

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería Naval y Oceánica**



**PROYECTO FIN DE CARRERA**

---

CÁLCULO NUMÉRICO Y ANALÍTICO DE LA ECUACIONES DE  
KARMAN-PRANDTL  
PARA LA ESTIMACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN

---



**Titulación:** Ingeniería Técnica Naval. Especialidad en Estructuras Marinas  
**Alumno:** Iván Escobar Zamora  
**Directores:** Sonia Busquier Sáez  
**Departamento:** Matemática Aplicada y Estadística



# Índice general

<b>1. MOTIVACIÓN</b>	<b>5</b>
1.1. Objetivos del Proyecto . . . . .	6
<b>2. INTRODUCCIÓN</b>	<b>7</b>
2.1. Introducción a la Mecánica de Fluidos . . . . .	7
2.2. Hipótesis del Medio Continuo . . . . .	7
2.3. Concepto de Partícula Fluida . . . . .	8
2.4. Descripciones Lagrangiana y Euleriana del Movimiento de un Fluido . . . . .	8
2.5. Ecuaciones Generales de la Mecánica de Fluidos . . . . .	8
2.6. Leyes de Conservación . . . . .	9
2.6.1. Ley de Conservación de Masa . . . . .	9
2.6.2. Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Cinéti- co y Angular . . . . .	10
2.6.3. Ley de Conservación de la Energía . . . . .	11
2.7. Principio de Bernoulli . . . . .	12
2.7.1. Ecuación de Bernoulli y la Primera Ley de la Termodinámica	13
2.8. Ecuaciones de Euler y Navier-Stokes . . . . .	14
2.8.1. Ecuaciones de Euler . . . . .	15
2.8.2. Ecuaciones de Navier-Stokes . . . . .	17
2.9. Perfiles de Velocidad: Laminar y Turbulento . . . . .	17
2.10. Pérdidas de Carga en Tuberías . . . . .	19
2.10.1. Pérdidas de Carga Lineales . . . . .	19
2.10.2. Ecuación de Darcy-Weisbach . . . . .	21
<b>3. Ecuaciones de Karman-Prandtl dentro de la Ingeniería Naval</b>	<b>29</b>
3.1. Factores que influyen en las Ecuaciones de Karman-Prandtl . . .	30
3.1.1. Número de Reynolds . . . . .	30
3.1.2. Rugosidad de la tubería . . . . .	34
3.2. Envejecimiento de las tuberías y su influencia en la rugosidad . .	36

3.2.1.	Efecto del tiempo en la rugosidad de las tuberías según Genijew . . . . .	38
3.3.	Golpe de Ariete . . . . .	38
3.3.1.	Dispositivos para controlar el Golpe de Ariete . . . . .	40
<b>4.</b>	<b>MÉTODOS NUMÉRICOS</b>	<b>43</b>
4.1.	Importancia de los Métodos Numéricos . . . . .	43
4.2.	Método del Punto Fijo . . . . .	45
4.2.1.	Definición de Punto Fijo . . . . .	45
4.2.2.	Teorema del Punto Fijo . . . . .	45
4.2.3.	Orden de Convergencia . . . . .	49
4.3.	Método de Newton . . . . .	51
4.3.1.	Descripción del Método de Newton . . . . .	51
4.3.2.	Obtención del Algoritmo . . . . .	52
4.3.3.	Teorema de Convergencia Local del Método de Newton . . . . .	56
4.3.4.	Teorema de Convergencia Global del Método de Newton . . . . .	56
4.3.5.	Estimación del error . . . . .	56
4.4.	Métodos de tipo Secante . . . . .	58
4.4.1.	Un método de tipo Secante . . . . .	59
4.4.2.	Un Método de tipo Secante de orden dos . . . . .	62
4.4.3.	Experimentos Numéricos . . . . .	64
4.5.	Método de tipo Steffensen . . . . .	68
4.5.1.	Definición del Método . . . . .	68
4.5.2.	Derivación utilizando el Método Delta Cuadrado de Aitken . . . . .	70
<b>5.</b>	<b>IMPLEMENTACIÓN</b>	<b>73</b>
5.1.	Matlab . . . . .	73
<b>6.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>89</b>
<b>7.</b>	<b>APÉNDICE</b>	<b>91</b>
7.1.	Lista de Símbolos . . . . .	91
7.2.	Tablas . . . . .	93
7.2.1.	Tabla para el coeficiente ( $a$ ) de la Ecuación de Genijew . . . . .	93
7.2.2.	Tabla de rugosidades absolutas . . . . .	94
7.2.3.	Tabla de propiedades del agua a distintas temperaturas y 1 atmósfera de presión . . . . .	96
7.2.4.	Tabla de propiedades de los líquidos comunes a 1 atmósfera y 20°C . . . . .	97
7.2.5.	Tabla para el cálculo analítico del Coeficiente de Fricción en conductos . . . . .	98

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
7.2.6. Tabla de longitudes equivalentes adimensionales . . . . .	99
7.3. Diagrama de Moody . . . . .	100
<b>8. BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>101</b>



# Capítulo 1

## MOTIVACIÓN

La principal motivación que lleva a desarrollar este proyecto de final de carrera es la importancia de la mecánica de fluidos, más si cabe en un sector como el Naval, en el cual el buque no deja de ser un artefacto flotante que se desplaza a través de un fluido como el agua. Entre los numerosos campos en los que afectan los fluidos a los buques podemos destacar, entre muchos, dos principales; La Hidrodinámica y el comportamiento de los fluidos por el interior de tuberías. La Hidrodinámica permitirá realizar el estudio de resistencia al avance, propulsión y formas del casco. Este apartado consta de vital importancia, puesto que permitirá calcular mediante una serie de fórmulas parámetros tan importantes como, por ejemplo, la potencia que necesita el buque para desplazarse por el agua.

El otro gran punto que destaca es el comportamiento de los fluidos por el interior de las tuberías. Este punto será el principal foco de estudio a lo largo de este proyecto. Los fluidos cuando se desplazan a través de las tuberías sufren pérdidas de carga, reducciones de velocidad, variaciones de presión, etc. Todo esto es debido principalmente a la rugosidad de las mismas, a las trayectorias a las que están obligados a recorrer circulando por su interior (ya que éstas deben describir recorridos de tal modo que permitan salvar todos los obstáculos como equipos, refuerzos propios del buque, etc.) y a los accesorios que pueda encontrar el fluido a lo largo de su camino, como pueden ser válvulas, etc.

Las ecuaciones de Karman-Prandtl utilizadas en el campo de la mecánica de fluidos permitirán calcular analíticamente el coeficiente de fricción y así obtener la pérdida de carga lineal de una tubería comercial instalada en un circuito, tanto si la tubería es lisa o rugosa.

Mediante una serie de modelos matemáticos que se introducirán a lo largo del proyecto, será posible la predicción del comportamiento de estos fluidos mediante métodos numéricos.

## 1.1. Objetivos del Proyecto

Desarrollo, adaptación y aplicación de diferentes métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones de Karman-Prandtl.

Se realizará un estudio de los diferentes métodos numéricos para la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. Se aplicarán dentro del campo de la Ingeniería Naval, en particular se buscará aproximar las ecuaciones de Karman-Prandtl, ecuaciones importantes dentro de la Mecánica de Fluidos.



## Capítulo 2

# INTRODUCCIÓN

### 2.1. Introducción a la Mecánica de Fluidos

La mecánica de fluidos es la rama de la mecánica de medios continuos, rama de la física a su vez, que estudia el movimiento de los fluidos (gases y líquidos) así como las fuerzas que los provoca. La característica fundamental que define a los fluidos es su incapacidad para resistir esfuerzos cortantes (lo que provoca que carezcan de forma definida). También estudia las interacciones entre el fluido y el contorno que lo limita. La hipótesis fundamental en la que se basa toda la mecánica de fluidos es la hipótesis del medio continuo.

### 2.2. Hipótesis del Medio Continuo

La hipótesis del medio continuo es la hipótesis fundamental de la mecánica de fluidos y en general de toda la mecánica de medios continuos. En esta hipótesis se considera que el fluido es continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando por tanto su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a ésta. Con esta hipótesis se puede considerar que las propiedades del fluido (densidad, temperatura, etc.) son funciones continuas. La forma de determinar la validez de esta hipótesis consiste en comparar el camino libre medio de las moléculas con la longitud característica del sistema físico. Al cociente entre estas longitudes se le denomina Número de Knudsen. Cuando este número adimensional es mucho menor a la unidad, el material en cuestión puede considerarse un fluido (medio continuo). En el caso contrario los efectos debidos a la naturaleza molecular de la materia no pueden ser despreciados y debe utilizarse la mecánica estadística para predecir el comportamiento de la materia. Ejemplos de situaciones donde la hipótesis del medio continuo no es válida pueden encontrarse en el estudio de los plasmas.

### 2.3. Concepto de Partícula Fluida

Este concepto está muy ligado al del medio continuo y es sumamente importante en la mecánica de fluidos. Se llama partícula fluida a la masa elemental de fluido que en un instante determinado se encuentra en un punto del espacio. Dicha masa elemental ha de ser lo suficientemente grande como para contener un gran número de moléculas, y lo suficientemente pequeña como para poder considerar que en su interior no hay variaciones de las propiedades macroscópicas del fluido, de modo que en cada partícula fluida podamos asignar un valor a estas propiedades. Es importante tener en cuenta que la partícula fluida se mueve con la velocidad macroscópica del fluido, de modo que está siempre formada por las mismas moléculas. Así pues un determinado punto del espacio en distintos instantes de tiempo estará ocupado por distintas partículas fluidas.

### 2.4. Descripciones Lagrangiana y Euleriana del Movimiento de un Fluido

A la hora de describir el movimiento de un fluido existen dos puntos de vista. Una primera forma de hacerlo es seguir a cada partícula fluida en su movimiento, de manera que buscaremos unas funciones que nos den la posición, así como las propiedades de la partícula fluida en cada instante. Ésta es la descripción Lagrangiana. Una segunda forma es asignar a cada punto del espacio y en cada instante, un valor para las propiedades o magnitudes fluidas sin importar que en ese instante, la partícula fluida ocupa ese volumen diferencial. Ésta es la descripción Euleriana, que no está ligada a las partículas fluidas sino a los puntos del espacio ocupados por el fluido. En esta descripción el valor de una propiedad en un punto y en un instante determinado es el de la partícula fluida que ocupa dicho punto en ese instante. La descripción euleriana es la usada comúnmente, puesto que en la mayoría de casos y aplicaciones es más útil. Usaremos dicha descripción para la obtención de las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos.

### 2.5. Ecuaciones Generales de la Mecánica de Fluidos

Las ecuaciones que rigen toda la mecánica de fluidos se obtienen por la aplicación de los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido. Para generalizarlas usaremos el Teorema del Transporte de Reynolds y el Teorema de la Divergencia (o Teorema de Gauss) para obtener las ecuaciones en una forma más útil para la formulación euleriana. Las tres

ecuaciones fundamentales son: la Ecuación de Continuidad, la Ecuación de la Cantidad de Movimiento, y la Ecuación de la Conservación de la Energía. Estas ecuaciones pueden darse en su formulación integral o en su forma diferencial, dependiendo del problema. A este conjunto de ecuaciones dadas en su forma diferencial también se le denomina Ecuaciones de Navier-Stokes (las ecuaciones de Euler son un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos sin viscosidad).

No existe una solución general a dicho conjunto de ecuaciones debido a su complejidad, por lo que para cada problema concreto de la mecánica de fluidos se estudian estas ecuaciones buscando simplificaciones que faciliten la resolución del problema. En algunos casos no es posible obtener una solución analítica, por lo que hemos de recurrir a soluciones numéricas generadas por ordenador. A esta rama de la mecánica de fluidos se la denomina mecánica de fluidos computacional.

## 2.6. Leyes de Conservación

Se sabe que existen leyes fundamentales que parecen exactas. Si llevamos a cabo experimentos con sumo cuidado y precisión, las desviaciones de estas leyes son mínimas y de hecho, incluso serían todavía menores si se emplearan técnicas experimentales mejoradas.

Tres leyes fundamentales componen la base del estudio en la mecánica de fluidos:

- La Conservación de la Masa
- La Conservación de la Cantidad de Movimiento
- La Conservación de la Energía.

### 2.6.1. Ley de Conservación de Masa

Establece que la materia es indestructible. Indica que el flujo másico entrante y saliente en un volumen de control infinitesimal es igual al cambio de densidad que experimenta ese volumen de control:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0$$

-Siendo cada uno de los términos:

$\rho$  Densidad de masa del elemento diferencial.

$\vec{v}$  Velocidad del elemento diferencial.

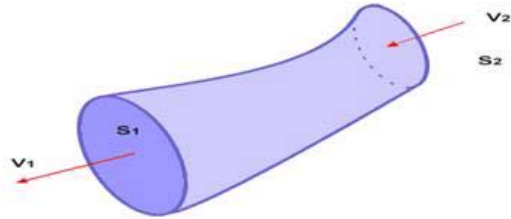


Figura 2.1: Flujo Másico Entrante y Saliente en un Volumen de Control

### 2.6.2. Ley de Conservación de la Cantidad de Movimiento Cinético y Angular

“La cantidad de movimiento de un sistema permanece constante si no hay fuerzas externas que actúen sobre él”. Establece que el balance de cantidad de movimiento en cada una de las coordenadas entrando y saliendo del volumen de control tiene que estar en equilibrio con las tensiones  $\sigma_{ij}$  y fuerzas volumétricas,

$$\rho(\vec{a} - \vec{X}) = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{3}\mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \mu \cdot \Delta \vec{v}$$

-Siendo cada uno de los términos:

$\rho$  Densidad de masa del elemento diferencial.

$\vec{a}$  Aceleración del elemento diferencial.

$\vec{X}$  Aceleración debido a las fuerzas volumétricas.

$P$  Presión sobre el elemento diferencial.

$\mu$  Viscosidad del fluido.

$\vec{v}$  Velocidad del elemento diferencial.

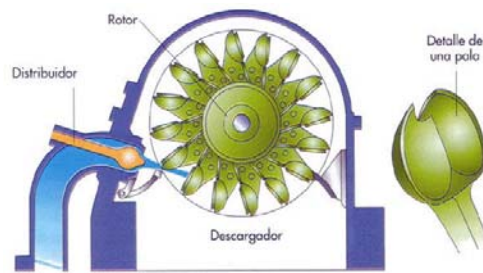


Figura 2.2: Turbina Pelton

### 2.6.3. Ley de Conservación de la Energía

También se conoce como primera ley de la termodinámica. Esta ley define que la energía total de un sistema aislado permanece constante. Si un sistema está en contacto con sus alrededores, su energía se incrementa sólo si la energía de sus alrededores experimenta una disminución correspondiente.

La energía total se compone de energía potencial, cinética e interna, siendo ésta última el contenido de energía a causa de la temperatura del sistema.

La ecuación general de la energía se obtiene mediante la combinación del teorema del transporte y la ley de conservación de la energía para un sistema:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} H) - \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\tau \vec{v}) - \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - q_H = 0$$

-Siendo cada uno de los términos:

$\rho$  Densidad de masa del elemento diferencial.

$E$  Energía por unidad de masa.

$\vec{v}$  Velocidad del elemento diferencial.

$H$  Entalpía del elemento diferencial.

$K$  Conductividad térmica del elemento diferencial.

$\tau$  Tensión del elemento diferencial.

$T$  Temperatura del elemento diferencial.

$q_H$  Fuente de calor en el elemento diferencial.

$f$  Fuerzas volumétricas.



Figura 2.3: Turbina de Avión

## 2.7. Principio de Bernoulli

El principio de Bernoulli, también denominado ecuación de Bernoulli o Trinomio de Bernoulli, describe el comportamiento de un flujo laminar moviéndose a lo largo de una corriente de agua. Fue expuesto por Daniel Bernoulli en su obra *Hidrodinámica* (1738) y expresa que en un fluido ideal (sin viscosidad ni rozamiento) en régimen de circulación por un conducto cerrado, la energía que posee el fluido permanece constante a lo largo de su recorrido.



Figura 2.4: Daniel Bernoulli

La energía de un fluido en cualquier momento consta de tres componentes:

- Cinética:** es la energía debida a la velocidad que posea el fluido.
- Potencial gravitacional:** es la energía debido a la altitud que un fluido posea.
- Energía de flujo:** es la energía que un fluido contiene debido a la presión que posee.

La siguiente ecuación conocida como “Ecuación de Bernoulli” (Trinomio de Bernoulli) consta de estos mismos términos.

$$\frac{V^2 \rho}{2} + P + \rho \cdot g \cdot z = \text{Constante}$$

-Siendo cada uno de los términos:

$V$  Velocidad del fluido en la sección considerada.

$\rho$  Densidad del fluido.

$P$  Presión a lo largo de la línea de corriente.

$g$  Aceleración gravitatoria.

$z$  Altura en la dirección de la gravedad desde una cota de referencia.

Para aplicar la ecuación se deben realizar los siguientes supuestos:

-Viscosidad (fricción interna) = 0 Es decir, se considera que la línea de corriente sobre la cual se aplica se encuentra en una zona 'no viscosa' del fluido.

-Caudal constante

-Flujo incompresible, donde  $\rho$  es constante.

La ecuación se aplica a lo largo de una línea de corriente o en un flujo irrotacional.

Aunque el nombre de la ecuación se debe a Bernoulli, la forma arriba expuesta fue presentada en primer lugar por Leonhard Euler.

Un ejemplo de aplicación del principio lo encontramos en el flujo de agua en tubería. Si reducimos el área transversal de una tubería para que aumente la velocidad del fluido que pasa por ella, se reducirá la presión.

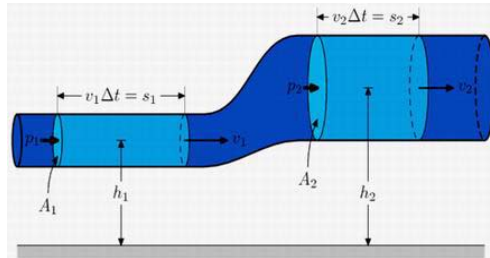


Figura 2.5: Ejemplo Gráfico del Principio de Bernoulli

### 2.7.1. Ecuación de Bernoulli y la Primera Ley de la Termodinámica

De la primera ley de la termodinámica se puede concluir una ecuación estéticamente parecida a la ecuación de Bernoulli anteriormente señalada, pero conceptualmente distinta. La diferencia fundamental yace en los límites de funcionamiento y en la formulación de cada fórmula. La ecuación de Bernoulli es un balance de fuerzas sobre una partícula de fluido que se mueve a través de

una línea de corriente, mientras que la primera ley de la termodinámica consiste en un balance de energía entre los límites de un volumen de control dado, por lo cual es más general ya que permite expresar los intercambios energéticos a lo largo de una corriente de fluido, como lo son las pérdidas por fricción que restan energía, y las bombas o ventiladores que suman energía al fluido. La forma general de esta, llamémosla, “forma energética de la ecuación de Bernoulli” es:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + W = h_f + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2$$

-Siendo cada uno de los términos:

$\gamma$  Es el peso específico ( $\gamma = \rho g$ ).

$W$  Es una medida de la energía que se le suministra al fluido.

$h_f$  Es una medida de la energía empleada en vencer las fuerzas de fricción a través del recorrido del fluido.

Los subíndices 1 y 2 indican si los valores están dados para el comienzo o el final del volumen de control respectivamente.

$g$  = Aceleración de la gravedad; 9,81 m/s<sup>2</sup>

Suponemos que:

La ecuación arriba escrita es un derivado de la primera ley de la termodinámica para flujos de fluido con las siguientes características:

-El fluido de trabajo, es decir, aquél que fluye y que estamos considerando, tiene una densidad constante.

-No existe cambio de energía interna.

## 2.8. Ecuaciones de Euler y Navier-Stokes

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos, conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes, surgieron producto del francés constructor de puentes Claude-Louis Navier y del matemático irlandés George Stokes.

