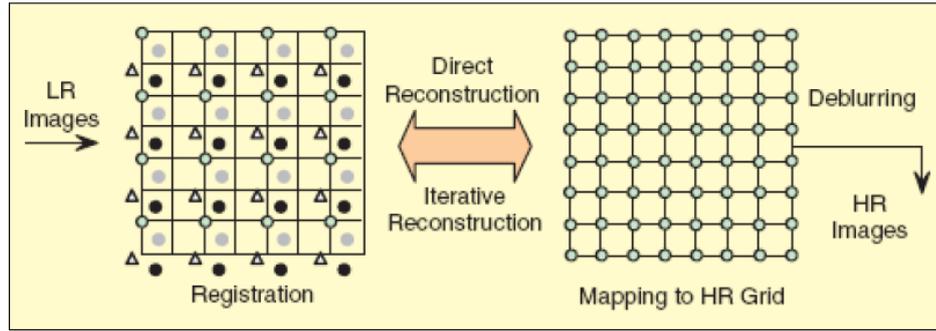


Figura 10. Esquema de interpolación no uniforme [25]

3.3.2. Métodos en el dominio de frecuencia

El enfoque en el dominio de la frecuencia hace uso explícito del “aliasing” que existe en cada imagen de baja resolución para reconstruir una imagen de súper resolución. Tsai y Huang [48] en primer lugar obtienen un sistema de ecuaciones que describe la relación entre las imágenes de baja resolución y la imagen de alta resolución deseada mediante movimiento relativo entre imágenes. El enfoque en el dominio de la frecuencia está basado en los tres principios siguientes:

- La propiedad de retardo temporal de la transformada de Fourier.
- La relación de “aliasing” entre la transformada de Fourier continua (CFT) de una imagen original de alta resolución y la transformada de Fourier discreta (DFT) de las imágenes observadas de baja resolución.
- La suposición de que la imagen original de alta resolución tiene limitado su ancho de banda.

Estas propiedades hacen posible formular el sistema de ecuaciones que relaciona los coeficientes de la “DFT” con “aliasing” de las imágenes de baja resolución, con las muestras de la “CFT” de la imagen desconocida. Por ejemplo, en la figura 11, se suponen dos señales de baja resolución en una dimensión muestreada por debajo del límite de muestreo de Nyquist. Con los tres principios anteriormente citados, se puede descomponer las señales de baja resolución con “aliasing” en una señal de alta resolución sin “aliasing” tal y como se muestra en la figura 11.

Sea $x_k(t_1, t_2)$ una imagen continua de alta resolución y $X(w_1, w_2)$ su “CFT”. La traslación global, que es el único movimiento considerado en el enfoque en el dominio de la frecuencia, produce la k -ésima imagen distinta $x_k(t_1, t_2) = x(t_1 + \delta_{k,1}, t_2 + \delta_{k,2})$ donde $\delta_{k,1}$ y $\delta_{k,2}$ son valores arbitrarios pero conocidos, y $k = 1, 2, \dots, p$. Con la primera de las propiedades explicadas anteriormente, $X_k(w_1, w_2)$ puede ser escrita como se muestra en la siguiente ecuación:

$$X_k(w_1, w_2) = \exp[j2\pi(\delta_{k,1}w_1 + \delta_{k,2}w_2)]X(w_1, w_2)$$

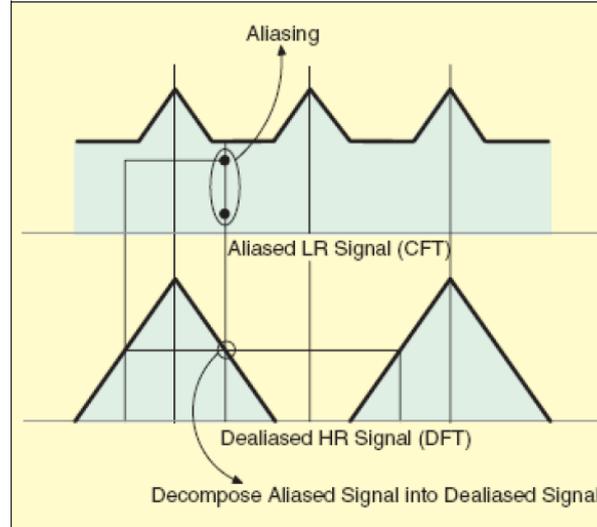


Figura 11. Relación de aliasing entre las imágenes HR y LR [25]

