

# Un procedimiento simple para el cálculo numérico de las funciones de Green para circuitos apantallados en cavidades cilíndricas

Pedro Vera Castejón

Tecnologías de la Información y las Comunicaciones  
Universidad Politécnica de Cartagena  
e-mail: pveracas@ono.com

Alejandro Alvarez Melcón

Tecnologías de la Información y las Comunicaciones  
Universidad Politécnica de Cartagena  
e-mail: alejandro.alvarez@upct.es

**Abstract**—This paper presents a simple and effective technique for the numerical calculation of the Green's Functions in Cylindrical shaped enclosures. The technique is based on the numerical imposition of the boundary conditions for the fields at the cylindrical walls, using the theory of images. The practical value of the approach derived is in that the resulting Green's functions can be used inside Integral Equation solvers for the analysis of printed circuits and cavity backed antennas shielded by cylindrical enclosures. Numerical results for the Green's functions inside a cylindrical cavity are presented, including convergence test of the algorithm. Results show that numerical convergence is attained fast, therefore demonstrating the usefulness of the developed algorithm.

## I. INTRODUCCIÓN

El análisis de circuitos apantallados y antenas en cavidad es un tema que ha atraído recientemente la atención de muchas investigaciones [1], [2]. Para el análisis de estas estructuras, las técnicas puramente numéricas tales como elementos finitos, diferencias finitas o el método de la matriz de la línea de transmisión son habitualmente usados [3]. Sin embargo, técnicas basadas en la ecuación integral han crecido en popularidad debido a su eficiencia, y a la posibilidad de formular parte del problema mediante procedimientos analíticos [4]. La parte importante de cualquier técnica de ecuación integral es la formulación de las funciones de Green del problema. En el caso de estructuras a cavidad, la clave está en utilizar funciones de Green que ya tengan en cuenta la presencia del entorno apantallado. Sólo en este caso el tratamiento numérico de la estructura se reduce al circuito impreso en sí mismo, reduciendo de esta forma el tamaño del problema numérico a resolver.

Para el cálculo de las funciones de Green de cavidades, solamente estructuras en guía rectangular han sido extensamente tratadas en el pasado. Para esta geometría las funciones de Green normalmente se expresan usando formulaciones en el dominio espectral, con series que contienen las funciones modales vectoriales dentro de la cavidad, y que convergen muy lentamente. Sin embargo, se han publicado recientemente intentos para calcularlas usando formulaciones en el dominio espacial [5], donde las funciones de Green están expresadas como series de imágenes espaciales, aunque también su con-

vergencia es lenta. En cualquier caso, las series de convergencia lenta deben ser tratadas con algoritmos especiales para su eficiente evaluación [6], [7].

Debido a este particular formalismo matemático de las funciones de Green dentro de cavidades, la geometría circular ha sido hasta ahora menos explorada. Sin embargo, el entorno cilíndrico es ampliamente usado en circuitos MMIC, y en antenas de cavidad [8]. En general, las formulaciones de las funciones de Green en geometrías circulares están basadas en técnicas de dominio espectral, y utilizan las correspondientes series modales vectoriales usando las conocidas funciones de Bessel [9]. Sin embargo, esta aproximación se muestra crítica desde el punto de vista numérico, ya que las funciones de Bessel de mayor orden no son fáciles de calcular. También, ya que la convergencia de las series es lenta, se requieren normalmente órdenes muy altos de las funciones de Bessel. Por otro lado, las formulaciones en el dominio espacial no han sido aplicadas al cálculo de las funciones de Green en geometrías cilíndricas. Esto se debe principalmente a que una solución analítica para las imágenes espaciales de una carga puntual en presencia de una estructura metálica cilíndrica no existe.