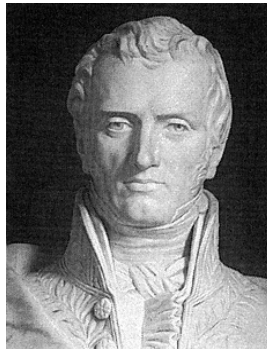


Figura 2.6: Louis Navier



Figura 2.7: George Stokes



El primero en obtener estas ecuaciones fue el francés en una época (1822) en que no se comprendía muy bien cuál era la física de la situación que estaba matematizando. De hecho, lo único que hizo fue modificar unas ecuaciones ya existentes y obtenidas por el famoso matemático Euler, de modo que incluyesen las fuerzas existentes entre las moléculas del fluido. Aproximadamente 20 años después, Stokes justificó las ecuaciones del ingeniero francés deduciéndolas adecuadamente. A pesar de que las ecuaciones de Navier-Stokes son sólo una aproximación del comportamiento real de los fluidos, se utilizan para estudiar cualquier aspecto que tenga que ver con éstos.

### 2.8.1. Ecuaciones de Euler

En mecánica de fluidos, las ecuaciones de Euler son las que describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso. Su expresión corresponde a las ecuaciones de Navier-Stokes cuando las componentes disipativas son despreciables frente a las convectivas, esto nos lleva a las siguientes condiciones que se pueden deducir a través del análisis de magnitudes de las Navier-Stokes. Estas ecuaciones se llaman así en honor de Leonhard Euler quien las dedujo directamente de las leyes de Newton (para el caso no-relativista).



Figura 2.8: Leonhard Euler

Las ecuaciones de Euler gobiernan el flujo de un fluido hipotético sin viscosidad que se extiende de manera infinita en todas las direcciones.

Asumimos que cada punto  $P(x, y, z)$  en el fluido está sujeto a fuerzas que variarán con el tiempo en cada dirección:

$$f_x(x, y, z, t)$$

$$f_y(x, y, z, t)$$

$$f_z(x, y, z, t)$$

El movimiento del fluido en el punto  $P$  al tiempo  $t$  queda determinado por la velocidad con que fluye en cada dirección:

$$u_x(x, y, z, t)$$

$$u_y(x, y, z, t)$$

$$u_z(x, y, z, t)$$

Asumimos que el fluido es incompresible: no se puede “comprimir” o “expandir” cuando actúan fuerzas sobre éste.

La incompresibilidad se expresa matemáticamente por medio de:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

El problema presupone que conocemos cómo es el movimiento del fluido al inicio cuando  $t = 0$ . Por lo que:

$$u_x(x, y, z, 0)$$

$$u_y(x, y, z, 0)$$

$$u_z(x, y, z, 0)$$

son conocidas (condiciones iniciales).

Al aplicar las leyes de Newton a cada punto  $P$  del fluido y la ecuación de la incompresibilidad vista anteriormente, Euler obtuvo:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = f_x(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = f_y(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = f_z(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial z}$$

### 2.8.2. Ecuaciones de Navier-Stokes

Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones gobiernan la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en el que se involucren fluidos newtonianos. Estas ecuaciones se obtienen aplicando los principios de conservación de la mecánica y la termodinámica a un volumen fluido. Haciendo esto se obtiene la llamada formulación integral de las ecuaciones. Para llegar a su formulación diferencial se manipulan aplicando ciertas consideraciones, principalmente aquella en la que los esfuerzos tangenciales guardan una relación lineal con el gradiente de velocidad (ley de viscosidad de Newton), obteniendo de esta manera la formulación diferencial que generalmente es más útil para la resolución de los problemas que se plantean en la mecánica de fluidos. Navier y Stokes modifican las ecuaciones de Euler para abarcar el caso más realista de un fluido con viscosidad. Introducen una constante positiva ( $\nu$ ) que mide las fuerzas de fricción en el interior del fluido. Agregan al lado derecho de las ecuaciones de Euler vistas anteriormente, una fuerza adicional (debido a la viscosidad), dada por:

$$\nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

De esta forma, las ecuaciones de Navier-Stokes quedarían de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + f_x(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + f_y(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + f_z(x, y, z, t) - \frac{\partial p}{\partial z}$$

## 2.9. Perfiles de Velocidad: Laminar y Turbulento

El término velocidad indica la velocidad promedio del flujo, que se calcula a partir de la ecuación de continuidad:

$$V = \frac{Q}{A}$$

-Siendo cada uno de los términos:

$V$  Velocidad promedio del flujo.

$Q$  Caudal circulante.

$A$  Área de la sección de la tubería.

Sin embargo, en algunos casos, se debe determinar la velocidad en un punto dentro de la corriente de flujo. Esto se debe a que la magnitud de velocidad no es uniforme a través de la sección del conducto, y la forma en que la velocidad varía depende del tipo de flujo.

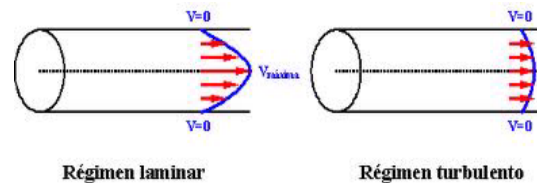


Figura 2.9: Régimen Laminar y Turbulento en Tuberías

La velocidad en un punto en contacto con el sólido (paredes de la tubería) es cero (por la teoría de capa límite). La velocidad máxima, independientemente del tipo de flujo, se presenta en el centro del conducto.

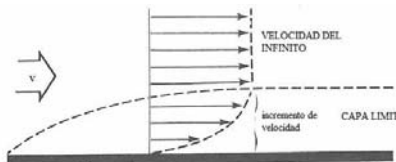


Figura 2.10: Capa Límite en la Pared de una Tubería

Esta diferencia en perfiles se debe al movimiento caótico de las moléculas en el flujo turbulento, lo cual produce choques violentos entre las mismas y una transferencia de momento elevada entre moléculas, lo que deriva en una distribución de velocidad más uniforme que en el caso laminar. Sin embargo, en el flujo turbulento siempre existe una delgada capa cerca de las superficies, donde la velocidad es pequeña, y en la cual el flujo puede considerarse laminar (zona de capa límite). El grueso real de dicha capa límite influye de forma importante en el perfil de velocidades, así como en la pérdida de carga.

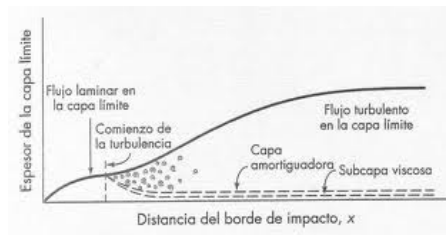


Figura 2.11: Capa Límite. Zona Laminar y Zona Turbulenta

## 2.10. Pérdidas de Carga en Tuberías

El flujo de un líquido o un gas por una conducción va inevitablemente acompañado de una paulatina cesión de energía mecánica, debido al trabajo opositor de las fuerzas viscosas. Dicha reducción de energía mecánica suele expresarse en términos energía por unidad de peso de fluido circulante (energía específica), denominada habitualmente como pérdida de carga.

En el caso de tuberías horizontales, la pérdida de carga se manifiesta como una disminución de presión en el sentido del flujo. La pérdida de carga está relacionada con otras variables fluidodinámicas según sea el tipo de flujo, laminar o turbulento. Además de las pérdidas de carga lineales (a lo largo de los conductos), también se producen pérdidas de carga singulares en puntos concretos como codos, ramificaciones, válvulas, etc.

Las pérdidas de carga (o pérdidas de energía) en tuberías son de dos tipos, primarias y secundarias:

Las pérdidas primarias son las “pérdidas de superficie” en el contacto del fluido con la superficie (capa límite), rozamiento de unas capas de fluido con otras (régimen laminar) o las partículas de fluido entre sí (régimen turbulento). Tienen lugar en flujo uniforme y por lo tanto, principalmente se producen en tramos de tuberías de sección constante.

Las pérdidas secundarias son las “pérdidas de forma” que tienen lugar en las transiciones (estrechamiento o expansiones), en codos, válvulas y en toda clase de accesorios de tuberías.

Este estudio se centrará en las pérdidas de carga primarias o lineales (pérdidas por fricción).

### 2.10.1. Pérdidas de Carga Lineales

Como se citó anteriormente, las pérdidas de carga lineales son debidas a las tensiones cortantes de origen viscoso que aparecen entre el fluido y las paredes de la tubería. Considerando flujo estacionario en un tramo de tubería de sección

constante. Las pérdidas de carga se pueden obtener por un balance de fuerzas en la dirección del flujo:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + h_A + h_R + h_L = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g}$$

En términos de presión nos queda:

$$P_1 + \rho g z_1 + \alpha_1 \rho \frac{V_1^2}{2} + \rho g (h_A + h_R + h_L) = P_2 + \rho g z_2 + \alpha_2 \rho \frac{V_2^2}{2}$$

-Siendo cada uno de los términos:

$V_1$  y  $V_2$  Velocidad promedio en las secciones 1 y 2 respectivamente.

$\alpha_1$  y  $\alpha_2$  Factores de corrección de energía cinética en tuberías circulares, con flujo laminar con perfil parabólico de velocidades  $\alpha = 2$  y en flujo turbulento el perfil es casi uniforme  $\alpha \approx 1,05$ , en general se toma  $\alpha = 1$ .

$\gamma$  Peso específico del flujo.  $\gamma = \rho \cdot g$

$\rho$  Densidad del fluido.

$h_A$  Energía añadida al fluido mediante un dispositivo mecánico, por ejemplo una bomba.

$h_R$  Energía absorbida al fluido mediante un dispositivo mecánico, por ejemplo una turbina.

$h_L$  Pérdida de energía la cual se compone de pérdidas por fricción y pérdidas singulares:

$$h_L = h_f + h_s$$

-Siendo cada uno de los términos:

$h_f$  Pérdida de carga debido a la fricción en la tubería.

$h_s$  Pérdida local de energía debida a la presencia de válvulas y conectores.

Las características de las pérdidas de carga debida a la fricción son muy distintas en función de que el flujo sea laminar o turbulento. En el caso de flujo laminar, las diferentes capas del fluido discurren ordenadamente, siempre en dirección paralela al eje de la tubería y sin mezclarse, siendo el factor dominante en el intercambio de cantidad de movimiento la viscosidad. En flujo turbulento, en cambio, existe una continua fluctuación tridimensional en la velocidad de

las partículas (también en otras magnitudes intensivas, como la presión o la temperatura), que se superpone a las componentes de la velocidad. Este es el fenómeno de la turbulencia, que origina un fuerte intercambio de la cantidad de movimiento entre las distintas capas del fluido, lo que da unas características especiales a este tipo de flujo.

El tipo de flujo, laminar o turbulento, depende del valor de la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas, es decir, del número de Reynolds  $Re$ , cuya expresión es:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} = \frac{\text{Fuerzas Inerciales}}{\text{Fuerzas Viscosas}}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

-Siendo cada uno de los términos:

$Re$  Número de Reynolds.

$\rho$  Densidad del fluido.

$V$  Velocidad del flujo.

$D$  Diámetro de la tubería.

$\nu$  Viscosidad cinemática del fluido.

$\mu$  Viscosidad dinámica.

### 2.10.2. Ecuación de Darcy-Weisbach

En dinámica de fluidos, la ecuación de Darcy-Weisbach es una ecuación empírica que relaciona la pérdida de carga hidráulica (o pérdida de presión) debido a la fricción a lo largo de una tubería dada con la velocidad media del flujo del fluido. La ecuación tiene su nombre de Henry Darcy y Julius Weisbach. Es una ecuación ampliamente usada en hidráulica. Permite el cálculo de la pérdida de carga debida a la fricción dentro una tubería llena. La ecuación fue inicialmente una variante de la ecuación de Prony, desarrollada por el francés Henry Darcy. En 1845 fue refinada por Julius Weisbach, de Sajonia. Esta fórmula permite la evaluación apropiada del efecto de cada uno de los factores que inciden en la pérdida de energía en una tubería. Es una de las pocas expresiones que agrupan estos factores. La ventaja de esta fórmula es que puede aplicarse a todos los tipos de flujo hidráulico (laminar, transicional y turbulento), debiendo el coeficiente de fricción tomar los valores adecuados, según corresponda.

La forma general de la ecuación de Darcy-Weisbach es:

$$h_f = f \frac{LV^2}{2Dg}$$

-Siendo cada uno de los términos:

$h_f$  Pérdida de carga debida a la fricción.

$f$  Factor de fricción de Darcy.

$L$  Longitud de la tubería.

$D$  Diámetro de la tubería.

$V$  Velocidad media del fluido.

$g$  Aceleración de la gravedad; 9,81 m/s<sup>2</sup>

En función del caudal ( $Q$ ) quedaría:

$$h_f = f \frac{8LQ^2}{g\pi^2 D^5}$$

Cuando se manejan fluidos en canales y tubos no circulares, se usará el término de Diámetro Hidráulico  $Dh$ . Utilizando este término se puede estudiar el comportamiento del flujo de la misma forma como si fuera una tubería de sección circular.

$$Dh = \frac{4A}{P}$$

-Siendo  $A$  el área de la sección transversal y  $P$  el perímetro mojado.

Para un tubo circular quedaría:

$$Dh = \frac{4 \frac{\pi D^2}{4}}{\pi D} = D$$



Para un conducto anular (tubo con eje interior):

$$Dh = \frac{4 * 0,25\pi(D_0^2 - D_i^2)}{\pi(D_0 + D_i)} = D_0 - D_i$$

Para un conducto de sección rectangular quedaría:

$$Dh = \frac{4LW}{2(L + W)} = \frac{2LW}{L + W}$$

Para el caso especial de un conducto cuadrado, donde  $L = W$ , entonces  $Dh = L$ . Para otro caso extremo como un conducto muy ancho, por ejemplo, una ranura de ancho  $W$  donde  $L \gg W$ , entonces  $Dh = 2W$ .

Para conductos o tuberías totalmente llenas cuya sección transversal es un polígono regular, el diámetro hidráulico es equivalente al diámetro del círculo inscrito en el perímetro mojado.

La fórmula de Manning posee un parámetro llamado radio hidráulico. El nombre sugiere cierta relación, y efectivamente la hay, pero en este caso el diámetro hidráulico no es el radio hidráulico multiplicado por dos, sino por cuatro:

$$Dh = 4rh$$

### Factor de Fricción

El factor de fricción  $f$  es adimensional y varía de acuerdo a los parámetros de la tubería (rugosidad y diámetro) y del tipo de flujo turbulento (Número de Reynolds).

-Para flujo laminar:

Si el número de Reynolds,  $Re < 2300$ , se considera que el fluido presenta régimen de flujo laminar. Este tipo de régimen solo se presenta en flujos de medios porosos (corrientes subterráneas en formaciones permeables y en el interior de redes de flujo en presas de tierra, así como en los capilares de sistemas sanguíneos), y excepcionalmente en laboratorios hidráulicos bajo condiciones determinadas y controlables.

-Para en flujo en transición y turbulento:

Si el número de Reynolds,  $2300 < Re < 4000$ , se considera que el fluido presenta régimen de flujo transicional. En la zona de transición, los valores de  $f$  son inciertos, ya que el flujo se comporta de manera dual, laminar y turbulenta, mostrando gran inestabilidad. Si el número de Reynolds,  $4000 < Re$ , se considera que el fluido presenta régimen de flujo turbulento. Para el flujo turbulento, muchos investigadores se han esforzado en el cálculo de  $f$ , tanto a partir de resultados de experimentos propios como de resultados obtenidos por otros investigadores, para diferentes tipos de tuberías.

El flujo turbulento se puede clasificar a su vez en turbulento liso, turbulento intermedio (ondulado o de transición), y turbulento rugoso. Para estos flujos se establecen diferentes relaciones funcionales para determinar el factor de fricción  $f$ .

### Desarrollo de las Ecuaciones de Flujo para el Cálculo Analítico del Coeficiente de Fricción

Como ha quedado mencionado anteriormente, para realizar el cálculo de la pérdida de carga lineal en una tubería, necesitamos calcular el factor de fricción, dicho factor depende del régimen del flujo en la tubería, laminar o turbulento y de la rugosidad de la tubería, rugoso o liso.

-Hagen-Poiseuille en 1846 fue el primero en desarrollar una ecuación teórica para el cálculo del factor de fricción y de las pérdidas de carga en tuberías circulares en régimen laminar y obtuvo que el factor de fricción es:

$$f = \frac{64}{Re}$$

-A partir del siglo XX se tiene un sin número de ecuaciones, casi todas salidas de estudios experimentales, que se fueron dando, el primero de ellos en formularlo fue Blasius en 1913, con base en la información experimental acumulada hasta el momento, concluyó que existen dos tipos de fricción en flujo turbulento. La correspondiente a los tubos lisos, donde predominan los efectos viscosos, y la fricción en tubos rugosos que depende tanto de la viscosidad de los fluidos como de la rugosidad relativa de las tuberías, y formuló la siguiente expresión para el cálculo del factor de fricción en tubos lisos para un  $Re < 10^5$ .

$$f = \frac{0,316}{Re^{\frac{1}{4}}}$$

Sólo hasta 1930 comenzó el estudio moderno de las ecuaciones de flujo con investigaciones que tenían por objetivo obtener una expresión general para el cálculo del factor de fricción (Moore, 1959). En ese año, Prandtl y Von Karman propusieron dos ecuaciones para su cálculo. Siendo válida la siguiente expresión para tuberías lisas y  $Re > 10^5$  régimen turbulento.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( Re \sqrt{f} \right) - 0,8$$

Mientras que para tubos rugosos, para  $Re > \frac{3500}{\frac{k}{D}}$  régimen turbulento, la ecuación es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{D}{2k} \right) + 1,74$$

-Siendo  $D$  el diámetro interno de la tubería y  $k$  su rugosidad.

En 1939, Colebrook y White presentaron una fórmula semi-empírica para el cálculo del factor de fricción en tuberías comerciales en régimen de flujo de transición y turbulento, válida para tuberías rugosas y  $Re < \frac{3500}{\frac{k}{D}}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

Si la variable que debe calcularse es el diámetro o el caudal, teniendo en cuenta que para calcular el factor de fricción se requiere el número de Reynolds, el uso de la ecuación de Darcy-Weisbach, en conjunto con una de las ecuaciones de tipo logarítmico, implica el uso de un procedimiento de ensayo y error.

En 1944 Moody publicó el diagrama universal para la obtención de factor de fricción, una de las herramientas más usadas para su determinación. Sin embargo, cuando se desea programar en computadores algoritmos que lo requieren, se hace necesario emplear una ecuación. El diagrama de Moody puede usarse en régimen laminar, transición y turbulento, para tuberías comerciales lisas o rugosas. Se trata de una gráfica en coordenadas logarítmicas de doble entrada. A partir del número de Reynolds, y la rugosidad relativa de la tubería, gráficamente se puede obtener el coeficiente de fricción  $f$ .

TUBERÍAS	RÉGIMEN	ECUACIÓN	AUTOR
Lisas y Rugosas	Laminar	$f = \frac{64}{\text{Re}}$	Hagen-Poiseuille
Lisas	Turbulento $\text{Re} < 10^5$	$f = \frac{0,316}{\text{Re}^{\frac{1}{4}}}$	Blasius
Lisas	Turbulento $\text{Re} > 10^5$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (\text{Re} \sqrt{f}) - 0,8$	Karman-Prandtl (Primera Ecuación)
Rugosas	Turbulento $\text{Re} < \frac{3500}{\frac{k}{D}}$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$	Colebrook-White
Rugosas	Turbulento $\text{Re} > \frac{3500}{\frac{k}{D}}$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{D}{2k} \right) + 1,74$	Karman-Prandtl (Segunda Ecuación)

Tabla 2.1. Ecuaciones para el Cálculo Analítico del Coeficiente de Fricción en Conductos

-En el diagrama de Moody se observan cinco zonas:

**1.-** Una zona laminar en la que  $f$  es una función lineal del número de Reynolds. Ecuación de Hagen-Poiseuille.

**2.-** Una zona crítica (sombreada) que aparece entre los números de Reynolds de 2300 a 4000. En esta región el flujo puede ser tanto laminar como turbulento,

dependiendo de varios factores: estos incluyen cambios de la sección, de la dirección del flujo y obstrucciones tales como válvulas corriente arriba de la zona considerada. El factor de fricción en esta región es indeterminado y tiene límites más bajos si el flujo es laminar y más altos si el flujo es turbulento.

