

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIÓN
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**

Departamento de Tecnologías de la Información y la Comunicación



**TRABAJO FIN DE GRADO
GRADO EN INGENIERÍA DE SISTEMAS DE TELECOMUNICACIÓN**

**Investigaciones en la Técnica de Ecuación Integral Aplicada
al Análisis de Dispositivos de Radiofrecuencia Basados en
Estructuras Periódicas**



Alumna: Celia Gómez Molina
Director: Alejandro Álvarez Melcón
Codirector: Fernando Quesada Pereira
Fecha: 23 de septiembre de 2014

Autor	Celia Gómez Molina
E-mail del autor	cely_gm@hotmail.com
Director	Alejandro Álvarez Melcón
E-mail del Director	alejandro.alvarez@upct.es
Codirector	Fernando Quesada Pereira
E-mail del Codirector	fernando.quesada@upct.es
Título del TFG	Investigaciones en la Técnica de Ecuación Integral Aplicada al Análisis de Dispositivos de Radiofrecuencia Basados en Estructuras Periódicas
Descriptorios	Función de Green, Ecuación Integral, Método de Ewald, Transformación de Kummer, Gradiente, Desarrollo en Serie de Taylor.
Resumen	<p>Este proyecto trata de comparar los métodos existentes para la aceleración del cálculo de la función de Green 2D periódica con periodicidad en una dimensión y de su gradiente.</p> <p>Primero se revisará la formulación de la función de Green tanto en el dominio espacial como en el dominio espectral. También se presentará la obtención del gradiente de la función de Green en ambos dominios. Tras ello, se aplicará el método de Ewald a la función de Green espacial y a su gradiente con el fin de acelerar la convergencia de estas funciones.</p> <p>Se estudiará la importancia del llamado 'splitting parameter' y se propondrá un método de conmutación entre la función de Green espectral y el método de Ewald.</p> <p>Después se aplicará la transformación de Kummer a la función de Green espectral, extrayendo distintos términos del desarrollo de Taylor. Se propondrá una formulación general para la extracción de N términos asintóticos que nos conducirá a una novedosa formulación basada en las funciones polilogarítmicas.</p> <p>A continuación, se mostrarán los resultados obtenidos con el programa Matlab sobre la convergencia de dichos métodos y se estudiarán las simulaciones sobre el tiempo de cómputo que necesita cada método para alcanzar un determinado error, según la distancia del punto de observación.</p> <p>Con ello podremos demostrar la utilidad de los métodos aplicados y además, obtener ciertas conclusiones acerca del método más óptimo y preciso para el cálculo de la función de Green.</p> <p>Para finalizar se expondrán las líneas futuras de investigación.</p>
Titulación	Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación
Departamento	Tecnologías de la Información y las Comunicaciones
Fecha de Presentación	Septiembre 2014

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a mis directores de proyecto, Alejandro Álvarez Melcón y Fernando Quesada Pereira por su tiempo, dedicación y supervisión, que han hecho posible que este proyecto se realizase de manera satisfactoria tanto a nivel personal como académico.

Índice general

Introducción	v
1. Función de Green	1
1.1. Formulación de la Función de Green Espacial	1
1.2. Formulación de la Función de Green Espectral	8
1.3. Formulación del Gradiente de la Función de Green	10
1.3.1. Cálculo de $\nabla G(\bar{r}, \bar{r}')$	10
1.3.2. Cálculo de $\nabla \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}')$	11
2. Método de Ewald	13
2.1. Cálculo de la Función de Green Utilizando el Método de Ewald	14
2.1.1. Transformación de $G_{espectral}(\bar{r}, \bar{r}')$	15
2.1.2. Transformación de $G_{espacial}(\bar{r}, \bar{r}')$	21
2.1.3. Selección del Splitting Parameter(ε)	23
2.1.4. Criterio para Conmutar de las Series Exactas a las del Método de Ewald	25
2.2. Cálculo del Gradiente de la Función de Green Utilizando el Método de Ewald	26
2.2.1. Cálculo de $\nabla G_{espectral}(\bar{r}, \bar{r}')$	27
2.2.2. Cálculo de $\nabla G_{espacial}(\bar{r}, \bar{r}')$	29
2.2.3. Criterio para Conmutar de las Series Exactas a las del Método de Ewald	29
3. Transformación de Kummer	31

3.1. Extracción de un término	31
3.1.1. Cálculo de la Función de Green	32
3.1.2. Cálculo del Gradiente de la Función de Green	35
3.2. Extracción de dos términos	39
3.2.1. Cálculo de la Función de Green	39
3.2.2. Cálculo del Gradiente de la Función de Green	45
3.3. Extracción de cuatro términos	49
3.4. Extracción de N términos	55
4. Resultados	61
4.1. Función de Green	62
4.2. Gradiente de la Función de Green	65
4.3. Método de Ewald	71
4.3.1. Función de Green	71
4.3.2. Gradiente de la Función de Green	75
4.4. Método de Kummer	77
4.4.1. Función de Green	77
4.4.2. Gradiente de la Función de Green	86
4.5. Comparativa del Tiempo de Cómputo	89
5. Conclusiones y Líneas de Investigación Futuras	95
5.1. Conclusiones Globales del Proyecto	95
5.2. Líneas de Investigación Futuras	96
A. Apéndice: Detalles de la Formulación del Capítulo 3	97

Índice de figuras

1.1.	Configuración física de una distribución infinita periódica de hilos de corriente infinitos en la dirección y dispuestos en el eje x	2
1.2.	Configuración física de una línea de corriente infinita a lo largo del eje y	2
4.1.	Convergencia de las funciones de Green espacial y espectral para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	63
4.2.	Convergencia de las funciones de Green espacial y espectral para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	63
4.3.	Convergencia de las funciones de Green espacial y espectral para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	64
4.4.	Convergencia de las funciones de Green espacial y espectral para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	65
4.5.	Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	66
4.6.	Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	66
4.7.	Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	67
4.8.	Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	67
4.9.	Error relativo (%) de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	69

4.10. Error relativo (%) de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	69
4.11. Error relativo (%) de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	70
4.12. Error relativo (%) de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	70
4.13. Error relativo de convergencia del método de Ewald para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	72
4.14. Error relativo de convergencia del método de Ewald para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	73
4.15. Error relativo de convergencia del método de Ewald para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	73
4.16. Error relativo de convergencia del método de Ewald para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	74
4.17. Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	75
4.18. Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	76
4.19. Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$	76
4.20. Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	77
4.21. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$	78
4.22. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$	78

4.23. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$	79
4.24. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para el punto $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 1^\circ$	80
4.25. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para el punto $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	80
4.26. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para el punto $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 89^\circ$	81
4.27. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.000000001\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 1^\circ$	83
4.28. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.000000001\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$	84
4.29. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.000000001\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$	84
4.30. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.000000001\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 89^\circ$	85
4.31. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer aplicada al gradiente de la función de Green para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$	87
4.32. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer aplicada al gradiente de la función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$	87
4.33. Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer aplicada al gradiente de la función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$	88
4.34. Comparativa del tiempo de cómputo de los diferentes métodos desarrollados para distancias pequeñas entre fuente y punto de observación.	90
4.35. Comparativa del tiempo de cómputo de los diferentes métodos desarrollados para distintas distancias fuente-observación.	91

Introducción

El uso de técnicas para el análisis de circuitos de microondas es uno de los temas de mayor interés en la industria de las telecomunicaciones. Esto se debe a que permite ahorrar tiempo de desarrollo y reducir las fases de experimentación en el laboratorio puesto que posibilita que el diseño de los componentes necesarios para los sistemas de comunicaciones pueda realizarse a través de un ordenador.

Uno de los métodos numéricos que cuenta con mayor potencial, debido a sus posibilidades para realizar el análisis de ciertas estructuras de manera eficiente, es la técnica de ecuación integral [1, 2].

Dicha técnica presenta la solución para la densidad de corriente inducida, en la superficie del elemento que radia, en forma de ecuación integral donde dicha densidad de corriente inducida desconocida es parte del integrando.

Se ha empleado con éxito en múltiples escenarios: análisis de antenas radiando en condiciones de espacio libre, análisis de circuitos de radiofrecuencia multicapa, problemas y circuitos en guíaonda y para antenas de cavidad.

La ecuación integral se resuelve usando técnicas numéricas como, por ejemplo, el método de los momentos [1]. La aplicación del método de los momentos a la solución de los problemas electromagnéticos periódicos requiere el cálculo de las funciones de Green periódicas. Desde su planteamiento teórico en 1825, la función de Green se ha convertido en una herramienta alternativa para abordar problemas con ecuaciones integrales homogéneas y no homogéneas, bajo ciertas condiciones de contorno.

La técnica de ecuación integral cuenta con algunas dificultades para su implementación, debido a que dichas funciones de Green periódicas en un medio homogéneo⁰ se formulan como series infinitas espaciales o espectrales, las cuales pueden presentar singularidades

⁰Conviene no confundir entre medio homogéneo, que es aquel medio cuyas características físicas no varían de un punto a otro del mismo; y ecuación integral homogénea, que es aquella ecuación integral cuya la función o fuente de excitación es nula y que sirve para encontrar los modos u ondas que se propagan en una determinada estructura.

y una lenta convergencia. Debido a estos factores, uno de los retos más importantes en la implementación eficiente de técnicas de ecuación integral es el cálculo eficiente de las funciones de Green en las estructuras a analizar [3].

La lenta convergencia de las series se solventó en [4] aplicando una técnica de aceleración de series llamada la técnica de Ewald. Esta técnica convierte las series originales de lenta convergencia en otras que exhiben convergencia gaussiana. A pesar de ello, las nuevas series requieren el cálculo de funciones especiales, que pueden ralentizar el tiempo total de cómputo.

Por otro lado, numerosas publicaciones [5,6] hacen referencia a la aplicación de la transformación de Kummer con el objetivo de acelerar la convergencia de la serie espectral de las funciones de Green.

A estos dos métodos podemos añadir gran número de técnicas analíticas y numéricas que también han sido aplicadas con el mismo objetivo, como la transformación de Veisoglu [7] y el método de Lattice Sum [8].

La mayoría de publicaciones coinciden en que el método de Ewald es el mejor de ellos en la mayoría de escenarios por su versatilidad y su gran compromiso entre precisión y eficiencia.

En el contexto descrito, el objetivo de este proyecto será la revisión de la técnica de ecuación integral aplicada al análisis de estructuras periódicas. Más concretamente, trataremos de calcular de manera eficiente las funciones de Green 2D periódicas con periodicidad en una dimensión, así como su gradiente. Se estudiarán en profundidad el método de Ewald y la transformación de Kummer y compararemos los resultados obtenidos con la herramienta software desarrollada para el cálculo eficiente de la función de Green. Se podrá comparar el tiempo de cómputo requerido por estos métodos y se obtendrán conclusiones relevantes en cuanto a la eficiencia de dichas técnicas.

Cabe resaltar que los desarrollos realizados con la técnica de Kummer han dado lugar a una nueva formulación basada en las funciones polilogarítmicas o 'polylogs' [9].

Estructura de la memoria

Capítulo 1. Función de Green En este primer capítulo se detalla la obtención de la función de Green para una línea de corriente infinita, así como para una sucesión infinita de líneas de corriente dispuestas periódicamente en el eje x .

Se obtendrá tanto la formulación en el dominio espacial como en el dominio espectral.

También en este capítulo se obtendrá el gradiente de la función de Green en ambos dominios.

Capítulo 2. Método de Ewald En este capítulo se aplica el método de Ewald a la función de Green espacial obtenida en el capítulo anterior. Se detalla la formulación del método así como el estudio del llamado 'splitting parameter' óptimo [4, 11].

Por último, se propone un método de conmutación mediante el cual se determina cuándo calcular la función de Green mediante su formulación directa espectral y cuándo hacerlo mediante el método de Ewald.

Capítulo 3. Método de Kummer Este capítulo trata sobre la aplicación del método de Kummer [12] a la función de Green espectral, obtenida en el primer capítulo. Se aplica el método extrayendo distintos factores del desarrollo en serie de Taylor de la función. Además, se propone una formulación general para la extracción de N términos asintóticos. Dicho desarrollo nos conduce a una novedosa formulación basada en funciones polilogarítmicas [9].

Capítulo 4. Resultados En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al implementar, en la herramienta software Matlab, la formulación desarrollada en este proyecto.

Se verá la convergencia de la función de Green espacial y espectral para distintas distancias fuente-observación, así como la de su gradiente.

Se verá también el resultado de aplicar tanto el método de Ewald como el de Kummer y su mejora en cuanto a la convergencia.

Y por último, se estudiarán los tiempos de cálculo de dichos métodos comparados con la función de Green original, para un mismo error. Este estudio se realizará para distintas distancias.

Capítulo 5. Conclusiones y Líneas de Investigación Futuras En este último capítulo se presentan las conclusiones globales del proyecto, la aplicación y utilidad del mismo y las líneas futuras de investigación.

Capítulo 1

Función de Green

En este capítulo se va a obtener la función de Green, tanto en su forma espacial como en su forma espectral, con la que posteriormente trabajaremos. La formularemos para un escenario concreto.

La estructura que se analizará consta de un número infinito de líneas de corriente invariantes a lo largo del eje y , situadas a lo largo del eje x con un periodo d , tal y como se muestra en la Figura 1.1.

Cabe destacar que este problema es de gran interés práctico puesto que las funciones de Green para el problema presentado son la base del análisis, mediante la técnica de ecuación integral, de dispositivos inductivos en guíaonda. Éstos son muy utilizados en aplicaciones espaciales y en dispositivos de tecnologías emergentes como son la de guíaonda integrada en sustrado (SIW) [13] o la de guíaonda no-radiativa integrada en sustrado (SINRD) [14, 15].

1.1. Formulación de la Función de Green Espacial

Comenzamos por la obtención de la función de Green en el dominio espacial. La estrategia a seguir es obtener la función de Green de un solo hilo y , por superposición, obtener la función de Green de una distribución periódica de hilos infinitos en el eje x .

En la Figura 1.2 se muestra nuestro escenario de partida. Una línea de corriente puntual e invariante en el eje y que produce una onda cilíndrica propagándose en el plano (x, z) .

Para obtener su función de Green partimos de la ecuación de potencial vector:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (1.1)$$

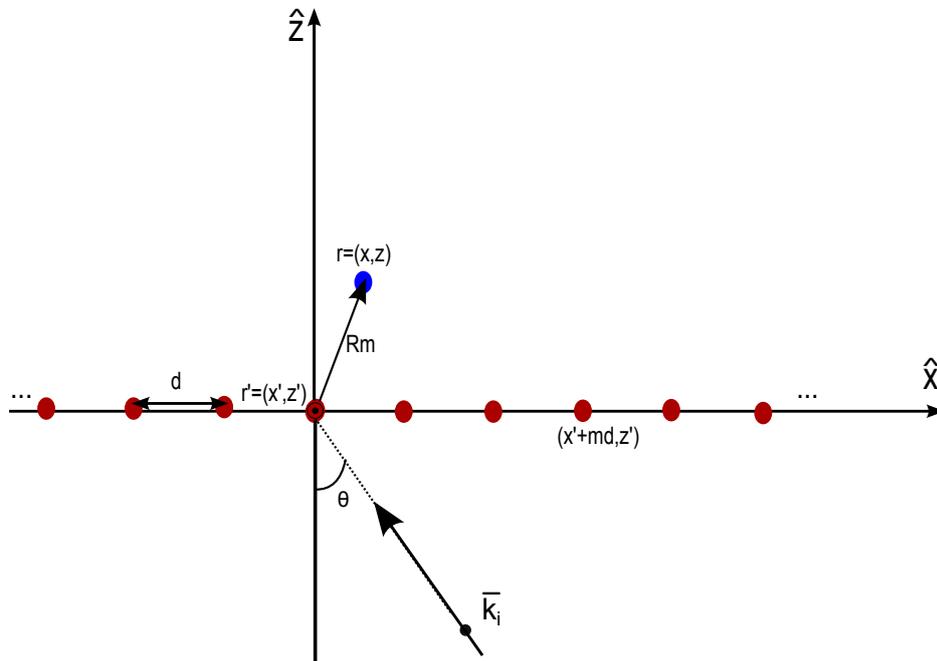


Figura 1.1: Configuración física de una distribución infinita periódica de hilos de corriente infinitos en la dirección y dispuestos en el eje x .

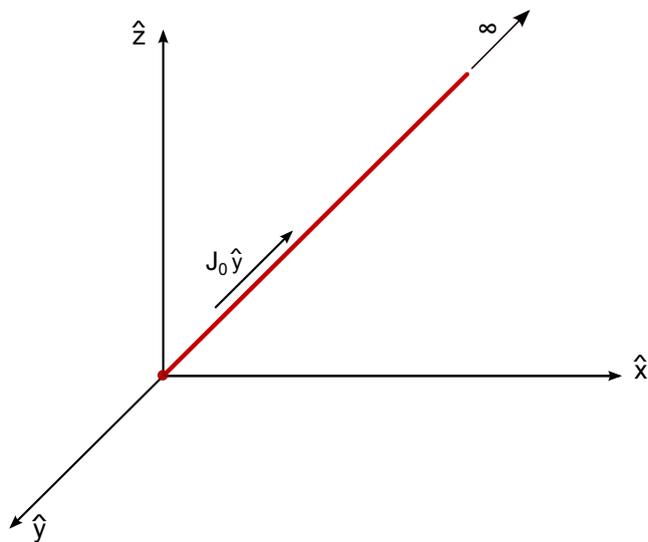


Figura 1.2: Configuración física de una línea de corriente infinita a lo largo del eje y .

donde k es el número de onda del medio homogéneo y μ es la permeabilidad del medio.

Tomamos una corriente constante dirigida en y : $\vec{J} = J_y \hat{y} = J_0 \hat{y}$; de forma que la ecuación de potencial vector queda

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_x + k^2 A_x &= 0 \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y &= -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z + k^2 A_z &= 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

Cabe destacar que las componentes A_x y A_z son nulas ya que no existe excitación que las genere.

Ahora, vamos a resolver la ecuación diferencial homogénea y luego aplicaremos las condiciones de contorno. Usaremos coordenadas cilíndricas dada la geometría del problema. De esta forma, la ecuación diferencial homogénea que tenemos que resolver es la siguiente:

$$\nabla^2 A_y + k^2 A_y = 0\tag{1.3}$$

Recordemos que el operador laplaciano de una función f en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\tag{1.4}$$

Por otro lado, A_y variará según ρ debido a que, tomando un eje de coordenadas cilíndrico con el eje y como altura del sistema, la geometría es invariante en y y en ϕ .

Ahora aplicamos dicho operador a $A_y(\rho)$

$$\nabla^2 A_y(\rho) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A_y(\rho) = \frac{\partial^2 A_y(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_y(\rho)}{\partial \rho}\tag{1.5}$$

Introducimos la expresión anterior en (1.3) y la ecuación diferencial homogénea quedaría:

$$\frac{\partial^2 A_y(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_y(\rho)}{\partial \rho} + k^2 A_y(\rho) = 0\tag{1.6}$$

La solución de esta ecuación diferencial se puede expresar como combinación lineal de las funciones de Hankel de primera y segunda especie, y orden 0.

$$A_y(\rho) = AH_0^{(1)}(k\rho) + BH_0^{(2)}(k\rho) \quad (1.7)$$

donde

$$H_0^{(1)}(k\rho) = J_0(k\rho) + j Y_0(k\rho) \rightarrow \text{onda cilíndrica entrante} \quad (1.8)$$

$$H_0^{(2)}(k\rho) = J_0(k\rho) - j Y_0(k\rho) \rightarrow \text{onda cilíndrica saliente} \quad (1.9)$$

La condición de contorno en la superficie del infinito indica que sólo hay onda progresiva y, por tanto, podemos decir que $A = 0$. De esta forma nos queda que:

$$A_y(\rho) = BH_0^{(2)}(k\rho) \quad (1.10)$$

Para calcular el valor de B aplicamos las condiciones de contorno de la fuente, es decir, cuando $\rho \rightarrow 0$ debe cumplirse la ecuación original:

$$(\rho \rightarrow 0) \mapsto \frac{\partial^2 A_y(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_y(\rho)}{\partial \rho} + k^2 A_y(\rho) = -\mu J_0 \quad (1.11)$$

Para sacar las condiciones de contorno integramos en un cilindro de pequeño tamaño alrededor de la fuente, de forma que nos queda la siguiente ecuación con integrales volumétricas:

$$\iiint_v \nabla^2 A_y(\rho) dV + k^2 \iiint_v A_y(\rho) dV = - \iiint_v \mu J_0 dV \quad (1.12)$$

Expresamos $\nabla^2 A_y(\rho)$ como $\nabla^2 A_y(\rho) = \nabla \cdot (\nabla A_y)$ y aplicamos el teorema de la divergencia. Esto nos permite realizar la siguiente transformación:

$$\iiint \nabla^2 A_y(\rho) dV = \iiint \nabla \cdot (\nabla A_y(\rho)) dV = \iint \nabla A_y(\rho) \cdot d\vec{S} \quad (1.13)$$

De forma que la ecuación (1.12) queda:

$$\underbrace{\iint \nabla A_y(\rho) \cdot d\vec{S}}_{1)} = -k^2 \underbrace{\iiint A_y(\rho) dV}_{2)} - \underbrace{\mu J_0 \iiint dV}_{3)} \quad (1.14)$$

Ahora vemos qué ocurre con estos tres términos cuando las dimensiones del cilindro se hacen tender a cero ($\rho \rightarrow 0$), ya que es ahí donde imponemos las condiciones de contorno.

1) Por un lado, tenemos la integral de superficie, que la podemos escribir como:

$$\iint \nabla A_y(\rho) \cdot d\vec{S} = \iint \nabla A_y(\rho) \cdot \rho d\phi dy \hat{\rho} \quad (1.15)$$

y como se cumple que:

$$\begin{aligned} \nabla A_y(\rho) \cdot \hat{\rho} &= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} \right) A_y(\rho) \cdot \hat{\rho} \\ &= \frac{\partial A_y(\rho)}{\partial \rho} \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} = \frac{\partial A_y(\rho)}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Si introducimos (1.16) en (1.15), lo que queda es calcular el siguiente límite:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial A_y(\rho)}{\partial \rho} \rho d\phi dy \quad (1.17)$$

Vamos a ver cómo queda la derivada parcial. Como $A_y(\rho) = BH_0^{(2)}(k\rho)$, usamos la aproximación de la función de Hankel cuando $\rho \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(k\rho) &\simeq 1 - j \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{k\rho}{2} \right) + \gamma \right] \\ &= 1 - j \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{k\rho}{2} \right) + \ln(e^\gamma) \right] \\ &= 1 - j \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{k\rho e^\gamma}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

siendo γ la constante de Euler, cuyo valor aproximado es $\gamma \approx 0,577215\dots$

Ahora derivamos respecto de ρ la expresión anterior:

$$\frac{\partial H_0^{(2)}(k\rho)}{\partial \rho} \simeq -j \frac{2}{\pi} \frac{\frac{k e^\gamma}{2}}{\frac{k \rho e^\gamma}{2}} = -j \frac{2}{\pi} \frac{1}{\rho} \quad (1.19)$$

y por tanto:

$$\frac{\partial A_y(\rho)}{\partial \rho} \simeq -Bj \frac{2}{\pi} \frac{1}{\rho} \quad (1.20)$$

De forma que el límite queda:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial A_y(\rho)}{\partial \rho} \rho d\phi dy = -Bj \frac{2}{\pi} \frac{1}{\rho} \rho d\phi dy = -Bj \frac{2}{\pi} d\phi dy \quad (1.21)$$

2) Por otro lado, tenemos la integral de volumen:

$$-k^2 \iiint A_y(\rho) dV \quad (1.22)$$

Recordamos que $A_y = BH_0^{(2)}$ y que cuando el argumento de la función de Hankel es pequeño (que ocurre cuando $\rho \rightarrow 0$), la función de Hankel se comporta como:

$$H_0^{(2)}(k\rho) \propto \ln(\rho) \quad (1.23)$$

Por ello, si introducimos la equivalencia anterior y expresamos el dV como $\rho d\phi d\rho dy$, este término cuando $\rho \rightarrow 0$ queda:

$$A_y(\rho) \rho d\phi d\rho dy \sim \ln(\rho) \rho \rightarrow 0 \quad (1.24)$$

De esta forma, podemos despreciar esta integral de volumen en la ecuación (1.14).

3) En el tercer término ponemos el dV como $dV = dS dl = dS dy$ y nos queda:

$$-\mu \iiint J_0 dV = -\mu \iint J_0 dS \int dy = -\mu I_0 \int dy \quad (1.25)$$

Por tanto, la ecuación final, cuando $\rho \rightarrow 0$, queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{y=-\infty}^{\infty} -Bj \frac{2}{\pi} d\phi dy &= -0 - \mu I_0 \int_{y=-\infty}^{\infty} dy \\ -2\pi Bj \frac{2}{\pi} \int_{y=-\infty}^{\infty} dy &= -\mu I_0 \int_{y=-\infty}^{\infty} dy \\ B &= \frac{\mu I_0}{4j} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Tomamos $I_0 = 1$ porque buscamos la función de Green, que es el potencial producido por una fuente de corriente elemental. De esta forma, nos queda que:

$$A_y(\rho) = BH_0^{(2)}(k\rho) = \frac{\mu}{4j}H_0^{(2)}(k\rho) \quad (1.27)$$

Sabiendo que ρ en coordenadas cartesianas es igual a $\sqrt{x^2 + z^2}$, el potencial vector quedaría en coordenadas cartesianas (con el sistema de coordenadas mostrado en la Figura 1.2) como:

$$A_y(x, z) = \frac{\mu}{4j}H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + z^2}) \quad (1.28)$$

Por tanto, la función de Green de un hilo de corriente infinito podemos decir que es:

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(kR) \quad (1.29)$$

Siendo R la distancia entre el punto fuente \bar{r}' y el punto de observación \bar{r} : $R = |\bar{r} - \bar{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}$ y k la constante de propagación de la onda en el medio.

Una vez calculada la función de Green de un hilo infinito, por superposición, la función de Green de la estructura compuesta por infinitas líneas de corriente periódicas espaciadas una distancia d , puede escribirse con la siguiente serie infinita de ondas cilíndricas:

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x0}md} \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(kR_m) \quad (1.30)$$

donde $k_{x0} = k \sin(\theta)$ y $R_m = \sqrt{(x - x' - md)^2 + (z - z')^2}$ contiene las distancias espaciales de las infinitas líneas de corriente al punto de observación.

En esta fórmula, el término $e^{-jk_{x0}md}$ contiene el desfase progresivo que experimentan las líneas de corriente debido al ángulo de incidencia de la onda plana de excitación (ver Figura 1.1).

La función de Green periódica queda expresada como una superposición de infinitas ondas cilíndricas, y por ello se denomina la función de Green en el dominio espacial. Ésta será nuestra fórmula de partida y sobre la cual trabajaremos en los siguientes apartados.

1.2. Formulación de la Función de Green Espectral

Una vez deducida la función de Green en su forma espacial para una distribución periódica de hilos infinitos de corriente, vamos a obtener su forma espectral, haciendo uso de la identidad de Sommerfeld para ondas cilíndricas.