En este contexto, el artículo presenta una técnica nueva que puede ser usada para el cálculo de las funciones de Green en cavidades cilíndricas. La técnica se formula por primera vez en el dominio espacial, y usa la teoría de las imágenes para forzar las condiciones de contorno para los campos. La idea clave del enfoque, entonces, es usar la teoría de las imágenes con respecto a planos tangentes infinitos a las paredes del cilindro, y entonces calcular la influencia de las imágenes para que las condiciones de contorno se satisfagan en puntos discretos de la pared metálica. En este artículo la técnica se aplica al cálculo numérico de las funciones de Green dentro de una cavidad cilíndrica vacía. Su extensión, sin embargo, para considerar capas dieléctricas dentro de la cavidad es directa sin más que utilizar la formulación para estructuras multicapa [10].

## II. TEORÍA

La geometría para el cálculo de las funciones de Green asociadas a los potenciales auxiliares se presenta en la Fig. 1.

Como se muestra, un dipolo unitario se sitúa dentro de una

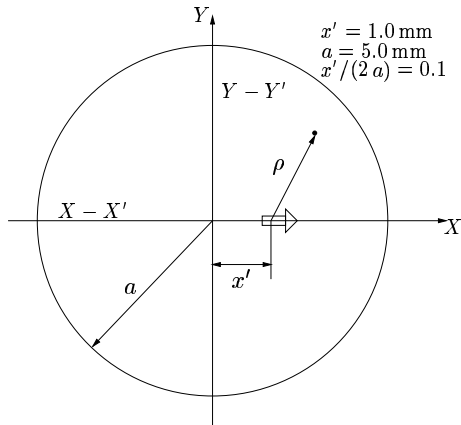


Fig. 1. Dipolo elemental dentro de una cavidad cilíndrica.

cavidad cilíndrica metálica. Para la función de Green del potencial eléctrico escalar debemos imponer potencial nulo sobre la pared de la cavidad. Si imponemos esta condición en sólo un punto de la pared, entonces una elección apropiada será situar un plano tangente infinito en la pared cilíndrica en el punto de interés, y entonces por la teoría de las imágenes tomar una carga negativa en la posición simétrica respecto al plano (ver Fig. 2). El potencial total producido por la carga

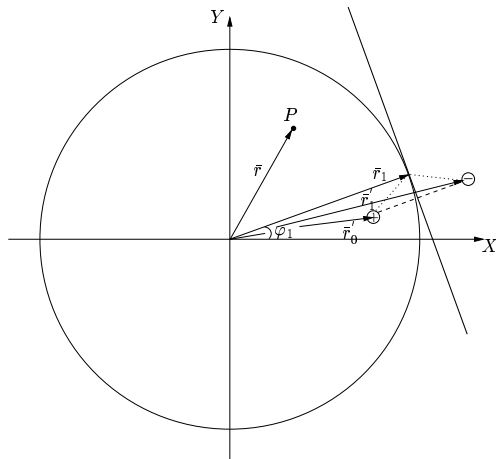


Fig. 2. Carga imagen utilizada cuando se fuerza la condición de contorno en un punto de la pared metálica.

original y su imagen va a satisfacer la condición de contorno en exactamente un punto de la pared cilíndrica (Fig. 2):

$$G_{V_{\text{cyl}}}(\vec{r}) = G_V(\vec{r}, \vec{r}'_0) - G_V(\vec{r}, \vec{r}'_1) \quad (1)$$

donde todos los vectores de posición se muestran en la Fig. 2. En este caso,  $G_{V_{\text{cyl}}}(\vec{r})$  es la función de Green del potencial escalar dentro de la cavidad cilíndrica, y  $G_V(\vec{r}, \vec{r}')$  es la función de Green asociada a una carga puntual unitaria. Por ejemplo, en espacio libre tenemos:

$$G_V(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2)$$

Lo interesante es que en lugar de la función de Green de espacio libre podemos utilizar una función de Green de tipo Sommerfeld para considerar un medio multicapa. De esta forma, y con un grado de complejidad similar, podremos analizar circuitos multicapa apantallados en cavidades cilíndricas.