3.- Una zona de transición en la que  $f$  depende del número de Reynolds y de la rugosidad  $k$ . Ecuación de Colebrook-White.

4.- Una zona correspondiente al tubo hidráulicamente liso. Ecuación de Karman-Prandtl.

5.- Una zona completamente turbulenta en la que  $f$  depende solamente del valor  $k$  de la rugosidad. Ecuación de Nikuradse.

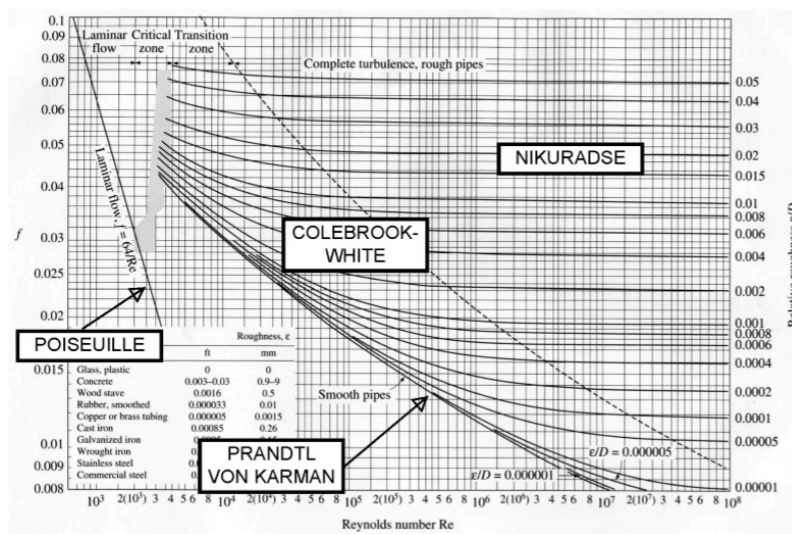


Figura 2.12: Diagrama de Moody



## Capítulo 3

# Ecuaciones de Karman-Prandtl dentro de la Ingeniería Naval

El Ingeniero y Físico Húngaro-Estadounidense Theodore Von Karman y el Físico Alemán Ludwig Prandtl, establecieron las siguientes ecuaciones de tipo general aplicable para tuberías lisas y rugosas en régimen turbulento.



Figura 3.1: Von Karman

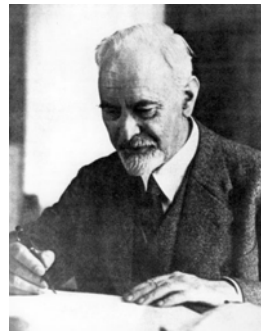


Figura 3.2: Ludwig Prandtl

-Para tuberías lisas tenemos:  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (\operatorname{Re} \sqrt{f}) - 0,8$

-Para tuberías rugosas tenemos:  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{D}{2k} \right) + 1,74$

Estas ecuaciones tienen el problema de que no son explícitas para el factor de fricción  $f$ , por lo que se debe utilizar algún tipo de método numérico para resolverlas.

### 3.1. Factores que influyen en las Ecuaciones de Karman-Prandtl

Los factores de los que dependen las ecuaciones de Karman-Prandtl son básicamente dos, el Número de Reynolds y la Rugosidad de la tubería, este último solo en tuberías rugosas. Ambos influyen en el nivel de turbulencia del fluido.

#### 3.1.1. Número de Reynolds

Osborne Reynolds (Belfast, Irlanda del Norte, 23 de agosto de 1842 - Watchet, Inglaterra, 21 de febrero de 1912) fue un ingeniero y físico irlandés que realizó importantes contribuciones en los campos de la hidrodinámica y la mecánica de fluidos, siendo la más notable la introducción del Número de Reynolds en 1883. Estudió matemáticas en la Universidad de Cambridge, donde se graduó en 1867. Al año siguiente fue nombrado profesor de ingeniería del Owens College en Manchester y que posteriormente se convertiría en la Victoria University of Manchester, siendo titular de la Cátedra de Ingeniería (en aquella época tan solo había dos de estas cátedras en Inglaterra).



Figura 3.3: Osborne Reynolds



### 3.1. FACTORES QUE INFLUYEN EN LAS ECUACIONES DE KARMAN-PRANDTL31

Osborne Reynolds (1874) estudió las características de flujo de los fluidos inyectando un trazador dentro de un líquido que fluía por una tubería. A velocidades bajas del líquido, el trazador se mueve linealmente en la dirección axial. Sin embargo a mayores velocidades, las líneas del flujo del fluido se desorganizan y el trazador se dispersa rápidamente después de su inyección en el líquido.

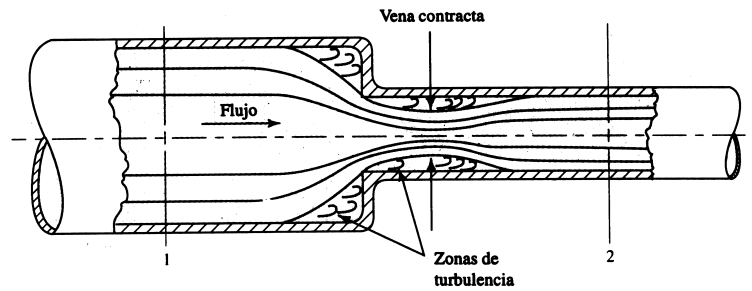


Figura 3.4: Zonas de turbulencias en un estrechamiento.

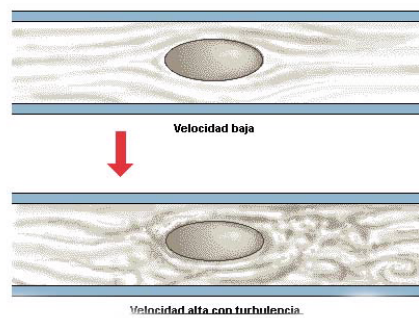


Figura 3.5: Turbulencia a Velocidades Altas

El flujo lineal se denomina Laminar y el flujo errático obtenido a mayores velocidades del líquido se denomina Turbulento.

Como ya quedó visto en el apartado 2.10.1, las características que condicionan el flujo laminar dependen de las propiedades del líquido y de las dimensiones del flujo. Conforme aumenta el flujo másico aumenta las fuerzas del momento o inercia, las cuales son contrarrestadas por la fricción o fuerzas viscosas dentro del líquido que fluye. Cuando estas fuerzas opuestas alcanzan un cierto equilibrio se producen cambios en las características del flujo. En base a los experimentos realizados por Reynolds en 1874 se concluyó que las fuerzas del momento son función de la densidad, del diámetro de la tubería y de la velocidad media. Además, la fricción o fuerza viscosa depende de la viscosidad del líquido. Según

dicho análisis, el Número de Reynolds se definió como la relación existente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas (o de rozamiento).

$$\text{Re} = \frac{\rho VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu} = \frac{\text{Fuerzas Inerciales}}{\text{Fuerzas Viscosas}}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

-Siendo cada uno de los términos:

Re Número de Reynolds.

$\rho$  Densidad del fluido.

$V$  Velocidad del flujo.

$D$  Diámetro de la tubería.

$\nu$  Viscosidad cinemática del fluido.

$\mu$  Viscosidad dinámica.

### Teoría de la Capa Límite

La teoría de capa límite fue planteada a comienzos del siglo XX por el alemán Prandtl y revolucionó en su momento la Aeronáutica, la Ingeniería Naval y la Mecánica de Fluidos.

Prandtl junto con otros investigadores descubrieron que cuando el flujo es turbulento existe cerca de las paredes de un conducto una pequeñísima sub-capa que tiene régimen laminar. Esta teoría de capa límite encuentra su aplicación en fluidos poco viscosos como el agua o el aire. La capa límite es la zona afectada por el esfuerzo cortante que se genera cuando un fluido en movimiento interactúa con una pared sólida. Al pasar el fluido de un depósito de gran tamaño en donde la velocidad es muy baja o nula, a un conducto cerrado, la velocidad va aumentando desde cero cerca de las paredes hasta un máximo en la zona central, haciendo que las partículas se empiecen a entremezclar ocasionando que el flujo se vaya volviendo turbulento hasta llegar a la turbulencia completa. La Figura siguiente explica el proceso:

### 3.1. FACTORES QUE INFLUYEN EN LAS ECUACIONES DE KARMAN-PRANDTL33

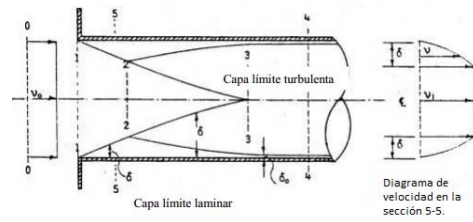


Figura 3.6: Desarrollo de una Capa límite

En una sección 0-0 antes de la entrada al tubo la distribución de velocidad es constante e igual a  $v_0$ . Al acercarse el flujo a la sección 1-1 de entrada al tubo, las partículas de fluido en contacto con las paredes del tubo tienen velocidad  $v_0$  que va aumentando hasta una velocidad máxima  $v_1$  en la zona central. En la sección 5-5 se tiene una corona exterior de fluido de espesor  $\delta$  que se llama capa límite. En esta capa límite la velocidad es variable desde cero en las paredes del tubo a  $v_1$  en su límite interior; esta velocidad se conserva en un núcleo circular central.

$v_1$  se hace mayor a  $v_0$  debido al retardo del flujo en la corona exterior. El flujo es laminar en la zona inicial del tubo tanto en la corona exterior y en el núcleo central debido a que las velocidades son bajas. Esta situación ocurre dentro del tubo entre las secciones 1-1 y 2-2.

De la sección 2-2 en adelante la velocidad máxima dentro de la capa límite es suficientemente alta y se produce flujo turbulento dentro de la capa límite. El espesor de la capa límite aumenta hasta llegar a su valor máximo en la sección 3-3. A partir de esta sección desaparece el núcleo central de velocidad constante  $v_1$ , la capa límite cubre toda la sección del tubo con un espesor igual al radio del conducto y se está en una zona de turbulencia completa. Debido a que la velocidad es muy baja en la proximidad de las paredes del conducto se desarrolla una pequeña capa de flujo laminar de espesor  $\delta_0$  llamada sub-capa laminar. Esta es una capa de espesor muy pequeño ( $\mu$ , mm) y en ella se sienten mucho los efectos de la viscosidad del fluido y del rozamiento.

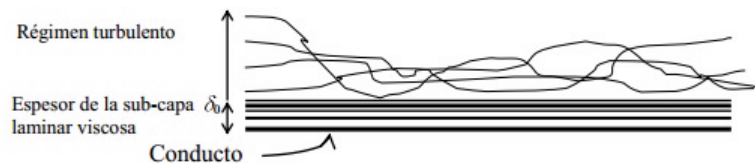


Figura 3.7: Sub-Capa Laminar Viscosa

### 3.1.2. Rugosidad de la tubería

El concepto de sub-capa laminar permite explicar el efecto de la rugosidad sobre las paredes del conducto ya que la existencia de la sub-capa laminar y el efecto de la rugosidad influyen en el comportamiento hidráulico de los conductos tal como se ilustra a continuación:

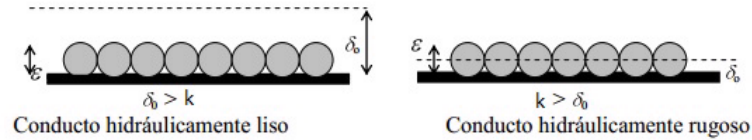


Figura 3.8: Conducto Hidráulicamente Liso y Rugoso Respectivamente

Cuando la rugosidad absoluta es apreciablemente menor que el espesor de la sub-capa laminar los remolinos y vórtices causados por las irregularidades se anulan por efecto de la viscosidad. En este caso la rugosidad no afecta la formación de la turbulencia y se dice que la superficie del material actúa como hidráulicamente lisa. Cuando la rugosidad absoluta es apreciablemente mayor que el espesor de la sub-capa laminar los remolinos y vórtices causados por las irregularidades destruyen la sub-capa laminar generando turbulencia apreciable y se dice que la superficie del material actúa como hidráulicamente rugosa.

En teoría, se pueden usar los siguientes rangos para decidir si un conducto es hidráulicamente liso o rugoso:

$$k > 6,1\delta_0 \text{ Conducto Hidráulicamente Rugoso (CHR)}$$

$$k < 0,305\delta_0 \text{ Conducto Hidráulicamente Liso (CHL)}$$

$$0,305\delta_0 < k < 6,1\delta_0 \text{ Transición}$$

-Siendo cada uno de los términos:  
 $k$  Rugosidad absoluta del conducto.  
 $\delta_0$  Espesor de la sub-capa laminar.

$$\delta_0 = \frac{11,6\nu}{V}$$

### 3.1. FACTORES QUE INFLUYEN EN LAS ECUACIONES DE KARMAN-PRANDTL35

$$V = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

$$\tau = \gamma R S_f$$

$$\delta_0 = \frac{1,6v}{\sqrt{g R S_f}}$$

Las tuberías, en función de su rugosidad, pueden clasificarse en:

- Hidráulicamente lisas.
- Hidráulicamente rugosas.
- Hidráulicamente semirrugosas.

**Hidráulicamente Lisas:** Son aquellas en las que el espesor de las rugosidades o asperezas que presentan las paredes interiores es inferior al espesor de la subcapa laminar. En estos casos, la rugosidad no influye en las fuerzas de rozamiento, y por tanto el factor de fricción  $f$  depende exclusivamente del número de Reynolds,  $Re$ . Las tuberías de materiales plásticos, tales como, PVC, Poliéster, etc se comportan como hidrodinámicamente lisas.

**Hidráulicamente Rugosas:** En éstas, el espesor de las rugosidades es mayor que el espesor de la subcapa laminar debido, entre otras causas a que éste decrece al aumentar el número de Reynolds  $Re$ . Experimentalmente se comprueba que el factor de fricción  $f$  depende cada vez menos de  $Re$ , siendo la rugosidad de la tubería la causa que más influye sobre  $f$ .

**Hidráulicamente Semirrugosas:** Para valores intermedios del número de Reynolds, el espesor de la subcapa ha disminuido lo suficiente como para que el movimiento del fluido alrededor de las rugosidades deje de ser laminar, y éstas perturban algo la corriente general. En éstas, el espesor de las rugosidades es mayor que el espesor de la subcapa laminar debido, entre otras causas a que éste decrece al aumentar el número de Reynolds  $Re$ . Experimentalmente se comprueba que el factor de fricción  $f$  depende cada vez menos de  $Re$ , siendo la rugosidad de la tubería la causa que más influye sobre  $f$ .

Un mismo valor de rugosidad absoluta puede ser muy importante en tuberías de pequeño diámetro y ser insignificante en una tubería de gran diámetro, es

decir, la influencia de la rugosidad absoluta depende del tamaño de la tubería. Por ello, para caracterizar una tubería por su rugosidad resulta más adecuado utilizar la rugosidad relativa, que se define como el cociente entre la rugosidad absoluta y el diámetro de la tubería  $\frac{k}{D}$ .

Cuando el flujo es turbulento el factor de fricción no sólo depende del número de Reynolds, sino también de Rugosidad relativa de las paredes de la tubería,  $\frac{k}{D}$ , es decir, la rugosidad de las paredes de la tubería  $k$  comparadas con el diámetro de la tubería  $D$ . Para tuberías muy lisas, como las de latón extruido o el vidrio, el factor de fricción disminuye más rápidamente con el aumento del número de Reynolds, que para tubería con paredes más rugosas.

Como el tipo de la superficie interna de la tubería comercial es prácticamente independiente del diámetro, la rugosidad de las paredes tiene mayor efecto en el factor de fricción para diámetros pequeños. En consecuencia las tuberías de pequeño diámetro se acercan a la condición de gran rugosidad y en general tienen mayores factores de fricción que las tuberías del mismo material pero de mayores diámetros.

### 3.2. Envejecimiento de las tuberías y su influencia en la rugosidad

El envejecimiento de una tubería de agua es el conjunto de procesos naturales, físicos, químicos y biológicos que ocurren con el paso del tiempo. Los procesos físicos, químicos y biológicos que forman parte del concepto de envejecimiento de una tubería son oxidación-corrosión y desgaste mecánico por fricción. La regeneración de las tuberías comprende todas las medidas posibles de prevención, mantenimiento y corrección en busca de mantener o volver a sus condiciones iniciales en miras de optimizar el aprovechamiento del recurso. Las causas más importantes del envejecimiento de una tubería son: la corrosión, la incrustación y la oxidación. El tamaño de la celda corrosiva puede ser pequeño, en el caso de las grietas de corrosión o picaduras y también puede ser grande, que es lo que se denomina como corrosión uniforme. Es muy frecuente en estos medios el desarrollo de picaduras que en algunos casos penetran rápidamente el revestimiento de la tubería.

Analizándose la naturaleza o rugosidad de las paredes de una tubería deben considerarse:

- a. Material empleado en la fabricación de los tubos.
- b. Proceso de fabricación de los tubos.
- c. Extensión de los tubos y número de juntas.

### 3.2. ENVEJECIMIENTO DE LAS TUBERÍAS Y SU INFLUENCIA EN LA RUGOSIDAD<sup>37</sup>

- d. Técnica de asentamiento.
- e. Estado de conservación de las paredes de los tubos.
- f. Existencia de revestimientos especiales.
- g. Empleo de medidas protectoras durante el funcionamiento.

Con el uso, las tuberías se obstruyen y se oxidan y en la superficie pueden surgir “tubérculos” (fenómeno de corrosión en tuberías de hierro fundido). Estas condiciones se agravan con el tiempo. Modernamente han sido empleados revestimientos internos especiales con el objeto de eliminar o aminorar los inconvenientes de la corrosión.



Figura 3.9: Tubería con Corrosión

Otro fenómeno que puede ocurrir en las tuberías es la deposición progresiva de sustancias contenidas en el fluido y la formación de capas adherentes, incrustaciones que reducen el diámetro útil de los tubos y aceleran la rugosidad.

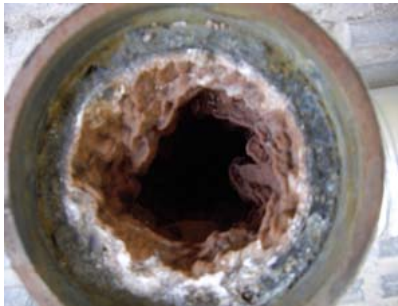


Figura 3.10: Tubería con Incrustaciones

### 3.2.1. Efecto del tiempo en la rugosidad de las tuberías según Genijew

Genijew relacionó la rugosidad absoluta con el tipo de agua a transportar y el número de años de servicio.

$$k = k_0 + at$$

-Siendo cada uno de los términos:

$k$  Rugosidad absoluta.

$k_0$  Rugosidad de la tubería (Nueva) en mm.

$a$  Coeficiente que depende del grupo en el que se clasifique el agua que transporta.

$t$  Número de años de servicio de la tubería.

### 3.3. Golpe de Ariete

El golpe de ariete se origina debido a que el fluido es ligeramente elástico (aunque en diversas situaciones se puede considerar como un fluido no compresible). En consecuencia, cuando se cierra bruscamente una válvula o un grifo instalado en el extremo de una tubería de cierta longitud, las partículas de fluido que se han detenido son empujadas por las que vienen inmediatamente detrás y que siguen aún en movimiento. Esto origina una sobrepresión que se desplaza por la tubería a una velocidad que puede superar la velocidad del sonido en el fluido. Esta sobrepresión tiene dos efectos: comprime ligeramente el fluido, reduciendo su volumen, y dilata ligeramente la tubería. Cuando todo el fluido que circulaba en la tubería se ha detenido, cesa el impulso que la comprimía y, por tanto, ésta tiende a expandirse. Por otro lado, la tubería que se había ensanchado ligeramente tiende a retomar su dimensión normal. Conjuntamente, estos efectos provocan otra onda de presión en el sentido contrario. El fluido se desplaza en dirección contraria pero, al estar la válvula cerrada, se produce una depresión con respecto a la presión normal de la tubería. Al reducirse la presión, el fluido puede pasar a estado gaseoso formando una burbuja mientras que la tubería se contrae. Al alcanzar el otro extremo de la tubería, si la onda no se ve disipada, por ejemplo, en un depósito a presión atmosférica, se reflejará siendo mitigada progresivamente por la propia resistencia a la compresión del fluido y la dilatación de la tubería. Si el cierre o apertura de la válvula es brusco, es decir, si el tiempo de cierre es menor que el tiempo que tarda la onda en recorrer la tubería ida y vuelta, la sobrepresión máxima se calcula como:



$$C * \frac{V_0}{g}$$

-Siendo cada uno de los términos:  
 $C$  Velocidad de la onda (velocidad relativa respecto al fluido) de sobrepresión o depresión.