La identidad de Sommerfeld para ondas cilíndricas es la siguiente:

$$\frac{j\pi}{2} H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + z^2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2}|z-z'|}}{j\sqrt{k^2 - k_x^2}} \cos(k_x x) dk_x \quad (1.31)$$

Multiplicamos a ambos lados por $\frac{2}{j\pi}$ para eliminar la constante que acompaña a la función de Hankel y también multiplicamos por $\frac{1}{4j}$ para obtener en el primer término de la ecuación la función de Green espacial deducida en la sección anterior.

$$\frac{2/j\pi}{2} \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + z^2}) = \frac{2}{j\pi} \frac{1}{4j} \int_0^\infty \frac{e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2}|z-z'|}}{j\sqrt{k^2 - k_x^2}} \cos(k_x x) dk_x \quad (1.32)$$

$$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + z^2}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2}|z-z'|}}{j\sqrt{k^2 - k_x^2}} 2 \cos(k_x x) dk_x \quad (1.33)$$

Dado que la función es par podemos expresarlo, utilizando la fórmula de Euler para el coseno, de la siguiente manera:

$$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + z^2}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2}|z-z'|}}{j\sqrt{k^2 - k_x^2}} e^{jk_x x} dk_x \quad (1.34)$$

Definimos $\gamma = \sqrt{k_x^2 - k^2}$, de forma que

$$\gamma = \sqrt{k_x^2 - k^2} = \sqrt{-1} \sqrt{k^2 - k_x^2} = \begin{cases} +j\sqrt{k^2 - k_x^2} \\ -j\sqrt{k^2 - k_x^2} \end{cases} \quad (1.35)$$

Las dos soluciones matemáticamente son correctas pero vamos a razonar físicamente cuál tomar. Tomamos $\gamma = +j\sqrt{k^2 - k_x^2}$ para el exponente, de forma que nos quede una exponencial decreciente. Así, cuando nos alejemos en el eje x , la función de Green es cada vez más pequeña. Para el denominador, tomamos $\gamma = -j\sqrt{k^2 - k_x^2}$, de forma que $j\sqrt{k^2 - k_x^2} = -\gamma$ y podemos anular el signo negativo que aparece en la ecuación (1.34).

Con ello, la ecuación (1.34) queda:

$$\frac{1}{4j} \mathbf{H}_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + z^2}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{e^{-j\gamma|z-z'|}}{-\gamma} e^{jk_x x} dk_x \quad (1.36)$$

$$\frac{1}{4j} \mathbf{H}_0^{(2)}(k\sqrt{x^2 + z^2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{e^{-j\gamma|z-z'|}}{\gamma} e^{jk_x x} dk_x \quad (1.37)$$

Dada una función $f(x)$ y su transformada de Fourier $\tilde{f}(k_x)$, la relación entre ellas es:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x) e^{jk_x x} dk_x \quad (1.38)$$

Identificando términos podemos obtener que la transformada de Fourier, que denotaremos como $\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}')$, de

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{4j} \mathbf{H}_0^{(2)}(k\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}) \quad (1.39)$$

es:

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2} \frac{e^{-j\gamma|z-z'|}}{\gamma} \quad (1.40)$$

En el documento usaremos esta tilde para señalar funciones en el dominio espectral.

Por otro lado, un desplazamiento en el dominio espacial supone, por las propiedades de la transformada de Fourier, una exponencial en el dominio espectral, de forma que si la función espacial es:

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{4j} \mathbf{H}_0^{(2)}(k\sqrt{(x-x'-md)^2 + (z-z')^2}) \quad (1.41)$$

El desplazamiento md de la coordenada espacial x hace que la función espectral quede como:

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2} \frac{e^{-j\gamma|z-z'|}}{\gamma} e^{-jk_x(x-x')} \quad (1.42)$$

Ya tenemos la función de Green espectral de un solo hilo de corriente desplazado. Para obtener la transformada en el dominio espectral de una sucesión infinita de hilos desplazados, aplicamos la suma de Poisson:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(md) = \frac{1}{d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{2\pi m}{d}\right) \quad (1.43)$$

De esta forma, la función de Green espectral de una distribución infinita periódica de líneas infinitas de corriente sería:

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'| - jk_{xm}(x-x')} \quad (1.44)$$

donde $k_{xm} = k_{x0} + \frac{2\pi m}{d}$ y $\gamma_m = \sqrt{k_{xm}^2 - k^2}$.

Como se puede observar, la función de Green queda ahora expresada como una superposición de infinitas ondas planas, o armónicos espaciales, también llamados armónicos de Floquet. Por ello, ésta es la representación espectral de la función de Green.

En cualquier caso, las dos representaciones, espacial y espectral, contienen series de lenta convergencia. Éste es el principal motivo por el cual no resulta conveniente utilizarlas directamente, pues ello supondría tiempos de cálculo demasiado grandes.

1.3. Formulación del Gradiente de la Función de Green

Una vez obtenidas las funciones de Green en el dominio espacial y espectral, vamos a obtener el gradiente de dichas funciones. Éste será necesario para plantear ecuaciones integrales donde aparezcan en el mismo problema corrientes eléctricas y corrientes magnéticas acopladas entre sí mediante operadores diferenciales.

Vamos a obtenerlo aplicando el operador gradiente a las ecuaciones (1.30) y (1.44).

Comenzaremos obteniendo el gradiente de la función de Green espacial y posteriormente obtendremos el de la espectral.

1.3.1. Cálculo de $\nabla G(\vec{r}, \vec{r}')$

Comenzamos por calcular el gradiente de la función de Green en su forma espacial. Recordemos que el gradiente en coordenadas cartesianas se define como:

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.45)$$

Partimos de la ecuación (1.30) y calculamos su gradiente:

$$\nabla G(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x0}md} \frac{1}{4j} \left[\frac{\partial H_0^{(2)}(kR_m)}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial H_0^{(2)}(kR_m)}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right] \quad (1.46)$$

Sabiendo que $\frac{\partial H_0^{(2)}(x)}{\partial x} = -H_1^{(2)}(x)$, la ecuación anterior la podemos expresar como:

$$\nabla G(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x0}md} \frac{1}{4j} \left[-\frac{2k(x-x'-md)}{2R_m} H_1^{(2)}(kR_m) \hat{\mathbf{x}} - \frac{2k(z-z')}{2R_m} H_1^{(2)}(kR_m) \hat{\mathbf{z}} \right] \quad (1.47)$$

Simplificando términos y reagrupando, obtenemos que $\nabla G(\bar{r}, \bar{r}')$ queda de la siguiente manera:

$$\nabla G(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_{x0}md}}{R_m} \frac{k}{4j} H_1^{(2)}(kR_m) \cdot [-(x-x'-md)\hat{\mathbf{x}} - (z-z')\hat{\mathbf{z}}] \quad (1.48)$$

Una vez que tenemos el gradiente en el dominio espacial, vamos a obtenerlo en el dominio espectral.

1.3.2. Cálculo de $\nabla \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}')$

En este caso, el cálculo del gradiente de la función de Green es muy sencillo porque hay que derivar funciones exponenciales. La mayor dificultad radica en los valores absolutos pero éstos se pueden tratar convenientemente con funciones signo⁰.

Partimos de la ecuación (1.44) y calculamos su gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} \left[e^{-\gamma_m|z-z'|-jk_{xm}(x-x')} (-jk_{xm} \hat{\mathbf{x}}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\gamma_m|z-z'|-jk_{xm}(x-x')} (-\gamma_m \operatorname{sgn}(z-z') \hat{\mathbf{z}}) \right] \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m|z-z'|-jk_{xm}(x-x')} [-jk_{xm} \hat{\mathbf{x}} - \gamma_m \operatorname{sgn}(z-z') \hat{\mathbf{z}}] \end{aligned} \quad (1.49)$$

⁰Esta función se define como $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Una vez obtenido el gradiente en su forma espectral ya tenemos formulado el gradiente en ambos dominios, espacial y espectral, para poder trabajar posteriormente con él. Era necesario la formulación del mismo porque uno de los objetivos principales del proyecto será abordar la aceleración de las series del gradiente que aparecen en las ecuaciones (1.48) y (1.49).

Capítulo 2

Método de Ewald

Las funciones de Green espacial y espectral, formuladas en el capítulo 1 como series infinitas, presentan una lenta convergencia. Una forma de evitar esa lenta convergencia es introducir nuevas transformaciones que permitan el cálculo de dichas funciones en un menor número de términos y, por tanto, de manera más eficiente. El objetivo de este capítulo es estudiar el método de Ewald con el fin de acelerar la convergencia de estas series.

El método de Ewald fue desarrollado por Peter Paul Ewald en 1921 para determinar la energía electrostática de cristales iónicos [10]. Es un método para el cómputo de las interacciones de largo alcance en sistemas periódicos. La suma de Ewald se podría considerar un caso especial de la suma de Poisson, reemplazando el sumatorio de las energías que interactúan en el dominio espacial por su equivalente en el dominio espectral. En este método, la interacción de largo alcance se divide en dos partes: una contribución de corto alcance y una de largo alcance, que no presenta singularidad. La de corto alcance es calculada en el dominio espectral, mientras que la de largo alcance se calcula en el dominio espacial.

La ventaja del método de Ewald es su rápida convergencia comparado con el cálculo de la serie directa de la función de Green en el dominio espacial. Esto significa que el método tiene gran precisión y velocidad de cómputo.

En este capítulo se va a mostrar cómo aplicar el método de Ewald, que ya fue aplicado en [4], para acelerar la convergencia de la función de Green deducida en el capítulo 1.

En primer lugar, nos centraremos en aplicar este método a la propia función de Green en el dominio espacial. Obtendremos las dos componentes del método de Ewald G_{espacial} y $G_{\text{espectral}}$, cuya suma dará lugar a la función de Green total. Cabe destacar que la división de la función de Green en dos partes se realiza a través del 'splitting parameter' (ε), el

cual habrá que ajustar para que cada una de las formulaciones (interacciones de largo y corto alcance) se aplique en la zona óptima de convergencia.

A continuación, se presentará un método de conmutación que nos permitirá escoger entre el uso de la función de Green espectral y el método de Ewald, según la distancia de observación. Este método se propone con el propósito de computar de manera eficiente la función de Green en cada punto ya que, según la distancia de observación, será más eficiente computacionalmente un método u otro.

Finalmente, se realizarán los mismos pasos para el gradiente de la función de Green, obteniendo las componentes del método de Ewald $\nabla G_{\text{espacial}}$ y $\nabla G_{\text{espectral}}$. Se presentará también, para el caso del gradiente, el criterio para conmutar entre la serie espectral y la de Ewald.

2.1. Cálculo de la Función de Green Utilizando el Método de Ewald

Comenzamos por la aplicación del método de Ewald a la función de Green en su forma espacial. Partimos de la siguiente ecuación:

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x0}md} \frac{1}{4j} \text{H}_0^{(2)}(kR_m) \quad (2.1)$$

donde, como ya sabemos, $k_{x0} = k \sin \theta_0$ y $R_m = \sqrt{(z - z')^2 + (x - x' - md)^2}$.

La transformación de Ewald para los campos radiados cilíndricos en 2D es la siguiente:

$$\frac{1}{4j} \text{H}_0^{(2)}(kR_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds \quad (2.2)$$

donde s es la variable de integración y es compleja.

El método de Ewald se obtiene separando la integral de la ecuación (2.2) en dos partes:

$$\int_0^{\infty} = \left(\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \quad (2.3)$$

donde ε es el conocido como 'splitting parameter', debido a que es el parámetro que determina por dónde dividir la integral que se extiende hasta el infinito.

Usando dicho parámetro, podemos representar la función de Green como la suma de dos contribuciones:

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = G_{espectral}(\bar{r}, \bar{r}') + G_{espacial}(\bar{r}, \bar{r}') \quad (2.4)$$

con

$$G_{espectral}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x0}md} \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-R_m^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds \quad (2.5)$$

$$G_{espacial}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x0}md} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds \quad (2.6)$$

Los subíndices indican que las correspondientes contribuciones de la función de Green la transformaremos en representaciones espectral y espacial modificadas. Es importante destacar que la serie $G_{espectral}$ no decae exponencialmente. Por el contrario, la serie $G_{espacial}$ tiene convergencia gaussiana debido a que $Re(s) > \varepsilon$ en el camino de integración en el plano complejo, tal y como se explica de manera más detallada en [4].

2.1.1. Transformación de $G_{espectral}(\bar{r}, \bar{r}')$

Como la serie $G_{espectral}$ no decae de manera exponencial, vamos a transformarla al dominio espectral usando la fórmula de la suma de Poisson:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(md) = \frac{1}{d} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) \quad (2.7)$$

donde $\tilde{f}(k_x)$ es la transformada de Fourier de la función $f(\xi)$, es decir:

$$\tilde{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-jk_x \xi} d\xi \quad (2.8)$$

Partiendo de la ecuación (2.5) e identificando términos, podemos escribir $f(md)$ como:

$$f(md) = \frac{1}{2\pi} e^{-jk_{x0}md} \int_0^{\varepsilon} \frac{e^{-R_m^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds \quad (2.9)$$

Sustituimos R_m y queda:

$$f(md) = \frac{1}{2\pi} e^{-jk_{x0}md} \int_0^\varepsilon \frac{e^{-[(z-z')^2+(x-x'-md)^2]s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds \quad (2.10)$$

Por tanto, $f(\xi)$ es:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} e^{-jk_{x0}\xi} \int_0^\varepsilon \frac{e^{-[(z-z')^2+(x-x'-\xi)^2]s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds \quad (2.11)$$

Y haciendo uso de la ecuación (2.8) escribimos $\tilde{f}(k_x)$ como:

$$\tilde{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-jk_{x0}\xi} \int_0^\varepsilon \frac{e^{-[(z-z')^2+(x-x'-\xi)^2]s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds e^{-jk_x\xi} d\xi \quad (2.12)$$

De esta forma, si $k_x = \frac{2\pi p}{d}$ entonces la ecuación anterior queda:

$$\tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-jk_{x0}\xi} \int_0^\varepsilon \frac{e^{-[(z-z')^2+(x-x'-\xi)^2]s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds e^{-j\left(\frac{2\pi p}{d}\right)\xi} d\xi \quad (2.13)$$

ordenamos términos

$$\tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^\varepsilon ds \frac{1}{s} e^{-[(z-z')^2+(x-x'-\xi)^2]s^2 + \frac{k^2}{4s^2}} e^{-j\left(\frac{2\pi p}{d} + k_{x0}\right)\xi} \quad (2.14)$$

denominamos $k_{xp} = k_{x0} + \frac{2\pi p}{d}$ y escribimos la ecuación anterior como:

$$\tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^\varepsilon ds \frac{1}{s} e^{-[(z-z')^2+(x-x'-\xi)^2]s^2 + \frac{k^2}{4s^2}} e^{-jk_{xp}\xi} \quad (2.15)$$

Ahora buscamos aplicar la siguiente identidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2 + b\xi} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (2.16)$$

Llamamos I a la parte de la integral de (2.15) que depende de ξ y operamos:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(z-z')^2+(x-x'-\xi)^2]s^2 + \frac{k^2}{4s^2}} e^{-jk_{xp}\xi} d\xi \quad (2.17)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[(z-z')^2+(x-x'-\xi)^2]s^2 + \frac{k^2}{4s^2} - jk_{xp}\xi} d\xi \quad (2.18)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-z')^2s^2 - (x-x')^2s^2 + 2(x-x')\xi s^2 - \xi^2s^2 + \frac{k^2}{4s^2} - jk_{xp}\xi} d\xi \quad (2.19)$$

agrupamos términos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(z-z')^2s^2 - (x-x')^2s^2 + \frac{k^2}{4s^2}} e^{-\xi^2s^2 + \xi(2s^2(x-x') - jk_{xp})} d\xi \quad (2.20)$$

y nos quedan dos exponenciales. La primera no depende de ξ y por tanto la podemos sacar fuera de la integral. La segunda exponencial es la que vamos a transformar aplicando (2.16). Identificamos que:

$$\begin{cases} a = s^2 \\ b = 2s^2(x-x') - jk_{xp} \end{cases}$$

Vamos a calcular, en primer lugar, el valor de $\frac{b^2}{4a}$:

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{4a} &= \frac{(2s^2(x-x') - jk_{xp})^2}{4s^2} \\ &= \frac{4s^4(x-x')^2 - 4s^2(x-x')jk_{xp} - k_{xp}^2}{4s^2} \\ &= s^2(x-x')^2 - (x-x')jk_{xp} - \frac{k_{xp}^2}{4s^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ahora realizamos la transformación indicada en (2.16) y queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2s^2 + \xi(2s^2(x-x') - jk_{xp})} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{s^2}} e^{s^2(x-x')^2 - (x-x')jk_{xp} - \frac{k_{xp}^2}{4s^2}} \quad (2.22)$$

Introducimos (2.22) en (2.15):

$$\begin{aligned} \tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon ds \frac{1}{s} e^{-(z-z')^2s^2 - (x-x')^2s^2 + \frac{k^2}{4s^2}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{s^2(x-x')^2 - (x-x')jk_{xp} - \frac{k_{xp}^2}{4s^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(x-x')jk_{xp}} \int_0^\varepsilon ds \frac{1}{s^2} e^{-(z-z')^2s^2 - (x-x')^2s^2 + (x-x')^2s^2 + \frac{k^2}{4s^2} - \frac{k_{xp}^2}{4s^2}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

y definimos k_{zp} como $k_{zp}^2 = k^2 - k_{xp}^2$:

$$\tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) = \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\varepsilon \frac{e^{-(z-z')^2 s^2} e^{\frac{k_{zp}^2}{4s^2}}}{s^2} ds \quad (2.24)$$

Ahora realizamos en (2.24) el siguiente cambio de variable $s' = \frac{1}{s}$:

$$\tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) = \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^\infty e^{-\frac{(z-z')^2}{s'^2}} e^{\frac{k_{zp}^2 s'^2}{4}} ds' \quad (2.25)$$

Definimos $u = \frac{|z-z'|}{s'} + \frac{jk_{zp}s'}{2}$, de forma que:

$$u = \frac{|z-z'| + \frac{jk_{zp}s'^2}{2}}{s'} \quad (2.26)$$

$$us' = |z-z'| + \frac{jk_{zp}s'^2}{2}$$

$$s'^2 - \frac{2us'}{jk_{zp}} + \frac{2|z-z'|}{jk_{zp}} = 0 \quad (2.27)$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado obtenemos que:

$$s' = (jk_{zp})^{-1} \left(u + \sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}} \right) \quad (2.28)$$

Ahora obtenemos ds' :

$$\begin{aligned} ds' &= d \left[(jk_{zp})^{-1} \left(u + \sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}} \right) \right] \\ &= (jk_{zp})^{-1} d \left(u + \sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}} \right) \\ &= (jk_{zp})^{-1} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}}} \right) du \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por otro lado, calculamos u^2 :

$$u^2 = \frac{(z-z')^2}{s'^2} - \frac{k_{zp}^2 s'^2}{4} + 2 \frac{|z-z'|}{s'} \frac{jk_{zp}s'}{2} \quad (2.30)$$

$$-u^2 = -\frac{(z-z')^2}{s'^2} + \frac{k_{zp}^2 s'^2}{4} - |z-z'|jk_{zp} \quad (2.31)$$

$$-u^2 + |z - z'|jk_{zp} = -\frac{(z - z')^2}{s'^2} + \frac{k_{zp}^2 s'^2}{4} \quad (2.32)$$

De esta forma, si denominamos I_2 a la parte integral de la ecuación (2.24), tenemos que:

$$I_2 = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{(z-z')^2}{s'^2}} e^{\frac{k_{zp}^2 s'^2}{4}} ds' = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{(z-z')^2}{s'^2} + \frac{k_{zp}^2 s'^2}{4}} ds' \quad (2.33)$$

Aplicamos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}}^{\infty} e^{-u^2} e^{|z-z'|jk_{zp}} \frac{1}{jk_{zp}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}}} \right) du \\ &= \frac{e^{|z-z'|jk_{zp}}}{jk_{zp}} \int_{|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}}^{\infty} e^{-u^2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}}} \right) du \end{aligned}$$

Por tanto, $\tilde{f}(\frac{2\pi p}{d})$ queda:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\frac{2\pi p}{d}) &= \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{2\sqrt{\pi}} I_2 \\ &= \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{|z-z'|jk_{zp}}}{jk_{zp}} \int_{|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}}^{\infty} e^{-u^2} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}}} \right) du \\ &= \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{4} \frac{e^{|z-z'|jk_{zp}}}{jk_{zp}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}}^{\infty} e^{-u^2} du + \int_{|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}}^{\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}}} du \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

La función de error complementario [16] se define como:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (2.35)$$

De esta forma, podemos escribir la ecuación (2.34) como:

$$\tilde{f}(\frac{2\pi p}{d}) = \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{4} \left[\frac{e^{|z-z'|jk_{zp}}}{jk_{zp}} \operatorname{erfc} \left(|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} \right) + I' \right] \quad (2.36)$$

donde I' es:

$$I' = \frac{e^{|z-z'|jk_{zp}}}{jk_{zp}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}}^{\infty} \frac{ue^{-u^2}}{\sqrt{u^2 - 2j|z-z'|k_{zp}}} du \quad (2.37)$$

Ahora realizamos en I' el siguiente cambio de variable:

$$w = \sqrt{u^2 - 2jk_{zp}|z-z'|} \quad (2.38)$$

de forma que u^2 es igual a:

$$u^2 = w^2 + 2jk_{zp}|z-z'| \quad (2.39)$$

el du es:

$$du = \frac{w}{\sqrt{w^2 + 2jk_{zp}|z-z'|}} dw \quad (2.40)$$

y vemos qué ocurre con el límite inferior, es decir, calculamos el valor de w si $u = |z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}$

$$\begin{aligned} w^2 &= \left(|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{\varepsilon} \right)^2 - 2jk_{zp}|z-z'| = |z-z'|^2\varepsilon^2 - \frac{k_{zp}^2}{4\varepsilon^2} - jk_{zp}|z-z'| \\ &= \left(|z-z'|\varepsilon - \frac{k_{zp}}{2\varepsilon} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$w = -\sqrt{\left(|z-z'|\varepsilon - \frac{k_{zp}}{2\varepsilon} \right)^2} = -\left(|z-z'|\varepsilon - \frac{k_{zp}}{2\varepsilon} \right) = -|z-z'|\varepsilon + \frac{k_{zp}}{2\varepsilon} \quad (2.42)$$

Hemos tomado la solución negativa de la raíz ya que aunque matemáticamente sean correctas ambas soluciones, la que tiene sentido físico es la negativa. En efecto, si tomamos la solución negativa, la función de error complementario tendería a cero conforme aumentemos el número de términos y, por tanto, la serie convergería. Si por el contrario tomamos la solución positiva, la función de error complementaria tendería a 2 conforme aumentemos el número de términos y, por tanto, la serie no convergería. Es por ello que, de las dos soluciones, tendremos que tomar la que haga que la función de error complementaria tienda a cero para que la serie converja.

Una vez que hemos obtenido estos valores, realizamos el cambio de variable en (2.37):

$$\begin{aligned}
I' &= \frac{e^{jk_{zp}|z-z'|}}{jk_{zp}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}}^{\infty} \frac{e^{-w^2} e^{-2jk_{zp}|z-z'|} \frac{\sqrt{u^2 - 2jk_{zp}|z-z'|}}{w}}{w} dw \\
&= \frac{e^{-jk_{zp}|z-z'|}}{jk_{zp}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon}}^{\infty} e^{-w^2} dw \\
&= \frac{e^{-jk_{zp}|z-z'|}}{jk_{zp}} \operatorname{erfc} \left(-|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} \right)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Introduciendo I' en la ecuación (2.36), quedaría:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) &= \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{4jk_{zp}} \left[e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} \right) + \right. \\
&\quad \left. e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(-|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Y finalmente $G_{\text{espectral}}$ queda:

$$G_{\text{espectral}}(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(md) = \frac{1}{d} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}\left(\frac{2\pi p}{d}\right) \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
G_{\text{espectral}}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{4d} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{jk_{zp}} \\
&\quad \times \left[e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} \right) + e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(-|z-z'|\varepsilon + \frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Ésta será una de las contribuciones de la función de Green.

2.1.2. Transformación de $G_{\text{espacial}}(\bar{r}, \bar{r}')$

Ahora vamos a calcular la otra contribución, G_{espacial} . Para ellos partimos de (2.6) y llamamos I a la parte integral de la ecuación, de forma que:

$$I = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 s^2 + \frac{k^2}{4s^2}}}{s} ds \tag{2.47}$$

Realizamos en I el siguiente cambio de variable: $u = s^2$; por tanto $s = \sqrt{u}$ y $ds = \frac{1}{2\sqrt{u}} du$.

$$I = \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 u + \frac{k^2}{4u}}}{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 u + \frac{k^2}{4u}}}{2u} du \quad (2.48)$$

Para esta integral, la variable u puede tomar valores muy altos, hasta el infinito, y por tanto en el límite esa exponencial tendería a 1. Por ello, podemos utilizar un desarrollo en serie de Taylor para representarla.

Utilizando la expansión de Taylor $e^{\frac{k^2}{4u}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\frac{k}{2})^{2q}}{q! u^q}$, la ecuación (2.48) queda:

$$I = \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 u}}{2u} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\frac{k}{2})^{2q}}{q! u^q} du = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\frac{k}{2})^{2q}}{q!} \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 u}}{u^{q+1}} du \quad (2.49)$$

Definimos la nueva integral I' como:

$$I' = \int_{\varepsilon^2}^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 u}}{u^{q+1}} du \quad (2.50)$$

y realizamos el siguiente cambio de variable: $t = \frac{u}{\varepsilon^2}$; por tanto $u = t\varepsilon^2$ y $du = dt\varepsilon^2$ y los límites de la integral quedan como:

$$\begin{cases} u = \infty \rightarrow t = \infty \\ u = \varepsilon^2 \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

de forma que:

$$I' = \int_1^{\infty} \frac{e^{-R_m^2 \varepsilon^2 t}}{(t\varepsilon^2)^{q+1}} \varepsilon^2 dt = \frac{1}{\varepsilon^{2q}} \int_1^{\infty} \frac{e^{(-R_m^2 \varepsilon^2)t}}{t^{q+1}} \varepsilon^2 dt \quad (2.51)$$

Se define la integral exponencial de orden n -ésimo como:

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt \quad (2.52)$$

Identificando términos en (2.51) obtenemos que:

$$I' = \frac{1}{\varepsilon^{2q}} E_{q+1}(R_m^2 \varepsilon^2) \quad (2.53)$$

Sustituimos (2.53) en I y queda:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{2q}}{q!} \frac{1}{\varepsilon^{2q}} \mathbb{E}_{q+1}(R_m^2 \varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2\varepsilon}\right)^{2q} \frac{1}{q!} \mathbb{E}_{q+1}(R_m^2 \varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Introducimos (2.54) y finalmente G_{espacial} queda:

$$\begin{aligned}
G_{\text{espacial}}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{x_0}md} I \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{x_0}md} \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2\varepsilon}\right)^{2q} \frac{1}{q!} \mathbb{E}_{q+1}(R_m^2 \varepsilon^2) \\
&= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{x_0}md} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2\varepsilon}\right)^{2q} \frac{1}{q!} \mathbb{E}_{q+1}(R_m^2 \varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Ya tenemos las dos contribuciones (2.46) y (2.55) de forma que sumándolas, obtendríamos la función de Green completa. De esta manera hemos pasado de tener la función de Green representada como un sumatorio infinito con lenta convergencia a tener dos series independientes entre ellas y cuyas convergencias son mucho más rápidas que la serie original. Esto supone una gran mejora a la hora de calcular computacionalmente la función de Green.

2.1.3. Selección del Splitting Parameter(ε)

El 'splitting parameter' [11] es el que divide la integral de la función de Green en dos integrales. Es un parámetro de gran importancia, ya que de su elección depende que las dos series $G_{\text{espectral}}$ y G_{espacial} tarden más o menos en converger.

Llamamos M al número máximo de términos con los que se trunca la serie $G_{\text{espectral}}$ en (2.46), y P al número máximo de términos con los que se trunca la serie G_{espacial} en (2.55).