La imagen que se obtiene es muestreada con periodos de muestreo T_1 y T_2 para generar el conjunto de imágenes de baja resolución $y_k[n_1, n_2]$. De las dos siguientes condiciones anteriormente citadas $|X_k(w_1, w_2)| = 0$ para $|w_1| \geq (L_1\pi/T_1)$, $|w_2| \geq (L_2\pi/T_2)$ se puede escribir la relación entre la “CFT” de la imagen de alta resolución y la “DFT” de las k muestras observadas de baja resolución:

$$Y_k[\Omega_1, \Omega_2] = \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{n_1=0}^{L_1-1} \sum_{n_2=0}^{L_2-1} X_k x \left(\frac{2\pi}{T_1} \left(\frac{\Omega_1}{N_1} + n_1 \right), \frac{2\pi}{T_2} \left(\frac{\Omega_2}{N_2} + n_2 \right) \right)$$

3.3.3. Métodos de reconstrucción regularizada

En general, el enfoque de la reconstrucción de imágenes es un problema mal planteado debido a un número insuficiente de muestras de baja resolución y operadores de emborronamiento mal condicionados. Los procedimientos adoptados para estabilizar el problema mal planteado se denominan de regularización. Existen dos enfoques de regularización, determinista y estocástico. Típicamente, se introducen técnicas de mínimos cuadrados (constrained least squares – “CLS”) y aproximación a posteriori (maximum a posteriori – “MAP”).

3.3.4. Métodos de proyección en conjuntos convexos (POCS).

Finalmente, el método “POCS” describe un método iterativo alternativo incorporando conocimiento previo de la imagen sobre la solución en el proceso de reconstrucción. Con las estimaciones de los parámetros del modelo de observación, este



algoritmo resuelve de forma simultánea el problema de la restauración e interpolación para estimar la imagen de súper resolución.

La formulación del método “POCS” fue sugerida por primera vez por Stark y Oskoui [46]. Este método fue extendido por Tekalp [47] incluyendo observación del ruido.

3.4. Super-resolución aplicada a una secuencia de vídeo.

A continuación, y como ejemplo se va a analizar el proceso general de super-resolución aplicado a una secuencia de video.

Las cámaras digitales se basan en un conjunto de elementos fotosensibles para capturar una imagen, llamados dispositivos de carga acoplada. Como se ha comentado anteriormente, cada carga acoplada del dispositivo, o CCD, se corresponde directamente con un valor de píxel en una imagen.

La resolución de la imagen depende del número y el espaciamiento de los CCD de la matriz, y dado que el número y el espaciamiento de los CCD son finitos, la información de alta frecuencia se pierde. Cada imagen de baja resolución (LRI), creada por la matriz CCD, es un muestreo diezmado de la zona de alta resolución (HR) que se capturó. A nivel de píxel el modelo se convierte en:

$$LR_i(x,y) = De[HR(w,v)]$$

Donde $De[\cdot]$ es el operador decimación. El algoritmo de super-resolución determina $De[\cdot]$ y utiliza el LR_i para estimar HR.

Debido al movimiento de la cámara, cada imagen proporciona una muestra diferente de la misma zona. Con el fin de restaurar la información de alta resolución es necesario determinar el movimiento relativo entre cada imagen de baja resolución. Una vez que se determina el movimiento, las imágenes se alinean y se convierten en un marco de alta resolución.



Capítulo 4.

Aplicación de algoritmos de Multirresolución no lineales para la Super-resolución

En general, la mayoría de los algoritmos de super-resolución depende de movimiento relativo, a nivel sub-píxel, entre las imágenes de baja resolución, aunque se han desarrollado algoritmos que no lo hacen [13].

Por lo tanto, la mayoría de los algoritmos de super-resolución requieren un algoritmo de registro que pueda determinar con precisión la relación del movimiento sub-píxel entre las imágenes.

A continuación, se desarrolla un algoritmo de super-resolución usando producto tensor y valores puntuales.

4.1. Algoritmo utilizado

En esta sección describiremos el algoritmo utilizado para hacer super-resolución de imágenes.

En primer lugar, es necesario mencionar que para aplicar un algoritmo de super-resolución es necesario disponer de dos o más imágenes a una resolución menor que aquella que queremos alcanzar. Además, dichas imágenes deben ser resultado de un registro en el que el espaciado entre píxeles de las dos imágenes debe ser inferior a 1 píxel. En nuestro caso, obtendremos dichas imágenes a baja resolución a partir de una imagen a alta resolución.