$V_0$  Velocidad media del fluido, en régimen.

$g$  Aceleración de la gravedad;  $9,81 \text{ m/s}^2$

A su vez, la velocidad de la onda se calcula como:

$$C = \sqrt{\frac{\frac{K}{r_0}}{1 + K * \frac{D}{E * e}}}$$

-Siendo cada uno de los términos:

$K$  Es el módulo elástico del fluido.

$r_0$  Es la densidad del fluido.

$E$  Es el módulo de elasticidad (módulo de Young) de la tubería que naturalmente depende del material de la misma.

$e$  Es el espesor de las paredes de la tubería.

$D$  Es el diámetro de la tubería.

El problema del golpe de ariete es uno de los problemas más complejos de la hidráulica, y se resuelve generalmente mediante modelos matemáticos que permiten simular el comportamiento del sistema.



Figura 3.11: Material Destruído por un Golpe de Ariete

### Consecuencias del Golpe de Ariete

Este fenómeno es muy peligroso, ya que la sobrepresión generada puede llegar a entre 60 y 100 veces la presión normal de la tubería, ocasionando roturas en los accesorios instalados en los extremos (grifos, válvulas, etc). La fuerza del golpe de ariete es directamente proporcional a la longitud del conducto, ya que las ondas de sobrepresión se cargarán de más energía, e inversamente proporcional al tiempo durante el cual se cierra la llave: cuanto menos dura el cierre, más fuerte será el golpe. El golpe de ariete estropea el sistema de abastecimiento de fluido, a veces hace reventar tuberías de hierro colado, ensancha las de plomo, arranca codos instalados, etc.

#### 3.3.1. Dispositivos para controlar el Golpe de Ariete

Para evitar este efecto, existen diversos sistemas:

Para evitar los golpes de ariete causados por el cierre de válvulas, hay que estrangular gradualmente la corriente de fluido, es decir, cortándola con lentitud utilizando para ello, por ejemplo, válvulas de asiento. Cuanto más larga es la tubería, tanto más tiempo deberá durar el cierre. Sin embargo, cuando la interrupción del flujo se debe a causas incontrolables como, por ejemplo, la parada brusca de una bomba eléctrica, se utilizan tanques neumáticos con cámara de aire comprimido, torres piezométricas o válvulas de muelle que puedan absorber la onda de presión, mediante un dispositivo elástico.

Otro método es la colocación de ventosas de aireación, preferiblemente trifuncionales (estos dispositivos son para disminuir otro efecto que se producen en las redes de agua o de algún otro fluido parecido al desalojarlo del sistema mas no es propio del fenómeno del golpe de ariete)

1. Introducir aire cuando en la tubería se extraiga el fluido, para evitar que se generen vacíos.
2. Extracción de grandes bolsas de aire que se generen, para evitar que una columna de aire empujada por el fluido acabe reventando codos o, como es más habitual en las crestas de las redes donde acostumbran a acumularse las bolsas de aire.
3. Extracción de pequeñas bolsas de aire, debido a que el sistema de las mismas ventosas por lado tienen un sistema que permite la extracción de grandes cantidades y otra vía para las pequeñas bolsas que se puedan alojar en la misma ventosa.

Otro caso común de variación brusca de la velocidad del flujo en la tubería se da en las centrales hidroeléctricas, cuando se produce una caída parcial o total de la demanda. En estos casos tratándose de volúmenes importantes de fluido que deben ser absorbidos, se utilizan en la mayoría de los casos torres piezométricas,

o chimeneas de equilibrio que se conectan con la presión atmosférica, o válvulas de seguridad.



## Capítulo 4

# MÉTODOS NUMÉRICOS

### 4.1. Importancia de los Métodos Numéricos

La ciencia y la tecnología describen los fenómenos reales mediante modelos matemáticos. El estudio de estos modelos permite un conocimiento más profundo del fenómeno, así como de su evolución futura. La matemática aplicada es la rama de las matemáticas que se dedica a buscar y aplicar las herramientas más adecuadas a los problemas basados en estos modelos. Desafortunadamente, no siempre es posible aplicar métodos analíticos clásicos por diferentes razones:

- No se adecúan al modelo concreto.
- Su aplicación resulta excesivamente compleja.
- La solución formal es tan complicada que hace imposible cualquier interpretación posterior.

Simplemente no existen métodos analíticos capaces de proporcionar soluciones al problema. En estos casos son útiles las técnicas numéricas, que mediante una labor de cálculo más o menos intensa, conducen a soluciones aproximadas que son siempre numérica. El importante esfuerzo de cálculo que implica la mayoría de estos métodos hace que su uso esté íntimamente ligado al empleo de computadores. De hecho, sin el desarrollo que se ha producido en el campo de la informática resultaría difícilmente imaginable el nivel actual de utilización de las técnicas numéricas en ámbitos cada día más diversos.

El objetivo principal del análisis numérico es encontrar soluciones “aproximadas” a problemas complejos utilizando sólo las operaciones más simples de la aritmética. Se requiere de una secuencia de operaciones algebraicas y lógicas que producen la aproximación al problema matemático.

Errores

El concepto de error es consustancial con el cálculo numérico. En todos los problemas es fundamental hacer un seguimiento de los errores cometidos a fin de poder estimar el grado de aproximación de la solución que se obtiene.

Los errores asociados a todo cálculo numérico tienen su origen en dos grandes factores:

- Aquellos que son inherentes a la formulación del problema.
- Los que son consecuencia del método empleado para encontrar la solución del problema.

Dentro del grupo de los primeros, se incluyen aquellos en los que la definición matemática del problema es sólo una aproximación a la situación física real. Estos errores son normalmente despreciables; por ejemplo, el que se comete al obviar los efectos relativistas en la solución de un problema de mecánica clásica. En aquellos casos en que estos errores no son realmente despreciables, nuestra solución será poco precisa independientemente de la precisión empleada para encontrar las soluciones numéricas.

Otra fuente de este tipo de errores tiene su origen en la imprecisión de los datos físicos: constantes físicas y datos empíricos. En el caso de errores en la medida de los datos empíricos y teniendo en cuenta su carácter generalmente aleatorio, su tratamiento analítico es especialmente complejo pero imprescindible para contrastar el resultado obtenido computacionalmente.

En lo que se refiere al segundo tipo de error (error computacional), tres son sus fuentes principales:

1. Equivocaciones en la realización de las operaciones (errores de bulto). Esta fuente de error es bien conocida por cualquiera que haya realizado cálculos manualmente o empleando una calculadora. El empleo de computadores ha reducido enormemente la probabilidad de que este tipo de errores se produzcan. Sin embargo, no es despreciable la probabilidad de que el programador cometa uno de estos errores (calculando correctamente el resultado erróneo). Más aún, la presencia de bugs no detectados en el compilador o en el software del sistema no es inusual. Cuando no resulta posible verificar que la solución calculada es razonablemente correcta, la probabilidad de que se haya cometido un error de bulto no puede ser ignorada. Sin embargo, no es esta la fuente de error que más nos va a preocupar.

2. El error causado por resolver el problema no como se ha formulado, sino mediante algún tipo de aproximación. Generalmente está causado por la sustitución de un infinito (sumatorio o integración) o un infinitesimal (diferenciación) por una aproximación finita. Algunos ejemplos son:

- El cálculo de una función elemental (por ejemplo,  $\text{Sen } x$ ) empleando sólo  $n$  términos de los infinitos que constituyen la expansión en serie de Taylor.

-Aproximación de la integral de una función por una suma finita de los valores de la función, como la empleada en la regla del trapecioide.

-Resolución de una ecuación diferencial reemplazando las derivadas por una aproximación (diferencias finitas).

-Solución de la ecuación  $f(x) = 0$  por el método de Newton-Raphson: proceso iterativo que, en general, converge sólo cuando el número de iteraciones tiende a infinito.

Denominaremos a este error, en todas sus formas, como error por truncamiento, ya que resulta de truncar un proceso infinito para obtener un proceso finito. Obviamente, estamos interesados en estimar, o al menos acotar, este error en cualquier procedimiento numérico.

3. Por último, la otra fuente de error de importancia es aquella que tiene su origen en el hecho de que los cálculos aritméticos no pueden realizarse con precisión ilimitada. Muchos números requieren infinitos decimales para ser representados correctamente, sin embargo, para operar con ellos es necesario redondearlos. Incluso en el caso en que un número pueda representarse exactamente, algunas operaciones aritméticas pueden dar lugar a la aparición de errores (las divisiones pueden producir números que deben ser redondeados y las multiplicaciones dar lugar a más dígitos de los que se pueden almacenar). El error que se introduce al redondear un número se denomina error de redondeo.

## 4.2. Método del Punto Fijo

El método del punto fijo es un método iterativo que permite resolver sistemas de ecuaciones no necesariamente lineales. En particular se puede utilizar para determinar raíces de una función de la forma  $f(x)$  siempre y cuando se cumplan los criterios de convergencia.

### 4.2.1. Definición de Punto Fijo

Se dice que  $\bar{x}$  es un punto fijo de la función  $f(x)$  si  $f(\bar{x}) = \bar{x}$ .

### 4.2.2. Teorema del Punto Fijo

Sea  $\varphi(x)$  una función continua en  $[a, b]$ , derivable en  $(a, b)$ , con  $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$  tal que  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  para todo  $x \in [a, b]$  y sea  $x_0$  un punto cualquiera del intervalo  $[a, b]$ . La sucesión  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  con  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  converge al único punto fijo de la función  $\varphi(x)$  en  $[a, b]$ .

**Demostración****Convergencia:**

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1})\varphi'(c) \text{ Con } c \in \left\{ \begin{array}{l} |x_n, x_{n+1}| \\ x_{n+1}, x_n \end{array} \right\} \text{ y}$$

por tanto, con  $c \in [a, b]$

$$|x_{n+1} - x_n| = |x_n - x_{n-1}| * |\varphi'(c)| \leq q |x_n - x_{n-1}| \text{ Por lo que}$$

$$|x_2 - x_1| \leq q |x_1 - x_0|$$

$$|x_3 - x_2| \leq q |x_2 - x_1| \leq q^2 |x_1 - x_0|$$

.

.

.

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0|$$

.

.

.

$$|x_0| + |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \dots + |x_{n+1} - x_n| + \dots \leq |x_0| + |x_1 - x_0| + q|x_1 - x_0| + \dots + q^n |x_1 - x_0| + \dots = |x_0| + |x_1 - x_0| (1 + q + \dots + q^n + \dots)$$

$$\text{Con } q \leq 1 \Rightarrow |x_0| + |x_1 - x_0| + \dots + |x_{n+1} - x_n| + \dots \leq |x_0| + |x_1 - x_0| \frac{1}{1 - q}$$

Por lo que la serie  $S_n = x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{n+1} - x_n) + \dots$  Es

convergente por ser absolutamente convergente.

Dado que:

$$S_1 = x_0$$

$$S_2 = x_0 + (x_1 - x_0) = x_1$$

.

.

.

$$S_{n+1} = S_n + (x_n - x_{n-1}) = x_n$$



.

.

.

La convergencia de  $S_n$  nos garantiza la de la sucesión  $x_n$ .

**Convergencia al Punto Fijo:**

$\bar{x} = \lim x_n \Rightarrow \varphi(\bar{x}) = \varphi(\lim x_n) = \lim \varphi(x_n) = \lim x_{n+1} = \varphi(\bar{x})$  es decir;  
 $\varphi(\bar{x}) = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \lim x_n$  es punto fijo de  $\varphi(\bar{x})$  en  $[a, b]$ .

**Unicidad:**

Sea  $\bar{x}'$  otro punto fijo de  $\varphi(\bar{x})$  en  $[a, b]$ ;

$$|\bar{x} - \bar{x}'| = |\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}')| = |(\bar{x} - \bar{x}') \varphi'(c)| = |(\bar{x} - \bar{x}')| * |\varphi'(c)| \quad \text{con } c \in [a, b]$$

$$|\bar{x} - \bar{x}'| (1 - |\varphi'(c)|) = 0$$

Y dado que  $|\varphi'(c)| \leq q < 1 \Rightarrow 1 - |\varphi'(c)| \neq 0$ , Obtenemos que  $|\bar{x} - \bar{x}'| = 0$ , por tanto;  $\bar{x} = \bar{x}'$ .

En otras palabras,  $\bar{x}$  es el único punto fijo de la función  $\varphi(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Interpretación Geométrica del Teorema del Punto Fijo

Dependiendo de los valores que toma  $\varphi'(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ , podemos distinguir cuatro casos:

- a.  $\varphi'(x) < -1$
- b.  $-1 < \varphi'(x) < 0$
- c.  $0 < \varphi'(x) < 1$
- d.  $\varphi'(x) > 1$

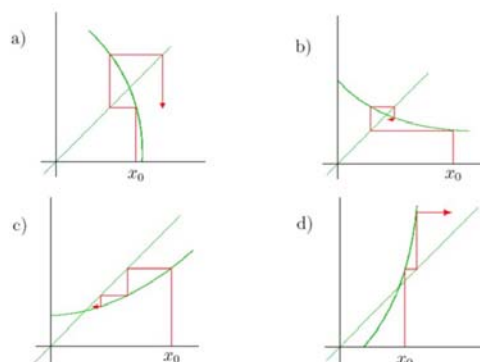


Figura 4.1: Esquema de la Convergencia para el Teorema del Punto Fijo

Pudiéndose observar que en los casos (a) y (d) la sucesión resulta ser divergente, ya que  $|\varphi'(x)| > 1$ .

En los casos (b) y (c), en los que  $|\varphi'(x)| \leq q < 1$  el método converge monótonamente en (b) y de forma oscilatoria en (c).

#### Aplicación del Método de Punto Fijo a la resolución de ecuaciones

Si se desea resolver la ecuación  $f(x) = 0$ , se escribe ésta de la forma  $x = \varphi(x)$ , donde  $\varphi(x)$  es una función contractiva, y partiendo de un determinado valor inicial  $x_0$ , se construye la sucesión  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ .

El teorema del punto fijo nos garantiza la convergencia de esta sucesión al punto fijo de la función  $\varphi(x)$ , o lo que es lo mismo, a la raíz de la ecuación  $f(x) = 0$ .

Para acotar el error de una determinada iteración utilizamos la fórmula del error “a posteriori”.

#### Ejemplo:

El cálculo de la raíz cuadrada de 3 equivale al cálculo de la raíz positiva de la ecuación  $x^2 = 3$ . Realizamos los siguientes cambios:

$$x^2 = 3 \Rightarrow x + x^2 = x + 3 \Rightarrow x(1 + x) = 3 + x \Rightarrow x = \frac{3 + x}{1 + x}$$

Es decir, hemos escrito la ecuación de la forma  $x = \varphi(x)$  con  $\varphi(x) = \frac{3 + x}{1 + x}$

Dado que sabemos que la raíz de 3 está comprendida entre 1 y 2 y que;

$$|\varphi'(x)| = \frac{2}{(1+x)^2} \leq \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{Para cualquier } x \in [1, 2]$$

$$|\varphi'(x)| = \frac{2}{(1+x)^2} \leq \frac{2}{3^2} = \frac{1}{9} < 1 \quad \text{Para cualquier } x \in [1, 2]$$

Podemos garantizar que partiendo de  $x_0 = 1$  el método convergerá a la raíz cuadrada de 3 y que el “error a posteriori” será fiable.

Así pues, partiendo de  $x_0 = 1$  y haciendo  $x_{n+1} = \frac{3+x_n}{1+x_n}$  obtenemos:

$x_1 = 2$	$x_{14} = 1,73205079844084$
$x_2 = 1,666666666666667$	$x_{15} = 1,73205081001473$
$x_3 = 1,750000000000000$	$x_{16} = 1,73205080691351$
$x_4 = 1,72727272727273$	$x_{17} = 1,73205080774448$
$x_5 = 1,733333333333333$	$x_{18} = 1,73205080752182$
$x_6 = 1,73170731707317$	$x_{19} = 1,73205080758148$
$x_7 = 1,73214285714286$	$x_{20} = 1,73205080756550$
$x_8 = 1,73202614379085$	$x_{21} = 1,73205080756978$
$x_9 = 1,73205741626794$	$x_{22} = 1,73205080756863$
$x_{10} = 1,73204903677758$	$x_{23} = 1,73205080756894$
$x_{11} = 1,73205128205128$	$x_{24} = 1,73205080756886$
$x_{12} = 1,73205068043172$	$x_{25} = 1,73205080756888$
$x_{13} = 1,73205084163518$	$x_{26} = 1,73205080756888$

El error vendrá dado por  $\varepsilon_n < \frac{|f(x_n)|}{\min_{x \in [1,2]} |f'(x)| 1+x_n}$  donde  $f(x) = x^2 - 3$ ,

por lo que  $\varepsilon_{26} < \frac{|x_{26}^2 - 3|}{2} = 4,884981308350688 * 10^{-15} < 10^{-14}$  es decir,

$$\sqrt{3} = 1,73205080756888$$

con todas sus cifras decimales exactas.

Como vemos, la convergencia ha sido muy lenta. Esto se debe a la mala elección de  $\varphi(x)$ .

### 4.2.3. Orden de Convergencia

A.  $\varphi(x) = \frac{x}{2}$  en  $[-1, 1]$  es contractiva ya que  $|\varphi'(x)| = \frac{1}{2} < 1$  para todo  $x \in [-1, 1]$ .

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = 0,5 \Rightarrow x_2 = 0,25 \Rightarrow x_3 = 0,125 \Rightarrow x_4 = 0,0625\dots$$

Observamos que la convergencia a cero es lenta. Ello es debido a que:

$$\varphi'(0) \neq 0 \Rightarrow \text{Convergencia lineal o de primer orden.}$$

B.  $\varphi(x) = \frac{x^2}{4}$  en  $[-1, 1]$  es contractiva ya que  $|\varphi'(x)| = \left|\frac{x}{2}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$  para todo  $x \in [-1, 1]$ .

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = 0,25 \Rightarrow x_2 = 0,015625 \Rightarrow x_3 = 6,105 * 10^{-5}\dots$$

La convergencia a cero es rápida debido a que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow \varphi'(0) = 0 \\ \varphi''(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi''(0) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Convergencia de Segundo Orden.}$$

C.  $\varphi(x) = \frac{x^3}{6}$  en  $[-1, 1]$  es contractiva ya que  $|\varphi'(x)| = \frac{x^2}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$  para todo  $x \in [-1, 1]$ .

$$x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = 0,166666 \Rightarrow x_2 = 0,00077 \Rightarrow x_3 = 7,6565 * 10^{-11}\dots$$

La convergencia a cero es rápida debido a que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow \varphi'(0) = 0 \\ \varphi''(x) = x \Rightarrow \varphi''(0) = 0 \\ \varphi'''(x) = 1 \Rightarrow \varphi'''(0) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Convergencia de Tercer Orden}$$

El orden de convergencia nos lo da el orden de la primera derivada de la función  $\varphi(x)$  que no se anula en su punto fijo  $\bar{x}$ .

La función  $\varphi(x) = \frac{3+x}{1+x}$  que obtuvimos para calcular  $\sqrt{3}$  verifica que  $\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow \varphi'(\sqrt{3}) = \frac{1}{(+\sqrt{3})^2} \neq 0$ , por lo que ha resultado una convergencia de primer orden.

## 4.3. Método de Newton

En análisis numérico, el método de Newton es un algoritmo eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada.