Buscamos ahora un valor óptimo de este parámetro que minimice el número total de términos $M+P$ necesarios en dichas ecuaciones. Para ello, vamos a analizar la convergencia de estas dos series.

Comenzamos por la suma $G_{\text{espectral}}$ y vemos cuál es su valor asintótico para un valor de p grande.

Para p grande, podemos aproximar $k_{xp} \approx \frac{2\pi p}{d}$ y $k_{zp} \approx -j\frac{2\pi p}{d}$. Además, la expansión asintótica de la función de error para argumentos grandes es $\operatorname{erfc}(z) \sim \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z}$. Con lo cual, el comportamiento asintótico de los términos para un valor de p grande es:

$$\sim \frac{e^{-j2\pi p(x-x')/d} e^{-\left(\frac{\pi p}{d\varepsilon}\right)^2}}{4\sqrt{\pi}d\varepsilon} \frac{\pi p}{d\varepsilon} \quad (2.56)$$

Esto presenta una convergencia p -gaussiana.

Por otro lado, en la suma G_{espacial} aproximamos $R_m \approx md$ y la integral exponencial la aproximamos por su expansión para argumentos grandes $E_{q+1}(z) \sim \frac{e^{-z}}{z}$, de forma que el comportamiento de esta serie para m grandes es:

$$\sim \frac{e^{\left(\frac{k}{2\varepsilon}\right)^2}}{4\pi} e^{-jk_{x0}md} \frac{e^{-(md\varepsilon)^2}}{md\varepsilon} \quad (2.57)$$

Esto presenta una convergencia m -gaussiana.

El número total de términos necesarios será aquel con el que se obtenga aproximadamente el mismo número de dígitos significativos de precisión en los dos sumatorios. Por ello, deberemos fijar $(M\varepsilon d)^2 = (P\pi)^2 / (\varepsilon d)^2 \equiv \sigma^2$.

El valor óptimo de ε es aquel que minimice el número total de términos $N^{\text{total}} = M + P$ necesarios en las series. Por tanto hacemos:

$$\begin{aligned} N^{\text{total}} &= M + P = M \frac{\varepsilon d}{\varepsilon d} + \frac{P\pi}{\varepsilon d} \frac{\varepsilon d}{\pi} \\ &= \frac{\sigma}{\varepsilon d} + \frac{\sigma \varepsilon d}{\pi} = \sigma \left(\frac{1}{\varepsilon d} + \frac{\varepsilon d}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ahora minimizamos N^{total} , haciendo que $\frac{\partial N^{\text{total}}}{\partial \varepsilon} = 0$

$$\frac{\partial N^{\text{total}}}{\partial \varepsilon} = \sigma \left(\frac{-1}{\varepsilon^2 d} + \frac{d}{\pi} \right) = 0 \rightarrow \frac{1}{\varepsilon^2 d} = \frac{d}{\pi} \rightarrow \varepsilon_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{d} \quad (2.59)$$

Cabe resaltar que este parámetro óptimo hace que converjan asintóticamente con la misma velocidad de convergencia gaussiana ambas series.

En diferentes publicaciones podemos encontrar la deducción de otros valores del 'splitting parameter' para casos más concretos. Entre dichas publicaciones, cabe destacar la

demostración que se realiza en [4], donde se sugiere que el 'splitting parameter' se escoja como:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\} \\ &= \max\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{d}, \frac{k_{z0}}{2H}, \frac{k}{2(\varepsilon Q!)^{\frac{1}{2Q}}}\right\}\end{aligned}\quad (2.60)$$

La proposición de estos dos parámetros alternativos surge porque a alta frecuencia podemos tener pérdida de precisión debido a las cancelaciones de números grandes cuando sumemos $G_{espacial}$ y $G_{espectral}$. Así, para alta frecuencias, o lo que es lo mismo para distancias grandes entre los elementos $d > \lambda$, este problema se evita forzando que ε sea otro distinto al 'óptimo', tal y como se explica en [4].

2.1.4. Criterio para Conmutar de las Series Exactas a las del Método de Ewald

En esta sección se propone, por primera vez, un método que sugiere usar la función de Green espectral o usar el método de Ewald según la distancia del punto de observación.

El razonamiento del método es el siguiente. Cuando el punto de observación está cerca de la fuente, la serie espacial converge mejor que la función de Green espectral. Conforme el punto de observación se aleja de la fuente, la espectral comienza a converger mejor que la espacial. Es por ello que convendría usar el método de Ewald cuando el punto de observación esté cerca de la fuente y la función de Green espectral cuando esté lejos.

Esto nos lleva a estudiar un criterio contundente para establecer el punto idóneo de conmutación entre estos dos métodos, para el cálculo de la función de Green.

Para ello estudiamos qué términos de la ecuación (1.44) pueden afectar negativamente a la convergencia.

Vemos que la exponencial $e^{-\gamma_m|z-z'|}$ interesa que decaiga lo más rápido posible para que la serie converja antes. Para ello, es necesario que el exponente $\gamma_m|z-z'|$ sea real y lo más grande posible.

Utilizando esto, el criterio para conmutar surge de imponer que $\gamma_m|z-z'| > \eta$, donde η es un valor real que fijaremos. Llamamos M al número máximo de términos en los que queremos que se cumpla esa condición, es decir, el número de términos para el cual la exponencial de la serie espectral ha caído por debajo del valor $e^{-\eta}$.

Desarrollamos el mencionado término de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\gamma_M |z - z'| &= \sqrt{k_{xM}^2 - k^2} \times |z - z'| = k \sqrt{\left(\frac{k_{xM}}{k}\right)^2 - 1} \times |z - z'| \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{k_{xM}}{k}\right)^2 - 1} \times |z - z'|\end{aligned}\quad (2.61)$$

Como queremos que $\gamma_M |z - z'| > \eta$ escribimos:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{k_{xM}}{k}\right)^2 - 1} \times |z - z'| &> \eta \\ \frac{|z - z'|}{\lambda} &> \frac{\eta}{2\pi \sqrt{\left(\frac{k_{xM}}{k}\right)^2 - 1}}\end{aligned}\quad (2.62)$$

Ésta será la condición para conmutar del método de Ewald a la serie espectral.

Para fijar el valor de η , una buena opción es partir de la condición anterior, es decir, que $e^{-\eta}$ sea, por ejemplo, menor o igual que 10^{-4} y de ahí obtener η , que en este caso sería $\eta = 9,2103$.

De esta forma, si se cumple la condición (2.62), entonces se utilizará la formulación espectral. En caso contrario se usará la formulación de Ewald.

2.2. Cálculo del Gradiente de la Función de Green Utilizando el Método de Ewald

Siguiendo con los objetivos del proyecto ahora vamos a aplicar el método de Ewald al gradiente de la función de Green, de forma que lo descompondremos en la suma de dos contribuciones:

$$\nabla G(\bar{r}, \bar{r}') = \nabla G_{espectral}(\bar{r}, \bar{r}') + \nabla G_{espacial}(\bar{r}, \bar{r}') \quad (2.63)$$

Vamos a calcular estas dos componentes por separado, sabiendo que el gradiente de la función de Green será la suma de ambas contribuciones. Cada contribución surge de aplicar el operador gradiente a (2.46) y (2.55).

2.2.1. Cálculo de $\nabla G_{\text{espectral}}(\bar{r}, \bar{r}')$

Comencemos por calcular $\nabla G_{\text{espectral}}(\bar{r}, \bar{r}')$, aplicado el operador gradiente a (2.46):

$$\begin{aligned} \nabla G(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{d} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{4jk_{zp}} \times -jk_{xp} \hat{\mathbf{x}} \\ &\times \left[e^{+jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) + e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \right] \\ &+ \frac{1}{d} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{4jk_{zp}} \times D \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial}{\partial |z-z'|} \left[e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) + e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \right] = \\ &jk_{zp} \operatorname{sgn}(z-z') e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) \\ &+ \varepsilon \operatorname{sgn}(z-z') e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc}' \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) \\ &- jk_{zp} \operatorname{sgn}(z-z') e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \\ &- \varepsilon \operatorname{sgn}(z-z') e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc}' \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Sustituimos D en la ecuación (2.64) y queda:

$$\begin{aligned}
\nabla G(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{d} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{4jk_{zp}} \times & \left\{ -jk_{xp} \hat{\mathbf{x}} \left[e^{+jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) \right. \right. \\
& + e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \left. \right] \\
& + \hat{\mathbf{z}} \left[\operatorname{sgn}(z-z') jk_{zp} e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) \right. \\
& + \varepsilon \operatorname{sgn}(z-z') e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc}' \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) \\
& - \operatorname{sgn}(z-z') jk_{zp} e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \\
& \left. \left. - \varepsilon \operatorname{sgn}(z-z') e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc}' \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \right] \right\} \quad (2.66)
\end{aligned}$$

Finalmente reagrupamos términos y queda que:

$$\begin{aligned}
\nabla G_{\text{espectral}}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{d} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_{xp}(x-x')}}{4jk_{zp}} \\
\times \left\{ [-j\hat{\mathbf{x}}k_{xp} - j\hat{\mathbf{x}}k_{zp} \operatorname{sgn}(z-z')] e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \right. \\
+ [-j\hat{\mathbf{x}}k_{xp} + j\hat{\mathbf{z}}k_{zp} \operatorname{sgn}(z-z')] e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc} \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) \\
- \hat{\mathbf{z}} \operatorname{sgn}(z-z') \varepsilon e^{-jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc}' \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} - |z-z'|\varepsilon \right) \\
\left. + \hat{\mathbf{z}} \operatorname{sgn}(z-z') \varepsilon e^{jk_{zp}|z-z'|} \operatorname{erfc}' \left(\frac{jk_{zp}}{2\varepsilon} + |z-z'|\varepsilon \right) \right\} \quad (2.67)
\end{aligned}$$

donde

$$\operatorname{erfc}'(z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \quad (2.68)$$

Así queda la contribución espectral del método de Ewald una vez aplicado el operador gradiente.

2.2.2. Cálculo de $\nabla G_{\text{espacial}}(\bar{r}, \bar{r}')$

Ahora vamos a calcular la otra contribución. Para ello, partimos de la ecuación (2.55) y aplicamos el operador gradiente:

$$\begin{aligned} \nabla G_{\text{espacial}}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x0}md} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2\varepsilon}\right)^{2q} \frac{1}{q!} \\ &\times \left[E'_{q+1}(\varepsilon^2 [(z-z')^2 + (x-x'-md)^2]) 2(z-z')\varepsilon^2 \hat{\mathbf{z}} \right. \\ &\left. + E'_{q+1}(\varepsilon^2 [(z-z')^2 + (x-x'-md)^2]) 2(x-x'-md)\varepsilon^2 \hat{\mathbf{x}} \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

Reordenando términos queda:

$$\begin{aligned} \nabla G_{\text{espacial}}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{2\varepsilon^2}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x0}md} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2\varepsilon}\right)^{2q} \frac{1}{q!} \\ &\times [(z-z')\hat{\mathbf{z}} + (x-x'-md)\hat{\mathbf{x}}] E'_{q+1}(R_m^2 \varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.70)$$

Y teniendo en cuenta que $E'_{q+1}(z) = -E_q(z)$, obtenemos la siguiente expresión:

$$\nabla G_{\text{espacial}}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{-\varepsilon^2}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [(x-x'-md)\hat{\mathbf{x}} + (z-z')\hat{\mathbf{z}}] e^{-jk_{x0}md} \times \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2\varepsilon}\right)^{2q} \frac{1}{q!} E_q(R_m^2 \varepsilon^2) \quad (2.71)$$

donde $E_0(z) = \frac{e^{-z}}{z}$.

Ya tenemos, por tanto, ambas contribuciones del gradiente. Hay que destacar que ambas series $\nabla G_{\text{espacial}}$ y $\nabla G_{\text{espectral}}$ tienen convergencia gaussiana.

2.2.3. Criterio para Conmutar de las Series Exactas a las del Método de Ewald

Al igual que hacíamos con la función de Green, en esta sección se estudia un criterio para conmutar entre el uso de la formulación espectral del gradiente de la función de Green y el uso del gradiente utilizando las series de Ewald.

Para ello, estudiamos qué términos de la ecuación (1.49) están implicados en la buena o mala convergencia del gradiente.

Vemos que $k_{xm}e^{-\gamma_m|z-z'|}$ interesa que decaiga lo más rápido posible para que la serie converja antes.

Utilizando esto, el criterio para conmutar surge de imponer que $k_{xM}e^{-\gamma_M|z-z'|} < \epsilon$, donde M es el número máximo de términos en los que queremos que se cumpla esa condición, es decir, el número de términos para el cual el factor $k_{xm}e^{-\gamma_m|z-z'|}$ ha caído por debajo del valor ϵ . Si desarrollamos esto, nos queda:

$$\begin{aligned}
e^{-\gamma_M|z-z'|} &< \frac{\epsilon}{k_{xM}} \\
e^{-\sqrt{k_{xM}^2 - k^2} \times |z-z'|} &< \frac{\epsilon}{k_{xM}} \\
k\sqrt{\left(\frac{k_{xM}}{k}\right)^2 - 1} \times |z-z'| &> -\ln\left(\frac{\epsilon}{k_{xM}}\right) \\
\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{k_{xM}}{k}\right)^2 - 1} \times |z-z'| &> -\ln\left(\frac{\epsilon}{k_{xM}}\right) \\
\frac{|z-z'|}{\lambda} &> \frac{-\ln\left(\frac{\epsilon}{k_{xM}}\right)}{2\pi\sqrt{\left(\frac{k_{xM}}{k}\right)^2 - 1}}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Ésta es la condición que nos indica cuándo obtener el gradiente mediante el método de Ewald y cuándo obtenerlo mediante su forma espectral. Si se cumple la condición se obtendría mediante la serie espectral y si no mediante el método de Ewald.

Una vez que hemos deducido la formulación de la función de Green y de su gradiente aplicando el método de Ewald, estudiaremos en el capítulo 4 los resultados y la efectividad de las mejoras propuestas y veremos la convergencia de este método gracias a la implementación en Matlab de la formulación desarrollada en este capítulo.

Capítulo 3

Transformación de Kummer

Otra posible forma de acelerar la convergencia de estas series es aplicando la transformación de Kummer [12]. La transformación de Kummer, que recibe su nombre del matemático Ernst Kummer, consiste en ir extrayendo términos asintóticos (sumables de forma analítica o semianalítica en el caso unidimensional) y restándoselos a la serie original en el dominio espectral con el fin de acelerar su convergencia. Por otro lado, los términos asintóticos extraídos y restados, también deberán sumarse para obtener el mismo resultado que se obtendría con la suma directa de la función de Green.

Cuantos más términos extraigamos, un menor número de términos en el sumatorio necesitaremos para que converja la parte dinámica pero más términos tendremos que sumar en la parte estática. Es por ello que la suma de los términos estáticos deberá ser lo más eficiente posible para conseguir el mínimo tiempo de cómputo.

En este capítulo, vamos a aplicar la transformación de Kummer a la función de Green espectral. También aplicaremos dicha transformación al gradiente de la función de Green. Comenzaremos extrayendo uno, dos, tres y cuatro términos asintóticos y posteriormente deduciremos una novedosa expresión general para la extracción de N términos.

3.1. Extracción de un término

Comenzamos extrayendo un solo término. Este caso es el más sencillo y ya se obtiene una mejora considerable en la convergencia, como veremos en el capítulo 4.

3.1.1. Cálculo de la Función de Green

Aplicamos el método de Kummer a la formulación espectral de la función de Green, por tanto, partimos de la siguiente ecuación

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \quad (3.1)$$

donde llamamos \tilde{G}_m a:

$$\tilde{G}_m = \frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} \quad (3.2)$$

de forma que (3.1) quedaría como:

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_m e^{-jk_{xm}(x-x')} \quad (3.3)$$

Buscamos ahora la expresión asintótica de \tilde{G}_m que llamaremos \tilde{G}_{m0} . Así, podemos expresar la ecuación (3.1) como:

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} (\tilde{G}_m - \tilde{G}_{m0}) e^{-jk_{xm}(x-x')} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{m0} e^{-jk_{xm}(x-x')} \right] \quad (3.4)$$

donde \tilde{G}_{m0} se define como:

$$\tilde{G}_{m0} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} \quad (3.5)$$

Calculamos cuanto vale $\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \gamma_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{k_{xm}^2 - k^2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt{\left(k_{x0} + \frac{2\pi m}{d}\right)^2 - k^2} = \frac{2\pi m}{d} \quad (3.6)$$

esto es verdad sólo si $k_{xm} > k$;

Si $k_{xm} < k$ entonces γ_m es imaginaria pura. Por el contrario, si $k_{xm} > k$ entonces γ_m es real positiva.

Si suponemos que γ_m es siempre real y positiva, su aproximación debe ser también real y positiva. Por ello, añadimos un valor absoluto a la formula anterior.

$$\gamma_m \approx \left| \frac{2\pi m}{d} \right| \quad (3.7)$$

Por tanto \tilde{G}_{m0} queda finalmente:

$$\tilde{G}_{m0} = \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} \quad (3.8)$$

De forma que la serie original quedaría expresada como:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ \left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \right] \quad (3.9) \end{aligned}$$

La primera parte de la serie se sumará tal y como está, con una convergencia más rápida que si sumásemos directamente la serie espectral puesto que estamos acelerando su convergencia al restarle su valor asintótico.

Respecto a la segunda parte de la serie, que llamaremos $G_{estática}$, deberemos buscar el modo de sumarla analíticamente de forma que obtengamos una expresión cerrada del sumatorio infinito y de esta manera no afecte en gran medida al tiempo de cómputo de la serie total.

Para ello, la expresamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G_{estática} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} e^{-jk_{x0}(x-x')} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\ &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \quad (3.10) \end{aligned}$$

Dividimos el sumatorio en dos sumatorios separando los m positivos de los negativos y obviando el término $m = 0$ debido a que, concretamente en ese término, no se aplicará la transformación de Kummer, como se explicará más adelante.

$$G_{estática} = e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{m=-\infty}^{-1} \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right] \quad (3.11)$$

Hacemos un cambio de variable $n = -m$, de forma que la ecuación anterior queda:

$$G_{estática} = e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi n} e^{-\frac{2\pi n}{d} |z-z'|} e^{j\left(\frac{2\pi n}{d}\right)(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\frac{2\pi m}{d} |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right] \\ = \frac{d}{2\pi} e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi n}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} }{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{2\pi m}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} }{m} \right] \quad (3.12)$$

Utilizando la siguiente igualdad matemática

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{am}}{m} = -\ln(1 - e^a) \quad (3.13)$$

hacemos un cambio de variable $n = m$ y podemos escribir la ecuación (3.12) como:

$$G_{estática} = \frac{d}{2\pi} e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} \right) - \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} \right) \right] \quad (3.14)$$

En $m = 0$ no aplicamos el método de Kummer ya que lo hemos obviado anteriormente en el cálculo de $G_{estática}$. Esto se debe a que el valor asintótico de $\frac{1}{\gamma_0}$ sería $\frac{1}{0}$ y eso daría lugar a problemas numéricos puesto que la suma analítica sería infinito. Además, restarle a la serie el término asintótico tiene sentido conforme m toma valores grandes y, por tanto, carece de sentido aplicarlo para $m = 0$. Por ello, \tilde{G}_m en $m = 0$ quedaría como:

$$\tilde{G}_0(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \frac{1}{\gamma_0} e^{-\gamma_0 |z-z'|} e^{-jk_{x0}(x-x')} \quad (3.15)$$

Finalmente, podemos escribir la ecuación (3.9) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \left| \frac{d}{2\pi m} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} \right| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ &+ \left. \frac{d}{2\pi} e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} \right) - \ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} \right) \right] \right] \\ &+ \tilde{G}_0(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.1.2. Cálculo del Gradiente de la Función de Green

Aplicamos ahora el método de Kummer al gradiente de la función de Green que obtuvimos en el capítulo anterior. Partimos de la expresión del gradiente y lo dividimos en una componente x y otra z .

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'| - jk_{xm}(x-x')} [-jk_{xm} \hat{\mathbf{x}} - \gamma_m \operatorname{sgn}(z-z') \hat{\mathbf{z}}] \\ &= \tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') \hat{\mathbf{x}} + \tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donde $\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}')$ y $\tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}')$ son:

$$\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} -jk_{xm} \frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'| - jk_{xm}(x-x')} \quad (3.18)$$

$$\tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} -\gamma_m \operatorname{sgn}(z-z') \frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'| - jk_{xm}(x-x')} \quad (3.19)$$

Comenzamos por extraer un término a $\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}')$, que podemos expresarla de la siguiente manera:

$$\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{-j}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{k_{xm}}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \quad (3.20)$$

buscamos la expresión asintótica de esta serie para aplicar el método de Kummer

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_{xm}}{\gamma_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_{xm}}{\sqrt{k_{xm}^2 - k^2}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k_{x0} + \frac{2\pi m}{d}}{\sqrt{(k_{x0} + \frac{2\pi m}{d})^2 - k^2}} = \text{sgn}(m) \quad (3.21)$$

y como habíamos visto, cuando $m \rightarrow \infty$, γ_m se puede aproximar como:

$$\gamma_m \approx \left| \frac{2\pi m}{d} \right| \quad (3.22)$$

De forma que la ecuación (3.20) la podemos escribir, aplicando la transformación de Kummer, como:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{-j}{2d} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_{xm}}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \text{sgn}(m) e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ \left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sgn}(m) e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \right] \quad (3.23) \end{aligned}$$

Llamamos $\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$ a la segunda parte de la serie anterior puesto que es la que vamos a tratar de expresar de forma cerrada. Con esta nomenclatura, la ecuación anterior quedaría así:

$$\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{-j}{2d} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_{xm}}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \text{sgn}(m) e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} + \tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') \right] \quad (3.24)$$

Ahora nos centramos en transformar $\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$.

$$\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sgn}(m) e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z-z'|} e^{-jk_{x0}(x-x')} e^{-j\frac{2\pi m}{d}(x-x')} \quad (3.25)$$

De la misma manera que hicimos anteriormente, vamos a separar el sumatorio, obviando el término $m = 0$, donde no aplicaremos la transformación de Kummer. Además, hacemos un cambio de variable $n = -m$, y queda:

$$\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') = e^{-jk_{x0}(x-x')} \left(\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-\frac{2\pi n}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi m}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} \right) \quad (3.26)$$

Los sumatorios anteriores son la suma de una progresión geométrica, de forma que los podemos escribir de forma cerrada como:

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{am} = \frac{e^a}{1 - e^a} \quad (3.27)$$

Volviendo a hacer un cambio de variable $n = m$, podemos expresar finalmente $\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$ como:

$$\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') = e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[- \left(\frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} } \right) + \frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} } \right] \quad (3.28)$$

En $m = 0$, no aplicamos la transformación de Kummer y ese término quedaría, para esta componente, como:

$$\tilde{G}_{x0}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{-j k_{x0}}{2d \gamma_0} e^{-\gamma_0 |z-z'|} e^{-jk_{x0}(x-x')} \quad (3.29)$$

De esta forma, la ecuación (3.24) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{-j}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{k_{xm}}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \text{sgn}(m) e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ &+ e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[- \left(\frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} } \right) + \frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} } \right] \\ &+ \tilde{G}_{x0}(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.30)$$

Una vez desarrollada la componente x , vamos a desarrollar de la misma forma la componente z .

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} -\operatorname{sgn}(z - z') \frac{\gamma_m}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z - z'| - jk_{xm}(x - x')} \\
&= \frac{-\operatorname{sgn}(z - z')}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma_m |z - z'| - jk_{xm}(x - x')}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Aplicando la transformación de Kummer, la serie quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{-\operatorname{sgn}(z - z')}{2d} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\gamma_m |z - z'|} - e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z - z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x - x')} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z - z'|} e^{-jk_{xm}(x - x')} \right]
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Llamamos $\tilde{G}_{zestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$ a la segunda parte de la serie, de forma que la ecuación anterior quedaría como:

$$\tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{-\operatorname{sgn}(z - z')}{2d} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\gamma_m |z - z'|} - e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z - z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x - x')} + \tilde{G}_{zestatica}(\bar{r}, \bar{r}') \right] \tag{3.33}$$

donde $\tilde{G}_{zestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$ es

$$\tilde{G}_{zestatica}(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z - z'|} e^{-jk_{x0}(x - x')} e^{-j(\frac{2\pi m}{d})(x - x')} \tag{3.34}$$

Escribimos $\tilde{G}_{zestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$ separando el sumatorio, obviando el término $m = 0$ y realizando el cambio de variable $n = -m$:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{zestatica}(\bar{r}, \bar{r}') &= e^{-jk_{x0}(x - x')} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi n}{d}\right)[|z - z'| - j(x - x')]} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z - z'| + j(x - x')]} \right) \\
&= e^{-jk_{x0}(x - x')} \left(\frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z - z'| - j(x - x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z - z'| - j(x - x')]} } + \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z - z'| + j(x - x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z - z'| + j(x - x')]} } \right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

De igual forma que en la componente x , en la componente z tampoco aplicaremos en $m = 0$ el método de Kummer. Este término quedaría, para esta componente, como:

$$\tilde{G}_{z0}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{-\operatorname{sgn}(z - z')}{2d} e^{-\gamma_0 |z - z'|} e^{-jk_{x0}(x - x')} \quad (3.36)$$

Si introducimos estos resultados en la ecuación (3.33), $\tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}')$ queda:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') = & \frac{-\operatorname{sgn}(z - z')}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(e^{-\gamma_m |z - z'|} - e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z - z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x - x')} \right. \\ & \left. + e^{-jk_{x0}(x - x')} \left(\frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z - z'| - j(x - x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z - z'| - j(x - x')]} } + \frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z - z'| + j(x - x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z - z'| + j(x - x')]} } \right) \right] \\ & + \tilde{G}_{z0}(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.2. Extracción de dos términos

En este apartado vamos a seguir el mismo procedimiento que en el apartado (3.1.1) con la diferencia de que en este caso γ_m y $\frac{1}{\gamma_m}$ las aproximaremos con los dos primeros términos de sus desarrollos de Taylor. Haremos uso de estos dos desarrollos de Taylor:

$$\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \dots \quad (3.38)$$

$$(\sqrt{1 + x})^{-1} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \dots \quad (3.39)$$

3.2.1. Cálculo de la Función de Green

Comenzamos con la función de Green. Por un lado aproximamos γ_m como:

$$\begin{aligned} \gamma_m = \sqrt{k_{xm}^2 - k^2} &= \sqrt{\left(k_{x0} + \frac{2\pi m}{d}\right)^2 - k^2} = \sqrt{k_{x0}^2 + \left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2 + \frac{4\pi m}{d}k_{x0} - k^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2 \left[\frac{k_{x0}d}{\pi m} + \frac{k_{x0}^2 - k^2}{\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2} \right]} \sim \left(\frac{2\pi m}{d}\right) \left(1 + \frac{k_{x0}d}{2\pi m} + \dots\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

y quedaría que $\gamma_m \sim \left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right|$.

Para $\frac{1}{\gamma_m}$ seguimos el mismo procedimiento:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_m} &= \frac{1}{\sqrt{k_{xm}^2 - k^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(k_{x0} + \frac{2\pi m}{d}\right)^2 - k^2}} = \left(\sqrt{k_{x0}^2 + \left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2 + \frac{4\pi m}{d}k_{x0} - k^2} \right)^{-1} \\ &= \left(\sqrt{\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2 \left[\frac{k_{x0}d}{\pi m} + \frac{k_{x0}^2 - k^2}{\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2} \right]} \right)^{-1} \sim \left(\frac{2\pi m}{d}\right)^{-1} \left(1 - \frac{k_{x0}d}{2\pi m} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Por tanto $\frac{1}{\gamma_m}$ se puede aproximar a $\left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right|$.