Para ello, escogeremos los píxeles situados en las posiciones $(2n+1, 2n+1)$ para la primera imagen y los píxeles situados en las posiciones $(2n, 2n)$ para la segunda imagen. En la figura 12 se muestra un ejemplo para una imagen a alta resolución de 8×8 píxeles.

Una vez disponemos de dos imágenes a baja resolución, es necesario conocer el espaciado entre píxeles existente entre las dichas imágenes a baja resolución y la imagen a alta resolución. En nuestro caso, supondremos que dos píxeles situados en la misma posición en las imágenes a baja resolución, están espaciados 0.5 píxeles en dirección diagonal. Para realizar el proceso de super-resolución es necesario obtener la pirámide de multirresolución de ambas imágenes. Para ello, se ha utilizado el esquema



PPH para valores puntuales de cuatro puntos. Dicho esquema ha sido presentado y explicado en la Sección 2.4.3.

Una vez que disponemos de las pirámides de multirresolución, colocaremos cada uno de los coeficientes obtenidos en su posición respectiva dentro de la malla de alta resolución mostrada en la figura 12. En este momento podemos interpolar los huecos con la información de la que disponemos. En nuestro caso, realizaremos una interpolación estadística. En caso de que los cuatro coeficientes que rodean un hueco (ver figura 12) sean iguales, directamente asignaremos la media de los cuatro coeficientes (notar que dos coeficientes pertenecen a la primera de las imágenes a baja resolución y los otros dos a la segunda) al coeficiente que queremos calcular. Si los coeficientes no son exactamente iguales, calcularemos la desviación típica de las 4 posibles combinaciones de 3 píxeles. Escogeremos aquella combinación de 3 píxeles que tenga la menor desviación típica. De esta manera, intentamos no promediar píxeles que atraviesen bordes presentes en la imagen. Este proceso no es óptimo, ya que el promediado introduce difusión. Como perspectiva futura, es nuestra intención proponer un método más sofisticado de interpolación no lineal bidimensional.

Es necesario mencionar que este proceso de interpolación se realiza para cada grupo de detalles y para los coeficientes de la escala inferior que se muestran en las figuras 14 y 16.

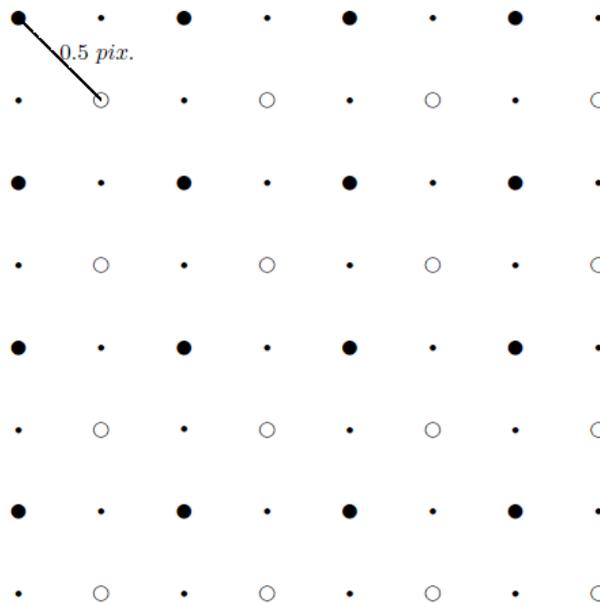


Figura 12: Mallado a alta resolución donde se han colocado las dos imágenes a baja resolución (representadas por \circ y \bullet) separadas por 0.5 píxeles en dirección diagonal. Los puntos donde no disponemos de información a partir de las dos imágenes de baja resolución se han representado por \cdot .



4.2. Experimentos numéricos

Para los experimentos numéricos, en primer lugar hemos utilizado la imagen mostrada en la figura 13. Para aplicar la super-resolución, hemos obtenido dos imágenes a baja resolución a partir de la imagen a alta resolución. Una vez hecho esto, hemos construido la pirámide de multirresolución de ambas imágenes a baja resolución. Dichas pirámides se muestran en la figura 14. Podemos observar que la calidad de la imagen reconstruida es bastante buena.

Además, vemos que se han realizado los bordes de la imagen.