### 4.3.1. Descripción del Método de Newton

El método de Newton es un método abierto, en el sentido de que su convergencia global no está garantizada. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque o valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor supuesto cercano a la raíz. Una vez que se ha hecho esto, el método linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente.

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  función derivable definida en el intervalo real  $[a, b]$ . Empezamos con un valor inicial  $x_0$  y definimos para cada número natural  $n$ .

Siendo  $f'$  la derivada de  $f$  :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

En la figura 4.2, pueden verse las sucesivas iteraciones hasta que el método converge lo suficiente.

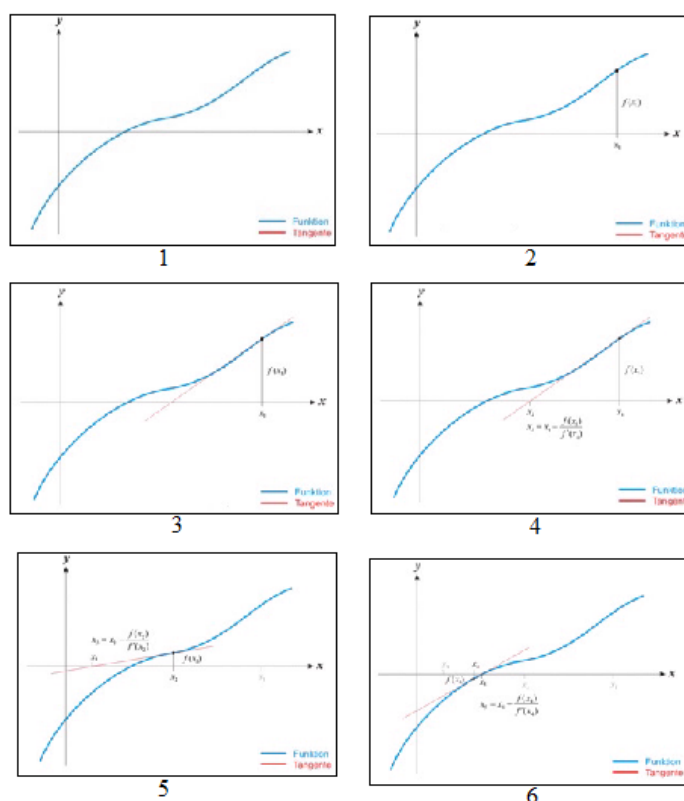


Figura 4.2: Convergencia del Método de Newton

Vemos que  $x_{n+1}$  es una mejor aproximación que  $x_n$  para la raíz  $x$  de la función  $f$ .

### 4.3.2. Obtención del Algoritmo

Tres son las formas principales por las que tradicionalmente se ha obtenido el algoritmo de Newton.

La primera de ellas es una simple interpretación geométrica. En efecto, atendiendo al desarrollo geométrico del método de la secante, podría pensarse en que si los puntos de iteración están lo suficientemente cerca (a una distancia infinitesimal), entonces la secante se sustituye por la tangente a la curva en el punto. Así pues, si por un punto de iteración trazamos la tangente a la curva, por extensión con el método de la secante, el nuevo punto de iteración se tomará como la abscisa en el origen de la tangente (punto de corte de la tangente con el

eje X). Esto es equivalente a linealizar la función, es decir,  $f$  se reemplaza por una recta tal que contiene al punto  $(x_0, f(x_0))$  y cuya pendiente coincide con la derivada de la función en el punto  $f'(x_0)$ .

La nueva aproximación a la raíz,  $x_1$ , se logra de la intersección de la función lineal con el eje X de abscisas.

Matemáticamente:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

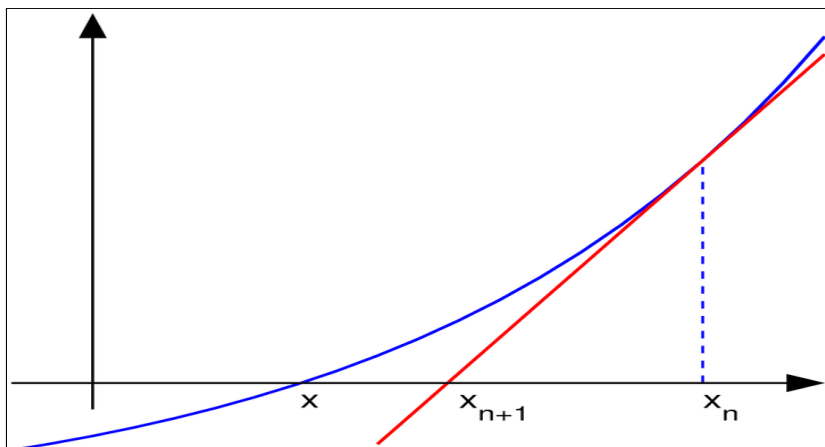


Figura 4.3: Iteración del Método de Newton

Una forma alternativa de obtener el algoritmo es desarrollando la función  $f(x)$  en serie de Taylor, para un entorno del punto  $x_n$ :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + (x - x_n)^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + \dots$$

Si se trunca el desarrollo a partir del término de grado 2, y evaluamos en  $x_{n+1}$ :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Si además se acepta que  $x_{n+1}$  tiende a la raíz, se ha de cumplir que  $f(x_{n+1}) = 0$ , luego, sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos el algoritmo.

Finalmente, hay que indicar que el método de Newton puede interpretarse como un método de iteración de punto fijo. Así, dada la ecuación  $f(x) = 0$ , se puede considerar el siguiente método de iteración de punto fijo:

$$g(x) = x + h(x) f(x)$$

Se escoge  $h(x)$  de manera que  $g'(r) = 0$  ( $r$  es la raíz buscada). Dado que  $g'(r)$  es:

$$g'(r) = 1 + h'(r) f(r) + h(r) f'(r) = 1 + h(r) f'(r)$$

Entonces:

$$h(r) = \frac{-1}{f'(r)}$$

Como  $h(x)$  no tiene que ser única, se escoge de la forma más sencilla:

$$h(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

Por tanto, imponiendo subíndices:

$$g(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Expresión que coincide con la del algoritmo de Newton.

#### Convergencia del Método

El orden de convergencia de este método es, por lo menos, cuadrático. Sin embargo, si la raíz buscada es de multiplicidad algebraica mayor a uno (i.e, una raíz doble, triple, ...), el método de Newton pierde su convergencia cuadrática y pasa a ser lineal de constante asintótica de convergencia  $1 - \frac{1}{m}$ , siendo  $m$  la multiplicidad de la raíz.

Existen numerosas formas de evitar este problema, como pudieran ser los métodos de aceleración de la convergencia tipo  $\Delta^2$  de Aitken o el método de Steffensen. Derivados de Newton destacan el método de Ralston-Rabinowitz, que restaura la convergencia cuadrática sin más que modificar el algoritmo a:

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Evidentemente, este método exige conocer de antemano la multiplicidad de la raíz, lo cual no siempre es posible. Por ello también se puede modificar el algoritmo tomando una función auxiliar  $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ , resultando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Su principal desventaja en este caso sería lo costoso que pudiera ser hallar  $g(x)$  y  $g'(x)$  si  $f(x)$  no es fácilmente derivable.

Por otro lado, la convergencia del método se demuestra cuadrática para el caso más habitual en base a tratar el método como uno de punto fijo: Si  $g'(r) = 0$  y  $g''(r) \neq 0$ , entonces la convergencia es cuadrática. Sin embargo, está sujeto a las particularidades de estos métodos.

El método de Newton es un método abierto: la convergencia no está garantizada por un teorema de convergencia global como podría estarlo en los métodos de falsa posición o de bisección. Así, es necesario partir de una aproximación inicial próxima a la raíz buscada para que el método converja y cumpla el teorema de convergencia local.

### 4.3.3. Teorema de Convergencia Local del Método de Newton

Sea  $f \in C^2([a, b])$ . Si  $p \in [a, b]$ ,  $f(p) = 0$  y  $f'(p) \neq 0$ , entonces existe un  $r > 0$  tal que si  $|x_0 - p| < r$ , entonces la sucesión  $x_n$  con  $n \in \mathbb{N}$  verifica que:  $|x_n - p| < r$  para todo  $n$  y  $x_n$  tiende a  $p$  cuando  $n$  tiende a infinito. Si además  $f \in C^3([a, b])$ , entonces la convergencia es cuadrática.

### 4.3.4. Teorema de Convergencia Global del Método de Newton

Sea  $f \in C^2[a, b]$ , verificando:

1.  $f(a) f(b) < 0$
2.  $f'(x) \neq 0$  para todo  $x \in [a, b]$
3.  $f''(x) f''(y) \geq 0$  para todo  $x, y \in [a, b]$
4.  $\max \left\{ \frac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} \right\} \leq b - a$

Entonces existe un único  $s \in [a, b]$  tal que  $f(s) = 0$ . Por lo que la sucesión converge a  $s$ .

### 4.3.5. Estimación del error

Se puede demostrar que el método de Newton tiene convergencia cuadrática: si  $\alpha$  es raíz, entonces:

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq C |x_k - \alpha|^2 \quad \text{Para una cierta constante } C.$$

Esto significa que si en algún momento el error es menor o igual a 0,1, a cada nueva iteración doblamos (aproximadamente) el número de decimales exactos. En la práctica puede servir para hacer una estimación aproximada del error.

Error relativo entre dos aproximaciones sucesivas:

$$\varepsilon = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{x_{k+1}}$$

Con lo cual se toma el error relativo como si la última aproximación fuera el valor exacto. Se detiene el proceso iterativo cuando este error relativo es aproximadamente menor que una cantidad fijada previamente.

**Ejemplo:**

Consideremos el problema de encontrar un número positivo  $x$  tal que  $\cos(x) = x^3$ . Podríamos tratar de encontrar el cero de  $f(x) = \cos(x) - x^3$ .

Sabemos que  $f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$ . Ya que  $\cos(x) \leq 1$  para todo  $x$  y  $x^3 > 1$  para  $x > 1$ , deducimos que nuestro cero está entre 0 y 1.

Comenzaremos probando con el valor inicial  $x_0 = 0,5$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,5 - \frac{\cos(0,5) - 0,3}{-\sin(0,5) - 3 * 0,5^2} = 1,112141637097 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \dots = \underline{0,909672693736} \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \dots = \underline{0,867263818209} \\ x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = \dots = \underline{0,865477135298} \\ x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = \dots = \underline{0,865474033111} \\ x_6 &= x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = \dots = \underline{0,865474033102} \end{aligned}$$

Los dígitos correctos están subrayados. En particular,  $x_6$  es correcto para el número de decimales pedidos. Podemos ver que el número de dígitos correctos después de la coma se incrementa desde 2 (para  $x_3$ ) a 5 y 10, ilustrando la convergencia cuadrática.

#### 4.4. Métodos de tipo Secante

En análisis numérico el método de la secante es un método para encontrar los ceros de una función de forma iterativa. Es una variación del método de Newton donde en vez de calcular la derivada de la función en el punto de estudio, teniendo en mente la definición de derivada, se aproxima la pendiente a la recta que une la función evaluada en el punto de estudio y en el punto de la iteración anterior. Este método es de especial interés cuando el coste computacional de derivar la función de estudio y evaluarla es demasiado elevado, por lo que el método de Newton no resulta atractivo. El orden de convergencia de este método, en un punto cercano a la solución, es  $\varphi$  donde:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

es el número áureo, por lo que se trata de una convergencia superlineal inferior a la del método de Newton. En caso de que la aproximación inicial sea demasiado lejana o la raíz no sea simple, este método no asegura la convergencia y tiene un comportamiento similar al de Newton.

El método de la secante es un algoritmo de la raíz de investigación que utiliza una serie de raíces de las líneas secantes para aproximar mejor la raíz de una función  $f$ . El método de la secante se puede considerar como una aproximación en diferencias finitas del método de Newton. Sin embargo, este método fue desarrollado independientemente de este último.

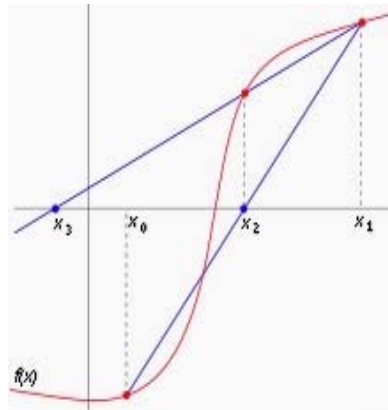


Figura 4.4: Primeras Dos Iteraciones del Método de la Secante

#### 4.4.1. Un método de tipo Secante

El método de la secante para la solución numérica de una ecuación escalar  $f(x) = 0$ , puede escribirse como:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad f(x_n) \neq f(x_{n-1}) \quad n \geq 1.$$

Este método también puede ser considerado como una aproximación al método clásico de Newton, donde  $f'(x_n)$  es reemplazado por  $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

Nuestra idea es considerar una mejor aproximación a  $f'(x_n)$ . Proponemos la siguiente modificación:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1} - \alpha_n(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1} + \alpha_n(x_n - x_{n-1}))}$$

Donde  $f(x_n) \neq f(x_{n-1})$ ,  $n \geq 1$  y  $\alpha_n$  es un parámetro escalar en  $[0; 1)$ . Estos parámetros serán un control de las buenas aproximaciones a la derivada.

Teóricamente, si  $\alpha_n \rightarrow 1$  entonces:

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1} + \alpha_n(x_n - x_{n-1}))}{x_n - x_{n-1} - \alpha_n(x_n - x_{n-1})} \rightarrow f'(x_n)$$

Obviamente, el método introducido no necesita evaluar ninguna derivada como el método de la secante. Solamente son necesarias dos evaluaciones de la función en cada iteración. En los experimentos numéricos veremos su eficiencia.

Análisis del orden de Convergencia

De la definición del método introducido:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1} - \alpha_n(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1} + \alpha_n(x_n - x_{n-1}))}$$

$$f(x_n) + (x_{n+1} + x_n) [\tilde{x}_{n-1}, x_n; f] = 0 \text{ Donde } \tilde{x}_{n-1} = x_{n-1} + \alpha_n(x_n - x_{n-1})$$

y  $[\tilde{x}_{n-1}, x_n; f] = \frac{f(x_n) - f(\tilde{x}_{n-1})}{x_n - \tilde{x}_{n-1}}$

Por otra parte;

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) [\tilde{x}_{n-1}, x_n; f] + \frac{1}{2}(x - \tilde{x}_{n-1})(x - x_n) f''(\xi)$$

Donde  $\xi \in (\min(\tilde{x}_{n-1}, x_n), \max(\tilde{x}_{n-1}, x_n))$

Así, tomando  $x = x^*$ ; la solución de la ecuación  $f(x) = 0$  en:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) [\tilde{x}_{n-1}, x_n; f] + \frac{1}{2}(x - \tilde{x}_{n-1})(x - x_n) f''(\xi)$$

Y restando:

$$f(x_n) + (x_{n+1} + x_n) [\tilde{x}_{n-1}, x_n; f] = 0$$

Obtenemos:

$$(x^* - x_{n-1}) [\tilde{x}_{n-1}, x_n; f] + \frac{1}{2}(x^* - x_{n-1})(x^* - x_n) f''(\xi) = 0$$

Si denotamos:

$$E_n = x^* - x_n$$

Tendremos:

$$x^* - x_{n-1} = (1 - \alpha_n)E_{n-1} + \alpha_n E_n$$

Concluimos de:

$$(x^* - x_{n-1}) [\tilde{x}_{n-1}, x_n; f] + \frac{1}{2}(x^* - x_{n-1})(x^* - x_n) f''(\xi) = 0$$

Que:

$$E_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\hat{\xi})} E_n ((1 - \alpha_n) E_{n-1} + \alpha_n E_n)$$

Donde  $f'(\hat{\xi}) = [\tilde{x}_{n-1}, x_n; f]$        $\hat{\xi} \in (\min(\tilde{x}_{n-1}, x_n), \max(\tilde{x}_{n-1}, x_n))$

De esta relación se sigue que el método modificado de la secante converge, para aproximaciones iniciales suficientemente cercanas a la solución, si  $f(x)$  tiene derivada segunda continua y si  $f'(x^*) \neq 0$ .

Por otra parte, en el caso de  $\alpha_n = 0$  para todo  $n$  (método de la secante) ecuación

$$E_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\hat{\xi})} E_n ((1 - \alpha_n) E_{n-1} + \alpha_n E_n) \quad \text{será} \quad E_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\hat{\xi})} E_n E_{n-1}$$

Esta relación se aproxima a la ecuación  $E_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\hat{\xi})} E_n^2$  si  $x_{n-1} \rightarrow x_n$  únicamente.

En la práctica, esto no sucede usualmente en las primeras iteraciones. No obstante, considerando  $\alpha_n$  cercanos a uno, la relación:

$$E_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\hat{\xi})} E_n ((1 - \alpha_n) E_{n-1} + \alpha_n E_n)$$

sí se aproximará a:

$$E_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\hat{\xi})} E_n^2$$

Número de iteraciones hasta error  $\leq 10^{-8}$   $f_1(x) = \sin(2\pi x) = 0$   $\alpha_n = \alpha_{n-1}$

$(x_0, x_1)$	Newton	Secante	M.Secante $\alpha_n = 0,9$
(0,1 , 0,05)	3	4	3
(0,2 , 0,1)	3	4	3
(0,24 , 0,2)	5	<i>No Converge</i>	4
(0,3 , 0,24)	5	5	4
(0,45 , 0,4)	3	4	3

Para estudiar la competitividad del método modificado de la secante, lo comparamos con los métodos clásicos de Newton y de la Secante. Los hemos testado en varias ecuaciones no lineales y en todos los casos, hemos obtenido conclusiones similares.

La mejor propiedad de nuestro método es que no usa derivadas, pero tiene las mismas buenas propiedades de convergencia numérica que Newton. La convergencia de la secante es superlineal.

Por otra parte, el método modificado de la secante parece ser el mejor adaptado cerca de los ceros de  $f'(x)$ .

En la tabla anterior consideramos la ecuación  $\sin(2\pi x) = 0$  en  $[0, 1]$  y podemos comprobar que nuestro método obtiene las mismas buenas propiedades de convergencia que el método de Newton. Además, es el más estable cerca de 0,25 donde  $f'$  es igual a cero.

La principal ventaja del algoritmo es que no necesita evaluar derivadas, pero mantiene las buenas propiedades de convergencia de los métodos clásicos iterativos de segundo orden.

#### 4.4.2. Un Método de tipo Secante de orden dos

Consideraremos la siguiente generalización del método de la Secante:

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n^{-1} f(x_n)$$

Iteraciones	Secante	M.Secante $\alpha_n = 0,9$	M.Secante $\alpha_n = 1 - 10^{-10}$
2	$-5,08 \cdot 10^{-5}$	$-2,78 \cdot 10^{-5}$	$-2,52 \cdot 10^{-5}$
3	$-7,66 \cdot 10^{-5}$	$-1,35 \cdot 10^{-5}$	$6,38 \cdot 10^{-10}$
4	$3,89 \cdot 10^{-9}$	$2,01 \cdot 10^{-10}$	$-4,29 \cdot 10^{-19}$
5	$1,17 \cdot 10^{-8}$	$-2,01 \cdot 10^{-10}$	0
6	$-4,54 \cdot 10^{-17}$	$3,24 \cdot 10^{-20}$	
7	$-6,82 \cdot 10^{-17}$	$-3,24 \cdot 10^{-20}$	
8	$2,46 \cdot 10^{-32}$	0	
9	$7,39 \cdot 10^{-32}$		
10	0		



$$\text{En } x_0 = 0,1, \quad x_1 = 0,05$$

Donde:

$$\Gamma_n = [y_n, x_n; f] = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$y_n = x_n + \alpha_n(x_{n-1} - x_n)$$

$$\alpha_n \leq \left| O(\varepsilon_n^{\frac{3}{2}}) \right|$$

Usando el desarrollo de series de Taylor es fácil comprobar que:

$$\Gamma_n = f'(x_n) + O(\alpha |x_n - y_n|)$$

Por tanto:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\Gamma_n}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + O(\alpha |x_n - y_n|)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + O(\alpha |x_n - y_n|)$$

Sea  $\varepsilon_{n+1} = x^* - x_n$  donde  $f(x^*) = 0$ :

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} O(\alpha |x_n - y_n|)$$

$$\varepsilon_{n+1} = O(\varepsilon_n^2) + O(\alpha |x_n - y_n|)$$

$$\varepsilon_{n+1} = O(\varepsilon_n^2)$$

Así la modificación (si converge), es un método de segundo orden.