De esta forma el término asintótico quedaría:

$$\frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} \rightarrow \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} \quad (3.42)$$

Cabe destacar que en $m = 0$ no aplicamos el método de Kummer por lo que deberemos añadir el término $\tilde{G}_0(\bar{r}, \bar{r}')$ deducido en (3.15). De esta forma, si aplicamos el método de Kummer con dos términos, la serie espectral queda:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \right] \\ &\quad + \tilde{G}_0(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.43)$$

Llamamos $G_{estatica}$ a la segunda serie que aparece

$$G_{estatica} = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \quad (3.44)$$

Estudiamos los valores absolutos para poder separarlos:

1) Para los m positivos tenemos:

Como se cumple que $\frac{2\pi m}{d}$ es mayor que k_{x0} (ver apéndice A), se cumple que $\frac{d}{2\pi m} > \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2}$ y entonces:

$$\frac{1}{\gamma_m} \rightarrow \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| = \left(\frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right) \quad (3.45)$$

$$\gamma_m \rightarrow \left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| = \left(\frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right) \quad (3.46)$$

2) Para los m negativos tenemos

$$\frac{1}{\gamma_m} \rightarrow \left| -\frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| = \left(\frac{d}{2\pi m} + \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right) \quad (3.47)$$

Como $\frac{2\pi m}{d}$ es mayor que k_{x0} , entonces:

$$\gamma_m \rightarrow \left| \frac{-2\pi m}{d} + k_{x0} \right| = \left(\frac{2\pi m}{d} - k_{x0} \right) \quad (3.48)$$

Ya podemos separar los valores absolutos y la ecuación (3.44) quedaría:

$$\begin{aligned} G_{estatica} &= \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \\ &= \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{-jk_{x0}(x-x')} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Separamos los m negativos y positivos, obviando el término $m = 0$ y hacemos un cambio de variable $n = -m$

$$\begin{aligned}
G_{estatica} &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| -\frac{d}{2\pi n} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi n)^2} \right| e^{-\left| -\frac{2\pi n}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi n}{d}\right)(x-x')} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right] \\
&= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{2\pi n} + \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi n)^2} \right) e^{-\left(\frac{2\pi n}{d} - k_{x0}\right) |z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi n}{d}\right)(x-x')} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right) e^{-\left(\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}\right) |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Hacemos un cambio de notación $n = m$:

$$\begin{aligned}
G_{estatica} &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d}{2\pi m} + \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right) e^{-\left(\frac{2\pi m}{d} - k_{x0}\right) |z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} \right) e^{-\left(\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}\right) |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right]
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Finalmente, queda:

$$\begin{aligned}
G_{estatica} &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\frac{2\pi m}{d} |z-z'|} e^{k_{x0} |z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right. \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\frac{2\pi m}{d} |z-z'|} e^{k_{x0} |z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\frac{2\pi m}{d} |z-z'|} e^{-k_{x0} |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
&\quad \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\frac{2\pi m}{d} |z-z'|} e^{-k_{x0} |z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Por simplificar, vamos a tratar cada sumatorio por separado de forma que $G_{estatica}$ la pondremos como:

$$G_{estatica} = e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[e^{k_{x0} |z-z'|} (serie1 + serie2) + e^{-k_{x0} |z-z'|} (serie3 - serie4) \right] \tag{3.53}$$

Comenzamos por la *serie1* y la *serie3* que son del mismo tipo y se pueden expresar de forma cerrada como lo hicimos en el apartado (3.1.1), haciendo uso de la igualdad (3.13):

$$\begin{aligned}
serie1 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'|-j(x-x')]} \\
&= \frac{d}{2\pi} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.54}$$

De la misma forma la *serie3* queda:

$$\begin{aligned}
serie3 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'|+j(x-x')]} \\
&= \frac{d}{2\pi} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Por otro lado, la *serie2* y la *serie4* quedarían:

$$\begin{aligned}
serie2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'|-j(x-x')]}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
serie4 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'|+j(x-x')]}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Estas series son funciones polilogarítmicas de orden dos, que poseen soluciones numéricas. El polilogaritmo (también conocido como función de Jonquière) [9] es una función

especial $\text{Li}_s(z)$ definida por la siguiente serie:

$$\text{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} \quad (3.58)$$

donde s es el orden, en nuestro caso $s = 2$ y z es el término que elevamos al índice del sumatorio, que en el caso de la *serie2* es $z = e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right)[|z-z'| - j(x-x')]}$ y de la *serie4* es $z = e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right)[|z-z'| + j(x-x')]}$.

Identificando términos, la *serie2* quedaría, en forma de polilogaritmo, como:

$$\text{serie2} = \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi)^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right)[|z-z'| - j(x-x')]} \right) \quad (3.59)$$

y la *serie4* quedaría:

$$\text{serie4} = \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi)^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right)[|z-z'| + j(x-x')]} \right) \quad (3.60)$$

A la hora de implementar estas series en Matlab, tendrían que sumarse numéricamente tal y como se definen en forma de sumatorio, con un número de términos que aseguren su convergencia al valor final o bien usar formulaciones alternativas que existen para el cálculo de los polilogaritmos.

Cabe resaltar que cuanto mayor sea el orden del polilogaritmo más rápido converge. Si observamos la definición en la ecuación (3.58) podemos observar que cuanto mayor es s , más grande es el denominador y, por tanto, más pequeña es la fracción. Dicho de otro modo, al aumentar s estamos elevando el índice del sumatorio, que en nuestro caso es m , a una potencia mayor. Como m^s aparece en el denominador, la fracción completa será más pequeña cuando mayor sea el valor de s y por ello la serie convergerá antes.

Finalmente la $G_{\text{estática}}$ queda:

$$G_{\text{estática}} = e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[e^{k_{x0}|z-z'|} (\text{serie1} + \text{serie2}) + e^{-k_{x0}|z-z'|} (\text{serie3} - \text{serie4}) \right] \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
G_{estatica} = e^{-jk_{x0}(x-x')} & \left[e^{k_{x0}|z-z'|} \left[\frac{d}{2\pi} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'|-j(x-x')]} \right) \right] \right. \right. \\
& + \left. \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi)^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right) [|z-z'|-j(x-x')]} \right) \right] \\
& + e^{-k_{x0}|z-z'|} \left[\frac{d}{2\pi} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'+j(x-x')]} \right) \right] \right. \\
& \left. \left. - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi)^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right) [|z-z'+j(x-x')]} \right) \right] \right] \quad (3.62)
\end{aligned}$$

3.2.2. Cálculo del Gradiente de la Función de Green

Aplicamos ahora el método de Kummer al gradiente de la función de Green extrayendo en este caso 2 términos.

Teníamos que $\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}')$ y $\tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}')$ eran:

$$\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{-j}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{k_{xm}}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \quad (3.63)$$

$$\tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} -\text{sgn}(z-z') e^{-\gamma_m |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \quad (3.64)$$

Comenzamos por $\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}')$. Habíamos obtenido:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{k_{xm}}{\gamma_m} = \text{sgn}(m) \quad (3.65)$$

La diferencia es que ahora γ_m la aproximamos por dos términos, en vez de por uno sólo.

$$\gamma_m = \left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| \quad (3.66)$$

De forma que la ecuación (3.63) la podemos escribir como:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{-j}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{k_{xm}}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \operatorname{sgn}(m) e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \operatorname{sgn}(m) e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \right] \\ &\quad + \tilde{G}_{x0}(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.67)$$

llamamos $\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$ a la segunda parte de la serie que es la que vamos a tratar de expresar de forma cerrada. La ecuación anterior quedaría así:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{-j}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{k_{xm}}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \operatorname{sgn}(m) e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') \right] + \tilde{G}_{x0}(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde

$$\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \operatorname{sgn}(m) e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{-jk_{x0}(x-x')} e^{-j \frac{2\pi m}{d} (x-x')} \quad (3.69)$$

Como $\frac{2\pi m}{d}$ es mayor que k_{x0} , podemos decir que si m es negativo:

$$\left| -\frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| = \frac{2\pi m}{d} - k_{x0} \quad (3.70)$$

y si m es positivo:

$$\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| = \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \quad (3.71)$$

Usando esto para separar los valores absolutos, obviando el término $m = 0$ donde no aplicaremos la transformación de Kummer y haciendo un cambio de variable $n = -m$, $\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$ queda:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{2\pi n}{d} - k_{x0})|z-z'|} e^{+j\frac{2\pi n}{d}(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\frac{2\pi m}{d} + k_{x0})|z-z'|} \right. \\
&\quad \left. e^{-j\frac{2\pi m}{d}(x-x')} \right) \\
&= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left(-e^{k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi n}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} + e^{-k_{x0}|z-z'|} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2\pi m}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} \right)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Volviendo a hacer un cambio de variable $n = m$ y usando (3.27), tendríamos que $\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}')$ es finalmente

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[- \left(e^{k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} } \right) \right. \\
&\quad \left. + e^{-k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} } \right]
\end{aligned} \tag{3.73}$$

De esta forma, la ecuación (3.68) quedaría:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_x(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{-j}{2d} \left\{ \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{k_{xm}}{\gamma m} e^{-\gamma m|z-z'|} - \text{sgn}(m) e^{-|\frac{2\pi m}{d}||z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\
&\quad \left. + e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[- \left(e^{k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} } \right) + e^{-k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} } \right] \right\} \\
&\quad + \tilde{G}_{x0}(\bar{r}, \bar{r}')
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Una vez desarrollada la componente x , vamos a desarrollar de la misma forma la componente z . Si aplicamos el método de Kummer extrayendo esta vez dos términos, la serie quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{-\operatorname{sgn}(z-z')}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(e^{-\gamma m |z-z'|} - e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \right] + \tilde{G}_{z0}(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.75)$$

Llamamos $\tilde{G}_{z\text{estatica}}(\bar{r}, \bar{r}')$ a la segunda parte de la serie de forma que la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{-\operatorname{sgn}(z-z')}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(e^{-\gamma m |z-z'|} - e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} + \tilde{G}_{z\text{estatica}}(\bar{r}, \bar{r}') \right] \\ &\quad + \tilde{G}_{z0}(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde

$$\tilde{G}_{z\text{estatica}}(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} e^{-jk_{x0}(x-x')} e^{-j(\frac{2\pi m}{d})(x-x')} \quad (3.77)$$

Escribimos $\tilde{G}_{z\text{estatica}}(\bar{r}, \bar{r}')$ de la siguiente manera, separando los m negativos de los positivos, obviando el término $m = 0$ y realizando el cambio de variable $n = -m$:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{z\text{estatica}}(\bar{r}, \bar{r}') &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{2\pi n}{d} - k_{x0})|z-z'|} e^{+j(\frac{2\pi n}{d})(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-(\frac{2\pi m}{d} + k_{x0})|z-z'|} \right. \\ &\quad \left. e^{-j(\frac{2\pi m}{d})(x-x')} \right) \\ &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{k_{x0}|z-z'|} e^{-\left(\frac{2\pi n}{d}\right)[|z-z'| - j(x-x')]} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-k_{x0}|z-z'|} e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'| + j(x-x')]} \right) \\ &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left(e^{k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'| - j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'| - j(x-x')]} } + e^{-k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'| + j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'| + j(x-x')]} } \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

De forma que si introducimos este resultado en la ecuación (3.76), podemos escribirla como:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_z(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{-\operatorname{sgn}(z-z')}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(e^{-\gamma_m |z-z'|} - e^{-|\frac{2\pi m}{d}| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} \right. \\ &+ e^{-jk_{x0}(x-x')} \left(e^{k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} } + e^{-k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'+j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'+j(x-x')]} } \right) \left. \right] \\ &+ \tilde{G}_{z0}(\bar{r}, \bar{r}') \end{aligned} \quad (3.79)$$

Una vez que hemos extraído dos términos del desarrollo de Taylor no vamos a seguir extrayendo más términos al gradiente. Esto se debe a que, por un lado, lo que aportaría una mayor mejora sería seguir extrayendo el término que acompaña a la exponencial pero este término es en una componente 1 y en la otra $\operatorname{sgn}(m)$. Se ve que estos factores no dan lugar a la extracción de más términos. Por otro lado, consideramos que extraer dos sumandos del desarrollo en la exponencial $e^{-\gamma_m |z-z'|}$ supone una gran mejora en la convergencia y el hecho de extraer más de dos términos podría suponer problemas en los cálculos, como se explicará a continuación.

3.3. Extracción de cuatro términos

La extracción de cuatro términos únicamente se va a desarrollar para el cálculo de la función de Green. Para ello, vamos a seguir el mismo procedimiento que en los dos apartados anteriores pero con la diferencia de que en este caso $\frac{1}{\gamma_m}$ la aproximaremos por los cuatro primeros términos de su desarrollo de Taylor basándonos en:

$$(\sqrt{1+x})^{-1} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots \quad (3.80)$$

En la exponencial sólo vamos a extraer dos términos. La extracción de términos da lugar a exponenciales del tipo e^{-m} , e^{cte} , $e^{-1/m}$, e^{-1/m^2} , etc. Podemos ver que la primera exponencial da lugar a un sumatorio que constituye la función polilogarítmica. La segunda exponencial da lugar a un término constante. A partir de ahí, conforme más sumandos extraigamos más rápido crecen las exponenciales y, por tanto, las series que contengan el sumatorio de dichas exponenciales tardarían cada vez más en converger. Es por ello, que se considera que extraer en la exponencial más de dos términos no introduce mucha

mejora sino que complica los cálculos de las series que las contengan. Por lo explicado anteriormente, seguiremos dejando γ_m como $\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}$ y vamos a desarrollar $\frac{1}{\gamma_m}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_m} &= \frac{1}{\sqrt{k_{xm}^2 - k^2}} = \frac{1}{\sqrt{(k_{x0} + \frac{2\pi m}{d})^2 - k^2}} = \left(\sqrt{k_{x0}^2 + \left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2 + \frac{4\pi m}{d}k_{x0} - k^2} \right)^{-1} \\
&= \left(\sqrt{\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2 \left[\frac{k_{x0}d}{\pi m} + \frac{k_{x0}^2 - k^2}{\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2} \right]} \right)^{-1} \\
&\sim \left(\frac{2\pi m}{d}\right)^{-1} \left(1 - \frac{k_{x0}d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}^2 - k^2}{2\left(\frac{2\pi m}{d}\right)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{k_{x0}d}{\pi m}\right)^2 + \dots \right) \\
&= \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{(k^2 - k_{x0}^2)d^3}{2(2\pi m)^3} + \frac{3k_{x0}^2d^3}{2(2\pi m)^3}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Los dos últimos términos se pueden agrupar sabiendo que $k_{x0} = k \operatorname{sen}(\theta)$

$$\begin{aligned}
&\frac{(k^2 - k_{x0}^2)d^3}{2(2\pi m)^3} + \frac{3k_{x0}^2d^3}{2(2\pi m)^3} \\
&= \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} - \frac{k_{x0}^2d^3}{2(2\pi m)^3} + \frac{3k_{x0}^2d^3}{2(2\pi m)^3} \\
&= \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 - \operatorname{sen}^2(\theta) + 3\operatorname{sen}^2(\theta)) \\
&= \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\operatorname{sen}^2(\theta))
\end{aligned} \tag{3.82}$$

El término asintótico en este caso quedaría como:

$$\frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m|z-z'|} \rightarrow \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\operatorname{sen}^2(\theta)) \right| e^{-\left|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}\right||z-z'|} \tag{3.83}$$

Por tanto, si aplicamos el método de Kummer a la serie espectral, el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = & \frac{1}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_m} e^{-\gamma_m |z-z'|} - \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \text{sen}^2(\theta)) \right| \right. \right. \\
& \left. \left. e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \text{sen}^2(\theta)) \right| \right. \\
& \left. \left. e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \right) \right] + \tilde{G}_0(\bar{r}, \bar{r}')
\end{aligned} \tag{3.84}$$

A la segunda parte de la serie la llamamos $G_{estatica}$ y quedaría:

$$G_{estatica} = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \text{sen}^2(\theta)) \right| e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \tag{3.85}$$

Estudiamos los valores absolutos teniendo en cuenta que $\frac{d}{2\pi m} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \text{sen}^2(\theta))$ es mayor que $\frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2}$ (ver apéndice A).

1) Para los m positivos tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_m} & \rightarrow \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \text{sen}^2(\theta)) \right| \\
& = \left(\frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \text{sen}^2(\theta)) \right)
\end{aligned} \tag{3.86}$$

2) Para los m negativos tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_m} & \rightarrow \left| -\frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2} - \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \text{sen}^2(\theta)) \right| \\
& = \left(\frac{d}{2\pi m} + \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \text{sen}^2(\theta)) \right)
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Con esto, ya podemos separar los valores absolutos. Separamos los m negativos y positivos, obviando el término $m = 0$, y hacemos un cambio de variable $n = -m$ de forma que la ecuación (3.85) quedaría:

$$\begin{aligned}
G_{estatica} = & e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| -\frac{d}{2\pi n} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi n)^2} - \frac{k^2d^3}{2(2\pi n)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \right| \right. \\
& e^{-\left|-\frac{2\pi n}{d} + k_{x0}\right||z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi n}{d}\right)(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \right| \\
& \left. e^{-\left|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}\right||z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right]
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Modificamos los valores absolutos como hemos explicado y queda:

$$\begin{aligned}
G_{estatica} = & e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{2\pi n} + \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi n)^2} + \frac{k^2d^3}{2(2\pi n)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \right) e^{-\left(\frac{2\pi n}{d} - k_{x0}\right)|z-z'|} \right. \\
& e^{+j\left(\frac{2\pi n}{d}\right)(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \right) \\
& \left. e^{-\left(\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}\right)|z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right]
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Hacemos un cambio de notación $n = m$

$$\begin{aligned}
G_{estatica} = & e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d}{2\pi m} + \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \right) \right. \\
& e^{-\left(\frac{2\pi m}{d} - k_{x0}\right)|z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d}{2\pi m} - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} + \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \right) \\
& \left. e^{-\left(\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}\right)|z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right]
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Separamos cada factor

$$\begin{aligned}
G_{estatica} = e^{-jk_{x0}(x-x')} & \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{k_{x0}|z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right. \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{k_{x0}|z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{k_{x0}|z-z'|} e^{+j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{2\pi m} e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{-k_{x0}|z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{-k_{x0}|z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \\
& \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^2d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) e^{-\frac{2\pi m}{d}|z-z'|} e^{-k_{x0}|z-z'|} e^{-j\left(\frac{2\pi m}{d}\right)(x-x')} \right] \quad (3.91)
\end{aligned}$$

Por simplificar, vamos a tratar cada sumatorio por separado, de forma que $G_{estatica}$ la pondremos como:

$$\begin{aligned}
G_{estatica} = e^{-jk_{x0}(x-x')} & \left[e^{k_{x0}|z-z'|} (serie1 + serie2 + serie3) \right. \\
& \left. + e^{-k_{x0}|z-z'|} (serie4 - serie5 + serie6) \right] \quad (3.92)
\end{aligned}$$

Por un lado, la *serie1* y la *serie4* son del mismo tipo y se pueden expresar de forma cerrada como en los dos apartados anteriores, haciendo uso de la igualdad (3.13):

$$serie1 = \frac{d}{2\pi} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} \right) \right] \quad (3.93)$$

$$serie4 = \frac{d}{2\pi} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} \right) \right] \quad (3.94)$$

Por otro lado, la *serie2* y la *serie5* las expresamos como se detalló en el sección (3.2.1)

$$serie2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'| - j(x-x')]} = \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi)^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right)[|z-z'| - j(x-x')]} \right) \quad (3.95)$$

$$serie5 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2} e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'|+j(x-x')]} = \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi)^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right)[|z-z'|+j(x-x')]} \right) \quad (3.96)$$

Por último, las dos series nuevas que nos han aparecido son del tipo $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} e^{-m}$. Según la definición de polilogaritmo (3.58) la *serie3* y la *serie6* se corresponden con polilogaritmos de orden 3. Por tanto, podemos expresarlas como:

$$\begin{aligned} serie3 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'|-j(x-x')]} \\ &= \frac{k^2 d^3}{2(2\pi)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \text{Li}_3 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right)[|z-z'|-j(x-x')]} \right) \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} serie6 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) e^{-\left(\frac{2\pi m}{d}\right)[|z-z'|+j(x-x')]} \\ &= \frac{k^2 d^3}{2(2\pi)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \text{Li}_3 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right)[|z-z'|+j(x-x')]} \right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Finalmente la $G_{estática}$ queda:

$$\begin{aligned} G_{estática} &= e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[e^{k_{x0}|z-z'|} (serie1 + serie2 + serie3) \right. \\ &\quad \left. + e^{-k_{x0}|z-z'|} (serie4 - serie5 + serie6) \right] \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
G_{estatica} = e^{-jk_{x0}(x-x')} & \left[e^{k_{x0}|z-z'|} \left[\frac{d}{2\pi} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} \right) \right] \right. \right. \\
& + \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi)^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right) [|z-z'| - j(x-x')]} \right) \\
& + \frac{k^2d^3}{2(2\pi)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \text{Li}_3 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right) [|z-z'| - j(x-x')]} \right) \left. \right] \\
& + e^{-k_{x0}|z-z'|} \left[\frac{d}{2\pi} \left[-\ln \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} \right) \right] \right. \\
& - \frac{k_{x0}d^2}{(2\pi)^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right) [|z-z'| + j(x-x')]} \right) \\
& \left. \left. + \frac{k^2d^3}{2(2\pi)^3} (1 + 2\text{sen}^2(\theta)) \text{Li}_3 \left(e^{-\left(\frac{2\pi}{d}\right) [|z-z'| + j(x-x')]} \right) \right] \right] \quad (3.100)
\end{aligned}$$

Como podemos observar, conforme vamos extrayendo más términos van apareciendo funciones polilogarítmicas cada vez de mayor orden. Esto nos lleva a pensar que existe una relación progresiva de los términos que aparecen. Por tanto, se podría intentar sacar una expresión general para N términos. Este será el objetivo de la siguiente sección.

3.4. Extracción de N términos

En esta sección, vamos a tratar de deducir una fórmula general para el caso de aplicar Kummer extrayendo N términos asintóticos. Cabe resaltar que la formulación presentada es novedosa ya que no ha sido desarrollada anteriormente.

Partimos del desarrollo de Taylor de la raíz cuadrada:

$$(\sqrt{1+x})^{-1} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots \quad (3.101)$$

Esto lo podemos escribir como:

$$(\sqrt{1+x})^{-1} \approx 1 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + \dots \quad (3.102)$$

donde los factores f_n se pueden expresar como:

$$f_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{m=0}^{n-1} (2m+1) \quad (3.103)$$

Así la ecuación (3.102) quedaría expresado en forma de sumatorio de la siguiente manera:

$$(\sqrt{1+x})^{-1} \approx \sum_{n=0}^N f_n x^n = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\prod_{m=0}^{n-1} (2m+1) \right) x^n \quad (3.104)$$

Ahora vamos a desarrollar las potencias x^0, x^1, x^2, x^3 , etc. En nuestro caso teníamos que

$$\frac{1}{\gamma_m} = \frac{1}{\sqrt{k_{x_m}^2 - k^2}} = \frac{d}{2\pi m} \left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{k_{x_0} d}{\pi m} + \frac{(k_{x_0}^2 - k^2) d^2}{(2\pi m)^2}}_x} \right)^{-1} \quad (3.105)$$

Por tanto:

$$x = \binom{1}{0} \frac{k_{x_0} d}{\pi m} + \binom{1}{1} \frac{(k_{x_0}^2 - k^2) d^2}{(2\pi m)^2} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \binom{2}{0} \frac{k_{x_0}^2 d^2}{(\pi m)^2} + \binom{2}{1} \frac{k_{x_0} d (k_{x_0}^2 - k^2) d^2}{\pi m (2\pi m)^2} + \binom{2}{2} \frac{(k_{x_0}^2 - k^2)^2 d^4}{2^4 (\pi m)^4} \\ &= \binom{2}{0} \frac{k_{x_0}^2 d^2}{(\pi m)^2} + \binom{2}{1} \frac{k_{x_0} (k_{x_0}^2 - k^2) d^3}{2^2 (\pi m)^3} + \binom{2}{2} \frac{(k_{x_0}^2 - k^2)^2 d^4}{2^4 (\pi m)^4} \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} x^3 &= \binom{3}{0} \frac{k_{x_0}^3 d^3}{(\pi m)^3} + \binom{3}{1} \frac{k_{x_0}^2 d^2 (k_{x_0}^2 - k^2) d^2}{(\pi m)^2 (2\pi m)^2} + \binom{3}{2} \frac{k_{x_0} d (k_{x_0}^2 - k^2)^2 d^4}{(\pi m) 2^4 (\pi m)^4} + \binom{3}{3} \frac{(k_{x_0}^2 - k^2)^3 d^6}{2^6 (\pi m)^6} \\ &= \binom{3}{0} \frac{k_{x_0}^3 d^3}{(\pi m)^3} + \binom{3}{1} \frac{k_{x_0}^2 (k_{x_0}^2 - k^2) d^4}{2^2 (\pi m)^4} + \binom{3}{2} \frac{k_{x_0} (k_{x_0}^2 - k^2)^2 d^5}{2^4 (\pi m)^5} + \binom{3}{3} \frac{(k_{x_0}^2 - k^2)^3 d^6}{2^6 (\pi m)^6} \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} x^4 &= \binom{4}{0} \frac{k_{x_0}^4 d^4}{(\pi m)^4} + \binom{4}{1} \frac{k_{x_0}^3 d^3 (k_{x_0}^2 - k^2) d^2}{(\pi m)^3 (2\pi m)^2} + \binom{4}{2} \frac{k_{x_0}^2 d^2 (k_{x_0}^2 - k^2)^2 d^4}{(\pi m)^2 2^4 (\pi m)^4} \\ &\quad + \binom{4}{3} \frac{k_{x_0} d (k_{x_0}^2 - k^2)^3 d^6}{(\pi m) 2^6 (\pi m)^6} + \binom{4}{4} \frac{(k_{x_0}^2 - k^2)^4 d^8}{2^8 (\pi m)^8} \\ &= \binom{4}{0} \frac{k_{x_0}^4 d^4}{(\pi m)^4} + \binom{4}{1} \frac{k_{x_0}^3 (k_{x_0}^2 - k^2) d^5}{2^2 (\pi m)^5} + \binom{4}{2} \frac{k_{x_0}^2 (k_{x_0}^2 - k^2)^2 d^6}{2^4 (\pi m)^6} \\ &\quad + \binom{4}{3} \frac{k_{x_0} (k_{x_0}^2 - k^2)^3 d^7}{2^6 (\pi m)^7} + \binom{4}{4} \frac{(k_{x_0}^2 - k^2)^4 d^8}{2^8 (\pi m)^8} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Nos interesa agrupar los términos que están saliendo según el exponente al que está elevado m . Por ello, agrupamos los términos según ese criterio:

$$m \rightarrow \binom{1}{0} \frac{k_{x0}d}{\pi m} \quad (3.110)$$

$$m^2 \rightarrow \binom{2}{0} \frac{k_{x0}^2 d^2}{(\pi m)^2} + \binom{1}{1} \frac{(k_{x0}^2 - k^2) d^2}{2^2 (\pi m)^2} \quad (3.111)$$

$$m^3 \rightarrow \binom{3}{0} \frac{k_{x0}^3 d^3}{(\pi m)^3} + \binom{2}{1} \frac{k_{x0}(k_{x0}^2 - k^2) d^3}{2^2 (\pi m)^3} \quad (3.112)$$

$$m^4 \rightarrow \binom{4}{0} \frac{k_{x0}^4 d^4}{(\pi m)^4} + \binom{3}{1} \frac{k_{x0}^2 (k_{x0}^2 - k^2) d^4}{2^2 (\pi m)^4} + \binom{2}{2} \frac{(k_{x0}^2 - k^2)^2 d^4}{2^4 (\pi m)^4} \quad (3.113)$$

$$m^5 \rightarrow \binom{5}{0} \frac{k_{x0}^5 d^5}{(\pi m)^5} + \binom{4}{1} \frac{k_{x0}^3 (k_{x0}^2 - k^2) d^5}{2^2 (\pi m)^5} + \binom{3}{2} \frac{k_{x0} (k_{x0}^2 - k^2)^2 d^5}{2^4 (\pi m)^5} \quad (3.114)$$

Buscamos expresar la suma de estos términos de forma general. Llamamos x a $x = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Podemos ver que dado un n para cada m^n tenemos $x + 1$ términos. Es decir, el número de términos de forma general se obtiene tomando el entero inferior del resultado de dividir n entre dos y sumándole 1.