Es deseable, sin embargo, poder imponer las condiciones de contorno en más de un punto de la pared cilíndrica. Para hacerlo así continuamos con la misma estrategia, y ahora tomamos dos planos tangentes a la cavidad cilíndrica, para imponer las condiciones de contorno en dos puntos distintos. De forma similar como antes, tomaremos las imágenes con respecto a los dos planos tangentes correspondientes, tal y como se muestra en la Fig. 3. Si las condiciones de contorno

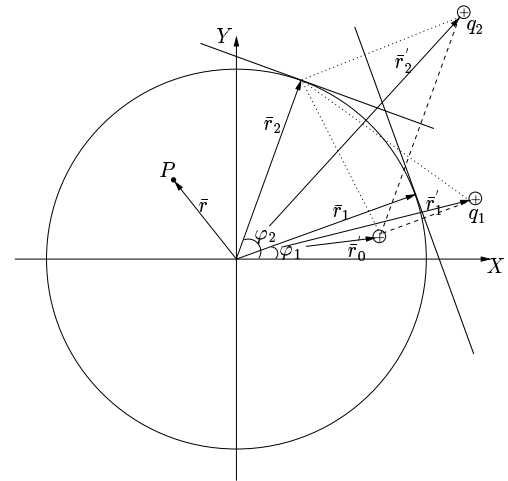


Fig. 3. Cargas imágenes cuando se fuerza la condición de contorno en varios puntos de la pared metálica.

en los dos puntos tangentes tienen que imponerse de forma simultánea, no podemos seleccionar fácilmente el valor de las cargas imágenes. El punto clave del procedimiento está en evaluar numéricamente el valor de las dos cargas imágenes para que las condiciones de contorno para el potencial se satisfagan en los dos puntos tangentes seleccionados, y de manera simultánea.

Para ilustrar el procedimiento primero tomamos el potencial producido por el sistema formado con la carga original y sus dos cargas imágenes (Fig. 3):

$$G_{V_{\text{cyl}}}(\vec{r}) = G_V(\vec{r}, \vec{r}'_0) + q_1 G_V(\vec{r}, \vec{r}'_1) + q_2 G_V(\vec{r}, \vec{r}'_2) \quad (3)$$

donde las incógnitas del sistema son los valores de las cargas imágenes:  $q_1$  y  $q_2$ . Ahora podemos plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas imponiendo un potencial nulo en los dos puntos tangentes:  $G_{V_{\text{cyl}}}(\vec{r}_1) = 0$ ,  $G_{V_{\text{cyl}}}(\vec{r}_2) = 0$ . Procediendo de esta forma resulta:

$$q_1 G_V(\vec{r}_1, \vec{r}'_1) + q_2 G_V(\vec{r}_1, \vec{r}'_2) = -G_V(\vec{r}_1, \vec{r}'_0) \quad (4a)$$

$$q_1 G_V(\vec{r}_2, \vec{r}'_1) + q_2 G_V(\vec{r}_2, \vec{r}'_2) = -G_V(\vec{r}_2, \vec{r}'_0) \quad (4b)$$

El mismo procedimiento puede ahora generalizarse para imponer la condición de contorno apropiada para el potencial en  $N$  puntos distintos de la pared cilíndrica. Procediendo de

la forma indicada podemos fácilmente obtener el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^N q_i G_V(\bar{r}_j, \bar{r}_i') = -G_V(\bar{r}_j, \bar{r}_0'); \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

La solución de este sistema da el valor de las  $N$  cargas imágenes  $q_i$  necesarias para satisfacer las condiciones de contorno para el potencial en  $N$  puntos distintos de la pared cilíndrica. La función final de Green del potencial escalar dentro de la cavidad cilíndrica se calcula ahora reutilizando los valores de las cargas halladas, dentro de la siguiente expresión:

$$G_{V_{\text{cyl}}}(\bar{r}) = G_V(\bar{r}, \bar{r}_0') + \sum_{i=1}^N q_i G_V(\bar{r}, \bar{r}_i') \quad (6)$$

Para la evaluación de la función diádica de Green del potencial vector magnético se sigue un procedimiento similar, pero teniendo en cuenta su naturaleza vectorial. Es decir deberemos tratar de forma conveniente cada componente del vector con respecto de la pared cilíndrica. En la conferencia de darán detalles sobre los pasos que se requieren para la formulación del potencial vector magnético (que por falta de espacio no pueden incluirse ahora).