Nota: Necesitamos dos evaluaciones de la función pero el mismo número de inversiones de la matriz. No obstante, mejoramos la exactitud de  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  hasta 2 y las iteraciones serán similares a las del método de Newton. Así, el método será competitivo.

Nota: En la práctica, no tenemos información sobre la solución. Una posible estrategia para obtener  $\{\alpha_n\}$  puede ser:

$$\alpha_0 = O(10^{-m}) \leq O(\varepsilon_n^2)$$

$$\alpha_0 = O(\alpha_0^{2^n})$$

Donde  $m$  es un entero tal que:

$$O(10^{-m}) \leq |f(x^*) - f(x_0)|$$

$$O(10^{-m}) = |f(x_0)| \leq O(|x^* - x_0|)$$

### 4.4.3. Experimentos Numéricos

Para ver el comportamiento del método iterativo introducido, han sido realizados diferentes experimentos con algunas ecuaciones no lineales. A continuación se presentará una comparación con los métodos clásicos de Newton y de la secante.

Dada  $\alpha_0$  usamos el siguiente algoritmo para estudiar los diferentes  $\alpha_n$  :

$$\alpha_{n+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_n^2 & \text{si } \alpha_n^2 \|x_n - x_{n+1}\| \geq tol_c \\ tol_c / \|x_n - x_{n+1}\| & \text{en otro caso} \end{array} \right\}$$

Donde  $tol_c$  está relacionada con la precisión del ordenador.

En nuestros experimentos, puesto que estamos considerando precisión simple, consideraremos  $tol_c = 10^{-16}$ .

Iteración	Newton	Secante	Secante $\lambda = 0,99$	M. Secante
1	$4,50 \cdot 10^{-1}$	$4,00 \cdot 10^{-1}$	$2,52 \cdot 10^{-1}$	$2,68 \cdot 10^{-1}$
2	$6,98 \cdot 10^{-2}$	$1,12 \cdot 10^{-1}$	$2,60 \cdot 10^{-2}$	$2,91 \cdot 10^{-2}$
3	$2,27 \cdot 10^{-3}$	$1,87 \cdot 10^{-2}$	$3,58 \cdot 10^{-4}$	$4,11 \cdot 10^{-4}$
4	$2,59 \cdot 10^{-6}$	$1,03 \cdot 10^{-3}$	$1,10 \cdot 10^{-7}$	$8,46 \cdot 10^{-8}$
5	$3,35 \cdot 10^{-12}$	$9,52 \cdot 10^{-6}$	$2,03 \cdot 10^{-13}$	$5,33 \cdot 10^{-15}$
6	0	$4,90 \cdot 10^{-9}$	0	0
7		$2,33 \cdot 10^{-14}$		
8		0		

Error,  $\alpha_0 = 10^{-1}$ ,  $x_{-1} = 3$ ,  $x_0 = 2$

Para estudiar numéricamente el orden, en la tabla anterior consideramos la ecuación en  $d - 1$ .

En [17] se estudia la siguiente modificación del método de la secante;

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n^{-1} f(x_n)$$

Donde:

$$\Gamma_n = [y_n, x_n; f] = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$y_n = x_{n-1} + \lambda(x_n - x_{n-1})$$

Cuando  $\lambda$  esté cerca de uno, la convergencia teórica será mejor.

Numéricamente observamos que nuestra modificación (M. Secante), la  $\lambda$  modificación (Secante  $\lambda = 0,99$ ) y los métodos de Newton, se comportan como esquemas de segundo orden (ver tabla Error,  $\alpha_0 = 10^{-1}$ ,  $x_{-1} = 3$ ,  $x_0 = 2$ )

Iteración	Secante	Secante $\lambda = 1 - 10^{-9}$	Secante $\lambda = 0,99$	M. Secante
2	$1,33 \cdot 10^{-1}$	$9,20 \cdot 10^{-2}$	$8,99 \cdot 10^{-2}$	$1,04 \cdot 10^{-1}$
4	$5,39 \cdot 10^{-3}$	$1,10 \cdot 10^{-4}$	$4,60 \cdot 10^{-5}$	$1,96 \cdot 10^{-4}$
6	$1,54 \cdot 10^{-4}$	$9,85 \cdot 10^{-17}$	$1,30 \cdot 10^{-7}$	$4,08 \cdot 10^{-15}$
8	$4,24 \cdot 10^{-6}$	0	$3,22 \cdot 10^{-8}$	0
10	$1,18 \cdot 10^{-7}$		$7,99 \cdot 10^{-9}$	
12	$3,27 \cdot 10^{-9}$		$1,89 \cdot 10^{-9}$	
14	$9,07 \cdot 10^{-11}$		$4,92 \cdot 10^{-10}$	
16	$2,52 \cdot 10^{-12}$		$1,22 \cdot 10^{-10}$	
18	$7,01 \cdot 10^{-14}$		$3,02 \cdot 10^{-11}$	
20	$1,95 \cdot 10^{-15}$		$7,50 \cdot 10^{-12}$	

Error,  $\alpha_0 = 10^{-1}$ ,  $x_{-1} = 0,4$ ,  $x_0 = 0,3$

No obstante, con los  $\lambda$ -métodos podemos tener algunos problemas de convergencia. Por ejemplo, considerando la ecuación  $f(x) = 0$  donde:

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1) & x < 0 \\ -2x(x-1) & x \geq 0 \end{cases}$$

Nuestro esquema está adaptado para obtener segundo orden sin conocimiento previo de la ecuación. Los  $\lambda$ -métodos usan un  $\lambda_0$  fijo en todos los pasos y no podemos controlar el orden. En la tabla anterior podemos ver la ventaja de usar nuestra modificación. Para obtener una buena aproximación del método de la secante necesitamos más de 21 evaluaciones de la función y 20 inversiones. Por otra parte, el método de la secante modificada necesita tan sólo 16 evaluaciones de la función y 8 inversiones para llegar a la solución exacta. Para obtener resultados similares con los  $\lambda$ -métodos deberíamos considerar  $\lambda = 1 - 10^{-9}$ . Con  $\lambda$  pequeño tenemos convergencia como el método de la secante solamente.

En nuestro tercer ejemplo, estudiamos el sistema de ecuaciones no lineales;

$$3x^2 + y^2 - 1 + |x - 1| = 0$$

$$x^4 + xy^3 - 1 + |y| = 0$$

Consideramos la solución aproximada

$$(x^*, y^*) = (0,8946553733346867, 0,3278265117462974)$$

En [17] podemos ver que los  $\lambda$ -métodos obtienen mejores resultados que los métodos propuestos en [16] y [18]. En este ejemplo, los resultados del método de la secante modificada son similares a los de los  $\lambda$ -métodos, ver tabla que se muestra a continuación:

Iteración	Secante	Secante $\lambda = 1 - 10^{-9}$	Secante $\lambda = 0,99$	M. Secante
1	$3,15 \cdot 10^{-1}$	$3,58 \cdot 10^{-2}$	$2,81 \cdot 10^{-2}$	$4,19 \cdot 10^{-2}$
2	$2,71 \cdot 10^{-2}$	$1,27 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-3}$	$2,51 \cdot 10^{-3}$
3	$5,14 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-5}$	$3,78 \cdot 10^{-6}$	$1,11 \cdot 10^{-5}$
4	$2,84 \cdot 10^{-4}$	$4,31 \cdot 10^{-12}$	$1,18 \cdot 10^{-10}$	$2,53 \cdot 10^{-9}$
5	$3,05 \cdot 10^{-6}$	$8,27 \cdot 10^{-14}$	$5,55 \cdot 10^{-17}$	$1,11 \cdot 10^{-16}$

$$\|Error\|_{\infty}, (x_{-1}, y_{-1}) = (5, 5), (x_0, y_0) = (1, 0)$$

Ahora consideramos la ecuación  $f(x, y) = (0, 0)$ , en la que:

$$f(x, y) = \begin{cases} (3x^2 + y^2, x^4 + xy^3) & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0,001(xy^3 + x), y^4 + yx^4 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

En estos ejemplos los  $\lambda$ -métodos no son una buena alternativa al método clásico de la secante, puesto que estos divergen después de algunas iteraciones. En cambio, nuestra modificación es bastante mejor que el método de la secante (ver la tabla siguiente).

Iteración	Secante	Secante $\lambda = 1 - 10^{-9}$	Secante $\lambda = 0,99$	M. Secante
1	$6,02 \cdot 10^{-2}$	$3,03 \cdot 10^{-1}$	$3,21 \cdot 10^{-1}$	1,11
2	$3,37 \cdot 10^{-2}$	$8,97 \cdot 10^{-2}$	$9,68 \cdot 10^{-2}$	$3,52 \cdot 10^{-1}$
3	$2,08 \cdot 10^{-2}$	<i>NaN</i>	$2,87 \cdot 10^{-2}$	$1,11 \cdot 10^{-1}$
7	$2,07 \cdot 10^{-2}$		$1,62 \cdot 10^{-3}$	$6,06 \cdot 10^{-4}$
8	$1,67 \cdot 10^{-2}$		$1,53 \cdot 10^{-3}$	$2,11 \cdot 10^{-4}$
9	$2,08 \cdot 10^{-2}$		<i>NaN</i>	$6,64 \cdot 10^{-5}$
10	$1,69 \cdot 10^{-2}$			$1,95 \cdot 10^{-5}$
20	$1,79 \cdot 10^{-2}$			$1,93 \cdot 10^{-10}$
30	$1,86 \cdot 10^{-2}$			$1,94 \cdot 10^{-15}$
40	$1,91 \cdot 10^{-2}$			$1,95 \cdot 10^{-20}$
100	$1,91 \cdot 10^{-2}$			$2,02 \cdot 10^{-50}$

$$\|f(x_n, y_n)\|_{\infty}, (x_{-1}, y_{-1}) = (-1, -1), (x_0, y_0) = (1, 1)$$

Finalmente, sea  $X = C[0, 1]$  con la norma  $\|x\| = \max_{s \in [0, 1]} |x(s)|$  y la ecuación  $F(x) = 0$  donde el operador  $F : X \rightarrow X$  viene dado por:

$$F(x)(s) = x(s) + \frac{1}{2} \int_0^1 s \cos(x(t)) dt, \quad x \in C[0, 1], \quad s \in [0, 1]$$

En la siguiente tabla podemos ver las buenas propiedades de convergencia:

Newton	M. Secante
5	5

Número de iteraciones hasta la solución exacta;  $x_0 = x_0(s) = s$   $\alpha_0 = 10^{-1}$

## 4.5. Método de tipo Steffensen

### 4.5.1. Definición del Método

El método de Steffensen (por Johan Frederik Steffensen) es un algoritmo para obtener los ceros de una función. Se puede considerar como una combinación del método de punto fijo y del método de Aitken. Como el método de Aitken esencialmente acelera la convergencia de otro método, se puede definir este método como el método de punto fijo acelerado. La forma más sencilla de la fórmula para el método de Steffensen es la que se utiliza para calcular los ceros o las raíces de una función  $f$ , es decir, para calcular el valor de entrada  $x^*$  que satisface  $f(x^*) = 0$ . Cerca de la solución  $x^*$ , se supone que la función  $f$  satisface aproximadamente  $-1 < f(x^*) < 0$  lo que la hace adecuada como una función de corrección para calcular su propia solución aunque no es necesario que sea eficiente. Para algunas funciones, el método de Steffensen puede funcionar incluso si no se cumple esta condición, pero en tal caso, el valor inicial  $x_0$  debe ser cercano a la solución real  $x^*$ , y la convergencia con la solución puede ser lenta.

Dado un valor inicial adecuado  $x_0$ , se puede generar una secuencia de valores  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ . Cuando funciona, cada valor de la secuencia es más cercano a la solución  $x^*$  que el valor anterior. El valor  $x_n$  de este paso genera el valor  $x_{n+1}$  para el paso siguiente mediante esta fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

Para  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  donde la función del gradiente  $g(x_n)$  es un compuesto de la función original  $f$  dada por la siguiente fórmula:

$$g(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

La función  $g$  es el gradiente medio de la función  $f$  entre el último punto de la secuencia  $(x, y) = (x_n, f(x_n))$  y el punto auxiliar  $(x, y) = (x_n + h, f(x_n + h))$  con el paso  $h = f(x_n)$ . Solamente con el propósito de encontrar este punto auxiliar el valor de la función  $f$  debe ser una corrección adecuada para acercarse a su propia solución. Para todas las otras partes del cálculo, el método de Steffensen solo exige que la función  $f$  sea continua, y que tenga una solución cercana. Existen algunas modificaciones modestas del paso  $h$  en el cálculo del gradiente  $g$  para alojar las funciones  $f$  que no cumplen este requisito.

La principal ventaja del método de Steffensen es que calcula las raíces de una ecuación  $f$  igual de rápido que el método Newton pero la fórmula no exige una función separada para la derivada, de modo que se puede programar para cualquier función genérica. En este caso, “rápido” significa que el número de dígitos correctos en la respuesta se dobla con cada paso. El coste de la convergencia rápida es la evaluación de la doble función: se deben calcular tanto  $f(x_n)$  como  $f(x_n + f(x_n))$  lo que puede llevar tiempo si  $f$  es una función complicada. Como comparación, el método secante solo necesita una evaluación de función por paso, lo que permite que, para dos evaluaciones de funciones el método secante pueda llevar a cabo dos pasos y dos pasos del método secante aumenta el número de dígitos correctos mediante un factor 2.6 mientras un paso del método de Steffensen (Newton) lo aumenta con un factor 2.

Parecidos al método Newton y a la mayoría de métodos cuadráticos convergentes, la debilidad crucial del método es la elección del valor inicial  $x_0$ . Si el valor de  $x_0$  no está lo “suficientemente cerca” de la solución real, el método puede fallar y la secuencia de valores  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$  puede variar entre dos extremos o divergir hasta el infinito (posiblemente las dos cosas).

### 4.5.2. Derivación utilizando el Método Delta Cuadrado de Aitken

La versión del método de Steffensen implementado en código MATLAB se puede calcular utilizando el proceso delta cuadrado de Aitken para la aceleración de la convergencia de una secuencia. Para comparar las siguientes fórmulas con las fórmulas del punto anterior, tener en cuenta que  $x_n = p - p_n$ . Este método asume el comienzo con una secuencia linealmente convergente y aumenta la tasa de convergencia de esa secuencia. Si los signos de  $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}$  están de acuerdo y  $p_n$  está lo suficientemente cerca al límite deseado de la secuencia  $p$ , podemos considerar lo siguiente:

$$\frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} \approx \frac{p_{n+2} - p}{p_{n+1} - p}$$

Entonces:

$$(p_{n+1} - p)^2 \approx (p_{n+2} - p)(p_n - p)$$

De modo que:

$$p_{n+1}^2 - 2p_{n+1} * p + p^2 \approx p_{n+2} * p_n - (p_n + p_{n+2})p + p^2$$

Y por lo tanto:

$$(p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n)p \approx p_{n+2} * p_n - p_{n+1}^2$$

La solución del límite deseado de la secuencia  $p$  es:



$$\begin{aligned}
 p &\approx \frac{p_{n+2} * p_n - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \Rightarrow \\
 p &= \frac{p_n^2 + p_n p_{n+2} + 2p_n p_{n+1} - 2p_n p_{n+1} - p_n^2 - p_{n+1}^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \Rightarrow \\
 p &= \frac{(p_n^2 + p_n p_{n+2} - 2p_n p_{n+1}) - (p_n^2 - 2p_n p_{n+1} + p_{n+1}^2)}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n} \Rightarrow \\
 p &= p_n - \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}
 \end{aligned}$$

Lo que resulta en la secuencia convergente más rápidamente:

$$p \approx p_{n+3} = p_n - \frac{(p_{n+2} * p_n - p_{n+1})^2}{p_{n+2} - 2p_{n+1} + p_n}$$



## Capítulo 5

# IMPLEMENTACIÓN

### 5.1. Matlab

A continuación se mostrarán los programas que hemos realizado para resolver mediante métodos numéricos la ecuación de Karman-Prandlt para tuberías lisas.

Para tuberías rugosas no es necesario programar ningún tipo de método, ya que la obtención del coeficiente de fricción es directa, al ser  $D$  y  $k$  datos invariantes del problema.

-Para tuberías lisas resolveremos:  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (\operatorname{Re} \sqrt{f}) - 0,8$

-Para tuberías rugosas resolveremos:  $\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{D}{2k} \right) + 1,74$

Comenzaremos con la ecuación para tuberías lisas con  $\operatorname{Re} > 10^5$ .

**Realizamos la programación para Punto Fijo en tuberías lisas:**

Introducimos en Matlab lo siguiente:

Vamos a hacer un programa para que nos resuelva una ecuación no lineal mediante punto fijo,  $F(x)=x$ .

La ecuación que queremos resolver es:

$$f=1/\sqrt{2 \log_{10}(\text{Re}(\sqrt{f}))-0.8)}$$

Ecuación de Karman-Prandtl para tuberías lisas con número de Reynolds  $\text{Re}>10^5$ :

```
function [xx,j]=puntofijo(Re,n,tol)
```

Datos de Entrada:

Re => Número de Reynolds

n => Número de Iteraciones

tol => Tolerancia = $10^{-16}$

Datos de salida:

xx=> Solución con el método de Newton.

j=> Número de iteraciones con el método de Newton.

Dato inicial:

Utilizamos para tuberías lisas la aproximación de Blasius  $f=0.316/\text{Re}^{1/4}$ :

$$x(1)=0.316/(\text{Re}^{(1/4)});$$

Proceso iterativo:

```
for j=1:n
```

Introducimos la fórmula:

$$x(j+1)=(2*\log_{10}(\text{Re}*\sqrt{x(j)})-0.8)^{-2};$$

Criterio de parada:

```
if (abs(x(j+1)-x(j))<tol)
```

```
xx=x;
```

Número de iteraciones utilizadas para llegar a la tolerancia:

```
j=j-1;
```

```
break;
```

```
end
```

```
end
```

Renombramos para que nos de el último valor calculado y no todo el vector:

```
xx=x(j+1);
```

```
end
```

**Realizamos la programación para Secante en tuberías lisas:**

Introducimos en Matlab lo siguiente:

Vamos a hacer un programa para que nos resuelva una ecuación no lineal  $F(x)=0$ , mediante el método de la Secante.

La ecuación que queremos resolver es:

$$2 \log_{10}(\text{Re}(\sqrt{f})) - 0.8 - 1/\sqrt{f} = 0$$

Ecuación de Karman-Prandtl para tuberías lisas con número de Reynolds  $\text{Re} > 10^5$ :

```
function [xx,j]=secante(Re,n,tol)
```

Datos de Entrada:

Re => Número de Reynolds

n => Número de Iteraciones

tol => Tolerancia =  $10^{-16}$

Datos de salida:

xx=> Solución con el método de Newton.

j=> Número de iteraciones con el método de Newton.

Dato inicial:

Para el  $x_0$ , utilizamos para tuberías lisas la aproximación de Blasius:

$$x = 0.316 / (\text{Re}^{1/4});$$

Como la Secante necesita otro valor para arrancar, tomamos el valor que cogió la proyectista Peña Oquendo en su PFC: (ver bibliografía)

$$y = 0.0314;$$

Proceso iterativo:

for j=1:n

Introducimos el método para  $x(n-1)$ :

$$f = -x + (2 * \log_{10}(\text{Re} * \sqrt{x}) - 0.8)^{-2};$$

Introducimos el método para  $x(n)$ :

$$g = -y + (2 * \log_{10}(\text{Re} * \sqrt{y}) - 0.8)^{-2};$$

Hacemos el cociente del método:

$$d = (g - f) / (y - x);$$

Multiplicamos por la función en  $x(n)$ :

$$co = g / d;$$

Nos guardamos el valor de  $x(n)$ , ya que para la siguiente iteración será el  $x(n-1)$ :

$$xy = y;$$

Hacemos el criterio de parada:

$$\text{if}(\text{abs}(co) < \text{tol})$$

$$y = y;$$

Número de iteraciones utilizadas:

```
j=j-1;
```

```
break;
```

```
else
```

Calculamos la aproximación:

```
y=y-co;
```

Recuperamos el valor para  $x(n-1)$ :

```
x=xy;
```

```
end
```

```
end
```

Renombramos el valor de la aproximación:

```
xx=y;
```

```
end
```

**Realizamos la programación para Newton en tuberías lisas:**

Introducimos en Matlab lo siguiente:

Vamos a hacer un programa para que nos resuelva una ecuación no lineal  $F(x)=0$ , mediante el método de Newton.