Además, vemos que el factor k_{x0} va disminuyendo en potencia de 2, comenzando desde n hasta 0. Por el contrario, el término $(k_{x0}^2 - k^2)$ va aumentando en potencia de 1, desde 0 hasta x .

Por otro lado, d aparece siempre elevada a n y los números combinatorios obtenidos del triángulo de Tartaglia [17], aparecen en cada n de la siguiente manera: el número superior comienza en n va disminuyendo de 1 en 1 en cada término y el inferior aumenta desde 0 hasta x .

Por último, vemos que en los denominadores aparecen los términos $2^0, 2^2, 2^4 \dots$ hasta 2^{2x} .

Así, podemos escribir cada término correspondiente a m^n de la siguiente manera:

$$m^n \rightarrow \frac{d^n}{(\pi m)^n} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} \quad (3.115)$$

Si a esto le añadimos que cada x^1, x^2, x^3, \dots va con su f_1, f_2, f_3, \dots entonces, a la expresión anterior debemos añadirle, para cada término, su factor correspondiente

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow f_1 \\
& \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow f_2 \\
& \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow f_3 \\
& \dots
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Entonces (3.115) quedaría:

$$m^n \rightarrow \frac{d^n}{(\pi m)^n} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \tag{3.117}$$

Volviendo a la ecuación (3.105) e introduciendo este desarrollo tendríamos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma_m} &= \frac{d}{2\pi m} \left(\sum_{n=0}^N \frac{d^n}{(\pi m)^n} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{(\pi m)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a}
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Una vez obtenidas estas expresiones, ya podemos aplicar el métodos de Kummer con N términos.

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{2d} \left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma_m} e^{\gamma_m |z-z'|} - \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{(\pi m)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \right| \right. \right. \\
&e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} \left. \right) e^{-jk_{xm}(x-x')} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{(\pi m)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \right| \\
&e^{-|\frac{2\pi m}{d} + k_{x0}| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \left. \right] + \tilde{G}_0(\bar{r}, \bar{r}')
\end{aligned} \tag{3.119}$$

A la segunda parte de la serie la llamamos $G_{estatica}$ y es la que vamos a tratar de modificar y sumar de manera óptima. Para ello, separamos los m positivos de los negativos y obviamos el término $m = 0$ puesto que ahí no aplicaremos la transformación de Kummer:

$$\begin{aligned}
G_{estatica} = & \sum_{m=-\infty}^{-1} \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{(\pi m)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \right| e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} \\
& e^{-jk_{xm}(x-x')} + \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{(\pi m)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \right| \\
& e^{-\left| \frac{2\pi m}{d} + k_{x0} \right| |z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')}
\end{aligned} \tag{3.120}$$

En los m positivos se puede quitar el valor absoluto porque la suma de los términos que aparecen en positivo es mayor que la suma de los que aparecen en negativo. Por otro lado, vamos a razonar más detenidamente qué ocurre para los m negativos. Si miramos la ecuación (3.120) vemos que para valores de m negativos aparecerá un signo negativo cuando $(-m)$ esté elevado a un número impar, es decir, cuando $n+1$ sea impar. Dicho de otro modo, cuando n sea par los términos serán negativos. Por el contrario, para n impar será positivos pero si razonamos qué ocurre con el factor f_{n-a} nos damos cuenta de que contiene un término $(-1)^n$, de forma que este factor añade un signo negativo cuando n sea impar. Por tanto, vemos que todos los términos bien por un motivo u otro aparecen restando cuando m es negativo. Teniendo en cuenta esto, el valor absoluto sería la suma de todos los términos en positivo. Para ello lo que tenemos que hacer es añadir un signo negativo a los m negativos.

De esta forma, la $G_{estatica}$ queda:

$$\begin{aligned}
G_{estatica} &= e^{-k_{x0}(x-x')} \left[e^{k_{x0}|z-z'|} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^N (-1)^{\frac{d^{n+1}}{2(\pi m)^{n+1}}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \right. \\
&e^{-\frac{2\pi m}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} + e^{-k_{x0}|z-z'|} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi m)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \\
&\left. e^{-\frac{2\pi m}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} \right] \\
&= e^{-k_{x0}(x-x')} \left[-e^{k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \right. \\
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n+1}} e^{-\frac{2\pi m}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} + e^{-k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \\
&\left. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{n+1}} e^{-\frac{2\pi m}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} \right]
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Haciendo uso de las funciones polilogarítmicas, la expresión anterior la podemos poner como

$$\begin{aligned}
G_{estatica} &= e^{-k_{x0}(x-x')} \left[-e^{k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} \right. \\
&f_{n-a} \text{Li}_{n+1}(z_1) + e^{-k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \text{Li}_{n+1}(z_2) \left. \right]
\end{aligned} \tag{3.122}$$

donde

$$z_1 = e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|-j(x-x')]} \tag{3.123}$$

$$z_2 = e^{-\frac{2\pi}{d}[|z-z'|+j(x-x')]} \tag{3.124}$$

Podemos ver los resultados que se obtienen de extraer 1,2,3,4..., hasta N términos en el capítulo 4.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos con la herramienta software desarrollada para verificar los métodos expuestos anteriormente. Podremos observar la convergencia de las funciones de Green tanto en su formulación espectral como en su formulación espacial. Así, podremos discutir la eficiencia de evaluar esta función y su gradiente con la formulación directa para distintas distancias del punto de observación y distinto ángulo incidente.

Posteriormente, se podrán observar los resultados obtenidos de la implementación del método de Ewald a la función de Green espacial y a su gradiente. También observaremos el error relativo de este método para distintas distancias y ángulos de incidencia.

Más tarde, estudiaremos la convergencia de la función de Green aplicándole la transformación de Kummer para los casos de extraer uno, dos, tres y cuatro términos. Compararemos los resultados para verificar la aceleración de la convergencia conforme se extraen más términos del desarrollo de Taylor.

Por último, se mostrarán unas gráficas en las se podrá ver el tiempo de cómputo necesario por cada uno de los métodos revisados en el proyecto para alcanzar un determinado error, según la distancia del punto de observación, con el fin de decidir cuál de ellos sería el óptimo en cada caso.

Cabe resaltar que, en todas las simulaciones, el valor de referencia que hemos tomado para el cálculo de los errores relativos (%) depende de si el punto de observación es cercano o lejano a la fuente. Hemos usado el método de conmutación, planteado en este proyecto, para tomar un punto aproximado como frontera entre lo que podría considerarse cerca o lejos. De esta forma, si la distancia entre el punto de observación y la fuente es mayor que dicho valor, entonces tomaremos como valor de referencia el valor de convergencia de la formulación directa espectral. Si por el contrario es menor que dicho valor, entonces

tomaremos como valor de referencia el valor de convergencia del método de Ewald, considerando que, por encontrarnos cerca de la fuente, éste es el método que en un menor número de términos converge.

4.1. Función de Green

En este apartado vamos a comenzar por observar la convergencia de las formulaciones espacial y espectral de la función de Green.

Recordemos que la fórmula de la función de Green espacial era:

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk_{x_0}md} \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR_m) \quad (4.1)$$

donde $R_m = \sqrt{(z - z')^2 + (x - x' - md)^2}$ y la función de Green espectral era:

$$\tilde{G}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{1}{2d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m} e^{-j\gamma_m|z-z'|} e^{-jk_{xm}(x-x')} \quad (4.2)$$

Para realizar la suma que aparece en (4.1) y (4.2) vamos a tomar un número total de términos que llamaremos M . Cabe resaltar que en todo el capítulo, cuando evaluamos la función de Green mediante sus formulaciones directas tanto espacial como espectral, ordenamos previamente los armónicos según la frecuencia en la que empiezan a propagarse y luego sumamos los M primeros. De esta forma nos aseguramos de que estamos sumando los primeros términos más importantes, es decir, los modos que más contribuyen. Para ello, se ha desarrollado una rutina que ordena los modos según su frecuencia de corte.

Los parámetros comunes a todas las simulaciones son:

-fuente situada en el origen $\rightarrow (x', z') = (0, 0)$

-frecuencia $f=2\text{GHz}$

-periodo $d=0.5\lambda$

En las primeras simulaciones obtenidas podemos ver la función de Green espacial y espectral para un punto de observación cercano. Consideramos un punto cercano, por ejemplo, el punto $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$. Podemos ver la convergencia para un ángulo $\theta = 0^\circ$ (ver Figura 4.1) y para un ángulo $\theta = 45^\circ$ (ver Figura 4.2).

En estas figuras vemos que cerca de la fuente, la formulación espacial de la función de Green converge mejor que la espectral. Observamos que la formulación espacial se

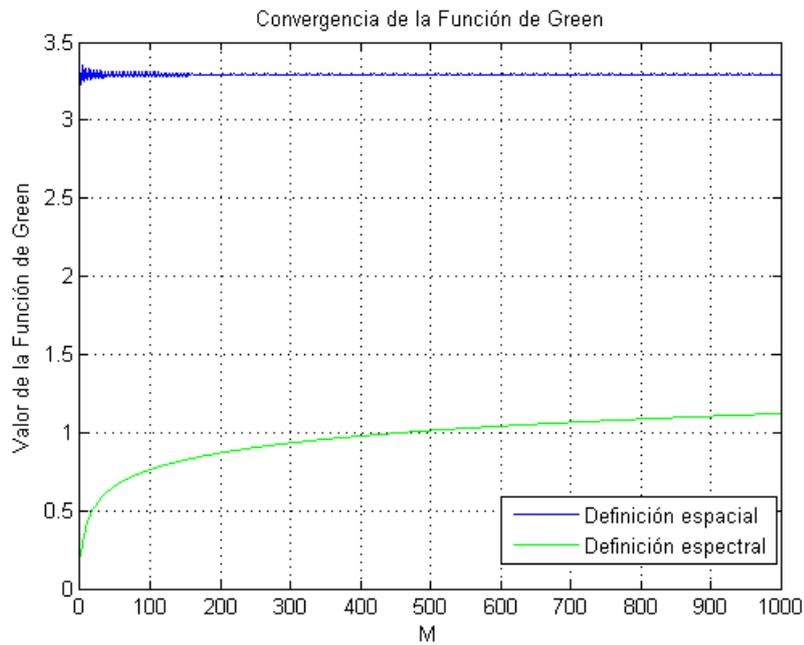


Figura 4.1: Convergencia de las funciones de Green espacial y espectral para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.

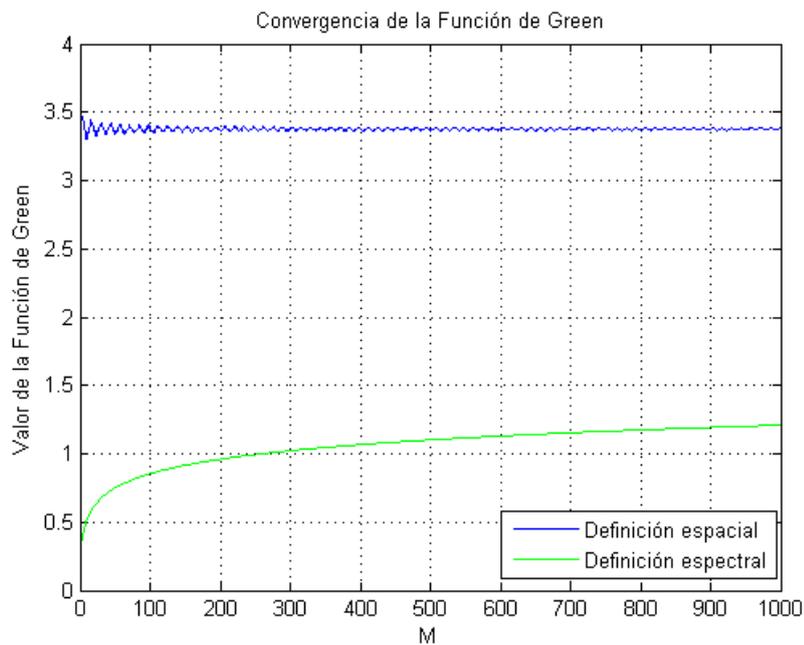


Figura 4.2: Convergencia de las funciones de Green espacial y espectral para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

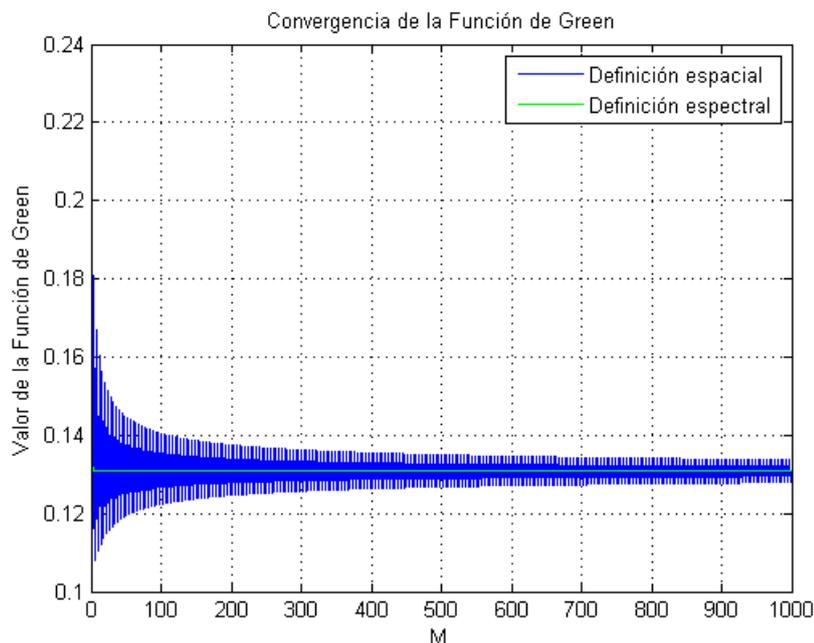


Figura 4.3: Convergencia de las funciones de Green espacial y espectral para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.

estabiliza a un valor concreto, aunque se observen pequeñas fluctuaciones, mientras que la espectral no llega en 1000 términos ni siquiera a un valor cercano al de convergencia.

Cuando $|z - z'| \rightarrow 0$ nos encontramos muy cerca de la fuente y el argumento de la función de Hankel de la ecuación (4.1) es muy pequeño. De esta manera, los valores de la función en los primeros términos son muy grandes comparados con los siguientes, es decir, la función de Hankel tiende muy rápidamente a 0 y por ello la convergencia de la serie espacial es más rápida conforme nos acercamos a la fuente. Esto también es debido a que cerca de la fuente la función de Green es singular, con una singularidad de tipo logarítmico, y este comportamiento singular lo representa muy bien la función de Hankel.

Ahora observamos la convergencia de dichas funciones para un punto de observación lejano. Elegimos el punto $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y lo simulamos para $\theta = 0^\circ$ (ver Figura 4.3) y $\theta = 45^\circ$ (ver Figura 4.4). Vemos que para un punto alejado, la serie que mejor converge es la formulación espectral. Sin embargo, la formulación espacial presenta mayores problemas de convergencia ya que en 1000 términos aún sigue fluctuando.

Si z es muy diferente de z' , nos encontramos lejos de la fuente, entonces la convergencia de la serie espectral es muy rápida. Si nos fijamos en la fórmula (4.2), tendríamos una exponencial negativa elevada a un número que se hace cada vez más grande conforme aumentamos el número de términos y, por tanto, cada vez el valor de la exponencial se

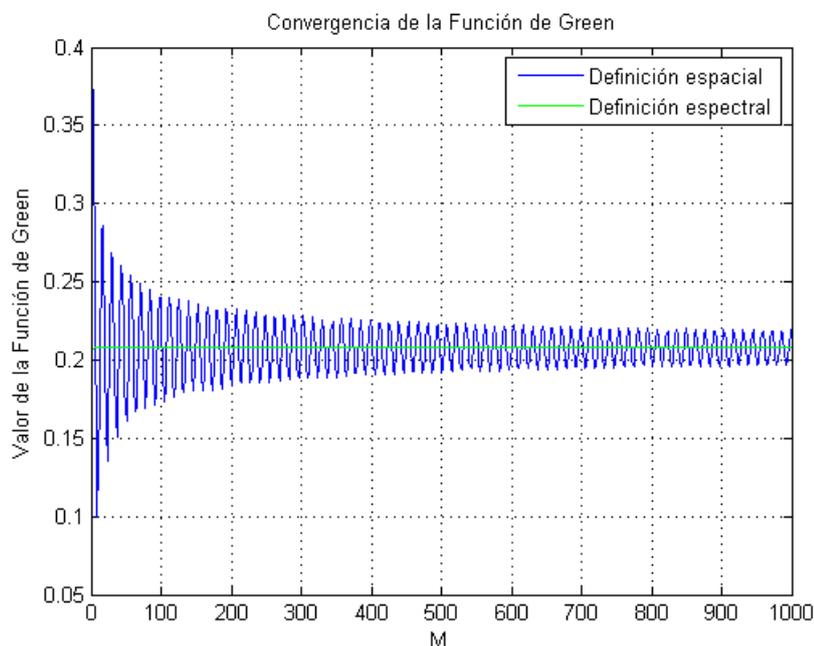


Figura 4.4: Convergencia de las funciones de Green espacial y espectral para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

hace más pequeño. Es decir, al aumentar el número de términos la exponencial se hace real y con fuerte caída.

Además, cuanto más lejos de la fuente estemos, mayor será el valor del exponente y antes tenderá a cero la exponencial, de forma que aunque aumentemos el número de términos, el resultado de la serie es prácticamente el mismo puesto que sumamos cada vez términos más cercanos a cero. La convergencia que presenta es de tipo exponencial.

Por todo ello, concluimos que cuando se trata de obtener la función de Green en puntos cercanos a la fuente, lo óptimo sería usar la definición espacial. Por el contrario, cuando estemos lejos de la fuente, la formulación anterior presenta problemas de convergencia. En estos casos lo mejor sería usar directamente la formulación espectral de la función de Green que, como se ha demostrado, converge rápidamente en puntos lejanos a la fuente.

4.2. Gradiente de la Función de Green

En esta sección vamos a estudiar la convergencia del gradiente de la función de Green, para distintos ángulos.

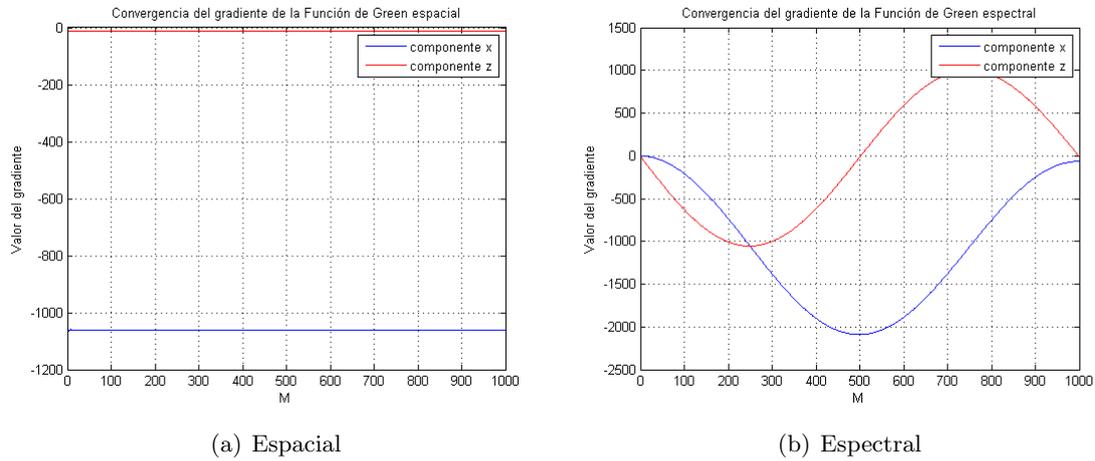


Figura 4.5: Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.

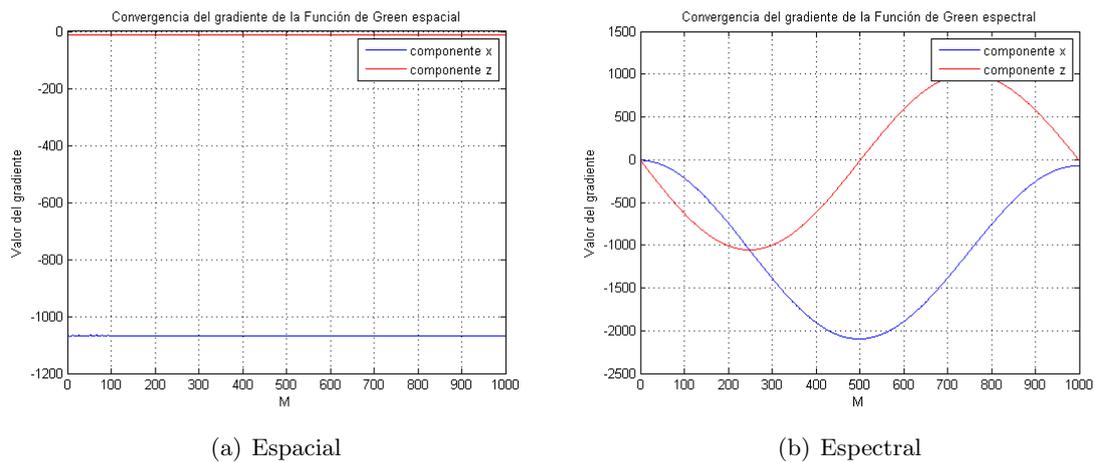
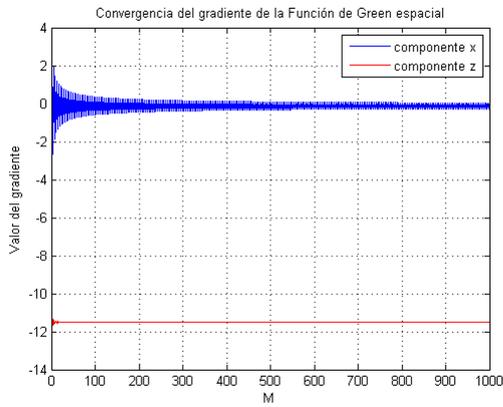
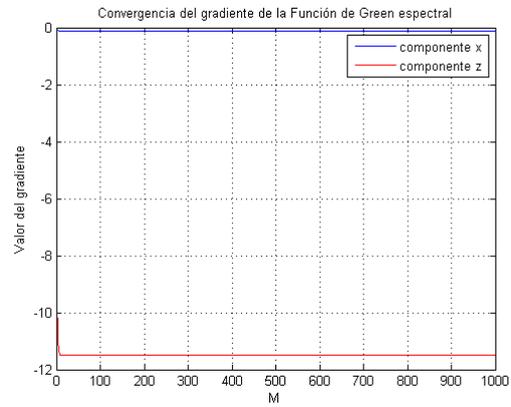


Figura 4.6: Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

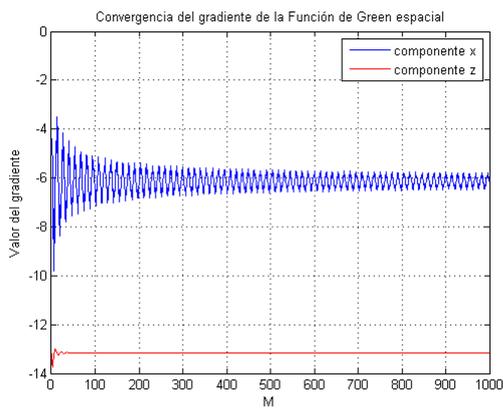


(a) Espacial

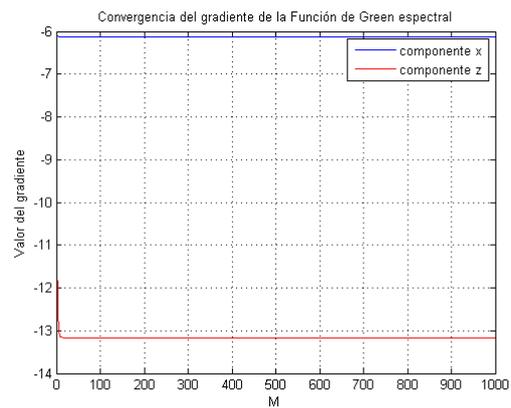


(b) Espectral

Figura 4.7: Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.



(a) Espacial



(b) Espectral

Figura 4.8: Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

La Figura 4.5a muestra la convergencia de las dos componentes del gradiente de la función de Green espacial para un punto de observación cercano y para un ángulo incidente $\theta = 0^\circ$. La Figura 4.5b muestra la convergencia para el mismo caso pero esta vez aplicando el gradiente a la función de Green espectral. Si cambiamos el ángulo y fijamos $\theta = 45^\circ$, la convergencia de las dos componentes de la función de Green espacial es la que podemos observar en la Figura 4.6a. Para este caso, la convergencia del gradiente de la función de Green espectral la podemos observar en la Figura 4.6b.

Para ambos ángulos θ se observa que las componentes espaciales sí convergen mientras que las espectrales no. Esto se debe a que nos encontramos cerca de la fuente, donde la función de Green espacial converge mejor que la espectral. Por tanto, es de esperar que las componentes del gradiente de la función de Green espacial presenten, como hemos visto, una mejor convergencia respecto a las componentes de la formulación espectral.

Por otro lado, la Figura 4.7a muestra la convergencia de las dos componentes del gradiente de la función de Green espacial para un punto de observación lejano y para un ángulo incidente $\theta = 0^\circ$. En la Figura 4.7b se muestra la convergencia de la función de Green espectral para el mismo caso. Si cambiamos el ángulo y fijamos $\theta = 45^\circ$, la convergencia es la que podemos observar en la Figura 4.8a para el caso espacial y en la Figura 4.8b para el caso espectral.

Para estos casos vemos que las componentes del gradiente aplicado a la función de Green espectral convergen mucho mejor que aplicado a la función de Green espacial. Esto se debe a que nos encontramos lejos de la fuente, de forma que la función de Green espectral converge mejor que la espacial y, por tanto, el gradiente de la función de Green espectral presentará, en sus dos componentes, mejor convergencia que el gradiente aplicado a la espacial. Cabe resaltar que, de las dos componentes espaciales, la componente x presenta un mayor problema de convergencia, pues en 1000 términos aún oscila.

Aunque ya hemos podido deducir ciertas conclusiones con estas imágenes, vamos a trabajar ahora con los errores relativos (%) de las componentes para que ver de forma más clara la convergencia. En la Figura 4.9 podemos observar los errores relativos para un punto cercano y $\theta = 0^\circ$ tanto para el gradiente espacial como para el espectral. En la Figura 4.10 se observa el mismo caso pero cambiando $\theta = 45^\circ$.

De estas figuras podemos deducir que si obtenemos el gradiente mediante su formulación espacial, la componente z converge muy bien cerca de la fuente puesto que obtenemos un error relativo de 10^{-7} y la componente x no converge tan bien (error de 10^{-1}). Además, podemos observar que ambas componentes del gradiente espectral convergen mal puesto que presentan errores muy elevados.