El segundo experimento que hemos realizado se muestra en la figura 15. El proceso seguido es similar al descrito con anterioridad. En este caso podemos observar que el resultado obtenido es bueno, sin embargo aparecen efectos numéricos cerca de los bordes oblicuos de la imagen. Esto es debido a que la multirresolución se realiza mediante un producto tensor en el que primero se trabaja por columnas y luego por filas. Esto hace que los bordes oblicuos no sean correctamente detectados y, por tanto, reconstruidos. En la figura 16 se muestran las pirámides de multirresolución de las dos imágenes utilizadas.

Podemos ver que en este caso también hemos utilizado un sólo nivel de multirresolución.

En los experimentos que hemos realizado, los mejores resultados que hemos obtenido han sido para pirámides de un sólo nivel de multirresolución. Esto es debido a que si construimos pirámides de multirresolución de más niveles, los errores que cometemos al realizar la interpolación estadística, afectarán a todas las escalas al hacer la reconstrucción final de la imagen.



Figura 13: Izquierda arriba, imagen a baja resolución 1. Derecha arriba, imagen a baja resolución 2. Izquierda abajo, imagen a alta resolución original. Derecha abajo, imagen a alta resolución reconstruida.

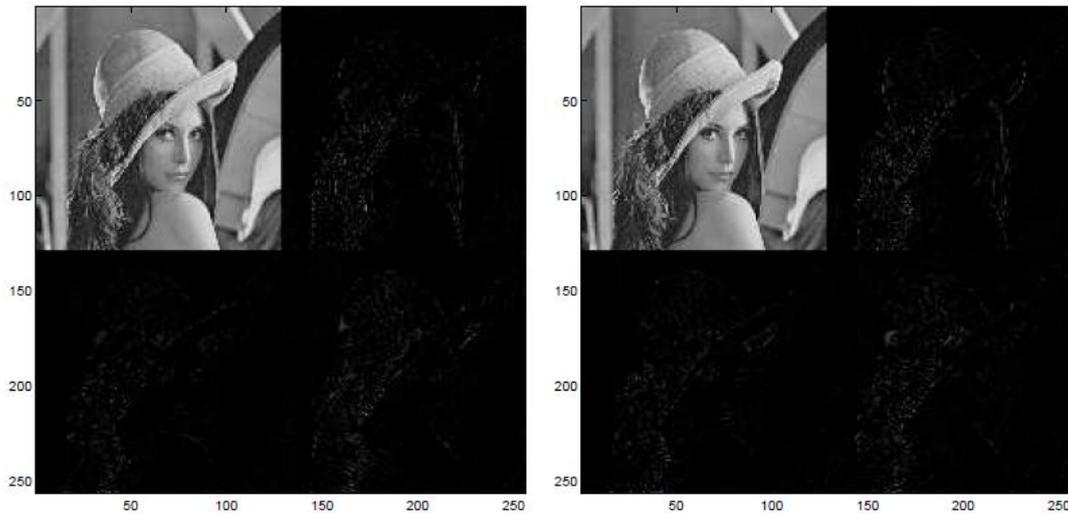


Figura 14: Izquierda pirámide de multirresolución de la imagen a baja resolución 1. Derecha, pirámide de multirresolución de la imagen a baja resolución 2. Podemos ver que sólo hemos utilizado un nivel de resolución para obtener la imagen a alta resolución.