La ecuación que queremos resolver es:

$$2 \log_{10}(\text{Re}(\sqrt{x})) - 0.8 - 1/\sqrt{x} = 0$$

Ecuación de Karman-Prandtl para tuberías lisas con número de Reynolds  $\text{Re} > 10^5$ :

```
function [x,j]=newton(Re,n,tol)
```

Datos de Entrada:

Re => Número de Reynolds

n => Número de Iteraciones

tol => Tolerancia =  $10^{-16}$

Datos de salida:

x=> Solución con el método de Newton.

j=> Número de iteraciones con el método de Newton.

Definimos las constantes de la fórmula:

```
c1=log10(exp(1));
```

Utilizamos para tuberías lisas la aproximación de Blasius  $f=0.316/\text{Re}^{1/4}$ :

```
x=0.316/(Re^(1/4));
```

```
for j=1:n
```

Definimos parte de la fórmula:

```
c2=(Re*sqrt(x));
```

c3 es la derivada de c2

```
c3=(Re/2)*sqrt(x);
```

Introducimos la función:

```
f=-x+(2*log10(c2)-0.8)^(-2);
```

Introducimos la derivada de la función:

```
d=-1-2*((2*log10(c2)-0.8)^(-3))*(c1/c2)*(c3);
```

Hacemos parte de la fórmula, la utilizamos como criterio de parada:

```
co=f/d;
```

Criterio de parada:

```
if (abs(co)<tol)
```

```
x=x;
```

Iteraciones utilizadas:

```
j=j-1;
```

```
break;  
else  
Introducimos el método:  
x=x-co;  
end  
end
```



**Realizamos la programación para Steffensen en tuberías lisas:**

Introducimos en Matlab lo siguiente:

Vamos a hacer un programa para que nos resuelva una ecuación no lineal  $F(x)=0$ , mediante el método de Steffensen.

La ecuación que queremos resolver es:

$$2 \log_{10}(\text{Re}(\sqrt{f})) - 0.8 - 1/\sqrt{f} = 0$$

Ecuación de Karman-Prandtl para lisas con número de Reynolds  $\text{Re} > 10^5$ :

```
function [x,j]=steffensen(Re,n,tol)
```

Datos de Entrada:

Re => Número de Reynolds

n => Número de Iteraciones

tol => Tolerancia =  $10^{-16}$

Datos de salida:

x=> Solución con el método de Newton.

j=> Numero de iteraciones con el método de Newton.

Para el  $x_0$ , utilizamos para tuberías lisas la aproximación de Blasius:

$$x = 0.316 / (\text{Re}^{1/4});$$

```
for j=1:n
```

```
  Escribimos la ecuación para x:
```

$$f = -x + (2 * \log_{10}(\text{Re} * \sqrt{x}) - 0.8)^{-2};$$

```
  Escribimos la ecuación para x+f:
```

$$ff = -(x+f) + (2 * \log_{10}(\text{Re} * \sqrt{x+f}) - 0.8)^{-2};$$

```
  Calculamos el equivalente a la derivada en Newton:
```

$$d = (ff - f) / f;$$

```
  Calculamos el cociente del método:
```

$$co = f / d;$$

```
  Criterio de parada:
```

```
  if(abs(co)<tol)
```

```
    x=x;
```

```
    j=j-1;
```

```
    break;
```

```
  else
```

```
    Calculamos la aproximación:
```

$$x = x - co;$$

```
  end
```

```
end
```

**Realizamos la programación para Secante Modificada en tuberías lisas:**

Introducimos en Matlab lo siguiente:

Vamos a hacer un programa para que nos resuelva una ecuación no lineal  $F(x)=0$ , mediante el método de la Secante modificada.

La ecuación que queremos resolver es:

$$2 \log_{10}(\text{Re}(\sqrt{f})) - 0.8 - 1/\sqrt{f} = 0$$

Ecuación de Karman-Prandtl para tuberías lisas con número de Reynolds  $\text{Re} > 10^5$ :

```
function [xx,j]=secantem(Re,n,tol,alpha)
```

Datos de Entrada:

Re => Número de Reynolds

n => Número de Iteraciones

tol => Tolerancia =  $10^{-16}$

alpha => Coeficiente de corrección del método de la Secante modificada.

Para el  $x_0$ , utilizamos para tuberías lisas la aproximación de Blasius

$$x = 0.316 / (\text{Re}^{1/4});$$

Como la Secante necesita otro valor para arrancar, tomamos el valor que cogió la proyectista Peña Oquendo en su PFC: (ver bibliografía)

$$y = 0.0314;$$

Inicializamos las variables:

$$xy = x;$$

Proceso iterativo:

```
for j=1:n
```

Calculamos partes del método:

Parámetros de ayuda:

$$bb = \alpha * (y - xy);$$

$$cc = xy + bb;$$

Escribimos la ecuación evaluada en  $x(n+1)$ :

$$f = -y + (2 * \log_{10}(\text{Re} * \sqrt{y}) - 0.8)^{-2};$$

Escribimos la ecuación evaluada en  $x(n)$ :

$$g = -cc + (2 * \log_{10}(\text{Re} * \sqrt{cc}) - 0.8)^{-2};$$

Calculamos el método:

$$d = (f - g) / (y - cc);$$

$$co = f / d;$$

Nos guardamos el valor de  $x(n+1)$ :

$$xxy = y;$$

```
Criterio de parada:  
if(abs(co)<tol)  
y=y;  
j=j-1;  
break;  
else  
Calculamos la aproximacion:  
y=y-co;  
Recuperamos el valor para x(n):  
xy=xy;  
end  
  
xx=y;  
end
```

Para realizar el estudio con los distintos métodos numéricos hemos elegido el problema siguiente:

Obtener el valor del coeficiente de fricción  $f$  para una tubería lisa de diámetro  $D = 200mm$  por la que circula agua a un Número de Reynolds  $Re = 5 * 10^6$ .

Introduciendo estos datos en Matlab obtenemos:

Método	Factor de fricción	Iteraciones
Punto fijo	0.008982266220231	13
Newton	0.008982266220231	13
Steffensen	0.008982266220231	3
Secante	0.008982266220231	5
Secante Modificada $\alpha = 0,99$	0.008982266220231	4
Secante Modificada $\alpha = 0,8$	0.008982266220231	5
Secante Modificada $\alpha = 0,7$	0.008982266220231	5
Secante Modificada $\alpha = 0,6$	0.008982266220231	5
Secante Modificada $\alpha = 0,5$	0.008982266220231	5
Secante Modificada $\alpha = 0,4$	0.008982266220231	5
Secante Modificada $\alpha = 0,3$	0.008982266220231	5
Secante Modificada $\alpha = 0,2$	0.008982266220231	5
Secante Modificada $\alpha = 0,1$	0.008982266220231	4
Secante Modificada $\alpha = 0$	0.008982266220231	5

Para poder evaluar mejor los métodos numéricos que se han utilizado, vamos a variar el número de Reynolds del problema para el rango de aplicación de la ecuación de Karman Prandtl. Para el método de la Secante Modificada, tomamos un  $\alpha$  cercano a 1 ( $\alpha = 0,99$ ) y una tolerancia  $Tol = 10^{-16}$ .

Los datos obtenidos son los siguientes:

Para tuberías rugosas, el cálculo del coeficiente de fricción es directo. A continuación plantearemos un problema para tratar de resolverlo mediante la ecuación de Karman-Prandtl para tubos rugosos.

$$\text{Nuestra ecuación es: } \frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{D}{2k} \right) + 1,74$$

$$\text{La condición para poder aplicar dicha ecuación es: } \text{Re} > \frac{3500}{\frac{k}{D}}$$

Nuestro problema para tuberías rugosas es el siguiente:

Obtener el valor del coeficiente de fricción  $f$  de una tubería de acero galvanizado ( $k=0.15\text{mm}$ ) de diámetro  $D = 200\text{mm}$  por la que circula agua a un Número de Reynolds  $\text{Re} = 5 * 10^6$ .

$$\text{Comenzamos calculando } \frac{3500}{\frac{k}{D}} = 4,6 * 10^6$$

Como vemos, se cumple que  $\text{Re} > \frac{3500}{\frac{k}{D}}$ . Estamos en la condición de aplicar nuestra ecuación, ya que nuestro  $\text{Re}$  es mayor.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{D}{2k} \right) + 1,74 \Rightarrow f = \left( 2 \log \left( \frac{D}{2k} \right) + 1,74 \right)^{-2}$$

$$f = \left( 2 \log \left( \frac{0,200}{2 * 0,150} \right) + 1,74 \right)^{-2}$$

$$f = 0,519200727458294$$

TABLA 1 DE SOLUCIONES

Número de iteraciones restringidas a 20

Re	Punto Fijo		Newton		Steffensen		Secante		Secante Modificada Alpha=0.99	
	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter
2.00E-05	0.01363952729958	14	0.01363952729958	14	0.01363952729958	3	0.01363952729958	3	0.01363952729958	4
3.00E-05	0.011646540648628	14	0.011646540648628	14	0.011646540648628	3	0.011646540648628	3	0.011646540648628	4
4.00E-05	0.013159738192800	14	0.013159738192800	14	0.013159738192800	3	0.013159738192800	3	0.013159738192800	4
5.00E-05	0.013159738192800	14	0.013159738192800	14	NaN	-	0.013159738192800	3	0.013159738192800	4
6.00E-05	0.012735161004583	14	0.012735161004583	14	0.012735161004583	3	0.012735161004583	3	0.012735161004583	4
7.00E-05	0.012391561975334	14	0.012391561975334	14	0.012391561975334	3	0.012391561975334	3	0.012391561975334	4
8.00E-05	0.012104724338628	14	0.012104724338628	13	0.012104724338628	3	0.012104724338628	3	0.012104724338628	4
9.00E-05	0.011859671738271	13	0.011859671738271	13	0.011859671738271	3	0.011859671738271	3	0.011859671738271	4
1.00E-06	0.011646540648628	13	0.011646540648628	13	0.011646540648628	3	0.011646540648628	3	0.011646540648628	4
2.00E-06	0.010374156894361	13	0.010374156894361	13	NaN	-	0.010374156894361	3	0.010374156894361	4
3.00E-06	0.009721944972460	13	0.009721944972460	13	NaN	-	0.009721944972460	3	0.009721944972460	4
4.00E-06	0.009294894488850	13	0.009294894488850	13	NaN	-	0.009294894488850	3	0.009294894488850	4
5.00E-06	0.008982266220231	13	0.008982266220231	13	0.008982266220231	3	0.008982266220231	3	0.008982266220231	4
6.00E-06	0.008738110719177	13	0.008738110719177	13	0.008738110719177	3	0.008738110719177	3	0.008738110719177	4
7.00E-06	0.008539178081248	13	0.008539178081248	13	0.008539178081248	3	0.008539178081248	3	0.008539178081248	4
8.00E-06	0.008372164254576	13	0.008372164254576	13	NaN	-	0.008372164254576	3	0.008372164254576	4
9.00E-06	0.00822835002724	13	0.00822835002724	13	0.00822835002724	3	0.00822835002724	3	0.00822835002724	4
1.00E-07	0.008105325217198	13	0.008105325217198	13	0.008105325217198	3	0.008105325217198	3	0.008105325217198	4
3.00E-07	0.00784831076628	13	0.00784831076628	12	0.00784831076628	3	0.00784831076628	3	0.00784831076628	4
5.00E-07	0.006948893172612	12	0.006948893172612	12	0.006948893172612	3	0.006948893172612	3	0.006948893172612	4

Figura 5.1: Tabla de soluciones. Iteraciones restringidas a 20.

Tabla 2 DE SOLUCIONES  
Número de iteraciones restringidas a 5

Re	Punto Fijo			Newton			Steffensen			Secante			Secante Modificada Alpha=0.99		
	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	
2.00E+05	0.0156395738051657	5	0.0156395738051657	5	0.0156395738051657	3	0.0156395738051657	3	0.0156395738051657	5	0.0156395738051657	5	0.0156395738051657	5	
3.00E+05	0.014465100466743	5	0.014465100466743	5	0.014465100466743	5	0.014465100466743	5	0.014465100466743	5	0.014465100466743	5	0.014465100466743	5	
4.00E+05	0.01370981291623	5	0.01370981291623	5	0.01370981291623	5	0.01370981291623	5	0.01370981291623	5	0.01370981291623	5	0.01370981291623	5	
5.00E+05	0.013159751408446	5	0.013159751408446	5	0.013159751408446	5	0.013159751408446	5	0.013159751408446	5	0.013159751408446	5	0.013159751408446	5	
6.00E+05	0.012735174267176	5	0.012735174267176	5	0.012735174267176	5	0.012735174267176	5	0.012735174267176	5	0.012735174267176	5	0.012735174267176	5	
7.00E+05	0.012391575204485	5	0.012391575204485	5	0.012391575204485	5	0.012391575204485	5	0.012391575204485	5	0.012391575204485	5	0.012391575204485	5	
8.00E+05	0.01204737492975	5	0.01204737492975	5	0.01204737492975	5	0.01204737492975	5	0.01204737492975	5	0.01204737492975	5	0.01204737492975	5	
9.00E+05	0.011859684816226	5	0.011859684816226	5	0.011859684816226	5	0.011859684816226	5	0.011859684816226	5	0.011859684816226	5	0.011859684816226	5	
1.00E+06	0.01164655599295	5	0.01164655599295	5	0.01164655599295	5	0.01164655599295	5	0.01164655599295	5	0.01164655599295	5	0.01164655599295	5	
2.00E+06	0.010374168795657	5	0.010374168795657	5	0.010374168795657	5	0.010374168795657	5	0.010374168795657	5	0.010374168795657	5	0.010374168795657	5	
3.00E+06	0.00972195609416	5	0.00972195609416	5	0.00972195609416	5	0.00972195609416	5	0.00972195609416	5	0.00972195609416	5	0.00972195609416	5	
4.00E+06	0.008982276319680	5	0.008982276319680	5	0.008982276319680	5	0.008982276319680	5	0.008982276319680	5	0.008982276319680	5	0.008982276319680	5	
5.00E+06	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	
6.00E+06	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	
7.00E+06	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	
8.00E+06	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	
9.00E+06	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	0.0083120451477	5	
1.00E+07	0.00734318348029	3	0.00734318348029	3	0.00734318348029	3	0.00734318348029	3	0.00734318348029	3	0.00734318348029	3	0.00734318348029	3	
3.00E+07	0.00694489943066	3	0.00694489943066	3	0.00694489943066	3	0.00694489943066	3	0.00694489943066	3	0.00694489943066	3	0.00694489943066	3	

Figura 5.2: Tabla de soluciones . Iteraciones restringidas a 5.

TABLA 3 DE SOLUCIONES

Número de iteraciones restringidas a 2

Re	Punto Fijo		Newton		Steffensen		Secante		Secante Modificada Alpha=0.99	
	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter
2.00E+05	0.01363109652584	2	0.01363123396786	2	0.01363957239974	2	0.013638645715653	2	0.013639395578613	2
3.00E+05	0.01462401838890	2	0.014445320458374	2	0.0144026083794374	2	0.014405220903570	2	0.014404821713282	2
4.00E+05	0.01462401838890	2	0.01462401838890	2	0.01462401838890	2	0.01462401838890	2	0.01462401838890	2
5.00E+05	0.0131463862647832	2	0.0131465746954104	2	0.0131597381820066	2	0.0131577051336888	2	0.013158450661869	2
6.00E+05	0.0127210866720453	2	0.0127213784498966	2	0.0127351610048474	2	0.0127353886020211	2	0.012734842538191	2
7.00E+05	0.01237693758681	2	0.0123771390346975	2	0.0123915619157113	2	0.012389072634055	2	0.012391235611681	2
8.00E+05	0.012088661334406	2	0.012088855226687	2	0.012104734339097	2	0.012102054318951	2	0.012104392200493	2
9.00E+05	0.011844253746925	2	0.011844447703488	2	0.011859671738830	2	0.011856843870163	2	0.011859335346981	2
1.00E+06	0.011630823026219	2	0.011631021727389	2	0.011646540649277	2	0.011643370343015	2	0.011646201052904	2
2.00E+06	0.009704248861986	2	0.009704427532858	2	0.009721944974645	2	0.009717387532661	2	0.009721604054918	2
3.00E+06	0.009276946344574	2	0.009277117505288	2	0.009294884491650	2	0.009290217086064	2	0.009294561355548	2
4.00E+06	0.008964181100023	2	0.008964346066801	2	0.008982266235331	2	0.008977543088200	2	0.008981940683381	2
5.00E+06	0.008719948149214	2	0.008720109452480	2	0.008738110729538	2	0.008735005337828	2	0.008737792959528	2
6.00E+06	0.00853293128282	2	0.008532183666653	2	0.008535143834824	2	0.00853287057446	2	0.00853886973283	2
7.00E+06	0.00835293128282	2	0.00835293128282	2	0.00835293128282	2	0.00835293128282	2	0.00835293128282	2
8.00E+06	0.00821654765976	2	0.00821668844721	2	0.00823785007624	2	0.008235296915784	2	0.00823848597264	2
1.00E+07	0.008085315377805	2	0.008085463785067	2	0.008105552377019	2	0.008097968345382	2	0.008103586638985	2
2.00E+07	0.0073271105338046	2	0.007327241646602	2	0.007345181083584	2	0.007339905538392	2	0.007344927349886	2
3.00E+07	0.006951027360684	2	0.006953114880404	2	0.006948893181723	2	0.00694253093941	2	0.006948665938953	2

Figura 5.3: Tabla de soluciones. Iteraciones restringidas a 2.



TABLA 4 DE SOLUCIONES  
Número de iteraciones restringidas a 1

Re	Punto Fijo		Newton		Steffensen		Secante		Secante Modificada Alpha=0.99	
	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter	Factor	Iter
2.00E+05	0.015171244028956	1	0.015171658119156	1	0.015659729923371	1	0.015666669079910	1	0.015300990594122	1
3.00E+05	0.014486973807821	1	0.014486992340149	1	0.0144464844967317	1	0.014502224415092	1	0.014102762142179	1
4.00E+05	0.013383015311055	1	0.01338222717024	1	0.01370853861977	1	0.013735856946689	1	0.013555820342242	1
5.00E+05	0.013294526236857	1	0.013295387512388	1	0.0131606461436713	1	0.01312468324160	1	0.01277668960328	1
6.00E+05	0.012879679706531	1	0.01287871814465	1	0.012736020060999	1	0.012795473435695	1	0.012346861665965	1
7.00E+05	0.012543895406572	1	0.012542908711888	1	0.012292542870973	1	0.012345474646900	1	0.011999602537014	1
8.00E+05	0.01226527344433	1	0.0122652676783957	1	0.0121058153583005	1	0.012171778976752	1	0.01170131749968	1
9.00E+05	0.012025943888011	1	0.012025944833805	1	0.01186868784171	1	0.011930263986508	1	0.011465145251387	1
1.00E+06	0.011815448346651	1	0.011814532414135	1	0.011647823587120	1	0.011720271273412	1	0.011248575816869	1
2.00E+06	0.010570310595681	1	0.010569288125399	1	0.01076101538165	1	0.010467729654440	1	0.009972645566998	1
3.00E+06	0.009931059938210	1	0.00993005415814	1	0.009724305661777	1	0.0092826325279884	1	0.009322238874832	1
4.00E+06	0.009512032882420	1	0.009511047769197	1	0.00929735906334	1	0.009406532481447	1	0.008897787861291	1
5.00E+06	0.009205007401940	1	0.009204040301548	1	0.008982166992394	1	0.009099287625021	1	0.008587821136286	1
6.00E+06	0.008965050900531	1	0.00896410003979	1	0.008741211319290	1	0.008859367656765	1	0.008346199021235	1
7.00E+06	0.008769415713362	1	0.008768479501984	1	0.00854244858287	1	0.00865900578836	1	0.008149631931997	1
8.00E+06	0.0086050738950047	1	0.008604152974047	1	0.008375717157893	1	0.008499802835182	1	0.007984816721456	1
9.00E+06	0.008463927961314	1	0.00846301706957	1	0.008323236025788	1	0.008358929485229	1	0.007843481976147	1
1.00E+07	0.008340586562333	1	0.008330686450956	1	0.008107208002666	1	0.00833885884403	1	0.00772015195803	1
2.00E+07	0.007592448713444	1	0.00759265178096	1	0.007348568699298	1	0.007490691548068	1	0.0069975783539716	1
3.00E+07	0.007200506670027	1	0.007199789168137	1	0.006953287811506	1	0.00710151215419	1	0.006588545264068	1

Figura 5.4: Tabla de soluciones . Iteraciones restringidas a 1.