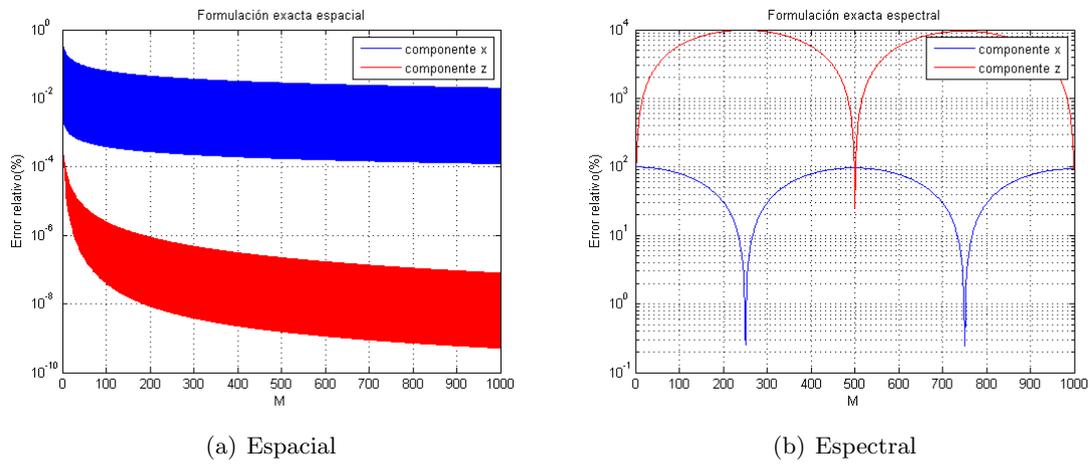


Figura 4.9: Error relativo (%) de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.

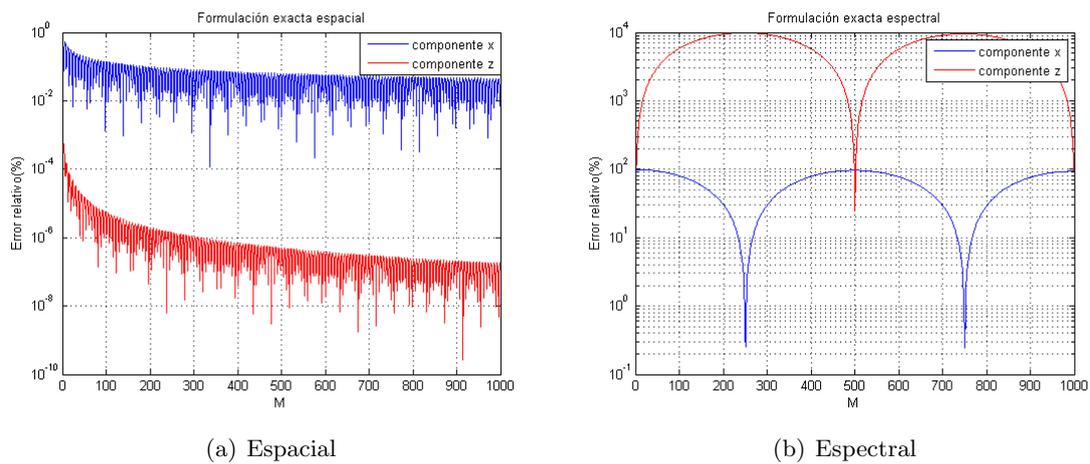


Figura 4.10: Error relativo (%) de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

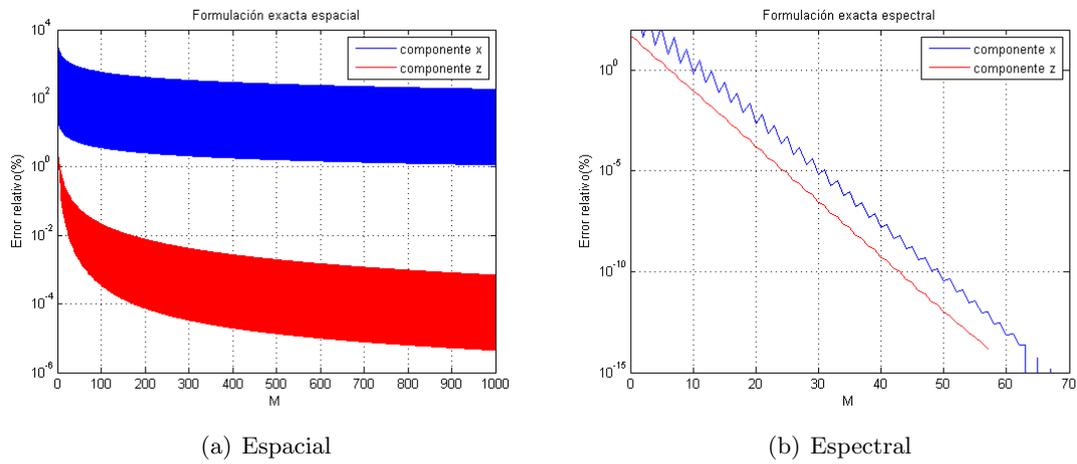


Figura 4.11: Error relativo (%) de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.

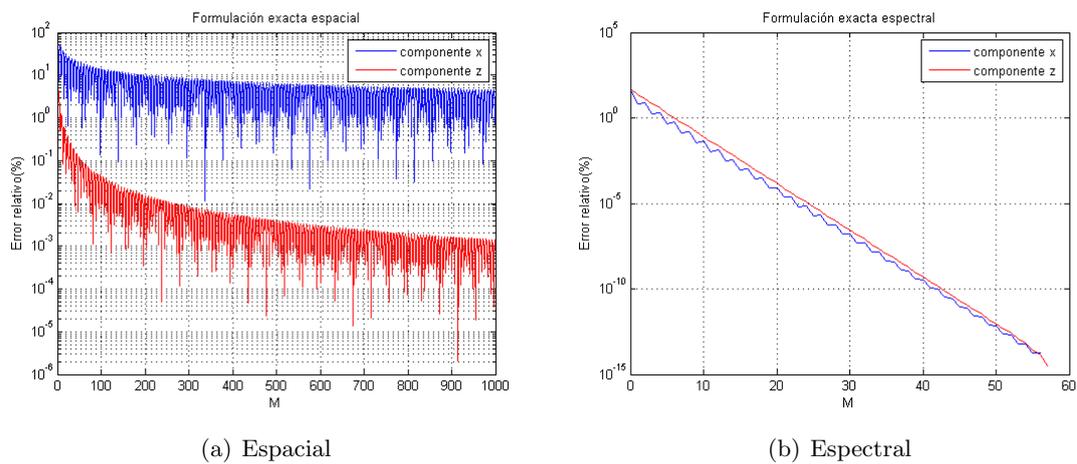


Figura 4.12: Error relativo (%) de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

Por otro lado, si evaluamos la convergencia del gradiente para un punto lejano podemos observar en la Figura 4.11 los errores relativos para $\theta = 0^\circ$ y en la Figura 4.12 para $\theta = 45^\circ$.

De estas dos figuras podemos deducir que si obtenemos el gradiente mediante su formulación espacial, la componente x no convergen bien (con error de 10^3) y la z no converge muy bien pero sí mejor que la x (con error de 10^{-3}). Además observamos que con la formulación espectral ambas componentes convergen con un error de 10^{-12} en tan sólo 50 términos por lo que podemos decir que convergen muy bien.

La conclusión que sacamos es que, en este caso, el mayor problema es calcular la componente x cerca de la fuente puesto que ni con la formulación espectral ni con la espacial se obtiene un error relativo aceptable. Observando la fórmula del gradiente espacial (4.3), vemos que en la componente x aparece el factor m que dificulta la convergencia. Por el contrario, la componente z no presenta esta dependencia.

$$\nabla G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_x m d}}{R_m} \frac{1}{4j} \mathbf{H}_1^{(2)}(kR_m) \cdot [-(x - x' - md)\hat{\mathbf{x}} - (z - z')\hat{\mathbf{z}}] \quad (4.3)$$

En general, podemos concluir que el gradiente de la función de Green espacial converge mejor cerca de la fuente, mientras que lejos de la fuente es la formulación espectral la que da mejores resultados.

4.3. Método de Ewald

4.3.1. Función de Green

Como ya hemos visto anteriormente, cerca de la fuente la función de Green espacial presenta una mejor convergencia que la espectral. El objetivo en esta sección es comprobar que aplicando el método de Ewald conseguimos acelerar la convergencia de la función de Green.

Para ello, utilizando la formulación detallada en el capítulo 2, vamos a obtener el error relativo del método de Ewald según el número de términos que escojamos para sumar la serie. Como ya hicimos en el estudio anterior, vamos a hacer un análisis para un punto cercano y otro lejano y distintos ángulos de onda incidente.

En la Figura 4.13 podemos ver el error relativo para un punto cercano cuando la onda incide con un ángulo $\theta = 0^\circ$. Si variamos el ángulo, por ejemplo $\theta = 45^\circ$, el resultado es el

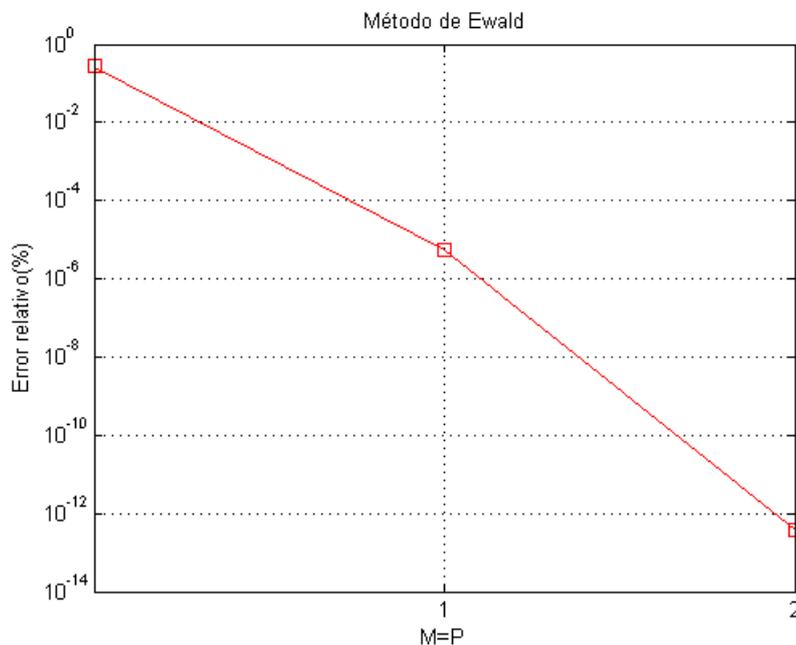


Figura 4.13: Error relativo de convergencia del método de Ewald para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.

que vemos en la Figura 4.14. Vemos que dicho método converge en tan sólo dos términos proporcionando un error relativo (%) en torno a 10^{-10} .

Si alejamos el punto de observación, podemos ver en las Figuras 4.15 y 4.16, que el método de Ewald sigue proporcionando buenos resultados para distintos ángulos, $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 45^\circ$ respectivamente. En estos casos, se consigue en tres términos un error menor que 10^{-12} . Si recordamos los resultados de la sección anterior, cerca de la fuente la formulación directa espacial con 1000 términos aún seguía fluctuando en torno al valor de convergencia.

Cabe resaltar que en todas las simulaciones se ha elegido automáticamente el 'splitting parameter' óptimo sugerido en [4].

Por otro lado, el número de términos usados para calcular la serie lo hemos fijado según el error numérico de la máquina. Las funciones de error complementario usadas en el método de Ewald son calculadas por el ordenador de forma correcta hasta un cierto término. A partir de ese término, por acumulación de errores numéricos, las diferencias de las funciones de error complementario dejan de converger y, por tanto, el valor de la función de Green se dispara sin ningún sentido. Por ello, hemos usado este momento exacto en el que las funciones de error dejan de calcularse correctamente para considerar que el método de Ewald ha convergido.

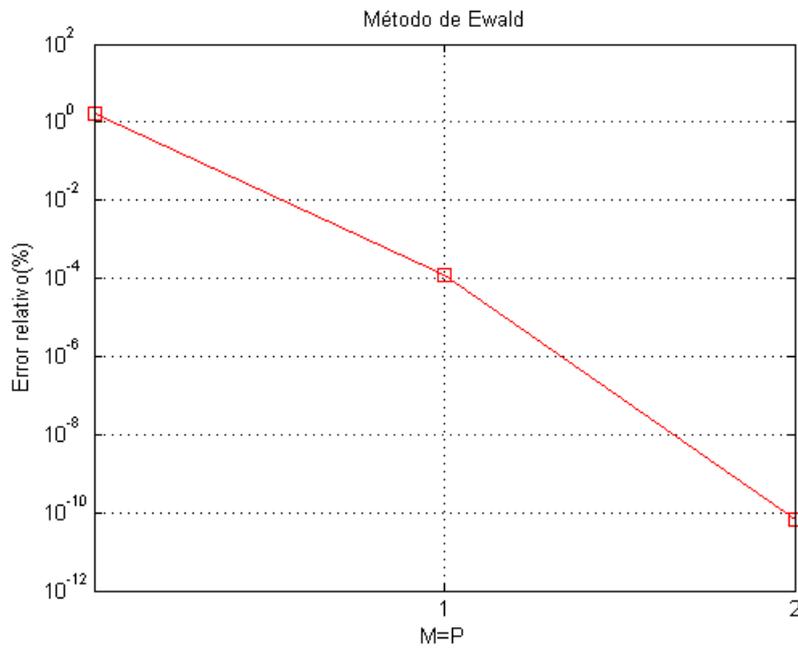


Figura 4.14: Error relativo de convergencia del método de Ewald para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.0000000001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

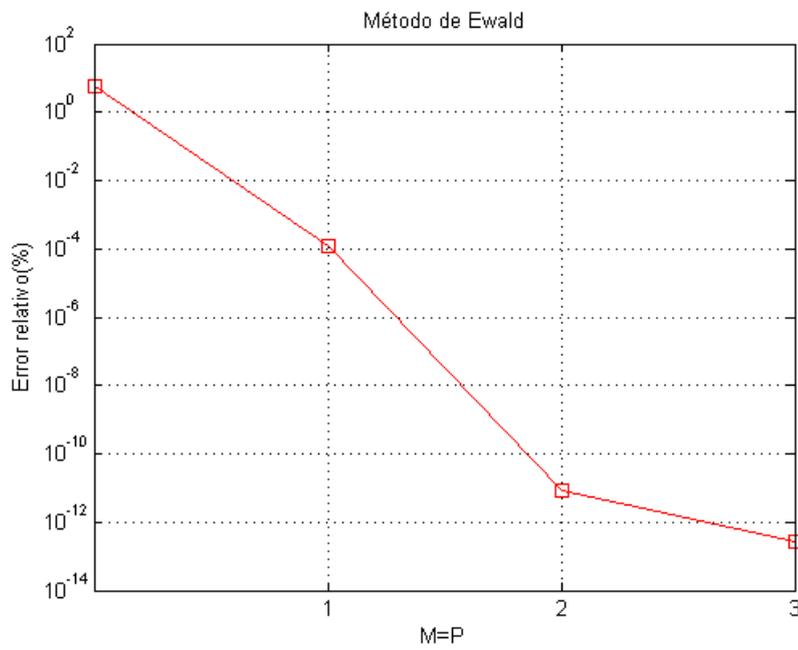


Figura 4.15: Error relativo de convergencia del método de Ewald para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.

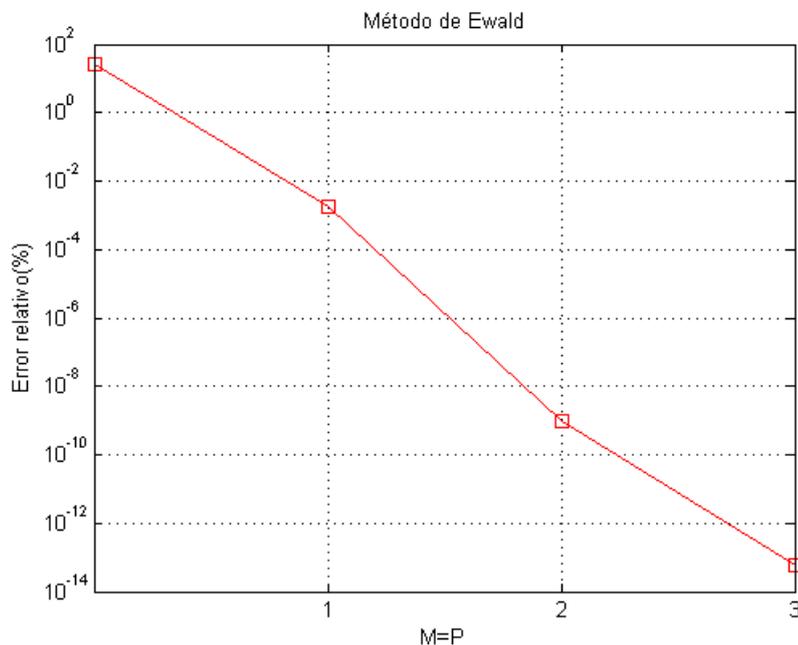


Figura 4.16: Error relativo de convergencia del método de Ewald para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

Como vemos, este método es interesante para obtener la formulación espacial de la función de Green con una convergencia más rápida que la que se obtiene de aplicar directamente dicha formulación. La formulación espacial era necesaria para estudiar la función de Green en los casos en los que nos encontremos cerca de la fuente. Para puntos lejanos a la fuente, como ya se explicó anteriormente, es más útil obtener el resultado con la formulación espectral de la función de Green exacta, ya que se demostrará posteriormente que es más eficiente en términos de tiempo computacional. Aun así, podemos observar que el método de Ewald funciona bien tanto para casos lejanos como para casos cercanos.

En resumen, la función de Green de un array periódico de líneas infinitas de corriente ha sido representada eficientemente usando el método de Ewald. Dicho método ha resultado tener convergencia gaussiana y necesitar sólo unos pocos términos para conseguir una buena precisión tanto en puntos lejanos como en puntos cercanos. Recordemos que podían surgir pequeñas dificultades a alta frecuencia o para los casos en los que la distancia entre elementos d (ver Figura 1.1) es mayor que λ debido al 'splitting parameter' óptimo. Estas dificultades se podían solventar con la elección de otros valores alternativos de dicho parámetro, tal y como se explicó en la sección 2.1.3.

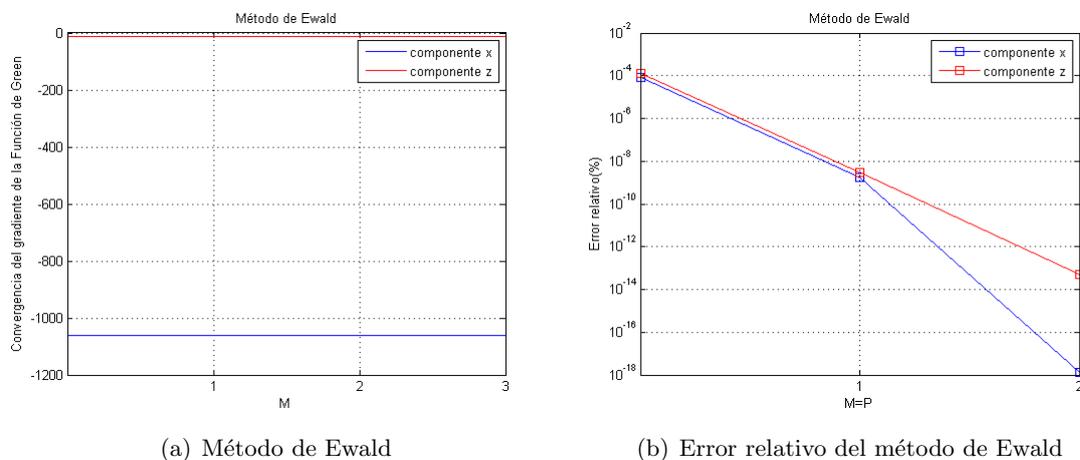


Figura 4.17: Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.

4.3.2. Gradiente de la Función de Green

En esta sección vamos a ver cómo mejora la convergencia de las componentes del gradiente cuando aplicamos el método de Ewald. La formulación que se ha implementado es la detallada en la sección 2.2.

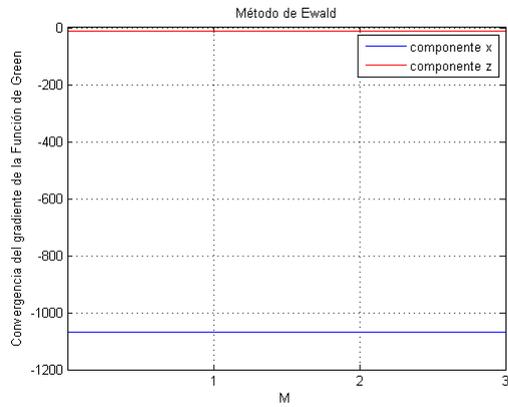
La Figura 4.17a muestra la convergencia de las dos componentes del gradiente calculadas mediante el método de Ewald para un punto cercano a la fuente, como es el punto $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y para $\theta = 0^\circ$. En la Figura 4.17b se muestra el error relativo de ambas componentes.

Si ahora cambiamos el ángulo de incidencia de la onda y lo fijamos a $\theta = 45^\circ$, podemos ver los resultados de convergencia en las Figuras 4.18a y 4.18b.

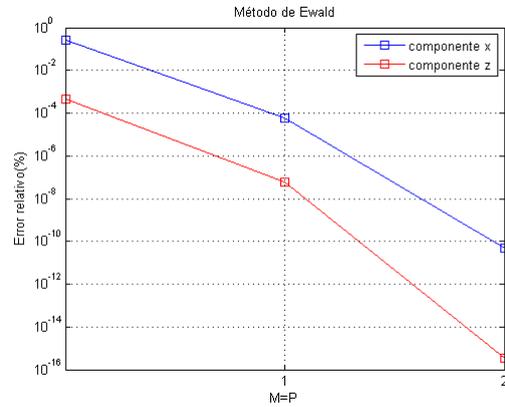
En la Figura 4.19a podemos ver la convergencia de las componentes del gradiente para un punto lejano $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$, y en la Figura 4.19b el error relativo. En la Figura 4.20a mostramos la misma convergencia pero cambiando $\theta = 45^\circ$ y en la Figura 4.20b el error relativo.

Vemos que aplicando el método de Ewald cerca de la fuente se pueden obtener errores relativos (%) de 10^{-8} o menores en tan sólo un término para un ángulo $\theta = 0^\circ$. Para un ángulo $\theta = 45^\circ$ se obtienen errores menores que 10^{-10} con dos términos. Lejos de la fuente se obtienen errores relativos (%) de 10^{-12} con 3 términos para ambos ángulos.

Cuando calculábamos el gradiente de forma directa, tanto la formulación espacial como la espectral, alguna de sus componentes presentaban problemas de convergencia según nos situásemos cerca o lejos de la fuente. Además, con 1000 términos se obtenían errores

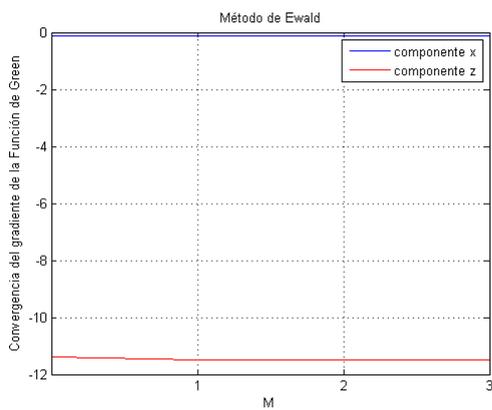


(a) Método de Ewald

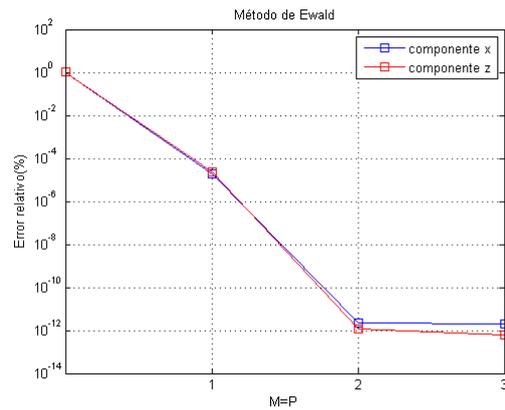


(b) Error relativo del método de Ewald

Figura 4.18: Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

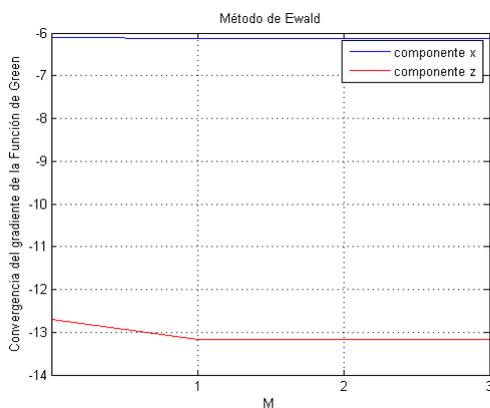


(a) Método de Ewald

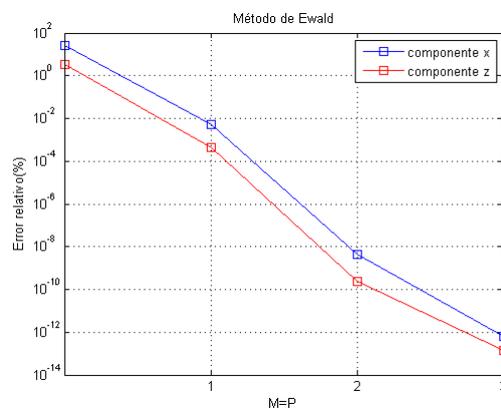


(b) Error relativo del método de Ewald

Figura 4.19: Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 0^\circ$.



(a) Método de Ewald



(b) Error relativo del método de Ewald

Figura 4.20: Convergencia de las componentes del gradiente las función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.001\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

muchos más grandes que los obtenidos con el método de Ewald. Por ello concluimos que el método de Ewald aplicado al gradiente, como se ha observado en estos resultados, supone una gran mejora en comparación a la formulación directa.

4.4. Método de Kummer

4.4.1. Función de Green

En esta sección vamos a estudiar los resultados y conclusiones de la aplicación del método de Kummer, extrayendo 1, 2, 3 y 4 términos del desarrollo de Taylor de la función de Green y vamos a comparar la convergencia de estos métodos con la de la función de Green espectral y espacial.

Comenzamos por hacer un estudio en función de la distancia del punto de observación según la coordenada z . Para ello, vamos a observar el error relativo de este método extrayendo varios términos para $z = 0.000000000001\lambda$ (ver Figura 4.21), para $z = 0.00001\lambda$ (ver Figura 4.22) y para $z = 0.1\lambda$ (ver Figura 4.23). En todos los casos anteriores, la coordenada x es 0.01λ y $\theta = 20^\circ$.

Cabe resaltar que las oscilaciones en la convergencia que podemos observar en las imágenes anteriores se deben a que la coordenada x del punto de observación es distinta de cero.