### III. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El procedimiento descrito en la sección previa ha sido implementado para el cálculo numérico de las funciones de Green dentro de la estructura mostrada en la Fig. 1. Primero, el algoritmo ha sido testeado en la evaluación del potencial escalar estático. La Fig. 4 muestra una comparación entre el potencial escalar calculado (a lo largo del corte X-X' de la Fig. 1), y el potencial dentro de una esfera de igual radio, cuya solución analítica es conocida [11]. Puede verse

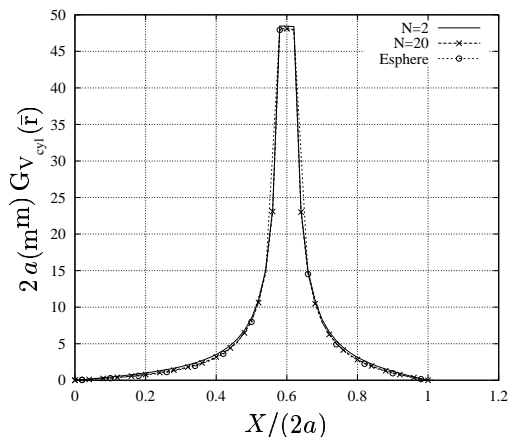


Fig. 4. Comparación para el potencial eléctrico estático entre el nuevo algoritmo y la solución analítica en una esfera.

que ambas soluciones satisfacen las condiciones de contorno en la pared metálica, y que son muy similares en los dos casos. La figura también muestra la convergencia numérica del algoritmo, presentando los resultados obtenidos cuando las condiciones de contorno se imponen en 2 y 20 puntos

de la pared de la cavidad. Puede verse que la convergencia se alcanza rápido, ya que los resultados numéricos obtenidos en ambos casos son muy similares.

Para comprobar el comportamiento numérico de la técnica cuando la frecuencia crece, presentamos en la Fig. 5 la función de Green para el potencial eléctrico escalar a lo largo del corte X – X' de la Fig. 1, y a una frecuencia de 30 GHz. La figura muestra los resultados obtenidos cuando 2, 20 y 30

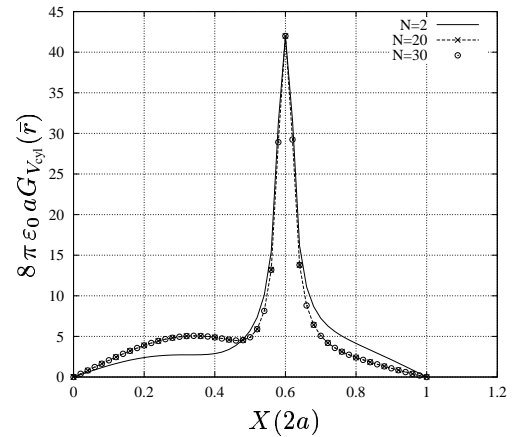


Fig. 5. Potencial eléctrico escalar a 30 GHz.

puntos son usados para imponer las condiciones de contorno. Puede observarse que los resultados con 20 y 30 puntos son muy similares, mostrando que la convergencia ha sido alcanzada. Finalmente, en Fig. 6 los mismos resultados son comparados con la función de Green obtenida dentro de una cavidad cuadrada de longitud igual al diámetro del cilindro. El potencial escalar eléctrico dentro de la cavidad cuadrada