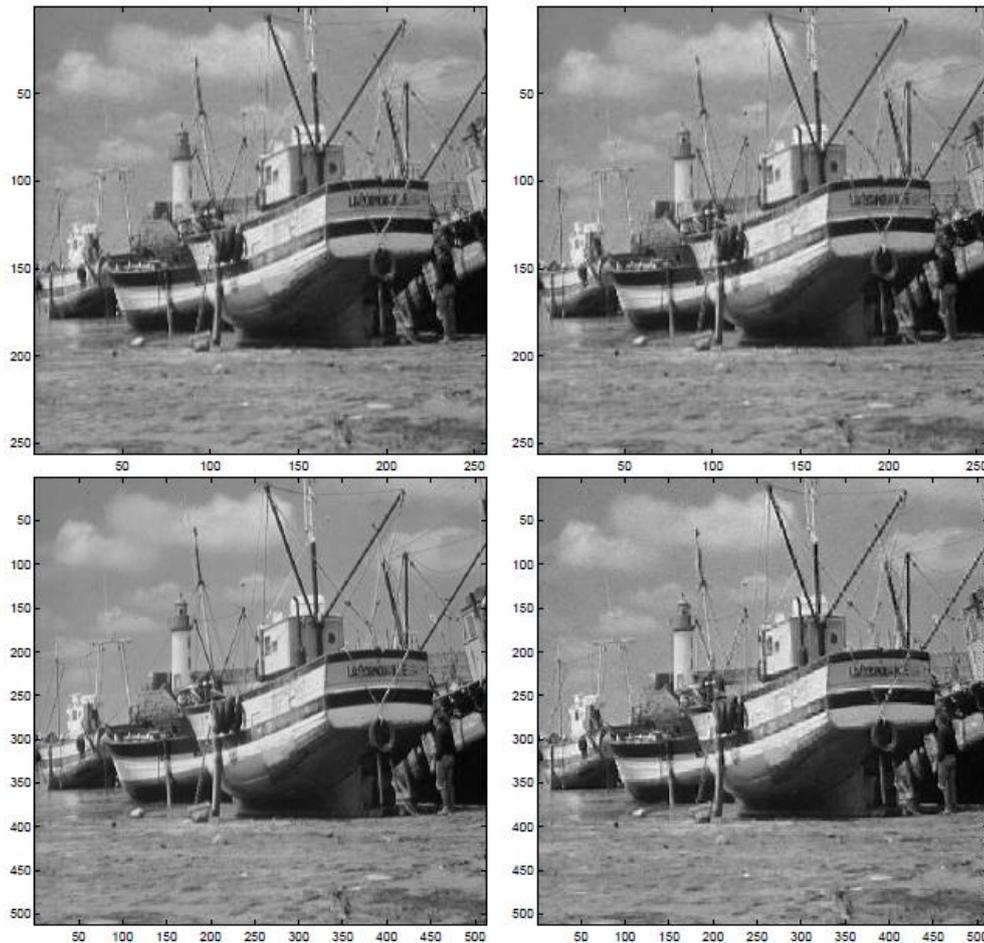


Figura 15: Izquierda arriba, imagen a baja resolución 1. Derecha arriba, imagen a baja resolución 2. Izquierda abajo, imagen a alta resolución original. Derecha abajo, imagen a alta resolución reconstruida.

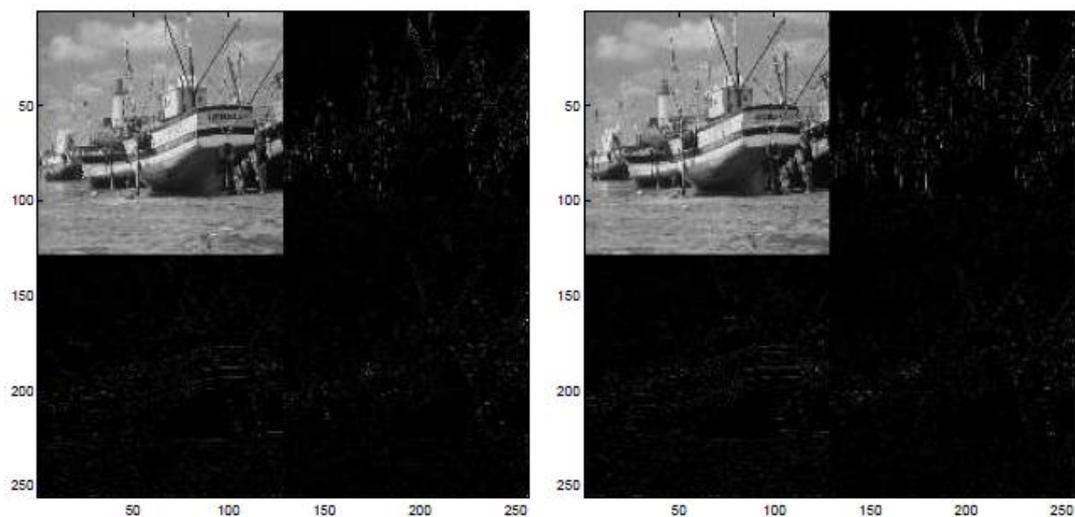


Figura 16: Izquierda pirámide de multirresolución de la imagen a baja resolución 1. Derecha, pirámide de multirresolución de la imagen a baja resolución 2. Podemos ver que sólo hemos utilizado un nivel de resolución para obtener la imagen a alta resolución.