Como podemos observar al comparar estas gráficas, aunque esta transformación esté funcionando bien cerca y lejos de la fuente, el error alcanzado en general es menor conforme más nos alejamos de la fuente. Recordemos que la transformación de Kummer se aplica

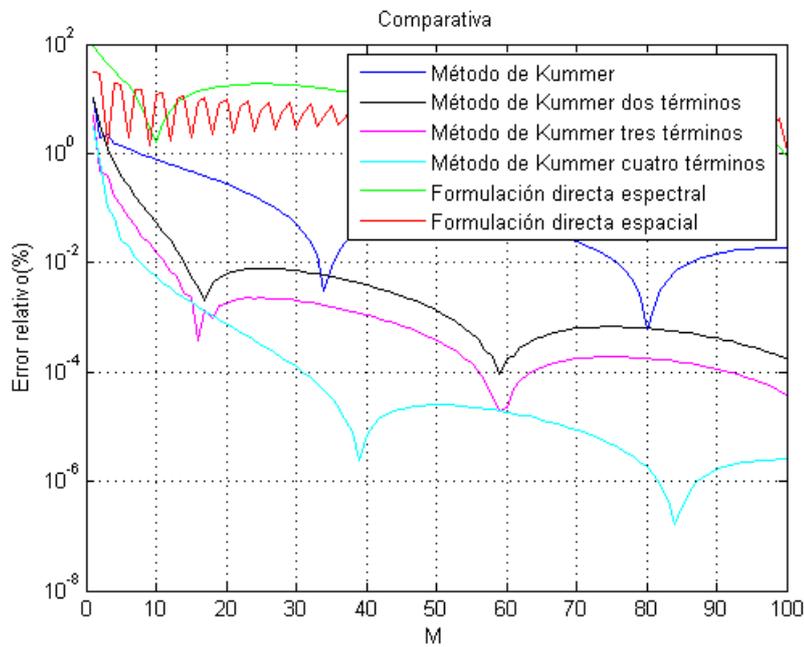


Figura 4.21: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$.

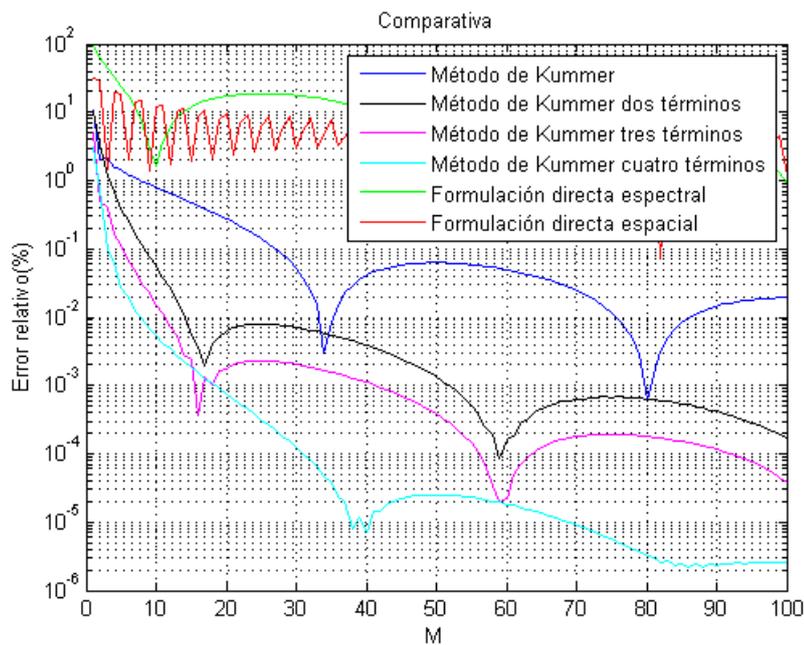


Figura 4.22: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.00001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$.

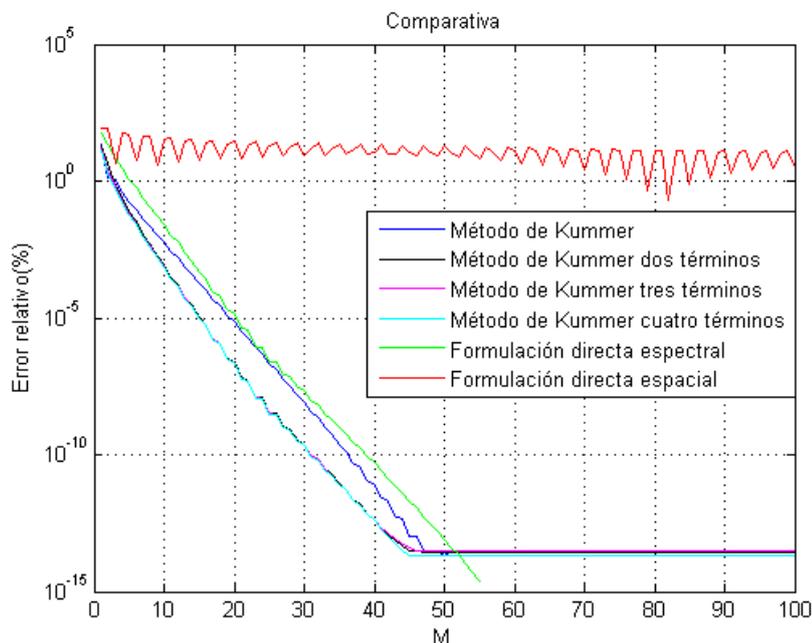


Figura 4.23: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$.

sobre la formulación espectral de la función de Green, la cual converge mejor cuanto más nos alejamos de la fuente.

Con estas gráficas se confirma que cuanto más términos extraigamos, menor error relativo se alcanza para un mismo número de términos. Con lo cual, podemos afirmar que cuanto más términos extraigamos, más rápido converge la serie.

Cabe resaltar que en la Figura 4.23 el comportamiento constante a partir de los 50 términos probablemente se debe a la precisión finita con la que se calcula el valor de referencia que se utiliza para calcular el valor relativo.

Lo siguiente que vamos a estudiar es cómo afecta el ángulo de incidencia a la convergencia del método de Kummer extrayendo uno, dos, tres y cuatro términos. Para ello, fijamos $x = 0.01\lambda$ y $z = 0.000000000001\lambda$ y vamos a estudiar los errores relativos para $\theta = 1^\circ$ (ver Figura 4.24), para $\theta = 45^\circ$ (ver Figura 4.25) y para $\theta = 89^\circ$ (ver Figura 4.26).

Vamos a razonar las similitudes que podemos observar entre los diferentes métodos.

Vemos que si $\theta = 0^\circ$, la extracción de 4 términos da el mismo resultado, en cuanto a convergencia, que la extracción de 3 términos. Esto se debe a que si $\theta = 0^\circ \rightarrow \text{sen}(\theta) = 0 \rightarrow k_{x0} = k \text{sen}(\theta) = 0$. El cuarto término que extraíamos del desarrollo de Taylor de $1/\gamma_m$ era $\frac{3}{2} \frac{k_{x0}^2 d^3}{(2\pi i m)^3}$ (ver ecuación 3.81). Por lo tanto, puede verse que el nuevo término que

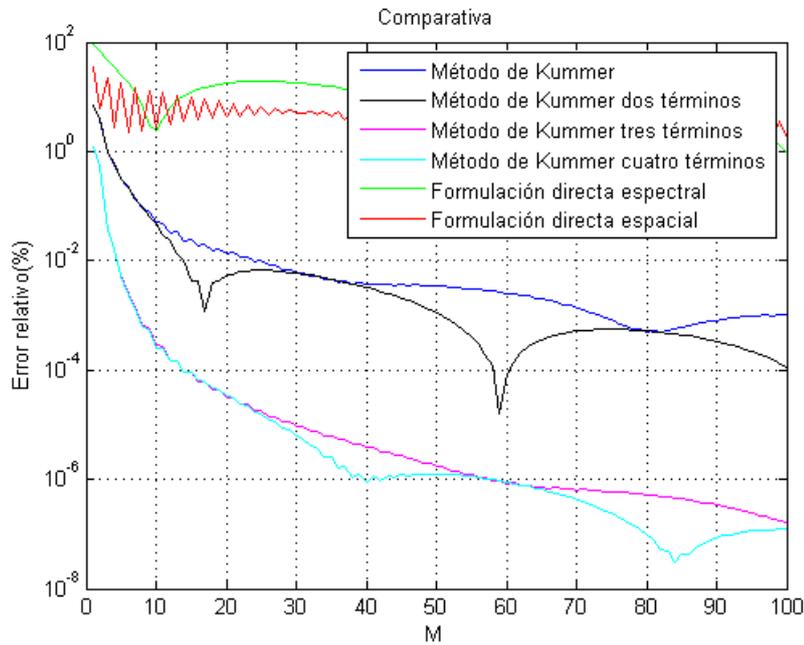


Figura 4.24: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para el punto $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 1^\circ$.

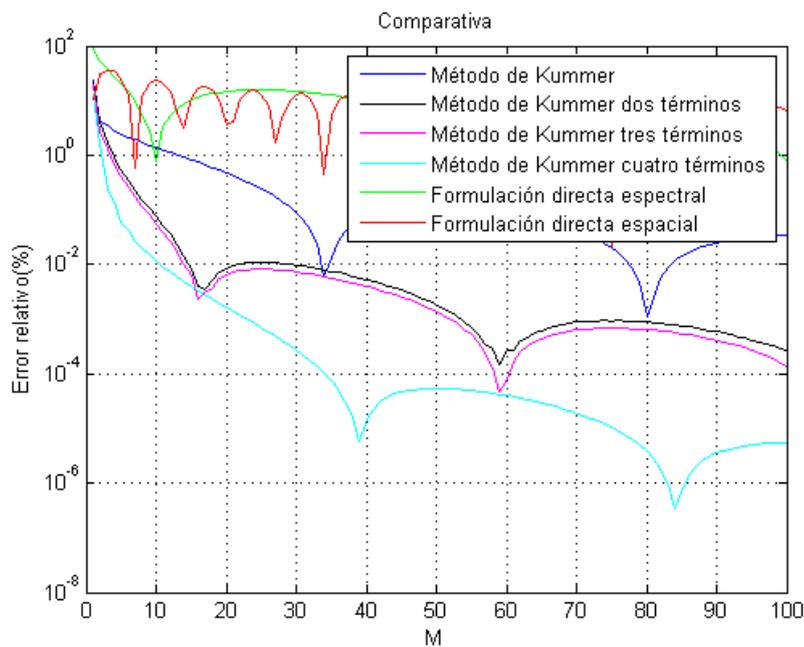


Figura 4.25: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para el punto $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

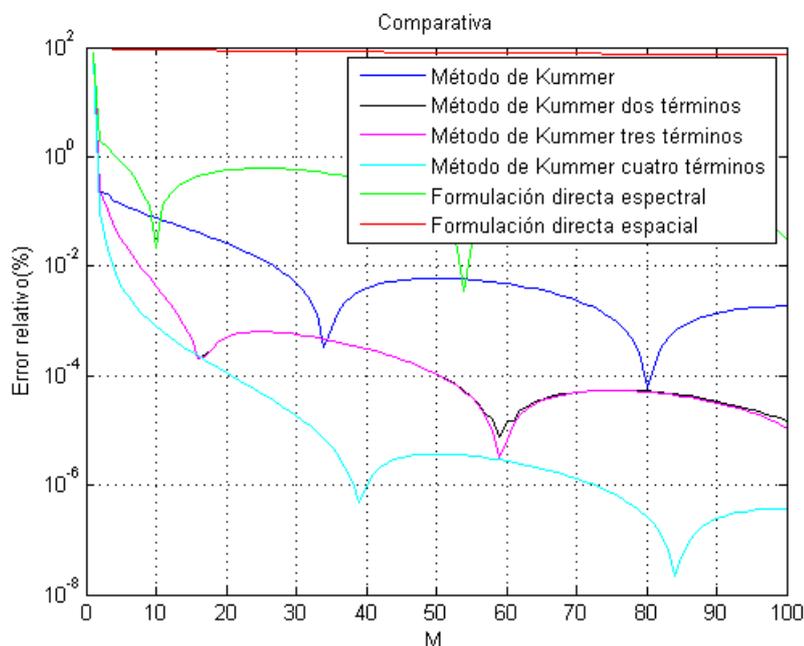


Figura 4.26: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para el punto $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 89^\circ$.

se introduce al extraer 4 términos se anula cuando $\theta = 0^\circ$ y por esa razón podemos ver en la Figura 4.24 que la convergencia del método de Kummer con 4 términos es la misma que con 3. Además, también se observa que la serie extraído 2 términos tiene la misma convergencia que extraído un solo término. Esto ocurre por la misma razón, pues el segundo término que extraíamos en la ecuación (3.41) era $\frac{k_{x0}d^2}{(2\pi m)^2}$, de forma que se anula cuando $\theta = 0^\circ$, como es este caso.

Por otro lado, en la Figura 4.26 podemos ver que para $\theta = 90^\circ$, el método de Kummer con 3 términos presenta la misma convergencia que con 2 términos. Esto se debe a que si $\theta = 90^\circ$, entonces $\sin(\theta) = 1 \rightarrow k_{x0} = k \sin(\theta) = k$. Si observamos la ecuación (3.81), vemos que el tercer término que extraemos es $\frac{(k^2 - k_{x0}^2)d^3}{2(2\pi m)^3}$ de forma que este término se anula cuando $k = k_{x0}$. Como esto ocurre cuando $\theta = 90^\circ$, es en este caso cuando la extracción de un tercer término no mejora la convergencia de la serie respecto a la extracción de 2 términos.

Vamos a razonar en términos generales estas similitudes según el ángulo θ . Para ello, vamos a partir de la fórmula que se demostró anteriormente:

$$G_{estatica} = e^{-k_{x0}(x-x')} \left[-e^{k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} \right. \\ \left. f_{n-a} \text{Li}_{n+1}(z_1) + e^{-k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} \sum_{a=0}^x \frac{k_{x0}^{(n-2a)} (k_{x0}^2 - k^2)^a}{2^{2a}} \binom{n-a}{a} f_{n-a} \text{Li}_{n+1}(z_2) \right] \quad (4.4)$$

Por un lado, si $\theta = 90^\circ$ entonces $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(90^\circ) = 1 \rightarrow k_{x0} = k \text{sen}(\theta) = k$. Si ocurre esto, en la ecuación (4.4) todos los términos que contengan $(k_{x0}^2 - k^2)^a$ se anularán, excepto cuando $a = 0$ que será el único término que no se anule, dando lugar a una serie donde sólo queden los términos puros del tipo k_{x0}^n :

$$G_{estatica} = e^{-k_{x0}(x-x')} \left[-e^{k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} k_{x0}^n \binom{n}{0} f_n \text{Li}_{n+1}(z_1) \right. \\ \left. + e^{-k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} k_{x0}^n \binom{n}{0} f_n \text{Li}_{n+1}(z_2) \right] \quad (4.5)$$

Es por ello que la transformación de Kummer con 3 términos da la misma convergencia que con 2, puesto que el término que añadimos es del tipo $(k_{x0}^2 - k^2)$ y esos son los que se anulan en este caso.

Por otro lado, si $\theta = 0^\circ$ entonces $\text{sen}(\theta) = \text{sen}(0^\circ) = 0 \rightarrow k_{x0} = k \text{sen}(\theta) = 0$. Si ocurre esto, en la ecuación (4.4) todos los términos que contengan $k_{x0}^{(n-2a)}$ se anularán, excepto cuando $n - 2a = 0 \rightarrow 2x - 2a = 0 \rightarrow a = x$ que será el único término que no se anule, dando lugar a una serie donde sólo queden los términos puros del tipo $(k_{x0}^2 - k^2)^x$:

$$G_{estatica} = e^{-k_{x0}(x-x')} \left[-e^{k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} \frac{(k_{x0}^2 - k^2)^x}{2^{2x}} \binom{n-x}{x} f_{n-x} \text{Li}_{n+1}(z_1) \right. \\ \left. + e^{-k_{x0}|z-z'|} \sum_{n=0}^N \frac{d^{n+1}}{2(\pi)^{n+1}} \frac{(k_{x0}^2 - k^2)^x}{2^{2x}} \binom{n-x}{x} f_{n-x} \text{Li}_{n+1}(z_2) \right] \quad (4.6)$$

Es por ello que la transformación de Kummer con 2 términos da la misma convergencia que con 1 y Kummer con 4 términos la misma que con 3 puesto que en ambos casos el término que añadimos es del tipo k_{x0} y esos son los que se anulan en esta situación.

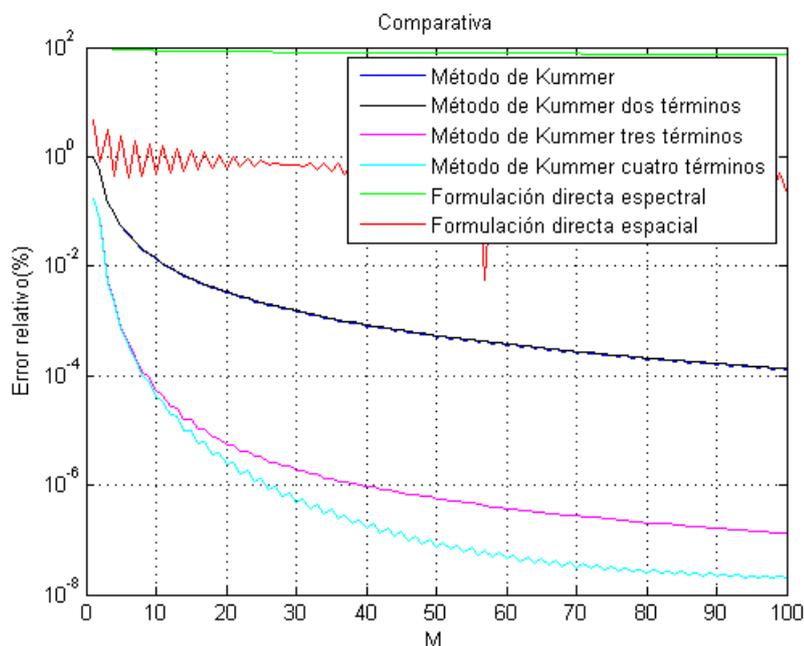


Figura 4.27: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.000000001\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 1^\circ$.

Finalmente, vamos a ver la convergencia para un escenario muy interesante como es el caso de estar muy próximos a la fuente. Para ello fijamos $x = 0.000000001\lambda$ y $z = 0.000000000001\lambda$ y vamos haciendo un barrido con distintos ángulos. En la Figura 4.27 podemos ver el error relativo para $\theta = 1^\circ$, en la Figura 4.28 para $\theta = 20^\circ$, en la Figura 4.29 para $\theta = 45^\circ$ y finalmente, en la Figura 4.30 para $\theta = 89^\circ$.

En estas figuras podemos apreciar que como el valor de x es muy cercano a cero, las oscilaciones de convergencia son muy pequeñas, más pequeñas que en los casos anteriores donde habíamos fijado $x = 0.01\lambda$. En el peor de los casos, se alcanza un error de 10^{-6} en torno a los 40 términos con la extracción de 4 términos, lo cual es un gran avance comparado con el error que se obtiene en ese mismo número de términos con la serie espectral, representada en color verde. Es lógico que al estar muy cerca de la fuente no converja bien la serie espectral, pero con el método de Kummer estamos alcanzando un menor error que si usamos la formulación espacial, representada en color rojo, que al comienzo decíamos que convergía mejor cerca de la fuente.

Respecto a las diferencias de convergencia que encontramos según el ángulo de incidencia, podemos decir que responden al planteamiento explicado anteriormente. Además, podemos añadir un nuevo caso particular, que surge cuando se dan a la vez dos condicio-

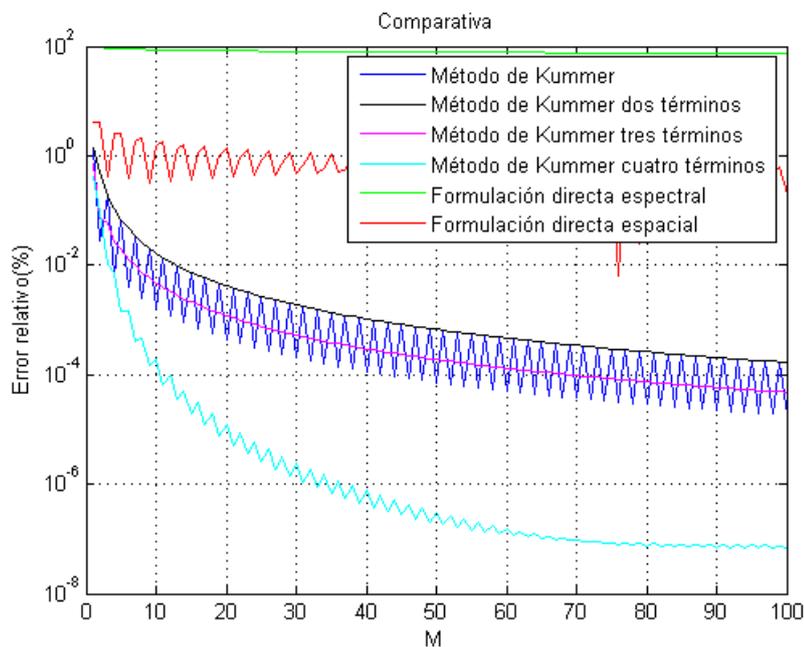


Figura 4.28: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.000000001\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$.

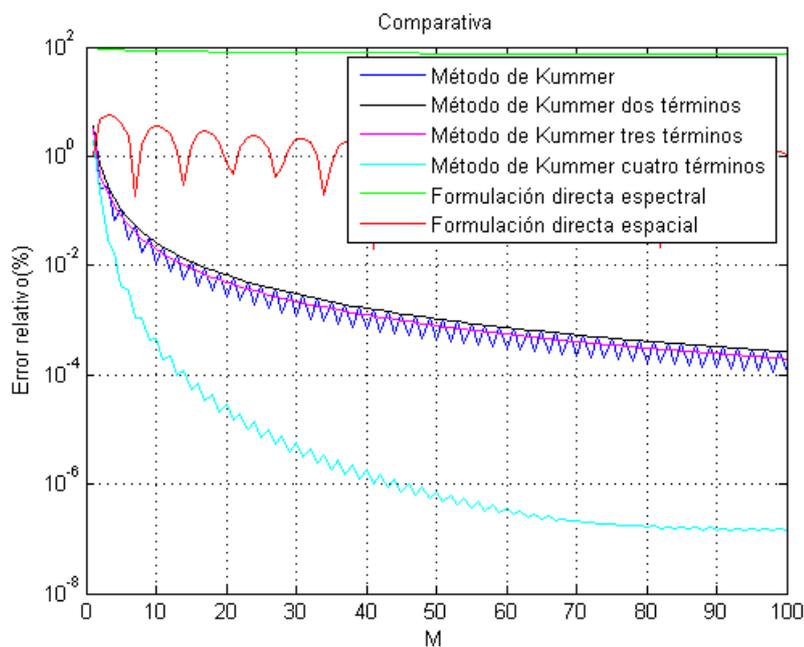


Figura 4.29: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.000000001\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 45^\circ$.

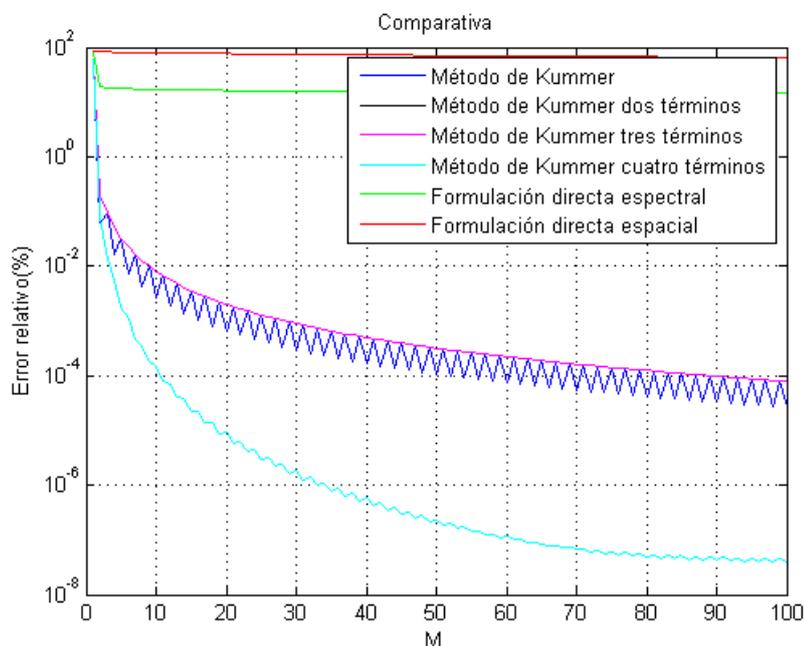


Figura 4.30: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.000000001\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 89^\circ$.

nes: $(x - x') \rightarrow 0$ y $(z - z') \rightarrow 0$. Esto ocurre cerca de la fuente y lo que podemos ver es que la convergencia del método de Kummer extrayendo 2 términos proporciona el mismo error relativo que extrayendo 1 término. Si observamos la ecuación (3.53), vemos que si se cumplen las condiciones anteriores simultáneamente ambas exponenciales tienden a 1 y por tanto la *serie2* y la *serie4* se cancelan ya que aparecen con signo opuesto y, aunque son conjugadas, son iguales ya que la parte imaginaria de la exponencial conjugada es proporcional a $(x - x')$ que tiende a 0 y, por tanto también, se anularía. De esta forma sólo queda la suma de la *serie1* y la *serie3* que son las que teníamos en la extracción de un solo término. En definitiva, si $(x - x') \rightarrow 0$ y $(z - z') \rightarrow 0$, la extracción de un segundo término no mejora la convergencia respecto a la extracción de un único término.

En general, si observamos la ecuación (4.4), vemos que si $(x - x') \rightarrow 0$ y $(z - z') \rightarrow 0$, entonces $z_1 = z_2$ y las exponenciales $e^{-k_{x0}|z-z'|}$ y $e^{k_{x0}|z-z'|}$ son muy parecidas de forma que ambas partes de la serie se suman dando lugar a algunos términos iguales que se suman con el mismo signo y otros términos iguales que se suman con el signo opuesto, es decir, se restan y por tanto se anulan.

Vamos a razonar esto más detenidamente. La primera serie representa la suma de los m negativos y la segunda la de los m positivos. Recordemos que todos los términos en la

serie de los m negativos aparecen sumándose en positivo mientras que en la serie de los m positivos, el factor f_{n-a} hace los n impares sean negativos y los pares positivos. De esta forma, cuando ocurren estas dos condiciones, para n par (polilogaritmos de orden impar) la serie de los m negativos es igual que la de los m positivo. Sin embargo, para n impar (polilogaritmos con orden par) la serie de los m negativos y la de los m positivos son opuestas, de forma que al sumarlas se anulan. Por ello veíamos que la transformación de Kummer con 2 términos convergía igual que con 1, cuando se cumplían estas condiciones ya que lo que introduce el segundo término es un polilogaritmo de orden 2, es decir, orden par que se anula.

Como conclusión podemos destacar que la transformación de Kummer extrayendo más de un término asintótico ha resultado ser un novedoso método de aceleración de la convergencia de la función de Green, proporcionando buenos resultados para distintos ángulos y puntos de observación y mejorando, por supuesto, la convergencia de las formas directas tanto espacial como espectral.

4.4.2. Gradiente de la Función de Green

En esta sección vamos a evaluar la convergencia del método de Kummer aplicado al gradiente de la función de Green extrayendo 1 y 2 términos, tal y como se demostró en las secciones 3.1.2 y 3.2.2. Vamos a hacer un estudio en función de la coordenada z del punto de observación, es decir, según la distancia del punto de observación a la fuente en el eje z .

Para ello, vamos a observar el error relativo de este método extrayendo uno y dos términos para $z = 0.000000000001\lambda$ (ver Figura 4.31), para $z = 0.001\lambda$ (ver Figura 4.32) y para $z = 0.1\lambda$ (ver Figura 4.33). En los casos anteriores, la coordenada x del punto de observación es 0.01λ y $\theta = 20^\circ$.