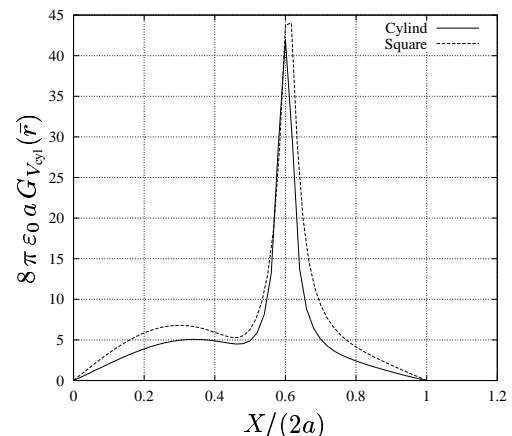


Fig. 6. Comparación entre el potencial eléctrico escalar en una cavidad cilíndrica y en una cavidad cuadrada equivalente.

es evaluado siguiendo la técnica descrita en [6], mientras que dentro del cilindro usamos la técnica descrita en este artículo. Puede verse que el comportamiento del potencial es muy similar en ambos casos. En particular, ambos presentan el mismo comportamiento de onda estacionaria dentro de la cavidad, y las condiciones de contorno están en ambos

casos satisfechas en su pared. Las diferencias entre los dos potenciales se deben a los efectos de la curvatura de la pared de la cavidad cilíndrica, que no están presentes en el caso de la cavidad cuadrada.

Resultados similares se presentan en Fig. 7 para la componente  $G_{A_{cyl}}^{xx}(\vec{r})$  de la función de Green diádica del potencial vector magnético. Otra vez los resultados se presentan cuando

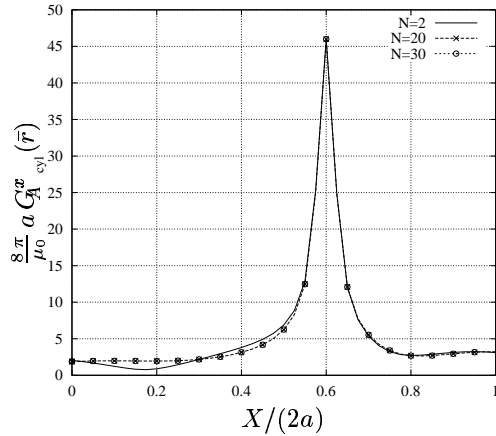


Fig. 7. Componente  $G_{A_{cyl}}^{xx}(\vec{r})$  del potencial vector magnético dentro de la cavidad cilíndrica.

2, 20 y 30 puntos son usados para forzar las condiciones de contorno. También en este caso la convergencia se alcanza con 20 puntos, mostrando la efectividad del método desarrollado. Como antes, la Fig. 8 compara estos resultados con los obtenidos dentro de una cavidad cuadrada de longitud lateral igual al diámetro del cilindro. Se puede ver que el

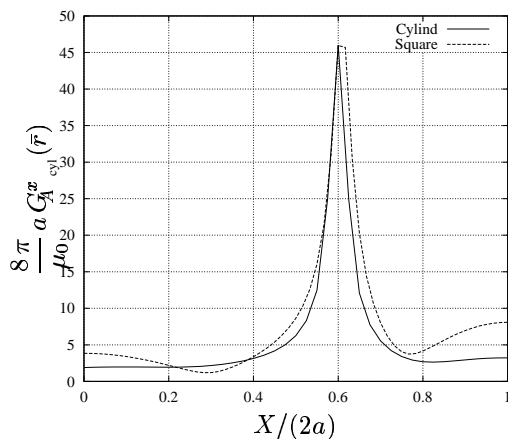


Fig. 8. Comparación para la componente  $G_{A_{cyl}}^{xx}(\vec{r})$  del potencial vector magnético en una cavidad cilíndrica y en una cavidad cuadrada equivalente.

comportamiento de ambos potenciales son muy similares, siendo las diferencias debidas a la curvatura de la cavidad cilíndrica. En particular, se puede ver que el potencial no se hace nulo en la pared, ya que en el eje X-X' la componente calculada es normal a la superficie metálica (y no tangencial).