Conclusiones y perspectivas

Este trabajo ha analizado la posibilidad de aumentar la resolución de una imagen basándose en esquemas de multirresolución no lineales que han sido aplicados usando super-resolución.

El objetivo de los esquemas de multirresolución, es obtener una reordenación multiescala de la información contenida en un conjunto de datos discretos a una cierta resolución.

La reconstrucción de una función a partir de un conjunto de datos discretos se consigue mediante un interpolante, construido por interpolación lineal (esquemas de subdivisión lineales). Sin embargo, en los esquemas de subdivisión lineales, la exactitud de la aproximación cerca de una discontinuidad está limitada. Este problema se soluciona empleando esquemas de subdivisión no lineales, capaces de estudiar el comportamiento de la función en las discontinuidades.

El principal método estudiado ha sido el esquema de multirresolución de Harten. El objetivo del enfoque propuesto por Harten es la construcción de esquemas de multirresolución adaptados a cada proceso de discretización. Esto se consigue definiendo un operador reconstrucción apropiado.

La reconstrucción opera en sentido inverso a la discretización, toma una secuencia de datos discretos, y construye, a partir de la información proporcionada por dichos datos, la función de la que provienen. Estos operadores, discretización (D_k) y reconstrucción (R_k), son los elementos a partir de los cuales se construyen los operadores decimación (D_k^{k-1}) y predicción (P_{k-1}^k) del esquema de multirresolución.

En cuanto a sus aplicaciones, las representaciones de multirresolución de datos discretos son herramientas útiles en varias áreas de aplicación como, el aumento de resolución de una imagen, la compresión de imágenes, la eliminación de ruido, el diseño asistido por ordenador geométrico (CAGD), o métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

Sin embargo, mediante multirresolución, la calidad que se obtiene de una única imagen en baja resolución es limitada y la interpolación en una imagen no permite establecer la recuperación de alta frecuencia perdida. Por lo tanto se necesitan múltiples observaciones de la misma escena (super-resolución).

Se llama super-resolución al método de reconstrucción que permite obtener una imagen con mayor resolución (HR) espacial mediante el uso de varias imágenes de menor resolución (LR).

La mayoría de algoritmos de super-resolución, requieren la alineación precisa de múltiples tramas, que se logran mediante el registro de imágenes.



Sin embargo, no todas las imágenes en baja resolución, son útiles para super-resolución. La aplicación de algoritmos de super-resolución, es posible sólo si las imágenes tienen turnos de sub-píxeles, es decir, si los marcos están alineados en el plano de alta resolución, los píxeles no pueden alinearse perfectamente de un cuadro a otro, deben poseer un cambio sub-píxel para ser efectivo.

Para aplicar un algoritmo de super-resolución es necesario disponer de dos o más imágenes a una resolución menor que aquella que queremos alcanzar. Además, dichas imágenes deben ser resultado de un registro en el que el espaciado entre píxeles de las dos imágenes debe ser inferior a un píxel. Posteriormente, es necesario obtener la pirámide de multirresolución de ambas imágenes, y colocar cada uno de los coeficientes obtenidos en su posición respectiva dentro de una malla de alta resolución. A continuación, se interpolan los huecos con la información de la que se dispone. Concretamente, en este trabajo, para interpolar se ha utilizado el esquema PPH para valores puntuales de cuatro puntos.

Finalmente, y como conclusión de los experimentos realizados, podemos decir que los mejores resultados se han obtenido para pirámides de un sólo nivel de multirresolución, debido a que cuando se construyen pirámides de multirresolución de más niveles, los errores que se comenten en la interpolación estadística, afectarán a todas las escalas al hacer la reconstrucción final de la imagen.

Por tanto, como proyecto futuro pensamos utilizar algoritmos de interpolación no lineal en dos dimensiones que permitan realizar una mejor aproximación de los huecos que quedan en la imagen. Esperamos que esta aproximación nos permita utilizar un mayor número de niveles en la pirámide de multirresolución.