## Capítulo 6

# CONCLUSIONES

Se ha hecho un recorrido histórico por la Mecánica de Fluidos hasta llegar a las Ecuaciones de Harman-Prandtl y en particular a su uso dentro de la Ingeniería Naval.

Estas ecuaciones se plantean tanto para el estudio de tuberías rugosas como de tuberías lisas.

Como ejemplo práctico, se han estudiado estas ecuaciones para los dos tipos de tuberías, pero en el caso de tuberías rugosas, la ecuación pierde su no linealidad por lo que ya no es interesante para nuestro estudio. Por lo que nos hemos centrado en resolver la ecuación de Karman-Prandtl para tuberías lisas.

Como la ecuación la ecuación de Karman-Prandtl para tuberías lisas es una ecuación no lineal, para resolverla hemos planteado una serie de métodos de resolución de ecuaciones no lineales. Para ellos hemos dado varios teoremas de convergencia. Estudiar la convergencia de un método es importante, ya que siempre que se utilizan se espera que encuentre solución y que ésta sea una buena aproximación.

Los métodos estudiados y comparados han sido los métodos de Newton, Tipo Secante, Secante modificado, Punto fijo y Tipo Steffensen.

Observando las tablas del apartado anterior para tuberías lisas, podemos llegar a las siguientes conclusiones:

- Como podemos observar, para la resolución de esta ecuación, no son nada eficientes los métodos de Punto Fijo y de Newton, ya que superan con creces el número de iteraciones que el resto de métodos que hemos utilizado.

- En cuanto al número de iteraciones, el método de Steffensen y el de Secante Modificada con  $\alpha = 0,99$  son los que se comportan mejor, ya que encuentran su solución entorno a las 3 o 4 iteraciones.



# Capítulo 7

## APÉNDICE

### 7.1. Lista de Símbolos

$\rho$  : Densidad de masa.

$H$  : Entalpía.

$\tau$  : Tensión del elemento diferencial.

$T$  : Temperatura.

$q_H$  : Fuente de calor.

$V$  : Velocidad del fluido en la sección considerada.

$P$  : Presión.

$g$  : Aceleración gravitatoria.  $9,81m/s^2$

$z$  : Altura en la dirección de la gravedad.

$Q$  : Caudal circulante.

$A$  : Área de la sección de la tubería.

$\alpha$  : Factor de corrección de energía cinética en tuberías.

$\gamma$  : Peso específico del fluido.  $\gamma = \rho.g$

$h_A$  : Energía añadida al fluido mediante un dispositivo mecánico, por ejemplo una bomba.

$h_R$  : Energía absorbida al fluido mediante un dispositivo mecánico, por ejemplo una turbina.

$h_L$  : Pérdida de energía la cual se compone de pérdidas por fricción y pérdidas singulares.

$h_f$  : Pérdida de carga debido a la fricción en la tubería.

$h_s$  : Pérdida local de energía debida a la presencia de válvulas y conectores.

$D$  : Diámetro de la tubería.

$\nu$  : Viscosidad cinemática del fluido.

$\mu$  : Viscosidad dinámica del fluido.

$f$  : Factor de fricción de Darcy.

$L$  : Longitud de la tubería.

$D_h$  : Diámetro Hidráulico.

$Re$  : Número de Reynolds.

$k$  : Rugosidad absoluta interior de la tubería.

$\delta_0$  : Espesor de la sub-capa laminar.

$k_0$  : Rugosidad de la tubería (Nueva).

$t$  : Tiempo.

$E$  : Módulo de elasticidad (módulo de Young) de la tubería que naturalmente depende del material de la misma.

$e$  : Espesor de las paredes de la tubería.

$C$  : Velocidad de la onda (velocidad relativa respecto al fluido) de sobrepresión o depresión en un golpe de ariete.

$P_v$  : Presión de vapor.

## 7.2. Tablas

### 7.2.1. Tabla para el coeficiente ( $a$ ) de la Ecuación de Genijew

GRUPO	COEFICIENTE ( $a$ )
Agua con poco contenido mineral que no origina corrosión. Agua con un pequeño contenido de materia orgánica y de solución de hierro.	$0,005 < a < 0,055$ Valor Medio = 0,025
Agua con poco contenido mineral que origina corrosión. Agua que contiene menos de 3 mg/l de materia orgánica y hierro en solución.	$0,055 < a < 0,18$ Valor Medio = 0,07
Agua que origina fuerte corrosión y con escaso contenido de cloruros y sulfatos (menos de 100 a 150 mg/l). Agua con un contenido de hierro de más de 3 mg/l.	$0,18 < a < 0,40$ Valor Medio = 0,20
Agua que origina corrosión, con un gran contenido de cloruros (más de 500 a 700 mg/l). Agua impura con una gran cantidad de materia orgánica.	$0,40 < a < 0,60$ Valor Medio = 0,51
Agua con cantidades importantes de carbonatos pero de dureza pequeña permanente. Con residuo denso de 2000 mg/l.	De 0,6 a más de 1

**7.2.2. Tabla de rugosidades absolutas**

MATERIAL	RUG. ABS. ( $k$ ) (en mm)
Acero Asfaltado	0,015
Acero Comercial	0,45
Acero Estirado sin Costura	0,025
Acero Galvanizado	0,15
Acero Laminado con Incrustaciones	1,5 a 3
Acero Laminado Nuevo	0,05
Acero Laminado Oxidado	0,15 a 0,25
Acero Remachado	0,9 a 9
Acero Soldado	0,60
Acero Soldado Oxidado	0,4
Bronce Laminado	0,0015
CCP	0,12
Cemento-Asbesto (Rokalit)	0,0125
Cemento Alisado	0,3 a 0,8
Cemento Bruto (Hormigón)	0,3 a 3
Fibra de Vidrio con Resina Epoxi	0,003
Fibrocemento	0,25 a 0,40
Fundición	0,26
Fundición Corriente Nueva (Hierro Colado)	0,25
Fundición Corriente Oxidada	1 a 1,5
Gres	0,10 a 0,25
GRP	0,03
Hierro Colado Asfaltado	0,12
Hierro dúctil	0,25



Hierro Dulce Asfaltado	0,12
Hierro Forjado	0,06
Hierro Fundido	0,15
Hierro Galvanizado	0,15
Hormigón	0,3 a 3
Hormigón Bituminoso	0,25
Hormigón Colado in situ	2,50 a 6,00
Hormigón colado in situ/ Encofrado Metálico	0,36
Hormigón Liso de Alta Calidad	0,40 a 0,80
Hormigón Liso de Media Calidad	0,80 a 1,50
Hormigón Prefabricado	0,3 a 3
Hormigón Rugoso	1,20 a 4,00
Latón Industrial	0,025
Latón estirado, Vidrio y Cobre	< 0,001 o Lisa
Madera	0,18 a 9
Metal Corrugado	20
Mortero Seco	1,25
Polietileno	0,007
PRFV	0,20 a 0,50
PVC	0,0015

**7.2.3. Tabla de propiedades del agua a distintas temperaturas y 1 atmósfera de presión**

$T(^{\circ}C)$	$\gamma (kN/m^3)$	$\rho (kg/m^3)$	$\mu (Pa \cdot s)$ $(N \cdot s/m^2)$	$\nu (m^2/s)$	$P\nu (kPa)$
0	9,81	1000	$1,75 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-6}$	0,61
5	9,81	1000	$1,52 \cdot 10^{-3}$	$1,52 \cdot 10^{-6}$	
10	9,81	1000	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$1,30 \cdot 10^{-6}$	1,13
15	9,81	1000	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$1,15 \cdot 10^{-6}$	
20	9,79	998	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-6}$	2,34
25	9,78	997	$8,91 \cdot 10^{-4}$	$8,94 \cdot 10^{-7}$	
30	9,77	996	$8,00 \cdot 10^{-4}$	$8,03 \cdot 10^{-7}$	4,24
35	9,75	994	$7,18 \cdot 10^{-4}$	$7,22 \cdot 10^{-7}$	
40	9,73	992	$6,51 \cdot 10^{-4}$	$6,56 \cdot 10^{-7}$	7,38
45	9,71	990	$5,94 \cdot 10^{-4}$	$6,00 \cdot 10^{-7}$	
50	9,69	988	$5,41 \cdot 10^{-4}$	$5,48 \cdot 10^{-7}$	12,3
55	9,67	986	$4,98 \cdot 10^{-4}$	$5,05 \cdot 10^{-7}$	
60	9,65	984	$4,60 \cdot 10^{-4}$	$4,67 \cdot 10^{-7}$	19,9
65	9,62	981	$4,31 \cdot 10^{-4}$	$4,39 \cdot 10^{-7}$	
70	9,59	978	$4,02 \cdot 10^{-4}$	$4,11 \cdot 10^{-7}$	31,2
75	9,56	975	$3,73 \cdot 10^{-4}$	$3,83 \cdot 10^{-7}$	
80	9,53	971	$3,51 \cdot 10^{-4}$	$3,61 \cdot 10^{-7}$	47,2
85	9,50	968	$3,30 \cdot 10^{-4}$	$3,41 \cdot 10^{-7}$	
90	9,47	965	$3,11 \cdot 10^{-4}$	$3,22 \cdot 10^{-7}$	70,1
95	9,44	962	$2,93 \cdot 10^{-4}$	$3,05 \cdot 10^{-7}$	
100	9,40	958	$2,82 \cdot 10^{-4}$	$2,94 \cdot 10^{-7}$	101,3

**7.2.4. Tabla de propiedades de los líquidos comunes a 1 atmósfera y 20°C**

TIPO DE LÍQUIDO	$\gamma$ ( $kN/m^3$ )	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	$\mu$ ( $Pa*s$ ) ( $N*s/m^2$ )	$\nu$ ( $m^2/s$ )
Acetona	7,72	787	$3,16 \cdot 10^{-4}$	$4,02 \cdot 10^{-7}$
Alcohol Etilico	7,72	787	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$1,27 \cdot 10^{-6}$
Alcohol Metílico	7,74	789	$5,60 \cdot 10^{-4}$	$7,10 \cdot 10^{-7}$
Alcohol Propílico	7,87	802	$1,92 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-6}$
Amoniaco	8,10	826	$2,20 \cdot 10^{-4}$	
Benceno	8,59	876	$6,30 \cdot 10^{-4}$	$7,19 \cdot 10^{-7}$
Aceite de Ricino	9,42	960	$6,51 \cdot 10^{-1}$	$6,78 \cdot 10^{-4}$
Etilenglicol	10,49	1100	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-5}$
Gasolina	6,67	680	$2,87 \cdot 10^{-4}$	$4,22 \cdot 10^{-7}$
Glicerina	12,34	1258	$9,60 \cdot 10^{-1}$	$7,63 \cdot 10^{-4}$
Queroseno	8,07	823	$1,64 \cdot 10^{-3}$	$1,99 \cdot 10^{-6}$
Aceite de Linaza	9,12	930	$3,31 \cdot 10^{-2}$	$3,56 \cdot 10^{-5}$
Mercurio	132,80	13540	$1,53 \cdot 10^{-3}$	$1,13 \cdot 10^{-7}$
Propano	4,86	495	$1,10 \cdot 10^{-4}$	$2,22 \cdot 10^{-7}$
Agua de Mar	10,10	1030	$1,03 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-6}$
Trementina	8,53	870	$1,37 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-6}$
Aceite Petróleo Medio	8,36	582	$2,99 \cdot 10^{-3}$	$5,14 \cdot 10^{-6}$
Aceite Petróleo Pesado	8,89	906	$1,07 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-7}$

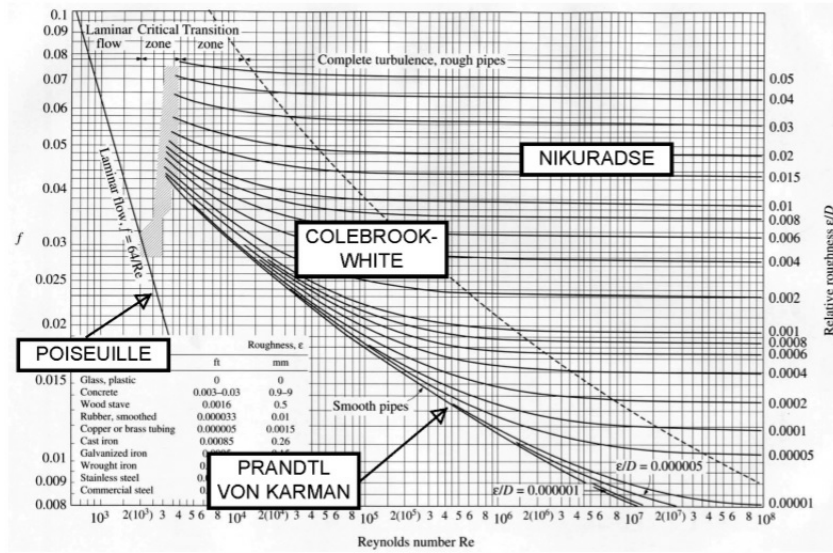
**7.2.5. Tabla para el cálculo analítico del Coeficiente de Fricción en conductos**

TUBERÍAS	RÉGIMEN	ECUACIÓN	AUTOR
Lisas y Rugosas	Laminar	$f = \frac{64}{\text{Re}}$	Hagen-Poiseuille
Lisas	Turbulento $\text{Re} < 10^5$	$f = \frac{0,316}{\text{Re}^{\frac{1}{4}}}$	Blasius
Lisas	Turbulento $\text{Re} > 10^5$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log (\text{Re} \sqrt{f}) - 0,8$	Karman-Prandtl (Primera Ecuación)
Rugosas	Turbulento $\text{Re} < \frac{3500}{\frac{k}{D}}$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k}{3,7D} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$	Colebrook-White
Rugosas	Turbulento $\text{Re} > \frac{3500}{\frac{k}{D}}$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left( \frac{D}{2k} \right) + 1,74$	Karman-Prandtl (Segunda Ecuación)

**7.2.6. Tabla de longitudes equivalentes adimensionales**

PIEZA	$L_e/D$
Válvula de Compuerta	8
Válvula de Globo	340
Válvula de Ángulo	150
Válvula de Bola	3
Válvula de Retención de Bola	600
Válvula de Retención de Disco	55
Válvula de Disco con Muelles	420
Válvula de Disco Articulado	75
Codo Normal a 90°	30
Codo Normal a 45°	16
Codo de Retorno 180°	50
T. Normal Flujo Directo	20
T. Normal Flujo Derivado	60

### 7.3. Diagrama de Moody



## Capítulo 8

# BIBLIOGRAFÍA

[1] Apuntes de la asignatura de Mecánica de Fluidos. Curso Académico: 2010-2011. Profesor: Manuel M. Sánchez Nieto.

[2] Mecánica de Fluidos: Antecedentes y Actualidad.. Noviembre 2002. Jorge García Sosa, Armando Morales Burgos y Eduardo José Escalante Triay. Editorial UADY.

[3] Ingeniería Fluidomecánica. Universidad de Valladolid, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial. 2002. Nicolás García Tapia.

[4] Mecánica de Fluidos Aplicada (4ª edición). Robert L. Mott (1996). México, Pearson Educación.

[5] Explicit Equation for Pipe-Flow Problems. Swamee, P, Jain Journal of the Hydraulics División, Vol 102, No. HY 5, (May 1979).

[6] Hidráulica General. Volumen 1. (1996). Gilberto Sotelo Ávila. Editorial Limusa.

[7] Mecánica de los Fluidos, Octava Edición. V. Streeter, E. Wylie. (1988). Mc Graw Hill, México D. F. México.

[8] Genetic Algorithms for Least-Cost design of Water Distributions Networks. D. Savic and A. Godfrey. (1994). School of Engineering University of Exeter, United Kingdom.

[9] Pipe Lene Rules of Thumb Handbook. E. Mc Allister. (1987). Gulf Publishing Company. Houston, Estados Unidos.

[10] An Explicit Equation for Friction Factor in Pipe. N. Chen. (1979). Industrial Engineering and Chemical Fundamentals. Vol. 18. No 3.

[11] Friction Factors for Pipe Flow. L. F. Moody. (1944). Transactions of the ASME.

[12] Flujo en Tuberías. Luis Emilio Pardo Aluma. (2000). Universidad Tecnológica del Chocó.

[13] Manual de Hidráulica. Horance Williams King. Editorial Hispano Americana. Primera edición.

[14] Métodos Numéricos. J. D. Faires, R. Burden. 2003. Editorial Thomson

[15] Sonia Busquier Sáez. Métodos Iterativos de Alto Orden y Aplicaciones. (2003). Universidad Politécnica de Cartagena.

[16] A Convergence Theorem for Newton-Like Methods Under Generalized Chen-Yamamoto-Type Assumptions, Appl. Math. Comput. 61. I. K. Argyros. (1994).

[17] Las Diferencias Divididas en la Aproximación de Raíces para Operadores No Diferenciables. M. A. Hernández y M. J. Rubio. (2001) Actas VII CEDYA - IV CMA, Salamanca.

[18] The Majorant Method in the Theory of Newton-Kantorovich Approximation and the Ptak Error Estimates. (1987). P. P. Zabrejko and D. F. Nguen. Numer. Funct. Anal. Optimiz., 9.

[19] A Modification of the Kantorovich Conditions for the Secant Method. (2001). M. A. Hernández and M. J. Rubio. Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics, 1.

[20] The Secant Method and Divided Differences Hölder Continuous. (2001). M. A. Hernández and M. J. Rubio. Appl. Math. Comput.

[21] Nondiscrete Induction and Iterative Processes. Research Notes in Mathematics. (1984) F. A. Potra and V. Pták. N.103, Ed. Boston: Pitman.

[22] Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press. (1960). A. M. Ostrowski. New York and London.

[23] Iterative Methods for the Solution of Equations. (1964). J. F. Traub. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[24] Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. (1970) J.M. Ortega and W.C. Rheinboldt. Ed. New York: Academic Press.



- [25] Toward a Unified Convergence Theory for Newton-Like Methods, Non-linear Functional Anal. and Appl. J. E. Dennis. (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1970), Academic Press, Nueva York (1971).
- [26] A New Type of Recurrence Relations for the Secant Method. (1999). M. A. Hernández y M. J. Rubio. *Int. J. Comput. Math.* 2.
- [27] Funcional analysis. (1982) L. V. Kantorovich y G. P. Akilov. Pergamon Press, Nueva York.
- [28] Nondiscrete Induction and Iterative Processes. (1984). F. A. Potra y V. Ptak. Pitman Publ. Nueva York.
- [29] A Unified Convergence Theory for a Class of Iterative Processes. (1968). W. C. Rheinboldt. *SIAM J. Numer. Anal.* 5.
- [30] Resolución mediante la aplicación de diferentes métodos numéricos de la ecuación de Colebrook-White. (2009) PFC; M<sup>a</sup> Ángeles Peña Oquendo. Universidad Politécnica de Cartagena.