Vemos en las tres figuras anteriores que la extracción de uno y dos términos supone conseguir un menor error relativo (%) para un mismo número de términos. Por ejemplo, lejos de la fuente (ver Figura 4.33) obtenemos un error relativo en la componente z de 10^{-12} en 40 términos para el caso de extraer dos términos, mientras que en 40 términos con la espectral sólo conseguimos un error de 10^{-10} en esa misma componente.

Para un punto muy cercano a la fuente (ver Figura 4.31), la componente x mejora considerablemente si en vez de con la formulación directa espectral la calculamos aplicando la transformación de Kummer con un término. Esta componente pasa de un error relativo de 10^2 a un error en torno a 10^{-4} . Sin embargo, no observamos ninguna mejora si extraemos

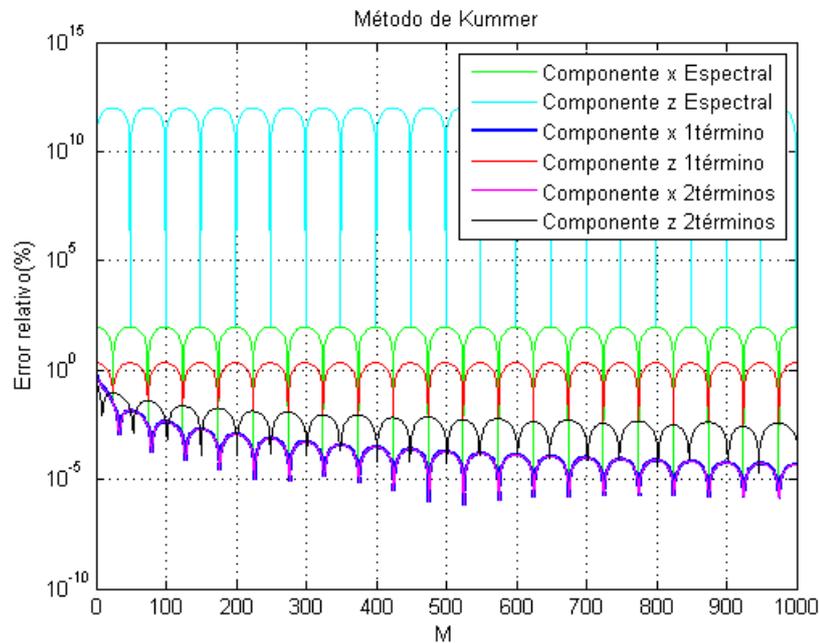


Figura 4.31: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer aplicada al gradiente de la función de Green para un punto de observación muy cercano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.000000000001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$.

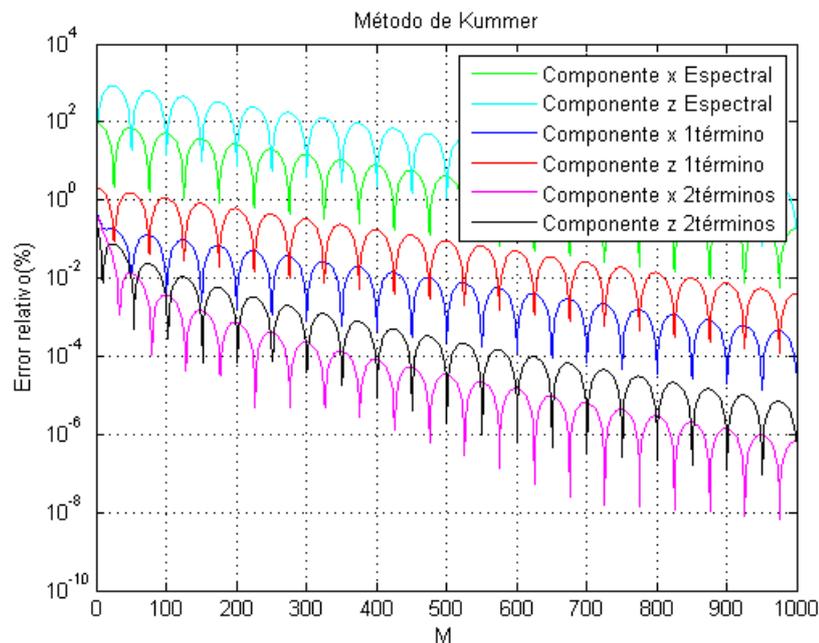


Figura 4.32: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer aplicada al gradiente de la función de Green para un punto de observación cercano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.001\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$.

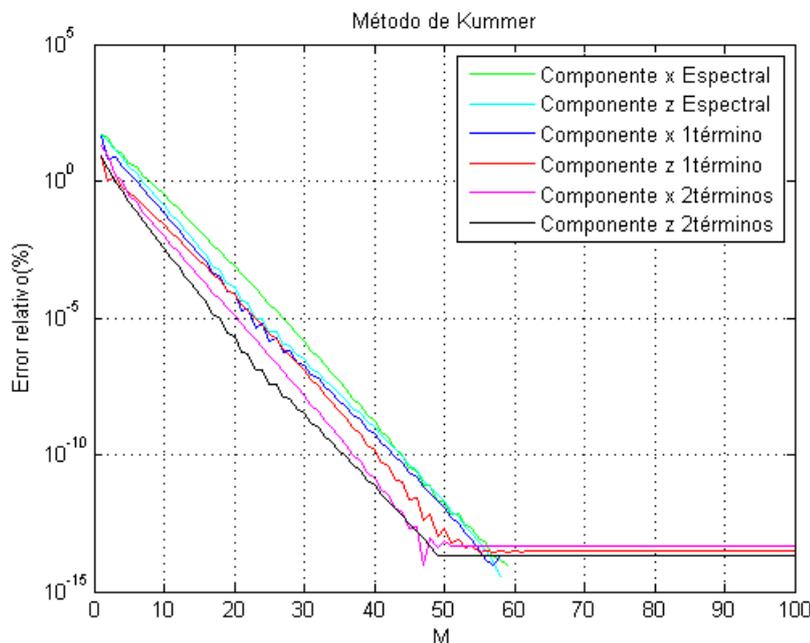


Figura 4.33: Error relativo de convergencia de la transformación de Kummer aplicada al gradiente de la función de Green para un punto de observación lejano a la fuente $(x, z) = (0.01\lambda, 0.1\lambda)$ y $\theta = 20^\circ$.

un segundo término, puesto que obtenemos el mismo error relativo. Si recordamos la componente x del gradiente para la extracción de un término era

$$\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') = e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[- \left(\frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} } \right) + \frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} } \right] \quad (4.7)$$

y para la extracción de dos términos

$$\tilde{G}_{xestatica}(\bar{r}, \bar{r}') = e^{-jk_{x0}(x-x')} \left[- \left(\frac{e^{k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| - j(x-x')]} } \right) + e^{-k_{x0}|z-z'|} \frac{e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} }{1 - e^{-\frac{2\pi}{d} [|z-z'| + j(x-x')]} } \right] \quad (4.8)$$

Observando ambas ecuaciones podemos ver que el método de Kummer con dos términos dará idéntico resultado que con un término cuando las exponenciales $e^{k_{x0}|z-z'|}$ y $e^{-k_{x0}|z-z'|}$ se hagan 1. Esto ocurre cuando $z \rightarrow z'$, es decir, cuando la coordenada z del punto de observación es muy cercana a la de la fuente. En este caso la fuente se sitúa en el origen

de coordenadas y el punto de observación lo hemos fijado en $z = 0.000000000001\lambda$. Como el punto de observación es muy cercano a la fuente, se cumple la condición expuesta anteriormente. Por ello, no hay mejora con la extracción de dos términos y como vemos se obtiene el mismo resultado que extrayendo sólo uno. Por el contrario, el error relativo de la componente z si disminuye si usamos el método de Kummer con un término y disminuye aún más si extraemos dos términos.

Donde mejor se aprecia esta mejora de la convergencia es en la Figura 4.32. Podemos observar que la tanto la componente x como la z presentan un menor error relativo en el caso de aplicar la transformación de Kummer extrayendo dos términos. Si por ejemplo nos fijamos en qué ocurre para $M = 400$ vemos que con la extracción de dos términos se obtienen unos errores de 10^{-4} y 10^{-3} para las componentes x y z del gradiente, respectivamente. Sin embargo, para este mismo valor de M podemos observar que los errores relativos obtenidos con la formulación directa espectral y con la extracción de un sólo término son superiores a 10^{-2} en ambas componentes.

Por ello, podemos concluir que la extracción de un término acelera la convergencia con respecto a la formulación espectral directa tanto cerca de la fuente como lejos y además, la extracción de un segundo término acelera aún más la convergencia del gradiente.

4.5. Comparativa del Tiempo de Cómputo

Para finalizar, vamos a evaluar todos los métodos desarrollados en el proyecto, según su tiempo de cómputo para distintas distancias con el fin de encontrar el método óptimo para calcular la función de Green, según el punto de observación. También trabajaremos sobre el desarrollo de un método basado en la conmutación entre diferentes estrategias para mantener la mayor eficiencia posible en el cálculo de la función de Green en todo el rango de distancias entre el punto de observación y el punto fuente.

Para ello, hemos fijado un error relativo (%) de 10^{-5} , es decir, vamos a medir el tiempo que tarda cada método en alcanzar ese error para distintas distancias.

Como podemos observar en la Figura 4.34, el tiempo empleado por la formulación espectral (representado en color verde) es elevado para distancias pequeñas. Como sabemos, cerca de la fuente la formulación espectral necesita muchos términos para alcanzar el valor de convergencia. A partir de una cierta distancia, que llamábamos distancia de conmutación, la formulación espectral comienza a tardar menos tiempo que el método de Ewald (representado en color azul marino). Este último método parece tener un tiempo constante independientemente de la distancia fuente-observación.

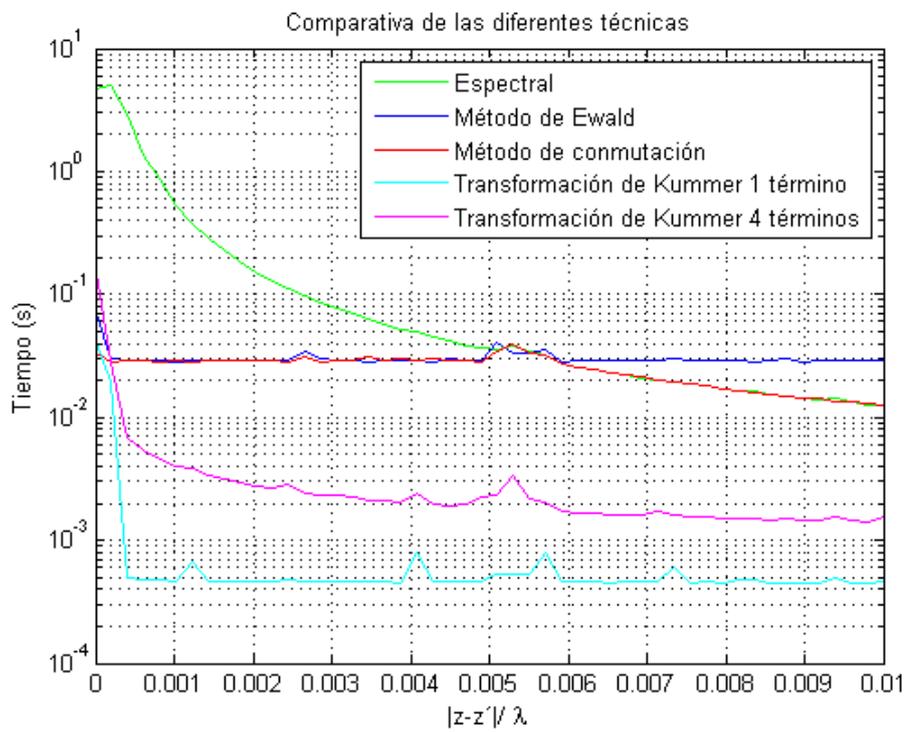


Figura 4.34: Comparativa del tiempo de cómputo de los diferentes métodos desarrollados para distancias pequeñas entre fuente y punto de observación.

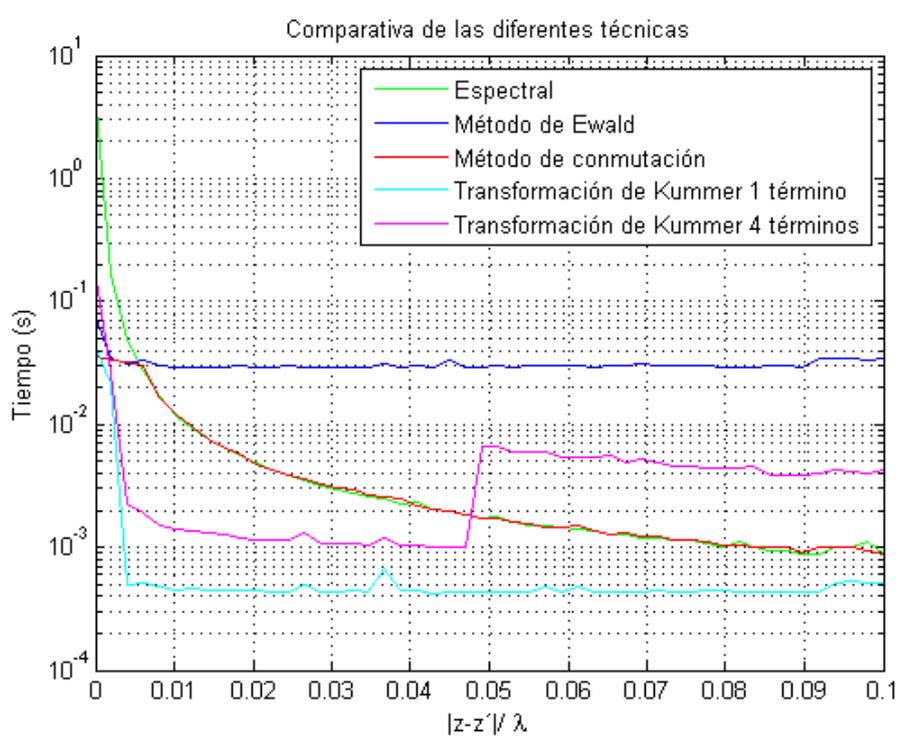


Figura 4.35: Comparativa del tiempo de cómputo de los diferentes métodos desarrollados para distintas distancias fuente-observación.

En color rojo podemos observar el método de conmutación que se propuso en la sección 2.1.4 y que consistía en conmutar entre la formulación espectral y el método de Ewald. Con esto se confirma que el método propuesto es capaz de escoger, automáticamente y según la distancia, la forma de cálculo más eficiente en cada caso.

Podemos observar en la Figura 4.35 el tiempo de cómputo para un rango de distancias fuente-observación más amplio. Vemos que lejos de la fuente, el tiempo comienza a estabilizarse. Esto puede deberse a que lejos de la fuente sólo se calculan los modos que se propagan. Los modos al corte están tan suavizados que no influyen en la suma. Esto ocurre para el método de Ewald y para la transformación de Kummer. En la formulación espectral vemos que cuanto más lejos estemos de la fuente más rápido converge (convergencia exponencial) y menos tarda.

Por otro lado, observamos en color azul claro el tiempo que necesita la transformación de Kummer extrayendo un solo término. Vemos que es más eficiente computacionalmente que el método de Ewald y también que la extracción de un término nos asegura una convergencia más rápida que la propia función de Green espectral. Además, se ve que es más eficiente que extraer 4 términos (representado en color magenta). Este resultado no es el esperado puesto que habíamos visto que teóricamente cuantos más términos del desarrollo de Taylor extraigamos, menor número de términos necesitamos para alcanzar un determinado error. Sin embargo, en la figura vemos que extraer un término es más eficiente que extraer 4. El motivo de esto es que cuantos más términos extraigamos, aunque antes converja la parte dinámica, más funciones polilogarítmicas hay que sumar en la parte estática.

Las simulaciones se han realizado con la versión Matlab R2010b, que no incluye las funciones de error complementario ni los polilogaritmos de forma intrínseca. Estas funciones se han implementado con rutinas externas y, por tanto, puede que eso afecte al tiempo de cálculo ya que pueden no ser óptimas computacionalmente. De ahí que el tiempo de aplicar Kummer con 4 términos sea mayor que aplicándolo con uno sólo. Si se dispusiese de rutinas que pudieran calcular estas funciones de manera más eficiente, los resultados podrían variar.

A pesar de ello, Kummer con 4 términos puede ser ventajoso en implementaciones prácticas de la técnica de la ecuación integral para analizar dispositivos prácticos de microondas. Esto se debe que el cálculo de los polilogaritmos, que es lo que cuesta computacionalmente, se puede realizar una sola vez y no se repite para cada frecuencia. La parte dinámica, que se repite para cada frecuencia, converge mejor y se puede calcular de forma mucho más rápida.

Lo mismo ocurre con el método de Ewald. Lo que hace que el tiempo de cómputo se eleve es el cálculo de las funciones de error complementarias, que también se han calculado haciendo uso de una rutina externa.

Por tanto, cabe resaltar que pudiéndose hacer uso de una misma plataforma o en general rutinas que optimicen el cálculo de estas funciones especiales, los resultados y conclusiones podrían cambiar considerablemente. Eso daría lugar a nuevas conclusiones y nuevas versiones del método de conmutación propuesto con el objetivo de utilizar, según la distancia, el método óptimo.

Los resultados expuestos en este capítulo verifican el desarrollo numérico realizado en los capítulos 1, 2 y 3.

Capítulo 5

Conclusiones y Líneas de Investigación Futuras

5.1. Conclusiones Globales del Proyecto

Este proyecto ha pretendido ser de utilidad para el análisis y comparativa de los métodos desarrollados hasta el momento para el cálculo de la función de Green 2D periódica con periodicidad en una dimensión.

Dentro de las conclusiones globales del proyecto caben resaltar las siguientes. Viendo la convergencia de las series espaciales y espectrales hemos podido concluir que si el punto de observación es cercano a la fuente entonces es conveniente usar la formulación espacial, mientras que si es lejano es conveniente usar la espectral. Además, hemos visto que las componentes del gradiente presentan el mismo comportamiento.

Tras la aplicación del método de Ewald, hemos conseguido reducir la convergencia de la función de Green a dos o tres términos como máximo, suponiendo así una gran mejora a la hora de calcular dicha función. Cabe resaltar que el método de Ewald presenta buen resultado tanto en distancias fuente-observación pequeñas como grandes. Hasta aquí se concluye que es más óptimo el cálculo de la función de Green y de su gradiente mediante dicho método que mediante las formulaciones directas.

No siendo suficiente el avance introducido con el método de Ewald, hemos estudiado la transformación de Kummer aplicándola sobre la función de Green y sobre su gradiente. De este estudio se ha conseguido deducir una formulación novedosa. Dicha formulación detalla el resultado de aplicar el método de Kummer mediante la extracción de N términos asintóticos de la serie original, usando funciones polilogarítmicas. De la implementación

práctica de todo ello se ha concluido que a mayor número de términos extraídos más rápido converge la parte dinámica de la función de Green. Además, se han analizado las similitudes y diferencias entre casos particulares llegando a razonar matemáticamente su causa.

En resumen, hemos sido capaces de estudiar en profundidad e implementar mediante un software desarrollado: la función de Green y su gradiente en su forma directa tanto espacial como espectral, el método de Ewald aplicado a la función de Green y a su gradiente y la transformación de Kummer mediante la extracción de uno, dos, tres, cuatro... hasta N términos asintóticos.

5.2. Líneas de Investigación Futuras

Tal y como se explicó al comienzo de este proyecto, una vez que hemos conseguido calcular las funciones de Green de manera eficiente y precisa, seremos capaces de aplicar la técnica de ecuación integral para el análisis electromagnético de estructuras como en [18, 19]. También se pretenderá aplicar los resultados expuestos al análisis de estructuras SIW [13] y SINRD [14].

Otro objetivo de futuros estudios será aplicar estos resultados a problemas concretos de estructuras periódicas en una dimensión y ampliar los cálculos desarrollados a problemas con periodicidad en dos dimensiones.

Además, los resultados desarrollados en este proyecto podrán ser de utilidad para herramientas software que se desarrollen en un futuro y que precisen el cálculo eficiente de la función de Green.

Apéndice A

Detalles de la Formulación del capítulo 3

- En primer lugar, vamos a detallar los pasos que nos llevan a asumir que $\frac{2\pi m}{d} > k_{x0}$.

Partimos del hecho de que hemos aproximado $\gamma_m = \sqrt{k_{xm}^2 - k^2}$ como un número real y positivo. Para que esto se cumpla, debe pasar que:

$$\begin{aligned} k_{xm} &> k \\ k_{x0} + \frac{2\pi m}{d} &> k \\ k \sin(\theta) + \frac{2\pi m}{d} &> \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Nos ponemos en el caso más desfavorable, cuando seno del ángulo no contribuye, es decir, $\sin(\theta) = 0$ y m toma el valor más pequeño $m = 1$. Entonces queda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} &> \frac{1}{\lambda} \\ \lambda &> d \end{aligned} \tag{A.2}$$

De esta forma se deduce que si aproximamos γ_m como un número real estamos asumiendo implícitamente que $\lambda > d$.

Una vez aclarado esto, vamos a centrarnos en demostrar la condición de que para cualquier valor de m se cumple que $\frac{2\pi m}{d} > k_{x0}$. Para ello, operamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi m}{d} &> k \operatorname{sen}(\theta) \\
\frac{2\pi m}{d} &> \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen}(\theta) \\
\frac{m}{d} &> \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen}(\theta) \\
m\lambda &> d \operatorname{sen}(\theta)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Si se demuestra que esta condición se cumple para el menor valor de m , es decir, para $m = 1$, entonces quedaría demostrada para cualquier valor superior y, por tanto, para cualquier valor que pueda tomar m .

Además de tomar $m = 1$, vamos a tomar $\operatorname{sen}(\theta) = 1$ que sería el caso más desfavorable para esta condición. Como puede verse, la condición queda reducida a:

$$\lambda > d \tag{A.4}$$

Como sabemos que esta condición se cumple porque lo hemos demostrado en la ecuación (A.2), se puede afirmar que $\frac{2\pi m}{d} > k_{x0}$ para cualquier valor de m y de θ .

- En segundo lugar, vamos a demostrar que $\frac{d}{2\pi m} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \operatorname{sen}^2(\theta)) > \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2}$ se cumple para cualquier valor de m .

Como el término $\frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \operatorname{sen}^2(\theta))$ es siempre positivo para valores de m positivos, entonces bastaría con demostrar que $\frac{d}{2\pi m} > \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2}$ puesto que si se cumple lo anterior, entonces se satisfará también la condición añadiéndole el término $\frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \operatorname{sen}^2(\theta))$. De forma que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{2\pi m} &> \frac{k \operatorname{sen}(\theta) d^2}{(2\pi m)^2} \\
2\pi m &> \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen}(\theta) d
\end{aligned} \tag{A.5}$$

La situación más desfavorable sería que $\operatorname{sen}(\theta) = 1$ y además que $m = 1$, de forma que si se demuestra que esta condición es válida para $m = 1$, quedaría demostrado que se cumple para cualquier valor de m . Por tanto queda:

$$\begin{aligned} 2\pi &> \frac{2\pi}{\lambda}d \\ \lambda &> d \end{aligned} \tag{A.6}$$

Como se ha demostrado que esta condición se cumple en la ecuación (A.2), entonces podemos afirmar que $\frac{d}{2\pi m} + \frac{k^2 d^3}{2(2\pi m)^3} (1 + 2 \operatorname{sen}^2(\theta)) > \frac{k_{x0} d^2}{(2\pi m)^2}$ se cumple para cualquier valor de m y de θ .

Bibliografía

- [1] Constantine A. Balanis, “Advanced Engineering Electromagnetics,” 2da Edición. v, v
- [2] Giampiero Lovat, Paolo Burghignoli and Rodolfo Araneo, “Efficient Evaluation of the 3-D Periodic Green’s Function Through the Ewald Method,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 56, pp. 2069-2075, September 2008. v
- [3] Myun-Joo Park and Byungje Lee, “Efficient Calculation of the Green’s Function for 2-D Periodic Line Sources Using Ewald Method,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 8, No. 12, pp. 565-567, 2009. vi
- [4] Filippo Capolino, Donald R. Wilton, and A. Johnson, “Efficient Computation of the 2-D Green’s Function for 1-D Periodic Structures Using the Ewald Method,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, pp. 2997-2984, September 2005. vi, vii, 13, 15, 25, 72
- [5] Ana L. Frutos, Rafael R. Boix, Francisco Mesa and Francisco Medina, “An Efficient Approach for the Computation of 2-D Green’s Function With 1-D and 2-D Periodicities in Homogeneous Media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, pp. 3733-3742, December 2008. vi
- [6] Ana L. Frutos, Rafael R. Boix, Francisco Mesa and Francisco Medina, “Revisited Implementation of the Spectral Kummer-Poisson’s Method for the Efficient Computation of 2-D Periodic Green’s Function in homogeneous Media,” *PIERS Proceedings, Hangzhou, China* pp. 848-852, March 2008. vi
- [7] M. E. Veysoglu, H. A. Yueh, R. T. Shin and J. A. Kong, “Polarimetric Passive Remote Sensing of Periodic Surfaces,” *J. Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 5, No. 3, pp. 267-280, March 1991. vi

-
- [8] N. A. Nicorovici and R. C. McPhedran, "Lattice Sums for Off-axis Electromagnetic Scattering by Gratings," *Physical Review E*, vol. 50, No. 4, pp. 3143-3160, October 1994. vi
- [9] Djurdje Cvijovic, "New integral representations of the polylogarithm function," *Proceedings of The Royal Society* No. 463, April 2007. vi, vii, 43
- [10] Paul Peter Ewald, "Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale," *Annals of Physics*, vol. 369, pp. 253-287, 1921. 13
- [11] Alp Kustepeli and Anthony Q. Martin, "On the Splitting Parameter in the Ewald Method," *IEEE Transactions on Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 10, No. 5, pp. 168-170, May 2000. vii, 23
- [12] S. Singh, W.F. Richards, J.R. Zinecker, D.R. Wilton, "Accelerating the convergence of series representing the free space periodic Green's function," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol.38, No.12, pp. 1958 - 1962, December 1990. vii, 31
- [13] Zhe Chen, Wei Hong, Jixin Chen and Jianyi Zhou, "Design of High-Q Tunable SIW Resonator and Its Application to Low Phase Noise VCO," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 23, pp. 43-45, January 2013. 1, 96
- [14] Yves Cassivi and Ke Wu, "Substrate Integrated Nonradiative Dielectric Waveguide," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 14, pp. 89-91, March 2004. 1, 96
- [15] Feng Xu and Ke Wu, "Substrate Integrated Nonradiative Dielectric Waveguide Structures Directly Fabricated on Printed Circuit Boards and Metallized Dielectric Layers," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 59, No. 12, pp. 3076-3086, December 2011. 1
- [16] Myun-Joo Park and Sangwook Nam, "Rapid Summation of the Green's Function for the Rectangular Waveguide," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, No. 12, pp. 2164-2166, December 1998. 19
- [17] A. W. F. Edwards, "Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea," 2002. 57
- [18] Francisco Javier Perez Soler, Fenando D. Quesada Pereira, David Cañete Rebenaque, Alejandro Alvarez Melcon and Juan R. Mosig, "A Novel Efficient Technique for the Calculation of the Green's Functions in Rectangular Waveguides Based on Accelerated

-
- Series Decomposition, ” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, No. 10, pp. 3260-3270, October 2008. 96
- [19] Francisco Javier Perez Soler, Fenando D. Quesada Pereira, Juan Pascual Garcia, V.E. Boria Esbert, B. Gimeno Martinez and Alejandro Alvarez Melcon, “Comparison Between the Kummer’s Transformation and Ewald Method for the Evaluation of the Parallel Plate Green’s Functions, ” *IEEE*, pp. 2831-2834, 2006. 96