Referencias Bibliográficas

- [1] S. Amat, K. Dadourian, J. Liandrat, *Analysis of a class of non linear subdivision schemes and associated multiresolution transforms*. Advanced Computational Mathematic, 34, pp. 253-277, (2011).
- [2] S. Amat, K. Dadourian, J. Liandrat, *On a nonlinear subdivision scheme avoiding Gibbs oscillations and converging towards Cs functions with $s > 1$* . Mathematics of Computation, 80, 959-971, (2010).
- [3] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat and J.C. Trillo, *Analysis of a New Nonlinear Subdivision Scheme. Applications in Image Processing*. Foundations of Computational Mathematics, 6(2), 193-225, (2002).
- [4] S. Amat, and J. Liandrat, *On the stability of the PPH nonlinear multiresolution*. Appl. Comp. Harm. Anal., 18 (2), 198-206, (2005).
- [5] S. Amat and J. Liandrat, *Nonlinear thresholding of multiresolution decompositions adapted to the presence of discontinuities*. Advances in Computational Mathematics, 38, pp. 133-146, (2013).
- [6] S. Amat, J. Ruiz, J.C. Trillo, *Fast Multiresolution Algorithms and their related variational problems for image denoising*. J. Sci. Comput, 43, pp.1-23, (2010).
- [7] F. Arándiga, A. Cohen, R. Donat, N. Dyn, *Interpolation and approximation of piecewise smooth functions*, SIAM Journal of Numerical Analysis 43 (1), 41–57 (2005).
- [8] F. Arándiga, A. Cohen, P. Mulet, D. F. Yáñez, *Nuevas técnicas de Multirresolución utilizando procesos estadísticos de aprendizaje*. XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, XI Congreso de Matemática Aplicada, pp. 1–8, (2009).
- [9] F. Arándiga and R. Donat, *Nonlinear multiscale decompositions: The approach of A. Harten*, Numerical Algorithms, 23, pp. 175–216, (2000).
- [10] F. Arándiga, R. Donat, A. Harten, *Multiresolution based on weighted averages of the hat function I: linear reconstruction technique*, SIAM J. Numer. Anal., 36, pp. 160–203, (1998).
- [11] F. Arándiga, and R. Donat, *Nonlinear Multi-scale Decomposition: The Approach of A.Harten*, Numerical Algorithms, 23, 175-216, (2000).
- [12] S. Bacchelli, S. Papi, *Filtered wavelets thresholding methods*. J. Comput. Appl. Math., 164–165, 39–52, (2004).
- [13] S. Baker, and T. Kanade, *Limits on Super-Resolution and How to Break Them*. Technical Report, Pittsburgh, PA: The Robotics Institute, Carnegie Mellon University, (2002).
- [14] A.M. Belda García. *Técnicas de Interpolación WENO y su aplicación al procesamiento de imágenes*. (Tesis Doctoral). Universidad de Valencia, 2010.



- [15] J.L. Brown, *Multi-channel sampling of low pass signals*. Source: Trans. Circuits Syst., IEEE, vol. CAS-28, pp.101-106, (1981).
- [16] E.E. Catmull and J.H. Clark, *Recursively generated B-spline surfaces on topological meshes*. Computer Aided Design, 19 (453), 350-355, (1978).
- [17] G. Chaikin, *An algorithm for high speed curve generation*. Computer Graphics and Image Processing, 3, 346-349, (1974).
- [18] A. Chambolle, R.A. DeVore, N. Lee, B.J. Lucier, *Nonlinear wavelet image processing: variational problem, compression and noise removal through wavelet shrinkage*. IEEE Trans. Image Process. 7, 319–335 (1998).
- [19] A. Cohen. *Numerical Analysis of Wavelet Methods*, Elsevier, (2003).
- [20] A. Cohen, I. Daubechies, J. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., 45, pp. 485–460, (1992).
- [21] A. Cohen, N. Dyn and B. Matei, *Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation*. Appl. Comp. Harm. Anal., 15, 89-116, (2003).
- [22] I. Daubechies, O. Runborg and W. Sweldens, *Normal multiresolution approximation of curves*, Const. Approx., 20 (3), 399-363, (2004).
- [23] D. Donoho, T.P-Y. Yu, *Nonlinear pyramid transforms based on median interpolation*. SIAM J. Math. Anal., 31 (5), 1030-1061, (2000).
- [24] M. Elad, and A. Feuer, *Super-Resolution Reconstruction of Continuous Image Sequences*. Technical Report 1042, Haifa 32000, Israel: The Technion Israel Institute of Technology, (1996).
- [25] M.A. Fernández, *Implantación de un algoritmo de Super-resolución*. Trabajo Fin de Carrera, Universidad Pontificia Comillas, (2010).
- [26] D. Francia, G. Toraldo. *Resolving Power and Information*. J. Opt. Soc. Am., 45: 497–500, (1995).
- [27] M.S. Floater and C.A. Michelli, *Nonlinear stationary subdivision*, Approximation theory: in memory of A.K. Varna, edt: Govil N.K, Mohapatra N., Nashed Z., Sharma A., Szabados J., 209-224, (1998).
- [28] S. Harizanov, P. Oswald, *Stability of nonlinear subdivision and multiscale transforms*, Pre-print Univ. Bremen, to appear in Constr. Approx., (2008).
- [29] A. Harten, *Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets*. J. Appl. Numer. Math., 12, pp. 153–192, (1993).
- [30] A. Harten, *Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets*. Journal of Applied Numerical Mathematics, 12, 153–193 (1993).
- [31] A. Harten, *Multiresolution Representation of data: General framework*. SIAM J. Numer. Anal., 33, pp. 1205–1256, (1996).