Cuando los cálculos se realizan a lo largo del eje Y-Y' de la Fig. 1, obtenemos los resultados presentados en la Fig. 9.

En este caso la componente calculada es tangente a la pared

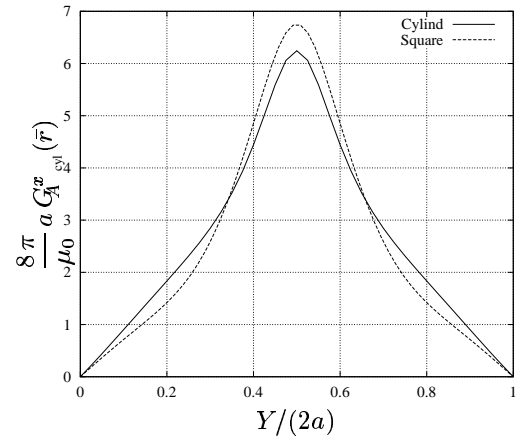


Fig. 9. Componente  $G_{A_{cyl}}^{xx}(\vec{r})$  del potencial vector magnético a lo largo del corte Y-Y' de la Fig. 1.

metálica, y como se aprecia se hace nula allí. También en este caso podemos observar que la componente calculada del vector potencial magnético es muy similar dentro de la cavidad cilíndrica y dentro de la cavidad cuadrada.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado gracias a los proyectos nacionales ESP2001-4546-PE, TIC2000-0591-C03-03 y proyecto Séneca 2003.

#### REFERENCES

- [1] A. K. Verma and R. Kumar, "Closed form dispersion expressions for a shielded microstrip line for millimeter wave applications," *Electronics Letters*, vol. 32, pp. 1378–1380, July 1996.
- [2] J. A. Navarro, K. Chang, J. Tolleson, S. Sanzgiri, and R. Q. Lee, "A 29.3-GHz cavity-enclosed aperture-coupled circular-patch antenna for microwave circuit integration," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 1, pp. 170–171, July 1991.
- [3] J.-M. Jin and J. L. Volakis, "A finite element-boundary integral formulation for scattering by three-dimensional cavity-backed apertures," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, pp. 97–104, January 1991.
- [4] G. G. Gentili, L. E. Garcia-Castillo, M. Salazar-Palma, and F. Perez-Martinez, "Green's function analysis of single and stacked rectangular microstrip patch antennas enclosed in a cavity," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, pp. 573–579, April 1997.
- [5] A. A. Melcon and J. R. Mosig, "A novel spatial images technique for the analysis of cavity backed antennas," *ACES, Applied Computational Electromagnetics Society*, vol. 14, March 1999.
- [6] A. A. Melcon and J. R. Mosig, "Two techniques for the efficient numerical calculation of the green's functions for planar shielded circuits and antennas," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 48, pp. 1492–1504, September 2000.
- [7] G. V. Eleftheriades, J. R. Mosig, and M. Guglielmi, "A fast integral equation technique for shielded planar circuits defined on nonuniform meshes," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, pp. 2293–2296, December 1996.
- [8] F. Zavosh and J. T. Aberle, "Single and stacked circular microstrip patch antennas backed by a circular cavity," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, pp. 746–750, July 1995.
- [9] K. W. Leung and K. Y. Chow, "Analysis of hemispherical cavity-backed slot antenna," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 32, pp. 1430–1431, August 1996.
- [10] K. A. Michalski and J. R. Mosig, "Multilayered media green's functions in integral equation formulations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, pp. 508–519, March 1997.
- [11] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley and Sons, 1989.