- [32] T.S. Huang, and R. Tsai, *Multi-Frame Image Restoration and Registration*, Advances in Computer Vision and Image Processing, 1 :317–339 (1984).
- [33] D. Keren, et al., *Image Sequence Enhancement Using Sub-Pixel Displacements*. Proceedings of the 1988 Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 742–746, (1988).
- [34] T. Komatsu, K. Aizawa, T. Igarashi, T. Saito, *Signal-processing based method for acquiring very high resolution image with multiple cameras and its theoretical analysis*. Source: Proc. Inst. Elec. Eng. vol.140, no.1, pt.I, pp.19-25, (1993).
- [35] L. Landweber, *An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind*. Source: Amer. J. vol.73, pp.615-624, (1951).
- [36] P. D. Lax, X.-D. Liu, *Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes*, SIAM Journal on Scientific Computing 19 (2), 319–340 (1998).
- [37] D. Levy, G. Puppo, G. Russo, *Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis 33 (3), 547–571 (1999).
- [38] B. Matei, *Smoothness characterization and stability for nonlinear multiscale representations*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338, 321–326 (2004).
- [39] P. Oswald, *Smoothness of Nonlinear Median-Interpolation Subdivision*, Adv. Comput. Math., 20(4), 401-423, (2004).
- [40] A. Papoulis, *Generalized sampling theorem*. Source: Trans. Circuits Syst., IEEE, vol.24, pp.652-654, (1977).
- [41] S.C. Park, M.K. Park, M.G. Kang, *Super-Resolution Image Reconstruction: A Technical Overview*. Signal Processing Magazine, Journal Paper, IEEE, vol.20, n^o.3, pp. 21-36, (2003).
- [42] S. Peleg, et al., *Improving Image Resolution Using Subpixel Motion*, Pattern Recognition Letters, 223–226, (1987).
- [43] E. Romero. *Super-resolución en imágenes de Resonancia Magnética Cardíaca*. Universidad Nacional de Colombia, (2009).
- [44] F.J., Ruiz Díaz, *Zoom de Imágenes Digitales usando Esquemas de Subdivisión*. (Trabajo fin de Carrera). Universidad Politécnica de Cartagena, (2008).
- [45] R. Schultz, and R. Stevenson, *Extraction of High-Resolution Frames From Video Sequences*, IEEE Transactions on Image Processing, 5 (6):996–1011 (1996).
- [46] H. Stark, P. Oskoui, *High resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections*. Source: J. Opt. Soc. Am. A, vol.6, pp. 1715-1726, (1989).
- [47] A.M. Tekalp, M.K. Ozkan, M.I. Sezan, *High-resolution image reconstruction from lower-resolution image sequences and space varying image restoration*. Source: Proc.



IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), San Francisco, CA. vol.3, pp.169-172, (1992).

[48] R.Y. Tsai, T.S. Huang, *Multipleframe image restoration and registration*. Source: *Advances in Computer Vision and Image Processing*. Greenwich, CT: JAI Press Inc., pp.317-339, (1984).

[49] H. Ur, and D. Gross, *Improved Resolution From Subpixel Shifted Pictures*, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 54 (2):181–1863 (1992).

[50] D.L. Ward, *Redundant discrete wavelet transform based super-resolution using sub-pixel image registration*. Thesis. Faculty Graduate School of Engineering and Management Air Force Institute of Technology Air University, (2003).